

UNA MÓNADA UNIVERSAL

MARTHA ISABEL SILVA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

UNA MÓNADA UNIVERSAL

MARTHA ISABEL SILVA

**Trabajo presentado para optar el título de
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS**

**Director
JAVIER E. CAMARGO GARCÍA.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2007

A mis hijos:

Nicolas, Felipe y Juliana

Agradecimientos

Siempre pido a Dios que oriente mi camino, y que si está muy ocupado entonces envíe ángeles para que lo hagan, y es maravilloso Dios me escuchó, pues puso en mi camino todas estas personas que de una manera muy especial me han apoyado siempre. Gracias **Dios**.

Para escribir esta hoja de agradecimientos debo antes numerar una larga lista de personas que me colaboraron no sólo durante la elaboración del proyecto si no también en el transcurso de la carrera. Seguramente habrán personas que no aparecerán en esta página y de antemano pido perdón por ello.

Agradezco especialmente,

Al profesor **Javier Enrique Camargo**, por su colaboración, su comprensión y sobre todo su paciencia para orientarme en la elaboración de este trabajo.

A mi **madre**, quien se sacrificó para que yo pudiera tener una alternativa de vida.

A **Elder**, por su apoyo incondicional.

A **Ligia** en quien encuentro un gran ser humano.

A **Willian** por apoyarme en todos los momentos difíciles.

A **Otoniel** con quien he compartido momentos muy felices.

A la profesora **Sonia** por sus enseñanzas, su confianza y su amistad.

Al profesor **Rafael Isaacs** por su excelente orientación académica, y apoyo en los momentos difíciles.

A **Rosalba y Nubia** por su amistad y colaboración.

A **Tilson** por su amistad.

A **Amparito** por ser mi amiga, confidente y apoyo en todos los momentos que lo necesité.

A **Deyanira** quien fué mi amiga y compañera.

TÍTULO: UNA MÓNADA UNIVERSAL ¹

AUTOR: MARTHA ISABEL SILVA²

PALABRAS CLAVES: Categorías; Funtores; Transformaciones naturales; Mónada; .

DESCRIPCIÓN

Una categoría C es una estructura compuesta de una clase Ob_C cuyos miembros son llamados objetos de la categoría; para cada par de objetos A, B de C existe el conjunto $hom_C(A, B)$ cuyos elementos son llamados morfismos ó flechas de la categoría, las cuales tienen dominio A y contradominio B ; para cada A objeto de la categoría C existe un morfismo identidad y una ley de composición asociativa, por ejemplo la categoría $Comp$ donde los objetos son los espacios compactos de Hausdorff y los morfismos son funciones continuas entre ellos. Las categorías se relacionan por medio de funtores, estos son una aplicación que preserva estructura es decir, envía objetos en objetos y morfismos en morfismos; cuando la aplicación se hace entre categorías iguales entonces se llama endofunctor; los funtores a su vez se relacionan por medio de transformaciones naturales, estas son una aplicación que asigna a cada objeto A de C único morfismo en D . Teniendo ya estas estructuras definicionidas se puede construir una mónada pues esta consta de un endofunctor y dos transformaciones naturales, la primera de ellas es la transformación identidad y la segunda es una aplicación de F^2 en F donde F^2 es $F \circ F$; la mónada ∇ se llama universal porque contiene todas las mónadas de Lawson.

¹Tesis

² FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR JAVIER E. CAMARGO GARCÍA..

TITLE: TITULO EN INGLÉS¹

AUTHOR: MARTHA ISABEL SILVA²

KEY WORDS: Categories; Functor; Natural Transformation; Monad; .

DESCRIPTION

A category \mathcal{C} is a structure that is composed by a class $Ob_{\mathcal{C}}$ which members are called category objects, for each objects pair A, B of \mathcal{C} , does exist the set $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ which elements are called morphism or arrows of the category, which does have domain A and contradomain B ; for each object A of \mathcal{C} category exist an identity morphism, an associative composition rule, per example the $Comp$ category where the objects are the compact spaces of Hausdorff and morphisms are continuous funtions between then categories are in relationship by meas of functors those are an application that preserve structure that is to say, send objects in objects and morphism in morphism; when the application is done in the same category, so it is called endofunctor; the functors are in relation by means natural transformation these are an application that assigns to each object A d \mathcal{C} an only morphism in D . Having definicioned these estructures it can be to consruct a monad, because this consist of an endofunctor and two natural transformation, the first of then is the identity transformation and the later is an application of F^2 in F , where F^2 is $F \circ F$, the monad \mathbb{V} is called universal because contains all the Lawson monads.

¹Thesis

² FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR JAVIER E. CAMARGO GARCÍA..

CONTENIDO

Introducción	II
1. Preliminares	1
1.1. Definiciones Topológicas	1
1.2. Espacios métricos	3
1.3. Definiciones algebraicas	5
2. Conceptos Categóricos	7
2.1. Categoría	7
2.2. Propiedades en una categoría	9
2.3. Funtores	13
2.4. Transformación natural	22
3. Mónada	26
3.1. Una mónada universal.	27
BIBLIOGRAFÍA	31

Introducción

En el universo todo está relacionado, sólo que en ocasiones no es tan evidente; un ejemplo es el efecto mariposa, introducido por el meteorólogo Edward Lorenz en 1960. Lorenz buscaba un modelo matemático que permitiera a partir de variables sencillas hacer predicciones climatológicas y consigue ajustar el modelo a tres variables que expresan como cambia a lo largo del tiempo la velocidad y temperatura del aire. Lorenz observó que pequeñas variaciones y diferencias aparentemente insignificantes en los datos, producían grandes diferencias en el proceso del modelo; pues cualquier pequeña perturbación puede ocasionar grandes cambios. Esto ocurre porque las variables meteorológicas están todas relacionadas. Lorenz explica de una manera hipotética “un aleteo de una mariposa en Hong Kong puede desatar una tormenta en Nueva York”. El aleteo de una mariposa en el otro lado del mundo que aparentemente no tiene ninguna relación con el clima, puede alterar las predicciones climatológicas que se hagan de este lado. Las relaciones siempre han existido sólo que ahora les asignamos nombres y las usamos en diferentes campos de la ciencia por ejemplo en las matemáticas; estas estudian propiedades en común entre conjuntos, grupos, entre grupos y conjuntos, entre espacios topológicos y espacios métricos en fin, entre diferentes estructuras matemáticas.

La teoría de categorías fué introducida en topología algebraica por Eilenberg y Mac Lane y es (de una manera informal) una rama de las matemáticas que estudia entre otras cosas estas relaciones entre estructuras matemáticas. En esta teoría dichas estructuras son llamadas categorías como formalizaremos mas adelante. Asi mismo las categorías estan relacionadas mediante funtores cuyos aspectos algebraicos fueron investigados basados en la noción de mónada introducido por Eilenberg y Moore en los años cincuenta y sesenta [3] [10] [11]; los funtores a su vez, se relacionan por medio de transformaciones naturales. Históricamente, la necesidad de clasificar las transformaciones naturales en topología algebraica fué lo que sirvió para definir funtores y categorías.

El objetivo de esta monografía es tomar estos elementos ya mencionados, puntualmente

los funtores y las transformaciones naturales para realizar la construcción de una de las mónadas universales, la mónada \mathbb{V} cuyo estudio es interesante porque contiene todas las mónadas de Lawson, estructuras que expondremos con detalle en el capítulo 3.

Este trabajo está distribuido de la siguiente manera: En el primer capítulo encontraremos algunas definiciones y elementos matemáticos básicos usados en álgebra, geometría y topología. En el segundo capítulo presentaremos la definición formal de categoría, morfismos, funtor, clases de funtores, transformación natural, algunas propiedades categóricas y ejemplos de cada uno de ellos.

En el tercer capítulo mostraremos inicialmente la definición de mónada, luego expondremos el funtor y las transformaciones naturales que se usarán en la construcción de una mónada, finalmente basados en algunas proposiciones que mencionaremos en detalle presentaremos la estructura que ha sido objeto de estudio de este trabajo, la mónada universal \mathbb{V} .

CAPÍTULO 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar las principales definiciones y elementos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Inicialmente mostraremos un breve resumen sobre las principales definiciones topológicas como: espacio producto, los axiomas de separación, conjunto compacto con algunas proposiciones que se derivan de esta definición, posteriormente haremos un corto análisis sobre la métrica de Hausdorff y los espacios compactos de Hausdorff; finalmente expondremos algunas definiciones algebraicas como: monoide, grupo, espacio vectorial entre otros.

1.1. Definiciones Topológicas

Veamos ahora algunas definiciones topológicas que serán el fundamento para definir la categoría de los espacios topológicos "*Top*" y la categoría "*Comp*" en el ejemplo 2.2, el funtor "*CL*" en el ejemplo 2.28 y posteriormente se usarán en el capítulo 3 donde se definirá la mónada universal.

Definición 1.1. *Un espacio X se dice compacto si de cada cubrimiento abierto \mathbb{A} de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre a X .*

El siguiente lema será usado para probar la compacidad del espacio *CLX* en la proposición 2.30.

Lema 1.2. *Si todo cubrimiento con elementos de una subbase tiene un subcubrimiento finito, entonces X es compacto. Esto se conoce como Lema de Alexander.*

Los siguientes teoremas se estudian en un curso básico de topología, por esta razón no presentaremos su demostración; sin embargo el lector puede consultar la prueba de cada uno de ellos en [7] páginas 187, 188, 231 respectivamente.

Teorema 1.3. *Si $A \subset X$, A cerrado y X compacto, entonces A es compacto.*

Teorema 1.4. *$X \subset Y$, X compacto y Y Hausdorff, entonces X es cerrado.*

Teorema 1.5. *Si X es un espacio compacto Hausdorff entonces X es normal.*

Teorema 1.6. *El producto de espacios compactos es compacto.*

Definición 1.7. *Un espacio topológico (X, τ) es T_1 ó accesible, si y solamente si dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen U, V abiertos con $x \in U$, $y \in V$ tales que $y \notin U$ y $x \notin V$.*

Definición 1.8. *Un espacio topológico (X, τ) es Hausdorff, T_2 ó separado si y solamente si dados $x, y \in X$ existen U, V abiertos con $x \in U$, $y \in V$ tal que $U \cap V = \emptyset$.*

Definición 1.9. *Un espacio topológico (X, τ) es regular ó T_3 , si y solamente si dados $x \in X$ y un cerrado $F \subset X$ tal que $x \notin F$, existen abiertos U, V disjuntos con $x \in U$ y $F \subset V$.*

Definición 1.10. *Un espacio X es llamado espacio de Tíjonov o espacio $T_{3\frac{1}{2}}$, si es un espacio T_1 y si para cada $x \in X$ y F subconjunto cerrado de X tales que $F \cap \{x\} = \emptyset$; entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(F) \subset \{1\}$.*

Definición 1.11. *Un espacio X es llamado espacio Normal o espacio T_4 , si X es un espacio T_1 y si para cada par A, B de subconjuntos cerrados disjuntos de X existen en X dos abiertos disjuntos U, V tal que*

$$A \subset U, \text{ y } B \subset V.$$

Teorema 1.12. *Todo espacio compacto de Hausdorff es normal*

Definición 1.13. *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. Definimos el producto de espacios topológicos denotado por $X = \prod_{s \in S} X_s$ como*

$$X = \{f : S \rightarrow \cup X_s \mid f(s) \in X_s, \forall s \in S\}.$$

Para cada $f \in X$ el punto $f(s) \in X_s$ es llamada la s -ésima coordenada del punto f . Cada elemento del producto X para el cual el punto $x_s \in X_s$ es la s -ésima coordenada, lo notaremos en adelante por $x = \{x_s\}$.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, donde $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$ es una función continua y X_α un espacio topológico, entonces existe una topología sobre Y , llamada la topología generada por la familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

La base de la topología generada por $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ consiste en conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^k f_{s_i}^{-1}(V_i),$$

donde $s_1, \dots, s_k \in A$ y V_i es abierto en X_{s_i} .

Para cada $s \in S$ definimos la aplicación proyección:

$$\pi_s : X \rightarrow X_s, \text{ tal que } \pi_s(x) = x_s.$$

De esta forma el espacio producto X junto con la topología generada por la familia de aplicaciones $\{\pi_s\}_{s \in S}$ se llama el espacio producto cartesiano para la familia $\{X_s\}_{s \in S}$. Esta topología es llamada la topología de Tíjonov. Sea Y un espacio topológico. Si $Y = X_s$ para cada $s \in S$ entonces el producto $\prod_{s \in S} X_s$ lo notaremos por Y^S .

Teorema 1.14. Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. Para una familia $\{A_s\}_{s \in S}$, donde $A_s \subset X_s$, se tiene la siguiente igualdad

$$\overline{\prod_{s \in S} A_s} = \prod_{s \in S} \overline{A_s}.$$

Definición 1.15. Dada la familia de aplicaciones $\{f_s\}_{s \in S}$, donde $f_s : Y \rightarrow Y_s$, decimos que la familia de aplicaciones separa puntos, si para cada par $x, y \in Y$, dos puntos distintos, existe un $s \in S$ tal que $f_s(x) \neq f_s(y)$.

1.2. Espacios métricos

La siguiente definición se usará como herramienta para definir la categoría de los espacios métricos *Met* en el ejemplo 2.2

Definición 1.16. Una métrica sobre un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada par ordenado de elementos $x, y \in X$ un número real $d(x, y)$, llamado distancia de x a y , de modo que sean satisfechas las siguientes condiciones para cualesquiera $x, y, z \in X$.

- a) $d(x, x) = 0$;
- b) Si $x \neq y$ entonces $d(x, y) > 0$;

- c) $d(x, y) = d(y, x)$;
- d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un espacio métrico es una pareja (X, d) , donde X es un conjunto y d es una métrica en X .

Ejemplo 1.17. Consideremos el espacio $X = \mathbb{R}^n$ y la métrica d_n en \mathbb{R}^n definida por

$$d_n(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. La pareja $(X, d_n) = (\mathbb{R}^n, d_n)$ es un espacio métrico. La métrica d_n es llamada métrica euclidiana.

Tomando un espacio métrico podemos definir una métrica sobre el conjunto de los subespacios compactos. Esta métrica se conoce como la métrica de Hausdorff y será de utilidad en el siguiente capítulo.

Definición 1.18. Sea (X, d) un espacio métrica, denotaremos por 2^X al conjunto de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X , y definimos:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \varepsilon)\},$$

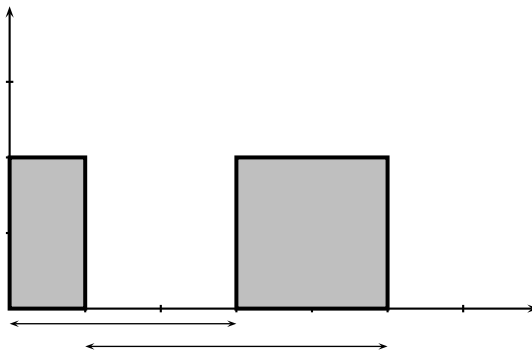
en donde

$$N(A, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, A) \leq \varepsilon\} \quad \text{y} \quad d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

Observación 1.19. Una definición equivalente para H es,

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}, \sup_{b \in B} \{d(b, A)\} \right\}.$$

Ejemplo 1.20. Consideremos el espacio métrico (\mathbb{R}^2, d) . Sean:
 $A = [0, 1] \times [0, 2]$, $B = [3, 5] \times [0, 2]$. Calculamos $H(A, B)$.



No es difícil ver que $\sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = 3$ y $\sup_{b \in B} \{d(b, A)\} = 4$; luego se tiene que,

$$H(A, B) = \max\{3, 4\} = 4.$$

La siguiente proposición se estudia en cualquier curso básico de análisis y topología por esta razón no presentaremos su demostración; sin embargo el lector puede consultar [5] página 104.

Proposición 1.21. *A es un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana si y sólo si A es cerrado y acotado.*

1.3. Definiciones algebraicas

Recordemos ahora algunas conceptos algebraicos básicos que nos ayudarán a obtener una mayor comprensión del trabajo. Estas definiciones se usarán principalmente en el capítulo 3 donde presentaremos la mónada universal \mathbb{V} .

En la medida que avanzamos el estudio de las estructuras les agregamos elementos, las hacemos mas complejas; en este caso si a un semigrupo le agregamos un elemento neutro, se convertirá entonces en un monoide; ésta estructura es de gran importancia, pues tiene una estrecha relación con la mónada (objeto de estudio de este trabajo) que estudiaremos en detalle en el capítulo 3.

Definición 1.22. *Dado un semigrupo $(S, *)$ diremos que tiene elemento neutro si existe un elemento e de S único que satisface*

$$e * a = a * e = a \text{ para cada } a \text{ en } S.$$

Este semigrupo con elemento neutro se llama monoide. Si además el semigrupo es conmutativo se le llama monoide conmutativo.

Ejemplo 1.23. *Las matrices reales $M_{n \times m}$ forman un monoide conmutativo con la operación suma de matrices.*

Ejemplo 1.24. *Si $(S, *)$ y (T, \star) son monoides entonces el producto cartesiano, $(S \times T, \diamond)$ es también un monoide donde la operación \diamond está definida como $(s_1, t_1) \diamond (s_2, t_2) = (s_1 * s_2, t_1 \star t_2)$ y el elemento neutro es el par formado por los elementos neutros de cada uno de los monoides S y T .*

Usualmente en matemáticas se busca la forma de relacionar dos estructuras, en este caso para monoides se hace por medio de morfismos, como lo presenta la siguiente definición.

Definición 1.25. *Si $(S, *)$ y (T, \star) son monoides, un morfismo es una aplicación $f : S \rightarrow T$ que cumple:*

$$f(a * b) = f(a) \star f(b), \quad \forall a, b \in S \text{ y } f(e) = e'.$$

con e elemento neutro de $(S, *)$ y e' elemento neutro de (T, \star) .

Los siguientes conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, grupo y homomorfismo, los usaremos al definir las categorías Vec y Grp en el capítulo 2.

Definición 1.26. *Un espacio vectorial V es un conjunto de objetos, llamados vectores, junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación.*

- i) Si $x, y \in V$, entonces $x + y \in V$;*
- ii) Para todo $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$;*
- iii) Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$;*
- iv) Si $x \in V$ existe un vector $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$;*
- v) Si $x, y \in V$ entonces $x + y = y + x$;*
- vi) Si $x \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha x \in V$;*
- vii) Si $x, y \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;*
- viii) Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;*
- ix) Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;*
- x) para cada vector $x \in V$, $1x = x$.*

Definición 1.27. *Sean V, W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada vector u y v en V y cada escalar α ,*

$$T(u + v) = Tu + Tv \quad \text{y} \quad T(\alpha v) = \alpha Tv.$$

Definición 1.28. *Un conjunto no vacío G sobre el cual se ha definido una operación binaria $(*)$ se llama grupo con respecto a esta operación si para cualesquiera $a, b, c \in G$ se verifican las siguientes propiedades:*

P_1 : $(a * b) * c = a * (b * c)$.

P_2 : Existe $e \in G$ tal que $e * a = a * e = a$.

P_3 : Para cada $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Definición 1.29. *Sean dos grupos, (G, \diamond) y (G', Δ) , se llama homomorfismo de G en G' a la aplicación*

$$f : G \rightarrow G'$$

tal que:

- i) Todo $g \in G$ tiene una imagen única $f(g) \in G'$*
- ii) $f(g_1 \diamond g_2) = f(g_1) \Delta f(g_2)$ para cada $g_1, g_2 \in G$.*

CAPÍTULO 2

Conceptos Categóricos

La teoría de categorías es una rama de las matemáticas que puede ser usada como una herramienta que nos sirve, para estudiar relaciones existentes entre estructuras matemáticas en este caso particular una categoría es vista como una estructura la cual está formada por objetos (estructuras matemáticas como caso particular), flechas ó morfismos entre objetos (funciones, homomorfismos, isomorfismos, etc.), un morfismo identidad que relaciona cada objeto consigo mismo y una operación de composición asociativa.

A continuación presentaremos la definición formal de categoría y algunos ejemplos que ayudarán al entendimiento de esta importante teoría. Las definiciones enunciadas en esta sección fueron tomados de [2], [3] y [4].

2.1. Categoría

Definición 2.1. Una *categoría* \mathcal{C} es una cuádruple compuesta de la siguiente manera: $\mathcal{C} = (Ob_{\mathcal{C}}, hom_{\mathcal{C}}, id, \circ)$; donde,

1. $Ob_{\mathcal{C}}$ es una clase cuyos miembros son llamados *objetos* de la categoría.
2. Para cada par de objetos A y B , existe el conjunto $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados *morfismos* ó *flechas* de la categoría, los cuales, tienen como dominio a A y contradominio a B . Si f es un morfismo de la categoría se denota $f \in Mor_{\mathcal{C}}$.

3. Para cada A objeto de la categoría \mathcal{C} , existe un morfismo $id_A : A \rightarrow A$, llamado morfismo identidad de \mathcal{C} .
4. Una ley de composición asociativa (\circ) tal que si $f, g \in Mor\mathcal{C}$, $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, se tiene que $g \circ f : A \rightarrow C$ (composición de f y g) cumple las siguientes condiciones:

- La composición es asociativa es decir
 $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, para cada $f, g, h \in Mor\mathcal{C}$
- Los morfismos identidades de \mathcal{C} actúan como tal con respecto a la composición; es decir, para $f : A \rightarrow B$ un morfismo de \mathcal{C} se tiene:

$$f \circ id_A = id_B \circ f = f.$$

- Los conjuntos $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ son disjuntos dos a dos.

Ejemplo 2.2. .

Vec : Los objetos de esta categoría son los espacios vectoriales, los morfismos son las transformaciones lineales, los morfismos identidades son las transformaciones identidades así:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ f &: I_A \\ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para cada A espacio vectorial y f transformación lineal.

La operación \circ será la composición entre transformaciones lineales.

Set : Los objetos son conjuntos, y los morfismos son funciones entre ellos. La operación es la composición usual entre funciones.

Grp : Los objetos son grupos y las flechas son morfismos entre grupos.

Met : Los objetos de esta categoría son los espacios métricos (X, d) los morfismos son funciones $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$, tal que para todo x_1, x_2 en X se cumple que:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq d(x_1, x_2).$$

Los morfismos identidades son las funciones identidades $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$, tal que para todo $x, y \in X$ se tiene que: $f(x) = x$ donde $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, y la operación es la composición de funciones.

Observación 2.3. Si tomamos los objetos de esta categoría con las funciones continuas como morfismos tendremos la categoría Met_c . Si los morfismos son funciones uniformemente continuas será entonces la categoría Met_u .

Comp Los objetos son espacios compactos de Hausdorff, y los morfismos son funciones continuas.

Mat : Los objetos son los números naturales, Los morfismos son las matrices $M_{m \times n}$, así:

$$A : n \rightarrow m \quad \text{con} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad A \in M_{m \times n}.$$

La operación es el producto usual entre matrices.

Top : Los objetos son los espacios topológicos, los morfismos son funciones continuas, los morfismos identidades serán las funciones identidades entre espacios topológicos y la operación será la composición usual entre funciones.

La siguiente sección fué introducida para que el lector se familiarice con el concepto de categoría y le facilite la comprensión de los contenidos relacionados que serán desarrollados en las siguientes secciones.

2.2. Propiedades en una categoría

El principio de dualidad nos permite construir una nueva categoría a partir de una conocida usando los mismos objetos y morfismos, en estos últimos el dominio pasará a ser contradominio y viceversa.

Definición 2.4. Dada una categoría $\mathcal{C} = (Ob_{\mathcal{C}}, hom_{\mathcal{C}}, id, \circ)$, la categoría dual \mathcal{C}^{op} de \mathcal{C} definida como:

$$\mathcal{C}^{op} = (Ob_{\mathcal{C}}, hom_{\mathcal{C}}^{op}, id, \circ^{op})$$

donde

$$hom_{\mathcal{C}}^{op}(A, B) = hom_{\mathcal{C}}(B, A) \quad \text{con} \quad A, B \in Ob_{\mathcal{C}} \quad \text{y}$$

$$f \circ^{op} g = g \circ f.$$

Veamos un ejemplo particular de esta definición.

Ejemplo 2.5. Tomemos la categoría $\mathcal{C}(X, \leq) = (Ob_{\mathcal{C}}, hom_{\mathcal{C}}, id, \circ)$. Los objetos de esta categoría son elementos de X que son los mismos para \mathcal{C}^{op} .

$$hom(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } x \leq y; \\ \emptyset & \text{en caso contrario;} \\ id_x = (x, x). \end{cases}$$

$$hom^{op}(x, y) = \begin{cases} (y, x) & \text{si } y \leq x; \\ \emptyset & \text{en caso contrario;} \\ id_x = (x, x). \end{cases}$$

Veamos ahora como funciona con la operación.

Sean $x, y, z \in Ob_{\mathcal{C}} \Rightarrow (y, z) \circ (x, y) = (x, z)$
para \mathcal{C}^{op} será.

$$(z, y) \circ (y, x) = (y, x) \circ (z, y) = (x, z)$$

y $(x, z) \in hom^{op}(z, x)$.

Las siguientes definiciones muestran algunas características de los objetos que finalmente se verán reflejadas en el conjunto de morfismos, pues al dejar fijos los objetos en el dominio ó contradominio hacen que dicho conjunto sea unitario.

Definición 2.6. Un objeto A de \mathcal{C} es *inicial*, si $hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ es un conjunto unitario, para todo X objeto en \mathcal{C} .

Ejemplo 2.7. veamos los objetos iniciales en *Set* y *Grp*

- En *Set*, el conjunto vacío es el único objeto inicial.
- En *Grp* cada grupo con un elemento es un objeto inicial.

Observación 2.8. Si I, J son objetos iniciales de \mathcal{C} y

$$hom_{\mathcal{C}}(I, J) = f \quad y \quad hom_{\mathcal{C}}(J, I) = g$$

además

$$hom_{\mathcal{C}}(I, I) = 1 \quad y \quad hom_{\mathcal{C}}(J, J) = 1$$

se tiene $g \circ f = 1$ y $f \circ g = 1$. Ahora si dejamos un objeto B fijo en el contradominio y además el $hom_{\mathcal{C}}(X, B)$ es un conjunto unitario para todo objeto X en \mathcal{C} entonces B será un objeto terminal.

Veamos la siguiente definición.

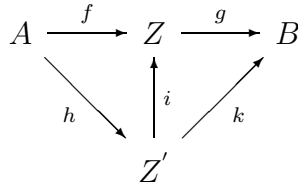
Definición 2.9. Un Objeto T es terminal si $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ es un conjunto unitario para todo X objeto en \mathcal{C}

Ejemplo 2.10. Cada conjunto unitario es un objeto terminal para Set

Definición 2.11. Un objeto Z es un objeto cero si es inicial y terminal

Ejemplo 2.12. En Grp un grupo con un elemento es un objeto cero.

Tomemos cuatro objetos A, B, Z, Z' con Z, Z' objetos ceros. Veamos el siguiente diagrama.



Se tiene que

$$g \circ f = g(ih) = (gi)h = k \circ h$$

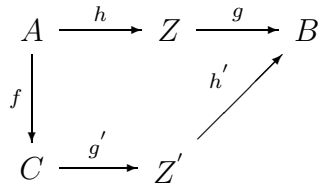
$k \circ h$ es el morfismo que nos permite ir de A hacia B a través de objetos ceros. Este morfismo es llamado morfismo cero de A sobre B y se escribe O_{AB} .

Proposición 2.13. El morfismo cero se comporta como elemento nulo así:

$$Of = O \text{ y } gO = O$$

.

Demostración. Sean A, B, C, Z, Z' objetos en \mathcal{C} con Z, Z' objetos cero y f, g, h, g', h' morfismos en \mathcal{C} , consideremos el siguiente diagrama.



$$O_{AB} = g \circ h \quad O_{CB} = h' \circ g' \quad O_{CB}f = (h'g')f = h'(g'f) = O_{AB}.$$

Análogamente $g \circ O = g$.

Recordemos que el $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ es un conjunto cuyos elementos son llamados flechas de la categoría, pensemos ahora en los inversos de estos elementos y en las características que presentan estas flechas en la categoría.

Definición 2.14. Un morfismo f con $A \xrightarrow{f} B$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo g con $B \xrightarrow{g} A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$ cada morfismo g es el inverso de f .

Ejemplo 2.15. Veamos algunos isomorfismos en las categorías ya estudiadas

1. Todo morfismo identidad es un isomorfismo y $id_{A^{-1}} = id_A$.
2. En la categoría *Set* los isomorfismos son las funciones biyectivas.
3. En la categoría *Top* los isomorfismos son los homeomorfismos
4. En la categoría *Mat* los isomorfismos son las matrices regulares.

Observación 2.16. En una categoría los isomorfismos producen una relación de equivalencia entre los objetos de \mathcal{C}

Definición 2.17. f es un **monomorfismo** en \mathcal{C} si $f \circ u = f \circ v$ implica $u = v$ con u, v, f morfismos en \mathcal{C} .

Definición 2.18. f es un **epimorfismo** en \mathcal{C} si $u \circ f = v \circ f$ implica que $u = v$ con u, v, f morfismos en \mathcal{C} .

En *Set* los monomorfismos están relacionados con las funciones inyectivas y los epimorfismos con las funciones sobreyectivas, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.19. Sea f un morfismo en *Set*, se tiene entonces: i) f es monomorfismo si y sólo si f es inyectiva;
ii) f es epimorfismo si y sólo si f es sobreyectiva.

Demostración. i) Supongamos que f es monomorfismo y $f(x_1) = f(x_2)$. Tomemos $\{a\}$ conjunto unitario y $u, v : \{a\} \rightarrow x$ con $u(\{a\}) = x_1$ y $v(\{a\}) = x_2$ se tiene $fu = fv$ entonces $u = v$ por ser f monomorfismo luego $u(a) = v(a)$ entonces $x_1 = x_2$.

Ahora supongamos que f es inyectiva y $fu = fv$ con $f : A \rightarrow B$ y $u, v : C \rightarrow A$ entonces $fu(c) = fv(c)$ para cada c en C como f es inyectiva se tiene $u(c) = v(c)$ luego $u = v$ y f es monomorfismo.

ii) $f : X \rightarrow Y$ es sobreyectiva y $uf = vf$, entonces

$$(uf)(x) = (vf)(x), \forall x \in X$$

como f es sobreyectiva, para cada $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y $u(y) = v(y)$ para cada $y \in Y$ y $u = v$; luego f es epimorfismo.

Ahora, f es epimorfismo se tiene que $u(f(x)) = v(f(x))$ y esto es $(uf)(x) = (vf)(x)$ luego cada $f(x)$ tiene una contraimagen x .

Proposición 2.20. Sea f, g morfismos en una categoría, se tiene:

- i) Si gf es inyectiva entonces f lo es.
- ii) Si fg es sobreyectiva entonces f lo es.

Demostración.

- i) Sean x_1, x_2 elementos de X y supongamos $f(x_1) = f(x_2)$, ahora operando con g tenemos $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ esto es $(gf)(x_1) = (gf)(x_2)$ como gf es inyectiva entonces $x_1 = x_2$.
- ii) Sean A, B, C objetos y f, g morfismos. Como fg es sobre existe $x \in A$ tal que $(fg)(x) = y$, con y en C así que $f(g(x)) = y$ y $g(x)$ están en B .

Las siguientes proposiciones son una generalización de la anterior proposición.

Proposición 2.21. Si gf es un monomorfismo entonces f también lo es.

Demostración. Sean f, g, u, v morfismos en \mathcal{C} . Sean f, g, u, v morfismos en \mathcal{C} . Si $fu = fv$ y operando con g a la izquierda y haciendo uso de la propiedad asociativa de morfismos tenemos

$$g(fu) = g(fv) \text{ y } (gf)u = (gf)v$$

como gf es monomorfismo, entonces $u = v$, luego f es monomorfismo.

Proposición 2.22. Si fg es un epimorfismo, entonces f también lo es.

Demostración. Sean f, g, u, v morfismos en \mathcal{C} . Si $uf = vf$ y operando con g a la derecha y haciendo uso de la propiedad asociativa de morfismos tenemos

$$(uf)g = (vf)g \text{ y } u(fg) = v(fg)$$

fg es epimorfismo, entonces $u = v$, luego f es epimorfismo.

2.3. Funtores

Un functor de una manera intuitiva, es la herramienta que nos permite relacionar objetos y morfismos de dos categorías preservando su estructura. Los funtores se introdujeron en topología algebraica donde se asociaban los objetos algebraicos con los espacios topológicos y los homomorfismos con funciones continuas.

Definición 2.23. Sea \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. Un *funtor* F de \mathcal{C} a \mathcal{D} es una aplicación que asigna a cada objeto A de la categoría \mathcal{C} un objeto $F(A)$ de la categoría \mathcal{D} y a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ de la categoría \mathcal{C} un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ de la categoría \mathcal{D} . Además, preserva operación y el morfismo identidad así:

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g), \text{ donde } f \circ g \text{ debe de estar definida y}$$

$$F(id_A) = id_{F(A)}, \text{ para cada objeto } A \text{ en } \mathcal{C}.$$

A continuación presentaremos algunos ejemplos de funtores.

Ejemplo 2.24. Dada una categoría \mathcal{C} y A un objeto en \mathcal{C} , el funtor identidad se define:

$$id_{\mathcal{C}}(A) =: A \text{ y } id_{\mathcal{C}}(f) =: f \text{ con } f \in Mor\mathcal{C} \text{ y } f : A \rightarrow B$$

.

Claramente, $id_{\mathcal{C}}(A) \in \mathcal{C}$, $id_{\mathcal{C}}(f \circ g) = id_{\mathcal{C}}(f) \circ id_{\mathcal{C}}(g)$ y $id_{\mathcal{C}}(id_A) = id_A = id_{id_{\mathcal{C}}}$. Por lo tanto, $id_{\mathcal{C}}$ es un funtor de \mathcal{C} en \mathcal{C} .

Asi como en funciones si dejamos un elemento fijo en el recorrido construimos la función constante, una situación semejante se presenta con funtores, si dejamos un objeto fijo en la categoría de llegada tenemos entonces el funtor constante.

Ejemplo 2.25. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías y sea B un objeto fijo en \mathcal{D} . El funtor $F_B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definido de la siguiente manera:

$$F_B(A) =: B, \text{ y } F_B(f) =: id_B \forall A \in Ob_{\mathcal{C}} \text{ y } f \in Mor\mathcal{C}.$$

El funtor F_B es llamado funtor constante, veamos que de hecho F_B es un funtor:

1. $F_B(A) = B$, para todo A objeto en \mathcal{C} , entonces $F_B(A)$ es un objeto en \mathcal{D} .
2. Sean A, A' objetos en \mathcal{C} , y $f : A \rightarrow A'$ morfismo en \mathcal{C} , por definición $F_B(f) = id_B$ para todo $f \in Mor\mathcal{C}$ y $id_B \in Mor\mathcal{D}$. Entonces, $F_B(f) \in Mor\mathcal{D}$.
3. Sea $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, $id_A \in Mor\mathcal{C}$. Entonces, $F_B(id_A) = id_B = id_{F_B(A)}$.
4. Sean f, g morfismo en \mathcal{C} . Veamos que $F_B(g) \circ F_B(f) = F_B(g \circ f)$.

$$F_B(g) \circ F_B(f) = id_B \circ id_B = id_B = F_B(g \circ f).$$

Algunas construcciones matemáticas se hacen tomando un conjunto y estableciendo relaciones entre los elementos de dicho conjunto dando origen así a una estructura matemática por ejemplo si tomamos los números reales y calculamos la distancia entre cualquier par de ellos, lo que conocemos como métrica estamos entonces construyendo un espacio métrico; El proceso inverso de esto lo podemos obtener a través de un funtor llamado funtor olvido de estructura que presentaremos a continuación.

Ejemplo 2.26. Consideremos las categorías Top , Set y la aplicación $O : Top \rightarrow Set$ definida como:

$O(X, \tau) = X$, con (X, τ) objeto en Top y $O(f) = f$ para cada f morfismo en Top .

La aplicación O es un funtor. Veamos

1. $O(X, \tau) = X$, para todo (X, τ) objeto en Top . Entonces, $O(X, \tau)$ es un objeto en Set , para todo (X, τ) objeto en Top .
2. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$, con f morfismo en Top , se tiene por definición:
 $O(f) = f$ para todo $f \in Mor(Top)$ y $f \in Mor(Set)$, entonces $O(f) \in Mor(Set)$.
3. Si $(X, \tau) \in Ob_{Top}$, tenemos $id_{(X, \tau)} : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ y $O_{id_{(X, \tau)}} = id_{(X, \tau)} : X \rightarrow X$, entonces, $id_{(X, \tau)} = id_X = id_{O(X, \tau)}$.
4. Sean f, g morfismos en Top . Veamos que $O(f) \circ O(g) = O(f \circ g)$.
 En efecto, $O(f) \circ O(g) = f \circ g = O(f \circ g)$,

Ejemplo 2.27. El funtor $S^2 : Set \rightarrow Set$, se define $S^2(X) = X \times X =: X^2$ con X, X^2 objetos en Set y,

$$S^2(X \xrightarrow{f} Y) = X^2 \xrightarrow{f^2} Y^2 = f^2$$

donde

$$S^2(f(x_1, x_2)) = (f(x_1), f(x_2))$$

entonces, $S^2(f) : X^2 \rightarrow Y^2$, para f morfismo en Set .

Verifiquemos que S^2 es un funtor.

1. $S^2(X) = X$ para todo $X \in Ob_{Set}$. Entonces, $S^2(X) \in Ob_{Set}$.
2. $f : X \rightarrow Y$, $X, Y \in Ob_{Set}$, por definición,

$$S^2(X \xrightarrow{f} Y) = X^2 \xrightarrow{f^2} Y^2 = (f(x_1), f(x_2)) \in Mor(Set).$$

3. Sea X objeto en Set y $id_X : X \rightarrow X$ morfismo en Set , entonces,

$$S^2(id_X) = id_{X^2} = id_{S^2(X)}.$$

4. Sean f, g morfismos en Set . Sea $(x_1, x_2) \in X^2$.

$$\begin{aligned} (S^2(f) \circ S^2(g))(x_1, x_2) &= S^2(f) [S^2(g(x_1, x_2))] = S^2(f) [(g(x_1), g(x_2))] = \dots \\ &\dots = (f(g(x_1)), f(g(x_2))) = (f \circ g(x_1), f \circ g(x_2)) = S^2(f \circ g)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

A menudo se estudian ejemplos de funtores donde el dominio y el codominio son la misma categoría. Estos funtores son llamados **endofuntores**.

Ejemplo 2.28. Tomemos el endofuntor CL que actúa sobre la categoría de los espacios compactos de Hausdorff "Comp" y definamos el hiperespacio de X de la siguiente manera:

Para cada $X \in Ob_{Comp}$

$$CL(X) = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y es subconjunto cerrado en } X\}.$$

Este hiperespacio se puede dotar con la topología de Vietoris, cuyos abiertos básicos están definidos de la siguiente forma:

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \{A \in CLX : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_n, \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, \dots, n\}\},$$

donde cada U_i es abierto en la topología definida sobre X .

Nótese que

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup \dots \cup U_n \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n \rangle,$$

por lo cual los elementos de la forma $\langle U \rangle, \langle X, U_i \rangle$ forman una subbase de dicha topología.

Ahora veamos como actúa CL sobre los morfismos.

Sean $X, Y \in Ob_{Comp}$; si $f \in \text{hom}_{Comp}(X, Y)$, definimos

$$CL(f)(A) = f(A), \text{ para cada } A \in CL(X).$$

Como f es continua y A es cerrado en el compacto X , entonces A es compacto y $f(A)$ es compacto, pero Y es Hausdorff entonces $f(A)$ es cerrado y no vacío, por lo tanto $f(A) \in CLY$.

Si U es abierto de Y , entonces $(CL(f))^{-1}(\langle U \rangle) = \langle f^{-1}(U) \rangle$ y $(CL(f))^{-1}(\langle Y, U \rangle) = \langle X, f^{-1}(U) \rangle$, por lo que $CL(f)$ es continua.

Para verificar que CL es un endofuntor probaremos primero la siguiente proposición.

Proposición 2.29. Para cada compacto de Hausdorff X , el hiperespacio $CL(X)$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Sean $A, B \in CLX$, $A \neq B$. Entonces existe un $a \in A$ y $a \notin B$, como B es cerrado y X es normal, existen abiertos U, V en X tal que:

$$a \in U, B \subset V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Basta tomar $\mathcal{U} = \langle X, U \rangle$, $\mathcal{V} = \langle V \rangle$ abiertos de CLX .

Claramente $A \in \mathcal{U}$ y $B \in \mathcal{V}$; además $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$, pues si $\mathcal{D} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ entonces $\mathcal{D} \cap U \neq \emptyset$ y $\mathcal{D} \subset V$, con lo que se contradice $U \cap V = \emptyset$, con lo que tenemos que CLX es Hausdorff.

Proposición 2.30. Para cada compacto de Hausdorff X , CLX es compacto.

Demostración. Sea $\{\langle U_i \rangle, \langle X, V_j \rangle\}_{i \in I, j \in J}$ un cubrimiento de CLX con elementos de la subbase de la topología definida sobre CLX .

- i) Supongamos que $CLX \subset \bigcup \langle X, V_j \rangle$ $j \in J$, entonces cada cerrado de X intersecta a algún V_j con lo que $X \subset \bigcup V_j$, pero X es compacto, con lo que existe V_1, \dots, V_n tal que $X \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$; y todo cerrado de X intersecta a un V_k con $k = 1, \dots, n$ luego $CLX \subset \bigcup \langle X, V_1 \rangle \cup \dots \cup \langle X, V_n \rangle$ y por el lema de Alexander CLX es compacto.
- ii) Supongamos que $CLX - \bigcup \langle X, V_j \rangle \neq \emptyset$, luego $X - \bigcup V_j = A \subset X$ con $A \neq \emptyset$ y cerrado en X , $A \notin \langle X, V_j \rangle$, luego existe un $k \in I$ con $A \in \langle U_k \rangle$ y $A \subset U_k$, luego $X \subset U_k \cup (\bigcup V_j)$ con $j \in J$ y usando de nuevo la compacidad de X , $X \subset U_k \cup V_1 \cup \dots \cup V_n$ y $\langle U_k \rangle, \langle X, V_1 \rangle, \dots, \langle X, V_n \rangle$ forma un subcubrimiento de CLX .

Proposición 2.31. CL es un endofunctor en $Comp$.

Demostración. De la proposición 2.29 y la definición de $CL(f)$, sólo nos resta comprobar que CL preserva composición y el morfismo identidad:

$$\begin{aligned} CL(f \circ g)(A) &= (f \circ g)(A) = f(g(A)) = \\ f(CL(g)(A)) &= CL(f)(CL(g)(A)) = CL(f) \circ CL(g)(A); \end{aligned}$$

para cada $X \in Ob_{Comp}$ tenemos que

$$CL(id_X)(A) = id_X(A) = A = id_{CL(X)}(A).$$

Ejemplo 2.32. Tomemos $Comp$ la categoría de los espacios compactos de Hausdorff y las funciones continuas y definamos

$$V : Comp \rightarrow Comp$$

Si $X \in Comp$ definimos

$$VX = \prod_{\varphi \in C(X)} I_{\|\varphi\|}$$

donde

$$I_{\|\varphi\|} = [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$$

$C(X)$ es el espacio de funciones continuas de X en \mathbb{R} , donde $\|\varphi\| = \sup |\varphi(x)|_{x \in X}$ y $-\|\varphi\| \leq \varphi(x) \leq \|\varphi\|$ para todo $x \in X$, tal que si

$$v \in VX, \forall \varphi \in C(x), |v(\varphi)| \leq \|\varphi\|$$

VX es compacto (pues es producto de compactos) de Hausdorff.

Ahora tomemos $X \xrightarrow{f} Y$, $f \in \text{Mor}(\text{Comp})$ definamos

$$VX \xrightarrow{Vf} VY \quad Vf(v) \in VY$$

Si $\psi \in C(Y)$, $Vf(v)(\psi) =: v(\psi \circ f)$, veamos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} VX & \xrightarrow{Vf} & VY \\ & \searrow \pi_{\psi \circ f} & \downarrow \pi_{\psi} \\ & & I_{\|\psi\|} \end{array}$$

Observe que $\|\pi_{\psi \circ f}\| \leq \|\psi\|$, $Vf \in \text{Mor}(\text{Comp})$. Ahora tomemos los morfismos f, g así:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

aplicando V tenemos

$$\begin{array}{ccc} VX & \xrightarrow{V(g \circ f)} & VZ \\ & \searrow Vf & \uparrow Vg \\ & & VY \end{array}$$

Sea $v \in VX$ y $\psi \in C(Z)$, entonces

$$V(g \circ f)(v)(\psi) =: v(\psi \circ (g \circ f))$$

$v((\psi \circ g) \circ f) = Vf(v)(\psi \circ g) = Vg(Vf(v)(\psi)) = (Vg \circ Vf)(v)(\psi)$
y,

$$Vid_x(v)(\psi) = v(\psi \circ id_x) = V(\psi) = id_{VX}(v)(\psi)$$

de esta manera tenemos que V es un endofunctor en Comp .

Definición 2.33. Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un funtor F es un funtor de inmersión si es inyectivo sobre morfismos.

Definición 2.34. F es un funtor fiel siempre que todo el conjunto de morfismos restringido

$$F : \text{hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(FA, FA')$$

sea inyectivo

Definición 2.35. F es un funtor completo siempre que todo el conjunto de morfismos restringido sea sobreyectivo.

Ahora presentaremos algunos ejemplos de funtores fieles, completos y de inmersión donde haremos uso de las anteriores definiciones.

Ejemplo 2.36. El funtor $U : Met_C \rightarrow Top$ definido

$$U((X, d) \xrightarrow{f} (X', d')) = (X, \tau_d) \xrightarrow{f} (X', \tau_{d'})$$

es completo y fiel pero no es de inmersión

Verifiquemos. Sea el funtor $U : Met_C \rightarrow Top$ definido:

$$U(X, d) =: (X, \tau_d) \text{ y } Uf = f.$$

Tomemos $(X, \delta), (Y, \rho)$ espacios métricos y $hom(X, Y) \xrightarrow{U} (UX, UY)$

1. $g \in hom(UX, UY)$ si tomamos $(X, \delta) \xrightarrow{g} (Y, \rho)$ y $Ug = g$
 $\Rightarrow g \in hom(X, Y)$ y U es sobreyectivo, entonces U es completo.
2. Si $Ug = Uf \Rightarrow f = g$, pues $Ug = g$ y $Uf = f$ por definición de U luego U es fiel.
3. Ahora veamos que U no es de inmersión.

Tomemos (\mathbb{R}, d_u) y (\mathbb{R}, d) con $d = \frac{d_u}{1+d_u}$. con d_u como la métrica usual; d_u, d son topológicamente equivalentes entonces $\tau_{d_u} = \tau_d$ sin embargo $(\mathbb{R}, d_u) \neq (\mathbb{R}, d)$. tomemos

$$f : (\mathbb{R}, d_u) \rightarrow (\mathbb{R}, d_u)$$

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$$

$$g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y $Uf = Ug$ siendo $f \neq g$ se tiene entonces que U no es de inmersión.

Ejemplo 2.37. Veamos el funtor de partes $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set$ de inmersión que no es completo. Este funtor envía cada conjunto X , en su conjunto de partes $\mathcal{P}(X)$, y la imagen de cada morfismo f será $\mathcal{P}f(A) = f(A)$, para cada $f(A) \in \mathcal{P}(X)$, se tiene

$$hom(X, Y) \xrightarrow{\mathcal{P}} hom(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y))$$

claramente \mathcal{P} es de inmersión pero no es completo. Por ejemplo tomemos los conjuntos $X = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ entonces si,

$$\mathcal{P}(X) \xrightarrow{g} \mathcal{P}(Y)$$

$$\emptyset \rightarrow \emptyset$$

$$X \rightarrow Y$$

$$\begin{aligned}
\{a\} &\rightarrow \{1\} \\
\{b\} &\rightarrow \{1, 2\} \\
&\{2\} \\
&\{3\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para todo $f \in \text{hom}(X, Y)$, $\mathcal{P}f \neq g$; entonces \mathcal{P} no es completo.

Ejemplo 2.38. Ahora veamos un funtor fiel y no completo

$$\begin{aligned}
F : \text{Met} &\rightarrow \text{Top} \\
F(X, d) &=: (X, \tau_d) \\
Ff &= f
\end{aligned}$$

Recordemos que los morfismos en Met son las funciones inexpandibles y que toda función inexpandible es continua

Si $X, Y \in \text{Ob}_{\text{Met}}$ $\text{hom}_{\text{Met}}(X, Y) \xrightarrow{F} \text{hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ es inyectiva pero no sobreyectiva.

Veamos si $f, g \in \text{hom}_{\text{Met}}(X, Y)$, $f \neq g$ existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$

luego $Ff(x) \neq Fg(x)$ entonces $Ff \neq Fg$. Se tiene entonces que F es fiel.

Ahora, si $f \in \text{hom}_{\text{Top}}(X, Y)$ no necesariamente f es inexpandible, por ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y tomemos $f(x) = 2x$ entonces

$$d(f(x), f(y)) = 2d(x, y)$$

pero

$$d(x, y) < d(f(x), f(y))$$

luego F no es sobreyectiva, entonces F no es completo.

Ejemplo 2.39. Ahora veamos el funtor U un funtor fiel y no completo.

Sean A, B espacios vectoriales.

$$U : \text{hom}_{\text{Vect}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\text{Set}}(A, B)$$

$f : A \rightarrow B$ f es función, no transformación lineal entonces f no pertenece al $\text{hom}_{\text{Vect}}(v, w)$ entonces U no es completo.

tomemos T, T' transformaciones lineales y $T, T' : A \rightarrow B$ aplicando U se tiene $UT = UT'$ entonces $T = T'$ así se tiene que U es fiel.

Los funtores se caracterizan por preservar la estructura, así entonces si tenemos un isomorfismo en la categoría del dominio la imagen de éste, será también un isomorfismo en la categoría del codominio.

Proposición 2.40. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías con $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtor y $f : A \rightarrow A'$ un isomorfismo en \mathcal{C} , entonces $F(f)$ es un isomorfismo en \mathcal{D} .

Demostración. Sea $F(f)$ isomorfismo en \mathcal{D} .

Entonces,

$$F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(id_{A'}) = id_{F(A')}$$

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)}$$

Otra característica de los funtores es que se pueden operar entre ellos y se cumple de una manera intuitiva la ley de cerradura con la composición .

Proposición 2.41. La composición de funtores es un funtor.

Demostración. Sean F, G funtores con $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, la composición $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ definida:

- i) Si $A \in Ob_{\mathcal{C}}$, $(G \circ F)(A) = G(F(A))$,
- ii) Si $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $(G \circ F)(f) \in hom_{\mathcal{E}}((G \circ F)(A), (G \circ F)(B))$ definido $(G \circ F)(f) = G(Ff)$.

1. Sea A un objeto en \mathcal{C} , se tiene

$$(G \circ F)(A) = G(F(A))$$

$F(A)$ es un objeto en \mathcal{D} , y $G(F(A))$ es un objeto en \mathcal{E} , por ser F y G funtores. entonces $(G \circ F)(A)$ es un objeto en \mathcal{E} .

2. Sea f un morfismo en \mathcal{C} $(G \circ F)(f) = G(F(f))$, $F(f)$ es un morfismo en \mathcal{D} por ser F funtor y $G(F(f))$ es un morfismo en \mathcal{E} por ser G un funtor

3. Preserva identidad

$$(G \circ F)(id_A) = G(F(id_A)) = G(id_{F(A)})$$

se tiene por ser G funtor y

$$G(id_{F(A)}) = id_{GF(A)} \in Mor_{\mathcal{E}}$$

4. Preserva la operación \circ

$$(G \circ F)(f \circ g) = G(F(f \circ g)) = G(F(f) \circ F(g)) = G(F(f)) \circ G(F(g)).$$

Así queda demostrado que la composición de funtores es un funtor.

2.4. Transformación natural

Ahora estudiaremos las relaciones entre funtores llamadas transformaciones naturales.

Definición 2.42. Sean F, G funtores de \mathcal{C} a \mathcal{D} así: $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, una transformación natural μ de F en G es una aplicación que asigna a cada objeto A de \mathcal{C} un único morfismo en \mathcal{D} esto es, $\mu A : FA \rightarrow GA$ tal que para cada $f \in \text{hom}_{\mathcal{C}(A, A')}$ se tiene

$$Gf \circ \mu A = \mu A' \circ Ff$$

La aplicación μA se llama componente natural de μ en A . El siguiente diagrama ilustra la conmutatividad.

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \\ \mu A \downarrow & & \downarrow \mu A' \\ GA & \xrightarrow{Gf} & GA' \end{array}$$

Veamos algunos ejemplos de transformación natural

Ejemplo 2.43. Para cada funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ se tiene la transformación natural identidad así:

$$id_F : F \rightarrow F$$

definida $(id_F)(A) = id_{FA}$

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \\ id_{FA} \downarrow & & \downarrow id_{FA'} \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \end{array}$$

Se tiene

$$Ff \circ id_{FA} = id_{FA'} \circ Ff$$

claramente id_F es una transformación natural.

Ejemplo 2.44. Consideremos la transformación natural Δ definida por:

$$\Delta : id \rightarrow S^2$$

con $id : Set \rightarrow Set$ y $S^2 : Set \rightarrow Set$ funtores definidos en ejemplos 2.24 y 2.27 respectivamente. Sea X un objeto en Set , la componente natural

$$\Delta X : X \rightarrow X^2$$

$\Delta X(x) = (x, x)$ es función por lo tanto un morfismo en *Set* además, notamos que si $X \xrightarrow{f} Y$ entonces

$$\begin{array}{ccc} idX & \xrightarrow{idf} & idY \\ \Delta X \downarrow & & \downarrow \Delta Y \\ S^2 X & \xrightarrow{S^2 f} & S^2 Y \end{array}$$

es conmutativo es decir

$$S^2 f \circ \Delta X = \Delta Y \circ idf$$

de hecho,

Si tomamos $x \in X$ entonces,

$$(S^2 f \circ \Delta X)(x) = S^2 f(\Delta X(x)) = S^2 f(x, x) = (f(x), f(x))$$

y

$$(f(x), f(x)) = \Delta Y f(x) = (\Delta Y(idf))(x) = \Delta Y \circ idf$$

Por lo tanto Δ es transformación natural.

Ejemplo 2.45. Transformación natural τ

Sean $O, S : Grp \rightarrow Set$ funtores, donde O está definido en el ejemplo 2.26 y $S(G, *) =: G^2$ y $S(f) = f^2$.

Ahora definimos $\tau : S \rightarrow O$ una transformación natural de la siguiente manera:
Si $(G, *) \in Ob_{Grp}$ entonces

$$\tau(G, *) : S(G, *) \rightarrow O(G, *)$$

$$G^2 \rightarrow G$$

donde

$$\tau(G, *)(g_1, g_2) =: g_1 * g_2 \text{ con } g_1, g_2 \in G$$

Ahora si $(G, *) \xrightarrow{h} (G', \diamond)$ h es un isomorfismo de grupos.
Veamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G^2 & \xrightarrow{Sh} & G'^2 \\ \tau(G, *) \downarrow & & \downarrow \tau(G', \Delta) \\ G & \xrightarrow{Oh} & G' \end{array}$$

es conmutativo, esto es,

$$Oh \circ \tau(G, *) = \tau(G', \diamond) \circ Sh$$

De hecho Sea $(g_1, g_2) \in G^2$

$$(Oh \circ \tau(G, *))(g_1, g_2) = Oh(\tau(G, *)(g_1, g_2)) = Oh(g_1, g_2)$$

y,

$$Oh(g_1 * g_2) = h(g_1 \diamond g_2) = hg_1 \diamond hg_2 = \tau(G', \diamond)(h(g_1), h(g_2))$$

$$\tau(G', \diamond)(h(g_1), h(g_2)) = \tau(G', \diamond)Sh(g_1, g_2) = (\tau(G', \diamond) \circ Sh)(g_1, g_2)$$

Luego τ es transformación natural.

Ejemplo 2.46. Tomando los funtores O, S del ejemplo 2.4.3 definimos la transformación natural

$$\begin{aligned} \rho : O &\rightarrow S \\ \rho(G, *) &: G \rightarrow G^2 \end{aligned}$$

donde

$$\rho(G, *)(g) =: (g, e)$$

con $g, e \in (G, *)$ y e elemento identidad de $(G, *)$. Veamos que ρ es transformación natural.

Sea $X \xrightarrow{h} Y$ h morfismo,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Oh} & G' \\ \rho(G, *) \downarrow & & \downarrow \rho(G', \Delta) \\ G^2 & \xrightarrow{Sh} & G'^2 \end{array}$$

El diagrama es conmutativo es decir $Sh \circ \rho(G, *) = \rho(G', \diamond) \circ Oh$.

Sea $g \in (G, *)$

$$(Sh \circ \rho(G, *))(g) = Sh(\rho(G, *)(g)) = Sh(g, e) = (h(g), h(e))$$

y

$$(h(g), h(e)) = (h(g), e') = \rho(G', \diamond)(h(g)) = \rho(G', \diamond) \circ Oh(g)$$

Por otro lado,

$$(\rho(G', \diamond) \circ Oh)(g) = \rho(G', \diamond)(Oh(g)) = \rho(G', \diamond)(h(g)) = (h(g), e')$$

y

$$(h(g), e') = (h(g), h(e)) = Sh(g, e) = Sh(\rho(g, *) (g)) = (Sh \circ \rho(G, *)) (g)$$

Luego ρ es transformación natural.

CAPÍTULO 3

Mónada

La definición de mónada es a menudo comparada con la de monoide, pues depende de dos transformaciones naturales (operaciones) donde una de ellas es asociativa y la otra hace las veces de identidad. El conjunto M de elementos del monoide es reemplazado por el endofunctor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, mientras el producto cartesiano de dos conjuntos es reemplazado por la composición de funtores, la operación binaria $\mu : M \otimes M \rightarrow M$ de multiplicación por la transformación $\mu : F^2 \rightarrow F$ y la unidad (identidad) el elemento $\eta : I \rightarrow M$ por $\eta : I_x \rightarrow F$, podemos llamar η la unidad y μ la multiplicación de la mónada T .

En adelante dado un endofunctor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, denotaremos por F^n la composición de F n veces. A continuación presentaremos la definición formal de mónada.

Definición 3.1. Una mónada $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ en una categoría \mathcal{C} consiste de un funtor

$$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

y dos transformaciones naturales

$$\eta : I_{\mathcal{C}} \rightarrow F \quad \text{y} \quad \mu : F^2 \rightarrow F$$

Hacen que los siguientes diagramas conmuten.

$$\begin{array}{ccc} F^3 & \xrightarrow{F\mu} & F^2 \\ \mu F \downarrow & & \downarrow \mu \\ F^2 & \xrightarrow{\mu} & F \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
IF & \xrightarrow{\eta^F} & F^2 & \xleftarrow{F\eta} & FI \\
\vdots & & \downarrow \mu & & \vdots \\
= \vdots & & & & = \vdots \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
F & \cdots \xrightarrow{=} & F & \cdots \xrightarrow{=} & F
\end{array}$$

Ejemplo 3.2. Basados en el funtor del ejemplo 2.28, vamos a demostrar algunas proposiciones para definir una mónada.

Proposición 3.3. Si $\mathcal{A} \in CL^2X$, entonces $\cup\mathcal{A} \in CL(X)$.

La demostración se puede encontrar en [2].

Con la proposición anterior podemos definir las transformaciones naturales

$$u : CL^2 \rightarrow CL \quad y \quad s : id_{Comp} \rightarrow CL$$

para cada $X \in Ob_{Comp}$, $uX(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$, y $sX(a) = \{a\}$, donde $\mathcal{A} \in CL^2(X)$ y $a \in X$.

Como X es Hausdorff, se tiene que $\{a\} \in CL(X)$.

Probar que estas son transformaciones naturales y por consiguiente $\mathbb{C}\mathbb{L} = (CL, s, u)$ es una mónada en $Comp$, es resultado de las proposiciones anteriores y de cálculos elementales.

3.1. Una mónada universal.

Para construir una mónada basta con tomar un endofunctor y dos transformaciones naturales tal como se mostró en la definición. Tomemos entonces el funtor V (definido en la ejemplo 2.31 que actúa sobre la categoría de los espacios compactos de hausdorff), y dos transformaciones naturales m, h definidas de la siguiente manera:

$$m : V^2 \rightarrow V \quad h : id_{Comp} \rightarrow V$$

donde para cada $X \in Ob_{Comp}$, $\pi_\phi \circ mX = \pi_{\pi_\phi}$ y $\pi_\phi \circ hX = \phi$ para cada $\phi \in C(X)$. Probemos que m, h son transformaciones naturales.

Sean $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$; entonces

$$(\pi_\phi \circ hY \circ f)(x) = (\phi \circ f)(x) = (\pi_{\phi \circ f} \circ hX)(x) = (\pi_\phi \circ Vf \circ hX)(x),$$

por lo que se tiene que h es una transformación natural. Ahora, tomando $v \in V^2X$,

$$\begin{aligned}
\pi_\phi \circ mY \circ V^2f(v) &= \pi_{\pi_\phi} \circ V^2f(v) = \pi_{\pi_\phi \circ Vf}(v) = v(\pi_\phi \circ Vf) \\
v(\pi_{\phi \circ f}) &= \pi_{\pi_{\phi \circ f}}(v) = \pi_{\phi \circ f} \circ mX(v) = \pi_\phi \circ Vf \circ mX(v).
\end{aligned}$$

Proposición 3.4. La tripla $\mathbb{V} = (V, h, m)$ forma una mónada en la categoría $Comp$.

Demostración. Sea $\vartheta \in V^3X$; entonces

$$\begin{aligned} \pi_\phi \circ mX \circ VmX (\vartheta) &= \pi_{\pi_\phi} \circ VmX (\vartheta) = \pi_{\pi_\phi \circ mX} (\vartheta) = \vartheta (\pi_\phi \circ mX) = \\ &= \vartheta (\pi_{\pi_\phi}) = \pi_{\pi_{\pi_\phi}} (\vartheta) = \pi_{\pi_\phi} \circ mVX (\vartheta) = \pi_\phi \circ mX \circ mVX (\vartheta). \end{aligned}$$

Además si $\mu \in VX$

$$\begin{aligned} \pi_\phi \circ mX \circ hVX (\mu) &= \pi_{\pi_\phi} \circ hVX (\mu) = \pi_\phi (\mu) = \mu (\phi) = \mu (\pi_\phi \circ hX) = \\ &= \pi_{\pi_\phi \circ hX} (\mu) = \pi_{\pi_\phi} \circ VhX (\mu) = \pi_\phi \circ mX \circ VhX (\mu). \end{aligned}$$

Lo anterior se tiene para cada $\phi \in C(X)$, con lo que la proposición queda demostrada.

Dadas dos mónadas $\mathbb{T}=(T, \eta, \mu)$ y $\mathbb{T}'=(T', \eta', \mu')$, una transformación natural $\psi : T \rightarrow T'$ es llamada un morfismo de la mónada \mathbb{T} en la mónada \mathbb{T}' si

$$\psi \circ \eta = \eta' \quad y \quad \psi \circ \mu = \mu' \circ \psi T' \circ T \psi.$$

Si toda componente natural ψX de ψ es monomorfismo, entonces ψ es llamada una inmersión de la mónada \mathbb{T} en la mónada \mathbb{T}' .

Definición 3.5. Si $\mathbb{T} = (T, \eta, \mu)$ es una mónada en \mathcal{C} , una \mathbb{T} -álgebra es una pareja $\langle X, h \rangle$, donde $X \in |\mathcal{C}|$ (objeto del álgebra), y $h : TX \rightarrow X$ es un morfismo de \mathcal{C} (aplicación estructura del álgebra) que cumplen:

$$h \circ Th = h \circ \mu X, \quad y \quad h \circ \eta X = id_X.$$

Dadas dos álgebras $\langle X, h \rangle, \langle X', h' \rangle$ un morfismo $f : X \rightarrow X'$ en \mathcal{C} es llamada **morfismo de \mathbb{T} -álgebras** si

$$f \circ h = h' \circ Tf.$$

Si t_1, t_2 son números reales tales que $0 \leq t_1 \leq t_2$, entonces mediante $j_{t_1}^{t_2}$ denotamos la inmersión natural $j_{t_1}^{t_2} : I_{t_1} \rightarrow I_{t_2}$, donde $I_t = [-t, t]$.

Definición 3.6. Una mónada $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ es una mónada de **Lawson**, si para cada $t \geq 0$ existe una aplicación $\xi_t : FI_t \rightarrow I_t$ tal que la pareja (I_t, ξ_t) es una \mathbb{F} -álgebra, para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, con $0 \leq t_1 \leq t_2$, la inmersión $j_{t_1}^{t_2}$ es un morfismo de \mathbb{F} -álgebras y para cada $X \in Ob_{Comp}$ existe una familia de morfismos de \mathbb{F} -álgebras que separa puntos:

$$\{f_\alpha : (FX, \mu X) \rightarrow (I_{t(\alpha)}, \xi_{t(\alpha)}) \mid \alpha \in A\}.$$

Ejemplo 3.7. A continuación demostraremos que \mathbb{CL} es una mónada de Lawson. Como $I_t \in \text{Comp}$, entonces $CL(I_t) \in \text{Comp}$; definamos

$$\xi_t : CL(I_t) \rightarrow I_t; \quad \xi_t(A) = \inf \{a : a \in A\}, \quad \text{donde } A \in CL(I_t).$$

Sea $\mathcal{A} \in CL^2 I_t$ entonces

$$\begin{aligned} \xi_t \circ \mu I_t(\mathcal{A}) &= \xi_t(\mu I_t(\mathcal{A})) = \inf \{a : a \in \cup \mathcal{A}\} = \inf \{\{\inf \{a : a \in A\} : A \in \mathcal{A}\}\} = \\ &= \inf \{\{\xi_t(A) : A \in \mathcal{A}\}\} = \inf \{CL\xi_t(\mathcal{A})\} = \xi_t(CL\xi_t(\mathcal{A})) = \xi_t \circ CL\xi_t(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Además, si $t_0 \in I_t$ entonces $\xi_t \circ \eta I_t(t_0) = \xi_t(\eta I_t(t_0)) = \xi_t(\{t_0\}) = t_0 = id_{I_t}(t_0)$, con lo que se prueba que (I_t, ξ_t) es una \mathbb{CL} -álgebra.

Ahora bien, si $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ y $t_1 \leq t_2$, tenemos que probar que $j_{t_1}^{t_2}$ es un morfismo de \mathbb{CL} -álgebras.

Sea $A \in CLI_{t_1}$; entonces

$$\begin{aligned} j_{t_1}^{t_2} \circ \xi_{t_1}(A) &= j_{t_1}^{t_2}(\xi_{t_1}(A)) = j_{t_1}^{t_2}(\inf(A)) = \inf(A) = \inf(j_{t_1}^{t_2}(A)) = \\ &= \inf(CLj_{t_1}^{t_2}(A)) = \xi_{t_2}(CLj_{t_1}^{t_2}(A)) = \xi_{t_2} \circ CLj_{t_1}^{t_2}(A), \end{aligned}$$

por lo que obtenemos el resultado deseado.

Sean $A, B \in CL(X)$ tales que $A \neq B$; entonces existe $x \in A - B$ ó $x \in B - A$ en particular analizaremos el primer caso, el segundo es análogo; como $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, en particular existe una aplicación continua φ tal que

$$\varphi(x) = 0, \varphi(B) \subset \{1\};$$

entonces definimos $f : CL(X) \rightarrow I$ de la forma

$$f(W) = \xi \circ CL\varphi(W) : W \in CL(X),$$

donde $\xi : CL(I) \rightarrow I$ está definido anteriormente.

Sea $\mathcal{A} \in CL^2(X)$, entonces

$$\begin{aligned} f \circ \mu X(\mathcal{A}) &= f(\mu X(\mathcal{A})) = \xi \left(CL\varphi \left(\bigcup \mathcal{A} \right) \right) = \xi \left(\varphi \left(\bigcup \mathcal{A} \right) \right) \\ \xi \left(\varphi \left(\bigcup \mathcal{A} \right) \right) &= \xi \left(\{\xi(\varphi(A))\}_{A \in \mathcal{A}} \right) = \xi(\xi(CL\varphi(\mathcal{A}))) = \xi \circ CLf(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

con lo que concluimos que f es un morfismo de \mathbb{CL} -álgebras. Por definición se tiene

$$f(A) = 0 \text{ y } f(B) = 1$$

luego f separa puntos y \mathbb{CL} es una mónada de Lawson.

El siguiente teorema se encuentra probado en [8], y nos muestra el porqué \mathbb{V} es llamada una mónada universal.

Teorema 3.8. *Sea \mathbb{F} una mónada en Comp . Existe una inmersión $\iota : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{V}$ si y solamente si \mathbb{F} es una mónada de Lawson.*

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ADÁMEK J. & HERRLICH H. & STRECKER G. *Abstract and concrete categories*. A Wiley. Interscience Publication, 1
- [2] CAMARGO J. *Sobre la mónada de funcionales inexpandibles*. Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, 2002
- [3] EILENBERG S. and Moore J. *Adjoint functors and triples*. Illinois J. Mat., 9(1965) 381-389.
- [4] ENGELKING R. *Outline of general topology*. New York, Warszawa 1968.
- [5] GUSTAVO N. y RUBIANO O. *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia, departamento de matemáticas y estadística.
- [6] Mc. LANE, Saunders. *Categories for the working mathematician*. S990
- [7] MUNKRES J. *Topología*. 2ª edición. 2002
- [8] RADUL T. *Funtional Representations of Lawson Monads*. APCS, Kluwer academic publishers, (2000), 457-463.
- [9] RADUL T. "On strongly Lawson and I-Lawson monads," *Boletín de Matemáticas*, Nueva serie, Volumen VI N° 2 (1999), pp. 69-75.
- [10] RADUL T. and ZARICHNYI M. *monads in the category of compacta*, Uspekhi Mat, Naut 50(1995)N3.
- [11] TELEJAO A. and ZARICHNYI M. *Categorical Topology of compact Hausdorff Spaces*, Mathematical studies, monograph series, volumen 5, 1999.
- [12] WILLIARD S. *General topology*. Addison-Wesley 1970.