

TOPOLOGÍAS PRIMALES

ANGIE NATALIA VALERO PAEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

TOPOLOGÍAS PRIMALES

ANGIE NATALIA VALERO PAEZ

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2025

DEDICATORIA

A todas las variables que encontré en el camino y que aportaron al resultado final de este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de este proceso. A mi director, el doctor Carlos Uzcátegui, por su guía y valiosos consejos durante la realización de esta tesis. A los profesores que me acompañaron a lo largo de mi formación de pregrado, por compartir sus conocimientos. Finalmente, agradezco a mis compañeros, cuya compañía hizo este recorrido más llevadero.

CONTENIDO

	pág.
Introducción	9
1 Topologías Alexandroff	11
1.1 Topologías Alexandroff	11
1.2 Cuasi-órdenes	12
2 Topologías primales	19
2.1 Caracterización de los espacios primales	24
2.2 Otras propiedades de los espacios primales	32
2.3 Producto de espacios primales	40
Bibliografía	50

LISTA DE FIGURAS

	pág.
2.1 Ejemplo de topología primal.	21
2.2 Ejemplo de topología primal $\mathcal{A} = \tau_f$	22
2.3 $(\{0, 1\}^{<\omega}, \lesssim)$	23
2.4 Subespacios no permitidos en una topología primal.	23
2.5 Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ)	37
2.6 Comportamiento de f	37
2.7 Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ)	38
2.8 Comportamiento de f	38
2.9 Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ)	39
2.10 Comportamiento de f	39

RESUMEN

TÍTULO: TOPOLOGÍAS PRIMALES *

AUTOR: ANGIE NATALIA VALERO PAEZ **

PALABRAS CLAVE: TOPOLOGÍA ALEXANDROFF, CUASI-ORDEN DE ESPECIALIZACIÓN, TOPOLOGÍA PRIMAL, PRODUCTO DE TOPOLOGÍAS PRIMALES.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo principal de esta tesis es estudiar las topologías primales. Un espacio topológico (X, τ) es **primal**, si existe una función $f : X \rightarrow X$ tal que los conjuntos τ -cerrados son aquellos $A \subseteq X$ tales que $f(A) \subseteq A$. Cabe resaltar que dicha función no es necesariamente única. Un aspecto fundamental de estos espacios es que toda topología primal es de **Alexandroff**, lo que motivó el estudio preliminar de estas topologías.

Un espacio topológico es de **Alexandroff**, si la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta. Una caracterización fundamental de estos espacios establece que, (X, τ) es de Alexandroff si y solo si cada punto de X tiene una vecindad minimal. Además, a cada espacio de Alexandroff (X, τ) se le asocia un cuasi-orden \lesssim_τ , conocido como el **cuasi-orden de especialización**, definido por la relación: sean $x, y \in X$, $x \lesssim_\tau y$ si y solo si $x \in cl\{y\}$.

En esta tesis, estudiamos dos caracterizaciones de las topologías primales. La primera está basada en el **cuasi-orden de especialización**, mientras que la segunda utiliza las vecindades minimales. Aunque fueron planteadas de manera independiente por distintos autores, ambas caracterizaciones resultan ser equivalentes.

Por último, estudiamos el **producto de espacios primales**, ya que, en general, no conserva la propiedad de ser primal. Presentamos un teorema que establece las condiciones bajo las cuales el producto arbitrario de topologías primales es primal y otro que aborda específicamente el caso finito.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: PRIMAL TOPOLOGIES *

AUTHOR: ANGIE NATALIA VALERO PAEZ **

KEYWORDS: ALEXANDROFF TOPOLOGY, THE SPECIALIZATION QUASIORDER, PRIMAL TOPOLOGY, PRODUCT OF PRIMAL TOPOLOGIES.

DESCRIPTION:

The main goal of this thesis is to study primal topologies. A topological space (X, τ) is **primal**, if there exists a function $f : X \rightarrow X$ such that the τ -closed sets are precisely those subsets $A \subseteq X$ for which $f(A) \subseteq A$. It should be noted that such a function is not necessarily unique. A fundamental characterization of these spaces is that every primal topology is **Alexandroff**, which motivated the preliminary study of these topologies.

A topological space is **Alexandroff**, if the arbitrary intersection of open sets is open. A key characterization of these spaces states that, (X, τ) is Alexandroff if and only if every point of X has a minimal neighborhood. Furthermore, each Alexandroff space (X, τ) is associated with a quasi-order \lesssim_τ , known as the **specialization quasiorder**, defined as follows: let $x, y \in X$, $x \lesssim_\tau y$ if and only if $x \in cl\{y\}$.

In this thesis, we study two characterizations of primal topologies. The first is based on the **specialization quasiorder**, and the second uses minimal neighborhoods. Although they were proposed independently by different authors, both characterizations are equivalent.

Finally, we study the **product of primal spaces**, since, in general, it does not preserve the primal property. We present a theorem that establishes the conditions under which the arbitrary product of primal topologies remains primal, as well as another theorem that specifically addresses the finite case.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Introducción

Un espacio topológico (X, τ) es de **Alexandroff**, si la intersección de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. Este concepto fue introducido inicialmente por P. S. Alexandroff en 1937 con el nombre de “espacios discretos”, también se conocen como espacios principales o A-espacios. Estos espacios han recibido recientemente bastante atención por su relevancia para topología digital y las ciencias computacionales.

En el 2011, Shirazi y Golestani ¹ definieron un tipo especial de espacios de Alexandroff de la siguiente manera. Dada $f : X \rightarrow X$ una función, considere $f^* : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f^*(x) = \bigcup \{f^{-n}(x) : n \geq 0\}$. La topología **funcional Alexandroff** (asociada a f) es la topología generada por la base $\{f^*(x) : x \in X\}$. En el 2012, Echi ² de manera independiente definió el mismo concepto desde otra perspectiva. Un espacio topológico (X, τ) será **primal**, si existe una función $f : X \rightarrow X$ tal que sus conjuntos cerrados son los f -invariantes, es decir, aquellos $A \subseteq X$ tales que $f(A) \subseteq A$. Cabe destacar que la función asociada f no es necesariamente única; sin embargo, si (X, τ_f) es T_0 , entonces f es única. En general, no existe una caracterización completa sobre cuándo la función asociada a una topología primal es única.

En este trabajo nos centraremos en estudiar las caracterizaciones de los espacios primales dadas por Shirazi y Golestani ¹ y por Echi ². Mostraremos que ambas caracterizaciones, aunque formuladas de manera diferente, son en efecto equivalentes. También exploraremos propiedades fundamentales de los espacios primales y analizaremos algunos ejemplos. La topología discreta es primal y tiene una única función generadora, mientras que la topología indiscreta, siendo también primal, admite múltiples funciones generadoras. Estos ejemplos ilustran la diversidad de los espacios primales.

A partir de los trabajos de Shirazi, Golestani y Echi, se han explorado diversas propiedades de los espacios primales en artículos posteriores. Nuestro segundo objetivo

¹ Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi y Nasser Golestani. “Functional Alexandroff Spaces”. En: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40 (2011), págs. 515-522. URL: <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/86547>.

² Othman Echi. “The categories of flows of Set and Top”. En: *Topology and its Applications* 159.9 (2012), págs. 2357-2366. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016686411200034X>.

es analizar el producto de espacios primales, ya que, en general no es primal. Echi ³ caracteriza cuándo el producto arbitrario de espacios primales, resulta ser primal. Por otro lado, Shirazi y Golestani también abordaron el producto de espacios primales, pero se limitaron al caso de productos finitos. En este trabajo, exploraremos la relación entre estas dos caracterizaciones.

Como las topologías primales son de Alexandroff, exploraremos algunas propiedades de los espacios de Alexandroff que son fundamentales para el estudio de las primales. Mostraremos que un espacio es de Alexandroff si y solo si cada punto del espacio tiene una vecindad minimal. Otro aspecto fundamental de los espacios de Alexandroff es que están determinados por el **cuasi-orden de especialización** que es una relación reflexiva y transitiva (pero no necesariamente antisimétrica). Si (X, τ) es un espacio topológico, defina para $x, y \in X$, la relación $x \lesssim_{\tau} y$ si $x \in \overline{\{y\}}$. Este cuasi-orden proporciona una herramienta valiosa para estudiar los espacios de Alexandroff. Cada cuasi-orden corresponde a una topología de Alexandroff, y viceversa. En efecto, si (X, τ) es de Alexandroff y $A \subseteq X$, entonces $A \in \tau$ si y solo si $\{y \in X : x \lesssim_{\tau} y\} \subseteq A$ para todo $x \in A$.

³ Othman Echi. "On the product of primal spaces". En: *Quaestiones Mathematicae* 45 (oct. de 2020), págs. 1-10.

1. Topologías Alexandroff

1.1. Topologías Alexandroff

Sea (X, τ) un espacio topológico y $W \subseteq X$ un abierto con $x \in W$. Diremos que W es la **vecindad minimal** de x , si $W \subseteq V$ para cualquier abierto V que contenga a x .

Usaremos la siguiente notación, para cada $x \in X$,

$$N_x = \bigcap_{i \in I} \{U_i : x \in U_i \text{ y } U_i \in \tau\}.$$

El conjunto N_x puede no ser abierto; por ejemplo, si X es T_1 , entonces $N_x = \{x\}$ para todo $x \in X$. Por otra parte, si N_x fuera abierto, claramente sería la vecindad minimal de x .

Proposición 1.1.1. ¹ *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces, (X, τ) es Alexandroff si y solo si N_x es τ -abierto para todo $x \in X$.*

Demostración. (\implies) Sea (X, τ) un espacio topológico de Alexandroff. Es evidente que $N_x = \bigcap_{i \in I} U_i$ es τ -abierto.

(\impliedby) Sea $V = \bigcap_{i \in I} V_i \neq \emptyset$ una intersección arbitraria de abiertos de τ , veamos que V es abierto. Tome $x \in V$, entonces $x \in V_i$ para todo $i \in I$. Como N_x es abierto, es claramente la vecindad minimal de x , entonces $N_x \subseteq V_i$ para todo $i \in I$, por lo tanto, $N_x \subseteq V$. Esto muestra que V es abierto. □

La Proposición 1.1.1 proporciona una primera caracterización de los espacios Alexandroff en términos de vecindades minimales. A continuación, presentamos otra caracterización de estos espacios, enfocada en describir una función a partir de la cual se puede generar la topología de un espacio Alexandroff.

Proposición 1.1.2. ¹ *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces (X, τ) es Alexandroff si y solo si existe una función $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ que cumple 1,2 y $\tau = \tau_\beta$, donde $\beta = \{f(a) : a \in X\}$.*

a. Para todo $a \in X$, $a \in f(a)$.

b. Para todo $a \in X$ y $b \in f(a)$, tenemos que $f(b) \subseteq f(a)$.

Demostración. (\implies) Sea (X, τ) Alexandroff. Definamos la función $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $f(a) = N_a$ para todo $a \in X$, donde N_a es la vecindad minimal de a . Claramente $a \in N_a = f(a)$, por tanto, se cumple 1. Sea $b \in X$ tal que $b \in f(a)$. Como (X, τ) es Alexandroff, entonces $f(b) = N_b$ está contenido en cualquier abierto que contenga a b . Por lo tanto, $f(b) \subseteq f(a)$ y se cumple 2.

(\impliedby) Tomemos la topología τ_β generada por la base $\beta = \{f(a) : a \in X\}$. Veamos que τ_β es Alexandroff mostrando que $f(a)$ es la vecindad minimal de a para todo $a \in X$. Por la definición de β y 1, claramente $f(a)$ es vecindad de a . Sea $b \in X$ tal que $a \in f(b)$. Por 2, tenemos que $f(a) \subseteq f(b)$ para todo $f(b)$ tal que $a \in f(b)$. Por lo tanto, $f(a)$ es la vecindad minimal de a , lo cual implica que (X, τ_β) es Alexandroff. \square

En general, para probar que dos topologías τ_1, τ_2 sobre X son iguales, es necesario probar que todo abierto de τ_1 es abierto de τ_2 y viceversa. En el caso de las topologías Alexandroff, podemos probar que $\tau_1 = \tau_2$ a partir de las clausuras de los elementos de X .

Proposición 1.1.3. ² Sean τ_1 y τ_2 dos topologías Alexandroff sobre X . Entonces $\tau_1 = \tau_2$ si y solo si $cl_{\tau_1}\{x\} = cl_{\tau_2}\{x\}$ para todo $x \in X$.

Demostración. Si $\tau_1 = \tau_2$, entonces es inmediato que $cl_{\tau_1}\{x\} = cl_{\tau_2}\{x\}$ para todo $x \in X$. Supongamos entonces que $cl_{\tau_1}\{x\} = cl_{\tau_2}\{x\}$ para todo $x \in X$ y veamos que $\tau_1 = \tau_2$. Sea V un conjunto τ_1 -abierto, entonces su complemento V^c es τ_1 -cerrado. Sea $x \in V^c$, como V^c es τ_1 -cerrado y $cl_{\tau_1}\{x\}$ es el cerrado más pequeño que contiene a x , entonces tenemos que $cl_{\tau_1}\{x\} \subseteq V^c$, es decir, $V^c = \bigcup_{x \in V^c} cl_{\tau_1}\{x\}$. Por lo tanto,

$$V = (V^c)^c = X \setminus \bigcup_{x \in V^c} cl_{\tau_1}\{x\} = \bigcap_{x \notin V} X \setminus cl_{\tau_1}\{x\} = \bigcap_{x \notin V} X \setminus cl_{\tau_2}\{x\},$$

es decir, V es una intersección de abiertos de τ_2 de la forma $X \setminus cl_{\tau_2}\{x\}$. Por lo tanto, V es τ_2 -abierto, ya que (X, τ_2) es un espacio topológico de Alexandroff. Se concluye entonces que $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Usando el mismo razonamiento para los τ_2 -abiertos obtenemos $\tau_2 \subseteq \tau_1$. \square

1.2. Cuasi-órdenes

Un **cuasi-orden** sobre un conjunto X es una relación \lesssim reflexiva y transitiva en X . Es decir, (X, \lesssim) es cuasi-orden si:

- Para todo $x \in X$, $x \lesssim x$.

- Para todo $x, z, w \in X$, si $x \lesssim z$ y $z \lesssim w$ entonces $x \lesssim w$.

Veremos que los cuasi-órdenes están estrechamente relacionados con las topologías de Alexandroff, pues a partir de un conjunto cuasi-ordenado se puede obtener una topología de Alexandroff y viceversa.

Definición 1.2.1. Dado (X, \lesssim) cuasi-ordenado. Considere los siguientes conjuntos:

$$\uparrow B = \{x \in X : b \lesssim x \text{ para algún } b \in B\} \quad \text{y} \quad \downarrow B = \{x \in X : x \lesssim b \text{ para algún } b \in B\}$$

Decimos que $B \subseteq X$ es **creciente** si $\uparrow B = B$, análogamente, $B \subseteq X$ es **decreciente** si $\downarrow B = B$.

Teorema 1.2.2. ⁴ Sea (X, \lesssim) un conjunto cuasi-ordenado, entonces:

1. \emptyset y X son conjuntos crecientes.
2. La intersección arbitraria de conjuntos crecientes es un conjunto creciente.
3. La unión arbitraria de conjuntos crecientes es un conjunto creciente.

Demostración. Primero notemos que para todo subconjunto U de X tenemos que $U \subseteq \uparrow(U)$, pues $x \lesssim x$ para todo $x \in U$, por tanto $x \in \uparrow(U)$ para todo $x \in U$.

1. $\uparrow(\emptyset) = \{x \in X : b \lesssim x \text{ para algún } b \in \emptyset\} = \emptyset$, pues no hay elementos que podamos comparar en \emptyset . $\uparrow(X) = \{x \in X : x \lesssim b \text{ para algún } x \in X\} = X$, pues $X \subseteq \uparrow(X)$. Todo conjunto creciente está contenido en X , es decir, $\uparrow(X) \subseteq X$; por lo tanto, $\uparrow(X) = X$.
2. Sea $V = \bigcap_{j \in J} U_j$, una intersección arbitraria de conjuntos crecientes de X . Si $V = \emptyset$, entonces V es creciente; si $V \neq \emptyset$, supongamos por contradicción que $V \neq \uparrow(V)$. Entonces $\uparrow(V) \subsetneq V$, es decir, existe algún $c \in \uparrow(V)$ tal que $c \notin V$. Si $c \in \uparrow(V)$, entonces $u \lesssim c$ para algún $u \in V$. Como $u \in V$, entonces $u \in U_j$ para todo $j \in J$ y a su vez $c \in \uparrow(U_j)$ para todo $j \in J$. Dado que los U_j son conjuntos crecientes, entonces $c \in U_j$ para todo $j \in J$. Por lo tanto, $c \in V$, lo cual es una contradicción.
3. Sea $V = \bigcup_{j \in J} U_j$, una unión arbitraria de conjuntos crecientes de X . Veamos que V es creciente probando la contención $\uparrow(V) \subseteq V$. Sea $c \in \uparrow(V)$; entonces $u \lesssim c$ para algún $u \in V$, es decir, $u \lesssim c$ para algún $u \in U_j$ y $j \in J$. Dado que U_j es creciente, entonces $c \in U_j$; por lo tanto, $c \in V$ y tenemos que $\uparrow(V) \subseteq V$.

⁴ Tom Richmond. *General Topology: An Introduction*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.

□

Es decir, los conjuntos crecientes en (X, \lesssim) forman una topología de Alexandroff sobre X , llamada **la topología de especialización de \lesssim** , que denotaremos $\tau[\lesssim]$. A continuación mostraremos que además tenemos que $\uparrow(x) = N_x$ y $\downarrow(x) = cl\{x\}$.

Proposición 1.2.3. ⁴ *Sea (X, \lesssim) un conjunto cuasi-ordenado, entonces $\uparrow(x) = N_x$ y $\downarrow(x) = cl\{x\}$ en la correspondiente topología de especialización $\tau[\lesssim]$.*

Demostración. ■ $\uparrow(x) = N_x$

Sea $x \in X$. Por definición de la topología de especialización $\uparrow(x)$ es abierto. Veamos que además, es el conjunto creciente más pequeño que tiene a x . Supongamos por contradicción, que existe algún conjunto creciente U tal que $x \in U$ y $U \subset \uparrow(x)$. Entonces existe algún $y \in \uparrow(x)$ tal que $y \notin U$, lo cual es una contradicción, pues U es un conjunto creciente y, por lo tanto, todas las cotas superiores de sus elementos deberían pertenecer a U .

■ $\downarrow(x) = cl\{x\}$.

Sea $x \in X$. Como $\downarrow(x)$ es $\tau[\lesssim]$ -cerrado, entonces es claro que $cl\{x\} \subseteq \downarrow(x)$. Sea $D = \bigcap \{V \subseteq X : x \in V, V \text{ es decreciente}\}$, la intersección de todos los conjuntos decrecientes que contienen a x . Entonces $x \in D$ y $cl\{x\} = D$. Veamos que $\downarrow(x) \subseteq D$, si $y \in \downarrow(x)$, entonces $x \lesssim y$. Por el Teorema 1.2.2, tenemos que D es decreciente; por lo tanto, $y \in D$.

□

Sea τ una topología sobre X . Definimos una relación \lesssim_τ sobre X de la siguiente manera:

Para $x, y \in X$, $x \lesssim_\tau y$ si y solo si $x \in cl\{y\}$.

Esta relación es un cuasi-orden que se llama el **cuasi-orden de especialización del espacio (X, τ)** .

Es importante destacar que el cuasi-orden de especialización está bien definido en cualquier espacio topológico. Sin embargo, en el caso de que la topología sea de Alexandroff, la topología de especialización del cuasi-orden de especialización del espacio (X, τ) coincide con (X, τ) . Como lo mostraremos a continuación.

Teorema 1.2.4. ⁴ *Sea τ una topología sobre X . Entonces \lesssim_τ es un cuasi-orden sobre X . Si τ es de Alexandroff, entonces $N_{x_\tau} = \uparrow(x)_{\lesssim_\tau}$ y $cl_\tau\{x\} = \downarrow(x)_{\lesssim_\tau}$ para todo $x \in X$, además,*

$$\tau = \tau[\lesssim_\tau].$$

Demostración. Veamos que (X, \lesssim_τ) es un conjunto cuasi-ordenado.

Reflexividad: $x \in cl_\tau\{x\}$, por lo tanto, $x \lesssim_\tau x$.

Transitividad: Supongamos que $x \lesssim_\tau y$ e $y \lesssim_\tau z$. Entonces $x \in cl_\tau\{y\}$ e $y \in cl_\tau\{z\}$.

Como $cl_\tau\{y\}$ es el cerrado más pequeño que contiene a y , entonces tenemos que $cl_\tau\{y\} \subseteq cl_\tau\{z\}$; por lo tanto, $x \in cl_\tau\{z\}$, es decir, $x \lesssim_\tau z$.

Sea $x \in X$. Veamos que $\tau = \tau[\lesssim_\tau]$. Por la definición de \lesssim_τ es claro que $cl_\tau\{x\} = \downarrow(x)_{\lesssim_\tau}$. Como \lesssim_τ es un cuasi-orden, entonces por la Proposición 1.2.3 tenemos que $\downarrow(x)_{\lesssim_\tau} = cl_{\tau[\lesssim_\tau]}\{x\}$. Como τ y $\tau[\lesssim_\tau]$ son topologías de Alexandroff y $cl_\tau\{x\} = cl_{\tau[\lesssim_\tau]}\{x\}$ para todo $x \in X$, entonces por la Proposición 1.1.3, concluimos que $\tau = \tau[\lesssim_\tau]$.

Como \lesssim_τ es un cuasi-orden, entonces por la Proposición 1.2.3 tenemos que $\uparrow(x)_{\lesssim_\tau} = N_{x_{\tau[\lesssim_\tau]}} = N_{x_\tau}$. \square

Es un hecho bien conocido que a cualquier conjunto cuasi-ordenado le podemos asociar una relación de equivalencia, como lo mostramos a continuación.

Lema 1.2.5. ² Sean (X, \lesssim) un conjunto cuasi-ordenado y $x, z \in X$. Considere la relación \sim sobre X dada por: $x \sim z$ si y solo si $x \lesssim z$ y $z \lesssim x$. Entonces \sim es una relación de equivalencia.

Demostración. Es claro que la relación \sim es reflexiva, veamos que además es simétrica y transitiva.

Simetría: Si $x \sim z$, entonces $x \lesssim z$ y $z \lesssim x$. Por la transitividad del cuasi-orden \lesssim , tenemos que $z \lesssim x \lesssim z$; por lo tanto, $z \sim x$.

Transitividad: Si $x \sim z$ y $z \sim w$, entonces $x \lesssim z$, $z \lesssim x$, $z \lesssim w$ y $w \lesssim z$ respectivamente. Por la transitividad del cuasi-orden \lesssim , tenemos que $x \lesssim z \lesssim w \lesssim z \lesssim x$. Es decir, $x \lesssim w \lesssim x$; por lo tanto $x \sim w$.

Entonces, \sim es una relación de equivalencia. \square

En el estudio de espacios topológicos, la topología producto desempeña un papel fundamental cuando se considera la interacción entre múltiples espacios. A continuación tenemos algunos resultados preliminares al respecto. Sea $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto cartesiano arbitrario de los X_i . Para dotar a X de una topología, se define la siguiente base:

$$\mathcal{B}_P = \left\{ \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(U_j) : l \in I, U_l \in \tau_l, J \subseteq I \text{ finito} \right\}.$$

Donde $\pi_l = X \rightarrow X_l$, denota la proyección sobre X_l para cada $l \in I$. La topología generada por la base \mathcal{B}_P se conoce como **topología producto**, que denotaremos como τ_P .

Observemos que la proyección inversa de cualquier abierto U_l en (X_l, τ_l) está dada por $\pi_l^{-1}(U_l) = \{\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X : x_l \in U_l\}$, o lo que es equivalente,

$$\pi_l^{-1}(U_l) = \prod_{i \in I} V_i, \quad \text{donde } V_i = \begin{cases} X_i & \text{si } i \neq l; \\ U_l & \text{si } i = l. \end{cases}$$

Un abierto básico W de τ_P viene dado como una intersección finita de estas proyecciones inversas. Por lo tanto, $W \in \mathcal{B}_P$ si existe $J \subseteq I$ finito y conjuntos $W_i \in \tau_i$ para $i \in J$, tales que $W_i = X_i$ para $i \in I \setminus J$ y

$$W = \prod_{i \in I} W_i.$$

Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y τ_P la topología producto sobre $X = \prod_{i \in I} X_i$. Entonces es bien conocido que ,

$$cl_{\tau_P}(\{\bar{x}\}) = \prod_{i \in I} cl_{\tau_i}(\{x_i\}) \text{ para todo } \bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X^4.$$

Lema 1.2.6. *Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios topológicos, $X = \prod_{i \in I} X_i$ y τ_P la topología producto sobre X . Sean $\bar{x} = (x_i)_{i \in I}, \bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X$. Tenemos que:*

1. $\bar{x} \lesssim_{\tau_P} \bar{y}$ si y solo si $x_i \lesssim_{\tau_i} y_i$ para todo $i \in I$.
2. $\uparrow(\bar{x})_{\tau_P} = \prod_{i \in I} \uparrow(x)_{\tau_i}$.
3. $[\bar{x}, \bar{y}] = \prod_{i \in I} [x_i, y_i]$.

Demostración. Para probar la primera afirmación tenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{x} \lesssim_{\tau_P} \bar{y} &\iff \bar{x} \in cl_{\tau_P} \{\bar{y}\} \\ &\iff \bar{x} \in \prod_{i \in I} cl_{\tau_i} \{y_i\} \text{ para todo } i \in I \\ &\iff x_i \in cl_{\tau_i} \{y_i\} \text{ para todo } i \in I \\ &\iff x_i \lesssim_{\tau_i} y_i \text{ para todo } i \in I. \end{aligned}$$

Para la segunda afirmación observemos que:

$$\begin{aligned}
\uparrow(\bar{x})_{\tau_P} &= \{\bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X : \bar{x} \lesssim_{\tau_P} \bar{y}\} \\
&= \{\bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X : x_i \lesssim_{\tau_i} y_i \text{ para todo } i \in I\} \\
&= \{\bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X : y_i \in \uparrow(x_i) \text{ para todo } i \in I\} \\
&= \left\{ \bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X : \bar{y} \in \prod_{i \in I} \uparrow(x_i)_{\tau_i} \right\} \\
&= \prod_{i \in I} \uparrow(x)_{\tau_i}.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.2.7. Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ el producto de una familia de espacios topológicos con $i \in I$, y $\pi_i : X \rightarrow X_i$ la proyección sobre X_i y $\{V_a\}_{a \in A}$ una colección de conjuntos abiertos en X_i . Entonces

$$\bigcap_{a \in A} \pi_i^{-1}(V_a) = \pi_i^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} V_a\right).$$

Demostración. Mostrando la doble contención.

■ $\bigcap_{a \in A} \pi_i^{-1}(V_a) \subseteq \pi_i^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} V_a\right).$

Sea $\bar{x} \in \bigcap_{a \in A} \pi_i^{-1}(V_a)$. Entonces $\bar{x} \in \pi_i^{-1}(V_a)$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\pi_i(\bar{x}) \in V_a$ para todo $a \in A$, es decir, $\pi_i(\bar{x}) \in \bigcap_{a \in A} V_a$. Por lo tanto, $\bar{x} \in \pi_i^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} V_a\right)$.

■ $\pi_i^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} V_a\right) \subseteq \bigcap_{a \in A} \pi_i^{-1}(V_a).$

Sea $\bar{x} \in \pi_i^{-1}\left(\bigcap_{a \in A} V_a\right)$. Entonces $\pi_i(\bar{x}) \in \bigcap_{a \in A} V_a$, es decir, $\pi_i(\bar{x}) \in V_a$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\bar{x} \in \pi_i^{-1}(V_a)$, para todo $a \in A$, lo cual implica que $\bar{x} \in \bigcap_{a \in A} \pi_i^{-1}(V_a)$.

□

Teorema 1.2.8. ³ Sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto τ_P . Entonces, (X, τ_P) es Alexandroff si y solo si (X_i, τ_i) es Alexandroff para todo $i \in I$ y existe un subconjunto finito J de I tal que (X_i, τ_i) es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$.

Demostración. (\implies) Supongamos que (X, τ_P) es Alexandroff y veamos que (X_k, τ_k) es Alexandroff para todo $k \in I$. Sea $\pi_k : X \rightarrow X_k$ la proyección de X sobre X_k y $\{V_a\}_{a \in A}$ una colección de abiertos de X_k . Veamos que $\bigcap_{a \in A} V_a$ es τ_k -abierto. Como $V_a \in \tau_k$, entonces $\pi_k^{-1}(V_a)$ es abierto de τ_P para todo $a \in A$, y como X es Alexandroff, entonces $\bigcap_{a \in A} \pi_k^{-1}(V_a)$ es abierto de τ_P .

Por el Lema 1.2.7, tenemos que

$$\pi_k \left(\bigcap_{a \in A} \pi_k^{-1}(V_a) \right) = \pi_k \left(\pi_k^{-1} \left(\bigcap_{a \in A} V_a \right) \right) = \bigcap_{a \in A} V_a.$$

Como π_k es una función abierta, entonces $\bigcap_{a \in A} V_a \in \tau_k$. Por lo tanto, X_k es Alexandroff.

Para la última afirmación consideramos dos casos:

- (I) Supongamos que I es finito. Entonces tomemos $J = \{i \in I : X_i \text{ no es indiscreto}\}$.
- (II) Supongamos que I es infinito. Por reducción al absurdo, supongamos que no existe $J \subseteq I$ finito tal que (X_i, τ_i) es indiscreto si $i \in I \setminus J$ y no indiscreto si $i \in J$. Entonces $K = \{i \in I : X_i \text{ no es indiscreto}\}$ es infinito. Como (X_i, τ_i) no es indiscreto para todo $i \in K$, entonces existe algún $w_i \in X_i$, tal que $N_{w_i} \neq X_i$ para cada $i \in K$. Sea $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$, tal que $x_i = w_i$ para todo $i \in K$. Observemos que $N_{x_i} = X_i$ si $i \notin K$, pues X_i es indiscreto. Como (X, τ_P) y (X_i, τ_i) son Alexandroff para todo $i \in I$, entonces por el Teorema 1.2.4 y el Lema 1.2.6 tenemos que,

$$N_{\bar{x}} = \prod_{i \in I} N_{x_i} \quad \text{donde } N_{x_i} = \begin{cases} X_i & \text{si } i \notin K; \\ N_{w_i} & \text{si } i \in K. \end{cases}$$

Es decir, $N_{x_i} \neq X_i$ para una cantidad infinita de índices de I . Por lo tanto, $N_{\bar{x}}$ no es abierto de τ_P , lo cual es una contradicción pues (X, τ_P) es Alexandroff.

- (\Leftarrow) Sea J como en el enunciado y $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$. Veamos que $N_{\bar{x}} \in \tau_P$ para todo $\bar{x} \in X$. Como (X_i, τ_i) es Alexandroff para todo $i \in I$, entonces la vecindad minimal N_{x_i} de x_i es τ_i -abierto para todo $i \in I$. En particular, si $i \in I \setminus J$ entonces $N_{x_i} = X_i$. Por lo tanto, $N_{\bar{x}} = \prod_{i \in I} N_{x_i}$ es τ_P -abierto y (X, τ_P) es Alexandroff.

□

2. Topologías primales

Ahora introduciremos una subcolección de topologías de Alexandroff conocidas como topologías primales o topologías funcional Alexandroff. Sea $X \neq \emptyset$ y $f : X \rightarrow X$ una función, definimos:

$$\tau_f = \{U \subseteq X : f^{-1}(U) \subseteq U\}.$$

Teorema 2.0.1. ⁴ (X, τ_f) es un espacio topológico de Alexandroff.

Demostración. ■ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subseteq \emptyset$ y $f^{-1}(X) \subseteq X$, por lo tanto, $\emptyset \in \tau_f$ y $X \in \tau_f$.

- Sea $\bigcup_{i \in I} U_i$ una unión arbitraria de abiertos de τ_f . Veamos que es abierta,

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Pues tenemos que $f^{-1}(U_i) \subseteq U_i$ para todo $i \in I$. Así, $\bigcup_{i \in I} U_i$ es abierto.

- Sea $\bigcap_{i \in I} U_i$ una intersección arbitraria de abiertos de τ_f . Entonces:

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i)$$

y $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(U_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} U_i$, pues $f^{-1}(U_i) \subseteq U_i$ para todo $i \in I$. Concluimos que $\bigcap_{i \in I} U_i$ es abierto.

Por lo tanto, τ_f es una topología de Alexandroff. □

Definición 2.0.2. Una topología τ sobre X es primal o funcional Alexandroff si existe $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau = \tau_f$.

Cabe destacar que, aunque la definición de una topología primal asegura la existencia de una función $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau = \tau_f$, dicha función no necesariamente es única. Más adelante mostraremos ejemplos en los que la f es única y otros en los que no lo es.

Ejemplo 2.0.3. ² Sea (X, τ) , donde $\tau = \mathcal{P}(X)$ corresponde con la topología discreta sobre X , entonces (X, τ) es primal.

Considere la función identidad $Id : X \rightarrow X$, entonces $Id^{-1}(U) = U$ para todo $U \subseteq X$. Por lo tanto, τ_{Id} está conformada por todos los subconjuntos de X , es decir, $\tau_{Id} = \mathcal{P}(X)$.

De ahora en adelante, denotaremos $f^2(x) = f(f(x))$ y en general $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$ para todo $n > 2$. Sea (X, τ_f) el espacio primal asociado a f y $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Decimos que $x \in X$ tiene periodo p si $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)$ son diferentes entre sí y $f^p(x) = x$; en este caso, también diremos que el cuasi-orden asociado tiene ciclo de longitud p . Un punto con periodo 1 es un punto fijo de f .

El siguiente teorema da algunas propiedades generales de las topologías primales.

Teorema 2.0.4. ¹ Sea $f : X \rightarrow X$ y τ_f la topología primal sobre X generada por f . Entonces

1. C es τ_f -cerrado si y solo si $f(C) \subseteq C$. Es decir, los conjuntos τ_f -cerrados son los subconjuntos f -invariantes de X .
2. Para todo $x \in X$, $cl\{x\} = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Es decir, $cl\{x\}$ es la órbita $\mathcal{O}(x)$ de x bajo f .
3. Para todo $x \in X$ la vecindad minimal de x es $N_f(x) = \{y \in X : f^n(y) = x, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.
4. X es compacto si y solo si existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_f(a_i)$.
5. Cada componente conexa de X es abierta (es decir, abierto-cerrada).

Demostración. 1. (\implies) Supongamos por contradicción que $f(C) \subsetneq C$. Entonces existe algún $x \in C$, tal que $f(x) \notin C$. Como C es τ_f -cerrado, entonces $C = U^c$ para algún $U \in \tau_f$; por tanto, $f(x) \in U$. Notemos que $x \in f^{-1}(f(x))$ y como $f(x) \in U$, entonces $x \in U$, lo cual es una contradicción pues $x \in C = U^c$.

(\impliedby) Veamos que $U = C^c$ es τ_f -abierto. Sea $x \in f^{-1}(U)$, entonces $f(x) \in U$, es decir, $f(x) \notin C$. Dado que $f(C) \subseteq C$, entonces $x \notin C$, por lo tanto, $x \in U$ y se concluye que $f^{-1}(U) \subseteq U$.

2. Sea $x \in X$. Veamos que $cl\{x\} = \{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \mathcal{O}(x)$. Para esto es suficiente probar que $\mathcal{O}(x)$ es el cerrado más pequeño que contiene a x .

$x \in \mathcal{O}(x)$, pues $x = f^0(x)$. Además, si $f^m(x) \in \mathcal{O}(x)$, entonces $f(f^m(x)) = f^{m+1}(x) \in \mathcal{O}(x)$; por tanto, $\mathcal{O}(x)$ es f -invariante y τ_f -cerrado por 1. Ahora veamos que es el cerrado más pequeño que contiene a x . Sea V τ_f -cerrado tal que $x \in V$. Entonces $f(x) \in V$, porque V es f -invariante. Análogamente $f^2(x) \in V$ y en general $f^n(x) \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mathcal{O}(x) \subseteq V$. Por tanto, $\mathcal{O}(x)$ está contenido en cualquier cerrado que contenga a $\{x\}$, es decir, $cl\{x\} = \mathcal{O}(x)$.

3. Sea $N_f(x)$ la vecindad minimal de x en (X, τ_f) . Por la Proposición 1.2.3 tenemos que $N_f(x) = \uparrow(x)$ en el correspondiente cuasi-orden de especialización, es decir, $N_f(x) = \{y \in X : x \lesssim y\} = \{y \in X : x \in cl\{y\}\} = \{y \in X : f^n(y) = x, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$.
4. (\implies) Como τ_f es Alexandroff, entonces $\bigcup_{a_i \in X} N_f(a_i)$ es un cobertura abierta de X . Si X es compacto, entonces existen $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_f(a_i)$.
- (\impliedby) Sea $U = \{U_j \in \tau_f, j \in J\}$ una cobertura abierta de X , entonces $X = \bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{1 \leq i \leq n} N_f(a_i)$. Como $N_f(a_i)$ es vecindad minimal de a_i , entonces para cada $i \leq n$, existe algún $j \in J$ tal que $N_f(a_i) \subseteq U_j$, es decir, $\bigcup_{1 \leq i \leq n} N_f(a_i) \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq n} U_j$. Por lo tanto, el conjunto de los U_j con $j \leq n$ es una subcobertura finita de X .
5. Es suficiente mostrar que $N_f(x)$ es conexo para todo $x \in X$. Pues si C es una componente conexa de X y $N_f(x)$ es conexo, entonces $N_f(x) \subseteq C$ para todo $x \in C$. Por tanto, $C = \bigcup_{x \in C} N_f(x)$. Como τ_f es Alexandroff, entonces C es una unión de τ_f -abiertos y por lo tanto, es abierto.

Sea $x \in X$. Veamos que $N_f(x)$ es conexo. Supongamos por contradicción que $N_f(x)$ es desconexa, entonces existen $U, V \in \tau_f$ disjuntos no vacíos tales que $N_f(x) = U \cup V$. Como $x \in U$ ó $x \in V$, sin pérdida de generalidad supongamos que $x \in U$. Como $N_f(x)$ es la vecindad minimal de x , entonces $N_f(x) \subseteq U$, por lo tanto, $V = \emptyset$, lo cual contradice la elección de V .

□

Ejemplo 2.0.5. ⁴ Sea $X = \{1, 2, \dots, 7\}$, considere la función $f : X \rightarrow X$ dada por $f(1) = f(2) = 3, f(3) = f(5) = 4, f(4) = 5$ y $f(6) = f(7) = 7$.

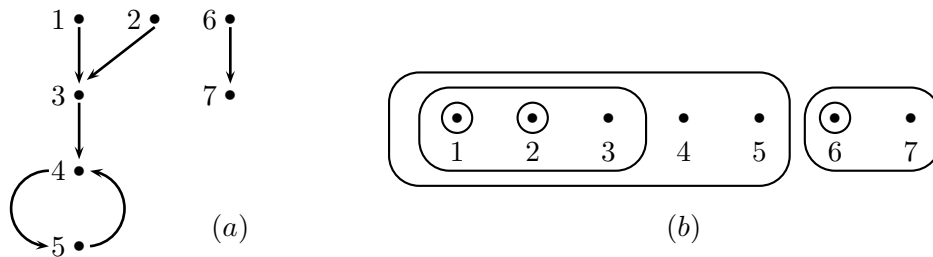


Figura 2.1: Ejemplo de topología primal.

La topología primal τ_f dada por los conjuntos $U \subseteq X$ tales que $f^{-1}(U) \subseteq U$ está ilustrada en la Figura 2.1(b). Notemos que en (X, \lesssim_{τ_f}) , con el cuasi-orden de especialización \lesssim_{τ_f} asociado a τ_f (ver Figura 2.1(a)) dado por $x \lesssim_{\tau_f} y$ si $x \in \mathcal{O}(y)$, los conjuntos crecientes corresponden a los conjuntos abiertos en τ_f , por tanto, $\tau_f = \tau[\lesssim_{\tau_f}]$. En este caso, f no es la única función tal que $\tau_f = \tau[\lesssim_{\tau_f}]$. En efecto, considere $g : X \rightarrow X$ dada

por: $g(1) = g(2) = 3$, $g(3) = g(4) = 5$, $g(5) = 4$ y $g(6) = g(7) = 7$, entonces tenemos que $\tau_f = \tau_g$.

Proposición 2.0.6. Sea X un conjunto, $f : X \rightarrow X$ una función y $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A^c \text{ es } f\text{-invariante}\}$ entonces $\mathcal{A} = \tau_f$.

Ejemplo 2.0.7. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Considere la función $f : X \rightarrow X$ dada por: $f(1) = f(3) = 2$ y $f(2) = 3$.

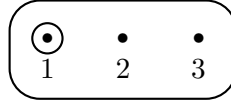


Figura 2.2: Ejemplo de topología primal $\mathcal{A} = \tau_f$.

Observemos que los conjuntos f -invariantes son: \emptyset , $\{2, 3\}$, y X . Por tanto, $\tau_f = \{\{1\}, \emptyset, X\}$ es primal y una base para τ_f se ilustra en Figura 2.2.

Ejemplo 2.0.8.⁵ Sea $\{0, 1\}^{<\omega}$ el conjunto de las sucesiones finitas de ceros y unos. Definimos el siguiente cuasi-orden \lesssim sobre $\{0, 1\}^{<\omega}$. Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^{<\omega}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, diremos que,

$$x \lesssim y \text{ si y solo si } m \leq n \text{ y } x_i = y_i \text{ para todo } i \leq m.$$

En la Figura 2.3 se ilustra la relación entre los elementos de $\{0, 1\}^{<\omega}$.

Por ahora, para verificar que $\{0, 1\}^{<\omega}$ es primal, la única herramienta disponible es encontrar una función f tal que $\tau_f = \tau[\lesssim]$. Considere entonces $f : \{0, 1\}^{<\omega} \rightarrow \{0, 1\}^{<\omega}$ dada por:

$$f((x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)) = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \neq \emptyset; \\ \emptyset & \text{si } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \emptyset. \end{cases}$$

Mostraremos que $\tau_f = \tau[\lesssim]$ verificando que sus respectivos conjuntos cerrados coinciden.

- Sea C un conjunto $\tau[\lesssim]$ -cerrado. Entonces C es decreciente en $(\{0, 1\}^{<\omega}, \lesssim)$, es decir, $C = \downarrow(C)$. Sea $x \in C$, entonces por la construcción de f tenemos que $f(x) \lesssim x$. Por lo tanto, $f(x) \in C$ y C es f -invariante, es decir, C es τ_f -cerrado.

⁵ Andrea Martínez. "Complementación en el retículo de topologías de Alexandroff". Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2024. URL: <https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/42321>.

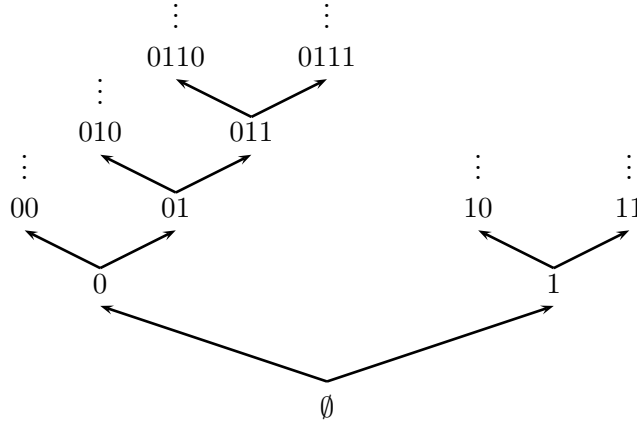


Figura 2.3: $(\{0, 1\}^{<\omega>}, \lesssim)$.

- Supongamos ahora que C es τ_f -cerrado. Sean $z = (z_1, \dots, z_m), x = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^{<\omega>}$, tales que $z \lesssim x$. Entonces $m \leq n$ y $x_i = z_i$ para todo $i \leq m$. Por la definición de f tenemos que $z \in \mathcal{O}(x)$; además, como C es f -invariante entonces $z \in f(C)$ y $z \in C$. Por lo tanto, C es decreciente en $(\{0, 1\}^{<\omega>}, \lesssim)$ y cerrado en $\tau[\lesssim]$.

En el caso de los conjuntos finitos, el siguiente resultado proporciona una manera sencilla de saber si una topología τ sobre X es primal.

Teorema 2.0.9. ⁴ Sea (X, τ) un espacio topológico finito. Entonces (X, τ) es primal si y solo si no contiene ninguno de los subespacios mostrados en la Figura 2.4.



Figura 2.4: Subespacios no permitidos en una topología primal.

Demostración. En ambos casos vamos a suponer por contradicción que (X, τ) es un espacio primal que contiene alguno de los subespacios indicados en la Figura 2.4. Si (X, τ) es primal, entonces existe una función $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau = \tau_f$ y para todo $x \in X$, la vecindad minimal de x es $N_f(x)$ como indica el Teorema 2.0.4.

Caso 1: Existen $a, b, c \in X$ tales que: $N_f(a) = N_f(b)$, $N_f(a), N_f(b) \subset N_f(c)$ (ver Figura 2.4(a)).

Dado que $N_f(a) = N_f(b)$, entonces $a \in N_f(b)$ y $b \in N_f(a)$, es decir, $f^n(a) = b$ y $f^m(b) = a$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$ respectivamente. Entonces tenemos que

$f^m(f^n(a)) = f^{m+n}(a) = a$ y $f^{n+m}(b) = b$, es decir, b y a tienen periodo $n + m$ y pertenecen al mismo ciclo. Como $N_f(b) \subset N_f(c)$, entonces $b \in N_f(c)$, es decir, $f^k(b) = c$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Tome $k' = k \bmod (n + m)$, como b tiene periodo $n + m$ entonces $f^{k'}(b) = f^k(b)$. Puesto que $k' \leq n + m$, entonces existe algún $r \in \mathbb{N}$ tal que $k' + r = n + m$, es decir, $b = f^r(f^{k'}(b)) = f^r(c)$; por lo tanto, $c \in N_f(b)$. Como $N_f(c)$ es la vecindad minimal de c , entonces $N_f(c) \subseteq N_f(b)$, lo cual es una contradicción.

Caso 2: Existen $a, b, c \in X$ tales que: $N_f(b) \subset N_f(a), N_f(c)$; $N_f(a) \subsetneq N_f(c)$ y $N_f(c) \subsetneq N_f(a)$ (ver Figura 2.4(b)).

Dado que $N_f(b) \subset N_f(a), N_f(c)$, entonces $a = f^n(b)$ y $c = f^m(b)$ respectivamente para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad considere $n \leq m$, entonces existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$. Por lo tanto, $c = f^k(f^n(b)) = f^k(a)$ y $a \in N_f(c)$. Dado que $N_f(a)$ es la vecindad minimal de a , entonces $N_f(a) \subseteq N_f(c)$, lo cual es una contradicción.

□

Ejemplo 2.0.10. Considere $X = \{1, 2, 3\}$ bajo la topología $\tau = \{\emptyset, \{1, 2\}, X\}$. Observemos que (X, τ) es subespacio de (X, τ) y es de la forma que aparece en la Figura 2.4(a). Por lo tanto, τ es una topología de Alexandroff pero no es una topología primal.

2.1. Caracterización de los espacios primales

En el 2012 Othman Echi definió los espacios primales y los caracterizó utilizando los siguientes conceptos de cuasi-órdenes.

Definición 2.1.1. Sea (X, \lesssim) un conjunto cuasi-ordenado:

- (X, \lesssim) es un **cuasi-bosque** si cualesquiera dos elementos con una cota superior común son comparables (lo que es equivalente a decir que $(\downarrow x)$ es totalmente cuasi-ordenado para todo $x \in X$).
- (X, \lesssim) es **causal** si para todo $x, y \in X$ el intervalo $[x, y] := \{z \in X : x \lesssim z \lesssim y\}$ es finito.
- $x \in X$ es un **punto minimal** de (X, \lesssim) si para todo $y \in X$ tal que $y \lesssim x$ entonces $x \lesssim y$.

Un espacio topológico (X, τ) es **cuasi-bosque** (o causal), si (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque (o causal).

Un ejemplo de cuasi-bosque es el cuasi-orden $(\{0, 1\}^{<\omega}, \lesssim)$ del Ejemplo 2.0.8. Es llamativo que este cuasi-orden sea primal y cuasi-bosque, pues su estructura gráfica (ver Figura 2.3) se asemeja a un árbol.

Proposición 2.1.2. ²

1. Sea X un espacio de Alexandroff y $x \in X$. Entonces $\overline{\{x\}} \setminus [x, x]$ es un conjunto cerrado.
2. Sea (X, \lesssim) un cuasi-bosque y x un elemento no minimal de X , con $[x, x] = \{x\}$. Entonces existe $y_x \in X$, tal que $\downarrow(x) \setminus \{x\} = \downarrow(y_x)$.

Demostración. 1. Si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces en el cuasi-orden de especialización (X, \lesssim_τ) tenemos que $\downarrow(x) = cl\{x\}$. Además notemos que $[x, x] = \downarrow(x) \cap \uparrow(x)$, por lo tanto, $cl\{x\} \setminus [x, x] = \downarrow(x) \setminus (\downarrow(x) \cap \uparrow(x))$.

$$\begin{aligned} \downarrow(x) \setminus (\downarrow(x) \cap \uparrow(x)) &= \downarrow(x) \cap (\downarrow(x) \cap \uparrow(x))^c \\ &= \downarrow(x) \cap (\downarrow(x)^c \cup \uparrow(x)^c) \\ &= (\downarrow(x) \cap \downarrow(x)^c) \cup (\uparrow(x)^c \cap \downarrow(x)) \\ &= \emptyset \cup (\uparrow(x)^c \cap \downarrow(x)). \end{aligned}$$

En (X, \lesssim_τ) tenemos que $\uparrow(x) = N_x$, es decir, $\uparrow(x)$ es un conjunto abierto. Por lo tanto, su complemento es cerrado y ya sabemos que $\downarrow(x)$ es cerrado. Por ende, $(\uparrow(x)^c \cap \downarrow(x)) = cl\{x\} \setminus [x, x]$ es cerrado.

2. Sea $x \in X$ es no minimal. Entonces existe algún $y \neq x$ tal que $y \lesssim x$ pero $x \not\lesssim y$, por ende, $y \in \downarrow(x) \setminus \{x\}$ e $y \in [y, x] \setminus \{x\}$. Dado que (X, \lesssim) es un cuasi-bosque causal, entonces $[y, x] \setminus \{x\}$ es finito y está totalmente cuasi-ordenado. Lo cual implica que, tiene un elemento máximo que llamaremos y_x . Además, $\downarrow(x) \setminus \{x\}$ también es totalmente cuasi-ordenado, por lo tanto, si $z \in \downarrow(x) \setminus \{x\}$ entonces $z \lesssim y$ o $y \lesssim z$; si $z \lesssim y$ entonces $z \lesssim y_x$. Por transitividad, si $y \lesssim z$ entonces $z \in [y, x] \setminus \{x\}$, por lo tanto, $z \lesssim y_x$. Es decir, y_x es elemento máximo de $\downarrow(x) \setminus \{x\}$, entonces tenemos que, $z \lesssim y_x$ para todo $z \neq x$ tal que $z \in \downarrow(x) \setminus \{x\}$. De ahí que, $\downarrow(x) \setminus \{x\} = \downarrow(y_x)$.

□

El siguiente teorema es la caracterización para espacios primales dada por Echi ².

Teorema 2.1.3. ² Sea (X, τ) un espacio topológico de Alexandroff y \lesssim_τ el cuasi-orden de especialización asociado a τ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. (X, τ) es primal.

2. (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque causal tal que $[x, x] = \{x\}$ para todo elemento x que no sea minimal de (X, \lesssim_τ) .

Demostración. (\implies) Supongamos que (X, τ) es primal y $f : X \rightarrow X$ la función asociada a (X, τ) . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

■ (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque.

Sean $x, z, w \in X$ tales que $x \lesssim_\tau w$ y $z \lesssim_\tau w$, es decir, w es una cota superior común de x y z . Entonces $x, z \in cl\{w\} = \mathcal{O}(w)$ pues (X, τ) es primal. Por lo tanto, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(w) = x$ y $f^m(w) = z$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $n \leq m$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$, lo cual implica que $z = f^m(w) = f^k(f^n(w)) = f^k(x)$, es decir, $z \in \mathcal{O}(x)$, por lo tanto, $z \lesssim_\tau x$, por lo tanto, x, z son comparables. Luego (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque.

■ (X, \lesssim_τ) es causal.

Recordemos que $[x, y] = \{z \in X : x \lesssim_\tau z \lesssim_\tau y\} \neq \emptyset$. Debemos mostrar que $[x, y]$ es finito. Como (X, τ) es primal, entonces $x \in \mathcal{O}(y)$, es decir, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = f^m(y)$. Entonces $[x, y] = \{z \in X : z = f^n(y), n \leq m\} = \{f^m(y), f^{m-1}(y), \dots, y\}$.

■ Si x no es minimal en (X, \lesssim_τ) , entonces $[x, x] = \{x\}$.

Sea x un punto no minimal de (X, \lesssim_τ) . Supongamos por contradicción que $[x, x] \neq \{x\}$. Entonces existe algún $w \neq x$ tal que $w \in [x, x]$, es decir, $x \lesssim_\tau w \lesssim_\tau x$. Como (X, τ) es primal, entonces $x \in \mathcal{O}(w)$ y $w \in \mathcal{O}(x)$. Por lo tanto, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x = f^n(w)$ y $w = f^m(x)$, lo cual implica que $x = f^n(f^m(x))$. Es decir, x es un punto periódico. Sea p el periodo de x , mostraremos que x es minimal. Sea $z \lesssim_\tau x$, entonces existe algún $s \in \mathbb{N}$ tal que $z = f^s(x)$. Además, existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $(k-1)p \leq s \leq kp$ y también existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $s + r = kp$. Como p es el periódico de x , tenemos que

$$f^r(z) = f^r(f^s(x)) = f^{kp}(x) = x.$$

Esto implica que $x \in \mathcal{O}(z)$ y, por lo tanto, $x \lesssim_\tau z$. Hemos mostrado que x es minimal, lo que es una contradicción.

(\impliedby) Veamos que si (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque causal en el que, para cada elemento x no minimal de (X, \lesssim_τ) el intervalo $[x, x] = \{x\}$, entonces (X, τ) es primal.

Queremos mostrar que existe una función $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau_f = \tau$. Para esto, definiremos la función f considerando dos casos: cuando $x \in X$ es minimal y cuando no lo es:

- Sea $x \in (X, \lesssim_\tau)$ no minimal y $[x, x] = \{x\}$. Entonces por la Proposición 2.1.2, existe $y_x \in X$ tal que $\downarrow (x) \setminus \{x\} = \downarrow (y_x)$. Como (X, \lesssim_τ) es el cuasi-orden de especialización asociado a τ , entonces tenemos que $cl\{x\} \setminus \{x\} = cl\{y_x\}$. Para este caso, f está dada por $f(x) = y_x$. Observemos que $cl\{x\} \setminus \{x\} = cl\{f(x)\}$.
- Ahora definamos f sobre el conjunto de puntos minimales de (X, \lesssim_τ) , que llamaremos $Min(X)$.

Por el Lema 1.2.5, tenemos que la relación \sim sobre (X, \lesssim_τ) dada por: $x \sim y$ si y solo si $x \lesssim_\tau y \lesssim_\tau x$ es una relación de equivalencia. Sea $x \in Min(X)$, consideremos el intervalo $[x, x] = \{y \in X : x \lesssim_\tau y \lesssim_\tau x\}$. Observemos que todo elemento que pertenezca a $[x, x]$ es minimal, y que además este intervalo corresponde con la clase de equivalencia de x bajo la relación \sim . Por lo tanto, el conjunto de las clases de equivalencia de $Min(X)$, con respecto a la relación \sim , es una partición de $Min(X)$.

Vamos a definir la función $f : Min(X) \rightarrow Min(X)$ sobre cada clase de equivalencia $[x, x]$. Como las clases de equivalencia son disjuntas entre sí, entonces la función f queda bien definida sobre $Min(X)$. Por hipótesis, (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque y todo intervalo en (X, \lesssim_τ) es finito, por lo tanto, $\downarrow (x) = [x, x]$ está totalmente cuasi-ordenado y es finito. Sea $[x, x] = \{a_0, a_1, \dots, a_{r-1}\}$, donde $a_0 = x$ y $r = |[x, x]|$. Entonces podemos ordenar los elementos del intervalo de manera descendente, es decir, $a_{r-1} \lesssim a_{r-2} \lesssim \dots \lesssim a_1 \lesssim a_0$. Definimos f en $[x, x]$ por:

$$f(x) = f(a_0) = a_1, \dots, f(a_{r-2}) = a_{r-1}, f(a_{r-1}) = a_0 = x.$$

Ahora veremos que $\tau_f = \tau$.

Dado que τ y τ_f son topologías Alexandroff, entonces, por la Proposición 1.1.3, es suficiente mostrar que $cl\{x\} = \mathcal{O}(x)$ para todo $x \in X$.

- Si x es minimal, entonces para todo $y \lesssim_\tau x$ se cumple que $x \lesssim_\tau y$; por lo tanto, $\downarrow (x) = [x, x]$. Recordemos que en τ , $cl\{x\} = \downarrow (x)$, es decir,

$$cl\{x\} = [x, x] = \{a_0, a_1, \dots, a_{r-1}\} = \{x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)\} = \mathcal{O}(x).$$

- Si x no es minimal, mostraremos que $cl\{x\} = \mathcal{O}(x)$.

- $\mathcal{O}(x) \subseteq cl\{x\}$.

Como x no es minimal, por la definición de f , tenemos que $cl\{x\} \setminus \{x\} = cl\{f(x)\}$. Por lo tanto, $f(x) \in cl\{x\}$, es decir, $\mathcal{O}(x) \subseteq cl\{x\}$.

- $cl\{x\} \subseteq \mathcal{O}(x)$.

Como $x \in X$ no es minimal, por hipótesis, tenemos que $[y, x] = \{z \in X : y \lesssim_\tau z \lesssim_\tau x\}$ es finito. Por lo tanto, podemos usar inducción sobre su cardinalidad para ver que, si $y \in cl\{x\}$ entonces $y \in \mathcal{O}(x)$.

Base de inducción: Supongamos que $|[y, x]| = 1$. Entonces $x = y$, por lo tanto, $x = f^0(x) = y$, es decir, $y \in \mathcal{O}(x)$.

Paso inductivo:

Hipótesis de inducción: Sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que para cada $x, y \in X$ tales que $y \in cl\{x\}$ y $1 \leq |[y, x]| \leq m$, se cumple que $y \in \mathcal{O}(x)$.

Supongamos que $x, y \in X$ son tales que $y \in cl\{x\}$ y $|[y, x]| = m + 1$. Mostraremos que $y \in \mathcal{O}(x)$. Si $y = x$, por la base de inducción tenemos que $y \in \mathcal{O}(x)$. Ahora consideremos $y \neq x$ tal que $y \in cl\{x\}$, por la definición de f tenemos que $cl\{x\} \setminus \{x\} = cl\{f(x)\}$, entonces $y \in cl\{f(x)\}$. Observemos que $[y, f(x)] \subseteq [y, x] \setminus \{x\}$, pues $f(x) \neq x$ y $f(x) \lesssim_\tau x$ ya que $f(x) \in cl\{x\}$. Es decir, $[y, f(x)] \subset [y, x]$, entonces $1 \leq |[y, f(x)]| \leq m$. Usando la hipótesis de inducción, concluimos que $y \in \mathcal{O}(x)$.

□

En el 2011, antes de que Echi definiera los espacios primales, Shirazi y Golestani también definieron el mismo concepto. Ellos llamaron a los espacios que definieron como espacios de funcional Alexandroff. El siguiente teorema, que caracteriza los espacios primales, es el principal resultado de su trabajo.

Teorema 2.1.4. (Shirazi-Golestani 2011)¹ Sea (X, τ) un espacio de Alexandroff. Entonces, (X, τ) es primal si y solo si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. Para todo $x, w \in X$ $N_x \subseteq N_w$ o $N_w \subseteq N_x$ o $N_x \cap N_w = \emptyset$.
2. Para todo $x \in X$, si existe $w \in X$ tal que $N_x \subseteq N_w$ entonces para todo $z \in X - \{x\}$ tenemos que $N_x \neq N_z$.
3. Para todo $x, w \in X$, $\{z \in X : N_x \subseteq N_z \subseteq N_w\}$ es finito.

Es importante notar que las hipótesis del Teorema 2.1.3 son equivalentes a las del Teorema 2.1.4, lo cual implica que el Teorema 2.1.4 se sigue de lo demostrado en el Teorema 2.1.3. Veamos con más detalle qué premisas del Teorema 2.1.3 implican las hipótesis correspondientes en el Teorema 2.1.4.

Sea (X, τ) un espacio topológico de Alexandroff y (X, \lesssim_τ) el cuasi-orden de especialización asociado a τ . Entonces las siguientes parejas de hipótesis de los teoremas 2.1.3 y 2.1.4 son equivalentes.

1. a) Para todo $x, w \in X$ $N_x \subseteq N_w$ o $N_w \subseteq N_x$ o $N_x \cap N_w = \emptyset$.
b) (X, \lesssim_τ) es un cuasi-bosque.
2. a) Para todo $x \in X$, si existe $w \in X$ tal que $N_x \subset N_w$, entonces para todo $z \in X \setminus \{x\}$ tenemos que $N_x \neq N_z$.
b) Para cada elemento no minimal x , tenemos que $[x, x] = \{x\}$.
3. a) Para todo $x, w \in X$, $\{z \in X : N_x \subseteq N_z \subseteq N_w\}$ es finito.
b) (X, \lesssim_τ) es causal.

Demostración. 1. (\implies) Veamos que (X, \lesssim_τ) es cuasi-bosque mostrando que si $x, w \in X$ tienen una cota superior en común, entonces son comparables. En (X, \lesssim_τ) se cumple que $N_x = \uparrow(x)$; por lo tanto, si $N_x \subseteq N_w$, entonces todas las cotas superiores comunes de x, w pertenecen a N_x y además, $y \lesssim_\tau x$. Análogamente si $N_w \subseteq N_x$, entonces todas las cotas superiores de x, w pertenecen a N_w y además, $x \lesssim_\tau y$. Es decir, si x, w tienen una cota superior común, entonces son comparables. Si $N_x \cap N_w = \emptyset$ entonces x, w no tienen cotas superiores en común.

(\impliedby) Sea (X, \lesssim_τ) un cuasi-bosque y $x, w \in X$ con una cota superior z en común. Entonces $x, w \in \downarrow(z)$, que es totalmente cuasi-ordenado; por lo tanto, x, w son comparables. Si $x \lesssim_\tau w$ entonces $w \in \uparrow(x) = N_x$. Como $\uparrow(y) = N_w$ es vecindad minimal de w en (X, τ) , entonces $N_w \subseteq N_x$. Análogamente, si $w \lesssim_\tau x$ entonces $N_x \subseteq N_w$. Si x, w no tienen cotas superiores en común, entonces $\uparrow(x) \cap \uparrow(w) = \emptyset$, es decir, $N_x \cap N_w = \emptyset$.

2. (\implies) Sea $x \in X$. Si existe $w \in X$ tal que $\uparrow(x) \subset \uparrow(w)$, entonces $x \in \uparrow(w)$, pero $w \notin \uparrow(x)$, ya que $\uparrow(w)$ es la vecindad minimal de w . Entonces $w \not\lesssim_\tau x$ pero $x \not\lesssim_\tau w$, por lo tanto, x no es minimal. Ahora consideremos el intervalo

$$[x, x] = \{z \in X : \uparrow(x) \subseteq \uparrow(z) \subseteq \uparrow(x)\} = \{z \in X : \uparrow(x) = \uparrow(z)\}.$$

Por hipótesis, $\uparrow(x) = \uparrow(z)$ solo si $x = z$, entonces $[x, x] = \{x\}$.

(\Leftarrow) Sea $x \in X$ no minimal. Entonces existe algún $w \in X$, tal que $w \lesssim_\tau x$ pero $x \not\lesssim_\tau w$. Es decir, $\uparrow(x) \subseteq \uparrow(w)$ y $\uparrow(w) \not\subseteq \uparrow(x)$, por lo tanto, $\uparrow(x) \subset \uparrow(w)$. Como $[x, x] = \{z \in X : \uparrow(x) \subseteq \uparrow(z) \subseteq \uparrow(x)\} = \{x\}$, entonces para todo $z \in X - \{x\}$ tenemos que $\uparrow(x) \neq \uparrow(z)$.

3. (\Rightarrow) Por hipótesis, el intervalo $[x, w] = \{z \in X : x \leq z \leq w\} = \{z \in X : \uparrow(w) \subseteq \uparrow(z) \subseteq \uparrow(x)\} = \{z \in X : N_w \subseteq N_z \subseteq N_x\}$ es finito. Por lo tanto, (X, \lesssim_τ) es causal.

(\Leftarrow) De manera similar, si (X, \lesssim_τ) es causal entonces $[w, x] = \{z \in X : \uparrow(x) \subseteq \uparrow(z) \subseteq \uparrow(w)\} = \{z \in X : N_x \subseteq N_z \subseteq N_w\}$ es finito.

□

Con las equivalencias establecidas entre las hipótesis de los teoremas 2.1.3 y 2.1.4, hemos demostrado que ambos teoremas son, de hecho, equivalentes. Es fascinante observar que ambos autores, trabajando de manera independiente, definieron el mismo concepto de topologías primales y, aún más, llegaron a teoremas que caracterizan estos espacios y que resultan ser esencialmente la misma afirmación bajo diferentes perspectivas.

Ejemplo 2.1.5. ⁵ Sean $(\mathbb{R}, \tau[\leq])$ el espacio de Alexandroff asociado al orden usual de \mathbb{R} . Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $N_x \subseteq N_y$, donde $N_x = \uparrow(x)$, es decir,

$$N_x = \{z \in \mathbb{R} : x \leq z\}.$$

Observemos que $[y, x] = \{z \in \mathbb{R} : N_x \subseteq N_z \subseteq N_y\}$ es infinito, por tanto, por la parte 3 del Teorema 2.1.4 concluimos que $(\mathbb{R}, \tau[\leq])$ no es primal.

Ejemplo 2.1.6. ²⁶ Sea (X, τ) , donde $\tau = \{X, \emptyset\}$ corresponde con la topología indiscreta. Entonces (X, τ) es primal si y solo si X es finito.

Observemos que por ser τ la topología indiscreta, $\uparrow(x) = \downarrow(x) = X$ para todo $x \in X$.

(\Rightarrow) Sea (X, τ) primal y $x, z \in X$. Entonces, $[x, z] = \uparrow(x) \cap \downarrow(z) = X \cap X = X$. Como (X, τ) es primal, entonces $[x, z]$ es finito, por lo tanto, X es finito.

(\Leftarrow) Supongamos que X es finito. Como en τ los únicos abiertos son \emptyset y X , por el Teorema 2.0.9, (X, τ) es primal.

⁶ Tom Richmond Sami Lazaar y Tarek Turki. "Maps generating the same primal space". En: *Quaestiones Mathematicae* 40.1 (2017), págs. 17-28. URL: <https://doi.org/10.2989/16073606.2016.1260067>.

Podemos además presentar una función $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau_f = \tau$. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, definamos f de la siguiente manera: $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \dots, f(x_n) = x_1$. Entonces f cumple que $\tau_f = \tau$. Si cambiamos el orden de los elementos de X , es posible obtener una nueva función f' tal que $\tau_{f'} = \tau$. Note que si consideramos las siguientes permutaciones de los elementos de X , la función f no cambia, aunque hallamos cambiado el orden de los elementos.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n & \\ x_2 & x_3 & \dots & x_n & x_1 & \\ x_3 & \dots & x_n & x_1 & x_2 & \\ \vdots & & & & & \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & \end{array}$$

Sabemos que existen $n!$ permutaciones diferentes, y que para cada una existen otras $n - 1$ permutaciones que generan la misma función. Por lo tanto, existen $n!/n = (n - 1)!$ funciones que generan la topología indiscreta sobre $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Ejemplo 2.1.7. Gracias al Teorema 2.1.3, ya no es necesario encontrar explícitamente una función que genere la topología primal. En lugar de eso, basta con verificar que se cumplen las condiciones establecidas en dicho teorema. Podemos proporcionar entonces una prueba alternativa a la presentada en el Ejemplo 2.0.8, para mostrar que $\{0, 1\}^{<\omega}$ es primal.

- $\downarrow(x)$ es completamente cuasi-ordenado para todo $x \in \{0, 1\}^{<\omega}$.

Sean $x, w, z \in \{0, 1\}^{<\omega}$ tales que $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $w = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$. Tomemos $w, z \in \downarrow(x)$, entonces $w \lesssim x$ y $z \lesssim x$; por lo tanto, $n \leq m$ y $k \leq m$, además $x_i = z_i$ y $w_i = z_i$ para todo $i \leq n$ e $i \leq k$ respectivamente. Sin pérdida de generalidad supongamos $n \leq k$, entonces por la transitividad de \lesssim , $x_i = z_i = w_i$ para todo $i \leq n$. Por lo tanto, $w \lesssim z$, es decir, w, z son comparables, $\downarrow(x)$ es totalmente cuasi-ordenado y $\{0, 1\}^{<\omega}$ es un cuasi-bosque.

- (X, \lesssim_τ) es causal.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{0, 1\}^{<\omega}$. Tenemos que $\downarrow(x) = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \{0, 1\}^{<\omega} : n \leq m, x_i = y_i \text{ para todo } i \leq n\}$, es decir, $\downarrow(x)$ es finito para todo $x \in \{0, 1\}^{<\omega}$. Aún más, $|\downarrow(x)| = m$, por lo tanto, $[x, y] = \uparrow(x) \cap \downarrow(y)$ es finito para cualesquiera $x, y \in \{0, 1\}^{<\omega}$.

- Para cada elemento no minimal x , tenemos que $[x, x] = \{x\}$.

Observemos que la relación \lesssim es antisimétrica, por lo tanto, $[x, x] = \{z \in \{0, 1\}^{<\omega} : x \lesssim z \lesssim x\} = \{x\}$ para todo $x \in \{0, 1\}^{<\omega}$.

2.2. Otras propiedades de los espacios primales

Las propiedades de separación juegan un rol fundamental en la clasificación y estudio de distintos tipos de espacios. En el caso de los espacios Alexandroff, tenemos los siguientes resultados de separabilidad: Sea (X, τ) un espacio topológico de Alexandroff, entonces,

- (X, τ) es T_1 si y solo si $\tau = \mathcal{P}(X)$.

Demostración. Si $\tau = \mathcal{P}(X)$ entonces es claro que (X, τ) es T_1 . Si (X, τ) es T_1 , entonces $cl\{x\} = \{x\}$. Como (X, τ) y $\mathcal{P}(X)$ son Alexandroff y sus clausuras coinciden, entonces por el Teorema 1.1.3, $\mathcal{P}(X) = \tau$. \square

- \lesssim_τ es antisimétrico si y solo si (X, τ) es T_0 .

Demostración. (\implies) Sean $x, z \in X$ diferentes. Si \lesssim_τ es antisimétrico, entonces tenemos que $x \notin cl\{z\}$ o $z \notin cl\{x\}$. Supongamos que $x \notin cl\{z\}$, entonces $x \in (cl\{z\})^c$ y $z \notin (cl\{z\})^c$, por lo tanto, (X, τ) es T_0 .

(\impliedby) Sean $x, z \in X$ tales que $x \lesssim_\tau z$ y $z \lesssim_\tau x$. Como (X, τ) es Alexandroff, entonces $\uparrow(w) = N_w$ para todo $w \in X$. Por lo tanto, $z \in N_x$ y $x \in N_z$, es decir, $N_x = N_z$. Lo cual implica que $x = z$, ya que (X, τ) es T_0 . \square

Para las topologías primales tenemos el siguiente resultado de separabilidad.

Teorema 2.2.1. ² Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Entonces (X, τ_f) es T_0 si y solo si los únicos puntos periódicos posibles son los fijos.

Demostración. (\implies) Recordemos que el cuasi-orden de especialización de τ_f viene dado por: $x \lesssim_{\tau_f} y$ si y solo si $x = f^n(y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $x \in X$ periódico con periodo n . Es claro que $f(x) \lesssim_\tau x$. Notemos que $f^{n+1}(x) = f(x)$, por lo tanto, $x \lesssim_\tau f(x)$. Como (X, τ_f) es T_0 , entonces \lesssim_{τ_f} es antisimétrico, por lo tanto, $x = f(x)$.

(\Leftarrow) Sean $x, z \in X$. Dado que (X, τ_f) es primal, entonces se satisface el numeral 1 del Teorema 2.1.4. Analicemos cada una de las opciones, y veamos que en cada una existe un τ_f -abierto U tal que $x \in U$ y $z \notin U$.

- $N_f(x) = N_f(z)$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(x) = z$ y $f^m(z) = x$. Por lo tanto, $f^n(f^m(z)) = z$, es decir, z es periódico. Por hipótesis, $f(z) = z$, lo cual implica que $z = f(z) = x$.
- $N_f(x) \cap N_f(z) = \emptyset$. Entonces es claro que $x \in N_f(x)$ pero $z \notin N_f(x)$.
- $N_f(x) \subset N_f(z)$. Entonces $x \in N_f(x)$ pero $z \notin N_f(x)$. Análogamente si $N_f(z) \subset N_f(x)$.

□

Teorema 2.2.2. ³ Sean (X, τ) primal y $Y \subseteq X$. Entonces (Y, τ_Y) con la topología de subespacio es primal.

Demostración. Sea \lesssim_{τ_Y} el correspondiente cuasi-orden de especialización de (Y, τ_Y) . Es fácil ver que $\lesssim_Y = \lesssim_X \cap Y \times Y$. Mostraremos que (Y, \lesssim_{τ_Y}) cumple las condiciones del Teorema 2.1.3, por lo tanto, es primal. En efecto, sea (X, τ) primal, entonces:

- $\downarrow(x)_{\tau_Y}$ es completamente cuasi-ordenado para todo $x \in Y$.
Sea $x \in Y$, entonces $\downarrow(x)_{\tau_Y} = \downarrow(x)_{\tau} \cap Y$. Sean $w, z \in \downarrow(x)_{\tau_Y}$ entonces $w, z \in \downarrow(x)_{\tau}$. Por lo tanto, son comparables ya que $\downarrow(x)_{\tau}$ es totalmente cuasi-ordenado. Lo cual implica que, $\downarrow(x)_{\tau_Y}$ es totalmente cuasi-ordenado y (Y, \lesssim_{τ_Y}) es un cuasi-bosque.
- (Y, \lesssim_{τ_Y}) es causal.
Sean $x, y \in X$. Entonces $[x, y]_X$ es finito, por lo tanto, $[x, y]_Y = [x, y]_X \cap Y$ es finito.
- Para cada elemento no minimal x de (Y, \lesssim_{τ_Y}) , tenemos que $[x, x] = \{x\}$.
Dado que $(Y, \lesssim_{\tau_Y}) \subseteq (X, \lesssim_{\tau})$, si $y \in Y$ no es minimal en (Y, \lesssim_{τ_Y}) , entonces y tampoco es minimal en (X, \lesssim_{τ}) . Por lo tanto, $[y, y] = \{y\}$.

□

Sea (X, τ_f) primal y $Y \subseteq X$. Como (Y, τ_Y) es también primal, existe $g : Y \rightarrow Y$ tal que $\tau_g = \tau_Y$. Podemos describir g de la siguiente manera. Sea $g : Y \rightarrow Y$, definida a partir de f . Sea $x \in X$, $S_x = \{n \in \mathbb{N} : f^n(x) \in Y\}$ y $p = \text{mín}(S_x)$. Defina

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } S_x = \emptyset; \\ f^p(x), & \text{si } S_x \neq \emptyset. \end{cases}$$

Veamos que $\tau_g = \tau_Y$ mostrando que sus respectivos conjuntos cerrados coinciden.

- Si C es τ_Y -cerrado entonces C es τ_g -cerrado.

Veamos que $g(C) \subseteq C$. Si C es τ_Y -cerrado, entonces existe algún D τ_f -cerrado tal que $C = D \cap Y$. Sea $x \in C$, entonces tenemos dos casos para $g(x)$.

- Si $S_x = \emptyset$, entonces $g(x) = x$, por lo tanto, $g(x) \in C$.
- Si $S_x \neq \emptyset$, entonces $g(x) = f^p(x)$ y $f^p(x) \in Y$. Dado que $C \subseteq D$, entonces $x \in D$ y como D es τ_f -cerrado entonces tenemos que $f^p(x) \in D$. Es decir, $f^p(x) = g(x) \in D \cap Y$; por lo tanto, $g(x) \in C$.

- Sea C un conjunto τ_g -cerrado. Veamos que existe un D τ_f -cerrado tal que $C = D \cap Y$.

Sea $C \subseteq Y$ τ_g -cerrado. Entonces $C = \bigcup_{x \in C} cl_{\tau_g} \{x\}$. Además como (Y, τ_g) es primal, entonces $cl_{\tau_g} \{x\} = \mathcal{O}_g(x)$ para todo $x \in Y$. Es decir, $C = \bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_g(x)$. Veamos que $\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_g(x) = (\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_f(x)) \cap Y$ por doble contención.

- Sea $y \in C = \bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_g(x)$. Entonces $y = g^n(z)$ para algún $z \in C$ y $n \in \mathbb{N}$. Es decir, $y = z$ o $y = f^m(z)$ para algún $m \in \mathbb{N}$, donde $f^m(z) \in Y$. En cualquier caso, $y \in \mathcal{O}_f(z) \cap Y$; por lo tanto, $y \in (\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_f(x)) \cap Y$.
- Sea $y \in (\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_f(x)) \cap Y$. Entonces $y = f^n(z)$ para algún $z \in C$ y $n \in \mathbb{N}$. Además $f^n(z) \in Y$, por lo tanto, $y \in \mathcal{O}_g(z)$ e $y \in \bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_g(x)$.

Es decir, $C = (\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_f(x)) \cap Y$. Claramente, $\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}_f(x)$ es τ_f -cerrado, por lo tanto, C es τ_Y -cerrado.

Un **homeomorfismo** es una función continua, biyectiva y con inversa continua entre dos espacios topológicos. Los homeomorfismos garantizan que los espacios compartan las mismas propiedades topológicas, la primalidad es una de ellas.

Teorema 2.2.3. ³ Sea (X, τ_f) primal, (Y, τ_Y) un espacio topológico y $g : (X, \tau_f) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ un homeomorfismo. Entonces (Y, τ_Y) es primal.

Demostración. Veamos que existe una función h tal que $\tau_h = \tau_Y$. Considere la función

$h : Y \rightarrow Y$, dada por $h = g \circ f \circ g^{-1}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
 C \text{ es } \tau_Y \text{ - cerrado} &\iff g^{-1}(C) \text{ es } \tau_f \text{ - cerrado.} \\
 &\iff f(g^{-1}(C)) \subseteq g^{-1}(C). \\
 &\iff g(f(g^{-1}(C))) \subseteq g(g^{-1}(C)) = C. \\
 &\iff h(C) \subseteq C. \\
 &\iff C \text{ es } \tau_h \text{ - cerrado.}
 \end{aligned}$$

□

En el siguiente teorema se muestra que $f : X \rightarrow X$ tiene buenas propiedades topológicas respecto a la topología primal τ_f .

Teorema 2.2.4. ¹ Sea $f : X \rightarrow X$ una función. En (X, τ_f) tenemos:

1. $f : X \rightarrow X$ es cerrada.
2. $f : X \rightarrow X$ es abierta si y solo si para todo $x \in X$ tenemos que $f(N_f(x)) = N_f(f(x))$.
3. Si $f : X \rightarrow X$ es abierta, entonces es sobreyectiva.
4. $f : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo si y solo si es inyectiva y abierta.

Demostración. 1. Como C es cerrado, entonces $f(C) \subseteq C$. Por lo tanto, $f(f(C)) \subseteq f(C)$, es decir, $f(C)$ es τ_f -cerrado.

2. (\implies) Probemos que $f(N_f(x)) = N_f(f(x))$ por doble contención.

■ $f(N_f(x)) \subseteq N_f(f(x))$:

Sea $z \in f(N_f(x))$. Entonces $z = f(y)$ para algún $y \in N_f(x)$. Es decir, y cumple que $f^n(y) = x$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por ende $f^n(z) = f^n(f(y)) = f(x)$. Lo cual implica que, $f(x) \in \mathcal{O}_f(z)$, por lo tanto, $z \in N_f(f(x))$.

■ $N_f(f(x)) \subseteq f(N_f(x))$:

Es claro que $f(x) \in f(N_f(x))$. Como f es abierta, entonces $f(N_f(x))$ es τ_f abierto. Entonces tenemos que, $N_f(f(x)) \subseteq f(N_f(x))$.

(\impliedby) Sea U τ_f -abierto. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} N_f(x)$. Luego,

$$f(U) = f\left(\bigcup_{x \in U} N_f(x)\right) = \bigcup_{x \in U} f(N_f(x)) = \bigcup_{x \in U} N_f(f(x)).$$

Por lo tanto, $f(U)$ es τ_f -abierto.

3. Veamos que $X \subseteq f(X)$. Sea $x \in X$. Como $x \in N_f(f(x))$, tenemos usando (2.) que $x \in f(N_f(x))$, por ende, $x \in f(X)$.

4. (\implies) Si f es un homeomorfismo, entonces f es biyectiva y f^{-1} es continua. Esto implica que f es abierta.

(\impliedby) Como f es abierta, entonces (por (3.)) f es sobreyectiva y por lo tanto es biyectiva y claramente f^{-1} es continua.

Veamos que f es continua. Sea U τ_f -abierto, veamos que $f^{-1}(U)$ es τ_f -abierto. Como $U \in \tau_f$, entonces $U = \bigcup_{f(x) \in U} N_f(f(x))$, es decir,

$$f^{-1}(U) = f^{-1} \left(\bigcup_{f(x) \in U} N_f(f(x)) \right) = \bigcup_{f(x) \in U} f^{-1}(N_f(f(x))) = \bigcup_{x \in U} f^{-1}(f(N_f(x))).$$

Es decir, $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in U} N_f(x)$, por lo tanto, $f^{-1}(U)$ es τ_f -abierto. □

Para completar la presentación de algunas propiedades de los espacios primales, enunciaremos sin demostración el siguiente resultado.

Teorema 2.2.5. ⁶ *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. (X, τ) es un espacio primal T_0 .

2. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

- Existe una única función $f : X \rightarrow X$ tal que $\tau = \tau_f$.
- Si x, y son diferentes y $\{x, y\}$ es abierto, entonces $\{x\}$ o $\{y\}$ es abierto.

Ejemplo 2.2.6. *Considere el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros. Definimos una topología τ sobre \mathbb{Z} a partir de una base B , en la que para cada $n \in \mathbb{N}$, el abierto básico asociado a n es:*

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ \{n-1, n\}, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En la Figura 2.5 se ilustran los abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) .

Veamos que (\mathbb{Z}, τ) es primal. Considere la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ n, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

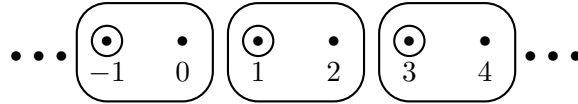


Figura 2.5: Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) .

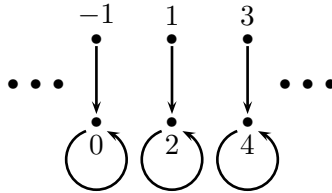


Figura 2.6: Comportamiento de f .

Observemos que si $n \in \mathbb{Z}$ es impar, entonces su vecindad minimal $N_f(n) = \{m \in \mathbb{Z} : f^k(m) = n, k \in \mathbb{N}\} = \{n\}$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{Z}$ es par, entonces $N_f(n) = \{n-1, n\}$. Por lo tanto, $\tau_f = \tau$ ya que los abiertos básicos de τ coinciden con las vecindades minimales de τ_f . Es decir, (\mathbb{Z}, τ) es primal.

Veamos que además (\mathbb{Z}, τ) es T_0 . Sean $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces tenemos los siguientes casos:

- n, m son ambos pares o impares. Entonces $N_f(n) \neq N_f(m)$ y por ende, $n \notin N_f(m)$ y viceversa.
- n es par y m es impar. Entonces $N_f(m) = \{m\}$, por lo tanto, $n \notin N_f(m)$.

Como (\mathbb{Z}, τ) es primal T_0 , entonces según el Teorema 2.2.5, f es la única función tal que $\tau_f = \tau$. Para ilustrar mejor el Teorema 2.2.5, verificaremos la unicidad de f . Supongamos por contradicción que existe otra función $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\tau_g = \tau_f = \tau$. Como (\mathbb{Z}, τ) es primal, entonces $cl\{n\} = \mathcal{O}_f(n) = \mathcal{O}_g(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por consiguiente, si n es par, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{n\}$ y así tenemos que $g(n) = n = f(n)$. Por otra parte, si n es impar, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{n, n+1\}$, por lo tanto, $g(n) = n+1 = f(n)$. Es decir, $f = g$.

Sea (X, τ) un espacio primal. Es interesante notar que el Teorema 2.2.5 garantiza la unicidad de la función f tal que $\tau_f = \tau$, bajo la hipótesis de que el espacio primal (X, τ) es T_0 . Sin embargo, existen espacios primales que no son T_0 y que admiten solo una función generadora, como mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.7. ⁶ Sea τ la topología sobre \mathbb{Z} dada por la siguiente base

$$B = \{\{n, n+1\} : n \text{ impar}\}.$$

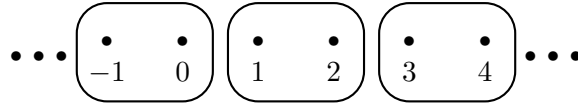


Figura 2.7: Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) .

Los abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) lucen como se indica en la Figura 2.7.

Veamos que (X, τ) es primal. Considere la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ n - 1, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

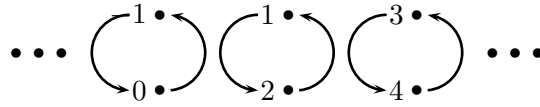


Figura 2.8: Comportamiento de f .

Mostraremos que $\tau = \tau_f$. En efecto, si n es impar, entonces $N_f(n) = \{n, n+1\}$. Por otra parte, si n es par, entonces $N_f(n) = \{n-1, n\}$. Por lo tanto, $\tau = \tau_f$ y (\mathbb{Z}, τ) es primal. Es claro que (\mathbb{Z}, τ) no es T_0 , pues sea $n \in \mathbb{Z}$ impar, no existe un abierto que contenga a $\{n\}$ pero no a $\{n+1\}$ y viceversa.

Veamos que f es la única función tal que $\tau_f = \tau$. Supongamos por contradicción que existe otra función $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\tau_g = \tau$. Como (\mathbb{Z}, τ) es primal, entonces $cl\{n\} = \mathcal{O}_f(n) = \mathcal{O}_g(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si n es par, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{n, n-1\}$, por lo tanto $g(n) = n-1 = f(n)$. Si n es impar, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{n, n+1\}$, por lo tanto $g(n) = n+1 = f(n)$. Es decir, $f = g$.

Los ejemplos 2.0.5, 2.1.6 y el siguiente, muestran topologías primales que no son T_0 y que son generadas por más de una función.

Ejemplo 2.2.8. Considere el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros. Definimos una topología Alexandroff τ sobre \mathbb{Z} a partir de una base B , en la que para cada $n \in \mathbb{N}$, el abierto minimal de n viene dado de la siguiente manera:

$$B(n) = \begin{cases} \{n\}, & \text{si } n = 3k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ \{n-1, n, n+1\}, & \text{si } n = 3k + 2 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ \{n-2, n-1, n\}, & \text{si } n = 3k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En la Figura 2.9 se ilustran los abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) .

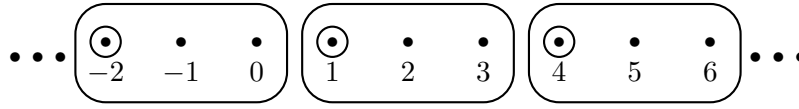


Figura 2.9: Abiertos básicos de (\mathbb{Z}, τ) .

(\mathbb{Z}, τ) es primal. En efecto, considere la función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n = 3k + 1 \text{ o } n = 3k + 2 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ n - 1, & \text{si } n = 3k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

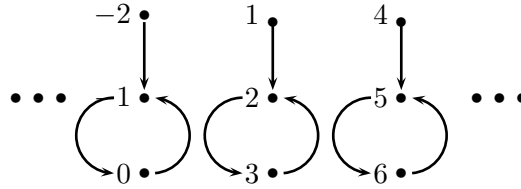


Figura 2.10: Comportamiento de f .

- Si $n \in \mathbb{Z}$ es de la forma $3k + 1$, entonces $N_f(n) = \{m \in \mathbb{Z} : f^k(m) = n, k \in \mathbb{N}\} = \{n\}$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ es de la forma $3k + 2$, entonces $N_f(n) = \{n - 1, n, n + 1\}$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$ es de la forma $3k$, entonces $N_f(n) = \{n - 2, n - 1, n\}$

Por lo tanto, $\tau_f = \tau$ ya que los abiertos básicos de τ coinciden con las vecindades minimales de τ_f . (\mathbb{Z}, τ) no es T_0 pues sean $n = 3k + 2$ y $m = 3k + 3$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, no existe un abierto que contenga a n pero no a m y viceversa.

Veamos que (\mathbb{Z}, τ) tiene más de una función asociada. Como (\mathbb{Z}, τ) es primal, entonces $cl\{n\} = \mathcal{O}_f(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para cualquier función $g : X \rightarrow X$ tal que $\tau_f = \tau_g$, se cumple que $\mathcal{O}_f(n) = \mathcal{O}_g(n)$. Por ende, si n es de la forma $3k + 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{3k + 2, 3k + 3\}$ y además $\mathcal{O}_g(3k + 3) = \{3k + 2, 3k + 3\}$. Por lo tanto,

- Si n es de la forma $n = 3k + 2$, entonces $g(n) = n + 1 = f(n)$.
- Si n es de la forma $n = 3k$, entonces $g(n) = n - 1 = f(n)$.

- Si n es de la forma $3k + 1$, entonces $\mathcal{O}_g(n) = \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}$. Por lo tanto, $g(n) = 3k + 2 = n + 1 = f(n)$ ó $g(n) = 3k + 3 = n + 2$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Es así que, la única función g diferente de f tal que $\tau_g = \tau$, es aquella en la que $g(n) = n + 2$ si n es de la forma $3k + 1$.

$$g(n) \begin{cases} n + 2, & \text{si } n = 3k + 1 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ n + 1, & \text{si } n = 3k + 2 \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}; \\ n - 1, & \text{si } n = 3k \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2.3. Producto de espacios primales

Además de las caracterizaciones de espacios primales dadas en los teoremas 2.1.3 y 2.1.4, es natural preguntarse si el producto de espacios primales es también primal; en general eso no es cierto, como veremos a continuación. Echi ³ caracterizó bajo qué condiciones el producto de una familia de espacios topológicos primales es primal.

El siguiente ejemplo ilustra que incluso el producto de dos espacios primales no es necesariamente primal.

Ejemplo 2.3.1. ³ Sea $S = \{0, 1\}$ con la topología $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$. Entonces:

1. (S, τ) es primal.

Sea $f : S \rightarrow S$ la función definida por $f(0) = f(1) = 1$, entonces $\tau = \tau_f$.

2. El espacio producto $S \times S$ no es primal.

Para esto veremos que $S \times S$ no es un cuasi-bosque y por el Teorema 2.1.3, concluiremos que no es primal. Las clausuras de los puntos en el espacio producto $S \times S$ son:

- $\overline{\{(0, 0)\}} = \overline{\{0\}} \times \overline{\{0\}} = S \times S.$
- $\overline{\{(0, 1)\}} = \overline{\{0\}} \times \overline{\{1\}} = \{(0, 1), (1, 1)\}.$
- $\overline{\{(1, 0)\}} = \overline{\{1\}} \times \overline{\{0\}} = \{(1, 0), (1, 1)\}.$
- $\overline{\{(1, 1)\}} = \{(1, 1)\}.$

Observemos que $(1, 0), (0, 1) \in \overline{\{(0, 0)\}} = \downarrow (0, 0)$. Sin embargo, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ no son comparables pues no están en la clausura del otro, es decir, $\downarrow (0, 0)$ no es totalmente cuasi-ordenado. Por lo tanto, $(S \times S, \lesssim_{\tau_P})$ no es un cuasi-bosque y $(S \times S, \tau_P)$ no es primal.

Sea (X, τ) un espacio topológico, decimos que es **simétrico** si para todo $x, y \in X$ tal que $x \in \overline{\{y\}}$ entonces $y \in \overline{\{x\}}$. En términos del cuasi-orden de especialización \lesssim_τ , es equivalente a decir que $\downarrow(x) = \uparrow(x) = \overline{\{x\}}$.

Teorema 2.3.2. ³ Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos no simétricos. Entonces $(X \times Y, \tau_P)$ no es un cuasi-bosque, en particular, no es primal.

Demostración. Sea (X, \lesssim_{τ_X}) el cuasi-orden de especialización de (X, τ_X) . Como (X, τ_X) no es simétrico, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \lesssim_{\tau_X} x_2$ pero $x_1 \not\lesssim_{\tau_X} x_2$. Análogamente en (Y, \lesssim_{τ_Y}) , existen y_1, y_2 tales que $y_1 \lesssim_{\tau_Y} y_2$ pero $y_1 \not\lesssim_{\tau_Y} y_2$. Sea $(X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ el cuasi-orden de especialización de $(X \times Y, \tau_P)$, notemos que $(x_1, y_2) \lesssim_{\tau_P} (x_2, y_2)$ y $(x_2, y_1) \lesssim_{\tau_P} (x_2, y_2)$. Por lo tanto, $(x_1, y_2), (x_2, y_1) \in \downarrow(x_2, y_2)$; sin embargo, (x_1, y_2) y (x_2, y_1) no son comparables, es decir, $(X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ no es un cuasi-bosque. □ □

Teorema 2.3.3. ³ Sea (X, τ_X) un espacio topológico no simétrico y (Y, τ_Y) un espacio topológico Alexandroff simétrico. Si $[(x, y), (x, y)] = \{(x, y)\}$ (ver Definición 2.1.1) para todo (x, y) no minimal en $(X \times Y, \tau_P)$, entonces (Y, τ_Y) es discreto.

Demostración. Como (X, τ_X) no es simétrico, entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \lesssim_{\tau_X} x_2$ pero $x_2 \not\lesssim_{\tau_X} x_1$. Sea $y_2 \in Y$, como (Y, τ_Y) es simétrico, entonces $y_1 \lesssim y_2$ si y solo si $y_2 \lesssim y_1$. Por lo tanto, (x_2, y_2) y (x_2, y_1) pertenecen al intervalo $[(x_2, y_2), (x_2, y_2)]$. Puesto que $(x_1, y_1) \lesssim_{\tau_P} (x_2, y_2)$ pero $(x_2, y_2) \not\lesssim_{\tau_P} (x_1, y_1)$, entonces (x_2, y_2) no es minimal y por hipótesis tenemos que $[(x_2, y_2), (x_2, y_2)] = \{(x_2, y_2)\}$. Por lo tanto, $(x_2, y_1) = (x_2, y_2)$, es decir, $y_1 \in \{y_2\}$ y $\downarrow(y_2) \subseteq \{y_2\}$. De donde podemos afirmar que $cl_{\tau_Y}\{y\} = \{y\}$ para todo $y \in Y$. Recordemos que la topología discreta $\mathcal{P}(Y)$ es Alexandroff y $cl_{\mathcal{P}(Y)}\{y\} = \{y\}$. Como τ_Y y $\mathcal{P}(Y)$ son topologías Alexandroff sobre Y , cuyas clausuras coinciden para todo $y \in Y$, entonces por la Proposición 1.1.3 concluimos que $\tau_Y = \mathcal{P}(Y)$. □ □

Lema 2.3.4. Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios primales simétricos y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Entonces

1. (X, τ_P) es simétrico.
2. (X, \lesssim_{τ_P}) es un cuasi-bosque.

Demostración. a. Sea $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$. Veamos que $\downarrow(\bar{x}) = \uparrow(\bar{x})$. Recordemos que $cl\{\bar{x}\} = \prod_{i \in I} cl_{\tau_i}\{x_i\}$, entonces, $\downarrow(\bar{x}) = \prod_{i \in I} \downarrow(x_i)_{\tau_i}$. Como (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I$, entonces $\downarrow(\bar{x}) = \prod_{i \in I} \uparrow(x_i)$. Por el Lema 1.2.6, tenemos entonces que $\downarrow(\bar{x}) = \uparrow(\bar{x})$.

b. Sea $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$. Veamos que $\downarrow(\bar{x})$ es totalmente cuasi-ordenado. Sean $\bar{w} = (w_i)_{i \in I}$, $\bar{z} = (z_i)_{i \in I} \in \downarrow(\bar{x})$, entonces $w_i \lesssim_{\tau_i} x_i$ y $z_i \lesssim_{\tau_i} x_i$ para todo $i \in I$, es decir, $w_i, z_i \in \downarrow(x_i)$ para todo $i \in I$. Como (X_i, τ_i) es primal (y por ende cuasi-bosque) para todo $i \in I$, entonces w_i, z_i son comparables. Dado que (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I$, entonces, $w_i \lesssim_{\tau_i} z_i$ y $z_i \lesssim_{\tau_i} w_i$ para todo $i \in I$. Es decir, $\bar{w} \lesssim_{\tau_P} \bar{z}$ y $\bar{z} \lesssim_{\tau_P} \bar{w}$. Entonces \bar{w}, \bar{z} son comparables y (X, \lesssim_{τ_P}) es un cuasi-bosque. \square

Teorema 2.3.5. ³ Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(X \times Y, \tau_P)$ es primal.
2. (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son primales y se cumple una de las siguientes condiciones:
 - a) (X, τ_X) no es simétrico y (Y, τ_Y) es discreto.
 - b) (Y, τ_Y) no es simétrico y (X, τ_X) es discreto.
 - c) (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son simétricos.

Demostración. (\implies) Consideremos $Z = X \times \{y\}$ para algún $y \in Y$. Entonces (Z, τ_Z) es subespacio de $(X \times Y, \tau_P)$, por lo tanto, por el Teorema 2.2.2, (Z, τ_Z) es primal. Como (X, τ_X) y (Z, τ_Z) son homeomorfos, entonces por el Teorema 2.2.3, tenemos que (X, τ_X) es primal. Análogamente concluimos que (Y, τ_Y) es primal.

Dado que $(X \times Y, \tau_P)$ es primal, entonces por el Teorema 2.3.2, tenemos que (X, τ_X) y (Y, τ_Y) no pueden ser no simétricos a la vez, entonces tenemos los siguientes casos:

- a) (X, τ_X) no es simétrico y (Y, τ_Y) es simétrico.

Dado que (X, τ_P) es primal, entonces $[(x, y), (x, y)] = \{(x, y)\}$ para todo $(x, y) \in X \times Y$ no minimal. Como (Y, τ_Y) es primal, entonces es Alexandroff. Por lo tanto, por el Teorema 2.3.3 concluimos que (Y, τ_Y) es discreto.

- b) (Y, τ_Y) no es simétrico y (X, τ_X) es simétrico. Análogo al caso anterior, tenemos que (X, τ_X) es discreto.
- c) (X, τ_X) y (Y, τ_Y) son simétricos.

(\impliedby) Veamos que se cumplen todas las condiciones de la parte 2 del Teorema 2.1.3 y por lo tanto, $(X \times Y, \tau_P)$ es primal.

- Supongamos que se cumple (2a). Como (Y, τ_Y) es discreto, entonces $\uparrow(y) = \downarrow(y) = \{y\}$ para todo $y \in Y$. Por lo tanto, la relación \lesssim_{τ_P} está dada así: $(a, b) \lesssim_{\tau_P} (c, d)$ si y solo si $a \lesssim_{\tau_X} c$ y $b = d$.
 - $(X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ es un cuasi-bosque.
Sea $(a, b) \in X \times Y$. Entonces $\downarrow((a, b)) = \downarrow(a) \times \downarrow(b) = \downarrow(a) \times \{b\}$. Como (X, τ_X) es primal, entonces $\downarrow(a)$ es totalmente cuasi-ordenado. Por consiguiente, $\downarrow(a) \times \{b\} = \downarrow(a, b)$ es totalmente cuasi-ordenado.
 - Sean $(a, b), (c, d) \in X \times Y$. Entonces $[(a, b), (c, d)]$ es finito.
Si $b \neq d$, entonces $[(a, b), (c, b)] = \emptyset$. Si $b = d$, entonces $[(a, b), (c, b)] = [a, c] \times \{b\}$ (ver Lema 1.2.6). Como (X, τ_X) es primal, entonces $[a, c]$ es finito. Por lo tanto, $[(a, b), (c, b)]$ es finito.
 - Sea $(a, b) \in (X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ no minimal. Entonces $[(a, b), (a, b)] = \{(a, b)\}$.
Si (a, b) no es minimal, entonces a no es minimal en (X, \lesssim_{τ_X}) . Por lo tanto, $[a, a] = \{a\}$ ya que (X, τ_X) es primal. Entonces $[(a, b), (a, b)] = [a, a] \times \{b\} = \{a\} \times \{b\} = \{(a, b)\}$.

Análogamente se razona en el caso (2b).

- Supongamos que se cumple (2c).
 - $(X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ es un cuasi-bosque. Se cumple por el Lema 2.3.4.
 - Sean $(a, b), (c, d) \in X \times Y$. Entonces $[(a, b), (c, b)]$ es finito.
Como $[a, c]$ y $[b, d]$ son finitos. Entonces $[(a, b), (c, d)] = [a, c] \times [b, d]$ es finito para cualesquiera $(a, b), (c, d) \in X \times Y$.
 - Sean $(a, b) \in (X \times Y, \lesssim_{\tau_P})$ no minimal. Entonces $[(a, b), (a, b)] = \{(a, b)\}$.
Por el Lema 2.3.4, $(X \times Y, \tau_P)$ es simétrico, por lo tanto, todos sus elementos son minimales.

□

El siguiente teorema es el resultado principal demostrado por O. Echi con relación al producto de espacios primales.

Teorema 2.3.6. ³ *Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $X = \prod_{i \in I} X_i$ es un espacio primal con la topología producto τ_P .
2. Cada (X_i, τ_i) es primal y existe un subconjunto finito J de I tal que (X_i, τ_i) es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$, y además, una de las siguientes condiciones se cumple:

- (i) Existe $k \in J$ tal que (X_k, τ_k) no es simétrico, (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in J - \{k\}$ y $|X_i| = 1$, para todo $i \in I \setminus J$.
- (ii) Existe un subconjunto finito K de $I \setminus J$ tal que X_k es finito para todo $k \in K$, (X_j, τ_j) es simétrico para todo $j \in J$ y $|X_i| = 1$ para todo $i \in I - (J \cup K)$.

Demostración. (\implies) Veamos que si (X, τ_P) es primal, entonces se cumplen todas las condiciones de la parte 2.

- Si todos los (X_i, τ_i) son primales.

Sea $k \in I$ arbitrario. Para cada $i \in I - \{k\}$ tomemos algún $w_i \in X_i$ fijo. Sea $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ tal que

$$Y_i = \begin{cases} X_k, & \text{si } i = k; \\ \{w_i\}, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

(Y, τ_Y) es subespacio de (X, τ_P) . Como (X, τ_P) es primal, entonces por el Teorema 2.2.2 tenemos que (Y, τ_Y) es primal. Sea $\bar{z} = (z_i)_{i \in I} \in Y$, entonces $z_i = w_i$ para todo $i \in I - \{k\}$ y $z_k \in X_k$. Tomemos la proyección $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X_k, \tau_k)$, definida por: $f(\bar{z}) = z_k$ para todo $\bar{z} = (z_i)_{i \in I} \in Y$. Es claro que f es un homeomorfismo. Por el Teorema 2.2.3, (X_k, τ_k) es primal.

- Existe un subconjunto finito J de I tal que X_i es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$.
Dado que (X, τ_P) es primal, entonces es Alexandroff. Por el Teorema 1.2.8, concluimos que debe existir un subconjunto J finito de I , tal que (X_i, τ_i) es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$.

Veamos que si (X, τ_P) es primal, entonces no existe más de un índice i tal que (X_i, τ_i) no es simétrico. Supongamos por contradicción que existen $j, k \in I$ tales que (X_j, τ_j) y (X_k, τ_k) no son simétricos. Entonces por el Teorema 2.3.2, $(X_j \times X_k)$ con la topología producto $\tau_{P'}$ no es un espacio primal. Para cada $i \neq k, j$, tomemos un $p_i \in X_i$ fijo. Consideremos entonces $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ tal que

$$Y_i = \begin{cases} X_k, & \text{si } i = k; \\ X_j, & \text{si } i = j; \\ \{p_i\}, & \text{si } i \neq k, j. \end{cases}$$

Por el Teorema 2.2.2, (Y, τ_Y) es primal. Considere la proyección $f : (Y, \tau_Y) \rightarrow (X_j \times X_k, \tau_{P'})$ dada por: $f(\bar{y}) = (y_j, y_k)$ para todo $\bar{y} = (y_i)_{i \in I}$. Es claro que f es un homeomorfismo. Como $(X_j \times X_k, \tau_{P'})$ no es primal, entonces (Y, τ_Y) tampoco lo

es, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, a lo sumo puede existir un único $k \in I$ tal que (X_k, τ_k) no es simétrico.

Tenemos entonces los dos siguientes casos:

- Existe algún $k \in J$, tal que (X_k, τ_k) no es simétrico y (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I - \{k\}$.

Sea $Y = \prod_{i \in I - \{k\}} X_i$. Entonces (X, τ_P) es homeomorfo a $(Y, \tau_Y) \times (X_k, \tau_k)$. Como (X, τ_P) es primal, entonces por el Teorema 2.2.3, $(Y, \tau_Y) \times (X_k, \tau_k)$ es primal. Como (X_k, τ_k) no es simétrico, entonces por el Teorema 2.3.5, (Y, τ_Y) es discreto. Por lo tanto, (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in I - \{k\}$.

Finalmente para ver que $|X_i| = 1$ para todo $i \in I \setminus J$, observemos que (X_i, τ_i) es discreto e indiscreto para todo $i \in I \setminus J$. Por lo tanto, se cumple 2(a).

- (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I$.

En particular, (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in J$, y ya vimos que (X_i, τ_i) es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$.

Probemos las hipótesis restantes de 2(b). Sean $\bar{x} = (x_i)_{i \in I}, \bar{y} = (y_i)_{i \in I} \in X$. Tenemos que, (ver lema 1.2.6)

$$|\bar{x}, \bar{y}| = \prod_{i \in I} |[x_i, y_i]| = \prod_{i \in I \setminus J} |[x_i, y_i]| \times \prod_{i \in J} |[x_i, y_i]|.$$

Como (X, τ_P) es primal, entonces por el Teorema 2.1.3, el intervalo $[\bar{x}, \bar{y}]$ es finito. Por ende, $\prod_{i \in I \setminus J} |[x_i, y_i]|$ es finito. Por lo tanto, el conjunto $K = \{i \in I \setminus J : |[x_i, y_i]| > 1\}$ es finito.

(\Leftarrow) Veamos que (X, τ_P) es primal.

- Supongamos que se cumple 2(a).

Sea $Y = \prod_{i \in I - \{k\}} X_i$, con la topología de subespacio τ_Y . Dado que (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in I - \{k\}$, en particular, lo es para todo $i \in J$. Sea $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in Y$, como $|X_i| = 1$ para todo $i \in I \setminus J$, entonces $\{\bar{x}\}$ es abierto de τ_Y . Lo cual implica que (Y, τ_Y) es discreto y por consiguiente primal (ver ejemplo 2.0.3). Como (Y, τ_Y) y (X_k, τ_k) son primales y (X_k, τ_k) no es simétrico, entonces por el Teorema 2.3.5, $(Y, \tau_Y) \times (X_k, \tau_k)$ es primal. Finalmente, observemos que $(Y, \tau_Y) \times (X_k, \tau_k)$ y (X, τ_P) son homeomorfos, por lo que concluimos que (X, τ_P) es primal.

- Supongamos que se cumple 2(b). Veamos que entonces se cumplen las condiciones de la parte *ii(a)* del Teorema 2.1.3.

- (X, τ_P) es Alexandroff.

Dado que (X_i, τ_i) es primal para todo $i \in I$, entonces también es Alexandroff para todo $i \in I$. Como existe $J \subseteq I$ finito tal que (X_i, τ_i) es indiscreto para todo $i \in I \setminus J$, entonces por el Teorema 1.2.8, concluimos que (X, τ_P) es Alexandroff.

- (X, \lesssim_{τ_P}) es un cuasi-bosque. Se cumple por el Lema 2.3.4.

- Para todo $\bar{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$ no minimal, se cumple que $[\bar{x}, \bar{x}] = \{\bar{x}\}$.

Por el Lema 2.3.4, (X, τ_P) es simétrico. Por lo tanto, todos sus elementos son minimales.

- Sean $\bar{x}, \bar{y} \in X$, con $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$. Entonces $[\bar{x}, \bar{y}]$ es finito.

Como (X_i, τ_i) es primal para todo $i \in I$, entonces por el Teorema 2.1.3, $[[x_i, y_i]]$ es finito para todo $i \in I$. Dado que K y J son finitos, entonces $\prod_{i \in K} [[x_i, y_i]] \times \prod_{i \in J} [[x_i, y_i]]$ es finito. Como $|X_i| = 1$ para todo $i \in I \setminus (J \cup K)$, entonces $\prod_{i \in I \setminus (J \cup K)} [[x_i, y_i]] = 1$. Por lo tanto, el siguiente producto es finito (ver Lema 1.2.6).

$$|[\bar{x}, \bar{y}]| = \prod_{i \in K} [[x_i, y_i]] \times \prod_{i \in J} [[x_i, y_i]] \times \prod_{i \in I \setminus (J \cup K)} [[x_i, y_i]].$$

□

□

Proposición 2.3.7. ⁶ Sean $f, g : X \rightarrow X$ tales que $\tau_f = \tau_g$ y $x \in X$. Entonces x es un punto f -periódico con periodo n si y solo si x es g -periódico con periodo n .

Demostración. Sea $x \in X$ con f -periodo n . Entonces $|\mathcal{O}_f(x)| = n$ y $\mathcal{O}_f(x) = \mathcal{O}_f(y)$ para todo $y \in \mathcal{O}_f(x)$. Como $\tau_f = \tau_g$ entonces $cl_{\tau_f}\{x\} = cl_{\tau_g}\{x\}$, es decir, $\mathcal{O}_f(x) = \mathcal{O}_g(x)$. Veamos que x es un punto g -periódico. Supongamos por contradicción que x no es g -periódico, entonces para todo $y \in \mathcal{O}_g(x)$, tenemos que $g(y) \neq x$, por lo tanto, $x \notin \mathcal{O}_g(y)$ para todo $y \in \mathcal{O}_g(x)$. Lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{O}_g(y) = \mathcal{O}_f(y) = \mathcal{O}_f(x)$. Como $|\mathcal{O}_f(x)| = |\mathcal{O}_g(x)| = n$, entonces concluimos que x tiene g -periodo n .

□

□

Sea (X, τ) un espacio primal. Diremos que $x \in X$ es un **punto periódico** de (X, τ) , si x es punto periódico de f donde $\tau = \tau_f$. Por la proposición anterior, este concepto no depende de la función f que genera a τ . Una función es **puntualmente periódica** si

es periódica en cada punto de su dominio. Observe que no estamos suponiendo que todos los puntos tienen el mismo periodo. Diremos que (X, τ) es **puntualmente periódico** si f es puntualmente periódica para cualquier función f tal que $\tau_f = \tau$.

El siguiente resultado no aparece en la literatura consultada, pero nos pareció útil para la prueba de un resultado posterior.

Lema 2.3.8. *Sea (X, τ_f) un espacio topológico primal, entonces (X, τ_f) es simétrico si y solo si es puntualmente periódico.*

Demostración. (\implies) Sea (X, τ_f) simétrico. Entonces $\downarrow(x) = \uparrow(x)$ para todo $x \in X$.

Como (X, τ_f) es primal, entonces $\downarrow(x) = \mathcal{O}(x)$ y $\uparrow(x) = N_f(x)$. Sea $y \in \mathcal{O}(x)$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y = f^m(x)$. Como $\mathcal{O}(x) = N_f(x)$, entonces $y \in N_f(x)$. Por lo tanto, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) = x$, de donde tenemos que, $y = f^m(x) = f^m(f^n(y))$. Es decir, y tiene periodo $n + m$; por lo tanto, (X, τ_f) es puntualmente periódico.

(\impliedby) Sea (X, τ_f) puntualmente periódico. Veamos que $\mathcal{O}(x) = N_f(x)$ mostrando la doble contención.

- Sea $x \in X$. Como (X, τ_f) es puntualmente periódico, entonces existe algún $p \in \mathbb{N}$ tal que, $f^p(x) = x$. Sea $y \in \mathcal{O}(x)$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que, $y = f^n(x)$. Tomemos $m = n(\text{ mód } p)$, como x tiene periodo p , entonces $y = f^n(x) = f^m(x)$. Como $m \leq p$, entonces existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $m+k = p$, por lo tanto, $f^k(y) = f^k(f^m(x)) = f^p(x) = x$. Es decir, $y \in N_f(x)$.
- Sean $y, x \in X$ tales que $y \in N_f(x)$. Sea $p \in \mathbb{N}$ el periodo de y . Como $y \in N_f(x)$, entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) = x$. Tomemos $m = n(\text{ mód } p)$, entonces $f^n(y) = f^m(y) = x$, pues y tiene periodo p . Como $m \leq p$, entonces existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que, $m+k = p$ y tenemos que, $f^p(y) = f^k(f^m(y)) = f^k(x)$. Por lo tanto, $y = f^k(x)$, es decir, $y \in \mathcal{O}(x)$.

□

Shirazi y Golestani⁷ también abordaron el producto de espacios primales. El Teorema 2.3.6 de Echi caracteriza el producto arbitrario de espacios primales, por otra parte, el teorema al que llegaron Shirazi y Golestani caracteriza el producto finito de espacios

⁷ Fatemah Ayatollah Zadeh Shirazi y Nasser Golestani. "More about functional Alexandroff topological spaces". En: *Scientia Magna* 6 (dic. de 2010), págs. 64-69.

primales. Aunque el siguiente teorema está limitado a productos finitos, resulta ser sorprendentemente similar al Teorema 2.3.6, al igual que ocurrió con sus trabajos previos sobre topologías primales.

Teorema 2.3.9. ⁷ Sea $\{(X_i, \tau_i), i \in I\}$ una familia de espacios topológicos no vacíos tales que $|X_i| \geq 2$, para todo $i \in I$, y $X = \prod_{i \in I} X_i$. Entonces (X, τ_P) es primal si y solo si se cumplen las siguientes afirmaciones:

1. (X_i, τ_i) es primal para todo $i \in I$.
2. Se cumple una de las siguientes condiciones:
 - a) Para todo $i \in I$, (X_i, τ_i) es un espacio primal puntualmente periódico.
 - b) Existe $k \in I$ tal que (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in I - \{k\}$.
3. I es finito.

Demostración. (\implies) Sea (X, τ_P) es primal. Entonces por el Teorema 2.3.6 tenemos que (X_i, τ_i) es primal para todo $i \in I$, es decir, se cumple 1. Como (X, τ_P) es primal, entonces se cumple alguna de las condiciones de la parte 2 del Teorema 2.3.6. Supongamos que se cumple la condición 2(i). Entonces existe un subconjunto finito J de I , tal que $|X_i| = 1$ para todo $i \in I \setminus J$; sin embargo, por hipótesis tenemos que $|X_i| \geq 2$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $|X_i| \neq 1$ para todo $i \in I$, es decir, $I = J$. Por ende I es un conjunto finito de índices y se cumple 3. Nuevamente por la condición 2(ii) del Teorema 2.3.6, tenemos que existe un $k \in I$ tal que (X_k, τ_k) no es simétrico y (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in I - \{k\}$. Esto muestra 2(b).

Supongamos ahora que se cumple 2(ii) del Teorema 2.3.6. Tenemos que existe un $J \subseteq I$ finito y un $K \subseteq I \setminus J$ finito, tales que $|X_i| = 1$ para todo $i \in I \setminus (J \cup K)$. Nuevamente por la hipótesis de que $|X_i| \geq 2$ para todo $i \in I$, concluimos que $I = J \cup K$ y, por lo tanto, I es finito. De nuevo, por la condición 2(ii) del Teorema 2.3.6, tenemos que (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I$. Por el Lema 2.3.8, esto es equivalente a afirmar que (X_i, τ_i) es puntualmente periódico para todo $i \in I$, lo cual prueba 2(a).

(\impliedby) Veamos que (X, τ_P) es primal usando el Teorema 2.3.6. Las afirmaciones 1 y 3 garantizan que se cumple el enunciado de la afirmación 2 del Teorema 2.3.6 tomando $I = J$.

Supongamos 2(a), es decir, que (X_i, τ_i) es un espacio primal puntualmente periódico para todo $i \in I$. Por el Lema 2.3.8, (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I$ y se verifica la parte 2(ii) del Teorema 2.3.6.

Supongamos que no se cumple 2(a) pero se cumple 2(b). Entonces existe algún $k \in I$ tal que (X_k, τ_k) no es puntualmente periódico y por ende no es simétrico. Por el Teorema 2.3.2, a lo sumo puede existir un único k tal que (X_k, τ_k) no es puntualmente periódico. Por lo tanto, (X_i, τ_i) es simétrico para todo $i \in I - \{k\}$. Como (X_k, τ_k) no es simétrico, entonces no es discreto. Por 2(b), esto implica que (X_i, τ_i) es discreto para todo $i \in I - \{k\}$. Por lo tanto, se verifican las hipótesis de la parte 2(i) del Teorema 2.3.6.

Puesto que a partir de las hipótesis del Teorema 2.3.9, se cumplen las hipótesis de la parte 2 del Teorema 2.3.6, entonces afirmamos que (X, τ_P) es un espacio primal.

□

Bibliografía

- Echi, Othman. "On the product of primal spaces". En: *Quaestiones Mathematicae* 45 (oct. de 2020), págs. 1-10 (vid. págs. 10, 17, 33, 34, 40-43).
- "The categories of flows of Set and Top". En: *Topology and its Applications* 159.9 (2012), págs. 2357-2366. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016686411200034X> (vid. págs. 9, 12, 15, 19, 25, 30, 32).
- Martínez, Andrea. "Complementación en el retículo de topologías de Alexandroff". Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander, 2024. URL: <https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/42321> (vid. págs. 22, 30).
- Richmond, Tom. *General Topology: An Introduction*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020 (vid. págs. 13, 14, 16, 19, 21, 23).
- Sami Lazaar, Tom Richmond y Tarek Turki. "Maps generating the same primal space". En: *Quaestiones Mathematicae* 40.1 (2017), págs. 17-28. URL: <https://doi.org/10.2989/16073606.2016.1260067> (vid. págs. 30, 36, 37, 46).
- Shirazi, Fatemah Ayatollah Zadeh y Nasser Golestani. "Functional Alexandroff Spaces". En: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 40 (2011), págs. 515-522. URL: <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/86547> (vid. págs. 9, 11, 20, 28, 35).
- "More about functional Alexandroff topological spaces". En: *Scientia Magna* 6 (dic. de 2010), págs. 64-69 (vid. págs. 47, 48).