

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Sistemas Numéricos y Numerales: Historia, pedagogía y Aplicaciones

Karol Natalia Briceño Cuadros, Leila Yalid Jerez Bueno y Nathalia Remolina Serrano

Trabajo de Grado en Modalidad de Seminario para Optar al título de Licenciado en matemáticas

Director

Rafael Fernando Isaacs Giraldo

Magíster en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2024

Dedicatoria

A mi madre, Hortencia, por su constante apoyo y comprensión a lo largo de estos años. Su dedicación y paciencia han sido una fuente crucial de fortaleza y motivación.

A mi hermana, Juliana, por escucharme, ayudarme y animarme en los momentos más difíciles. Su apoyo incondicional ha sido de gran valor durante esta etapa.

A mi familia en general, por su contribución y aliento constante, que han sido esenciales para alcanzar esta meta.

A mi pareja, Alejandro, por su fe en mí en cada momento del proceso. Su acompañamiento y amor incondicional han sido un pilar fundamental que me ha permitido superar todos los obstáculos.

A mis maestros, por enseñarme, guiarme y motivarme a lo largo de mi formación. Gracias a ellos, he podido confirmar mi vocación y el deseo de continuar en este campo.

A mis compañeras, Nathalia y Leila, por confiar en mí para llevar a cabo este trabajo en conjunto y por el apoyo brindado durante toda la carrera.

Karol Natalia Briceño Cuadros

A mis padres, Edilma y Eliecer, por su comprensión y acompañamiento durante todo este proceso, por brindarme su apoyo constante en cada momento difícil. A cada uno de mis hermanos y hermanas, quienes estuvieron para mí siempre, apoyándome de diferentes formas.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

A todos aquellos profesores que hicieron parte de mi formación: de cada uno de ellos aprendí cosas relevantes para mi futuro como docente. Su guía fue clave en cada paso de mi vida académica.

A mis compañeras de trabajo de grado, Leila y Natalia, por decidir compartir conmigo esta experiencia y por acompañarme, compartiendo sus conocimientos durante esta etapa.

Muchas gracias.

Nathalia Remolina Serrano

A mis padres, Aurora y Arturo, por su amor, sacrificio y apoyo constante, y por enseñarme el valor del esfuerzo y la dedicación. A mis hermanos, Mariana, Oswaldo y Saddy, por estar conmigo en los buenos y malos momentos. Gracias por creer en mí y por ser mi fuente de inspiración diaria.

A mi pareja, Eduardo, que ha sido mi apoyo y compañero en cada paso de este camino.

A mis profesores, cuya guía y apoyo han sido imprescindibles para mi desarrollo académico y personal.

Finalmente, a mis compañeras, Nathalia y Karol, por estar en cada momento y compartir conmigo sus conocimientos.

Leila Yalid Jerez Bueno

Agradecimientos

Nuestro primer agradecimiento es para Dios por guiarnos y fortalecernos en los momentos difíciles permitiéndonos desarrollar este proyecto de forma exitosa.

A nuestros padres y familiares, por el apoyo y comprensión incondicional durante nuestra vida académica, su confianza nos permitió superar las dificultades que se presentaron a lo largo de este periodo.

A nuestro director, el profesor Rafael Isaacs, por su invaluable guía y su gran conocimiento esenciales para el desarrollo de esta investigación. Su apoyo constante y sus sabios aportes han sido fundamentales para llegar a buen término.

A todos nuestros profesores por compartir su conocimiento y experiencia en cada clase impartida, por aconsejarnos a lo largo de nuestro desarrollo académico y personal.

Finalmente, a nuestros compañeros, por compartir sus conocimientos y por su acompañamiento durante estos años.

¡Gracias!

Natalia, Leila y Nathalia

Contenido

Introducción.....	15
1. Planteamiento del problema.....	16
2. Justificación.....	17
3. Antecedentes.....	19
4. Objetivos.....	27
4.1 Objetivo general.....	27
4.2 Objetivos específicos.....	27
5. Marco teórico.....	28
5.1 Los sistemas numéricos aditivos vs los posicionales.....	28
5.2 Criterios de divisibilidad.....	39
5.3. Sistemas de Numeración.....	47
5.4 Historia de los algoritmos operativos.....	55
5.5 La multiplicación de los campesinos rusos.....	65
5.6 Kaprekar.....	70
5.7 La aritmética de Diofanto de Alejandría.....	80
5.8 Decimales y sumas infinitas.....	99
5.9 Bases negativas.....	117
5.10 Fracciones continuas.....	121
5.11 Reales: Clases De Sucesiones De Cauchy y Cortaduras De Dedekind.....	129
5.12 Enteros de Gauss, numeración y dragones.....	136

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

6. Metodología.....	140
6.1 Fase heurística.....	141
6.2 Fase hermenéutica.....	163
6.3 Fase de elaboración de material audiovisual y escrito.....	164
7. Conclusiones.....	172
Referencias Bibliográficas.....	175

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Lista de tablas

Tabla 1. Números romanos.....	36
Tabla 2. Símbolo para la multiplicación a través del tiempo.....	58
Tabla 3. Iteración y frecuencia de la constante de Kaprekar.....	72
Tabla 4. Números después de la primera resta en el proceso de Kaprekar. Adaptado de Nishiyama (2006).....	73
Tabla 5. Números máximos. Adaptado de Nishiyama (2006).....	74
Tabla 6. Número de constantes para un número de 2-10 dígitos.....	76
Tabla 7. Número de constantes para un número de 11-19 dígitos.....	76
Tabla 8. Constante de Kaprekar para un número de n dígitos.....	77
Tabla 9. Traducciones de la obra La Aritmética a través del tiempo.....	83
Tabla 10. Representación de las unidades de mil.....	87
Tabla 11. Notación de las potencias de aritmos.....	88
Tabla 12. Solución del problema 28 del libro I.....	90
Tabla 13. Representación de una fracción alícuota de números.....	91
Tabla 14. Representación de las fracciones alícuotas de aritmos.....	92
Tabla 15. Representación de las fracciones no alícuotas de números tomada de Medina y Albarracín.....	94
Tabla 16. Representación de las fracciones no alícuotas de aritmos.....	95
Tabla 17. Cálculo de sumas de potencias realizadas por Jacob.....	111
Tabla 18. Etapas de la fase heurística.....	141

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Tabla 19. Ficha de revisión documental: listado de documentos seleccionados.....	144
Tabla 2. Cronograma de presentación de seminarios.....	163
Tabla 21. Listado de temas tratados en material audiovisual.....	164

Lista de figuras

Figura 1. Dibujo de Quipú tomado de Guedj, 1998.....	29
Figura 2. Imagen original del museo Britanico publicada por Ibolya Horváth, 2016	32
Figura 3. Posible representación del cero.....	33
Figura 4. Numeración jeroglífica tomada de Rodríguez, 2016.....	34
Figura 5. Sistema de numeración griego ático tomado de Ventura, 2021	35
Figura 6. Sistema de numeración griego jónico.....	35
Figura 7. Desarrollo de la numeración Hindú.....	37
Figura 8. Numeración Hindú antigua.....	38
Figura 9. Sistema de numeración maya.....	38
Figura 10. Hueso de Ishango (peroné de babuino).....	39
Figura 11. Diferentes bases por agrupamiento tomada de Ramos (2010).....	48
Figura 12. Página del libro Mercantile aritmética (1489) de Widman.....	56
Figura 13. Manuscritos latino MS C80, páginas 350 y 352 de 1486.....	57
Figura 14. Página del libro “Teutsthe álgebra” (1659) de John Rahn, que contiene la regla del signo en la multiplicación.....	60
Figura 15. Método de multiplicación chino.....	63
Figura 16. Método de multiplicación Musulman.....	64
Figura 17. Método inverso para la multiplicación.....	70
Figura 18. Rutas que toman los números para llegar al 6174. Adaptado de Nishiyama (2006)	76
Figura 19. Representación egipcia de las fracciones.....	80

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 20. Sistema de notación Hierático. Papiro de Ahmes.....	80
Figura 21. Sistema de numeración griego jónico.....	86
Figura 22. Notación para el menos.....	89
Figura 23. Ejemplo tomado del libro V-22 de Diofanto.....	94
Figura 24. Ejemplo tomado de Medina y Albarracín (2012).....	96
Figura 25. Multiplicación entre fracciones alícuotas.....	98
Figura 26. Representación de las partes de un número decimal.....	100
Figura 27. Texto de Thiende 1585.....	100
Figura 28. Representación de los números decimales tomada del libro La Disme de Stevin	101
Figura 29. Portada de Ars Conjectandi de Jacob Bernoulli (1713).....	106
Figura 30. Tomada de Ruiz (2018) detalle de la obra donde muestran el procedimiento para determinar sumas.....	107
Figura 31. Triángulo aritmético tomado de Saanabria (1996).....	112
Figura 32. Valores de la base -2 y nega decimal tomado de Zimmer (1998).....	118
Figura 33. Adición. Elaboración propia.....	119
Figura 34. Sustracción. Elaboración propia	119
Figura 35. Producto. Elaboración propia.....	120
Figura 36. Algoritmo de la división. Elaboración propia.....	120
Figura 37. Cociente. Elaboración propia.....	120
Figura 38. Representación de la fracción continua simple finita.....	121
Figura 39. El número de oro como una fracción continua.....	124

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 40. Fracción continua de Bombelli.....	128
Figura 41. Fracción continua de Brouncker.....	128
Figura 42. Fracción continua de Euler.....	129
Figura 43. Fracción continua de Lambert.....	129
Figura 44. Gráfica de los primos gaussianos. Temístocles (2017).....	137
Figura 44. Diseño curva del dragón. Gamboa (2020).....	138
Figura 45. Paso 1 tomado de Gamboa (2020).....	139
Figura 46. Paso 2 tomado de Gamboa (2020).....	139
Figura 48. Paso 3 tomado de Gamboa (2020).....	139
Figura 49. Twin dragon tomada de Gamboa (2020)	139
Figura 50. Código Qr canal de Youtube	172
Figura 51. Organización de los videos	172

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Lista de protocolos

Protocolo de la sesión 1 de seminario de investigación.....	183
Protocolo de la sesión 2 de seminario de investigación.....	184
Protocolo de la sesión 3 de seminario de investigación.....	185
Protocolo de la sesión 4 de seminario de investigación.....	188
Protocolo de la sesión 5 de seminario de investigación.....	189
Protocolo de la sesión 6 de seminario de investigación.....	190
Protocolo de la sesión 7 de seminario de investigación.....	191
Protocolo de la sesión 8 de seminario de investigación.....	192
Protocolo de la sesión 9 de seminario de investigación.....	194
Protocolo de la sesión 10 de seminario de investigación.....	195
Protocolo de la sesión 11 de seminario de investigación.....	195
Protocolo de la sesión 12 de seminario de investigación.....	196
Protocolo de la sesión 13 de seminario de investigación.....	198

Resumen

Título: Sistemas Numéricos y Numerales: Historia, Pedagogía y Aplicaciones

Autores: Karol Natalia Briceño Cuadros, Leila Yalid Jerez Bueno y Nathalia Remolina Serrano

Palabras clave: Historia de las matemáticas, sistemas de numeración, numerales, divisibilidad, bases, algoritmos operativos, fracción continua

Descripción:

Los diferentes sistemas de numeración han sido fundamentales en la historia de la humanidad, ya que su desarrollo permitió la constitución de la numeración indo-arábiga, la cual es la base de los sistemas numéricos modernos. Esta evolución facilitó a matemáticos de diferentes culturas y épocas el establecimiento de algoritmos y aplicaciones que continúan siendo esenciales en la actualidad. Este proyecto aborda, desde un enfoque interdisciplinario, las contribuciones significativas de diversas civilizaciones y matemáticos a lo largo de la historia. Además de un análisis histórico, se realizan seminarios, cuyo objetivo es profundizar en la comprensión de la historia de las matemáticas y su relevancia en el entorno académico, siguiendo una línea conceptual. Como complemento, se desarrollará material audiovisual, pensado para ser un recurso didáctico que facilite tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas. Este enfoque tiene como propósito no sólo enriquecer el currículo educativo, sino también estimular el interés de los estudiantes por la historia de las matemáticas, promoviendo el desarrollo de habilidades críticas y reflexivas a lo largo de su proceso de aprendizaje. De esta manera, se busca conectar el pasado matemático con su aplicación contemporánea, fortaleciendo la enseñanza de las matemáticas en un contexto histórico y cultural.

Abstract

Title: Numerical Systems and Numerals: History, Pedagogy, and Applications

Authors: Karol Natalia Briceño Cuadros, Leila Yalid Jerez Bueno, and Nathalia Remolina Serrano

Keywords: History of mathematics, numeral systems, numerals, divisibility, bases, operational algorithms, continued fraction

Description:

The different numeral systems have been fundamental in the history of humanity, as their development enabled the establishment of the Indo-Arabic numeral system, which is the foundation of modern numerical systems. This evolution allowed mathematicians from various cultures and eras to establish algorithms and applications that remain essential today. This project, from an interdisciplinary approach, addresses the significant contributions of various civilizations and mathematicians throughout history. In addition to a historical analysis, seminars are conducted with the aim of deepening the understanding of the history of mathematics and its relevance in the academic environment, following a conceptual line. As a complement, audiovisual material will be developed, designed to serve as a didactic resource that facilitates both the teaching and learning of mathematics. This approach aims not only to enrich the educational curriculum but also to stimulate students' interest in the history of mathematics, promoting the development of critical and reflective skills throughout their learning process. In this way, the goal is to connect the mathematical past with its contemporary application, strengthening the teaching of mathematics within a historical and cultural context.

Introducción

La matemática, como disciplina fundamental en el desarrollo del conocimiento humano, ha evolucionado a través de siglos gracias a las contribuciones de diversas culturas y matemáticos. En particular, los sistemas de numeración y los numerales han jugado un papel crucial en esta evolución, permitiendo el desarrollo de algoritmos y aplicaciones que son esenciales en la actualidad. Sin embargo, la enseñanza de las matemáticas en la educación escolar a menudo se centra en la ejecución de algoritmos, descuidando la rica historia que subyace a estos conceptos.

Este seminario de investigación busca abordar esta brecha al explorar la historia, la pedagogía y las aplicaciones de los sistemas numéricos y numerales. A través de un enfoque interdisciplinario, se examinarán las contribuciones significativas de diversas culturas a lo largo del tiempo, y se desarrollará material audiovisual innovador que sirva como recurso didáctico. El objetivo principal es fomentar una comprensión más profunda de la historia de las matemáticas y su aplicación en el aula, enriqueciendo así el currículo educativo y despertando el interés de los estudiantes por esta fascinante disciplina.

El documento está distribuido de la siguiente manera, en primer lugar, se encuentra el planteamiento del problema, en el cual se expone la necesidad de implementar la historia en la enseñanza escolar; seguido de la justificación y documentos que anteceden el presente trabajo; luego, se hace un recorrido por los diferentes temas tratados en cada uno de los seminarios partiendo desde los sistemas numéricos hasta enteros de Gauss, numeración y dragones, siguiendo una línea conceptual; después, se menciona la metodología tenida en cuenta para la realización del seminario; para finalizar se exponen algunas conclusiones sobre el objetivo de este trabajo.

1. Planteamiento del problema

El desarrollo de la matemática escolar se encuentra desligada casi por completo de su historia, lo que impide que el estudiante conozca la evolución de los conceptos, centrándose principalmente en la ejecución de los algoritmos. La historia muestra la necesidad que conlleva el surgimiento de diversos objetos matemáticos, entender dicha necesidad le da sentido a lo que el estudiante aprende en el aula, además genera una motivación en el alumnado. Dentro de la pedagogía, la historia influye en la forma de enseñar, ya que dota al docente de herramientas esenciales para mejorar la enseñanza-aprendizaje.

Por lo anterior, actualmente en el aula el estudiante no concibe la diferencia entre los sistemas numéricos y los numerales, puesto que no posee conocimiento sobre la historia de la evolución de estos, pues el desarrollo a lo largo del tiempo explica las diferentes etapas que vivieron para concretar dichos conceptos. De acuerdo con los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional (MEN,2006) “estas extensiones sucesivas de los sistemas numéricos y de sus sistemas de numeración representan una fuerte carga cognitiva para estudiantes y docentes y una serie de dificultades didácticas para estos últimos”, lo que conlleva a que sea un tema poco tratado en el aula, sin embargo, según los lineamientos curriculares del MEN(1998), se plantea que

El trabajo sobre el sistema de numeración y en especial sobre el valor posicional, siempre se ha considerado importante en la escuela. Se han propuesto diferentes métodos para ayudar a los niños a lograr su comprensión, incluyendo el uso de material concreto y modelos, el estudio de varias bases, etc.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Por lo tanto, el investigar y analizar la historia de diferentes numeraciones y sus aplicaciones en los algoritmos usuales, debe aportar a la pedagogía para la comprensión y desarrollo de los conceptos fundamentales que subyacen en las estructuras matemáticas elementales. La historia brinda herramientas para apoyar la enseñanza y aprendizaje de los diferentes temas y abordarla es fundamental para el mejoramiento en el aula.

2. Justificación

La enseñanza de las matemáticas en el ámbito escolar enfrenta un desafío significativo: la desconexión entre los conceptos matemáticos y su historia. Esta desconexión impide que los estudiantes comprendan la evolución y el contexto histórico de los conceptos matemáticos, lo que limita su capacidad para apreciar la importancia y la relevancia de las matemáticas en el desarrollo de la humanidad. La historia de las matemáticas proporciona un marco enriquecedor que no sólo contextualiza los conceptos, sino que también humaniza la disciplina, mostrando cómo las necesidades y curiosidades de diferentes culturas dieron lugar a los sistemas numéricos y numerales que utilizamos hoy en día.

La inclusión de la historia de los sistemas de numeración y numerales en la enseñanza de las matemáticas tiene múltiples beneficios pedagógicos. Primero, permite a los estudiantes ver las matemáticas como una disciplina en evolución, llena de descubrimientos y avances significativos. Segundo, proporciona una motivación adicional, ya que los estudiantes pueden relacionar los conceptos matemáticos con historias fascinantes y aplicaciones prácticas. Tercero,

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

dota a los docentes de herramientas didácticas valiosas que pueden utilizar para explicar conceptos complejos de manera más accesible y atractiva.

Este seminario de investigación se justifica por la necesidad de abordar estas carencias en la enseñanza de las matemáticas. Al investigar y analizar la historia de diferentes numeraciones y sus aplicaciones en algoritmos, buscamos aportar a la pedagogía un enfoque más holístico y comprensivo. La creación de material audiovisual permitirá a los docentes y estudiantes acceder a recursos educativos que faciliten la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas de una manera más dinámica y significativa.

Además, esta investigación responde a los estándares y lineamientos del Ministerio de Educación Nacional, que reconocen la importancia de trabajar sobre el sistema de numeración y el valor posicional en la educación escolar. Al integrar la historia de las matemáticas en el currículo, no solo se enriquece la experiencia educativa, sino que también se promueve el desarrollo de habilidades críticas y reflexivas en los estudiantes, preparándose para enfrentar desafíos académicos y profesionales con una comprensión más profunda y amplia de la matemática.

En resumen, este seminario de investigación se presenta como una oportunidad para transformar la enseñanza de las matemáticas, haciendo que los conceptos numéricos y numerales sean más accesibles, interesantes y relevantes para los estudiantes. La historia de las matemáticas, utilizada como una herramienta pedagógica, tiene el potencial de mejorar significativamente la calidad de la educación matemática, fomentando una apreciación duradera y un entendimiento profundo de esta disciplina esencial.

3. Antecedentes

Teniendo en cuenta el desarrollo de los sistemas numéricos y numerales a través de la historia, la cual permite recrear los procesos (retórica, sincopada y simbólica) que se llevaron a cabo para la construcción de cada concepto, y relacionando los objetivos de esta investigación con la historia de las matemáticas y la enseñanza en el aula como criterios principales para la elección de estudios, los cuales dan luz a este trabajo mostrando cómo diferentes autores han realizado investigaciones que destacan la influencia que posee la historia en la didáctica de las matemáticas. Uno de estos artículos es de carácter nacional y los demás son de carácter internacional.

Protti (2003), hizo un artículo titulado *La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico*, la investigación considera algunos recursos que facilitan el uso pedagógico de la historia de las matemáticas en la enseñanza de esta área, tanto en la secundaria como en la universidad. En consecuencia, se lleva a cabo un recorrido histórico del álgebra, para que el estudiante logre familiarizarse con algunos de los conceptos. El artículo llega a las siguientes conclusiones: primero, el empleo adecuado de la historia de las matemáticas, es más que una contextualización, dado que este, se puede utilizar de formas diferentes con diversos objetivos, lo cual permite aprovechar cada aspecto histórico, para lograr una enseñanza más efectiva. De la misma manera, da a conocer la importancia del desarrollo de la matemática con respecto a la historia de la humanidad. Segundo, algunas de las opciones son el desarrollo de anécdotas, el estudio del contexto histórico de la solución de un problema concreto, el desarrollo histórico de un tema o de un área de matemáticas y el estudio directo de los trabajos originales de algún

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

matemático, las cuales favorecen la enseñanza. Tercera, los recursos anteriormente mencionados solo se pueden usar si se tiene conocimiento del proceso histórico de lo que se pretende enseñar, pues esto permite escoger los aspectos de la historia que facilitan el aprendizaje, manteniendo un vínculo con la filosofía y la práctica educativa, lo que hace importante que los programas de estudio de los estudiantes incluyan una formación básica en historia de las matemáticas. Por último, el proceso de aprendizaje requiere de un desarrollo intelectual, el cual es gradual, pues a medida que se aprende, el intelecto se desarrolla, así mismo es necesario conocer que el aprendizaje se da en cada una de nuestras vivencias y los conocimientos son adquiridos a través de los sentidos. Luego en el aula el niño debe ampliar, ordenar, sistematizar y desarrollar esos conocimientos, recordemos que el estudiante aprende mejor cuando encuentra sentido a lo que se le propone.

En la investigación realizada por González (2004) titulada *La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*, se habla sobre la importancia de la historia en la enseñanza de las matemáticas. González deja ver la historia de las matemáticas primero como un recurso didáctico a través del método genético, el cual pretende demostrar que para la comprensión de un concepto se debe repetir paso a paso la construcción histórica del mismo, segundo como motor en la formación de profesores, ya que genera vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación, en tercer lugar toma la historia como instrumento para enriquecer culturalmente la enseñanza, esto porque la matemática se puede relacionar con varias áreas académicas y culturales. Este proceso le permite a González llegar a la conclusión de que para lograr una mejor comprensión de la matemática es necesario la historia de la matemática, ya que es un instrumento que permite el redescubrimiento del aprendizaje, que sirve como motivador y de integrador interdisciplinar.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En el artículo de Anacona (2003) titulado *La historia de las matemáticas en la educación matemática*, tiene como objetivo señalar algunos aportes de la Historia de las Matemáticas en la reflexión educativa, parte de la idea de que, en los estudios históricos realizados respecto del desarrollo de un concepto, se evidencian elementos epistemológicos y lógicos importantes para la constitución teórica, que facilitan la comprensión del concepto y revelan características de la actividad matemática de construcción, para mejorar las propuestas educativas de los docentes. Así mismo se da a conocer una actitud distinta frente al conocimiento matemático, dado que este está relacionado con el arte y la filosofía. La autora destaca las siguientes reflexiones sobre este artículo: el panorama de la investigación es alentador, aunque no es una tarea fácil, no todas las experiencias son exitosas y la problemática es compleja, pues en esta intervienen diferentes dimensiones como lo son: el tipo de saber, la formación de los docentes, la situación concreta del currículo, las estrategias didácticas frente al saber del alumno, las concepciones acerca de las matemáticas, la historia y la didáctica y, naturalmente, los intereses de los estudiantes y de la sociedad. Las investigaciones en la educación matemática y la historia de las matemáticas en cada país son el mejor vehículo para la autoformación y para activar la motivación en los demás docentes, teniendo como finalidad situar el problema entre dos campos del saber que se complementan, además de mostrar un esquema de análisis que lleve a la reflexión al país.

González (1991) en su investigación titulada *Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza*, el cual se centra en la idea de que una comprensión profunda de los conceptos fundamentales de cualquier ciencia requiere el conocimiento de su historia, dado que en las matemáticas actuales hay exceso del carácter lógico-matemático, lo que da lugar al dogmatismo en su enseñanza, de igual forma

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

se resalta el rigor y exactitud como los valores importantes en las matemáticas, lo que lleva a una respuesta negativa por partes de los estudiantes, se piensa que la historia de las matemáticas enriquece la enseñanza, por lo cual se sugiere que la historia sea integrada en el currículo como fuente de inspiración, autoformación permanente y orientación para la actividad educativa. El autor realiza la siguiente conclusión del artículo, el docente puede encontrar un puente entre las ciencias y las humanidades por medio de la historia de las matemáticas, una forma de autoformación para la comprensión profunda de las Matemáticas y una herramienta para innovar y adaptar la pedagogía, así mismo permite plantear activamente el aprendizaje como un redescubrimiento, la historia de las matemáticas es una fuente de material didáctico inagotable, de ideas y problemas interesantes. De igual manera, enriquece la parte personal, profesional y científica, permitiendo al profesor mejorar su enseñanza.

Otro trabajo titulado *Epistemología y didáctica*, hecha por Artigue (2018), el autor trata temas como la relación entre la teoría de las situaciones didácticas y epistemología, los diferentes obstáculos que presenta la historia de las matemáticas y algunas concepciones. En este primer apartado menciona la integración de la epistemología dentro de la teoría de las situaciones didácticas, y la aparición de los obstáculos. Los obstáculos tienen tres orígenes: origen ontogenético, origen didáctico y origen epistemológico, el cual tiene que ver con la mala adaptación de los saberes. Por último, realiza una revisión histórica de las concepciones.

La siguiente investigación que aporta al presente trabajo fue hecha por Barbin y Tzanakis (2020) titulada *History of Mathematics and Education*, este artículo parte del interés de integrar la historia de las matemáticas con la educación matemática y da información de cómo desde hace aproximadamente 30 años se ha buscado esa integración. Uno de los aspectos y contribuciones más relevantes fue que en 1976 aparece the International Study Group on the relations between

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

the History and Pedagogy of Mathematics (HPM Group) uno de sus propósitos es fomentar una comprensión más profunda de la evolución de las matemáticas. Así mismo, busca ayudar a mejorar la instrucción y los currículos al relacionar la enseñanza de las matemáticas y su historia con el desarrollo de las matemáticas. Además, otro de sus objetivos es crear recursos fundamentales para el beneficio de los maestros, facilitando el acceso a este material como a fuentes históricas. Por otra parte, este artículo expone los aportes culturales que relacionan la matemática con otras disciplinas como el arte, la literatura o la filosofía. Los autores especifican que la historia de la matemática no debe enseñarse de manera independiente o como un tema de clase, sino integrarse y orientar al docente para que su enseñanza sea más enriquecedora. Por último, debido a que muchas obras mencionan problemas y recursos tomados de textos originales, le permite al estudiante relacionar, comprender e indagar los diferentes contextos en que surgieron nociones matemáticas.

De la misma manera, el estudio elaborado por Fried (2001) titulado: “Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?”, expone los retos que existen al combinar la educación matemática convencional y la historia de las matemáticas. Para el autor existen dos posibles enfoques en el desarrollo de este problema. La primera aproximación es mantener un sistema similar al actual y separar radicalmente la historia de las matemáticas. Lo anterior con el fin de centralizar el estudio de la historia de las matemáticas sin comprometer la enseñanza de las matemáticas modernas. Contrariamente, el segundo enfoque es la acomodación radical de la historia de las matemáticas en la enseñanza moderna, centrándose en comprender textos matemáticos clásicos y comprender el método en el que se desarrollaron las ideas matemáticas. El principal problema que expone el autor es el compromiso actual de enseñar las técnicas matemáticas enfocado en las ciencias puras y aplicadas, este compromiso puede intervenir o

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

distorsionar la historia de las matemáticas. Como posible solución para converger estas dos áreas se han empleado enfoques diversos como la sustitución de problemas de aula ordinaria con problemas históricos relacionados con el mismo material. De la misma forma se puede aplicar la inclusión de problemas históricos directamente relacionados con el tema que se está enseñando.

El estudio titulado *Is It Possible to Bring the Past into the Present for an Effective History of Mathematics Teaching: Newspaper preparation method* (¿Es posible traer el pasado al presente para una historia efectiva de la enseñanza de las matemáticas? Método de preparación del periódico) hecho por Koyuncu (2023), en el que se utilizó el método de preparación del periódico para trabajar la integración de la historia de matemáticas en el curso de matemáticas de educación primaria. Este método busca cerrar las brechas que quedan al usar otros métodos comunes en la enseñanza de la historia de las matemáticas y consiste en crear un periódico en el cual diversos grupos trabajan como corresponsales de Atenas buscando información de temas históricos matemáticos. Se observó en el análisis una mejora significativa en las creencias y actitudes; los estudiantes adquirieron habilidades de proactividad, indagación, autogestión, entre otras; y se generó mayor interés hacia historia de las matemáticas.

Por último, Marshall y Rich (2000) escriben el artículo *The role of history in a mathematics class* en el cual expresan la importancia que ha surgido, en los últimos 5 años, de relacionar la historia y la enseñanza de las matemáticas, en 1995 se fundó Instituto de Historia de las matemáticas y su Uso en la Enseñanza de la Asociación Matemática de América (Mathematical Association of America Institute on the History of Mathematics and Its Use in Teaching) con apoyo de la Fundación Nacional de Ciencias (National Science Foundation), con el fin de explorar cómo se puede usar la historia de las matemáticas en el aula. También, mencionan que en 1997, McBride y Rollins hicieron un estudio sobre los efectos de la historia de

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

las matemáticas en cursos universitarios de álgebra, son luego de analizar los resultados de 67 estudiantes al comienzo y al final de un curso de 12 semanas, concluyeron que había una diferencia significativa en el cambio de actitud hacia las matemáticas. De la misma manera, Jardine (1997) en un curso de cálculo universitario, los estudiantes hicieron un ensayo y una presentación corta sobre una figura o concepto histórico, relacionado con las matemáticas, y al finalizar anunciaron que la actividad los había motivado a aprender matemáticas, esto mejoró cualitativamente la experiencia de los alumnos. Por último, Furinghetti (1997) a través de un estudio de casos, donde participaron 4 profesores que introdujeron las matemáticas en sus clases de diferentes maneras, concluye que la historia de las matemáticas facilita la comprensión a través de la reflexión, además, amplía el marco de referencia del estudiante, aportándole una mayor flexibilidad. Así mismo, los escritores nombran varios autores que aportan ideas para usar la historia de las matemáticas, como escribir informes, hacer biografías y obras de teatro de matemáticos, tener experiencias de descubrimiento para formar estudiantes críticos. Como conclusión, la historia desempeña un papel fundamental y significativo en las aulas, normaliza las matemáticas al notar que son creación del hombre, enriquece el currículo y amplía los conocimientos y valores que los estudiantes forman en clase.

Un estudio realizado en la Universidad Autónoma de Occidente, presentado por Jimmy Gilberto Dávila Vélez, explora el uso de videos educativos como una estrategia didáctica complementaria en la asignatura de control estadístico de la calidad. Este trabajo se centra en mitigar las dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de conceptos complejos mediante la implementación de videos que explican el uso de herramientas estadísticas básicas. La intervención consistió en la creación de cinco videos educativos que se pusieron a disposición de un grupo de estudiantes, mientras que otro grupo no tuvo acceso a este recurso. Los resultados

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

mostraron que el 100% de los estudiantes que utilizaron los videos consideraron que esta estrategia era adecuada para desarrollar conocimientos procedimentales, destacando su contribución al proceso formativo y recomendando su uso en otras asignaturas. Además, se evidenció que aquellos estudiantes que hicieron un uso regular de los videos lograron mejorar significativamente sus desempeños en comparación con sus pares que no utilizaron este recurso. Se concluye resaltando la efectividad de los videos educativos como una herramienta didáctica que no sólo facilita la comprensión de contenidos complejos, sino que también permite a los estudiantes avanzar a su propio ritmo, promoviendo un aprendizaje más autónomo y significativo. La experiencia positiva de los estudiantes llevó incluso a la creación de un canal de YouTube para ampliar el acceso a estos recursos, lo que sugiere un interés creciente en el uso de videos como parte integral de la pedagogía contemporánea.

4. Objetivos

Este apartado presenta el objetivo general y los objetivos específicos que se desean alcanzar en esta investigación.

4.1 Objetivo general

Investigar y analizar la historia, pedagogía y aplicaciones de los sistemas numéricos y numerales.

4.2 Objetivos específicos

Generar situaciones de discusión que permitan complementar las ideas obtenidas durante la investigación.

Proponer formas introductorias en el aula que fundamenten los algoritmos que se usan como aplicaciones de los conceptos adquiridos en los cursos elementales de matemáticas.

Crear videos que faciliten la comprensión y acceso a los conceptos trabajados.

5. Marco teórico

A continuación, se expondrán cada uno de los temas tratados en los seminarios teniendo en cuenta aspectos históricos y conceptuales, además se enfatizará en el documento que proporcionó mayor información.

5.1 Los sistemas numéricos aditivos vs los posicionales

A continuación se explora el origen de los números y la necesidad del ser humano de contar, destacando las primeras manifestaciones en las diferentes civilizaciones hasta el desarrollo de sistemas de numeración más complejos, con la finalidad de mostrar algunos sistemas numéricos que se establecieron en diferentes civilizaciones, resaltando sus características, dado que estaban divididos entre posicionales y aditivos, para concluir con la creación del sistema indo arábigo, analizando sus características y su evolución a lo largo de la historia. Para llevar a cabo este análisis, se tomará como referencia el texto *El imperio de las cifras y los números* de Denis Guedj (1998), donde se explora la historia y la evolución de los sistemas numéricos y la aritmética en las distintas civilizaciones.

¿De dónde surge la necesidad de contar? ¿Cómo surgen los números? El hombre es un animal social, al relacionarse con los demás se generan una serie de actividades como vigilar la cantidad de animales que poseían o cazaban, los intercambios, el tiempo y los recursos que administraban, que requieren el contabilizar; llevándolo a idear estrategias que lo ayuden a identificar sus bienes y deudas, para iniciar con el trueque o intercambio.

Debido a la dificultad que representa contabilizar más de cinco objetos de una sola mirada, el hombre primitivo comenzó su camino hacia la construcción del número expresando

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

cantidades. El hombre ideó diversas estrategias para suplir esta necesidad, una de ellas es la creación de marcas numéricas como las presentes en las civilizaciones del paleolítico (150 siglos a.C), que son muescas presentes en los huesos debido a su nivel de conservación a lo largo del

Figura 1
Dibujo de Quipu tomado de Guedj, 1998



tiempo. Además, el cuerpo también jugó un papel importante en la memorización de cantidad, se compararon cantidades con algunas partes del cuerpo de algunos animales como la boca del ser humano, las alas de las aves y el cuatro con las patas de un antílope. Se evidencia que surgen a la vez la idea de cantidad y sucesión, pues si tomamos la comparación de la cantidad “dos” con las alas de las aves al dividir las obtenemos dos objetos que se pueden identificar como cantidad “uno” unido a otra cantidad

“uno”, lo cual nos indica que la cantidad “uno” va antes de la cantidad “dos”. De igual manera, no hay una cantidad entre estas dos cantidades, lo anterior, llevó a la humanidad a ver que al adicionar una cantidad esa que se da iba a ser mayor que la cantidad a la que se le adiciono, creando la idea de sucesión.

5.1.1 Formas de representación

De acuerdo con el contexto en el que se presentó el número, existieron tres formas de presentarlo.

5.1.1.1 Figurada. La primera forma es las numeraciones figuradas, Guedj (1998) afirma “son numeraciones concretas, constituidas por un sistema de marcas físicas

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

materializadas sobre soportes duros”(p. 27). Los materiales utilizados como soportes fueron los huesos, guijarros, cuencas, conchas, nudos, bastoncillos, fichas, entre otros; los nudos se hacían en cuerdas, datan del siglo V a.C en Persia, este procedimiento fue evolucionando pues en el siglo VIII se crearon los números en cordeles conocidos como quipu.

Como se observa en la imagen 1 es una cuerda horizontal, de la que se desprenden una cantidad de cuerdas verticales, los cálculos dependen de la longitud de cada cuerda de la posición, del color y del tipo de nudo. Por otra parte, las muescas permiten realizar una correspondencia entre conjuntos de objetos.

Se han encontrado huesos con muescas, de unos treinta mil años de antigüedad, cuyo uso era el de servir como «contadores» o auxiliares para conocer la cantidad de objetos de una colección a través de una representación de la misma (Segovia, 2015, p. 50-51).

El ser humano al utilizar los huesos para realizar las muescas quería dejar constancia de los objetos, animales o tiempo, pues este material le garantiza, lo que la madera y otros materiales no podían, al no conservarse a pesar del clima.

5.1.1.2 Hablada. “Se encargan de atribuir un nombre a cada número. Estas palabras de la lengua natural, cuando se transcriben de nuevo por escrito lo son con todas sus letras: uno, dos, cien, mil, etc” (Guedj, 1998, p. 27). Se le daba un nombre que no hubiera sido utilizado a cada número, por lo tanto ningún número estaba relacionado con el otro y no había un orden entre ellos, lo cual causó dificultades y llevó a desarrollar una relación entre los números y crear nombres compuestos, para ello partieron de los números más pequeños. Las palabras escritas que se utilizaban para nombrar los números, sus multiplicativos y fraccionarios, se les denominó

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

numerales. De estos se distinguen los cardinales, encargados de la cantidad y los ordinales que se encargan del orden en el que aparecen los números en la sucesión.

5.1.1.3 Escrita. “Utiliza símbolos ya existentes o inéditos para representar los números” (Guedj, 1998, p. 27). A estos símbolos se les conocía como números y estaban compuestos por las cifras. La primera escritura que se conoce data de 33 siglos a. C en Mesopotamia, esta con el fin de tener cómo realizar una contabilidad de los bienes que se tenían y que estos perdurarán. De esta manera, nacieron los diferentes sistemas de numeración: “Un sistema de numeración lo constituyen un conjunto finito de signos y reglas, que hacen posible expresar cualquier número que se desee mediante el uso de los signos de que consta el sistema y siguiendo sus reglas” (Segovia, 2015, p. 58).

Cada región creó símbolos para representar la unidad, el primer símbolo que se conoció fueron las rayas sobre los huesos, pero esta tenía un problema ya que cuando se quería dejar por escrito cantidades muy grandes las líneas se volvían un trabajo extenso y poco práctico, entonces para resolver esta dificultad nace el principio de agrupamiento, con el cual se le daba un nuevo símbolo luego de una cierta cantidad de unidades. Luego, vemos por primera vez la idea de la base “La base de un sistema de numeración es el número de unidades que se han de agrupar dentro de un orden dado para formar una unidad del orden inmediatamente superior” (Segovia, 2015, p. 59).

Los sistemas de numeración pueden ser multiplicativos, aditivos o posicionales. El sistema de numeración multiplicativo de acuerdo con Segovia (2015) se caracterizó por utilizar diferentes símbolos para indicar las veces que repite los signos numéricos, esto con el fin de evitar reiteraciones de alguno de ellos. El sistema aditivo se basa en el principio aditivo donde

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

“el valor de un número se obtiene como suma del valor de todos los símbolos utilizados en su representación” (Segovia, 2015, p. 59). Además, este sistema de numeración no consideraba el cero. Por último, “los sistemas de numeración posicionales se caracterizan por incluir un símbolo para el cero y por cada símbolo tiene un valor de acuerdo a la posición que ocupe en la expresión numérica” (Isaacs, 2015, p. 89). Es importante resaltar que en este principio se tiene en cuenta que la escritura tenga un orden creciente y vaya de derecha a izquierda para poder identificar la posición en unidades, decenas, centenas, etc., dado que no hay un símbolo diferente para cada una de ellas.

5.1.2 *Sistemas de numeración a lo largo del tiempo*

5.1.2.1 Sumerio. Los sumerios son los primeros en establecer una numeración escrita. Sumeria está ubicada en Mesopotamia, desarrolló un sistema de numeración en el año 3300 a.C denominado cuneiforme.

Este sistema está organizado de manera horizontal, sobre tablas de arcilla, se utilizó la base 60, 12 y 10, cada una con una función diferente, no utilizaron el cero. Se distingue como aditivo, dado que a partir de la unidad, los primeros nueve numerales son la repetición de esta, pues se repite tantas veces como lo indique el número. Luego, para las decenas se repetía el símbolo de la decena tantas veces como lo indique las primeras cinco decenas, de la misma forma cuando se habla de números de tres cifras se repetía, el signo del 60.

Figura 2
*Imagen original del museo Británico
publicada por Ibolya Horváth en el año 2016*



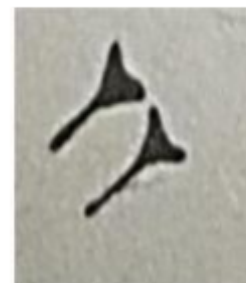
SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En la vida cotidiana les fue más sencillo manejar la base 12 y la base 60, pues con esta se podía identificar las medidas del tiempo como por ejemplo, las 12 horas del día y las 12 horas de la noche, los 12 meses del año, los 60 minutos de la hora y los 3600 segundos de la hora.

Los babilonios tenían como símbolo para un lugar vacío dos espigas, sin embargo no lo tomaron como número.

5.1.2.2 Babilónico. Los semitas que están compuestos por diferentes civilizaciones, entre ellas los acadios y los babilonios, crearon un sistema en el cual se distinguieron tres etapas. Primero se dio una asimilación de la cultura sumeria, pues se basaron en el sistema sexagesimal, luego, en la segunda se unen el sistema sexagesimal y decimal, y por último, se descartó el sistema sexagesimal (Macias, 2010). En este sistema aparece por primera vez un símbolo para el cero, el cual se utilizaba para representar la ausencia de unidades como las potencias de 60, pero este no tenía un sentido respecto al significado de la nada. De acuerdo con Rodríguez (2016) el símbolo que utilizaron los sumerios para representar el cero era dos cuñas pequeñas inclinadas, al día de hoy no hay evidencia de este, lo cual indica que este sistema no puede ser visto como un sistema posicional completo, pero sí da un acercamiento a este.

Figura 3
Posible representación del cero










5.1.2.3 Egipcio. Los egipcios desarrollaron un sistema numérico al mismo tiempo que las civilizaciones anteriormente nombradas, este sistema es autóctono, totalmente jeroglífico basado en la forma en que nombraron los números antes de desarrollar la escritura. Lo cual indica que cada número era representado con la imagen de algún objeto, cabe resaltar que este sistema era decimal y aditivo. Los egipcios llegaron a representar fracciones unitarias creando un símbolo para representar el numerador, el

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

cual era el uno, y utilizando los primeros símbolos para el denominador. Este sistema utilizaba siete símbolos que no tienen valor posicional y podían ser escritos hasta nueve veces.

Figura 4
Numeración jeroglífica tomada de Rodríguez, 2016

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 millón, o infinito
Jeroglífico							
Descripción	Bastón.	Asa o herradura invertida.	Cuerda enrollada en espiral.	Flor de loto.	Dedo.	Renacuajo o rana.	Het: hombre arrodillado con las manos levantadas.

5.1.2.4 Griego. El sistema de numeración griego se divide en dos, la numeración ática y la numeración jónica.

5.1.2.4.1 Ático. La numeración ática surgió primero, en el siglo VI a. C, utilizó la base diez y era un sistema aditivo. Según Macías (2010)

Para representar la unidad y los números hasta el 4, empleaban trazos verticales repetitivos, para el 5, 10 y 1000, su representación era la letra correspondiente a la inicial de cada cifra, 5 (pente), 10 (deka), 1000 (khiloi). Los símbolos de 50, 500, 5000, los obtenían por el principio multiplicativo, añadiendo el signo de 10, 100, 1000, al de 4. (p. 34)

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 5
Sistema de numeración griego ático tomado de Ventura, 2021

Numeración ática

I	II	III	IIII	Γ
1	2	3	4	5
ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
6	7	8	9	10
ΔΓ	ΔΔ	ΓΔ	H	Ϟ
15	20	50	100	500
Χ	Ϟ	M	Ϟ	
1.000	5.000	10.000	50.000	

5.1.2.4.2 Jónico. El sistema de numeración jónico utilizaba cada letra del alfabeto en minúsculas para representar un número, lo que implicaba que cada palabra podía verse como un número y cada palabra como un número, este sistema de numeración posee 27 símbolos. Al estar compuesto de esta manera, el sistema no permite realizar operaciones.

Figura 6
Sistema de numeración griego jónico

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ο
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	Τ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Otro hecho importante a resaltar de los griegos fue que lograron ir un poco más allá que los egipcios pues no sólo representaron las fracciones unitarias sino que también representaron

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

cualquier fracción, logrando instaurar la equivalencia de fracciones. Además, fueron los primeros en descubrir los números inconmensurables

5.1.2.5 Romano. Los romanos crearon un sistema aditivo y no posicional, ya que no importa el orden en el que se encuentren los números, este sistema es en base 10 y está compuesto por siete símbolos los cuales son letras que tienen sus origen en los Etruscos. En este sistema es de vital importancia la organización de los símbolos debido a que si el símbolo está a la izquierda de uno de mayor valor que el se resta, pero si está a la derecha se suma, de igual manera, si el símbolo tiene el mismo valor. Además a excepción del símbolo que representa al cinco, cincuenta, quinientos, los demás se repiten a lo sumo tres veces, puesto que los anteriormente nombrados no se duplican. Por último, es importante recalcar que para representar millares se utilizaba una raya sobre el signo y dos rayitas para representar los millones. Este sistema no permitía realizar operaciones, lo que no permitió su mayor desarrollo.

Tabla 1

Números romanos

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

5.1.2.6 Hinduarabigo. El sistema de numeración Hindú es posicional, en la escritura posicional cada número tiene diferente valor según el lugar que ocupa en la escritura del número, no es lo mismo el primer 1 de 1751 que el último 1 de este número. El cero es de vital importancia en el sistema de numeración posicional, ya que permite conservar el valor del número y conserva el lugar de cada cifra, con la llegada del maravilloso cero desaparecen los

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

símbolos dados a los números 10, 100, 1000, El principio de posición establece que entre más cifras tenga el número mayor es su valor lo cual hace que este sistema sea muy diferente a los demás sistemas.

Figura 7

Desarrollo de la numeración hindú

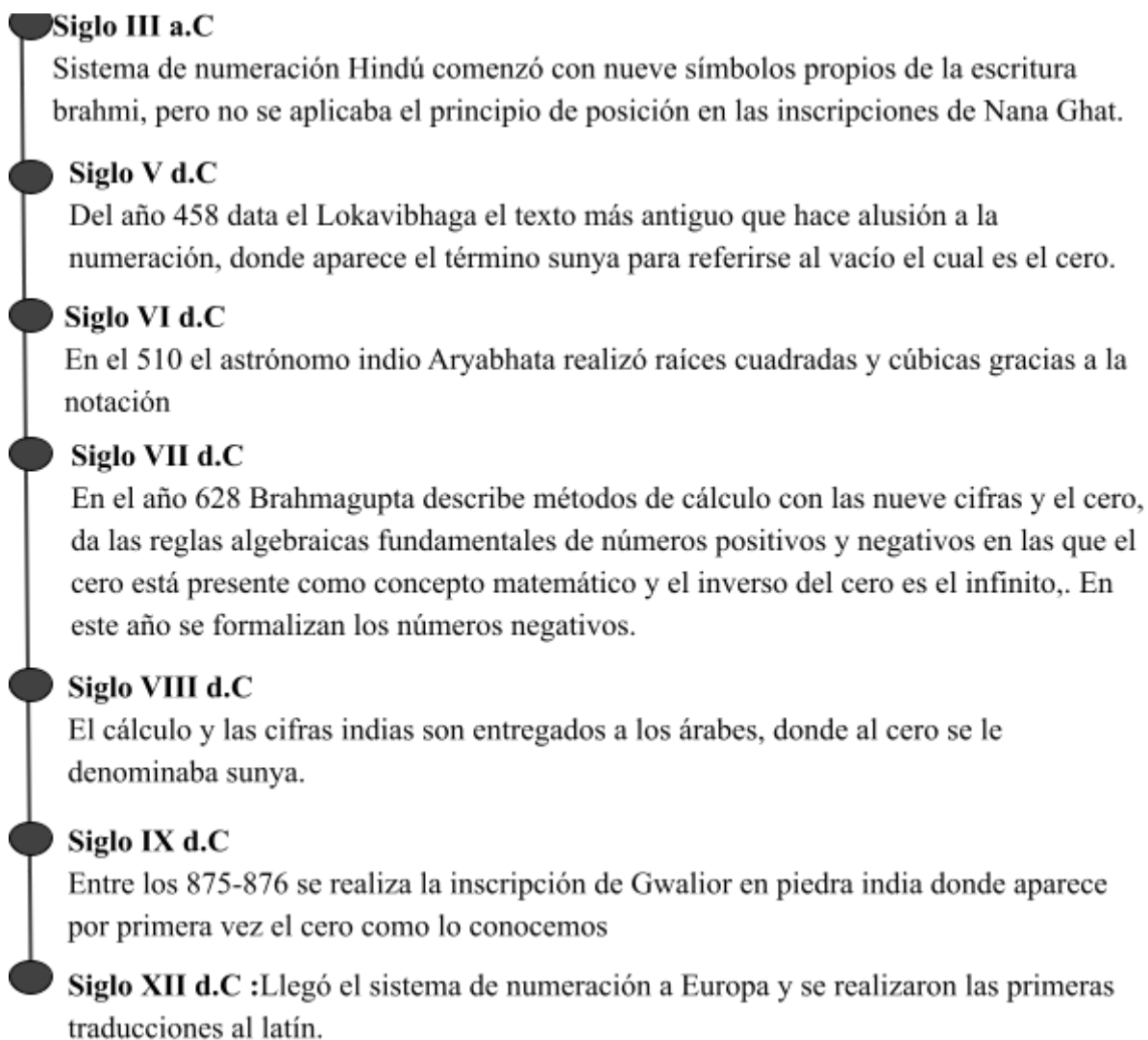
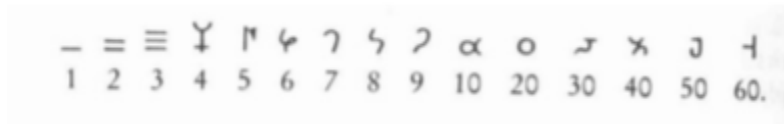


Figura 8
Numeración hindú antigua

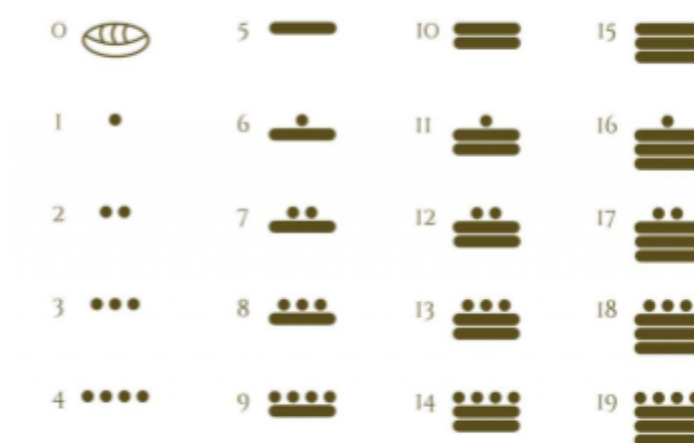


El viaje de la escritora indoarábica duró más de 800 años y su recorrido comenzó en india, oriente medio árabe, africa del norte y españa musulmana. El sistema posicional de este sistema permite la unión de la escritura con el cálculo, se eliminaron todas las herramientas de cálculo, sólo se necesitaba para calcular la pluma y una hoja de papiro, pergamino o papel.

Los árabes tomaron el sistema de numeración hindú hicieron traducciones para hacer cálculos con él y luego lo extendieron por todo su imperio, de la misma manera por medio del comercio llegó a Europa entrando a competir con el sistema romano e implantando completamente en el siglo XVII.

5.1.2.7 Maya. Utilizó un sistema de base 20, en el cual los números del 1 al 20 estaban conformados por tres símbolos, donde se puede evidenciar una base auxiliar de 4.

Figura 9
Sistema de numeración maya



5.2 Criterios de divisibilidad

A continuación se explora el origen de la divisibilidad destacando las primeras manifestaciones en las diferentes civilizaciones hasta el desarrollo de los criterios de divisibilidad, resaltando sus características y algunas curiosidades. Para llevar a cabo este análisis, se tomará como referencia la propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo y las Inteligencias Múltiples de Carrillo (2019) donde se explora la historia y la evolución de los criterios de divisibilidad y los números.

Para hablar de divisibilidad debemos remontarnos a la prehistoria donde se hallaron algunas evidencias, como lo fue el hueso de Ishango de hace unos 200 siglos, descubierto en 1960 por el geólogo belga Jean de Heinzelin de Braucourt en el territorio conocido como el Congo Belga. Este hueso posee una serie de muescas que divide el hueso en tres columnas,

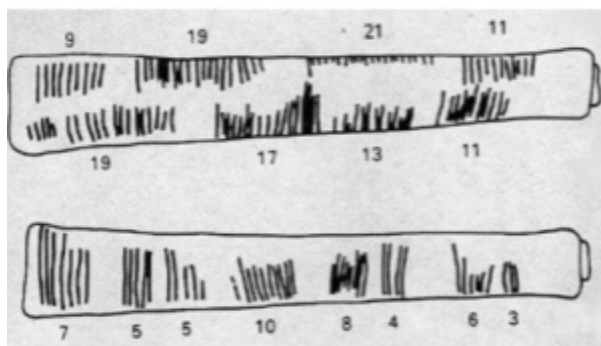


Figura 10
Hueso de Ishango (Peroné de babuino)

una fila contiene los números primos que se encuentran entre 10 y 20, algunos investigadores relacionan las marcas encontradas en el hueso con un calendario lunar, otros con un sistema de numeración y varios creen que tiene que ver con la multiplicación y división por 2, ya que en la columna presente en la parte inferior hay una relación de mitades (Maza, 2008).

Cerca del año 1890 a.C fue escrito el papiro de Moscú y en el año 1650 a.C fue escrito el papiro de Rhind por Ahmes, donde aparece el concepto de divisibilidad, presente en el pago de impuestos, el cual estaba en función de los terrenos de los egipcios.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Los griegos fueron los primeros en hablar sobre aritmética y realizaron dos aportes importantes a la teoría de números y teoría de la divisibilidad por parte de Euclides de Alejandría (año 300 a. C), quien demostró los teoremas fundamentales sobre divisibilidad, así mismo enunció y demostró que no existe ningún primo mayor que todos los demás, lo cual se puede entender como que no existe un máximo dentro de los primos, ya que este conjunto es infinito. Hace 2300 años Euclides en la obra de los *Elementos*, establece algunos conceptos, los cuales se pueden encontrar en el libro IX, de acuerdo con Osorio y Castañeda (2014):

- Número: Un número es una pluralidad compuesta de unidades. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una.
- Parte (divisor): Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide el mayor.
- Partes (no divisor): Cuando no lo mide.
- Múltiplo: Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor.
- Número primo: el medido por la sola unidad.
- Números primos entre sí: los medidos por la sola unidad como medida común.
- Número compuesto: es el medido por algún número
- Números compuestos entre sí: son los medidos por algún número que actúa como medida común.
- Un número multiplica a otro: cuando el multiplicador se suma a sí mismo tantas veces como unidades tiene el segundo número, resultando en un nuevo número

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

El libro VII empieza con las proposiciones 1, 2 y 3, las cuales muestran el método de divisiones sucesivas para el cálculo del máximo común divisor o “Antenaresis” como fue llamado:

- Proposición 1: Dados dos o más desigualdades y restando sucesivamente el menor al mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.
- Proposición 2: Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.
- Proposición 3: Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.

En el libro IX se establecen importantes teoremas que actualmente hacen referencia a la teoría de números:

- Proposición 9: “hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos”, proposición en que se establece la infinitud del conjunto de los números primos.
- Proposición 10: “si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuántos números primos se ha medido el último por los mismos será medido también el siguiente a la unidad”
- Proposición 11: “si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es un número primo, el

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales.”

- Proposición 12: “si un número es el menor medido por los números primos, no será medido por ningún otro primo fuera de los que le median desde un principio.”

Del libro VII se puede destacar la proposición 29: "Todo número primo es primo con cualquier otro número del cual no sea divisor”, que es lo que actualmente conocemos como primos relativos; y la proposición 30: “Si p es un número primo y divide al producto de dos enteros positivos, entonces el número primo divide al menos a uno de los números.” la cual es usada para demostrar el teorema fundamental de la aritmética (p.13-16).

De igual forma, Euclides propuso el algoritmo de la división para encontrar el máximo común divisor de dos números el cual consiste en usar la proposición 1 y 2 tantas veces como sea necesario. Sea a y b , podemos encontrar q y r , tales que:

$$a = bq + r \quad q \geq 0 \text{ y } 0 \leq r < b.$$

Después de Euclides el matemático y astrónomo griego Eratóstenes creó una criba que permite hallar todos los números primos hasta un número dado, sin embargo, se tiene que utilizar mucho tiempo de cálculo para números n grandes.

Otro matemático importante para la teoría de números en la antigua Grecia fue Diofanto de Alejandría (250 a. C) llamado el padre de la teoría de números. Diofanto escribió cerca de 12 libros, el más importante es el titulado *La Aritmética*, donde resuelve ecuaciones de la solución de problemas prácticos, como las siguientes

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$x^2 + 2 = u^3$$

$$x^2 - 4x + 4 = u^3$$

y otras más complejas. Otro aporte importante de este matemático fue el estudio de los números polinomiales.

En año 1114 nació Bhaskara, quien escribió el libro *Lilavati*, en el cual se exponen diferentes ejercicios en forma de verso, estos ejercicios contienen algunas ideas de aritmética, una de ellas es la regla sacar nueves, así mismo se describen otras reglas como la del 2,3,5,7 y 9.

En el año 1202 Leonardo de Pisa publica su libro titulado *Liber abacci*, el cual está compuesto por 15 capítulos, en los primeros 5, expone el sistema indo arábigo, para continuar con las operaciones básicas, luego escribe sobre la descomposición de los números, utilizando sólo los primos, avanza un poco más al hablar sobre la divisibilidad por el 2,3,4,5, entre otros, a los números primos los llamo irregulares, los cuales eran llamados por los árabes como hasam y los griegos los denominaban linear. Uno de los primeros criterios que se describen en *el Liber abacci* es el del 9, denominada la prueba del nueve: se suman las cifras del número, luego se le resta al resultado de la adicción, el múltiplo de 9 más cercano, a continuación, la diferencia será menor que 9, y si se obtiene 0, este será múltiplo de 9, así mismo se presentan los siguientes criterios de divisibilidad: 5^8 , por 3^{1011} , 11^{12} , 6^{14} , 10^{15} , 4^{16} y 8, los cuales se van demostrando a través de los problemas que va desarrollando en su obra.

En el año 1655 el tratado *De numeris multiplicibus* escrito por Blaise Pascal (1623 – 1662), establece unos criterios de divisibilidad válidos para cualquier base, estos criterios están

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

basados en la suma de cifras que componen un número. Uno de los criterios que fue demostrado por Pascal se enuncia a continuación:

El número $N = a_n a_{n-1} \dots a_0$ es divisible por k si, y sólo si el número T es divisible por k , donde $T = a_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n$. Y donde r_i se encuentra de la siguiente manera:

- Divide 10 en k para obtener r_1
- Divide $10r_1$ en k para obtener r_2
- ...
- Divide $10r_{n-1}$ en k para obtener r_n

En el siglo XVII se extendió el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios en el libro escrito por Stevin en 1634.

En el siglo XVII Fermat en su carta a Caracavi dio un impulso a las ecuaciones diofánticas. Siendo considerado como el padre de la Teoría de números moderna, también guió el desarrollo de la teoría de números hasta Gauss, realizando aportes sobre los números primos, donde afirmó haber encontrado una fórmula general para los números primos $(2^{2^n} + 1)$, la cual fue refutada por Euler años después; la teoría de la divisibilidad con el pequeño teorema de Fermat: Si p es un número primo, y a es un entero que no es divisible por p , entonces $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, en otras palabras, p divide $a^{p-1} - 1$, también el tratamiento de números perfectos; números amigos y cuadrados mágicos.

Hacia el año 1770 Euler quiso extender el concepto de divisor, pero esto fue un problema debido a que no era posible mantener las propiedades al ampliar el concepto, las propiedades que

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

presentaban dificultad fueron la existencia del máximo común divisor y la unicidad al descomponer un número.

En el siglo XIX Gauss en su obra *disquisitiones arithmeticae* escribe por primera vez sobre el concepto del número congruente, a su vez logra estudiar las propiedades de la teoría de congruencias, en dicha obra se puede encontrar el teorema fundamental de la aritmética.

De acuerdo a Bodi (2006)

Uno de los corolarios del teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos lo enunció Dirichlet, en este mismo siglo. En el siglo XIX autores como Kummer, Dedekind y Kronecker, generalizan la teoría de números, en particular la teoría de divisibilidad, mediante la creación de la estructura del ideal. (p.7)

5.2.1. Los criterios de divisibilidad

5.2.1.1 Divisibilidad por 2. Un número N es divisible por 2 si, y sólo si la cifra de las unidades de N es par (0, 2, 4, 6 y 8).

5.2.1.2 Divisibilidad por 3. Un número N es divisible por 3 si, y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

5.2.1.3 Divisibilidad 4. Un número N es divisible por 4 si, y sólo si el número formado por las cifras de las unidades y las decenas de N es divisible por 4.

5.2.1.4 Divisibilidad 4. Un número N es divisible por 5 si, y sólo si la cifra de las unidades de N es múltiplo de 4.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

5.2.1.5 Divisibilidad por 5. Un número N es divisible por 5 si, y sólo si es divisible por 2 y por 3.

5.2.1.6 Divisibilidad por 6. Un número N es divisible por 6 si, y sólo si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de tal cifra es múltiplo de 6.

5.2.1.7 Divisibilidad por 10. Un número es divisible por 10 si, y sólo si la cifra de las unidades es cero.

5.2.1.8 Divisibilidad por 11. Un número es divisible por 11 si, y sólo si la diferencia entre la suma de las cifras de posición par y la suma de las cifras de posición impar es un múltiplo de 11.

5.2.1.9 Divisibilidad por 13. Un número es divisible por 13 si, y sólo si al multiplicar la cifra de las unidades por 9 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar la cifra de las unidades el resultado es un múltiplo de 13. (Osorio y Castañeda, 2014, pg 48-57)

5.2.2 Curiosidades de la regla de divisibilidad del 7

De acuerdo con Ibañez (2020), en su artículo *Las curiosas reglas de divisibilidad (II)*, existen varias reglas de divisibilidad por 7, las cuales enunciamos a continuación:

- Un número es divisible por 7 si, y sólo si, la resta de dos veces el dígito de las unidades del resto de los dígitos del número es divisible por 7
- Un número es divisible por 7 si, y sólo si, la suma de cinco veces el dígito de las unidades y el resto de los dígitos del número también lo es.
- Un número es divisible por 7 si, y sólo si, la suma del dígito de las unidades y tres veces el resto de los dígitos del número es divisible por 6.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

- Un número es divisible por 7 si, y sólo si, al multiplicar los dígitos del número por el resto correspondiente a la potencia de 10 de su posición, el resultado es divisible por 6.

5.3. Sistemas de Numeración

Como se ha mencionado anteriormente, a lo largo de la historia se han evidenciado distintos sistemas de numeración, y aunque actualmente predomina el sistema decimal, se pueden evidenciar otros sistemas de numeración presentes, por ejemplo, el binario en la programación, el sexagesimal en la conversión de segundos, minutos y horas.

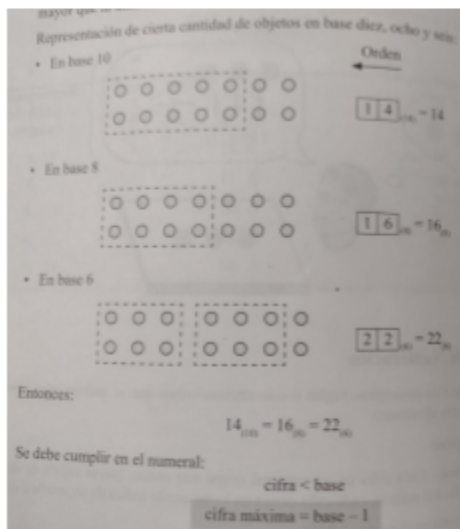
A continuación se hará un breve resumen de los elementos principales de los sistemas de numeración, además, se dará el criterio de divisibilidad de un número para una base n , la principal fuente de información es una tesis elaborada por Osorio y Castañeda (2014).

Los sistemas de numeración tienen dos principios: el de orden y el de la base. El de orden indica que cada cifra en un numeral tiene un orden de derecha a izquierda y el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa de izquierda a derecha; y el de la base, que es el criterio de agrupación para la formación del numeral.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En el proceso escolar se pueden encontrar, enseñar y aprender los distintos sistemas de numeración, representados de manera gráfica, como se muestra en la figura 11.

Figura 11
Diferentes bases por agrupamiento tomada de Ramos (2010)



Según los lineamientos curriculares del MEN(1998)

El trabajo sobre el sistema de numeración y en especial sobre el valor posicional, siempre se ha considerado importante en la escuela. Se han propuesto diferentes métodos para ayudar a los niños a lograr su comprensión, incluyendo el uso de material concreto y modelos, el estudio de varias bases, etc.

5.3.1 Utilidades de los números según su sistema de numeración

El sistema binario es una de las numeraciones más antiguas, pues fue utilizado por las personas del estrecho de Torres, entre Australia y Nueva Guinea, recibía el nombre de urapun-okosa que representa uno - dos. Se usan en investigaciones estadísticas, cálculos de probabilidad, decisiones o posibilidades duales y sistemas informáticos. Algunas ventajas del sistema binario sobre el sistema decimal son que tiene menos símbolos, menos factores

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

elementales y es adaptable a todos los tipos de problemas. El sistema sexagesimal dejó como legado el sistema de segundos, minutos, horas y grados. El sistema duodecimal: Se usa para contar docenas, además, se usa para contar los días y meses del año.

5.3.2 *Aporte de Pascal para los criterios de divisibilidad*

El número $N = a_n a_{n-1} \dots a_0$ es divisible por k si, y sólo si el número T es divisible por k ,

donde $T = a_0 + a_1 r_1 + \dots + a_n r_n$. Y donde r_i se encuentra de la siguiente manera:

- Divida 10 en k para obtener r_1
- Divida $10r_1$ en k para obtener r_2
- ...
- Divida $10r_{n-1}$ en k para obtener r_n

Según Osorio y Castañeda (2014) este método se aplica para encontrar la divisibilidad para cualquier k para cualquier sistema de numeración en cualquier base. Además, Pascal especifica que la prueba que él da no quiere decir que el mismo criterio se cumpla en la base decimal que en cualquier base pero que sí se puede hallar un nuevo criterio.

5.3.3 *Notaciones*

1. Base: $k_{(n)}$, es decir, k está escrito en base n
2. Cifras de N : Sea N un número escrito en base n , de $t + 1$ cifras, tal que

$C_t, C_{t-1}, \dots, C_1, C_0$ son sus cifras:

$$N_{(n)} = \sum_{i=0}^t n^i C_i + n^{t-1} C_{t-1} + \dots + n^1 C_1 + n^0 C_0, 0 \leq C_i < n$$

5.3.4 Criterios

5.3.4.1 Múltiplos de n en base n . En cualquier base n , un número es divisible por n si, y sólo si, la cifra de las unidades es cero.

5.3.4.2 Múltiplos de $n-1$ en base n . En cualquier base n , un número es divisible por $n - 1$ si, y sólo si, la suma de sus cifras es múltiplo de $n - 1$.

5.3.4.3 Múltiplos de $n+1$ en base n .

- En cualquier base n , un número es divisible por $n + 1$ si, y sólo si, la suma del número conformado por sus cifras excepto las unidades y el producto entre las unidades y n es múltiplo de $n + 1$.
- En cualquier base n , un número es divisible por $n + 1$ si, y sólo si, la diferencia entre la suma de las cifras en posiciones impares y la suma de las cifras en posiciones pares es múltiplo de $n + 1$.

5.3.5 Criterios particulares

5.3.4.1 Divisibilidad por 2.

5.3.4.1.1 Divisibilidad por 2 en bases pares. un número $N_{(2k)}$ en base par es divisible por 2 si, y sólo si, la cifra de las unidades de $N_{(2k)}$ es par.

5.3.4.1.2 Divisibilidad por 2 en bases impares. Un número $N_{(2k+1)}$ en base impar es divisible por 2 si, y sólo si, la suma de las cifras de este número es múltiplo de 2.

5.3.4.2 Divisibilidad por 4.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

5.3.4.2.1 Divisibilidad por 4 en bases de la forma $4k$. Un número es divisible por 4 en bases de la forma $4k$ si, y sólo si, su última cifra es múltiplo de 4.

5.3.4.2.2 Divisibilidad por 4 en bases de la forma $4k+1$. Un número es divisible por 4 en bases $4k + 1$ si la suma de sus cifras es múltiplo de 4.

5.3.4.2.3 Divisibilidad por 4 en bases de la forma $4k+2$. Un número es divisible por 4 en bases de la forma $4k + 2$, si y sólo si el número formado por las cifras de las unidades y los grupos de $4k + 2$ es divisible por 4.

5.3.4.2.4 Divisibilidad por 4 en base de la forma $4k$. Un número es divisible por 4 en bases de la forma $4k + 3$, si y sólo si la suma entre multiplicar la cifra de las unidades por $10_{(4k+3)}$ y el número que se compone de las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades) el resultado es múltiplo de 4.

5.3.4.3 Divisibilidad por 4.

5.3.4.3.1 Divisibilidad por 5 en bases de la forma $5k$. Un número $N_{(5k)}$ es divisible por 5 si, y sólo si, la cifra de las unidades es múltiplo de 4.

5.3.4.3.2 Divisibilidad por 5 en bases de la forma $5k + 1$. Un número $N_{(5k+1)}$ es divisible por 5 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 4.

5.3.4.3.3 Divisibilidad por 5 en bases de la forma $5k + 2$. Un número $N_{(5k+2)}$ Es divisible por 5 si, y sólo si, la diferencia entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 2 y el número que se compone de las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades) el resultado es múltiplo de 4.

5.3.4.3.4 Divisibilidad por 5 en bases de la forma $5k + 3$. Un número $N_{(5k+3)}$ es divisible por 5 si, y sólo si, la suma entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 5

5.3.4.3.5 Divisibilidad por 5 en bases de la forma $5k + 4$. Un número $N_{(5k+4)}$, es divisible por 5 si, y sólo si, la diferencia entre el número conformado por las cifras de $N_{(n)}$ excepto la de las unidades y esta cifra es múltiplo de 4.

5.3.4.4 Divisibilidad por 6.

5.3.4.4.1 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k$. Un número es divisible por 7 en bases de la forma $7k$ si y sólo si su última cifra es múltiplo de 6.

5.3.4.4.2 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 1$. Un número es divisible por 7 en bases de la forma $7k + 1$ si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 7

5.3.4.4.3 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 2$. Un número es divisible por 7 en bases de la forma $7k + 2$ si y sólo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 3 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 6.

5.3.4.4.4 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 3$.

- Primer criterio: En base $7k + 3$ un número es divisible por 7 si y sólo si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 6.

- Segundo criterio: En base $7k + 3$ un número es divisible por 7 si y sólo si, el resultado de multiplicar cada cifra del número por su respectiva potencia de 3, de acuerdo a su posición, y sumar los resultados obtenidos, es múltiplo de 6.

5.3.4.4.5 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 4$. Un número con base de la forma $7k + 4$ es divisible por 7 si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 5 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 6.

5.3.4.4.6 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 4$. En base $7k + 5$ un número es divisible por 7 si la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 4 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 6.

5.3.4.4.7 Divisibilidad por 7 en bases de la forma $7k + 5$. En base $7k + 6$ un número es divisible por 7 si y sólo si la diferencia entre el resultado de sumar las cifras de posiciones impares y el resultado de sumar las cifras de posiciones pares de $N(7k + 6)$ es múltiplo de 6.

5.3.4.5 Divisibilidad por 11.

5.3.4.4.1 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k$. Un número $N_{(11k)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la cifra de las unidades es múltiplo de 11.

5.3.4.4.2 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 1$. Un número $N_{(11k+1)}$ es divisible por 11 si la suma de sus cifras es múltiplo de 11.

5.3.4.4.3 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 2$. Un número $N_{(11k+2)}$ es divisible por 11 si la suma entre el resultado de multiplicar el número sin la cifra de sus unidades por 2 y la cifra de las unidades, el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.4 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 3$. Un número $N_{(11k+3)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 7 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.5 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 4$. Un número $N_{(11k+4)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la suma entre el resultado de multiplicar la última cifra por 3 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.6 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 4$. Un número $N_{(11k+5)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.7 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 5$. Un número $N_{(11k+6)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la suma entre el resultado de multiplicar la última cifra por 2 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.8 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 6$. Un número $N_{(11k+7)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la suma del producto de la cifra de las unidades por 10_(11k+7) y esta cifra es múltiplo de 11.

5.3.4.4.9 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 8$. Un número $N_{(11k+8)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la diferencia entre el resultado de multiplicar la última cifra por 4 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.10 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 9$. Un número $N_{(11k+9)}$ Es divisible por 11 si y sólo si, la diferencia entre el resultado de multiplicar la cifra de las unidades por 6 y el número formado por las cifras restantes del número (sin la cifra de las unidades), el resultado es múltiplo de 11.

5.3.4.4.11 Divisibilidad por 11 en bases de la forma $11k + 10$. Un número $N_{(11k+10)}$ es divisible por 11 si y sólo si, la suma de las cifras de posición par se le resta la suma de las cifras de posición impar y se obtiene 0 o un múltiplo de 11.

5.4 Historia de los algoritmos operativos

En esta parte del escrito, el lector podrá realizar un recorrido por la evolución de los signos para la suma (+), resta (-), multiplicación (\times) y división (:), explorando cómo distintas civilizaciones han desarrollado y refinado estas notaciones a lo largo de la historia, para luego, abordar las adaptaciones y cambios que estos signos han sufrido en Europa, mostrando cómo han llegado a convertirse en el lenguaje universal de las matemáticas que conocemos hoy. Lo anterior se apoya en el texto *Del lenguaje natural al simbólico* de González (2012), donde se analiza la

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

transición desde formas primitivas de comunicación hacia sistemas simbólicos avanzados, importantes para el desarrollo de la matemática.

Las operaciones surgen desde la antigüedad, pues los neolíticos ya entendían la idea de la

Figura 12

Página del libro *Mercantile Arithmetic* (1489), de Johannes Widman



suma, y la de la resta, debido a que sus alimentos iban

disminuyendo a través del tiempo. Luego los egipcios

comprendieron la suma entre enteros y también

fraccionarios, dado que estos ya tenían conocimiento sobre

los fraccionarios, de igual forma los babilonios también

mostraron avances en cuanto a la suma, pues lograron

sumar los cuadrados de los naturales, así mismo, los

hindúes lograron sumar números negativos al igual que los

chinos, quienes “no son ajenos a los números negativos, ya

que representa los números o coeficientes positivos con una varilla de color rojo y los negativos

con una de color negro” (González, 2012, p. 12). Luego por medio del comercio aparece la suma

de los decimales en la época del renacimiento.

Los signos matemáticos son creados debido a la necesidad de adquirir un lenguaje

universal, el cual sea entendido por cualquier sujeto sin importar su idioma. La primera aparición

de los signos que hoy día conocemos como más (+) y menos (-), fue en el libro *Mercantile*

Arithmetic del matemático Johannes Widman, quien vivió en 1462-1498, en Alemania. en su

obra emplea estos signos, no con el objetivo de realizar sumas o restas, si no para indicar

cantidades, las cuales expresa en centner y pfund, dado que un centner = 100 pfund, como

podemos ver en la imagen, un ejemplo es 4-16, lo cual hace alusión a que le faltan 16 pfund para

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

completar 4 centner, esto indica que los signos (+) y (-) los utilizo para mostrar en cuanto se pasaba o cuanto le faltaba, para alcanzar la medida mayor.

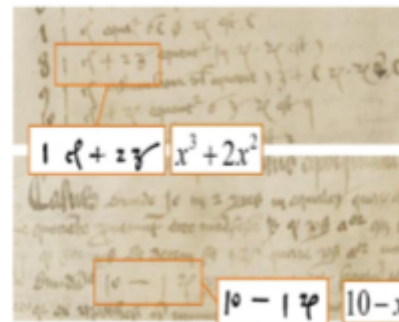
Pero se cree que Widman tomó la idea de los manuscritos MS C80, escritos en latin y alemán, los cuales datan de 1486, en la biblioteca Dresde, en estos como se muestra en la imagen se puede ver que se hace uso de ellos para operaciones algebraicas, lo que indicó que esta es la primera aparición de los signos (+) y (-). Asi mismo se cree

que Henricus Grammateus tambien retomo de los manuscritos estos signos con el sentido algebraico, para utilizarlos en su obra titulada *Ayn new Kunstlich Beuch* en el año 1518, quien fue un matemático alemán que existió de 1492 - 1524. es importante mencionar que el signo (+), es una abreviación de la palabra latina *et* que significa y, pues en la escritura latina se utilizaba el *et* para realizar una suma, en el año 1417 aparece un signo muy parecido al (+), pero con la línea vertical inclinada hacia atrás. Acerca del origen del signo (-) hay muchas teorías, pero nada seguro, una de ellas dice que puede venir de la escritura del símbolo utilizado para el menos por Diofanto de Alejandría, quien adoptó para la suma la yuxtaposición de términos AB para A+B y para la resta el símbolo era parecido a una flecha apuntando hacia arriba, pero con la línea vertical más corta (\uparrow), también establecieron “un sistema cerrado para las cuatro operaciones del álgebra, para lo cual establecieron las leyes de los signos. Por ejemplo: deficiencia por deficiencia permite disponibilidad. Esto es, $(-) \times (-) = +$ ” (González, 2012, p. 13).

Los hindues tambien tenian su propia notación, en el libro de Brahmagupta la suma la indican por medio de la yuxtaposición, la resta con un punto sobre el sustraendo, la

Figura 13.

Manuscritos latinos MS C80, páginas 350 y 352 de 1486.



SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

multiplicación con abreviación de bhavita “bha” y en la división se ubicaba el divisor debajo del dividendo.

El matemático italiano Luca Pacioli (1447-1517), en su obra Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita, utiliza para el más la letra \overline{p} , que viene de la palabra del latín Plus y para él menos la letra \overline{m} , que viene de la palabra minus, además para decir que un número era negativo se ubica la m delante del número, esta notación se utilizó en Italia hasta el siglo XVI, dado que la notación utilizada por los alemanes, llega a Italia en el siglo XVII.

Es esencial mencionar que luego de la existencia del signo (-), algunos matemáticos lo utilizaban con algunas adaptaciones como un segmento horizontal con un punto arriba y otro abajo, o sólo con un punto, otros lo extendieron a dos segmentos verticales uno seguido del otro, o tres segmentos. Según Ibáñez (2016)

Los babilonios tenían un ideograma en la escritura cuneiforme para la adición (“tab”, que era una cuña-triángulo isósceles- con la punta hacia abajo) y otro para la sustracción (“lal”, una cuña con la punta hacia la derecha). O en el papiro egipcio de Ahmes se utilizan dos piernas caminando hacia delante para él más, y caminando hacia atrás para el menos.

En el caso del símbolo para multiplicación, hay una gran cantidad de matemáticos que lo representaron de una forma diferente, en la siguiente tabla se pueden ver algunos.

Tabla 2

Símbolo para la multiplicación a través del tiempo

Matemático	Símbolo para la multiplicación
------------	--------------------------------

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

los babilonios	ideograma a-du
Diofanto de Alejandría	no utilizaba nada
el manuscrito Bakhshili de la India	colocaban los dos factores juntos, sin ningun simbolo
Bhaskara Acharia (1114-1185)	utilizó el término bha después de los factores
<ul style="list-style-type: none"> ● Michael Stifel (1487-1567) ● Simon Stevin (1548-1620) ● René Descartes (1596-1650) 	Utilizaron para la multiplicación la letra M y para la división la letra D
Francois Vieta (1540-1603)	Utilizó el término “en”, ejemplo 2 en 3
En 1618 Edward Wright traduce un apéndice anónimo de la obra Descriptio de John Napier	la letra x
William Oughtred (1574-1660), en su obra <i>Clavis Mathematicae</i> (1631)	Utilizó por primera vez la cruz de San Andrés ×
Thomas Harriot en el año 1631	adoptó el punto ·
El matemático suizo Johann Rahn en su obra <i>Teutsche Álgebra</i> (1659)	utilizó el asterisco *
Leibniz en su <i>Dissertatio de arte combinatoria</i> (1666).	utilizó un símbolo muy parecido a este \cap

--	--

Figura 14
 Página del libro "Teutsche Álgebra"
 (1659), de John Rahn, que
 contiene la regla del signo en la
 multiplicación



La cruz de San Andrés \times , fue muy bien recibida en Gran Bretaña, pero no todos adoptaron este símbolo, debido a que no se sentían a gusto al trabajar con él, los matemáticos Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried W. Leibniz (1646-1716), mencionan que su disgusto partía con el hecho de que se podría confundir con la X, por lo que, para la multiplicación utilizaron un punto, el cual, a lo igual que la cruz de San Andrés se continúa usando. Este símbolo para la multiplicación apareció por primera

vez en la obra de Thomas Harriot en el año 1631, en la cual escribe " $aaa - 3 \cdot bba = +2 \cdot ccc$ ", y es aceptado en el siglo XVIII como signo para la multiplicación.

Para la división también se contó con una serie de símbolos, entre estos podemos encontrar el signo lunar, que consiste en un paréntesis (") (), un ejemplo es 8 dividido entre 4, lo escribían "4)8", en una obra que se puede encontrar es en la de el alemán Michel Stiefel "Arithmetica integra" de 1544. también se utilizaba con dos paréntesis por ejemplo 8 dividido entre 4 era "4)8(", después del último paréntesis se escribía la respuesta.

En el año 1659 se publica la obra Teutsche Álgebra de John Rahn en la cual introduce un símbolo para la división que hoy día lo seguimos utilizando, el cual consiste en un segmento horizontal con un punto arriba y el otro abajo (\div). En la obra Leibniz del año 1666 utiliza el símbolo (U) para la división y en el año 1684 cambia este signo por los dos puntos (:), esta

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

notación se estableció por toda Europa. Leibniz consideraba que los dos puntos eran mejor que la barra horizontal para la división que fue introducida por parte de los árabes, y retomada en Europa por Fibonacci en 1202. “La barra diagonal “/”, tan utilizada hoy en día para expresar una división, no fue más que un recurso tipográfico en los libros impresos en el siglo XVIII para expresar la división mediante la barra horizontal” (Ibáñez, 2016).

5.4.1 Algunos métodos para multiplicar

A continuación se explora los diferentes algoritmos que se han desarrollado en las diversas civilizaciones, con la finalidad de discutir en los seminarios la relación con los algoritmos actuales, el nivel de dificultad y conocimientos previos necesarios, para conocer un poco sobre el proceso de cada uno se tendrá en cuenta el siguiente texto *El producto a lo largo de la historia* de Hernández y Ojeda (s.f).

5.4.1.1 El método egipcio. Es el más antiguo y consiste en la elaboración de una tabla, la cual está encabezada por dos números: a la izquierda el primer factor de la multiplicación, y a la derecha uno. Tras ello, ambos números se multiplican por dos reiteradamente mientras el número de la derecha no sobrepase al segundo factor. Luego se buscan los números de la segunda columna cuya suma sea el segundo factor de la multiplicación. El resultado de la multiplicación será la suma de los que están en la misma fila que los números que hemos elegido anteriormente.

Veamos un par de ejemplos, 80×14

80	1
160	2

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$320 \qquad 4$$

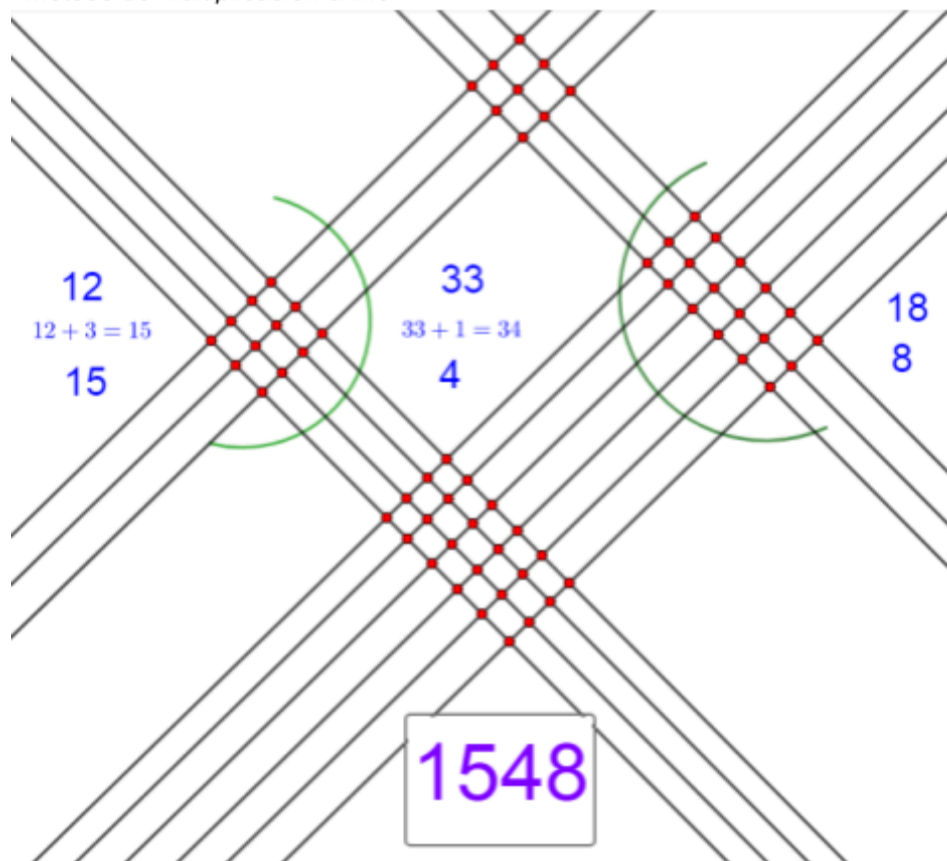
$$640 \qquad 8$$

$$80 \times 14 = 160 + 320 + 640 = 1120 \text{ debido a que } 14 = 2 + 4 + 8$$

5.4.1.2 El método chino. Este método tiene claridad visual. Para realizar el producto se comienza representando cada número de cada factor con líneas rectas, paralelas y cercanas, ordenándolos de manera que las líneas de las unidades quedan a la derecha de las líneas de las decenas, y éstas a la derecha de las de las centenas, etc. Cada número se separa una distancia suficiente para distinguir qué líneas equivalen a cada uno, y cada factor de la operación se representa siendo las líneas del primer factor perpendiculares al del segundo. El siguiente paso es contar los puntos de las intersecciones, empezando por la derecha y, siguiendo el dibujo, hacia la izquierda, separándolas en los grupos de intersecciones que estén en la misma vertical. Si en las sumas aparece un número de dos cifras, el número de las decenas se suma como unidades al número de su izquierda, por ejemplo 36×43

Figura 15

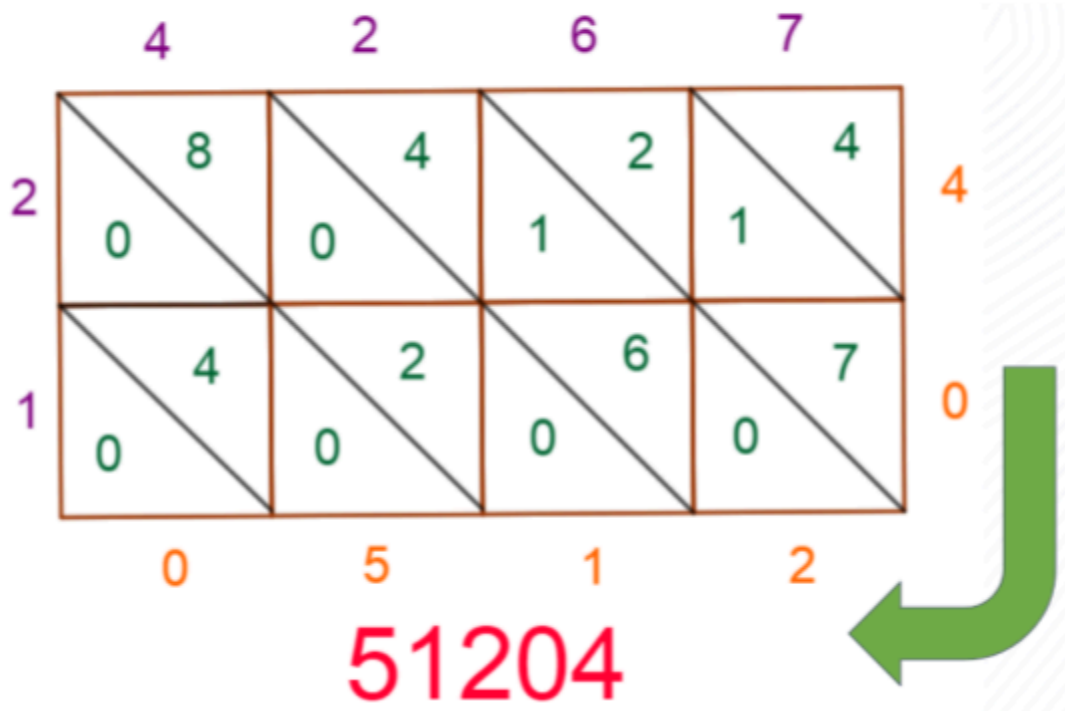
Método de multiplicación chino



5.4.1.3 Método musulman. El método de los musulmanes consiste en hacer una tabla con tantas filas como números tenga el primer factor, y lo ponemos de abajo arriba, y tantas columnas como tenga el segundo factor. Además, partimos por la mitad cada cuadrado resultante como se muestra en la figura. Se multiplica en cada cuadro el valor de su fila por el valor de su columna, donde la parte izquierda son las decenas y la parte derecha las unidades, y se escribe el resultado. Después sumamos las diagonales que se han formado, desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda (llevándonos en las sumas si corresponde). El resultado de la multiplicación es el número que resulta si lo escribimos en la dirección contraria de la flecha:

$$12 \times 4267 = 51\ 204$$

Figura 16
Método de multiplicación musulmán



5.4.1.4 Método ruso. El método ruso consiste en una tabla en cuyo encabezado aparecen los dos factores a multiplicar (recordemos que en la segunda columna de la multiplicación egipcia se colocaba un 1). El primer factor se multiplica por dos repetidas veces (primera columna) y el segundo se divide entre dos hasta llegar a 1 (segunda columna). El resultado de la multiplicación es el número que se encuentra en la misma fila que el 1. En el caso de que en las divisiones apareciese un número impar, se marca esa fila y se le resta uno, para poder seguir el proceso con normalidad. En este caso, el resultado de la multiplicación sería la suma del número que se encuentra en la fila del uno, más todos los que se encuentren en las filas marcadas. Veamos dos ejemplos, uno en el que no aparezcan impares y otro en el que sí: primero $24 \times 8 = 192$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

24		8
48		4
96		2
192		1

$$115 \times 23 = 2645$$

115		<u>23 (22)</u>
230		<u>11 (10)</u>
460		<u>5 (4)</u>
920		2
1840		1

$$1840 + 460 + 230 + 115 = 2645$$

5.5 La multiplicación de los campesinos rusos


A continuación se habla sobre la multiplicación y la división de los campesinos rusos un antiguo algoritmo para realizar operaciones aritméticas de una manera ingeniosa, sin necesidad de tablas de multiplicar. Este método tiene sus raíces en la simplicidad y las necesidades prácticas de los campesinos que no tenían acceso a una educación formal o herramientas matemáticas avanzadas.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Para ello se tuvo en cuenta principalmente en el artículo La multiplicación de los campesinos rusos. Xataka ciencia de Munguía (2009).

La multiplicación de los campesinos rusos, también conocida como multiplicación egipcia, etíope, por duplicación o campesina, es un método sencillo de multiplicación cuyos conocimientos previos son la tabla del 2 y simplemente saber sumar. Fue utilizada por los campesinos rusos hasta la introducción de los sistemas escolares.

El método consiste en colocar los dos factores de la multiplicación como cabezas de dos columnas, en la primera columna se va sacando la mitad del número anterior sucesivamente, ignorando el resto cuando lo haya, hasta llegar a la unidad. En la segunda columna se va duplicando el número anterior, tantas veces como se necesito dividir entre dos para llegar a uno en la primera columna. sólo se tienen en cuenta los números impares en la columna donde se dividió y su correspondiente en la columna que se duplicó, obteniendo el resultado de la multiplicación al sumar los números que tenemos en cuenta en esta última columna, veamos cómo se utiliza el método para resolver 45×12 :

45	12*
22	24
11	48*
5	96*
2	192
1	384*
	<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">540</div> 
	Resultado de 45×12 Sumando $12+48+96+384$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Algunas preguntas que pueden surgir a raíz de este método son: ¿Por qué elegir los impares? ¿Por qué no se pueden elegir los pares? ¿Que me garantiza que no pueda elegir otros números?. Para responder a estas preguntas hay que hablar de la relación que existe entre este método y el sistema de numeración binario (mencionada en la sección de sistemas de numeración), como se explicó en la sección correspondiente, para pasar del sistema de numeración decimal al sistema de numeración binario se debe dividir el número entre dos e ir anotando el resto y el cociente. El cociente debe ser dividido entre dos y debe ser anotado de nuevo el resto y el cociente, así sucesivamente hasta que uno de los cocientes sea cero. Por último se toman los restos y se yuxtaponen en orden inverso al que aparecieron y este número es la representación binaria del número del que se partió. Veamos la representación binaria del número 45

Cocientes	45	22	11	5	2	1
Restos	1	0	1	1	0	1

El número binario que representa al número 45 es 101101, es decir que

$$\begin{aligned}1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \\= 45\end{aligned}$$

Ahora realicemos la multiplicación de 45×12 de la siguiente manera:

$$45 \times 12 = (1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0) \times 12$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$\begin{aligned} &= (32 + 8 + 4 + 1) \times 12 \\ &= 384 + 96 + 48 + 12 = 540 \end{aligned}$$

Como se pudo observar se toman los números impares de la columna por la que se divide entre dos, ya que son los que dejan resto uno en el sistema de numeración binario y no se toman los pares ya que el resto es cero, estos corresponden a términos que tienen multiplicador cero, por tanto, el número es nulo. Luego, lo que se obtiene al final es el producto de 45 expresado como suma de potencias de dos por 12.

5.4.1 Demostración del método de los campesinos rusos

La demostración del método de los campesinos rusos que se dará a continuación fue presentada por Ignacio Munguía (2009) en el blog *Xataka ciencia*. La demostración se realiza por inducción matemática sobre la variable B:

Sea $A \times B$ el producto de dos números A y B usando el algoritmo habitual y $A * B$ el producto de dos números A y B usando el método de los campesinos rusos. Veamos que $A \times B = A * B$, para $B = 1$, lo cual es cierto.

Ahora supongamos que $2A \times [\frac{B}{2}] = 2A * [\frac{B}{2}]$ ($[n]$ se denota como la parte entera redondeando a la baja). Entonces aplicando el algoritmo de los campesinos rusos, tenemos que $A * B = 2A * [\frac{B}{2}] + x$, siendo $x = A$ si B es impar y $x = 0$ si B es par.

Por otro lado $A \times B = 2A \times [\frac{B}{2}] + x$, siendo $x = A$ si B es impar y $x = 0$ si B es par; por las características propias de la multiplicación decimal.

Veamos que si la hipótesis es cierta para B entonces también lo es para $B + 1$.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$A * (B + 1) = 2A * \left[\frac{B+1}{2}\right] + x$, siendo $x = A$ si $B + 1$ es impar y $x = 0$ si $B + 1$ es par.

Si B es par $A * B$ tenemos que $x = 0$, luego, $A * B = 2A * \left[\frac{B}{2}\right]$. Ahora, para $A * (B + 1)$ tenemos que $x = A$, ya que B es par, pero $\left[\frac{B+1}{2}\right] = \left[\frac{B}{2}\right]$ (ya que se está redondeando a la baja), es decir, que $A * (B + 1) = 2A * \frac{B}{2} + A = A * B + A$.

Por otro lado $A \times (B + 1) = A \times B + A$ por propiedad distributiva en la multiplicación. Ahora, como $A \times B = A * B$, tenemos que:

$$A * (B + 1) = A * B + A = A \times B + A = A \times (B + 1).$$

Por lo tanto, para cualquier número natural B , $A \times B = A * B$, es decir, el algoritmo de multiplicación de los campesinos rusos es equivalente al método tradicional de multiplicación.

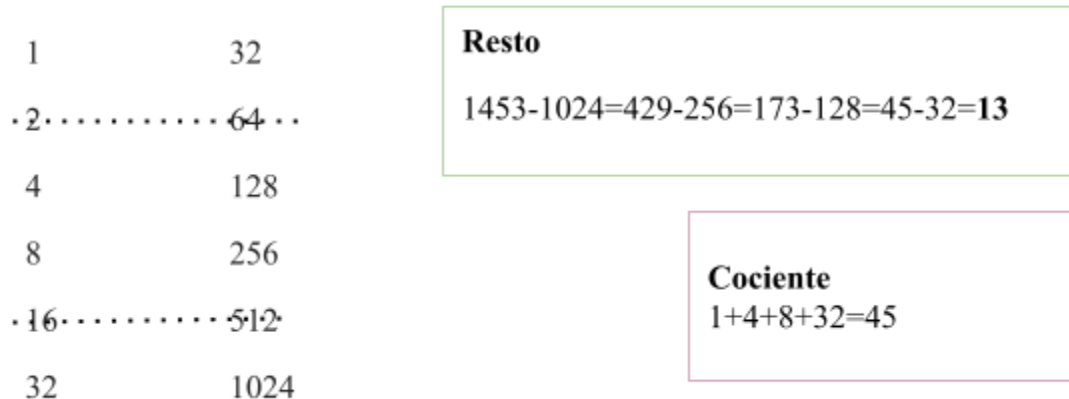
5.4.2 El método inverso para la división

El método inverso del campesino ruso para la división consiste en formar dos columnas encabezadas por el 1 y el divisor. Los números debajo de los encabezados se hallan duplicando el número de la fila de arriba sucesivamente hasta que en la columna del divisor la siguiente fila exceda al dividendo. Para hallar el resto se resta del dividendo el número más grande de la columna que encabeza el divisor de tal modo que el resultado de la resta no sea negativo, después a esta diferencia se le resta el siguiente número más grande que no de resultado negativo y así sucesivamente hasta que la diferencia sea menor que el divisor, tachando las filas que no cumplan la condición, este último resultado es el resto de la división. El cociente de la división se obtiene sumando los números de la columna del uno que no fueron tachados. Ilustremos lo

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

dicho anteriormente con un ejemplo $1453 \div 32$:

Figura 17
Método inverso para la multiplicación



5.4.3 El método inverso para la división generalizado

De acuerdo con Murray-Lasso (2001) el método inverso del Campesino Ruso está basado en la fórmula

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$$

donde el cociente queda expresado como la suma de productos de unos coeficientes por potencias de la base numérica que se eligió. Por este motivo el método puede ser generalizado para ser utilizado en diferentes bases.

5.6 Kaprekar

Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905-1986) fue un matemático Indio que estudiaba la teoría de números. En 1929 se graduó como licenciado en matemáticas y trabajó en la universidad de Bombay desde 1930 hasta 1962. Escribió artículos sobre temas como decimales con patrones recurrentes, cuadrados mágicos y números con propiedades especiales.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En 1946 Kaprekar descubrió que al tomar un número de 4 cifras, donde no se repitiera el mismo número en los 4 lugares, si se organiza el número en orden descendente y se le resta el número en orden ascendente después de un máximo de 7 repeticiones del algoritmo se obtendrá el número 6174. Hasta 1949 lo anunció en la conferencia matemática de Madras y en 1953 publicó el resultado en el artículo *Problemas relacionados con la inversión de dígitos en Scripta Mathematica*.

Para profundizar en la constante de Kaprekar y revisar cómo y por qué funciona se tomará como principal referencia a Nishiyama (2006) en un blog titulado Mysterious number 6174, donde se explica la demostración de esta particularidad.

Un ejemplo de la constante de Kaprekar es el siguiente, si tomamos el número 2023 y lo organizamos sus dígitos de forma ascendente y le restamos su organización en forma descendente, obtenemos:

$3220 - 0223 = 2997$, realizamos nuevamente el procedimiento y obtenemos

$9972 - 2799 = 7173$

$7731 - 1377 = 6354$

$6543 - 3456 = 3087$

$8730 - 0378 = 8352$

$8532 - 2358 = 6174$, lo que corresponde a la constante de Kaprekar.

La siguiente tabla nos muestra la relación entre la cantidad de números de 4 cifras y los procedimientos necesarios para llegar al número 6174.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Tabla 3

Iteración y frecuencia de la constante de Kaprekar

Iteración	Frecuencia
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980
Total	8991

Pero calcular 8991 números para clasificarlos por iteraciones sería extenuante. Sin embargo, basta con calcular 30 números.

Primero veamos que, sean $a, b, c, d \in N \cup \{0\}$ el número, $abcd$, con $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$

El máximo número posible es $1000a + 100b + 10c + d$ y el mínimo es $1000d + 100c + 10b + a$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Si restamos estos dos números obtenemos

$$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a)$$

$$= 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a$$

$$= 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + d - a$$

$$= 1000(a - d) + 100(b - c) - 10(b - c) - (a - d)$$

$$= 999(a - d) + 90(b - c)$$

Note que, $9 \geq a - d \geq 1$ y $9 \geq b - c \geq 0$

Tabla 4

Números después de la primera resta en el proceso de Kaprekar. Adaptado de Nishiyama (2006)

999(a-d)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	999	1998	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
	1	1089	2088	3087	4086	5085	6084	7083	8082	9081
	2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
	3	1269	2268	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
	4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
90(b-c)	5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

6	1539	2538	3537	4536	5535	6534	7533	8532	9531
7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7623	8622	9621
8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7803	8802	9801

La tabla 4 muestra los posibles resultados que se pueden obtener de la sustracción. Es claro que $(a - d) \geq (b - c)$, por lo tanto, podemos descartar el caso donde $(a - d) < (b - c)$ que corresponde a la parte gris.

Luego, organizando de nuevo los números de tal manera que las cifras queden en orden descendente, como en la tabla 5, de esta manera obtenemos los máximos números listos para el segundo proceso.

Tabla 5

Números máximos. Adaptado de Nishiyama (2006)

999(a-d)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
1	9810	8820	8730	8640	8550	8640	8730	8820	9810

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

90(b-c)	2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
	3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
	4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
	5					5544	6444	7443	8442	9441
	6						6543	7533	8532	9531
	7							7632	8622	9621
	8								8721	9711
	9									9810

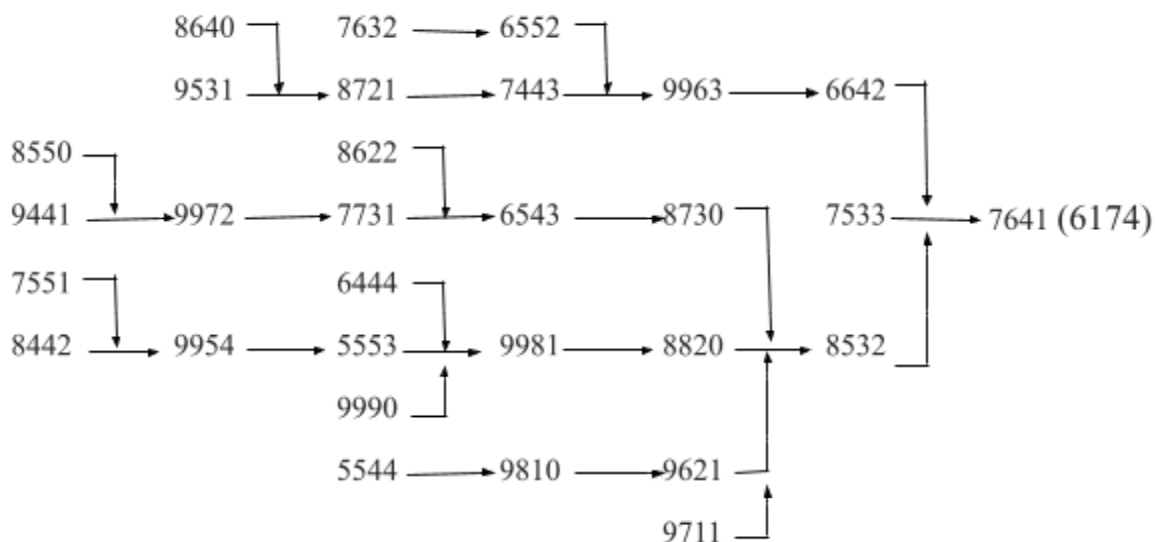
Luego, eliminamos los números que estén duplicados, obteniendo 30 números para seguir con el proceso.

La siguiente figura muestra las rutas que toman estos números para llegar a 6174.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 18

Rutas que toman los números para llegar a 6174. Adaptado de Nishiyama (2006).



Análogamente, se pueden determinar las constantes para un número de n cifras, donde se obtienen los siguientes resultados

Tabla 6

Número de constantes para un número de 2-10 dígitos

# dígitos n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
# constantes	0	1	1	0	2	0	2	2	3

Tabla 7

Número de constantes para un número de 11-19 dígitos

# dígitos n	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

# constantes	1	5	1	6	2	8	2	12	3
--------------	---	---	---	---	---	---	---	----	---

Así mismo, dependiendo de la cantidad de dígitos o cifras que contenga un número, se puede establecer si existe una constante, en la tabla 8 se muestra la respectiva constante para los números de 2 hasta 10 cifras.

Tabla 8

Constante de Kaprekar para un número de n dígitos

n	Constante
2	Ninguno
3	495
4	5.174
5	Ninguno
6	549.945, 631.764
7	Ninguno
8	63.316.664, 96.508.421
9	554.999.445, 864.196.532
10	5.333.175.664, 9.753.085.421, 9.974.084.201

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Además de la constante de Kaprekar, Kaprekar también realizó otras contribuciones a la matemática recreativa. A continuación se destacan algunas.

5.5.1 *Números de Kaprekar*

Un número n es número de Kaprekar si n^2 se puede dividir en dos para que las dos partes sumen n .

Ejemplo:

$$703^2 = 494209 \text{ y } 494 + 209 = 703$$

Los primeros números de Kaprekar son 1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, 7272, 7777, 9999, 17344, 22222, 38962, 77778, 82656, entre otros.

5.5.2 *Auto-números*

Primero es necesario entender a lo que Kaprekar llamó “Digitalización”.

Ejemplo:

Tomemos el número 23, como la suma de los dígitos es 5, entonces $23+5=28$, nuevamente, $2+8=10$, luego $28+10=38$, y obtendremos la secuencia:

23, 28, 38, 49, 62, 70,

Pero a 23 lo genera 16, de esta manera la secuencia original sería:

1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, 62, 70, ...

Si comenzamos con 29. Entonces obtenemos 29, 40, 44, 52, 59, 73, ...

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Pero 29 es generado por 19, que a su vez es generado por 14, que es generado por 6. Sin embargo, nada genera 7, por lo tanto, 7 es un número propio.

Los primeros números propios son: 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 211, 222, 233, 244, 255, 266, 277, 288, 299, 310, 312, 323, 334, 345, ...

También, hay ciertos números generados por más de un sólo número, a los que llama números de unión. Un ejemplo de estos números es el 101 ya que es generado por 100 y por 91 . Kaprekar, señala que hay tres tipos de posibles series de digitación: el tipo A tiene todos sus miembros coprimos a 3 ; el tipo B tiene todos sus miembros divisibles por 3 pero no por 9; y el tipo C tiene todos sus miembros divisibles por 9. Kaprekar señala que si x e y son del mismo tipo entonces sus series de dígitos coinciden después de cierto punto. Además, conjeturó que una serie de digitación no puede contener más de 4 números primos consecutivos.

5.5.3 Números de Harshad

Son números que son divisibles por la suma de sus dígitos. Por ejemplo, el número 114 es divisible por 6, dado que $1+1+4=5$.

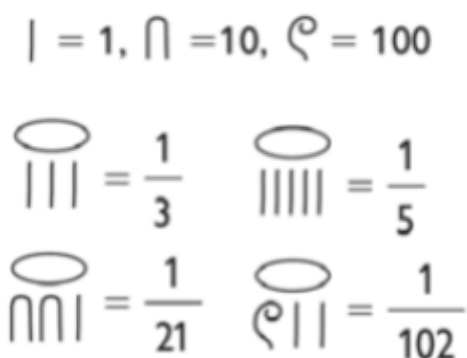
Los primeros números de Harshad son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198, 200, ...

En 1994 se demostró que no hay 21 números consecutivos de Harshad, pero sí es posible obtener 20 números consecutivos. Sin embargo, estos números son muy extensos.

5.7 La aritmética de Diofanto de Alejandría

A continuación se muestran las primeras apariciones de los números racionales en la historia, para luego centrar la atención en la notación utilizada por Diofanto en su obra la aritmética, mostrando las diferentes traducciones, para llegar a definir las diversas notaciones para una fracción, lo anterior apoyado en el texto *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La aritmética.* de Medina y Albarracín (2012), donde se destaca la importancia de las

Figura 19
Representación egipcia de las fracciones.



contribuciones de Diofanto al desarrollo de la matemática.

Veamos como los racionales han existido a lo largo de la historia y en las diferentes culturas, empecemos a hacer un recorrido por la historia, como ya conocemos la de los números enteros nos centraremos en la parte de la fracción.

Alrededor del año 3000 a. C, los egipcios ya manejaban dos sistemas de numeración, jeroglífico y hierático, mediante ellos denotaron fracciones unitarias. Lo anterior se evidencia en las inscripciones jeroglíficas egipcias, para la representación de las fracciones unitarias se utilizaba una expresión que designaba a este número con un signo oval alargado sobre el símbolo que representaba el denominador.

En el sistema de notación hierático, el cual lo podemos encontrar en los papiros, por ejemplo Papiro de Ahmes, en este sistema el óvalo alargado es reemplazado por un punto colocado



Figura 20
Sistema de notación hierático Papiro de Ahmes

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

sobre el símbolo que representa el número del denominador de la fracción. En cuanto a la fracción, donde el numerador es menor que el denominador, la descomponen en fracciones unitarias, entre las fracciones que descomponen estaban las fracciones propias irreducibles.

Diofanto nació en Alejandría, en el siglo III después de Cristo, alrededor del año 250, no se sabe la fecha exacta, pero según un epitafio redactado en forma de problema, se sabe que vivió 84 años, este epitafio está entre los epigramas de la Antología Palatina, la cual fue recopilada por Metrodoro de Bizancio cerca del año 500 d.C.

Creó una obra titulada *La Aritmética*, esta estaba compuesta por 13 libros, según el propio Diofanto en el preámbulo del libro 1, pero sólo se conocen 6 libros de origen griego (*I, II, III, IV, V, VI*) que contienen una cantidad de 189 problemas, también 34 proposiciones. Además existe un fragmento Sobre los Números Poligonales, que posiblemente es parte de esta obra. También existen 4 libros (*IV_(a), V_(a), IV_(a), VII_(a)*), origen árabe que contienen una cantidad de 101 problemas, así mismo once definiciones, las cuales están clasificadas en la edición de Bachet (1621).

Veamos el contenido de cada libro

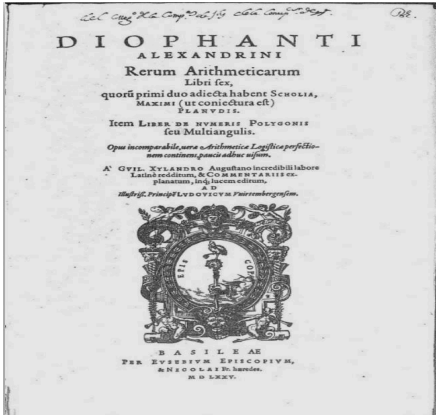
- **Libro I (griego)** 39 problemas en total, 25 problemas de primer grado, 14 problemas de segundo grado
- **Libro II (griego)** 35 problemas en total, los 5 primeros son problemas apócrifos, los 30 restantes son problemas de segundo grado. El problema 8 dio origen al último teorema de Fermat.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES



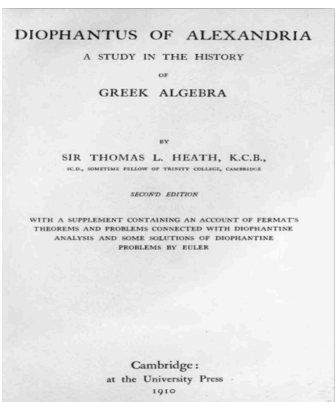
- **Libro III (griego)** 21 problemas en total, el 10 es el primero resuelto por falsa posición; en el 19, Diofanto acude por primera vez a la representación geométrica.
- **Libro IV (griego)** 40 libros en total, casi todos los problemas se refieren a números cúbicos y son problemas de segundo y tercer grado.
- **Libro V (griego)** 30 problemas en total, de los cuales 28 son de segundo y tercer grado, en el problema 29 intervienen cantidades bicuadradas desconocidas que hábilmente Diofanto logró encontrar reduciendo las a expresiones cuadráticas. Aparece el único problema que cae en el campo de la logística griega.
- **Libro VI (griego)** 24 problemas en total, referidos a triángulos rectángulos.
- **Libro IV (arabe)** 44 problemas en total, donde la solución buscada es principalmente un cuadrado o un cubo
- **Libro V (arabe)** 16 problemas en total, donde la solución buscada es principalmente un cuadrado o un cubo
- **Libro VI (arabe)** 23 problemas en total, donde la solución buscada es principalmente un cuadrado o un cubo
- **Libro VII (arabe)** 18 problemas en total, donde la solución buscada es principalmente un cuadrado o un cubo

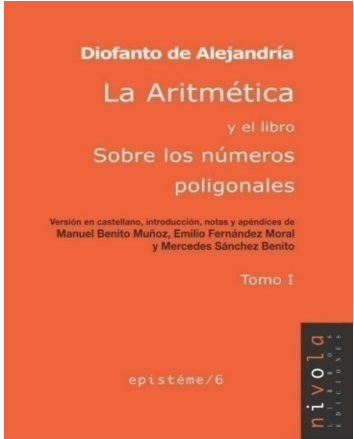
Tabla 9

Traducciones de la obra La Aritmética a través del tiempo

Año - Autor	sobre la traducción
1556 - Joachim Liebhard	Publicó una carta acerca de un manuscrito de Diofanto, Pero hasta 1572 Bombelli lo incluye en su Álgebra
siglo XVI - Xylander	<p>Hace la traducción de un manuscrito griego, basado en el códice de la biblioteca ducal de Wolfenbüttel</p>  <p>The image shows the title page of a Latin edition of Diophantus' 'Arithmetica'. The text is in Latin and includes the title 'DIOPHANTII ALEXANDRINI Rerum Arithmeticarum Libri sex'. It also mentions 'Xylander' and 'Basileae'.</p>
1621 - Bachet de Méziriac	Traducción al latín, basado en el Codex Regius, la cual es una copia de la aritmética de Diofanto (XVI)
1893 - Paul Tannery	Traducción que contiene texto en griego y la traducción al atín.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

	 <p>Diophantus DIOPHANTI ALEXANDRINI OPERA OMNIA CUM GRAECIS COMMENTARIIS EDIDIT PAULUS TANNERY. ----- VOLUMEN II CONTINENS PSEUDOPHRASIA, TESTIMONIA VETERUM, PACHYMERAS PARAPHRASES, PLANTIOS CORROPTABUM, SCHOLIA VETERA, OMNIA PER ARITH. TRIGITA, CUM PROLEGOMENIS ET INDICIBUS. -----  ----- LIPSIÆ IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI. M^{CM}CCCXXV.</p>
<p>1822 - Otto Schulz</p>	<p>Traducción al alemán</p>
<p>1885 - Thomas L. Heath</p>	 <p>Traducción al inglés.</p>
<p>1890 - Wertheim</p>	<p>Traducción al alemán</p>
<p>1926- Paul Ver Eecke</p>	<p>Traducción al francés</p>

<p>2007 - Muñoz et al.</p>	<p>Traducción al español</p> 
----------------------------	---

Diofanto uso el sistema de numeración jónico como sistema de símbolos, este sistema constaba de 27 letras, 24 eran del sistema jónico y las otras tres letras fueron digamma, qoppa y sampi, por medio de ellas se simbolizaban los números del 1 al 999, dado que las primeras 8 letras del alfabeto eran las unidades representaban los números del 1 al 9 y el 6 era la letra digamma, las siguientes 8 letras simbolizaban las decenas del 10 al 80 y para el 90 se utilizó la letra qoppa, se para las centenas las últimas 8 letras del alfabeto junto con sampi para el 900. Debido a que el sistema numérico era el mismo alfabeto, surgió el problema de cómo distinguir entre una palabra y un número, para solucionar este problema decidieron colocar una segmento de recta horizontal sobre cada letra, para indicar que se estaban refiriendo a un número, veamos un ejemplo ($\bar{\xi} = 60$, $\bar{\beta} = 2$, $\bar{\pi} = 80$).

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 21

Sistema de numeración griego jónico

UNIDADES			DECENAS			CENTENAS					
α	A	Alfa	1	ι	I	Iota	10	ρ	P	Rho	100
β	B	Beta	2	κ	K	Kappa	20	ζ ó σ	Σ	Sigma	200
γ	Γ	Gamma	3	λ	Λ	Lambda	30	τ	T	Tau	300
δ	Δ	Delta	4	μ	M	Mi	40	υ	Y	Ypsilon	400
ϵ	E	Épsilon	5	ν	N	Ni	50	ϕ	Φ	Phi	500
ζ	F	Digamma	6	ξ	Ξ	Xi	60	χ	X	Chi	600
ζ	Z	Dseta	7	\omicron	O	Ómicron	70	ψ	Ψ	Psi	700
η	H	Eta	8	π	Π	Pi	80	ω	Ω	Omega	800
θ	Θ	Theta	9	ϱ	ϱ	Qoppa	90	λ	λ	Sampi	900

El sistema jónico es aditivo por ello para representar los números que no tenían un símbolo propio, se sumaban números hasta llegar a él, de la misma manera para las centenas primeros el símbolo que representa la centena , seguido del símbolo para la decena y por último la unidad indicada. Según Medina y Albarracín, Heath, en los libros *IV – 28* y *IV – 39* de Diofanto, aparecen los números y se simbolizan los números

$$\overline{\phi\iota\beta} = 512$$

$$\overline{\rho\kappa\alpha} = 121.$$

Es importante decir que hasta el momento solo se puede representar hasta el 999, entonces cómo se representaba el 1000 y los números más grandes, para esto se utilizaron los símbolos de las unidades, pero antecedido con un símbolo en la parte inferior de ellos, que tenía una semejanza al símbolo *Iota*. Observe la siguiente tabla:

Tabla 10

Representación de las unidades de mil

1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
ια	ιβ	ιγ	ιδ	ιε	ις	ιζ	ιη	ιθ

Algunos dicen que para el número 10.000 se utilizó la M con el α en la parte superior de M, así para cualquier número, pero según Cajori, la M, no siempre se usó para el 10.000, Diofanto utilizó un punto de la siguiente manera:

$$\alpha \cdot \sigma\alpha = 1 \times 10.000 + 200 + 1 = 10.201$$

$$\gamma \cdot \xi\chi\kappa\alpha = 3 \times 10.000 + 5.000 + 600 + 20 + 1 = 35.621$$

simbología para representar las potencias

5.6.1 Potencias de números

Diofanto considero que los números eran infinitos, además, para él existían entre estos números, unos números que eran determinantes, pues se les podía encontrar en la mayoría de los problemas, a estos números los denominó *τετραγώνων* que significa cuadrado, este número surge al multiplicar un número por asimismo conocido como *πλευρά* (lado), con la notación de hoy día sería $l \cdot l = l^2$; otro de esos números se denominaba *κύβων* que su traducción es cubo, este se daba al multiplicar el cuadrado por el lado, así en nuestra notación es $l^2 \cdot l = l^3$; *δυναμοδυνάμεων* que son los cuadrados-cuadrados, se pueden ver como $l^2 \cdot l^2 = l^4$;

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

δυναμοκύβων significa los cuadrado-cubos, esto es $l^2 \cdot l^3 = l^5$; *κυβοκύβων* que son los cubo-cubos que se obtiene al multiplicar $l^3 \cdot l^3 = l^6$.

Lo anterior indica que la notación utilizada por Diofanto era retórica, dado que para referirse a las potencias debía escribir la palabra completa, lo podemos ver en el libro iv-8 en la solución de diofanto citada por Heath en 1910, quien escribe, el cubo es $\frac{343}{2197}$ su lado $\frac{7}{13}$.

5.6.2 Potencias de aritmos

Diofanto trabajo con un tipo de potencias que no tenían como base un número, a estas las llamo potencias de aritmos, en estas la incógnita tiene una cantidad indeterminada de unidades, la denomino como *ἀριθμός* (aritmo), su notación fue el símbolo ζ . A continuación se muestra una tabla con la notación utilizada por Diofanto para las potencias de aritmos.

Tabla 11

Notación de las potencias de aritmos

Nombre griego	<i>δύναμις</i>	<i>κύβος</i>	<i>δυναμοδύναμις</i>	<i>δυναμόκυβος</i>	<i>κυβόκυβος</i>
traducción	cuadrado	cubo	cuadrado-cuadrado	cuadrado-cubo	cubo-cubo
representación dada por Diofanto	Δ^Y	K^Y	$\Delta^Y \Delta$	ΔK^Y	$K^Y K$
representación de hoy día	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6

5.6.3 Símbolos para operaciones

Diofanto no utilizó símbolos para la multiplicación y la suma, pero para la sustracción creó un símbolo, el cual se creo que viene de la abreviatura de leipheim en griego, pues este verbo comienza con *lambda e iota* (Λ).

Figura 22
Notación para el menos



La suma la indicaba con yuxtaposición, dado que sólo colocaba números tras otros o variables, para la multiplicación no utilizó nada, veamos un ejemplo tomado del trabajo de medina y albarracín 2012.

$$\mathbf{K}^{\gamma\bar{\alpha}}\Delta^{\gamma}\bar{\iota}\bar{\gamma}\zeta\bar{\epsilon}\mu^0\bar{\beta} = x^3 + 13x^2 + 5x + 2$$

Como vemos en la expresión anterior la suma se hace yuxtaponiendo las variables o números, veamos cada término de la expresión para entender mejor. Por la tabla anterior sabemos que $K^{\gamma} = x^3$, además $\bar{\alpha} = 1$, entonces $\mathbf{K}^{\gamma\bar{\alpha}} = x^3$, ahora $\Delta^{\gamma} = x^2$ y

$\bar{\iota}\bar{\gamma} = 13$, entonces $\Delta^{\gamma}\bar{\iota}\bar{\gamma} = 13x^2$, como se dijo anteriormente la incógnita es denotada por $\zeta = x$ y $\bar{\epsilon} = 5$, luego, $\zeta\bar{\epsilon} = 5x$, veamos que antes de $\bar{\beta} = 2$ aparece otro símbolo μ^0 , este símbolo es utilizado por Diofanto para indicar que el número que lo sigue es número determinado, lo que hoy día se conoce como términos independientes, también utiliza M^0 para denotar los números determinados, con esto podemos entender por completo la expresión.

Para indicar la igualdad utilizaba ι^{σ} que es una abreviatura de la palabra *ίσοσ*, además hay diferentes abreviaturas para indicar los pasos en el proceso de solución de un problema, veamos algunos: $\kappa\theta.$ = $\kappa\theta\epsilon\iota\varsigma$ = Planteamiento, $\tau\epsilon\rho.$ = $\tau\epsilon\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ = Cuadratura; $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta.$ = $\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\epsilon\iota\varsigma$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

= sumándolos; $\acute{\alpha}\phi.$ = $\acute{\alpha}\phi\alpha\iota\rho\epsilon\iota\varsigma$ = restando; $\mu\epsilon\rho.$ = $\mu\epsilon\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$ = división y $\acute{\nu}\pi.$ = $\acute{\nu}\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\xi\iota\varsigma$, = hecho que resulta. Ahora miremos el proceso de solución de un problema con la simbología de diofanto con ayuda de las anteriores abreviaturas.

Problema 28 del libro I: “Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados sean números dados.”

Tabla 12

Solución del problema 28 del libro I

simbología actual	simbología de Diofanto
Los números son : 20 y 208	\bar{K} $\bar{\sigma\eta}$
El número mayor y menor están dados por: $x + 10$; $10 - x$	$\epsilon\kappa\theta$ $\bar{\varsigma\alpha\mu\iota}^0$ $\bar{\mu\iota\theta\varsigma\alpha}^0$
Elevarlos al cuadrado se tiene: $x^2 + 20x + 100$; $x^2 - 20x + 100$	$\tau\epsilon\tau\rho$ $\Delta\bar{\alpha\varsigma\kappa\mu\rho}^{\gamma\bar{\quad}0\bar{\quad}}$ $\Delta\bar{\alpha\mu\rho\theta\varsigma\kappa}^{\gamma\bar{\quad}0\bar{\quad}}$
Sumándolos e igualando al número mayor $2x^2 + 200 = 208$	$\sigma\upsilon\nu\theta$ $\Delta\bar{\beta\mu\sigma\iota}^{\gamma\bar{\quad}0\bar{\quad}\sigma}$ $\bar{\mu\sigma\eta}^0$
Restando	

$2x^2 = 8$	$\alpha\phi$	$\Delta \overline{\beta} \iota^\sigma$	$\mu \overline{\eta}^0$
Dividiendo			
$x^2 = 4$	$\mu\epsilon\rho$	$\Delta \overline{\alpha} \iota^\sigma$	$\mu \overline{\delta}^0$
$x = 2$		$\varsigma \iota^\sigma$	$\mu \overline{\beta}^0$
El resultado 12 y 8	$\nu\pi$	$\mu \overline{\iota\beta}^0$	$\mu \overline{\eta}^0$

5.6.4 Formas de representación de fracciones

Las fracciones alícuotas de Diofanto se caracterizan por tener por numerador el número 1, pero la representación de los fraccionarios de aritmos son distintos de la de los números.

5.6.4.1 Fracciones alícuotas de números.

Tabla 13

Representación de una fracción alícuota de números

δ''	δ^\top	δ^x
	$\frac{1}{4}$	

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En la anterior tabla se pueden identificar tres formas de representar las fracciones alícuotas de números, la primera se coloca el símbolo del número del denominador elevado al doble acento, la otra forma también el número del denominador está elevado al siguiente símbolo γ , la última forma el número está elevado a una x , estas formas las describe Heath (1910).

5.6.4.2. Fracciones alícuotas de aritmos. En representación de estas fracciones realizada por Diofanto Primero se escribía el símbolo de la potencia del aritmo del denominador, seguido de un símbolo en la parte del exponente, dicho símbolo se asemeja bastante a la letra χ , luego el símbolo del número uno (1). Veamos la siguiente tabla

Tabla 14

Representación de las fracciones alícuotas de aritmos

Representación actual	Representación de Diofanto
$\frac{1}{x}$	$\zeta^{\chi\bar{\alpha}}$
$\frac{1}{x^2}$	$\Delta^{\gamma\chi\bar{\alpha}}$
$\frac{1}{x^3}$	$K^{\gamma\chi\bar{\alpha}}$
$\frac{1}{x^4}$	$\Delta^{\gamma} \Delta^{\chi\bar{\alpha}}$
$\frac{1}{x^5}$	$\Delta K^{\gamma\chi\bar{\alpha}}$
$\frac{1}{x^6}$	$K^{\gamma} K^{\chi\bar{\alpha}}$

5.6.4.3 Fracciones no alcuotas de números. En estas fracciones el numerador es diferente de uno, también se pueden simbolizar de diferentes formas:

- en la primera manera se coloca el numerador como base elevado al denominador, por ejemplo la fracción $\frac{12}{5} = \iota\beta^\varepsilon$, este formato fue muy utilizado por matemáticos entre ellos están Planudes, Bachet, Arquímedes y Eutocio.
- la segunda forma se puede encontrar en el libro de Heath (1910), esta se representa así $\bar{\gamma}\delta' = \frac{3}{4}$, aquí podemos ver que primero se escribe el numerador seguido del denominador, el cual está elevado a un acento,
- otra forma según Medina y Albarracín es adaptada por Tannery (1895), en esta la representación es muy parecida a la que hoy día conocemos la diferencia es que el denominador está en la parte superior y numerador en la parte inferior, un ejemplo de ello es $\frac{2}{11} = \frac{\alpha}{\beta}$, Pero la línea del medio no fue utilizada por Diofanto, a continuación se muestra una tabla tomada del trabajo de Medina y Albarracín sobre la forma que Diofanto los representó.

Tabla 15

Representación de las fracciones no alícuotas de números tomada de Medina y Albarracín

EJEMPLO	LIBRO
$\iota\beta = \frac{17}{12}$	V - 10
$\phi\iota\beta = \frac{2.456}{512}$	IV - 28
$\alpha \cdot \sigma\alpha = \frac{5.358}{10.201}$	V - 9
$\beta\psi\delta = \frac{36.621}{2.704}$	IV - 16

- También Diofanto utilizó otras formas entre ellas está la de escribir las palabras $\epsilon\acute{\nu}\ \mu\omicron\rho\iota\phi$ o $\mu\omicron\rho\iota\omicron\upsilon$ entre el numerador y el denominador, un ejemplo aparece en el libro V - 22 de Diofanto

$$\overline{\beta} \cdot \overline{\epsilon\chi} \ \acute{\epsilon}\nu\ \mu\omicron\rho\iota\phi\ \overline{\rho\kappa\beta} \cdot \overline{\alpha\kappa\epsilon} = \frac{25.600}{1.221.025}$$

Figura 23. Ejemplo tomado del libro v-22 de Diofanto

- Según Medina y Albarracín (2012) los griegos simbolizaban las fracciones, primero el numerador elevado a un acento, segundo el denominador marcado elevado a dos acentos y escrito doble vez, veamos un ejemplo:

$$\frac{15}{22} = \iota\epsilon'\kappa\beta''\kappa\beta''.$$

- en la obra de Cajori indica que Diofanto tenía una variedad de formas para escribir los fraccionarios y que cuando estos estaban formados por números muy

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

grandes, veamos el ejercicio 16 del libro IV, en el cual se escribe de la siguiente manera:

$$\overline{\gamma \cdot \zeta \chi \kappa \alpha}^{\beta \psi \delta \sim} = \frac{35.621}{2.704}$$

5.6.4.4 Fracciones no alícuotas de aritmos. Para estas fracciones hay dos formas, la primera es muy parecida a la representación de las fracciones alícuotas de aritmos, pero el símbolo ya no es alfa, si no el símbolo del número del numerador. veamos

Tabla 16

Representación de las fracciones no alícuotas de aritmos

Representación actual	Representación de Diofanto
$\frac{8}{x}$	$\zeta \overline{\eta}^x$
$\frac{7}{x^2}$	$\Delta^{\gamma} \overline{\zeta}^x$
$\frac{4}{x^3}$	$K^{\gamma} \overline{\delta}^x$
$\frac{9}{x^4}$	$\Delta^{\gamma} \Delta^{\overline{\theta}^x}$
$\frac{6}{x^5}$	$\Delta K^{\gamma} \overline{\zeta}^x$
$\frac{3}{x^6}$	$K^{\gamma} K^{\overline{\gamma}^x}$

La segunda forma Diofanto colocaba entre el numerador y el denominador la palabra *ἐν μορίφ* o la palabra *μοριού* para denotar una fracción, veamos un ejemplo tomado de Medina y Albarracín (2012)

Figura 24
Ejemplo tomado de Medina y Albarracín (2012)

$\Delta^Y \bar{\xi} \mu^o, \bar{\beta} \phi \kappa$ ἐν μορίφ $\Delta^Y \Delta \bar{\alpha} \mu^o \lambda \bar{\zeta} \text{ ἢ } \Delta^Y \bar{\xi}$	$\frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$	VI - 12
$\Delta^Y \bar{\iota} \bar{\epsilon} \text{ ἢ } \mu^o \bar{\lambda} \bar{\zeta}$ ἐν μορίφ $\Delta^Y \Delta \bar{\alpha} \mu^o \bar{\lambda} \bar{\zeta} \text{ ἢ } \Delta^Y \bar{\iota} \bar{\beta}$	$\frac{15x^2 - 36}{x^4 + 36 - 12x^2}$	VI - 14

5.6.5 Propiedades de la multiplicación

- Diofanto entendía el hecho de que el número multiplicado por sí mismo es igual al cuadrado, el número por el cuadrado es igual al cubo, el número por el cubo es igual al cuadrado-cuadrado, el número por el cuadrado-cuadrado, es igual al cuadrado-cubo, el número por el cuadrado-cubo es igual al cubo-cubo; así mismo, el cuadrado multiplicado por el cuadrado da el cuadrado-cuadrado,...., el cubo por el cubo es igual al cubo-cubo. De aquí podemos ver que Diofanto conocía la propiedad de producto de potencias de igual base ($a^m \cdot a^n = a^{m+n}$), aunque sólo se ha trabajado con potencias hasta seis, Diofanto en otros problemas trabaja con potencias 8 y 9 de aritmos.
- “Todo número multiplicado por una fracción que tenga por denominador el mismo número es la unidad” (citado Heath, 1910, p. 1033, citado por Medina y Albarracín, 2012), aquí podemos ver que diofanto tiene conocimiento sobre el inverso multiplicativo

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

- Diofanto señala que la unidad es la cantidad constante e invariable, su multiplicación por cualquier número da como resultado el mismo número, en esta parte podemos ver que conoce que el número 1 es el módulo o elemento neutro para la multiplicación, en el ejercicio 6 del libro III, aparece lo siguiente $(\zeta - 1)^2 = \zeta^2 + 1 - 2\zeta$, por medio de este ejercicio se puede ver que el desarrollo debió ser

$$(\zeta - 1)(\zeta - 1) = \zeta \cdot \zeta + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot \zeta + \zeta \cdot (-1) = \zeta^2 + 1 - 2\zeta$$

- La multiplicación entre fracciones alícuotas, cuando son números, multiplicaba los dos denominadores para tener el denominador, y el numerador sigue siendo 1, de manera general lo vio como $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$, de la misma forma que cuando eran aritmos, los denominadores se multiplican, pues se mantenía la base y se sumaban los exponentes, y el numerador seguía siendo 1. En cuanto a la multiplicación de una fracción por un aritmo cualquiera, en la siguiente tabla se muestra.

Figura 25
Multiplicación entre fracciones alicuotas

Fración numérica	Fración cuadrática	Fración cúbica	Fración cuadrado-cuadrática	Fración cuadrado-cúbica	Fración cubo-cúbica
	$\frac{1}{a^2} \cdot a = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^3} \cdot a = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^4} \cdot a = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a = \frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a = \frac{1}{a^5}$
$\frac{1}{a} \cdot a^2 = a$		$\frac{1}{a^3} \cdot a^2 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^2 = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^2 = \frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^2 = \frac{1}{a^4}$
$\frac{1}{a} \cdot a^3 = a^2$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^3 = a$		$\frac{1}{a^4} \cdot a^3 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^3 = \frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^3 = \frac{1}{a^3}$
$\frac{1}{a} \cdot a^4 = a^3$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^4 = a^2$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^4 = a$		$\frac{1}{a^5} \cdot a^4 = \frac{1}{a}$	$\frac{1}{a^6} \cdot a^4 = \frac{1}{a^2}$
$\frac{1}{a} \cdot a^5 = a^4$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^5 = a^3$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^5 = a^2$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^5 = a$		$\frac{1}{a^6} \cdot a^5 = \frac{1}{a}$
$\frac{1}{a} \cdot a^6 = a^5$	$\frac{1}{a^2} \cdot a^6 = a^4$	$\frac{1}{a^3} \cdot a^6 = a^3$	$\frac{1}{a^4} \cdot a^6 = a^2$	$\frac{1}{a^5} \cdot a^6 = a$	

- Ley de los signos: Diofanto afirma que el producto de lo deficiente por lo deficiente es positivo, el de lo deficiente por lo positivo es deficiente, esta es una de las traducciones que según el autor Heath se asemeja más a las palabras utilizadas por Diofanto. Como evidencia de esto podemos volver a tomar el ejercicio ya antes mencionado el 6 del libro III aquí podemos dar cuenta del uso de la regla de los símbolos
- También se señala que al aprender a multiplicar, es muy fácil dividir, dado que este se puede ver como un proceso inverso de la multiplicación.
- Reducción de términos semejantes: Si en un problema resultan expresiones idénticas, pero no equipolentes, hay que restar en uno y otro lado las semejantes de las semejantes hasta obtener una sola expresión igual a otra sola expresión y si se presentan expresiones negativas en uno o en otro lado añadir las hasta conseguir positivas en uno y otro lado y luego restar las semejantes de las semejantes hasta

que quede una sola expresión a uno y otro lado; (Diofanto citado en Vera, 1970, pág. 1034 citado en Medina y Albarracín, 2012)

5.8 Decimales y sumas infinitas

En la siguiente información se profundiza en los temas de decimales y sumas infinitas, teniendo en cuenta el desarrollo histórico y las contribuciones que los diferentes matemáticos realizaron a estos temas, para ello se tiene en cuenta principalmente el libro 4000 años de historia de las Series Infinitas de Rosas y Molina (2016).

5.8.1 *Los números decimales*

De acuerdo con Gomez (2010) “Los números decimales se presentan como una nueva forma de escritura de las fracciones decimales” , por consiguiente, los números decimales nacieron por la necesidad de facilitar los cálculos con fracciones.

5.8.1.1 Un poco de historia sobre el separador decimal. Desde la escritura decimal india original, la cual apareció en la Edad Media, se utilizaba como separador decimal una barra sobre la cifra de las unidades ($\bar{\quad}$) para separar la parte entera de la parte decimal como en $1\bar{3}46$ (). Otra notación similar usada sobre todo en cuestiones monetarias es el subrayado para dígitos en el superíndice $13^{46} \text{ }_{99}^{95}$. Más tarde, un trazo de tinta corto denominado separadora se convirtió en la norma para los matemáticos árabes, mientras que en Inglaterra se utilizó una barra vertical o en forma de L.

La primera aparición de las fracciones decimales posicionales, considerándolo una curiosidad, fue en el siglo X en el libro supérstite del kitab al-fusul fi al-Hindi escrito por Al-Uqlidisi, matemático árabe, quien utilizó una notación similar a la que se utiliza actualmente,

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

la cual separaba la parte entera (unidades) de la decimal (de cien) con una coma, por ejemplo 2'14 que se leía 2 unidades 14 de cien y es equivalente a 2,14 que se lee 2 enteros 14 centésimos.

En el año 1427 el astrónomo y matemático persa Al Kashi reconoce los números decimales como un descubrimiento matemático explicando la teoría de las fracciones decimales y la noción de número decimal, además de concebir las fracciones decimales como fracciones compuestas de potencias sucesivas del décimo, lo que llamó decimos, segundos decimales y terceros decimales, convirtiendo la noción de decimal en una noción para matemática, es decir, que se usa conscientemente.

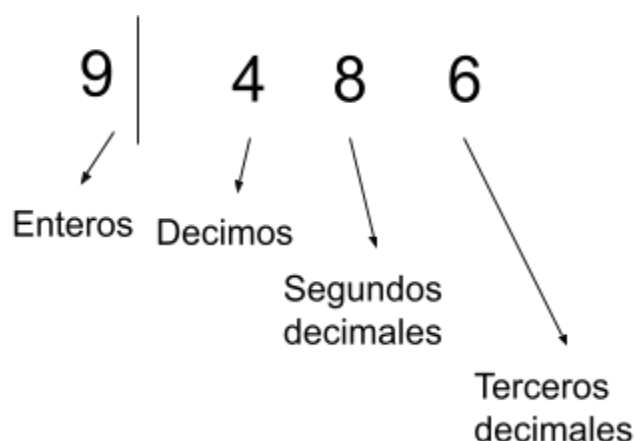


Figura 26. Representación de las partes de un número decimal

En el año 1492 el matemático italiano Francisco Pellos, fue el primero en emplear en punto como separador decimal en su obra Compendio de lo Ábaco, pero sin ningún intento de generalización. Años más tarde en 1579 aparece la coma o una barra vertical de la obra Canon del matemático francés Francois Viete. De estos dos autores partió la controversia sobre qué separador decimal usar.

Figura 27
Texto de Thiende 1585



SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Simon Stevin matemático e ingeniero belga fue el primero en extender la aritmética de la teoría de fracciones decimales a occidente. Escribió el texto titulado *De Thiende o La Disme* publicado en 1585, en el que trató de enseñar cómo efectuar con números enteros todas las cuentas que aparecen en los negocios de los hombres.

Stevin utilizó el símbolo © para separar el número entero, al que llamó principio, de las fracciones de la unidad, explicadas por Stevin de la siguiente manera: cada décima parte de la unidad del principio la llamamos prima y su signo es ①, la décima parte de la unidad de primas la llamamos segunda y su signo es ②. Y así para cada décima parte de la unidad del signo precedente, siempre en orden ascendente.



Figura 28

Representación de los números decimales tomada del libro La Disme de Stevin

Después de Stevin, el matemático suizo Jobst Burgi a diferencia de Stevin únicamente separó la parte decimal con el signo (°) por ejemplo para escribir 10.23 lo escribía 10°23.

Dos autores que tuvieron repercusiones para el uso del punto y la coma fueron: el matemático italiano Giovanni Antonio Magini, quien introdujo el uso del punto como separador decimal en el año 1592 y años más tarde, el matemático y óptico neerlandés Wilbord Snellius a principios del siglo XVII introdujo la coma. En consecuencia, a partir del año 1616 matemáticos como John Napier en su tratado *Rabdology* y Newton en sus cartas personales, usaron la coma y el punto sin ninguna distinción.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En el siglo XVI se dio el ambiente adecuado para el uso de decimales por el crecimiento del comercio, nacimiento de los bancos y otras empresas. Sin embargo, para que se generalizará el uso del punto y la coma como separadores decimales paso un tiempo, no fue sino hasta en el siglo XVIII que se empezó a expandir el uso de la coma por Europa occidental apoyada por la revolución francesa, mientras que el punto se hizo más fuerte en las islas británicas.

5.8.2 Las sumas infinitas y series

En las civilizaciones antiguas se presentaron algunos indicios de progresiones aritméticas y geométricas:

5.8.2.1 La civilización India. en el libro *Mandala II del Rg Veda* que data de entre los 2000 a.C y los 1700 a.C, en el que están escritos 43 himnos dirigidos a las deidades Agni e Indra. En este libro en el himno 18 aparecen las progresiones aritméticas de diferencia de 2 y de diferencia de 10, presentes en el siguiente pasaje citado por De Mora y Ludwika (2003):

Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños, Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca. Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma. He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes ¡OH Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro veinte, treinta, cuarenta caballos. Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra, sesenta o setenta, para beber el Soma (p. 18).

No existe evidencia de que los Hindúes hayan realizado las sumas de estas progresiones, sin embargo, tenían conocimiento sobre el concepto de infinito. Por otra parte, la civilización Harappa (1300 a.C -1700 a.C) utilizó las sucesiones para fines prácticos en su sistema de pesas.

5.8.2.2 El antiguo Egipto. En el papiro de Rhind (1650 a.C) se utilizaban progresiones aritméticas para resolver los problemas 63 y 64, citados por Rosas y Molina (2016):

Problema 63. Repartir 700 hogazas de pan entre cuatro hombres en partes proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

Problema 64. Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea $\frac{1}{8}$ de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre? (p. 15).

Sin embargo, no hay evidencia de trabajo con sumas infinitas.

5.8.2.3 Las paradojas de Zenon. Zenon de Ela (490 a.C - 425a.C) construyó argumentos con los cuales intentaba probar el movimiento y el análisis continuo, estos argumentos los llamo paradojas, en total fueron 40 paradojas de las cuales cuatro inquietaron a los matemáticos:

Aquiles, la dicotomía, la flecha y el estadio. De acuerdo con Saavedra (1996):

Aquiles: Aquiles "el de los pies ligeros", compitiendo en una carrera con una tortuga, a la que se ha dado una ventaja inicial, aunque corra a mucha velocidad, no podrá alcanzar ni podrá, por supuesto, adelantar nunca a la tortuga, por muy lento que ésta se mueva, pues para cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña y, cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos y así, el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.

La Dicotomía: Afirma que antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer, en primer lugar, la mitad de ésta distancia; pero antes de

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

recorrer ésta, deberá recorrer el primer cuarto de la distancia inicial Y^* antes aún el primer octavo y, así, indefinidamente, a través de una cantidad infinita de subdivisiones. El corredor, cuya velocidad es constante, que quiere iniciar su carrera debe realizar un número infinito de etapas sin ninguna primera en un tiempo finito; pero es obviamente imposible agotar una colección infinita, es decir, tal que el movimiento nunca puede siquiera comenzar.

La Flecha: Sostiene que un objeto moviéndose en el aire siempre ocupa un espacio igual a sí mismo, y que lo que siempre ocupa un lugar igual a sí mismo no puede estar en movimiento; por lo tanto, la flecha está en reposo en todos los instantes durante su vuelo, luego su movimiento no es más que una ilusión.

Estas cuatro paradojas fueron retomadas por Aristoteles (384 a.C - 322 a.C) y son los primeros ejemplos de sucesiones infinitas que aparecen en los griegos.

5.8.2.3 Arquímedes de Siracusa. Nació en el año 287 a. C y murió en el saqueo que siguió a la caída de Siracusa en el año 212 a. C. Fue una célebre y famosa figura de Siracusa, es considerado el primer matemático moderno y tuvo como maestros en Alejandría a Conon de Samos (280–220 a. C), Dositeo de Pelusa y Eratóstenes de Cirene (276–194 a. C), quienes fueron sucesores de Euclides. De acuerdo con Parra (2009) “La obra de Arquímedes fue desarrollada fundamentalmente a través de cartas escritas en el más absoluto rigor euclidiano y con un marcado énfasis en la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica y la Física”

Alrededor del 230 a.C fue la primera vez que se mencionó una serie infinita en los trabajos de Arquímedes sobre la cuadratura de la curva, Arquímedes encontró la expresión:

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots$, de la cual intentó demostrar que el límite de la suma es $\frac{4}{3}$, pasó

mucho tiempo en Europa para que volviera a aparecer una serie numérica infinita, ya que no se aceptaban los procesos infinitos.

En el año 1689 Jacob Bernoulli matemático y científico suizo ya había realizado contribuciones en series numéricas infinitas, sin embargo, entre 1689 y 1704 publica cinco tratados sobre series (Reiff, 1992):

1. Propositiones Arithmeticae de Seriebus infinitis earumque summa finita (1689)
2. Propositionum arithmeticarum de Seriebus infinitis earumque summa finita pars altera (1692)
3. Propositionum de Seriebus infinitis pars tertia, tractans de earum usu in quadraturis Spatorum et rectificationibus Curvarum (1696)
4. Proposit. de Ser. inf. earumque usu in quadraturis Spatorum et rectificationibus Curvarum Pars Quarta (1698)
5. Parsquinta (1704)

Estos tratados fue el primer material sobre series infinitas en ser publicado en donde prueba la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e intenta calcular otras series como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ en la cual falla.

5.8.2.4 Leonardo de Pisa. Uno de los grandes matemáticos del siglo XIII, nacido en Italia, (1175-1250. aprox.). Su obra más importante *el liber abaci* publicado en el año 1202, en este por primera vez se introduce la numeración indo-arábica en europa, de ahí su importancia.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

En este libro Leonardo da la serie de fibonacci, la cual surge del siguiente problema, según Aznar:

Cierto hombre puso una pareja de conejos en un lugar rodeado por todas partes por una valla. ¿Cuántas parejas de conejos pueden ser producidos por esa pareja en un año si se supone que cada mes cada pareja engendra una nueva pareja que desde el segundo mes se hace productiva?

La secuencia resultante es 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Esta secuencia, en la que cada número es la suma de los dos números precedentes, se ha probado extremadamente fructífera y aparece en muchas áreas diferentes de las matemáticas y la ciencia.

5.8.2.5 Pietro Mengoli (1625 - 1686). Matemático de Bolonia, alumno de Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) y profesor de la Universidad de Bolonia. Mengoli se centró principalmente en el cálculo de cuadraturas conocidas a través del método de los indivisibles, pero utilizando un enfoque geométrico para derivarlas. En su obra *Geometriae Speciosae Elementa* (Bolonia, 1659) desarrolla un nuevo método para calcular cuadraturas utilizando la teoría de las “casi proporciones”, esta teoría se basa en la teoría de las proporciones del quinto libro de *Los elementos* de Euclides. Mengoli construye algunas sumatorias en beneficio de su cálculo las cuales serán enumeradas a continuación.

5.8.2.4.1 Sinónimos.

Según Massa (1997)

considera un número arbitrario o tota, representado por la letra t , y lo divide en dos partes, a y $r = t - a$. En sus palabras, “Las partes de tota se llamarán parte separada y parte restante, y la

Figura 29
Portada de *Ars Conjectandi* de Jacob Bernoulli (1713)



SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Bernoulli parte de la generalización de los números combinatorios para calcular sumas de cuadrados, cubos, cuartas y demás potencias de los primeros números naturales. Bernoulli usa diferentes símbolos para representar las sumatorias ya que en ese momento no existía la simbología actual, no utiliza paréntesis en su lugar emplea una raya horizontal, emplea el símbolo ∞ como signo de igualdad y para el símbolo de sumatoria (Σ) utiliza una s alargada.

Jacob toma

$$\int 1 \infty n$$

Ahora

$$\int (n - 1) = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \infty \frac{n \cdot n-1}{2}$$

Luego

$$\int n - \int 1 = \frac{n^2-n}{2} \rightarrow \int n = \frac{n^2-n}{2} + \int 1$$

Como la suma se extiende hasta n, el valor del último sumando es

$$\int n = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Lo cual quedaría en notación actual

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Obteniendo la suma de cuadrados Bernoulli halla el resultado de la siguiente manera

$$\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}$$

Realizando la suma de los términos desde 1 hasta n, tiene que

$$\int \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} = \frac{n^3-3n^2+2n}{6}$$

Luego iguala este valor a la suma

$$\frac{n^3-3n^2+2n}{6} = \int \frac{n^2-3n+2}{2} = \int \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}\int n + \int 1$$

despejando $\int \frac{1}{2}n^2$, obteniendo

$$\int \frac{1}{2}n^2 = \frac{n^3-3n^2+2n}{6} + \int \frac{3}{2}n - \int 1$$

Tenemos

$$\int \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}\int n = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{4}n \qquad \int 1 = n$$

sustituyendo tenemos

$$\frac{1}{2}\int n^2 = \frac{n^3-3n^2+2n}{6} + \frac{3n^2+3n}{4} - n$$

$$= \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{12}n$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

despejando $\int n^2$, obteniendo la suma de los cuadrados

$$\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

lo que en notación moderna es equivalente a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De igual manera, Jacob prueba la suma de cubos partiendo de la igualdad

$$\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} = \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$$

$$\int \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{1} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{3} = \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

$$\int \frac{n^3-6n^2+11n-6}{6} = \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

Por propiedades de linealidad de la suma, se tiene

$$\int \frac{1}{6}n^3 - \int n^2 + \int \frac{11}{6}n - \int 1 = \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

$$\frac{1}{6}\int n^3 = \int n^2 - \int \frac{11}{6}n + \int 1 + \frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{24}$$

Sustituimos

$$\frac{1}{6} \int n^3 = \frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{24} + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n - \frac{11}{12} + n$$

$$\frac{1}{6} \int n^3 = \frac{1}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{24}n^2$$

$$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

En notación moderna se probó lo siguiente

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Se observa que para formar las potencias cuadradas y cúbicas se obtiene un polinomio de un grado superior, luego en general, para la p-ésima potencia se obtiene un polinomio de grado $p + 1$, cuyo coeficiente principal es $\frac{1}{p+1}$. Jacob calcula las siguientes sumas hasta la potencia de 10.

Tabla 17

Cálculo de sumas de potencias realizadas por Jacob

$\int n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	$\int n^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$
--	--

$\int n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\int n^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$
$\int n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$	$\int n^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n$
$\int n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}$	$\int n^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{12}n^3$
$\int n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{12}n^2$	$\int n^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$

5.8.2.7 Newton y Leibniz. Fueron los primeros matemáticos en

utilizar sistemáticamente las series infinitas. Isaac Newton

(1642-1727) matemático, físico y astrónomo inglés, sus principales

aportes a las series infinitesimales fueron el famoso binomio de

Newton y las fluxiones, elementos del cálculo diferencial. El binomio

de Newton fue descubierto entre 1664 y 1665, fue comunicado por

primera vez en dos cartas dirigidas a Henry Oldenburg, secretario de

la Royal Society, la primera carta en respuesta a Leibniz, quien quería conocer los trabajos de los

matemáticos ingleses. En esta carta Newton enuncia el teorema del binomio y un ejemplo para

ilustrarlo. Newton utilizó los conceptos de exponentes generalizados de manera tal que una

expresión polinómica fuera transformada en una serie infinita, el teorema del binomio fue escrito

por primera vez de la siguiente manera:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots$$

Triángulo Aritmético

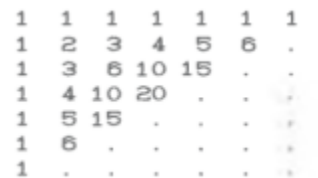


Figura 31. Triángulo aritmético tomado de Saanabria (1996).

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

donde $\frac{n}{m}$ es la potencia de $P + PQ$, sea entera, fraccionaria, positiva o negativa, la representación del binomio de Newton en sus exponentes positivos es la siguiente usada actualmente en los libros de texto es:

$$(a + b)^n = a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + b^n$$

donde el coeficiente binomial C_i^n con $0 < i \leq n - 1$ es las combinaciones de n elementos, obtenidas en la n -ésima fila del triángulo aritmético mejor conocido como triángulo de Pascal.

Goottfried Leibniz (1646-1716) en el año 1673 Leibniz había calculado las series infinitas de seno, coseno y arcotangente. Leibniz realizó ciertos descubrimientos sobre series como:

- Utilizó la expresión $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$. Cuya demostración se puede ver de la siguiente manera:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a^i = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$$

$$aS = \sum_{i=1}^{\infty} a^{i+1} = a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$$

$$aS = \sum_{i=1}^{\infty} a^{i+1} = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots - a = S - a$$

$$\Rightarrow aS = S - a \Rightarrow aS + a = S$$

$$\Rightarrow a = S - aS = S(1 - a)$$

$$\Rightarrow S = \frac{a}{1-a} \Rightarrow S + 1 = \frac{a}{1-a} + \frac{1-a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

- **La paradoja inelegante:** Leibniz utilizó la expresión anteriormente nombrada para

demostrar la convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ reemplazando -1 tenemos $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$, es

decir

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = \frac{1}{2}$, sin embargo, esta serie converge a 0 si el n-ésimo término es par y a 1 si el n-ésimo término es impar

5.8.2.8 Leonard Euler. Vivió desde 1707-1783, nació en Basilea, fue un gran matemático y físico alemán, es considerado el fundador del análisis matemático puro. Publicó una gran cantidad de ensayos relevantes alrededor de las matemáticas. Uno de sus tratados principales es *introducción al análisis infinitesimal*, publicado en dos volúmenes en el año 1748, en el cual, “Los capítulo IV, XIII y XVII, están destinados al estudio de algunas series, especialmente las series de potencias, y sus relaciones con los productos infinitos”(Saveedra, pp 95).

La serie a^x , veamos su demostración

$$\begin{aligned} a^x &= (1 + kx/N)^N \\ &= 1 + N(kx/N) + N(N-1)/2! (kx/N)^2 + \dots + N(N-1)\dots(N-n+1)/n! (kx/N)^n + \dots \\ &= 1 + kx + (N-1)/N k^2/2! x^2 + \dots (N-1)/N(N-2)N(N-n+1)/N k^n/n! x^{N^n} + \dots \end{aligned}$$

Dado que N es infinitamente grande, Euler asume que

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$1 = (N - 1)/N = (N - 2)/N = \dots = (N - m)/N = \dots$$

entonces

$$a^x = 1 + xk + x^2/2! k^2 + \dots + x^n/n! k^n + \dots$$

y sustituyendo $x=1$ obtiene que

$$a = 1 + k + 1/2! k^2 + \dots + 1/n! k^n + \dots$$

Luego, Euler define el número “e” como el valor de “a” para el cual $k=1$.

$$e = 1 + 1 + 1/2! + \dots + 1/n! + \dots$$

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n! + \dots$$

$$e = 2 + 1/2! + 1/3! + \dots + 1/n!$$

$$e = 2,71828182845904523536028\dots$$

Como $a^x = (1 + kx/N)^N$ y reemplazando “a” por “e” y $k=1$ se tiene

$$e^x = (1 + x/N)^N \text{ con } N \text{ infinitamente grande}$$

Posteriormente, la ecuación se escribe como la fórmula:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n \text{ donde } e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

Otra demostración importante realizada por Euler fue $\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y^n/n$ y esta la

realizó de la siguiente manera:

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Tomamos $y = a^x - 1$ entonces

$$1 + y = a^x = a^{N\varepsilon} = (1 + k\varepsilon)^N$$

$$1 + y = (1 + k\varepsilon)^N$$

$$1 + k\varepsilon = (1 + y)^{1/N}$$

$$\varepsilon = \frac{(1+y)^{1/N} - 1}{k}$$

como $\log_a(1 + y) = N\varepsilon$

$$\log_a(1 + y) = N \cdot \frac{[(1+y)^{1/N} - 1]}{k}$$

Reemplaza "a" por "e" y $k=1$

$$\log_e(1 + y) = N \cdot [(1 + y)^{1/N} - 1]$$

$\ln(1 + y) = N \cdot [(1 + y)^{1/N} - 1]$ y utilizando la serie binomial, se obtiene lo siguiente

$$(1 + y)^{1/N} = 1 + \frac{1}{N}y + \frac{1/N(1/N-1)}{2!}y^2 + \frac{1/N(1/N-1)(1/N-2)}{3!}y^3 + \dots$$

Pero como N es infinitamente grande, se toma $1/N - 1 = -1$

$$\text{Entonces } N[(1 + y)^{1/N} - 1] = 1 - \frac{1}{2!} \cdot y^2 + \frac{1}{3!} \cdot y^3 - \dots + (-1)^{n+1} \cdot y^n + \dots$$

Reemplazando

$$\ln(1 + y) = 1 - \frac{1}{2!} \cdot y^2 + \frac{1}{3!} \cdot y^3 - \dots + (-1)^{n+1} \cdot y^n + \dots$$

$$\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} y^n / n$$

Esta serie se conoce como *mercator* descubierta en 1668, es importante decir que Euler no trató de demostrar si las series eran convergentes o divergentes.

5.9 Bases negativas

Las ideas expuestas a continuación se basan principalmente en el texto: *Using-2 as a base for a number system to realize a computer* de Zimmer (1968), donde se explora el uso del sistema binario en la computación y su relevancia en el desarrollo tecnológico.

Las bases numéricas negativas fueron propuestas por Vittorio Grünwald, quien fue un profesor italiano de matemáticas y lengua alemana. En 1885 publicó en la revista *Giornale di Matematiche di Battaglini* y su trabajo fue titulado “Intorno all’aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll’aritmetica ordinaria (decimale)”.

Uno de los aspectos tratados en su artículo es la conversión entre bases negativas y positivas. Para pasar de una base nega decimal (base -10) a una base decimal (base 10), se realiza un procedimiento similar al conocido actualmente, para pasar de una base diferente de la decimal a la decimal.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (15937)_{-10} &= 1(-10)^4 + 5(-10)^3 + 9(-10)^2 + 3(-10)^1 + 7(-10)^0 \\ &= 10000 - 5000 + 900 - 30 + 7 = (5877)_{10} \end{aligned}$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

De la misma manera, se puede convertir cualquier base negativa en la misma base pero positiva. Asimismo, Vittorio Grünwald, propone algoritmos para las operaciones básicas.

Igualmente Zimmer (1968) en su trabajo *Using -2 as a base for a number system to realize a computer*, define y ejemplifica las operaciones básicas que se encuentren en una base negativa.

Realizando el procedimiento explicado anteriormente se obtienen los valores que se muestran en la siguiente imagen, estos valores serán útiles al momento de realizar las operaciones.

Figura 32
Valores de la base -2 y nega decimal. Tomado de Zimmer (1968)

BASE -2 (0, 1)	Decimal	Negadecimal	Decimal
1010	-10	10	-10
1011	-9	11	-9
1000	-8	12	-8
1001	-7	13	-7
1110	-6	14	-6
1111	-5	15	-5
1100	-4	16	-4
1101	-3	17	-3
10	-2	18	-2
11	-1	19	-1
0	0	0	0
1	1	1	+1
110	2	2	+2
111	3	3	+3
100	4	4	+4
101	5	5	+5
11010	6	6	+6
11011	7	7	+7
11000	8	8	+8
11001	9	9	+9
11110	10	190	+10
		191	+11
		192	+12
		193	+13
		194	+14
		195	+15
		196	+16
		197	+17
		198	+18
		199	+19

Para la adición hay cuatro posibles casos: el primero de ellos es sumar dos números positivos. Si se realiza desde la base nega decimal, se comienza haciendo una suma de las unidades de la manera convencional, es decir, si el ejercicio es $267+98$, primero se suma $7+8=15$, como 15 en base decimal es igual a 195 en base nega decimal, se escriben la unidades, es decir, 5 y se lleva 19 a las decenas, pero 19 es igual a -1 en base decimal, por lo cual la siguiente suma

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

sería $-1+6+9=14$, y 14 en base nega decimal es 194, por lo cual se escribe el 4 y se lleva 19 a las centenas, igualmente, como 19 es igual a -1 en base decimal, entonces la última suma sería $-1+2=1$ y 1 es igual a 1 en base nega decimal. De esta misma manera se puede repetir el procedimiento en base nega binaria.

Figura 33
Adición. Elaboración propia.

Decimal	Nega decimal	Nega binario
+147	267	110010111
-82	98	11110010
+65	145	001000001

Para la sustracción, el procedimiento es similar a la adición, con el apoyo de las tablas mostradas anteriormente, se realiza la resta de manera convencional. Por ejemplo, si se quiere restar los números nega decimales $267-122$, primero se resta $7-2=5$, $6-2=4$ y $2-1=1$, como estos resultados no varía de un sistema a otro la respuesta es 144.

Figura 34
Sustracción. Elaboración propia.

Decimal	Nega decimal	Nega binario
+147	267	110010111
- +82	122	1010110
+65	145	001000001

Para el producto, las tablas de multiplicar no varían, si se quiere multiplicar 198×7 primero se hace $7 \times 8=56$, se agrega el 6 y se lleva -5, luego $7 \times 9-5=63-5=58$, se agrega el 8 y se lleva -5, por último $7 \times 1-5=7-5=2$. Es decir, el procedimiento para multiplicar es similar pero lo que se lleva es negativo. De la misma manera se pueden realizar multiplicaciones de dos cifras o más.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Figura 35
Producto. Elaboración propia.

Decimal	Nega decimal	Nega binario
+18	198	10110
× +7	× 7	× 11011
-----	-----	-----
+126	286	11000010

Por último, teniendo en cuenta el producto explicado anteriormente, es posible realizar una división. Si se quiere dividir 16857 entre 176, ambos números en base nega decimal, podemos calcular la tabla del 176 y obtenemos lo siguiente, $176 \times 1 = 176$, $176 \times 2 = 352$, $176 \times 3 = 528$, $176 \times 4 = 704$, $176 \times 5 = 880$, $176 \times 6 = 1056$, $176 \times 7 = 1232$, $176 \times 8 = 1408$, $176 \times 9 = 1584$.

Luego, se realiza una división con el algoritmo usado actualmente, pero teniendo en cuenta la resta de números nega-decimales.

Figura 36
Algoritmo de la división.
Elaboración propia.

$$\begin{array}{r}
 16857 \overline{) 176} \\
 \underline{-132} \quad 272 \\
 0365 \\
 \underline{-352} \\
 0137 \\
 \underline{-132} \\
 005
 \end{array}$$

Figura 37
Cociente. Elaboración propia.

Decimal	Nega decimal	Nega binario
+18	198	10110
× +7	× 7	× 11011
-----	-----	-----
+126	286	11000010

5.10 Fracciones continuas

A continuación se realiza una explicación respecto a las fracciones continuas simples, destacando los procesos para ir de una fracción continua a un número racional o irracional, además se muestran algunas fracciones importantes que surgieron a través del tiempo destacando sus autores, para lograr mostrar estos procesos se hizo uso del texto *Una construcción de los números reales positivos* de Luque, Mora y Torres(2004), donde se resalta las demostraciones y los diferentes resultados relacionados con las fracciones continuas.

Una fracción continua es de la siguiente forma, $a_1 + \frac{b_1}{a_2 + \frac{b_2}{a_3 + \dots}}$ donde a_1 , representan la parte entera del número.

Además se les conoce como fracciones continuas simples cuando $b_i = 1$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Entre estas se encuentran las finitas y las infinitas, comencemos hablando de cómo es la forma de una fracción continua simple finita:

5.10.1 Fracción continua simple finita

Como podemos ver la fracción tiene un fin, lo que indica que es finita, además los $b_i = 1$, por tanto es simple, al cumplir estas condiciones se puede decir que es un número racional, ya que su parte decimal es finita, luego, todo racional puede ser expresado como una fracción continua finita simple. A Continuación se realizará la demostración este teorema, tomada de Luque, Mora y Torres(2004):

Figura 38
Representación de la fracción continua simple finita

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Sea $\frac{c}{d}$ un número racional con $d > 0$,

$$\Rightarrow c = d \cdot a_1 + r_1 \quad (1)$$

con $0 \leq r_1 < d$, a_1 y r_1 naturales

Por el algoritmo de Euclides se tiene que $d > r_1 > r_2 > \dots > r_n$ con $r_n = 0$

Al multiplicar a (1) por el inverso de d se obtiene

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{r_1}{d} \quad (2)$$

y si se continua se tiene $\frac{d}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$

⋮

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n$$

Ahora se debe hacer que el numerador de cada fracción sea 1, para lograr lo anterior basta con multiplicar el numerador y denominador de (2) por inverso del numerador:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{1}{\frac{d}{r_1}}$$

lo anterior se realiza para cada fracción parcial hasta obtener:

$$\frac{c}{d} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$$

$$\dots + \frac{1}{a_n}$$

Así como todo racional se puede representar con una fracción continua finita simple, también toda fracción finita continua puede ser representada con un racional.

5.10.2 *Fracción continua simple infinita*

Toda fracción continua simple infinita representa un número irracional.

Demostración: Tomada de Murillo(2015):

Dada una fracción continua simple infinita cualquiera, esta debe representar a algún número real x . y como ya se ha demostrado que todo racional puede representarse mediante una fracción continua simple finita, entonces x no puede ser racional, por lo que x debe ser un número irracional. Además todo número irracional puede expresarse como una única fracción continua infinita.

Es importante resaltar que por medio de la fracciones continuas se pueden obtener reductas o aproximaciones de un número, estas se obtienen de la siguiente manera:

$$c_1 = a_1$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2}$$

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

⋮

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}$$

Este resultado se obtiene cuando tenemos una fracción continua simple infinita, veamos la importancia y lo que se puede obtener de estas conductas cuando trabajamos con fracciones continuas simples infinitas, teniendo en cuenta que de cada número irracional se pueden obtener diferentes resultados, se toma como ejemplo explicativo el número oro (φ)

Figura 39
El número de oro como una fracción continua

$$\varphi = [1; \bar{1}]$$

$$\varphi = 1,618033\dots$$

Como podemos la fracción continua de φ se puede representar de dos formas, esta última indica que la parte entera del número es 1, y las $a_2, a_3, a_4, \dots = 1$, lo que quiere decir que el uno se repite infinitas veces. Pero también conocemos que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c_1 = 1$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$c_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

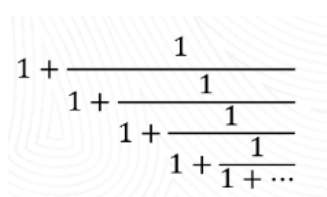
$$c_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

⋮

Se puede ver que los numeradores de las reductas del número de oro, forman la sucesión de Fibonacci, debido a que cada numerador es la suma de los dos anteriores, adicionalmente también se puede notar que el denominador de cada fracción es el numerador de la anterior.

Con respecto a la relación entre los numeradores de las reductas del número de oro y la sucesión de Fibonacci, es necesario entender el porqué, por ello a continuación se realizara algunas operaciones:

Se sabe que



$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} = \varphi$$

Luego, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, ahora se despeja φ

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Ahora tomemos $\varphi^2 = a_n$, $\varphi = a_{n-1}$, $1 = a_{n-2}$

Por medio de la fórmula cuadrática despejemos φ

$$\varphi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Hemos obtenido el número de oro utilizando la sucesión de Fibonacci.

5.10.2.1 Obtención de la fracción continua infinita de la raíz cuadrada de un número. Primero debemos comenzar buscando las raíces cuadradas perfectas más cercanas por debajo y por encima de la que se está trabajando, ejemplo: $\sqrt{5}$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

tomamos el número 2, que es menor que $\sqrt{5}$, como la parte entera del número, y como la diferencia entre 2 y 3 es 1, entonces dividimos el 1 entre x, tal que $x > 1$, de tal manera que

$$0 < \frac{1}{x} < 1$$

$$\Rightarrow 2 < 2 + \frac{1}{x} < 3.$$

despejamos x $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x},$

elevamos todo al cuadrado

$$5 = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow 5 = 4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \left(4 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x = 4 + \frac{1}{x}$$

Luego $b_i = 1, a_1 = 2$ y $a_2, a_3, \dots = 4$

Escribiendo la fracción continua de $\sqrt{5}$

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}$$

$$\sqrt{5} = [1; \overline{4}]$$

5.10.2.2 Sumas de fracciones continuas.

- Natural + irracional cuadrático: Denotemos la fracción continua como $[p; \overline{k}]$,

siendo p la parte entera de la fracción continua y k la parte periódica

$$n + [p; \overline{k}] = [n + p; \overline{k}]$$

Ejemplos:

$$8 + \sqrt{2} = 8 + [1; \overline{2}] = [9; \overline{2}]$$

$$3 + \sqrt{12} = 3 + [3; \overline{2, 6}] = [6; \overline{2, 6}]$$

- Suma de dos irracionales cuadráticos:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{(p + q) + 2\sqrt{pq}}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{12} &= \sqrt{(3 + 12) + 2\sqrt{3 \times 12}} = \sqrt{15 + 2\sqrt{36}} = \sqrt{15 + 2 \times 6} \\ &= \sqrt{15 + 12} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

5.10.2.3 Multiplicación de fracciones continuas.

- Natural * irracional cuadrático

Ejemplo $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$

$$2 \times [1; \overline{2}] = [2; \overline{4}] = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

$$3 \times [1; \overline{2}] = [3; \overline{6}] = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$$

$$4 \times [1; \overline{2}] = [4; \overline{8}] = \sqrt{4^2 + 1} = \sqrt{17}$$

...

$$n \times [1; \overline{2}] = [n; \overline{2n}] = \sqrt{n^2 + 1}$$

5.10.3 Fracciones continuas importantes

Por último, se presentan algunas fracciones continuas encontradas relevantes en historia y tomadas de Parra (2010):

1. Bombelli, en 1572, con la notación moderna, descubrió que esencialmente

Figura 40
Fracción continua de Bombelli

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \dots}}$$

2. Lord Brouncker, alrededor de 1658

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \dots}}}}}$$

Figura 41. Fracción continua de Brouncker

3. Leonhard Euler, en 1737 encontró la siguiente expresión

Figura 42
Fracción continua de Euler

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + \dots}}}}}$$

4. Lambert, en 1766, mostró que

Figura 43
Fracción continua de Lambert

$$\tan(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{\frac{5}{x} - \frac{1}{\frac{7}{x} - \dots}}}}$$

5.11 Reales: Clases De Sucesiones De Cauchy y Cortaduras De Dedekind

A lo largo de esta parte se profundiza en el tema de construcción de los reales teniendo en cuenta principalmente las definiciones de los racionales e irracionales de Cauchy y Dedekind, para ello se usó como principal referente el texto Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica de Recalde y Arbeláez publicado en el año 2011.

5.11.1 Construcción de los reales a través de las sucesiones de Cauchy

En el siglo XIX surgió la necesidad de fundamentar el análisis dando forma a la propiedad de continuidad y completez, por tal razón se comenzó a definir el número real. Según Recalde y Arbeláez (2011) el primero en dar una definición fue Augustin Louis Cauchy, definió los números reales como las sucesiones de números racionales que son de Cauchy, tomando a

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

los irracionales como aquellas que no son convergentes en \mathbb{Q} . Esta definición cumple con las propiedades:

1. $x \in \mathbb{R}^-$ es equivalente a que $-x \in \mathbb{R}^+$
2. Si $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$ entonces $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $xy \in \mathbb{R}^+$
3. $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$

A partir de estas propiedades se define y demuestra que los números \mathbb{R} son ordenados, a través de los siguientes teoremas:

Teorema 1: Obtenemos una relación de orden total en \mathbb{R} definiendo $b \geq a$ si

y sólo si $b - a \in \mathbb{R}^+$

Teorema 2: Para cualquier terna de números reales a, b, c :

1. La relación $b \geq a$ implica que $b + c \geq a + c$.
2. Las relaciones $b \geq a$ y $c \geq 0$ implican que $bc \geq ac$.

Cauchy considera una serie como una secuencia indefinida de cantidades que siguen una determinada ley de formación.

Cauchy separa las secuencias en dos grupos, convergentes (si el límite tiende a cierto S) y divergentes (en caso contrario). Todas las series convergentes son las que Cauchy definió como números racionales y aquellas que no son convergentes son los irracionales.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 0$ Cauchy analiza el caso en que $x > 1$, $x = 1$ y $x < 1$, en los dos primeros casos

la serie diverge. Para el tercer caso realiza algunas comparaciones:

$$x^n < x^n + x^{n+1} = x^n \frac{1-x^2}{1-x} < x^n + x^{n+1} + x^{n+2} = x^n \frac{1-x^3}{1-x} < \dots$$

Cauchy caracteriza las series de términos positivos y establece algunos teoremas de convergencia para series de términos positivos:

- El criterio de la raíz en el que establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente si

$$\limsup \sqrt[n]{|u_n|} < 1 \text{ y es divergente, si } \limsup \sqrt[n]{|u_n|} > 1.$$

- El criterio de la razón establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para valores crecientes

de n en la proporción $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cuando el $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ cuando $k < 1$; en caso contrario,

diverge.

- El criterio de comparación establece que si $u_{n+1} > u_n > 0$ entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2n}$ converge; en caso contrario diverge.

- El criterio del logaritmo establece que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ es convergente para $\frac{\ln u_n}{\ln(\frac{1}{n})}$ cuando el

límite es un valor finito h , para valores crecientes de n . Converge cuando $h < 1$; diverge

cuando $h > 1$.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

- El criterio de la serie alternante establece que si el valor numérico del término general u_n decrece constantemente e indefinidamente para valores crecientes de n y si además los diferentes términos son alternados positivos y negativos, entonces la serie converge.

5.11.2 Definición de los reales a través de Cortaduras de Dedekind

De acuerdo con Luque et al (2003) una cortadura es una pareja de conjuntos $\beta = (A, B)$, tal que corta todos los números racionales en dos partes, con las siguientes propiedades:

- Es un conjunto no vacío y propio
- Si $p \in \beta$ y $q < p$, entonces $q \in \beta$
- Si $p \in \beta$, entonces existe $r > p$ tal que $r \in \beta$

Las cortaduras de Dedekind se pueden definir partiendo de los racionales de la siguiente manera

Si p es racional entonces:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq p\}$$

$$A_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r < p\}$$

$$B_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq p\}$$

$$B_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r > p\}$$

Partiendo de esta definición Dedekind construye los números irracionales positivos completando así a los reales, definiéndolos así:

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > p\}$$

$$A_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < p\}$$

Los números irracionales negativos los define de la siguiente manera:

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$B_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > p\}$$

$$B_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < p\}$$

Ejemplo

Dedekind define $\sqrt{2}$ de la siguiente manera

$$A_1 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > 2\}$$

$$A_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$$

y define $-\sqrt{2}$ de la siguiente manera

$$B_1 = \{r \in \mathbb{Q}^- : r^2 > 2\}$$

$$B_2 = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$$

De esta manera se completan los números reales, ya que tenemos los racionales y los huecos.

Teniendo en cuenta las cortaduras de Dedekind se puede definir una relación de orden total y a continuación se realiza la demostración:

Sean α y β cortaduras. Supongamos que $\alpha \not\subseteq \beta$, entonces existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin \beta$.

Para cada $q \in \alpha$, tenemos que $q < p$, lo que implica que $q \in \alpha$. Entonces $\beta \subseteq \alpha$.

También se pueden definir las operaciones de suma y multiplicación de la siguiente manera:

Sea $\alpha = (A_1, A_2)$ y $\beta = (B_1, B_2)$ dos números reales, entonces

Suma

$$\alpha + \beta = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

Multiplicación

$$\alpha \cdot \beta = (A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2)$$

Donde

$$A_1 + B_1 = \{x + y: x \in A_1 \wedge y \in B_1\}$$

Donde

$$A_1 \cdot B_1 = \{x \cdot y: x \in A_1 \wedge y \in B_1\}$$

5.11.2.1 Ejemplos: Suma de racionales $\alpha + \beta$. Tomando a -2 y 5 como racionales,

$$A_1 = \{x \in Q: x \leq -2\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$B_1 = \{x \in Q: x \leq 5\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

hallamos ahora a C_1

$$C_1 = A_1 + B_1 = \{x, y \in Q: x + y < -2 + 5\}$$

$$C_1 = A_1 + B_1 = \{x, y \in Q: x + y < 3\}$$

Y hallando C_2 tenemos

$$C_2 = A_2 + B_2 = Q - C_1$$

5.11.2.2 Suma de un irracional y un racional $\alpha + \beta$. Tomando $\alpha = \sqrt{2}$ y $\beta = 3$

$$A_1 = Q^- \cup \{x \in Q: x^2 \leq 2\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$B_1 = \{y \in Q: y \leq 3\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

Despejando x en A_1

$$A_1 = Q^- \cup \{x \in Q: x < \sqrt{2}\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Hallamos C_1 realizando las operaciones, como tenemos $y \leq 3$, tomamos por aparte el igual y el menor que

$$C_1 = A_1 + B_1 = Q^- \cup \{x \in Q: x < \sqrt{2}\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$C_1 = A_1 + B_1 = \{x, y \in Q: y = 3 \wedge x + y < \sqrt{2} + 3\} \cup \{x, y \in Q: x + y > \sqrt{2} + 3\}$$

$$C_1 = A_1 + B_1 = \{x, y \in Q: y = 3 \wedge (x + y - 3)^2 < 2\} \cup \{x, y \in Q: (x + y - 3)^2 > 2\}$$

5.11.2.3 Multiplicación de racionales $\alpha \cdot \beta$.

$$A_1 = \{x \in Q: x \leq -4\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$B_1 = \{y \in Q: y < 3\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

$$C_1 = A_1 \cdot B_1 = \{x, y \in Q: x \cdot y < -4 \cdot 3\}$$

$$C_1 = A_1 \cdot B_1 = \{x, y \in Q: x \cdot y < -12\}$$

$$C_2 = A_2 \cdot B_2 = Q - C_1$$

5.11.2.4 Multiplicación de un irracional y un racional $\alpha \cdot \beta$.

$$A_1 = Q^- \cup \{x \in Q: x^2 < 2\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$B_1 = Q^- \cup \{y \in Q: y < 3\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

Despejando x en A_1

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

$$A_1 = Q^- \cup \{x \in Q: x < \sqrt{2}\} \text{ y } A_2 = Q - A_1$$

$$B_1 = Q^- \cup \{x \in Q: y < 3\} \text{ y } B_2 = Q - B_1$$

$$C_1 = A_1 \cdot B_1 = \{x, y \in Q: x \cdot y < \sqrt{2} \cdot 3\} \cup Q^-$$

$$C_1 = A_1 \cdot B_1 = \{x, y \in Q: x \cdot y < 3\sqrt{2}\} \cup Q^-$$

$$C_2 = A_2 \cdot B_2 = Q - C_1$$

5.12 Enteros de Gauss, numeración y dragones

El trabajo principal que se tomó de referencia para explicar las propiedades básicas de los enteros de Gauss y cómo funciona la curva del dragón, es el trabajo de pregrado, SOBRE LA CURVA DEL DRAGÓN de Gamboa (2020).

5.12.1 Definición de entero gaussiano

Los elementos de Gauss son elementos del conjunto $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi: a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5.12.2 Definición de Norma

La norma de $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ es $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Cabe resaltar que las unidades de $\mathbb{Z}[i]$ son 1, -1, i, -i.

Los enteros gaussianos cumplen las siguientes propiedades: $N(s)N(t) = N(st)$ y

$$\frac{N(s)}{N(t)} = N\left(\frac{s}{t}\right) \text{ con } t \neq 0$$

Otra definición relevante es la división de enteros gaussianos, se dice que un entero gaussiano $a + bi$ divide a un entero gaussiano $c + di$, si y solamente si, existe un entero gaussiano $e + fi$

tal que $c + di = (a + bi)(e + fi)$. Lo que implica el lema: Si $N(a)$ no divide a $N(b)$ entonces a no es un divisor de b .

5.12.3 Definición de primo gaussiano

Un entero gaussiano β es un primo gaussiano, si y sólo si, los únicos enteros gaussianos que dividen a

β son: $1, -1, i, -i, \beta, -\beta, \beta i, -\beta i$.

Al haber primos gaussianos, es importante preguntar si se pueden factorizar de manera única.

Note que, $41 = (4 + 5i)(4 - 5i)$ y cada uno de estos factores es un primo gaussiano.

Sin embargo, $41 = (5 + 4i)(5 - 4i)$ y cada uno de los factores es un primo gaussiano.

Pero veamos que $(4 + 5i)$ y $(5 - 4i)$ están relacionados, al igual que $(4 - 5i)$ y $(5 + 4i)$, por lo cual podemos derivar una factorización de la otra. Por lo tanto, los enteros gaussianos se pueden factorizar de manera única en primos gaussianos.

La imagen 44 muestra la ubicación de los primos gaussianos en el plano.

Figura 44
Gráfica de los primos gaussianos.
Tomado de Temístocles (2017)



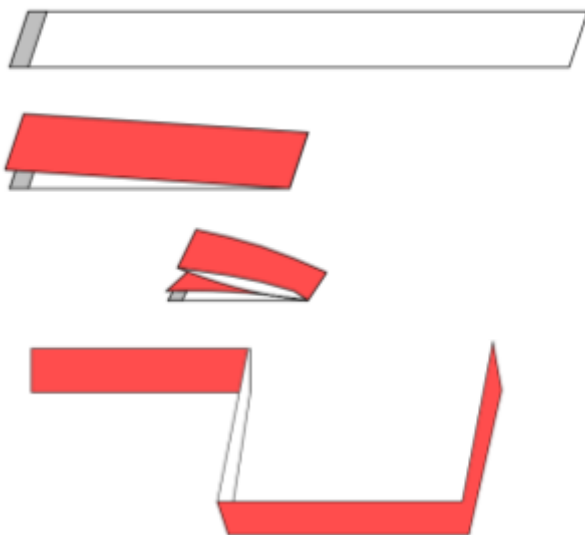
5.12.4 Curva del dragón o dragón de Heighway

Fue descubierta por un físico que trabajaba en la Nasa, John Heighway, en 1965. Además, fue estudiada por William Hatter y Bruce Banks, colegas de Heighway. En 1967, Martin Gardner la describe en su columna *juegos matemáticos* en la revista Scientific American.

La construcción de la curva del dragón nace de doblar repetidamente una tira de papel y observa el patrón que se comienza a construir, sin embargo, en la práctica sólo se puede hacer una cantidad finita de veces y esta cantidad es pequeña, ya que en algún momento la tira se vuelve tan corta que es imposible continuar con el proceso.

Figura 45

*Diseño curva del dragón.
Tomado de Gamboa (2020)*



Para construir el dragón de Heighway también se puede seguir los siguientes pasos.

Paso 1: Partimos de un segmento D_0

Paso 2: Usando D_0 construiremos un triángulo rectángulo isósceles, eliminamos el segmento inicial y obtenemos D_1 .

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Paso 3: A cada segmento D_1 le construiremos un triángulo rectángulo isósceles y eliminaremos los segmentos de D_1 para obtener D_2 .

Y seguimos de esta manera, es importante tener en cuenta que para los conjuntos D_j con $j=3,4,5,\dots$ hay que alternar la orientación de los triángulos.

Figura 46
Paso 1 tomado de Gamboa (2020)



Figura 47
Paso 2 tomado de Gamboa (2020)

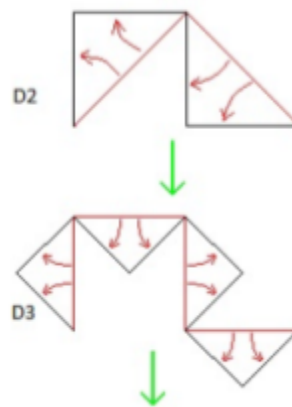
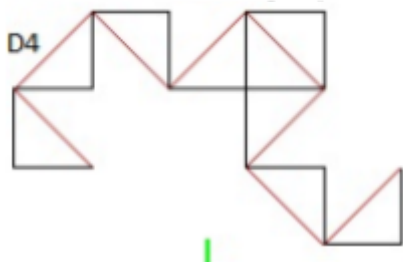


Figura 48
Paso 3 tomado de Gamboa (2020)



Algunas propiedades a destacar de esta curva es la repetición del mismo patrón inclinado 45° y con una relación de reducción de $\sqrt{2}$. Además, la curva del dragón no se corta así misma y llena regularmente la parte ocupada por el dragón.

Figura 49
Twin Dragon tomado de Gamboa (2020)



SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Otro dragón a destacar es el Twin Dragon y se construye colocando dos curvas del dragón de Heighway una detrás de la otra. Se escriben los primeros enteros positivos en su representación en base 2 y luego se evalúa en $1+i$. Luego, al graficar cada entero gaussiano como un cuadrado en el plano, se comienza a formar una imagen que da como resultado el Twin Dragon. De la misma manera, se pueden construir otro tipo de dragones.

6. Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo, la elección de los temas se realizó partiendo desde matemáticas básicas hasta las avanzadas, resaltando la importancia de los sistemas numéricos, esto con el fin de mostrar el proceso de evolución que han tenido las matemáticas alrededor de la aritmética y el álgebra, buscando la mejor manera de introducir dichos temas en el aula.

Este seminario se compone de dos fases. La primera fase (heurística) comprende la elección de los subtemas y la búsqueda de información sobre estos, en la segunda fase (hermenéutica) se desarrollarán los seminarios sobre los temas elegidos y en la última fase se producirá material audiovisual y escrito.

Después de la elección de los temas, se hizo una revisión y análisis documental (RAD) basada principalmente en la historia y la epistemología de cada uno de ellos con un enfoque pedagógico. La metodología de la RAD de acuerdo con Barbosa, Barbosa y Rodríguez (2013) se divide en dos fases, *la heurística y la hermenéutica*.

6.1 Fase heurística

En esta primera fase se muestran las etapas que permiten su desarrollo, la cual se divide en dos protocolos, los cuales se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 18

Etapas de la fase heurística

A. Protocolo de búsqueda de fuentes de información		
Idioma		Español e inglés
Periodo de tiempo		2023-2024
Términos	Individual	Matemáticas, bases, Kaprekar, Naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, series, adición, sustracción, producto, cociente, divisibilidad, Diofanto, fracción, decimal, notación, símbolos, signos, p-ádicos, Fibonacci, numeraciones, dragones, Cauchy, Cantor, Dedekind, Newton, Euler, Euclides, Leibniz, Pascal, Gauss.
	Combinación	Sistemas de numeración, separador decimal, conjuntos numéricos, sumas infinitas, multiplicación de los campesinos rusos, algoritmos multiplicativos, criterios de

divisibilidad, aritmética de Diofanto, historia de las matemáticas, principio local-global, bases negativas, sistemas aditivos, sistemas posicionales, civilizaciones antiguas, Leonardo de Pisa, criterio de Pascal, fracciones continuas, cortaduras de Dedekind, clases de sucesiones, papiro de Rhind, papiro de Ahmes
History of mathematics, local-global principle, Russian peasants, rhind papyrus, Ahmes papyrus.

Recursos de información

- i) Bases de datos: Dialnet, Science Sliever;
- ii) Google académico;
- iii) Revistas científicas;
- iv) Congresos;
- v) Trabajos de investigación de posgrados.

Estrategias

De generación de términos

Combinación entre revisión de títulos y resúmenes de artículos

De búsqueda

- i) Ingreso escalonado de términos, restringiendo búsqueda según los resultados;
- ii) Revisión de citaciones y referencias bibliográficas

B. Protocolo de Revisión de fuentes de información

Normas de revisión	<ul style="list-style-type: none">- Revisión de trabajos que guarden relación con el tema,- Fuentes de información enfocadas en los objetivos,- Analizar trabajos completos que sean relevantes para la investigación.- Leer el resumen e introducción para excluir o incluir el documento.
Criterios de exclusión	<ul style="list-style-type: none">- Documentos que contengan los términos utilizados en la búsqueda o similares, pero que no contengan información esencial.- Estudios que no profundizan a cabalidad
Criterios de inclusión	<ul style="list-style-type: none">- Libros y artículos presentes en algún curso visto a lo largo de la carrera- Documentación sugerida por el director de trabajo de grado
Estrategias de extracción de datos	Se realizó en el orden de los temas de cada una de las sesiones.

Nota: La tabla fue tomada de Barbosa, Barbosa y Rodríguez (2013) y menciona los protocolos de la fase heurística junto con los elementos que los estructuran.

A su vez, para mostrar el desarrollo que se siguió para la revisión de las diferentes fuentes de información, se creó la siguiente ficha de revisión documental, la cual se divide en los

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

estudios encontrados de cada tema del seminario, teniendo en cuenta el título, autores, año y aportes.

Tabla 19

Ficha de revisión documental: listado de documentos seleccionados

Tema	Título	Autor y año	Enlace	Aportes
Sistemas posicionales vs aditivos	Acercamiento a la evolución histórica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano	Rodríguez, C. (2016)	http://hdl.han.dle.net/10893/9403	Se analiza la evolución histórica y epistemológica del número cero a través de los sistemas de numeración. Muestra los diferentes obstáculos epistemológicos presentes en la constitución del número cero.
	El imperio de las cifras y los números	Guedj, D. (1998)		El autor realiza un recuento acerca de la historia de las matemáticas, iniciando con el surgimiento de la idea del número, pasando por los conjuntos numéricos y resaltando los diferentes sistemas numéricos.
	Evolución	Macías, M.		En este documento se traza el

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

histórica del (2010)
concepto de
Número

camino histórico que ha tenido el concepto de número partiendo de los números naturales, debido a la necesidad de contar, teniendo en cuenta los aportes más importantes que han hecho las diferentes civilizaciones.

Números enteros: Isaacs, R.
Teoría, (2015)
Algoritmos y
divertimentos

El autor hace un recuento de los diferentes sistemas numéricos en cada cultura a través del tiempo, destacando algunos autores cruciales en la historia de las matemáticas.

Matemáticas para Segovia, I., y
maestros de Rico, L. (2015)
Educación
Primaria

Los autores tratan la introducción sobre qué son y qué significan las matemáticas escolares y cuál debe ser la formación de un maestro, mediante la historia y la pedagogía.

Criterios de Análisis de la Bodi, S. (2006).
divisibilidad comprensión de
divisibilidad en el

El documento presenta un apartado sobre la historia de la divisibilidad, centrado principalmente en *Los*

conjunto de los números naturales. *elementos* de Euclides, entre otros autores.

Criterios de divisibilidad en diferentes bases. Osorio, K y Castañeda, E. (2014). En esta tesis, los investigadores realizaron una revisión histórica de la divisibilidad partiendo de la prehistoria hasta los aportes de Pascal, además de presentar los criterios de divisibilidad 2,3,4, 5, 7 y 11 en base 10.

Fibonacci, el primer matemático medieval Morena, R. (2004). Este libro trata los aportes importantes que realizó Leonardo de Pisa (Fibonacci), dentro de los cuales se encuentran temas sobre divisibilidad presentes en su libro *Liber abacci*.

Las curiosas reglas de divisibilidad (II) Ibáñez, R. (2020) <https://cultura.cientifica.com/2020/07/29/1-as-curiosas-reglas-de-divisibilidad-ii/> El artículo publicado por la revista *cultura científica*, habla sobre el criterio de divisibilidad de Pascal, diversos criterios de divisibilidad y algunas curiosidades sobre ellos.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Matemáticas antiguas	Maza, C. (2008).	http://matematicasantiguas.blogspot.com/2008/10/huesos-de-ishango.html	El hueso de Ishango es uno de los descubrimientos más antiguos relacionados con la divisibilidad, este blog habla un poco sobre la historia de este hueso.
Propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo y las Inteligencias Múltiples	Carrillo, S. (2019).		La autora hace una propuesta didáctica que tiene como objeto matemático la divisibilidad, en la cual realiza un análisis didáctico sobre la historia de los números enteros y la divisibilidad, de igual manera ejecuta otros análisis para llevar a cabo una metodología de aula y proponer actividades de enseñanza y aprendizaje.
Sistemas de numeración posicional	Algunos sistemas de numeración	Hernández, L. (2015)	Esta tesis se usa para definir lo que es un sistema numérico y qué relación hay con las bases. Además, hace un breve recorrido histórico de cómo se han implementado bases diferentes a la

		decimal. Por otro lado, explica cómo sumar y restar en otros sistemas de numeración posicional.
Lineamientos curriculares del área de Matemáticas	Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (1998)	Este documento nos permite evidenciar que tan relevantes son los sistemas de numeración o si el MEN sugiere emplear otra base diferente a la decimal.
Criterios de divisibilidad en diferentes bases	Osorio, K y Castañeda, E. (2014)	En esta tesis se presentan criterios de divisibilidad para cualquier base n , por tanto, se puede evidenciar la relación que hay entre los criterios para base decimal y cualquier otra comenzando en la binaria.
Teoría de la aritmética	Peterson, J. y Hashisaki, J. (1969)	En este libro se explica cómo pasar de la base decimal a otra base distinta y recíprocamente. Asimismo, explica cómo sumar, restar, multiplicar y dividir en distintos sistemas de numeración.
Aritmética	Ramos, F.	Este libro aporta notaciones y

(2010)

definiciones importantes para hablar de sistemas de numeración y cifras. También muestra una manera sencilla de introducir las diferentes bases de manera gráfica y sencilla para cualquier grado. Por último, explica las conversiones de una base a otra.

Historia de los algoritmos operativos	El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones.	Dávila, G. (2003)	El autor presenta el desarrollo del álgebra, durante los años 650 a los 1750, dado que en ese tiempo surgen algunas condiciones que permiten ver al álgebra de forma independiente dentro de las matemáticas, a su vez se desarrollan diferentes símbolos, los cuales dan paso a una notación adecuada, que propicia el álgebra moderna.
El lenguaje de las matemáticas: Historias de sus	Rojas, R. (2019) https://books.google.com.c/o/books?id=k	El autor trata de mostrar a los lectores, que los símbolos que hoy día utilizamos con normalidad	

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

símbolos.

[nuGDwAAQ](#) tienen una larga historia, que
[BAJ&printsec](#) estuvo muy relacionada con la
[=frontcover&](#) historia de la humanidad, así
[hl=es&source](#) mismo que para la aceptación de
[=gbs_ge_sum](#) cada concepto o símbolo hubo
[mary_r&cad=](#) disputas y diferentes procesos.
[0#v=onepage](#)
[&q&f=false](#)

El producto a lo
largo de la
historia.

Hernández, I y
Ojeda J. (s.f)

Los autores muestran las diferentes formas en que se ha desarrollado el producto en la historia según cada civilización, ejemplificando los procesos de las culturas chinas, musulmanas, egipcias y rusas.

El origen de los
signos
matemáticos

Ibáñez, R.
(2016)

<https://cultura.cientifica.com/2016/01/27/el-origen-de-los-signos-matematicos/>

El autor realiza un recorrido por la historia del signo de adición, sustracción, producto, cociente e igualdad, mostrando las diferentes formas de notación que se les ha dado a través de la historia.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

La historia de las matemáticas, de donde vienen y hacia dónde se dirigen.

Galán, B. (2012). <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A9n%20Atienza,%20Benjam%C3%A9n.pdf?sequence=1>

El autor analiza la historia de la evolución de las matemáticas, partiendo desde las culturas babilónicas hasta hoy día, de igual forma menciona a cada uno de los matemáticos que hicieron aportes durante cada época y en cada cultura.

Del lenguaje natural al simbólico.

González, E. (2012).

Se centra en la transición del lenguaje cotidiano al simbólico mostrando su importancia en la educación, además propone estrategias pedagógicas para facilitar el proceso de aprendizaje.

Multiplicación campesinos rusos

Regresando a la división: el inverso del método del Campesino Ruso, enfoque recursivo

Murray-Lasso, M. (2001).

El artículo trata principalmente sobre el método inverso a la multiplicación de los campesinos rusos, es decir, la división de los campesinos rusos, en donde explica el algoritmo del método, además de

			explicar el método de la multiplicación.
Actas IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas" Thales"	Gómez Mellado, A., Macías Gil, C., & Suárez Alemán, C. O. (2000).		En este congreso se habló de diferentes temas, uno de ellos fue la historia de las matemáticas y su enseñanza, que a su vez se divide en diversos temas como el método de exhaustión, un recorrido histórico sobre los algoritmos multiplicativos, desarrollo histórico del límite y continuidad, entre otros.
La multiplicación de los campesinos rusos. Xataka ciencia.	Munguía, I. (2009).	https://www.xatakaciencia.com/matematicas/la-multiplicacion-de-los-campesinos-rusos	El autor habla sobre el algoritmo del método de multiplicación de los campesinos Rusos ilustrándolo con un ejemplo.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

<p>La multiplicación de los campesinos rusos: demostración. Xataka ciencia.</p>	<p>Munguía, I. (2009)</p>	<p>https://www.xatakaciencia.com/matematicas/la-multiplicacion-de-los-campesinos-rusos-demostracion</p>	<p>El autor realiza una demostración del método de los campesinos rusos.</p>	
<hr/>				
<p>Kaprekar</p>	<p>Magia y agujeros negros</p>	<p>Alegría, P. (2007)</p>	<p>Este artículo explica el algoritmo que se debe aplicar para encontrar el número 6174 que corresponde a la constante de Kaprekar, además, menciona las constantes que se obtienen dependiendo de la cantidad de cifras del número.(Desde 2 hasta 10 cifras)</p>	
	<p>A classification of Kaprekar constant</p>	<p>Dolan, S. (2011)</p>	<p>https://www.jstor.org/stable/23248512</p>	<p>Este artículo muestra una prueba rigurosa para determinar las constantes dependiendo de la cantidad de cifras. También, relaciona la cantidad de cifras con las constantes que se pueden</p>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

				obtener (Desde 2 hasta 19 cifras)
Mysterious number 6174	Nishiyama, Y.	https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174		Esta página web proporciona una prueba para obtener el número máximo de iteraciones necesarias para que un número de 4 cifras llegue a la constante 6174.
Dattatreya Ramachandra Kaprekar	O'Connor, J. & Robertson, E. (2007)	https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar/		Esta página web aporta la bibliografía del matemático Kaprekar y cuenta sus aportes a la matemática recreativa, como lo son la constante de Kaprekar, los números de Kaprekar, los auto-números y los números de Harshad.
Racionales y aritmética de Diofanto	Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La aritmética.	Medina, I, y Albarracín, A. (2012).	http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20500.12209/2164/TE-15469.pdf?sequence	Los autores realizan un estudio de la obra de Diofanto La Aritmética, en este documento se encuentran las diferentes notaciones utilizadas por Diofanto.

Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas.	Rincón, C, y Fonseca, J. (2021).	Los autores realizan el proyecto de implementación en un aula, basándose en la historia de las matemáticas para facilitar el concepto de fracción en los niños de quinto grado.
---	----------------------------------	---

Números decimales, sumas infinitas y series	Contribución de Pietro Mengoli al concepto de límite a través d´una teoría de las quasi proporcions.	Massa, R. (1993)	El autor realiza un estudio de las obras de diferentes autores donde se destaca el concepto de límite desde las contribuciones de Pietro Mengoli
---	--	------------------	--

El número irracional: un punto de vista epistemológico	Sánchez, J., y Fernández, C. (2011).	Los autores realizan el artículo desde lo histórico y epistemológico acerca del desarrollo de la noción de número
--	--------------------------------------	---

con interés
didáctico.

irracional,

Enfoque didáctico Saavedra, A.
de las sumas (1996).
infinitas desde el
punto de vista
histórico y
epistemológico

La autora muestra el desarrollo de
los conceptos, así mismo explica
las dificultades encontradas y cómo
surgen otras nociones daban
solución a esas dificultades

Sobre las sumas Ruiz, F. (2018)
de Bernoulli.

El autor expone las ideas
principales que le llevaron a
Bernoulli a realizar la suma de las
1000
primeras potencias de 10 de los
números naturales, también el
origen de los conocidos números
de Bernoulli.

4000 años de Rosas, A., y
historia de las Molina, J.
Series Infinitas (2016).

Los autores hacen un recuento
acerca de la
aparición de las series numéricas
finitas e

infinitas en diferentes culturas, durante cuatro mil años, mostrando el desarrollo que han tenido por medio de diversos aspectos como la religión y lo científico.

Apuntes para una historia de matemáticas y astronomía en la India antigua. De Mora, J., y Ludwika, M. (2003).

A través de esta obra se analiza el desarrollo de las matemáticas en la india destacando su evolución en cada una de las civilizaciones hasta la era medieval

Geschichte der unendlichen Reihen (Historia de las Series Infinitas) Reiff, R. (1992)

La obra muestra el inicio de las series infinitas y su recorrido, destacando los matemáticos que se han interesado por investigar este tema y utilizar dichas series infinitas hasta el siglo XIX.

P-ádicos	Introducción a los cuerpos p-ádicos	Echeverría, P. (2016)	https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/8286/Ech	La autora estudia las propiedades básicas y la construcción de los cuerpos p-ádicos, teniendo en cuenta el Lema de Hensel y sus aplicaciones para la obtención de
----------	-------------------------------------	-----------------------	---	---

[evarria%20Gonzalez%20Ponza.pdf?sequence=1](#) propiedades algebraicas de los cuerpos.

The local-global principle Conrad, K.(s.f) <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/galoistheory/local-global.pdf> El autor mostró en qué consiste el principio local-global tomando un teorema clásico sobre la suma de dos cuadrados en los números enteros, además da ejemplos sobre la dificultad de trabajar con los p -ádicos y habla sobre el teorema de Hensel.

Bases negativas Using-2 as a base for a number system to realize a computer Zimmer, J. (1968) Esta tesis de maestría, aunque está enfocada en la computación, explica de manera sencilla la conversión entre un número en base decimal a un número en base hexadecimal, así mismo desde el sistema binario al sistema negabinario. De la misma manera, explica cómo sumar, restar y

multiplicar en estos sistemas numéricos.

Intorno Grunwald, V.
 all'aritmetica dei (1885)
 sistemi numerici a
 base negativa con
 particolare
 riguardo al
 sistema numerico
 a base
 negativo-decimale
 per lo studio delle
 sue analogie
 coll'aritmetica
 ordinaria
 (decimale).

Este texto fue la primera publicación de números con bases negativas y sus algoritmos operativos. Su autor es Vittorio Grunwald, el mismo que habló por primera vez de bases negativas.

Fracciones Fracciones Parra, E. (2010)
 continuas continuadas: Un
 recorrido histórico

Se tomó como base, debido a que muestra un recorrido acerca de las principales características históricas de las fracciones continuas, resaltando la notación,

algunas definiciones, así mismo presenta ejemplos de fracciones continuas.

Una construcción de los números reales positivos Luque, C., Mora, L., y Torres, J. (2004).

De este libro se tomó el primer capítulo, el cual se centraba en presentar que era una fracción continua simple, como pasar de un número racional o irracional a una fracción continua y viceversa.

Elementary number theory and its applications Rosen, K. (1988).

Se destacan las demostraciones acerca del porqué todo racional e irracional se puede representar como una fracción continua y que toda fracción continua es un número racional o irracional.

Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades. Murillo, M. (2015).

Se tuvo en cuenta la introducción realizada por el autor acerca de las fracciones continuas y como nos permiten determinar la solución de una ecuación diofántica.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

<p>Reales: clases de sucesiones de Cauchy y cortaduras de Dedekind</p>	<p>Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica</p>	<p>Recalde, L., y Arbeláez, G. (2011).</p>	<p>https://elibro-net.biblioteca.virtual.uis.edu.co/es/ereader/uis/175406</p>	<p>El autor realiza la construcción de los números reales a través de las sucesiones de Cauchy y de las cortaduras de Dedekind, centrándose en la construcción como campo estableciendo un orden y las operaciones de suma y multiplicación.</p>
	<p>Una construcción de los números reales positivos.</p>	<p>Luque, C., Mora, L., y Torres, J. (2003).</p>		<p>Este libro expone la construcción de los números reales hechos por Weierstrass y Dedekind, en el siglo XIX, en el capítulo final se centra principalmente en las construcción de Dedekind definiendo el orden, la suma y la multiplicación.</p>
	<p>La construcción de los números reales de Karl Weierstrass.</p>	<p>Jojoa, B., Muñoz, M., y Muñoz, F. (2009).</p>		<p>Este trabajo presenta la construcción de los números reales partiendo de los racionales y usando las fracciones continuas realizada por Weierstrass.</p>

<p>Enteros de Gauss, numeración y dragones</p>	<p>Ley de reciprocidad cuadrática en los enteros gaussianos</p>	<p>Zeballos, T., & García, R. (2017)</p>	<p>Este artículo proporciona información sobre los enteros gaussianos, aporta la definición, teoremas y demostraciones, que permiten entender lo que es un entero gaussiano y algunas operaciones.</p>
	<p>Sobre la curva del dragón</p>	<p>Gamboa, D. (2020)</p>	<p>Este trabajo de grado explica cómo construir dragones, sobre todo el dragón de Heighway, desde cómo obtener estos dragones usando una tira de papel, hasta cómo ubicar los puntos en un plano complejo. Además, de demostraciones sobre las principales propiedades que estos dragones poseen.</p>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

6.2 Fase hermenéutica

Consiste en el análisis, interpretación y comparación de documentos. Con la finalidad de entender y discutir los saberes y diferentes conceptos de estudio en cada seminario se realizaron presentaciones, las cuales permitieron llevar un orden, estableciendo una dinámica de presentación-discusión. A su vez, se creó un documento donde se van registrando las ideas presentadas en cada sesión y el protocolo de cada uno. El rol de cada uno de los participantes es importante, ya que permite un mejor desarrollo de cada una de las sesiones, por tal motivo se repartió la relatoría, correlatoría y protocolante con cada uno de los participantes para cada una de las sesiones.

Tabla 20

Cronograma de presentación de seminarios

N°	Fecha	Duración	Tema	Relator	Correlator	Protocolante
1	28/03/23	1 hora	Numeraciones posicionales vs. aditivas en los naturales	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros
2	11/04/23	2 horas	Criterios de divisibilidad	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano
3	18/04/23	1 hora y media	Sistemas de numeración posicionales	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno
4	02/05/23	1 hora y media	Historia algoritmos operativos	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros
5	09/05/23	1 hora	Multiplicación campesinos rusos	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano
6	16/05/23	1 hora y media	Kaprekar	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno
7	23/05/23	2 horas	Aritmética de Diofanto	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros
8	30/06/23	2 horas	Decimales y sumas infinitas	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros
9	06/09/23	2 horas	P-ádicos	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros
10	15/09/23	2 horas	Bases negativas	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno
11	22/09/23	2 horas	Fracciones continuas	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

12	06/10/23	2 horas	Reales: Dedekind y Cantor	Leila Yalid Jerez Bueno	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano
13	20/10/23	2 horas	Enteros de Gauss, numeración y dragones	Karol Natalia Briceño Cuadros	Nathalia Remolina Serrano	Leila Yalid Jerez Bueno

Los seminarios se realizaron los martes en el horario de 01:00 pm a 03:00 pm. Al mismo tiempo, el protocolante de cada sesión hace el respectivo protocolo, pero este se complementa luego del seminario, agregando las demostraciones e ideas que aportaba el director o la correlativa. Luego, al inicio de cada seminario se procederá a leer el protocolo, lo cual tendrá una duración de 10 minutos.

6.3 Fase de elaboración de material audiovisual y escrito

La fase final consistió en la elaboración de videos acerca de diferentes temáticas abordadas durante los seminarios, dichos videos tienen un enfoque pedagógico (método de enseñanza), histórico (construcción de conceptos a través del tiempo) y aplicativo (ejercicios prácticos).

Para la elaboración de los videos se utilizó la plataforma VideoScribe y como editor de video se usó Microsoft Clipchamb y para la voz BandLab. Los videos tiene una duración entre 5 y 20 minutos, los cuales tienen una introducción histórica, un desarrollo del tema y ejercicios propuestos, esto último, dependiendo del tema del video. Los temas tratados en los videos son los siguientes:

Tabla 21

Listado de temas tratados en material audiovisual

Nombre del video	Temas	Preguntas que	Pedagógico	Histórico	Aplicativo
------------------	-------	---------------	------------	-----------	------------

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

		responde			
Historia de numeraciones aditivas	Romano Griego: Jónico y Ático Egipcio	¿Por cuántos símbolos está conformada cada numeración? ¿Cuál es la forma correcta de escribir los diferentes números en cada numeración?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Historia de numeraciones posicionales	Chino Babilónico Maya	¿Por cuántos símbolos está conformada cada numeración? ¿Cuál es la forma correcta de escribir los diferentes números en cada numeración?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Historia de la numeración indo-arábigo.	Numeración indo-arábigo	¿Cuál es el origen de la numeración indo-arábigo? ¿Cuáles son las características que la hacen tan útil y diferente a las demás?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Método de multiplicación egipcio	Algoritmos operativos	¿Cómo se realiza una multiplicación por el método egipcio? ¿Cómo se relaciona este método con el método de multiplicación actual?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Método de multiplicación ruso	Algoritmos operativos	¿Cómo se realiza una multiplicación por el método ruso? ¿Cómo se relaciona este método con el	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

		método de multiplicación actual?			
Método de multiplicación chino	Algoritmos operativos	¿Cómo se realiza una multiplicación por el método chino? ¿Cómo se relaciona este método con el método de multiplicación actual?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Método de multiplicación musulmán	Algoritmos operativos	¿Cómo se realiza una multiplicación por el método musulmán? ¿Cómo se relaciona este método con el método de multiplicación actual?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	
Método de división	Algoritmos	¿Cómo se realiza	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

de la galera	operativo	una división por el método de la galera? ¿Cómo se relaciona este método con el método de división actual?		
Bases: Sistemas de numeración. Parte I	Sistemas de numeración. División sucesiva	¿Cómo convertir una base decimal a una base diferente de diez? ¿Por qué funciona la división sucesiva?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Bases: Sistemas de numeración. Parte II	Descomposición polinómica Método de Ruffini	¿Cómo convertir una base diferente de diez a una base decimal? ¿Cuáles son los métodos de conversión? ¿Por qué funcionan estos métodos?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Bases: Sistemas de numeración Parte III	Operaciones	¿Cómo realizar operaciones básicas con números en diferentes sistemas?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fracciones continuas Parte I	Fracciones continuas finitas e infinitas	¿Cómo pasar un número racional a una fracción continua? ¿Cómo pasar una fracción continua a un número racional? ¿Relación entre un número irracional y una fracción continua infinita? ¿Cómo se obtienen las reductas de una fracción continua infinita?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Fracciones continuas	Fracción continua	¿Cómo se obtiene la fracción continua	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Parte II	infinita	infinita de la raíz cuadrada de un número? ¿Cómo realizar operaciones básicas con fracciones continuas?		
Relación entre la sucesión de Fibonacci y el número de oro	Reductas del número áureo Sucesión de Fibonacci	¿Cómo están relacionadas las reductas de la fracción continua infinita del número de oro con la sucesión de fibonacci?	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

6.3.1 Pasos para la elaboración de material audiovisual

6.3.1.1 Elaboración de guiones. Para cada video se redactó un guion que funcionó como guía en el momento de realizar las escenas del video y los audios.

6.3.1.2 Elaboración de escenas. Las escenas se realizaron en la plataforma videoscribe, para esto se utilizaron imágenes de la plataforma y tomadas de google.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

6.3.1.3 Creación de audios. Se inició creando los audios en la plataforma audacity, sin embargo, se realizó un cambio de plataforma por bandlab ya que ofrece más herramientas.

6.3.1.4 Edición de videos y ajuste de tiempos. Esta fase se realizó en la aplicación microsoft clipchamp, la cual permite unir las escenas con el audio.

6.3.2 Dificultades

- Elección de subtemas: Dado que a lo largo de los seminarios se abordaron bastantes temas, en un principio, se quería reflejar por medio de cada video lo trabajado en cada seminario, sin embargo, los videos se extendieron demasiado entonces se optó por la elección de subtemas que permitieron crear videos cortos.
- Elección de plataformas: Debido a la falta de conocimiento acerca de las diferentes plataformas, la elección de una de ellas conlleva un extensa búsqueda hasta encontrar aquella que se ajustaba a las ideas previas.
- Exploración de plataformas: Luego de la elección, la exploración de la plataforma requirió un gran lapso de tiempo.
- Falta de conocimientos previos: Debido a que a lo largo de la carrera no hay ninguna asignatura que trate los conocimientos básicos acerca de la realización de videos y uso de las TIC's hubo una gran dificultad, ya que no se conocían las diferentes pautas que conllevan la realización de un video.

Cada uno de los videos descritos anteriormente se encuentran disponibles en el canal de Youtube @nalenamath, al cual puedes ingresar con el link [Nalena maths](#) y el código QR:

Figura 50
Código QR canal de youtube



Los videos se encuentran organizados en cuatro playlist, las cuales son: sistemas de numeración, algoritmos operativos, fracciones continuas y bases.

Figura 51

Organización de los videos

	<p>Bases :</p> <p>Nalena Math · Playlist</p>
	<p>Fracciones continuas :</p> <p>Nalena Math · Playlist</p>
	<p>Algoritmos operativos :</p> <p>Nalena Math · Playlist</p>
	<p>Sistemas de numeración :</p> <p>Nalena Math · Playlist</p>

7. Conclusiones

La historia de las matemáticas proporciona un marco contextual que enriquece la comprensión de los conceptos actuales, permitiendo a los estudiantes apreciar el desarrollo de las ideas matemáticas a lo largo del tiempo. Este enfoque histórico no sólo humaniza la disciplina, mostrando a las matemáticas como un esfuerzo colectivo y continuo de la humanidad, sino que también facilita la construcción de un conocimiento más profundo y significativo en los estudiantes.

La epistemología nos invita a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos mediante los cuales los estudiantes adquieren y validan dicho conocimiento. Considerar la epistemología en la enseñanza de las matemáticas permite a los docentes adoptar estrategias que promuevan un aprendizaje crítico y reflexivo, en lugar de un simple consumo de información. Ya existen diversas líneas de investigación en educación matemática que demuestran la importancia de la historia y la epistemología en el aula.

El desarrollo de los seminarios permitió explorar temas que, a lo largo de la carrera, no se suelen abordar en profundidad, lo que representó un reto significativo. Para comprender estos temas matemáticos, fue necesario analizar una variedad de documentos que ayudaron a captar las ideas principales o las bases de cada objeto matemático. Sin embargo, debido a la complejidad de los temas y el tiempo limitado, profundizar en cada uno de ellos se hizo difícil. Por lo tanto, se sugiere que en futuros seminarios se aborden menos temas, permitiendo así un análisis y discusión más profundos y logrando mejores resultados en la comprensión y aplicación de los conceptos.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Crear videos que muestran los resultados de los seminarios es una tarea extensa y, cuando no se cuenta con las bases necesarias, puede volverse bastante difícil. Por lo tanto, es crucial que la carrera proporcione conocimientos sobre las pautas requeridas para la producción de material audiovisual. Además, es importante aprender a delimitar los temas y a seleccionar las ideas clave que deben incluirse en un video para lograr mejores resultados. Los videos son un recurso extremadamente útil, ya que proporcionan tanto a los estudiantes como a los profesores una herramienta que facilita la comprensión de temas complejos. Además, al incluir la historia en estos videos, se proporciona un contexto a las matemáticas, lo que puede despertar el interés de los estudiantes.

Para conectar la historia de la matemática con su enseñanza en el aula, es crucial integrar un enfoque pedagógico que no solo se centre en la ejecución de algoritmos, sino que también incorpore la evolución histórica de los conceptos matemáticos. Esto permite a los estudiantes entender el "por qué" detrás de lo que aprenden, dándoles una perspectiva más profunda y significativa. Al explorar la historia de los sistemas numéricos y numerales, se dota al docente de herramientas que mejoran la enseñanza-aprendizaje, facilitando la comprensión de estructuras matemáticas fundamentales. La pedagogía, enriquecida con la historia, no sólo motiva a los estudiantes, sino que también enfrenta y mitiga las dificultades cognitivas y didácticas identificadas en los estándares educativos, proponiendo un aprendizaje más integral y contextualizado.

Referencias Bibliográficas

Alegría, P. (2007). Magia y agujeros negros. *Sigma* (30), 117-129.

https://www.researchgate.net/publication/28258321_Magia_y_agujeros_negros

Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, 8(1), 30-45. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341944.pdf>

Artigue, M. (2018). Epistemología y didáctica. El cálculo y su enseñanza, 11(1), 1–31.

<https://doi.org/10.61174/recacym.v11i1.26>

Barbin, E., Guillemette, D., y Tzanakis, C. (2020). Historia de las matemáticas y la educación. *Enciclopedia de educación matemática*, 333-342.

Barbosa, J., Barbosa, J., y Rodríguez, M. (2013). Revisión y análisis documental para estado del arte: una propuesta metodológica desde el contexto de la sistematización de experiencias educativas. *Investigación bibliotecológica*, 27(61), 83-104.

DOI: [10.1016/S0187-358X\(13\)72555-3](https://doi.org/10.1016/S0187-358X(13)72555-3)

Battaglini, G. (1885). *Giornale di Matematiche*.

<https://archive.org/details/giornaledimatem15unkngoog/page/n221/mode/1up?view=theater>

Bodi, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. [Tesis de doctorado, Universidad de Alicante]. Dialnet.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

- Carrillo, S. (2019). *Propuesta didáctica basada en el aprendizaje cooperativo y las Inteligencias Múltiples. Números enteros y divisibilidad en 2º E.S.O.* [Tesis de máster, Universidad de Valladolid]. Universidad de Valladolid, repositorio documental.
- Dávila, G. (2003). El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones. *Apuntes de historia de las matemáticas* 1(2), 27-58.
- De Mora, J., y Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de matemáticas y astronomía en la India antigua.* México: UNAM, Instituto de Investigaciones Filológicas
- Dolan, S. (2011). A classification of Kaprekar constant. *The Mathematical Gazette*, 95(534), 437-443. <https://doi.org/10.1017/S0025557200003533>
- Fried, M. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist? *Science & Education*, 10, 391-408. DOI:[10.1023/A:1011205014608](https://doi.org/10.1023/A:1011205014608)
- Galán, B. (2012). *La historia de las matemáticas, de donde vienen y hacia dónde se dirigen.*
- Gamboa, D. (2020). *Sobre la curva del dragón.* [Trabajo de grado para optar por el título de Matemático]. Universidad Industrial de Santander.
- Gómez, A., Macias, C., y Suárez, C. (2000). *Actas IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "Thales"*.
- González, E. (2012). *Del lenguaje natural al simbólico.* [Tesis de magíster, Universidad Nacional de Colombia]. Universidad Nacional de Colombia, repositorio institucional.
- González, G. (2020). *La construcción de los números reales.* [Tesis fin de grado, Universidad de la Laguna, Tenerife]. Repositorio Institucional Universidad de la Laguna

<http://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21553>

González, P. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 9(3), 281-289.

<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4731>

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/45/SUMA_45.pdf

Grunwald, V. (1885). *Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)*. Giornale di Matematiche di Battaglini (p. 203-221).

Guedj, D. (1998). El imperio de las cifras y los números. Ediciones B, S.A.

Guillera, J. (2007). Historia de las fórmulas y algoritmos para π . *LA GACETA DE LA RSME*, 10, 159-178.

Hernández, I., y Ojeda, J. (s.f). El producto a lo largo de la historia. *Divulgación matemática*, 3(7), 10-11.

Hernández, L. (2015). *Algunos sistemas de numeración*. [Tesis de grado para optar por el título de licenciatura en matemáticas] Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua.

Ibáñez, R. (2020, julio). Las curiosas reglas de divisibilidad (II). *Cuaderno de cultura científica*.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

<https://culturacientifica.com/2020/07/29/las-curiosas-reglas-de-divisibilidad-ii/>

Ibáñez, R. (2016, enero). El origen de los signos matemáticos. Cuaderno de cultura científica. El origen de los signos matemáticos. *Cuaderno de Cultura Científica* (culturacientifica.com).

<https://culturacientifica.com/2016/01/27/el-origen-de-los-signos-matematicos/>

Isaacs, R. (2015). Números enteros: Teoría, Algoritmos y divertimentos. Universidad industrial de Santander. Bucaramanga, Santander.

Jojoa, B., Muñoz, M., y Muñoz, F. (2009). La construcción de los números reales de Karl Weierstrass. [Trabajo de grado en educación con especialidad en matemáticas]. Universidad del Cauca.

Koyuncu, M. (2023). Is it possible to bring the past into the present for an effective history of mathematics teaching: Newspaper preparation method. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 513-534.

Lopez, M. (1994). Las construcciones de los números reales. *History of Mathematics in the XIXth Century, Part, 2*, 11-33.

Luque, C., Mora, L., y Torres, J. (2004). Una construcción de los números reales positivos. Universidad Pedagógica Nacional

Macías, M. (2010). Evolución histórica del concepto de Número. *Revista Autodidacta*, 1(1), 28-46.

Marshall, G., y Rich, B. (2000). The role of history in a mathematics class. *The Mathematics Teacher*, 93(8), 704-705.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Massa, R. (1993). *Contribucio de Pietro Mengoli al concepte de limit a través d'una teoria de les quasi proporcions*.

Maza, C. (2008, octubre). Matemáticas antiguas. *Matemáticas antiguas*.

<http://matematicasantiguas.blogspot.com/2008/10/huesos-de-ishango.html>

Medina, I, y Albarracín, A. (2012). *Un estudio de la principal obra de Diofanto de Alejandría: La aritmética*. [Trabajo de grado de Licenciatura en Matemáticas]. Universidad pedagógica nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

Morena, R. (2004). *Fibonacci, el primer matemático medieval*. Divola libros y ediciones, S.L. España

Munguía, I. (2009, septiembre). La multiplicación de los campesinos rusos: demostración. *Xataka ciencia*.

<https://www.xatakaciencia.com/matematicas/la-multiplicacion-de-los-campesinos-rusos-demostracion>

Murillo, M. (2015). Sobre las fracciones continuas: aplicaciones y curiosidades. *Revista Digital Matemática*, 15(2), 1-25. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v15i2.2171>

Murray-Lasso, M. (2001). Regresando a la división: el inverso del método del Campesino Ruso, enfoque recursivo. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 2 (1), 27-34.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

<https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2001.02n1.003>

Nishiyama, Y. (2006). Mysterious number 6174. *Plus bringing mathematics to life*.

<https://plus.maths.org/content/mysterious-number-6174>

Osorio, K., y Castañeda, E. (2014). *Criterios de divisibilidad en diferentes bases*. [Tesis de grado para optar por el título de licenciatura en matemáticas]. Universidad pedagógica nacional.

O'Connor, J., y Robertson, E. (2007). Dattatreya Ramachandra Kaprekar. *MacTutor*.

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar/>

Parra, E. (2010). Fracciones continuadas: Un recorrido histórico. *Revista Digital: Matemática, Educación E Internet*, 11(1), 1-20. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v11i1.1964>

Paterson, J. (1969). *Teoría de la aritmética*. Limusa-Wiley.

Pineda, D., y Ñañez, Y. (2020). Desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales.

Sigma, 16(1), 33-49. <https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/5957>

Protti, O. (2003). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. *Uniciencia*, 20, 251-256. <https://core.ac.uk/download/pdf/322383589.pdf>

Ramos, F. (2010). *Aritmética*. Macro E.I.R.L

Recalde, L., y Arbeláez, G. (2011). Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica. Programa Editorial Universidad del Valle.

<https://elibro-net.bibliotecavirtual.uis.edu.co/es/ereader/uis/175406>

Reiff, R. (1992). *Geschichte der unendlichen Reihen (Historia de las Series Infinitas)*.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Liechtenstein: Verlag. Obra original de 1889.

Rincón, C., y Fonseca, J. (2021). *Unidad didáctica para potenciar el aprendizaje del concepto de fracción, basado en la resolución de problemas y la historia de las matemáticas.*

[Proyecto para optar por el título de magíster en Enseñanza de las Matemáticas].

Universidad del Magdalena.

Rodríguez, C. (2016). Acercamiento a la evolución histórica del número cero, en los sistemas de numeración: mediterráneo, oriental y americano. [Trabajo de grado, Universidad del Valle]. Biblioteca digital Universidad del Valle. <http://hdl.handle.net/10893/9403>

Rojas, R. (2019). *El lenguaje de las matemáticas: Historias de sus símbolos.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Rosas, A., y Molina, J. (2016). *4000 años de historia de las Series Infinitas.* Lectorum. México.

Rosen, K. (1988). *Elementary number theory and its applications.* AT&T, segunda edición.

Ruiz, F. (2018). Sobre las sumas de Bernoulli. *Pensamiento Matemático*, 8(2), 110-132.

Saavedra, A. (1996). *Enfoque didáctico de las sumas infinitas desde el punto de vista histórico y epistemológico.* [Tesis de especialización, Universidad de Panamá]. Universidad de Panamá.

Sánchez, J., y Fernández, C. (2011). El número irracional: un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *Revista Científica Teorías, Enfoques y Aplicaciones en las Ciencias Sociales*, 4(8), 31-44. <https://revistas.uclave.org/index.php/teacs/article/view/1695>

Segovia, I., y Rico, L. (2015). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Pirámide.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Ventura, D. (2021). Qué números usaban los antiguos griegos cuando hacían sus asombrosos descubrimientos. BBC News Mundo. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-55478059>

Zeballos, T., y García, R. (2017). Ley de reciprocidad cuadrática en los enteros gaussianos. *Visión Antataura*, 1(1), 74-94.
<https://revistas.up.ac.pa/index.php/antataura/article/view/158>

Zimmer, J. (1968). *Using-2 as a base for a number system to realize a computer*. [Tesis doctoral, Instituto politécnico de virginia]. Virginia tech.

Protocolos

Protocolo de la sesión 1 de seminario de investigación

Relator: Nathalia Remolina

Correlator: Leila Jeréz

Protocolante: Natalia Briceño

Tema: Los sistemas aditivos vs los sistemas posicionales en los números naturales

Fecha: 28 de marzo del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

La relatoría se apoyó de diapositivas previamente preparadas, antes de comenzar con el tema central pareció pertinente comentar y exponer cómo surge el número; las formas de conteo; las formas de representación, las cuales pueden ser numeraciones figuradas, escritas y habladas. Después de haber aclarado esto, a partir de las numeraciones escritas se comenzó a introducir la comparación entre numeraciones aditivas y posicionales. Para las numeraciones aditivas la exposición se centró en Egipto, Grecia y Roma, en cambio para las numeraciones posicionales se tuvieron en cuenta la numeración China, Mesopotámica, Mata e Indo arábigo. Luego, se expuso una línea del tiempo sobre el sistema numérico Indoarábigo desde el siglo III a.C al siglo XIII d.C, finalmente se concluyó mostrando el sistema numérico actual.

Protocolo de la sesión 2 de seminario de investigación

Relator: Leila Jerez

Correlator: Karol Natalia Briceño

Protocolante: Nathalia Remolina Serrano

Tema: Criterios de divisibilidad

Fecha: 11 de abril del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

El seminario comenzó con un recorrido por la historia de la divisibilidad, evocando algunos momentos relevantes, como el hueso de Ishango, el papiro de Moscú y el papiro de Rhind. Luego, se dio un salto al siglo III a.C., destacando el trabajo de Euclides en su obra “Los Elementos”, principalmente los libros VII y IX, donde se utilizan conceptos relacionados con la divisibilidad. En este punto, el profesor intervino para enfatizar la importancia de cada una de las proposiciones de estos libros, con el fin de profundizar y aclarar los conceptos expuestos.

A continuación, se mencionaron algunos griegos posteriores a Euclides que se acercaron al concepto de divisibilidad. Entre ellos se encontraban Eratóstenes, quien expuso un método para hallar números primos llamado la Criba de Eratóstenes, y Diofanto de Alejandría, quien contribuyó a la aritmética al resolver ecuaciones que daban solución a problemas de la vida real.

Después del siglo XI, se destacan otros autores que formalizaron reglas y criterios, como Bhaskara, Leonardo de Pisa, Blaise Pascal, Stevin, Fermat, Euler, Gauss, Dirichlet, Kummer, Dedekind y Kronecker.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Por último, se profundizó en el criterio de Pascal, el cual, de manera general, proporciona un criterio para la divisibilidad de N y es la base para abordar casos particulares. Al finalizar, el profesor mencionó que el criterio de Pascal se puede ampliar a diferentes bases.

Protocolo de la sesión 3 de seminario de investigación

Relator: Natalia Briceño

Correlator: Nathalia Remolina

Protocolante: Leila Jerez

Tema: Los sistemas numéricos posicionales

Fecha: 18 de abril del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

En primer lugar, durante la sesión se definió que es un sistema numérico, en donde se habló de la base de un sistema numérico que es el número de símbolos diferentes, necesarios para representar un número cualquiera de los infinitos posibles en el sistema. (Hernández, L. 2015).

Se puntualizó que las bases numéricas más usadas actualmente son la binaria, la cuaternaria, la octonaria y la hexadecimal. Seguidamente se habló de los tres criterios de conversión que son: pasar de base de 10 a base diferentes de 10, en donde se realiza una división sucesiva; bases diferentes de 10 a base de 10, en este criterio el director habló sobre el método de Ruffini que es un método más práctico para realizar cálculos a mano y a computador, se dio un ejemplo sobre este método con el número 431_8 :

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Método clásico

$$4 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1$$

$$4 \times 64 + 24 + 1$$

$$281$$

Método de Ruffini

$$(4 \times 8 + 3) \times 8 + 1$$

$$35 \times 8 + 1$$

$$281$$

A Continuación se dará otro ejemplo con 43014_5 :

Método clásico

$$4 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5 + 4$$

$$4 \times 625 + 3 \times 125 + 0 + 5 + 4$$

$$2500 + 375 + 9$$

$$2884$$

Método de Ruffini

$$(((4 \times 5 + 3) \times 5 + 0) \times 5 + 1) \times 5 + 4$$

$$((23 \times 5) \times 5 + 1) \times 5 + 4$$

$$(115 \times 5 + 1) \times 5 + 4$$

$$576 \times 5 + 4$$

$$2884$$

Después se habló de las operaciones aritméticas básicas con números de diferentes bases. En esta parte el profesor intervino preguntando “¿Cómo se le pueden enseñar estas operaciones a un niño de segundo grado?” y dio un ejemplo para la suma:

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Otro método para enseñar a los niños es por agrupamiento cada 5 se puede tomar como un puño y los otros números con los dedos de la mano.

Se mencionaron otros criterios de divisibilidad generales para diferentes bases, que se basan en el criterio de divisibilidad de Pascal.

- 1) En cualquier base n , un número es divisible por n si, y sólo si, la cifra de las unidades es cero.
- 2) En cualquier base n , un número es divisible por $n - 1$ si, y sólo si, la suma de sus cifras es múltiplo de $n - 1$.
- 3) En cualquier base n , un número es divisible por $n + 1$ si, y sólo si, la suma del número conformado por sus cifras excepto las unidad y el producto entre las unidades y n es múltiplo de $n + 1$.
 - En cualquier base n , un número es divisible por $n + 1$ si, y sólo si, la diferencia entre la suma de las cifras en posiciones impares y la suma de las cifras en posiciones pares es múltiplo de $n + 1$.

Una observación que dio el profesor, es que estos criterio se puede demostrar a través de congruencias y a continuación se realiza la demostración del segundo teorema:

Sea $N = (a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_0)_n$ veamos que $n - 1 | \sum a_i N = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0 n^0$ luego

como $n - 1 \equiv 0 \pmod{n - 1} \Rightarrow n \equiv 1 \pmod{n - 1}$ entonces

$$N \equiv a_k + a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_0 \pmod{n - 1}$$

Protocolo de la sesión 4 de seminario de investigación

Relator: Nathalia Remolina

Correlator: Leila Jerez

Protocolante: Karol Natalia Briceño

Tema: Historia de los algoritmos operativos

Fecha: 2 de mayo de 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

Para comenzar, se realizó un breve resumen centrado en algunas nociones destacadas en las eras Neolítica, Egipcia, Babilónica, Hindú y China. Luego, se abordó la historia de los símbolos, destacando cada una de las notaciones realizadas por las diferentes civilizaciones y mostrando la utilidad del simbolismo para facilitar la solución de operaciones. En este punto, el profesor Rafael intervino, realizando preguntas acerca de la bibliografía. Por lo tanto, la correlatora mostró los documentos utilizados para verificar, entre todos los participantes, la veracidad de la información.

Posteriormente, se expuso sobre la evolución de los signos en Europa, indicando los matemáticos que realizaron avances significativos en la simbología para los diferentes signos operacionales. Se mostraron los usos de cada signo, ya que la utilidad variaba dependiendo del autor.

Acto seguido, se realizó un análisis de los algoritmos operativos, iniciando con el método egipcio de la suma, en el cual el profesor propuso diferentes ejemplos para verificar el método. Además, se describieron algunos de los algoritmos de la multiplicación que se desarrollaron en diferentes civilizaciones a través de la historia, como el método egipcio, el método chino, el método

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

musulmán y el método ruso. Cada uno de estos métodos se ejemplifica para comprender en profundidad el funcionamiento del algoritmo. Cabe recalcar que durante esta parte fue constante la participación del director, quien propuso preguntas y ejercicios. De igual manera, se mostró cómo realizar la multiplicación usando las manos, lo cual se vio como un recurso para facilitar la enseñanza de las tablas en el aula de clase.

Para finalizar, se expusieron algunos algoritmos de la división, como el método egipcio y el método de la galera, y se analizó el algoritmo de Euclides.

Protocolo de la sesión 5 de seminario de investigación

Relator: Leila Jerez

Correlator: Natalia Briceño

Protocolante: Nathalia Remolina

Tema: Multiplicación de los campesinos rusos

Fecha: 9 de mayo del 2023

Duración: Una hora

Desarrollo y discusión sobre el tema:

La sesión dio inicio mostrando cómo funciona la multiplicación de los campesinos rusos a partir de diferentes ejemplos, que permitieron ver la relación entre este método y el sistema de numeración binaria, lo que facilitó examinar su funcionalidad. Esto último fue posible gracias a las sugerencias y a la guía del profesor Isaacs.

Seguidamente, se revisó el uso del método inverso de la multiplicación de los campesinos rusos, que da como resultado el método de la división. Se destacaron cada uno de los elementos

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

(dividendo, divisor, residuo y cociente), teniendo en cuenta que este algoritmo parte del divisor hasta llegar a un múltiplo de éste que no sobrepase el dividendo, para obtener el cociente y el residuo. De esta manera, se pudo observar la relación con el algoritmo de Euclides (método actual). La solución de diversos ejemplos fue fundamental para comprender esta relación.

Finalmente, se mostró la funcionalidad de este algoritmo en la base 3, concluyendo que es posible usar este método en bases diferentes a la decimal. Para comprobarlo, se realizaron distintos ejemplos en diferentes bases, sugeridos por el profesor.

Protocolo de la sesión 6 de seminario de investigación

Relator: Karol Natalia Briceño

Correlator: Nathalia Remolina

Protocolante: Leila Jerez

Tema: Kaprekar “el matemático recreativo”

Fecha: 16 de mayo de 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

En primer lugar se habló sobre quién fue Dattaraya Ramchandra Kaprekar, después se habló sobre su principal aporte matemático: la constante de Kaprekar, se mostró el proceso para encontrar esta constante, se resaltó que al llegar a la constante 6174, de igual manera se destacó que existen constantes para n dígitos y que aquellos números que no poseen constantes tienen ciclos.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Luego, se mencionaron algunas otras contribuciones realizadas por Kaprekar como los números de Kaprekar que son aquellos cuyas cifras de su cuadrado pueden ser separadas en dos números que sumados dan el número original, durante este subtema el profesor Rafael preguntó “¿Todos los números que tienen todas las cifras iguales a 9 son números de Kaprekar?” en el artículo publicado por la revista *Journal of Integer Sequences* titulado The Kaprekar Numbers dan una prueba para demostrar que todos los números de la forma $10^n - 1$ son números de Kaprekar, a continuación se enuncia dicha prueba:

$$(10^n - 1)^2 = (10^n - 2) * 10^n + 1, 10^n - 1 = (10^n - 2) + 1$$

entonces todos los números de la forma $10^n - 1$ son números de kaprekar. Es importante mencionar que Charosh ideó un método para construir números de kaprekar de cualquier tamaño. Otro aporte de Kaprekar fueron los auto-números y los números de Harshad, en estos últimos se comentó sobre la relación que hay entre la propiedad que cumplen y el criterio de divisibilidad de 3 y 9.

Protocolo de la sesión 7 de seminario de investigación

Relator: Nathalia Remolina

Correlator: Leila Jerez

Protocolante: Natalia Briceño

Tema: Aritmética de Diofanto

Fecha: 23 de mayo del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

La sesión comenzó con una introducción sobre la biografía de Diofanto, seguida de un análisis

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

detallado de su obra “La Aritmética”, compuesta por varios libros. Dado que inicialmente se mencionaba sólo la cantidad de problemas, el profesor sugirió buscar algunos de estos para discutirlos en grupo. Posteriormente, se realizó un recorrido histórico que destacó las diferentes traducciones de esta obra, iniciadas en Europa a partir del siglo XVI.

Además, se profundizó en la notación utilizada en dicho libro, lo que requirió una explicación del sistema de numeración jónico, empleado por Diofanto para escribir los números. Este sistema incluía una línea sobre cada agrupación de símbolos para diferenciarlos de las palabras.

Diofanto también creó una simbología específica para representar la potencia de un aritmo (variable), abarcando hasta la sexta potencia, lo que facilitó una notación más adecuada para operaciones con aritmos. Su avance en la escritura algebraica se ejemplifica con el problema 28 del libro I. En este punto, el profesor intervino para que realizáramos el ejercicio propuesto por Diofanto a fondo, con el objetivo de traducirlo al lenguaje algebraico actual.

Finalmente, la correlatora explicó las diversas formas en que Diofanto representaba las fracciones, lo cual constituyó una parte extensa de la sesión, ya que las fracciones se dividían en cuatro tipos.

Protocolo de la sesión 8 de seminario de investigación

Relator: Nathalia Remolina

Correlator: Leila Jerez

Protocolante: Karol Natalia Briceño

Tema: Decimales y sumas infinitas

Fecha: 30 de Junio de 2023

Duración: Dos horas

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Desarrollo y discusión sobre el tema:

Se inició exponiendo la historia del concepto de sumas infinitas a través de diversas civilizaciones, presentando de cada una de ellas nociones relacionadas con dicho concepto. Posteriormente, se continuó con la explicación de las paradojas de Zenón y se mencionaron algunos matemáticos destacados por la creación de sumas infinitas. En este punto, el profesor suspendió la sesión, ya que esperaba que estos temas se analizarán con mayor profundidad y que se abordará también la historia de los decimales. Sin embargo, debido a la falta de tiempo para tratar un tema tan extenso y complejo, la sesión fue aplazada para el 13 de junio.

En la sesión complementaria, la correlatora, Nathalia, comenzó haciendo un recorrido por el surgimiento y evolución de los números irracionales, abarcando desde la antigüedad hasta la época contemporánea. Se mostraron los descubrimientos más importantes y las aproximaciones más cercanas a números irracionales de cada período histórico, para luego llegar a la Edad Media y nombrar a los matemáticos que lograron un acercamiento al concepto de número irracional. Posteriormente, se abordó el Renacimiento, mencionando las aportaciones de Cardano y Chuquet. Finalmente, se destacó a los matemáticos más relevantes de la Edad Moderna y Contemporánea, tales como Meray, Weierstrass, Dedekind y Cantor. Esta parte de la sesión tuvo una duración de dos horas.

Luego, la relatora continuó con un breve resumen de lo expuesto en la sesión anterior, esta vez explicando mediante problemas propuestos en diferentes civilizaciones las primeras nociones de sumas infinitas. Se retomaron las paradojas de Zenón, utilizando videos y ejemplos. En esta sección, el profesor intervino para realizar preguntas sobre las paradojas, a las cuales la relatora respondió con ejemplos claros y comprensibles. Además, se presentó un video sobre la

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

cuadratura de la parábola, creado por los responsables del seminario, que ayudó a comprender mejor esta suma infinita. Aunque el profesor resaltó algunos errores y omisiones en el video, solicitó revisar nuevamente los documentos analizados, lo cual se hizo de manera conjunta.

La sesión continuó con la explicación de las diferentes sumas infinitas creadas por distintos matemáticos a partir del siglo XVII, mostrando un poco de su historia y su demostración. Esta parte se extendió y se tornó algo monótona debido a la cantidad de sumas infinitas presentadas. Finalmente, después de tres horas, se concluyó la sesión, con el profesor recalcando que lo importante era conocer la historia para comprender cómo se generaron estos conceptos.

Protocolo de la sesión 9 de seminario de investigación

Relator: Vianey Landinez

Protocolantes: Natalia Briceño, Nathalia Remolina y Leila Jerez

Tema: P-ádicos

Fecha: 5 de septiembre del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

La invitada expuso las bases principales sobre este tema utilizadas en su trabajo de grado, para iniciar la sesión se dio una breve introducción de la historia de los números P-ádicos mencionando a Kurt Hensel, un matemático alemán, quien en 1897 los describe por primera vez, luego definió los números P-ádicos y explicó sus propiedades, en este punto el profesor intervino realizando diferentes preguntas acerca de la explicación dada por parte de la invitada, quien profundizó un poco más algunos conceptos de mayor complejidad. Finalmente, mostró como realizar las operaciones básicas con números P-ádicos.

Protocolo de la sesión 10 de seminario de investigación

Relator: Karol Natalia Briceño

Correlator: Nathalia Remolina

Protocolante: Leila Jerez

Tema: Bases Negativas

Fecha: 15 de septiembre del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

En primer lugar se habló sobre Vittorio Grünwald, quien descubrió las bases negativas; en el año 1885 publicó un artículo en la revista *Giornale di Matematiche di Battaglini* titulado *Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale)*.

Después se habló sobre la conversión de bases negativas a positivas, se realiza de la misma manera que la conversión de bases positivas multiplicando por cada una de las potencias de la base. Para finalmente hablar sobre las diferentes operaciones entre bases negativas teniendo en cuenta las tablas de valores de los números nega decimal y en base -2.

Protocolo de la sesión 11 de seminario de investigación

Relator: Nathalia Remolina

Correlator: Leila Jerez

Protocolante: Karol Natalia Briceño

Tema: Fracciones continuas

Fecha: 22 de Septiembre del 2023

Duración: Dos horas

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Desarrollo y discusión sobre el tema:

La sesión comenzó con la definición de fracciones continuas, seguida de una explicación sobre las fracciones continuas finitas. Se presentaron dos teoremas, los cuales fueron demostrados a partir del algoritmo de Euclides, con un enfoque histórico. En ese momento, el profesor propuso una alternativa para realizar dicha demostración.

Posteriormente, la relatora utilizó ejemplos para ilustrar el proceso de convertir un número racional en una suma infinita y viceversa. Se observó que los numeradores de las reductas podían interpretarse como la sucesión de Fibonacci. Luego, se explicó el proceso para obtener una fracción continua infinita de la raíz cuadrada de un número. En esta parte, el profesor sugirió buscar un video que explicara este mismo proceso, lo cual resultó en la presentación de un método alternativo, aunque más extenso.

A continuación, se presentaron algunos datos curiosos sobre matemáticos que utilizaron las fracciones continuas para realizar descubrimientos significativos. Se analizó cómo realizaron sumas y multiplicaciones de fracciones continuas, y el profesor recomendó aplicar estos métodos a otros ejemplos. Finalmente, se mostraron algunas de las fracciones continuas más importantes descubiertas a lo largo del tiempo.

Protocolo de la sesión 12 de seminario de investigación

Relator: Leila Jerez

Correlator: Natalia Briceño

Protocolante: Nathalia Remolina

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Tema: Reales: Dedekind y Cantor

Fecha: 06 de octubre del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

Se inició mostrando la necesidad que surgió en el siglo XX de definir el número real, para lo cual se expusieron los diferentes matemáticos que aportaron a este contexto a partir del siglo XIX, entre estos se mencionaron a Cauchy, Bolzano, Hamilton, Meray, Weierstrass, Cantor y Dedekind, luego se profundizó un poco en las sucesiones de Cauchy, para recalcar la importancia de los números reales, debido a que estos eran los límites de las sucesiones de Cauchy. Y en este conjunto se da la propiedad de cerradura.

Otro factor importante tratado fue las cortaduras de Dedekind, partiendo de los números racionales, para luego definir la cortadura y ver las cortaduras dadas por los racionales, a partir de esto, se crea la relación de los números irracionales y con estas aportaciones se da la definición de orden. Además, muestra cómo se realizan las operaciones con números reales a partir de ejemplos. Es importante recalcar que durante este tiempo el profesor tuvo una intervención constante, dando diversos tipos de ejemplos.

El 6 de octubre se llevó a cabo el seminario titulado “Reales: Cauchy, Dedekind y Cantor”, el cual tuvo una duración aproximada de 2 horas y contó con la participación de Leila Jerez como relatora, Natalia Briceño como correlatora, Nathalia Remolina como protocolante, Rafael Isaacs como director y dos invitados adicionales de la carrera de matemáticas. La sesión comenzó mostrando la necesidad que surgió en el siglo XX de definir el número real. Para ello, se

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

expusieron los aportes de diversos matemáticos desde el siglo XIX, entre los cuales se mencionan a Cauchy, Bolzano, Hamilton, Meray, Weierstrass, Cantor y Dedekind.

A continuación, se profundizó en las sucesiones de Cauchy para destacar la importancia de los números reales, señalando que estos son los límites de dichas sucesiones y que, en este conjunto, se cumple la propiedad de la cerradura.

Otro aspecto importante tratado fueron las cortaduras de Dedekind, partiendo de los números racionales para luego definir la cortadura y analizar las cortaduras generadas por los números racionales. A partir de esto, se estableció la relación con los números irracionales y, con estos aportes, se logró la definición de orden. Además, se explicó cómo realizar operaciones con números reales mediante ejemplos prácticos. Es importante destacar que, durante este tiempo, el profesor tuvo una intervención constante, proporcionando diversos tipos de ejemplos.

Protocolo de la sesión 13 de seminario de investigación

Relator: Natalia Briceño

Correlator: Natahalia Remolina

Protocolante: Leila Jerez

Tema: Enteros de Gauss, numeración y dragones

Fecha: 20 de octubre del 2023

Duración: Dos horas

Desarrollo y discusión sobre el tema:

En un primer momento se definieron los enteros de Gauss y la norma, la cual es: $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ es $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Luego, se definieron las operaciones de multiplicación y división de enteros Gaussianos.

SISTEMAS NUMÉRICOS Y NUMERALES

Después, se puntualizó la definición de primo Gaussiano (β), que son aquellos que sólo lo dividen él mismo, su inverso y los números: $1, -1, i, -i, \beta i, -\beta i$. Seguidamente se definió la norma prima, de igual forma se habló de la factorización y se mencionó el siguiente teorema:

Cualquier entero Gaussiano α con una norma mayor a 1 se puede factorizar en primos

Gaussianos, y la factorización es única en el siguiente sentido, si $\alpha = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_l$

donde cada β_i y γ_i es un primo Gaussiano, entonces $k = l$ y los primos pueden ser reordenados para que β_i sea un asociado a γ_i para todo i .

Después se habló sobre la Curva del dragón o dragón de Heighway, la historia, los pasos de construcción y algunas propiedades. Luego, se habló del Twin Dragon que está en base $1+i$, donde el profesor Rafael intervino y se construyó una parte de este a través de las diferentes potencias de la base. Para finalizar hablando del tetra dragón y de la curva de Lévy C.