

NO GAUSSIANIDAD EN MODELOS CON  
RECALENTAMIENTO INHOMOGENEO.

VÍCTOR ALFONSO PULIDO SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

NO GAUSSIANIDAD EN MODELOS CON  
RECALENTAMIENTO INHOMOGÉNEO.

VÍCTOR ALFONSO PULIDO SÁNCHEZ<sup>1</sup>

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA<sup>1,2</sup>, PH.D.

<sup>1</sup>GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

<sup>2</sup>GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2012

*“Quizás el mundo no está creado. Quizás nada lo esté. Quizás todo ha sido, es y será siempre un reloj sin artífice ”.*  
Dr. Manhattan.

*“Los hechos que necesita un mentat no se depositan sobre él como se depositan los granos de polen sobre vuestras ropas cuando atravesáis un campo de flores, dijo Hayt. Uno debe elegir cuidadosamente su polen, examinarlo bajo una gran amplificación”.*  
(de “El mesías de Dune” de Frank Herbert).

*“¿cómo no reconocer la ventaja que nos lleva una rata, precisamente porque es rata y nada más?”*  
Emil Cioran.

*“La creencia en lo sobrenatural demuestra un fracaso de la imaginación”.*  
Edward Abbey.

# Contenido

<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2. Modelo cosmológico estándar (o de Big-Bang)</b>	<b>15</b>
<b>3. Problemas de la cosmología estándar</b>	<b>18</b>
3.1. Problema de horizonte . . . . .	18
3.2. Problema de planitud . . . . .	19
<b>4. Inflación</b>	<b>22</b>
<b>5. Recalentamiento</b>	<b>25</b>
<b>6. Suposición de universos separados</b>	<b>29</b>
<b>7. Descriptores estadísticos de una distribución de probabilidad</b>	<b>31</b>
<b>8. Formalismo <math>\delta N</math></b>	<b>35</b>
<b>9. El escenario del recalentamiento inhomogéneo</b>	<b>38</b>

9.1. El escenario . . . . .	38
9.2. No gaussianidad . . . . .	41
<b>10. Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>
<b>Apéndices</b>	<b>52</b>
<b>A. Pequeñas oscilaciones en un sistema ligado</b>	<b>53</b>
<b>B. Solución de las ecuaciones para el oscilador armónico amortiguado</b>	<b>54</b>
<b>C. Obtención de los correladores de dos y tres puntos para <math>\zeta</math> en el espacio de momento</b>	<b>57</b>

# Índice de figuras

3.1. <b>Problema de horizonte.</b> Evolución temporal del tamaño físico de la región comóvil correspondiente a nuestro actual Universo observable $d$ (línea delgada) y la del horizonte de partículas (línea gruesa). Hasta cierto tiempo (correspondiente al punto de intersección de las dos líneas), el horizonte de partículas era más pequeño que la región observable. Por lo tanto, resulta muy improbable que todas las regiones del Universo, desconectadas causalmente entre sí, se encontraran a prácticamente la misma temperatura. . . . .	20
3.2. <b>Evolución de <math>\Omega_k</math>.</b> Evolución de $\Omega_k$ en todas las épocas. Como se puede observar (en la siguiente sección se describirá con más detalle), inflación resuelve el problema de planitud debido a que durante este periodo $\Omega_k$ decrece exponencialmente hasta un valor muy cercano a cero. Por lo tanto, a partir de allí, asciende $\Omega_k$ hasta el valor que se observa hoy en día el cual está comprendido entre $-0,0133 < \Omega_k < 0,0084$ . . . . .	21
4.1. <b>Solución del problema de horizonte.</b> Se muestra la evolución temporal del horizonte de partículas (línea gruesa) considerando un $H$ constante durante inflación (aunque en general para resolver el problema de horizonte se requiere que durante inflación $H^{-1} \sim a^n$ , con $0 \leq n < 1$ ). Por consiguiente, se observa que hasta cierto tiempo, el horizonte de partículas es más grande que la región correspondiente a nuestro Universo observable, lo que implica que al comienzo del Big Bang (final de inflación), todas las regiones estaban causalmente conectadas. . . . .	23

5.1. <b>Inflatón oscilando en un potencial cuadrático.</b> El inflatón oscila alrededor del mínimo de su potencial, el cual es de forma cuadrática $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$ . Mientras va oscilando con amplitud decreciente, transfiere su energía a las partículas en las cual decae. . . . .	26
9.1. <b>Universo perturbado.</b> Esta figura representa un universo cerrado e inicialmente homogéneo (lado izquierdo) el cual después de inflarse, se convierte en un universo cerrado con irregularidades en su superficie (lado derecho). . . . .	39
9.2. <b>Decaimiento beta del neutrón.</b> El neutrón decae primeramente en un protón $p$ y en un bosón $W^-$ , que a su vez decae en un electrón $e^-$ y un antineutrino electrónico $\bar{\nu}_e$ . En el lado derecho, se muestra el diagrama efectivo del decaimiento, cuyo acoplamiento efectivo viene dado por la física del $W^-$ . . . . .	40
9.3. <b>Decaimiento del inflatón.</b> El inflatón $\phi$ decae en dos campos $q$ . Análogamente a lo expuesto en la figura 4, un campo escalar ligero $S$ es el que determina el acoplamiento efectivo del inflatón $\phi$ con los campos resultantes $q$ . . . . .	40
9.4. <b>Factor de escala al final de inflación en función de <math>\Gamma</math>.</b> Factor de expansión normalizado $g$ ( $g = at^{-1/2}$ , en donde $t$ es el tiempo al final de inflación) como función de $\Gamma/H$ después del recalentamiento, y que muestra que para un universo con un $\Gamma$ dado se tiene un monto de expansion particular para ese universo (el monto de expansión es función de $a$ ). Esta curva es obtenida después de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (9.2.9), (9.2.10) y (9.2.11) empezando con $\rho_r = 0$ .	43
B.1. <b>Oscilaciones amortiguadas.</b> La amplitud de las oscilaciones está modulada por la exponencial $e^{\frac{-b}{2m}t}$ , de manera que $A$ decrece con el tiempo.	56

# Resumen

**TÍTULO:** NO GAUSSIANIDAD EN MODELOS CON RECALENTAMIENTO INHOMOGÉNEO.

**AUTOR:** PULIDO SÁNCHEZ, Víctor Alfonso<sup>1</sup>.

**PALABRAS CLAVES:** Inflación, Recalentamiento, Inhomogéneo, Universos separados, Formalismo  $\delta N$ , No Gaussianidad.

**DESCRIPCIÓN:** En este trabajo se considera el escenario del recalentamiento inhomogéneo, el cual asume una razón de decaimiento  $\Gamma$  inhomogénea para el inflatón, cuyo origen corresponde a acoplamientos efectivos  $\lambda$  dependientes de campos escalares ligeros los cuales fluctúan en el espacio. De esta manera la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  es generada durante el recalentamiento, independientemente de la contribución debida al mecanismo inflacionario estándar. Por tanto en este escenario, son los campos escalares ligeros y no el inflatón, los responsables de la generación de estructura a gran escala, y el inflatón es relegado a encargarse solamente de producir la expansión acelerada. Utilizando el formalismo  $\delta N$  se hallan los niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  para modelos basados en este mecanismo, bajo la suposición de decaimiento repentino, y de esta manera se evalúan el espectro, biespectro y triespectro de  $\zeta$ . Se estudian las condiciones bajo las cuales los niveles de no gaussianidad encontrados son lo suficientemente grandes como para ser detectados en los experimentos satelitales que miden la temperatura de la radiación cósmica de fondo y por las observaciones de estructuras a gran escala.

---

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

# Abstract

**TITLE:** NO-GAUSSIANITY FOR MODELS BASE ON AN IN-HOMOGENEOUS REHEATING.

**AUTHOR:** PULIDO SÁNCHEZ, Víctor Alfonso<sup>2</sup>.

**KEYWORDS:** Inflation, Reheating, Inhomogeneous, Separate Universes,  $\delta N$  formula, No Gaussianity.

**DESCRIPTION:** In this work, we consider the inhomogeneous reheating scenario, which assume an inhomogeneous decay rate for the inflaton field, because the effective couplings of the inflaton fluctuate in space. The primordial curvature perturbation  $\zeta$  is generated during reheating. In this scenario, light scalar fields are the responsables of the structure generation, because the decay rate of the inflation is a function of this fields, so the inflaton field only produce an accelerate expansion. Using the  $\delta N$  formula we find the levels of no-gaussianity  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  for models base on this mechanism, assuming suddenly decay of the inflaton. We study the conditions which the levels of no-gaussianity are big enough for been detected in the observations of the CMB.

---

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

# 1

## Introducción

*“Nos acercamos a una explicación de la creación del universo compatible con las leyes de la física, pero estamos lejos de poder contestar el origen de esas leyes”. Alan Guth (1979).*

En 1981 el físico estadounidense Alan Guth, propuso la inflación cósmica como solución a los problemas de la cosmología estándar. Principalmente el problema de horizonte y el problema de planitud que se presentaban con la teoría clásica del big bang, encontraron solución con la suposición de que el Universo en su etapa más temprana experimentó un período de rápida expansión acelerada [1, 2, 3]. Para generar este período inflacionario se postuló la existencia de un campo escalar que actúa como energía de vacío generando una presión negativa, el cual al final de inflación comienza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial efectivo, continuando así con el decaimiento de éste en partículas relativistas, fluido que en el contexto de la cosmología se denomina radiación. Estas partículas interactúan entre ellas y el sistema llega a un estado de equilibrio térmico a una cierta temperatura recalentando al Universo, dando comienzo así a la época dominada por la radiación o el llamado “Big Bang Caliente” [1, 2].

Este período durante el cual el inflatón oscila, se le conoce como la etapa de recalentamiento, y su estudio permitirá entender cómo fue la generación de estructuras en el Universo temprano. Este período intermedio entre inflación y big bang caliente se aborda actualmente desde el punto de vista no perturbativo de la producción mecanico-cuántica de partículas en el fondo clásico del campo del inflatón [4]. Sin este proceso, la inflación habría dejado al universo sin presencia de materia, pero dado que se desconoce la naturaleza del inflatón, y por tanto su acoplamiento con los campos a los cuales decae (partículas del modelo estándar), el recalentamiento permanece siendo pobremente

comprendido.

Por otro lado, teniendo en cuenta las observaciones de la Radiación C3smica de Fondo (RCF), realizadas en primera instancia por el sat3elite COBE [5] y luego (y con mayor resoluci3n) por el WMAP [6], se observa un espectro de temperaturas ligeramente inhomog3neo, lo que implica que se debe considerar un mecanismo en el cual se generen perturbaciones primordiales en la curvatura. Por lo tanto, se puede considerar tres posibles escenarios, el escenario est3ndar el cual establece que las perturbaciones son generadas durante inflaci3n [2], el escenario del curvat3n [7, 8, 9, 10, 11], en donde la perturbaciones se producen despu3s del recalentamiento, y el escenario que se va a considerar en este trabajo, en el que las perturbaciones se generan durante el recalentamiento (recalentamiento inhomog3neo [12]).

El escenario del recalentamiento inhomog3neo establece que la inflaci3n no termina en todos los lugares al mismo tiempo, y para ello se asume que la raz3n de decaimiento del inflat3n  $\Gamma$  var3a con la posici3n. Una dependencia funcional de  $\Gamma$  con un campo escalar ligero  $s$ , garantiza que el inflat3n decaiga localmente dado que  $s$  fluct3a en el espacio. Adem3s, de acuerdo con muchos trabajos [10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19], los campos escalares ligeros, que se definen como aqu3llos cuyas masas  $m_s$  son mucho m3s peque1as que el par3metro de Hubble  $H$  ( $m_s \ll H$ ), merecen atenci3n como posibles candidatos que expliquen la generaci3n de fluctuaciones en la densidad primordial. A diferencia del escenario est3ndar (y al igual que en el escenario del curvat3n), las perturbaciones son generadas por el campo escalar ligero  $s$ , relegando al inflat3n a ser solamente responsable de producir la expansi3n acelerada.

La perturbaci3n primordial en la curvatura  $\zeta$ , la cual v3a el efecto Sach-Wolf [20] se relaciona con el contraste de la temperatura de la RCF  $\delta T/T$ , puede ser descrita por una funci3n de distribuci3n de probabilidad  $f(\zeta)$ . Por consiguiente, en toda clase de cosmolog3a es importante considerar los correladores de  $n$  puntos que describen el comportamiento de dicha funci3n de distribuci3n [2]. Tales correladores son descritos por funciones espectrales, las cuales a su vez est3n parametrizadas por ciertos par3metros, que act3an como descriptores estad3sticos de  $f(\zeta)$ . Por ejemplo, considerando los correladores de dos, tres y cuatro puntos, cuyas funciones espectrales son el espectro, biespectro y triespectro respectivamente, se pueden hallar los par3metros  $n_\zeta$ ,  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$ , que parametrizan al espectro, biespectro y triespectro respectivamente. Como se ver3 m3s adelante, los par3metros  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son los llamados niveles de no gaussianidad.

Por lo tanto, como objetivo principal del trabajo, se calculan los niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  de la perturbaci3n primordial en la curvatura para modelos

basados en el escenario del recalentamiento inhomogéneo [18, 19]. Para ello, teniendo en cuenta que se trabaja en escalas de superhorizonte, se hace uso del formalismo  $\delta N$  [2, 16, 21, 22, 23], método alternativo a la teoría de perturbaciones cosmológicas (aunque llegando a los mismos resultados), para calcular el espectro, biespectro y triespectro de  $\zeta$ . Los niveles de no-gaussianidad encontrados son lo suficientemente grandes para ser detectados en las observaciones de la RCF, y esto servirá como factor discriminante para las diferentes realizaciones de este escenario.

## 2

# Modelo cosmológico estándar (o de Big-Bang)

El principio cosmológico establece que para grandes escalas (mayores a 100 Mpc) el Universo luce homogéneo e isótropo, lo cual implica que se pueda describir su geometría por medio de la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW) [24, 25, 26], cuyo elemento de línea en coordenadas esféricas es de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (2.0.1)$$

siendo  $k$  el parámetro de curvatura el cual es  $+1$  para una curvatura positiva (universo cerrado),  $0$  para un universo plano y  $-1$  para una curvatura negativa (universo abierto). También se introduce el factor de escala  $a(t)$  que aumenta con el tiempo cósmico  $t$  indicando la expansión del universo.

Por otro lado, la razón de expansión del universo viene caracterizada por el parámetro de Hubble, el cual es  $H = \dot{a}/a$ , en donde  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ . El parámetro de Hubble  $H$  es positivo para un universo en expansión y negativo para un universo colapsante.

Dado el principio cosmológico, es conveniente modelar al Universo como un fluido perfecto cuyo tensor momento-energía es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.0.2)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido,  $p$  la presión y  $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$  es

la cuadrivelocidad de éste, en un sistema de referencia co-móvil, localmente inercial y cartesiano [27]. En general  $u_\mu u^\mu = -1$ .

Por otro lado, aplicando la métrica de FRW a las ecuaciones de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.0.3)$$

en donde  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci y  $G$  la constante de la gravitación universal, se obtiene de la componente 0-0 de éstas

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.0.4)$$

la cual se conoce como la ecuación de Friedmann. Ésta brinda información sobre la evolución dinámica del Universo. Además, vía conservación local del cuádrimomento  $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ , se llega a la ecuación de continuidad [28]

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.0.5)$$

la cual puede ser fácilmente integrada y cuya solución es

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.0.6)$$

en donde  $\omega$  es el parámetro de estado,  $\omega \equiv p/\rho$ .

Este resultado, combinado con la ecuación de Friedmann (4), permite conocer la evolución temporal del factor de escala la cual está dada por

$$a(t) \propto t^{2/3(1+\omega)}, \quad \omega \neq -1 \quad (2.0.7)$$

o

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad \omega = -1. \quad (2.0.8)$$

Si se desprecia la curvatura, con lo que  $k = 0$  (universo plano), se tienen las siguientes soluciones para tres casos especiales ( $\omega = 1/3, \omega = 0, \omega = -1$ ) [1]:

- $p = \rho/3$ , materia relativista (radiación)  $\left\{ \begin{array}{l} \rho \propto a^{-4}, \\ a \propto t^{1/2}. \end{array} \right.$

- $p = 0$ , materia no relativista  $\begin{cases} \rho \propto a^{-3}, \\ a \propto t^{2/3}. \end{cases}$
- $p = -\rho$  energía de vacío  $\begin{cases} \rho = \text{constante}, \\ a \propto e^{Ht}. \end{cases}$

# 3

## Problemas de la cosmología estándar

### 3.1. Problema de horizonte

Primeramente, para abordar este problema, se debe definir el horizonte de partículas comóvil,  $\tau$ , como la máxima distancia a la cual un fotón puede viajar entre el tiempo 0 y un tiempo  $t$

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} = \int_0^a d \ln a \frac{1}{aH}, \quad (3.1.1)$$

en donde  $(aH)^{-1}$  es el radio comóvil de Hubble.

Para un universo dominado por un fluido perfecto con parámetro de estado  $\omega$ , se tiene

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (3.1.2)$$

Entonces se tiene que durante la expansión convencional del universo en el modelo cosmológico estándar o de Big Bang, la fracción del Universo en contacto causal crece con el tiempo debido a que el radio comóvil de Hubble también lo hace [2]. Por lo tanto

$$\tau \sim a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}. \quad (3.1.3)$$

Ahora, para un Universo dominado por radiación (RD) y uno dominado por materia no-relativista (MD), se encuentra que

$$\tau = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \sim a, \quad RD. \quad (3.1.4)$$

$$\tau = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \sim a^{1/2}, \quad MD. \quad (3.1.5)$$

Lo anterior indica que el horizonte comóvil crece con el tiempo, lo cual implica que las escalas comóviles que entran al horizonte hoy en día han estado fuera del horizonte en el momento de la generación de la RCF. Sin embargo, la RCF se muestra casi completamente homogénea,  $\delta T/T \sim 10^{-5}$  [29], lo cual señala que el universo fue extremadamente homogéneo en el momento de la última dispersión a escalas que abarcan muchas regiones, alrededor de  $10^5$ , que no estaban conectadas causalmente (figura 1). Por consiguiente, resulta bastante improbable que todas estas regiones se encontraran a prácticamente la misma temperatura. Esto implica que con el sólo hecho de medir en dos direcciones diferentes, con por ejemplo 1,72 grados de diferencia entre una y otra, se deberían observar diferencias considerables en la temperatura de la RCF.

## 3.2. Problema de planitud

Para empezar, se considera la ecuación de Friedmann de la forma

$$\Omega(a) - 1 = \frac{k}{(aH)^2} = -\Omega_k, \quad (3.2.1)$$

en donde  $\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{crit}(a)}$  y  $\rho_{crit}(a) = 3M_p^2 H^2$ , siendo  $M_p = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}}$  la masa reducida de Planck.

De lo anterior se deduce que el parámetro de curvatura  $\Omega(a)$  debe alejarse de la unidad con la expansión del universo, dado que el radio comóvil de Hubble  $(aH)^{-1}$  crece con el tiempo en el modelo cosmológico estándar. Sin embargo, las observaciones muestran que actualmente  $-0,0133 < \Omega_k < 0,0084$  a  $2\sigma$  (figura 2) [30], y esto indica

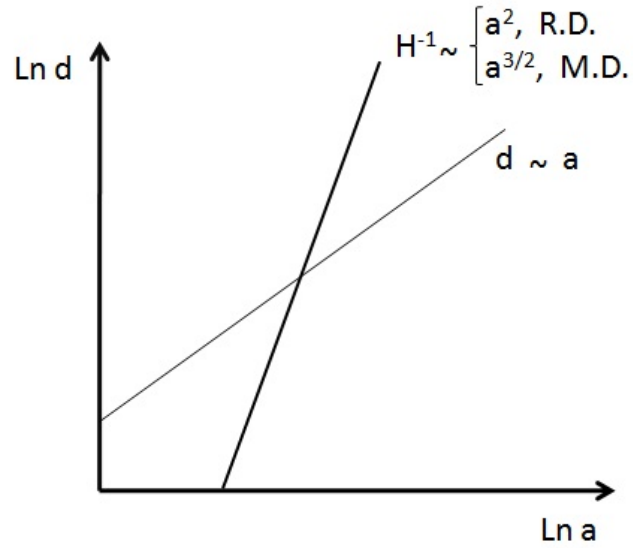


Figura 3.1: **Problema de horizonte.** Evolución temporal del tamaño físico de la región comóvil correspondiente a nuestro actual Universo observable  $d$  (línea delgada) y la del horizonte de partículas (línea gruesa). Hasta cierto tiempo (correspondiente al punto de intersección de las dos líneas), el horizonte de partículas era más pequeño que la región observable. Por lo tanto, resulta muy improbable que todas las regiones del Universo, desconectadas causalmente entre sí, se encontraran a prácticamente la misma temperatura.

que se requiere una escogencia extremadamente precisa de las condiciones iniciales de manera que  $\Omega$  tuviera un valor extremadamente cercano a uno en el universo temprano. Esto implica por ejemplo, que en la época de nucleosíntesis  $|\Omega - 1| \approx 10^{-16}$  y en la época de Planck  $|\Omega - 1| \approx 10^{-64}$  [31].

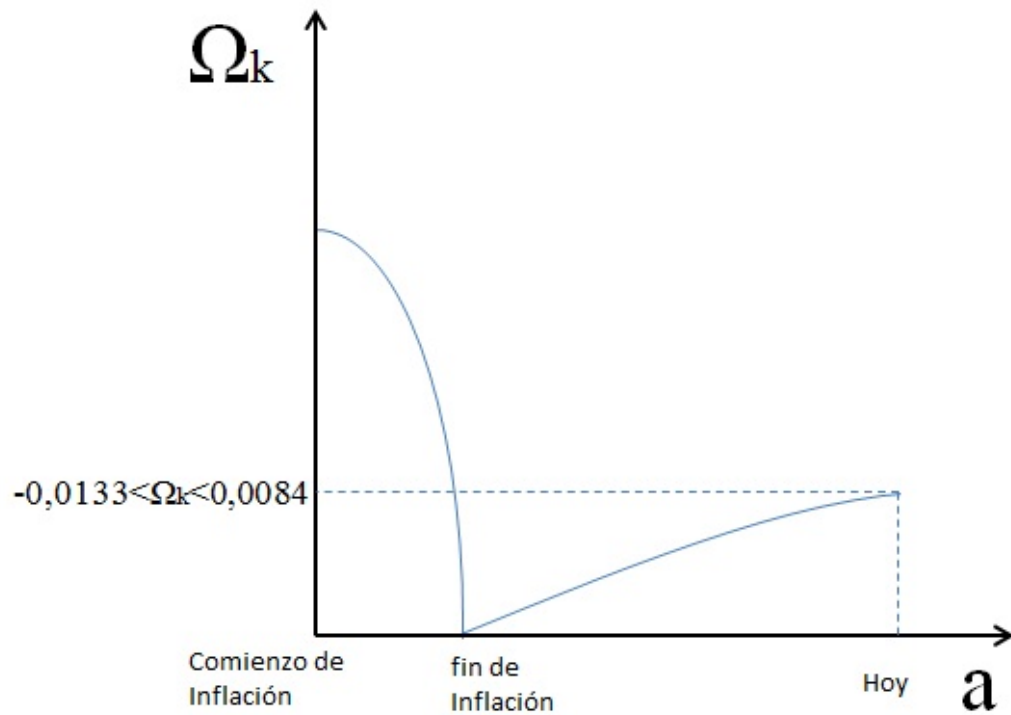


Figura 3.2: **Evolución de  $\Omega_k$ .** Evolución de  $\Omega_k$  en todas las épocas. Como se puede observar (en la siguiente sección se describirá con más detalle), inflación resuelve el problema de planitud debido a que durante este periodo  $\Omega_k$  decrece exponencialmente hasta un valor muy cercano a cero. Por lo tanto, a partir de allí, asciende  $\Omega_k$  hasta el valor que se observa hoy en día el cual está comprendido entre  $-0,0133 < \Omega_k < 0,0084$ .

# 4

## Inflación

El problema de planitud puede resolverse de manera sencilla asumiendo que existe un período en la evolución del Universo en que el radio comóvil de Hubble decrece lo suficiente [2, 3]. Por tanto, en virtud a las expresiones (4) y (5) de la sección 3:

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1}}{a} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \Rightarrow \rho + 3p < 0. \quad (4.0.1)$$

Por otro lado, particularmente para el problema de horizonte, un periodo de inflación cósmica (rápida expansión del universo), permite una conexión causal entre las aproximadamente  $10^5$  regiones anteriormente mencionadas (figura 3).

Para medir el monto de inflación entre un tiempo inicial  $t_{inicial}$  y un tiempo final  $t_{final}$ , se hace uso de una cantidad llamada el número de *e-folds*  $N$ , la cual se define como

$$N(t) = \ln \left( \frac{a(t_{final})}{a(t_{inicial})} \right). \quad (4.0.2)$$

No basta simplemente establecer que hubo en el universo temprano un período de expansión acelerada; para que Inflación resuelva los problemas de la cosmología estándar es necesario que el monto de inflación  $N$  sea mínimo de 60 *e-folds* [2].

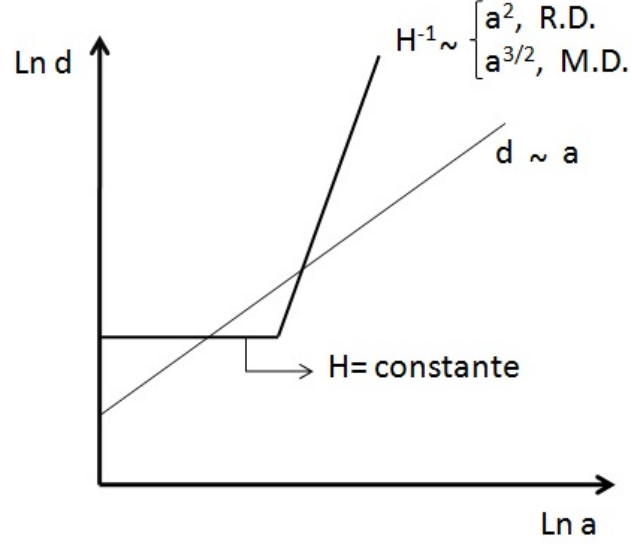


Figura 4.1: **Solución del problema de horizonte.** Se muestra la evolución temporal del horizonte de partículas (línea gruesa) considerando un  $H$  constante durante inflación (aunque en general para resolver el problema de horizonte se requiere que durante inflación  $H^{-1} \sim a^n$ , con  $0 \leq n < 1$ ). Por consiguiente, se observa que hasta cierto tiempo, el horizonte de partículas es más grande que la región correspondiente a nuestro Universo observable, lo que implica que al comienzo del Big Bang (final de inflación), todas las regiones estaban causalmente conectadas.

Considerando lo anteriormente expuesto, un horizonte comóvil decreciente y una expansión acelerada del Universo requiere una presión negativa. Por consiguiente se considera un universo dominado por un sólo campo escalar  $\phi$ , el inflatón, que actúa como energía de vacío generando en el universo temprano una expansión acelerada [2].

Para probar esto, se considera la acción que describe la dinámica de un campo escalar acoplado de forma mínima a la gravedad, la cual es [1, 2]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (4.0.3)$$

en donde  $V(\phi)$  es el potencial asociado al campo escalar y  $g$  es el determinante de la métrica  $g_{\mu\nu}$ . A su vez, el tensor momento-energía para un campo escalar es:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (4.0.4)$$

Asumiendo la métrica de FRW (1) para  $g_{\mu\nu}$  con  $k = 0$  y tomando el caso de un campo homogéneo  $\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t)$ , el tensor de momento-energía toma la forma asociada a un fluido perfecto (2), con densidad de energía y presión

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (4.0.5)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (4.0.6)$$

De acá se observa que el inflatón (y en general cualquier campo escalar), puede generar una presión negativa ( $\omega_\phi < 0$ ), y la consecuente expansión acelerada ( $\omega_\phi < -1/3$ ), si la energía potencial  $V$  domina sobre la energía cinética  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$  [1, 2].

Además, a partir de la acción en la ecuación 4.0.3, la dinámica de un campo escalar (homogéneo) está determinada por la ecuación de movimiento [1, 2]

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad \text{con } V'(\phi) = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (4.0.7)$$

Finalmente, para este caso, la ecuación de Friedmann toma la forma

$$H^2 = \frac{1}{3M_p^2} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (4.0.8)$$

# 5

## Recalentamiento

Al terminar inflación, el inflatón  $\phi$  comienza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial, dando comienzo al proceso en el cual la energía almacenada en éste es convertida en partículas convencionales, y por ende dando inicio al Big Bang caliente. Este proceso se conoce con el nombre de recalentamiento [1, 2, 4], y su fin señala el inicio de la época dominada por la radiación.

De acuerdo a lo expuesto en el apéndice A, se asume un potencial cuadrático de la forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2(x, t), \quad (5.0.1)$$

en donde  $m_\phi$  es la masa del inflatón  $\phi$ , y se puede observar que es la ecuación de movimiento para este campo (ecuación (4.0.7)), la cual es análoga a la ecuación que describe un oscilador armónico amortiguado (apéndice B). Por lo tanto se tiene:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2\phi = 0. \quad (5.0.2)$$

Durante inflación,  $H$  varía y esta variación implica que se presenta un comportamiento análogo al comportamiento del oscilador, asumiendo que dada la variación de  $H$ , el inflatón pasa por los tres regímenes: Sobreamortiguamiento, amortiguamiento crítico y subamortiguamiento. De esta manera, se presenta primero un comportamiento sobreamortiguado en donde  $m_\phi < 3H$ , en el cual no se presentan oscilaciones, que es lo que ocurre durante inflación cuando la energía se mantiene almacenada en el inflatón  $\phi$ . Seguidamente  $H$  adquiere un valor del orden de la masa del inflatón generando un

comportamiento críticamente amortiguado  $m_\phi = 3H$  y es cuando el inflatón empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial (figura 4). Finalmente se da el comportamiento subamortiguado  $m_\phi > 3H$  cuando el inflatón oscilante transfiere su energía a las partículas a las cuales éste decae, lo que se manifiesta en un decrecimiento de la amplitud de sus oscilaciones.

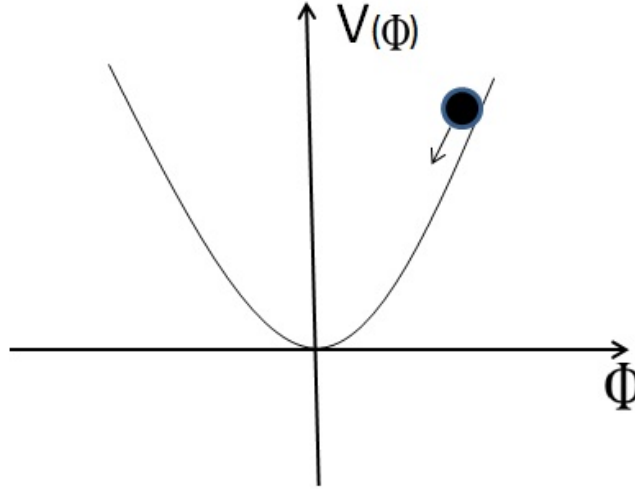


Figura 5.1: **Inflatón oscilando en un potencial cuadrático.** El inflatón oscila alrededor del mínimo de su potencial, el cual es de forma cuadrática  $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$ . Mientras va oscilando con amplitud decreciente, transfiere su energía a las partículas en las cual decae.

Por otro lado, asumiendo que  $H$  decrece muy lentamente, la solución general de la ecuación (5.0.2) es:

$$\phi(t) = e^{-\frac{3}{2}Ht}(A_1 e^{if_\phi t} + A_2 e^{-if_\phi t}), \quad (5.0.3)$$

en donde  $f_\phi = m_\phi^2 - \frac{9}{4}H^2$ , y corresponde a la frecuencia de las oscilaciones del inflatón. Considerando el caso  $m_\phi \gg H$ , lo que implica  $f_\phi \approx m_\phi$  tenemos como período de las oscilaciones  $T = \frac{2\pi}{m_\phi}$ . Debido a que  $m_\phi \gg H$ , el tiempo característico de la expansión  $H^{-1}$  es mucho mayor que el período de las oscilaciones. Como ocurren muchas oscilaciones en un monto de expansión dado, conviene trabajar con los valores promedios para los cálculos de la energía, implicando que el valor promedio del potencial  $\langle V(\phi) \rangle$

es igual al promedio de la energía cinética asociado al término  $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$  (esto asumiendo que el potencial es cuadrático). De esta manera, de acuerdo con la ecuación (4.0.6), la presión promedio generada por el inflatón oscilante es igual a cero [32], lo que ocurre con el caso de la materia ordinaria (no relativista). Entonces

$$\frac{d\overline{\rho}_\phi}{dt} + 3H\overline{\rho}_\phi = 0, \quad (5.0.4)$$

en donde las barras indican cantidades promedio. El acoplamiento del inflatón con otros campos conduce al decaimiento de su energía, con lo cual se tiene una ecuación de continuidad modificada [2]

$$\frac{d\overline{\rho}_\phi}{dt} + (3H + \Gamma_\phi)\overline{\rho}_\phi = 0, \quad (5.0.5)$$

en donde  $\Gamma_\phi$  es la razón de decaimiento del inflatón.

El valor esperado de  $\phi$ ,  $\langle \phi \rangle = \sigma$ , cuando empieza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial, genera un campo escalar clásico  $\sigma \sim m_\phi$  (siendo  $m_\phi$  la masa efectiva del inflatón) [33]. Posteriormente, el campo  $\phi$  puede decaer en bosones  $\chi$  y en fermiones  $\psi$ , debido a los términos de interacción (que se incluyen en el Lagrangiano del inflatón)  $\frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2$  y  $-h\bar{\psi}\psi\phi$  respectivamente. En estas expresiones,  $g$  y  $h$  corresponden a las constante de acoplamiento [34].

Por lo tanto, la razón del decrecimiento de la energía de las oscilaciones coincide con la razón de decaimiento de los inflatones (partículas escalares). Por lo tanto, las razones de decaimiento de los procesos  $\phi \rightarrow \chi\chi$  y  $\phi \rightarrow \psi\psi$  (para  $m_\phi \gg 2m_\chi, 2m_\psi$ ) están dadas por [4, 33]

$$\Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) = \frac{g^4\sigma^2}{8\pi m_\phi}, \quad (5.0.6)$$

$$\Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi) = \frac{h^2 m_\phi}{8\pi}. \quad (5.0.7)$$

Por otro lado, considerando la ecuación de Friedmann con  $k = 0$ ,

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_p^2}, \quad (5.0.8)$$

y derivando ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo se obtiene

$$2H\dot{H} = \frac{\dot{\rho}}{3M_p^2}. \quad (5.0.9)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad (2.0.5), y asumiendo que durante el recalentamiento el inflatón se comporta como materia no relativista, para la cual la presión  $p$  generada es igual a cero, se obtiene

$$\dot{H} = \frac{-\rho}{2M_p^2}, \quad (5.0.10)$$

lo que implica que  $H$  decrece con el tiempo durante el recalentamiento (esto debido a que la densidad de energía  $\rho$  siempre se asume como positiva).

El recalentamiento se completa cuando la razón de expansión del Universo, dada por el parámetro de Hubble  $H = \sqrt{\frac{\rho}{3M_p^2}}$ , se vuelve más pequeña que la razón de decaimiento total  $\Gamma = \Gamma(\phi \rightarrow \chi\chi) + \Gamma(\phi \rightarrow \psi\psi)$  [33]. Por consiguiente, considerando la expresión que relaciona la temperatura con el tiempo cósmico  $t$  [2]

$$T^4 = \frac{90Mp^2}{4t^2\pi^2g_*}, \quad (5.0.11)$$

y tomando en cuenta que  $t \sim 1/\Gamma$ , la temperatura de recalentamiento puede ser estimada como  $T_r \simeq 0,1\sqrt{\Gamma M_p}$  [33] (siendo  $g_*$  los grados de libertad del fluido que se está analizando, el cual en este caso, es un fluido conformado por todas las partículas del modelo estándar para el cual  $g_* = 106,75$  [2]).

## 6

# Suposición de universos separados

Después de suavizar <sup>1</sup> a una escala específica  $R$ , se asume que los gradientes espaciales, del orden de  $k/a$ , son despreciables [2]. Debido a que se escoge una escala de suavizado mucho más grande que el horizonte de partículas ( $R \gg aH$ ), y a que las escalas relevantes en cosmología son mucho más pequeñas que  $aH$ , podemos asumir que el Universo en cada punto evoluciona como un universo de FRW (homogéneo e isótropo) [2].

Utilizando la suposición de universos separados, la cual consiste en que a escalas de superhorizonte el Universo observable puede ser visto como una colección de universos separados de FRW, que evolucionan con un parámetro  $a$  particular para cada uno de estos universos [2], se puede estudiar un universo perturbado (a escala de superhorizonte) sin necesidad de usar teoría de perturbaciones cosmológicas. Por lo tanto, resulta una buena aproximación establecer que el parámetro de expansión  $a$  dependa de la posición, y por consiguiente, se puede describir la métrica de la forma:

$$g_{ij} = a^2(\mathbf{x}, t)\gamma_{ij}(\mathbf{x}), \quad (6.0.1)$$

en donde:

$$a(\mathbf{x}, t) \equiv a(t)e^{\zeta(\mathbf{x}, t)}, \quad \gamma_{ij}(\mathbf{x}) \equiv e^{h_{ij}(\mathbf{x})}. \quad (6.0.2)$$

Se define  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  como la perturbación primordial en la curvatura, exigiendo sola-

---

<sup>1</sup>En un punto dado, una cantidad suavizada es el promedio espacial de la cantidad original, en una esfera comóvil de radio  $aR$ .

mente que el tensor momento-energía y el tensor métrico sean suavizados a alguna escala  $R$ , que sea mucho mayor que el horizonte de partículas, y además se asume un folio (superficie de tiempo constante) de densidad de energía uniforme.

Escogiendo un hilo comóvil, de tal manera que los observadores se muevan con la expansión, tenemos  $V_{físico} = \sqrt{-g}V_{comóvil}$ , siendo  $g = \det(g_{\mu\nu})$ . Entonces

$$V_{físico} = a^3(\mathbf{x}, t) \sqrt{\det(\gamma_{ij}(\mathbf{x}))} V_{comóvil}. \quad (6.0.3)$$

Para que  $a$  pueda ser identificado con el factor de expansión del universo, se debe exigir que  $\det(\gamma_{ij}(\mathbf{x})) = 1$ . Dada esta condición y además las definiciones (6.0.2), se concluye que  $h_{ij}(\mathbf{x})$  debe ser una matriz sin traza.

Por otro lado, considerando la ecuación de continuidad modificada

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}, t) + 3 \frac{\dot{a}(\mathbf{x}, t)}{a(\mathbf{x}, t)} (\rho(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (6.0.4)$$

de acuerdo con la definición de  $\zeta$  dada en la ecuación (6.0.2), la condición adiabática (que establece que la presión  $p$  sea una función única de la densidad de energía  $\rho$  [2]) y escogiendo un folio de densidad de energía uniforme ( $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(t)$ ), se tiene que

$$\dot{\rho}(t) + 3 \left( \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + \dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) \right) (\rho(t) + p(t)) = 0; \quad (6.0.5)$$

implicando que  $\dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) = \dot{\zeta}(t)$ . Dado que  $\zeta$  es una perturbación, debe depender de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$ , y esto requiere que  $\dot{\zeta}(\mathbf{x}, t) = \dot{\zeta}(t) = 0$ . Por lo tanto, la perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$  es una cantidad conservada.

# 7

## Descriptores estadísticos de una distribución de probabilidad

La perturbación primordial en la curvatura  $\zeta$ , al igual que el contraste en la temperatura de la RCF,  $\delta T/T$ , son ejemplos de funciones cosmológicas del espacio y el tiempo que son descritas por funciones de distribución de probabilidad [35].

En particular, para  $\zeta$  se tiene la función de distribución de probabilidad  $f(\zeta)$ , siendo  $m_\zeta(n)$  los momentos de la distribución. Entonces para una  $f(\zeta)$  dada hay un infinito número de momentos que son descriptores estadísticos de  $\zeta$  [35]:

$$\text{El valor promedio } m_\zeta(1) = \int \zeta f(\zeta) d\zeta, \quad (7.0.1)$$

$$\text{la varianza } m_\zeta(2) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^2 f(\zeta) d\zeta, \quad (7.0.2)$$

$$\text{el skewness } m_\zeta(3) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^3 f(\zeta) d\zeta, \quad (7.0.3)$$

$$\text{la curtosis } m_\zeta(4) = \int (\zeta - \langle \zeta \rangle)^4 f(\zeta) d\zeta, \quad (7.0.4)$$

. . . y así sucesivamente.

Para que una distribución sea Gaussiana es necesario que todos los momentos impares con  $n \geq 3$  sean cero, además que todos los momentos pares con  $n \geq 4$  sean expresados como potencias de la varianza. Las únicas cantidades requeridas para reproducir una función gaussiana son, entonces el valor promedio y la varianza,

$$f_{gauss}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_\zeta(2)}} \exp \left[ -(\zeta - m_\zeta(1))^2 / 2m_\zeta(2) \right]. \quad (7.0.5)$$

Las desviaciones de la función exactamente gaussiana se generan a partir de momentos impares con  $n \geq 3$  diferentes de cero, en cuyo caso la función de distribución de probabilidad no sería exactamente simétrica alrededor del valor promedio, o a partir de momentos pares con  $n \geq 4$ , diferentes de potencias de la varianza, en cuyo caso la función seguiría siendo simétrica mas no-gaussiana [36].

Trabajar en espacio de momentos es muy útil en cosmología, ya que los modos asociados con las fluctuaciones cuánticas de campos escalares durante la inflación pasan a ser clásicos una vez ellos salen del horizonte [2, 37, 38]. Lo anterior también se aplica para  $\zeta$ , que es una cantidad conservada fuera del horizonte si la condición adiabática se satisface. Por consiguiente, los momentos de la función de distribución tienen una conexión directa con las funciones de correlación para los modos de Fourier, expresados como

$$\zeta(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \zeta(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (7.0.6)$$

Los correladores de n-puntos de  $\zeta_{\mathbf{k}}$  son generalmente definidos en términos de funciones espectrales de los vectores de onda involucrados:

$$\text{Correlador de dos puntos } \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) P_\zeta(k), \quad (7.0.7)$$

$$\text{correlador de tres puntos } \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (7.0.8)$$

$$\text{correlador de cuatro puntos } \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle \equiv (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (7.0.9)$$

...y así sucesivamente.

Las cantidades  $P_\zeta(k)$ ,  $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$  y  $T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  son conocidas como el espectro, biespectro y triespectro respectivamente. Los momentos de la distribución son entonces escritos como integrales de momento de las funciones espectrales para los modos  $\zeta_{\mathbf{k}}$ :

$$m_\zeta(2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_\zeta(k), \quad (7.0.10)$$

$$m_\zeta(3) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2}{(2\pi)^6} B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (7.0.11)$$

$$m_\zeta(4) = \int \frac{d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3}{(2\pi)^9} T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (7.0.12)$$

...y así sucesivamente.

En virtud al efecto Sach-Wolf [20] (el cual establece que  $\delta T/T = -\frac{1}{5}\zeta$  a primer orden), se pueden estudiar las propiedades estadísticas de la  $\delta T/T$  observada a través de funciones espectrales asociadas con la perturbación en la curvatura  $\zeta$ :

$$\text{valor promedio de } \delta T/T = 0 \rightarrow \text{valor promedio de } \zeta = 0, \quad (7.0.13)$$

$$\text{varianza: } m_{\delta T/T}(2) \rightarrow \text{espectro: } P_\zeta(k), \quad (7.0.14)$$

$$\text{skewness: } m_{\delta T/T}(3) \rightarrow \text{biespectro: } B_\zeta(k_1, k_2, k_3), \quad (7.0.15)$$

$$\text{curtosis: } m_{\delta T/T}(4) \rightarrow \text{triespectro: } T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4), \quad (7.0.16)$$

... y así sucesivamente.

Finalmente, el espectro es parametrizado en términos de una amplitud  $A_\zeta$  y un índice espectral  $n_\zeta$  el cual mide la desviación con respecto a un espectro invariante de escala [2]

$$P_\zeta = \frac{2\pi^2}{k^3} A_\zeta^2 \left( \frac{k}{aH} \right)^{n_\zeta - 1}. \quad (7.0.17)$$

Así mismo, el biespectro  $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$  y el triespectro  $T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$  son parametrizados en términos de productos del espectro  $P_\zeta$ , y las cantidades  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  respectivamente [39, 40]:

$$B_{\zeta}(k_1, k_2, k_3) \equiv \frac{6}{5} f_{NL} \left[ \frac{2\pi^2}{k_1^3} P_{\zeta}(k_1) \frac{2\pi^2}{k_2^3} P_{\zeta}(k_2) + \text{permutaciones c\u00edclicas} \right] \quad (7.0.18)$$

$$T_{\zeta}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \equiv \frac{1}{2} \tau_{NL} [P_{\zeta}(k_1) P_{\zeta}(k_2) P_{\zeta}(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4|) + \text{permutaciones c\u00edclicas}] \quad (7.0.19)$$

en donde  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son los llamados niveles de no-gaussianidad. Los par\u00e1metros  $n_{\zeta}$ ,  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  son los descriptores estad\u00edsticos que discriminan entre los diferentes modelos para el origen de la estructura a gran escala en el Universo observable.

Finalmente cabe mencionar que los valores observados para estas cantidades, los cuales los modelos deben predecir, son:  $A_{\zeta} = (4,957 \pm 0,094) \times 10^{-5}$  [29],  $n_{\zeta} = 0,960 \pm 0,014$  [30],  $-10 < f_{NL} < 74$  a  $2\sigma$  [30] y  $-0,6 < \tau_{NL}/10^4 < 3,3$  a  $2\sigma$  [41].

# 8

## Formalismo $\delta N$

De acuerdo con la definición del número de *e-folds*,

$$N(t_1, t_2) = \ln \left( \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right), \quad (8.0.1)$$

la cual nos indica el monto de expansión desde un tiempo  $t_1$  a un tiempo  $t_2$  [2], para un factor de escala dependiente de la posición se tiene,

$$N(\mathbf{x}, t_1, t_2) = \ln \left( \frac{\tilde{a}(\mathbf{x}, t_2)}{a(\mathbf{x}, t_1)} \right). \quad (8.0.2)$$

En este caso la tilde  $\sim$  se usa para indicar que se está en un folio diferente al no tildado. En general para un folio genérico,

$$a(\mathbf{x}, t) = a(t)e^{\psi(\mathbf{x}, t)}, \quad (8.0.3)$$

en donde  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , es la perturbación en la curvatura general [2]. Por lo tanto la expresión para el número de *e-folds* queda de la siguiente manera,

$$N(\mathbf{x}, t_1, t_2) = \ln \left( \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right) + \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2) - \psi(\mathbf{x}, t_1). \quad (8.0.4)$$

Ahora al evaluar  $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2)$  en un folio de densidad de energía uniforme, se tiene

$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t_2) = \zeta(\mathbf{x}, t_2)$ , y además  $\psi(\mathbf{x}, t_1)$  en un folio plano implica que es igual a cero dado que en este folio no hay perturbación. Luego de la ecuación (8.0.4) se obtiene

$$N(\mathbf{x}, t_1, t_2) - N(t_1, t_2) = \zeta(\mathbf{x}, t_2), \quad (8.0.5)$$

en donde el lado izquierdo indica una perturbación en el número de *e-folds* (considerando como fondo  $N(t_1, t_2)$  que es el correspondiente al universo de FRW), el cual se denotará como  $\delta N$ . Entonces calculando la perturbación en el número de *e-folds* se puede obtener la perturbación en la curvatura  $\zeta$  [2],

$$\delta N(\mathbf{x}, t) = \zeta(\mathbf{x}, t). \quad (8.0.6)$$

En muchos escenarios inflacionarios, entre esos el del recalentamiento inhomogéneo que es el de interés en este trabajo, la dinámica del universo entre un tiempo inicial  $t_I$  y un tiempo final  $t_F$ , está determinada por los valores de campos escalares  $\phi^i$  en el tiempo  $t_I$ , por lo tanto el número de *e-folds* se vuelve función de estos campos. Entonces la perturbación en la curvatura en un tiempo  $t_F$ , de acuerdo con la expresión (8.0.6) está dada por

$$\zeta(\mathbf{x}, t_F) = \delta N(\mathbf{x}, \phi^i, \rho_F), \quad (8.0.7)$$

en donde  $\rho_F$  es la densidad de energía en el tiempo final  $t_F$ . Expandiendo  $\delta N$  en series de Taylor, tomando en cuenta que la información en el tiempo  $t_F$ , está determinada por la densidad de energía en este tiempo  $\rho_F$ , y restándole el promedio de la perturbación  $\zeta$ , se obtiene

$$\zeta(\mathbf{x}, t_F) - \langle \zeta \rangle \approx N_i \delta \phi^i + \frac{1}{2} N_{ij} \delta \phi^i \delta \phi^j + \dots + \frac{\partial N}{\partial \rho_F} \delta \rho_F + \dots - \langle \delta N \rangle, \quad (8.0.8)$$

en donde  $\delta \phi^i$  es la perturbación de  $\phi^i$  en un folio plano en el tiempo  $t_I$ , y además

$$N_i = \frac{\partial N}{\partial \phi^i}, \quad N_{ij} = \frac{\partial^2 N}{\partial \phi^i \partial \phi^j}, \quad N_{ijk} = \frac{\partial^3 N}{\partial \phi^i \partial \phi^j \partial \phi^k}, \text{ etc.} \quad (8.0.9)$$

Se observa que  $\delta \rho_F = 0$  debido a que la perturbación en la curvatura en el tiempo  $t_F$  se evalúa en un folio de densidad de energía uniforme. Igualmente debido a que  $\zeta$  es

una perturbación,  $\langle \zeta \rangle = 0$  (esta es la razón por la que se resta  $\langle \delta N \rangle$  en la ecuación (8.0.8)).

Asumiendo que las perturbaciones en los campos  $\delta\phi^i$  son gaussianas, pasando al espacio de momento de acuerdo con lo expuesto en el apéndice C, y teniendo en cuenta las expresiones mostradas anteriormente para los correladores de dos, tres y cuatro puntos (7.0.7), (7.0.8), (7.0.9), el espectro, biespectro y triespectro son:

$$P_\zeta(k) = N_i N_j P^{ij}(k), \quad (8.0.10)$$

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = N_i N_j N_k N_l (P^{ij}(k_1) P^{kl}(k_2) + 2perms), \quad (8.0.11)$$

$$T_\zeta(k_1, k_2, k_3, k_4) = N_{ij} N_{kl} N_m N_n (P^{jl}(k_{13}) P^{im}(k_3) P^{kn}(k_4) + 11perms), \quad (8.0.12)$$

en donde  $k_{ij} = |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j|$  y  $P^{ij}$  es el espectro de los campos escalares definido de acuerdo con la ecuación (7.0.7):

$$\langle \delta\phi_{\mathbf{k}_1}^i \delta\phi_{\mathbf{k}_2}^j \rangle_c = (2\pi)^3 P^{ij}(k_1) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \quad (8.0.13)$$

Con base en lo anterior, la no gaussianidad debida a la perturbación primordial en la curvatura se genera solamente de la evolución del universo a escala de superhorizonte. Esta no gaussianidad está caracterizada por los parámetros  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  de acuerdo a lo expuesto en las expresiones (7.0.18) y (7.0.19). Entonces reemplazando el  $P_\zeta(k)$  dado en la ecuación (7.0.7), y según las ecuaciones (7.0.8) y (7.0.9) obtenidas para el biespectro y triespectro respectivamente, se obtiene las siguientes expresiones:

$$f_{NL} = \frac{5 N_i N_j N^{ij}}{6 (N_k N^k)^2}, \quad (8.0.14)$$

$$\tau_{NL} = \frac{N_{ij} N^{ik} N^j N_k}{(N_l N^l)^3}. \quad (8.0.15)$$

# 9

## El escenario del recalentamiento inhomogéneo

### 9.1. El escenario

De acuerdo a lo descrito en la sección de recalentamiento, al final de inflación la energía almacenada en el inflatón es convertida en partículas (las del modelo estándar). De esta manera, se considera que el inflatón está acoplado a otros campos (partículas ordinarias) con una interacción dada por [12]

$$\lambda\phi qq. \tag{9.1.1}$$

En este caso,  $q$  representa partículas ordinarias que pueden ser por ejemplo un par fermión-antifermión. Además,  $\lambda$  viene siendo la constante de acoplamiento que controla la eficiencia con que la energía almacenada en el inflatón se convierte en radiación (partículas relativistas a las cuales decae el inflatón). Así, la razón de decaimiento del inflatón es

$$\Gamma \sim \lambda^2 m, \tag{9.1.2}$$

siendo  $m$  la masa del inflatón en el mínimo de su potencial [12].

Debido a que se debe generar después del recalentamiento un universo perturbado, es necesario que el inflatón no decaiga en todos los lugares al mismo tiempo. Para ello

se propone en este escenario, que  $\lambda$  no sea constante, sino que fluctúe en el espacio. Dicha fluctuación se puede generar estableciendo una dependencia funcional con campos escalares ligeros  $s$ , los cuales a su vez pueden fluctuar en el espacio dado el principio de incertidumbre de Heisenberg. Por lo tanto, en consecuencia, se tiene una razón de decaimiento del inflatón  $\Gamma$  variable en el espacio que conlleva a que la inflación no termine en todos los lugares al mismo tiempo. Entonces, análogamente se puede pensar en un universo cerrado que se comporte como un globo, que después de inflarse, pasa de ser exactamente esférico a tener una superficie con deformaciones (figura 5).

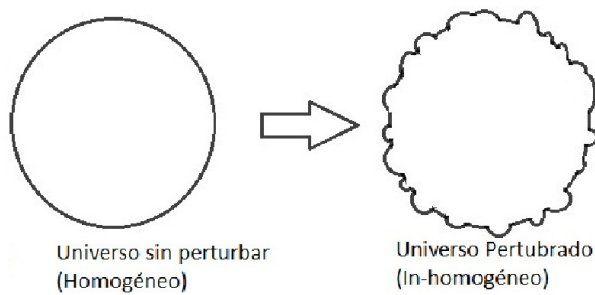


Figura 9.1: **Universo perturbado.** Esta figura representa un universo cerrado e inicialmente homogéneo (lado izquierdo) el cual después de inflarse, se convierte en un universo cerrado con irregularidades en su superficie (lado derecho).

La dependencia funcional de  $\lambda$  con los campos  $s$  puede establecerse tomando en cuenta procesos que se presentan en la naturaleza en donde los decaimientos de las partículas están mediados por otros campos. Un ejemplo de esto es el decaimiento beta del neutrón en donde el acoplamiento efectivo del neutrón con las partículas resultantes está determinado por el bosón mediador  $W^-$  (figuras 6 y 7).

De esta manera, cuando durante inflación  $\Gamma < H$ , la temperatura de recalentamiento que es aproximadamente

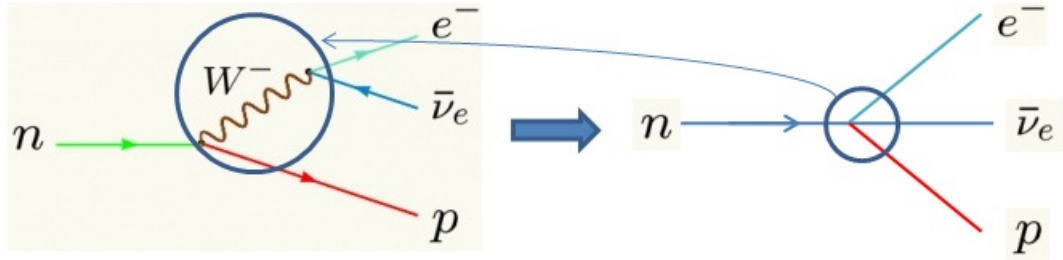


Figura 9.2: **Decaimiento beta del neutrón.** El neutrón decae primeramente en un protón  $p$  y en un bosón  $W^-$ , que a su vez decae en un electrón  $e^-$  y un antineutrino electrónico  $\bar{\nu}_e$ . En el lado derecho, se muestra el diagrama efectivo del decaimiento, cuyo acoplamiento efectivo viene dado por la física del  $W^-$ .

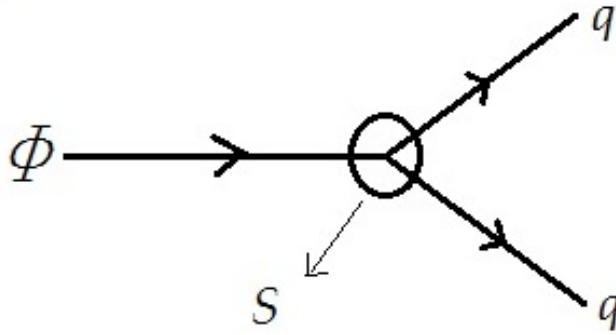


Figura 9.3: **Decaimiento del inflatón.** El inflatón  $\phi$  decae en dos campos  $q$ . Análogamente a lo expuesto en la figura 4, un campo escalar ligero  $S$  es el que determina el acoplamiento efectivo del inflatón  $\phi$  con los campos resultantes  $q$ .

$$T_r \sim \sqrt{\Gamma M_p} \sim \lambda \sqrt{m M_p}, \quad (9.1.3)$$

fluctúa de acuerdo con las fluctuaciones de  $\Gamma$  y  $\lambda$ , entonces

$$\frac{\delta T_r}{T_r} \sim \frac{\delta \Gamma}{\Gamma} \sim \frac{\delta \lambda}{\lambda}. \quad (9.1.4)$$

Por lo tanto, las fluctuaciones en la temperatura están completamente determinadas por las fluctuaciones en los campos ligeros  $s$  y no por fluctuaciones del inflatón  $\phi$ .

## 9.2. No gaussianidad

Con base en el escenario descrito en la sección anterior, ahora se calculará la perturbación en la curvatura generada por dicho mecanismo. Para ello, se considera un número de *e-folds*  $N$  desde una época inicial (denotada por  $i$ ) antes del decaimiento del inflatón (cuando se tiene un universo no perturbado) hasta una época "final" (denotada por  $f$ ) después de que ocurre el decaimiento. Así, se obtiene:

$$e^N = \frac{a_f}{a_i} = \frac{a_f}{a_{dec}} \frac{a_{dec}}{a_i}, \quad (9.2.1)$$

en donde  $a_{dec}$  viene siendo el parámetro de expansión durante el decaimiento del inflatón.

De acuerdo a lo expuesto en la sección de recalentamiento, donde se demostraba que el inflatón oscilante se comporta como materia ordinaria (no relativista), se considera una época inicial dominada por ésta, para la cual  $a \sim H^{-2/3}$ , y una época "final" dominada por la radiación (correspondiente a las partículas relativistas en las cuales decae el inflatón), en donde  $a \sim H^{-1/2}$ . Debido a que el decaimiento ocurre cuando  $H = \Gamma$ , se tiene:

$$\frac{a_f}{a_{dec}} \sim \Gamma^{1/2}, \quad \frac{a_{dec}}{a_i} \sim \Gamma^{-2/3}, \quad (9.2.2)$$

lo cual implica que:

$$e^N \sim \Gamma^{-1/6}. \quad (9.2.3)$$

Siguiendo con una metodología análoga a lo desarrollada en la sección del formalismo  $\delta N$ , se expande  $\delta N$  en términos de las fluctuaciones en la razón de decaimiento del inflatón  $\delta\Gamma$

$$\delta N = \frac{\partial N}{\partial \Gamma} \delta\Gamma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial \Gamma^2} \delta\Gamma^2 + \dots \quad (9.2.4)$$

de lo cual se obtiene

$$\zeta = \delta N = -\frac{1}{6} \left( \frac{\delta\Gamma}{\Gamma} - \frac{1}{2} \left( \frac{\delta\Gamma}{\Gamma} \right)^2 \right), \quad (9.2.5)$$

siendo  $\frac{\partial N}{\partial \Gamma} = -\frac{1}{6\Gamma}$  y  $\frac{\partial^2 N}{\partial \Gamma^2} = \frac{1}{6\Gamma^2}$ .

Dado que la razón de decaimiento depende de un campo escalar ligero  $s$ ,  $\Gamma = \Gamma(s)$ , se expande  $\delta\Gamma$  en términos de las fluctuaciones del campo  $s$ , entonces

$$\delta\Gamma = \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\delta s + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s^2}\delta s^2 + \dots, \quad (9.2.6)$$

lo que implica que:

$$\frac{\partial N}{\partial s} = -\frac{1}{6\Gamma}\frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \quad (9.2.7)$$

y

$$\frac{\partial^2 N}{\partial s^2} = \frac{1}{6\Gamma^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\right)^2 - \frac{1}{6\Gamma}\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s^2}. \quad (9.2.8)$$

Por otro lado, con base a lo expuesto en la sección anterior, mientras el inflatón oscila alrededor del mínimo de su potencial efectivo, se comporta como materia no relativista, y su densidad de energía  $\rho_\phi$  es convertida en radiación (con densidad de energía  $\rho_r$ ). La transferencia de energía del inflatón a las partículas relativistas a las cuales decae está modulada por la razón de decaimiento del inflatón  $\Gamma$ . Por lo tanto, las ecuaciones de evolución del sistema serían

$$\dot{\rho}_\phi = -3H\rho_\phi - \Gamma\rho_\phi, \quad (9.2.9)$$

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Gamma\rho_\phi, \quad (9.2.10)$$

$$H^2 = \frac{(\rho_\phi + \rho_r)}{3M_p^2}. \quad (9.2.11)$$

Al resolver numéricamente este sistema de ecuaciones, se observa que universos con diferentes valores de  $\Gamma$  conlleva a universos con montos de expansión diferentes. Por lo tanto, considerando un parámetro de Hubble  $H$  al final de inflación, el factor de escala al final de inflación  $a$  se asume como función de la razón de decaimiento del inflatón  $\Gamma$  (figura 8) [18].

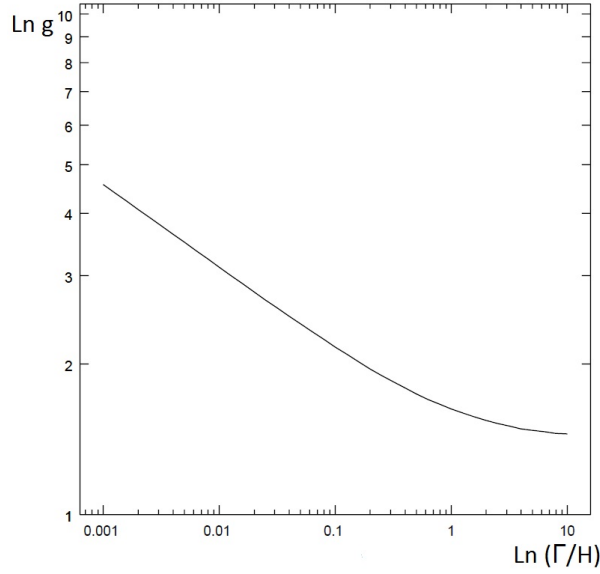


Figura 9.4: **Factor de escala al final de inflación en función de  $\Gamma$ .** Factor de expansión normalizado  $g$  ( $g = at^{-1/2}$ , en donde  $t$  es el tiempo al final de inflación) como función de  $\Gamma/H$  después del recalentamiento, y que muestra que para un universo con un  $\Gamma$  dado se tiene un monto de expansion particular para ese universo (el monto de expansión es función de  $a$ ). Esta curva es obtenida después de resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (9.2.9), (9.2.10) y (9.2.11) empezando con  $\rho_r = 0$ .

Sin embargo, por facilidad de los cálculos, se hace uso de la aproximación de decaimiento repentino, la cual establece que el inflatón decae de forma inmediata. Volviendo a lo anterior, de acuerdo a la expresión (7.0.17) para  $A_\zeta^{1/2}$  se obtiene

$$A_\zeta^{1/2} = \frac{1}{6} \frac{H}{2\pi\Gamma} \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \quad (9.2.12)$$

además de acuerdo a la ecuación (8.0.14) (para el cálculo de  $f_{NL}$ )

$$f_{NL} = \frac{5}{6} \left( \frac{\frac{\Gamma'^2}{36\Gamma^2} \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{-1}{6\Gamma} \right) \Gamma' + \frac{-1}{6\Gamma} \Gamma'' \right)}{\left( \frac{-\Gamma'}{6\Gamma} \right)^4} \right), \quad (9.2.13)$$

en donde  $\Gamma' = \frac{\partial\Gamma}{\partial s}$  y  $\Gamma'' = \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s^2}$ . Resolviendo las operaciones se deriva la siguiente expresión para  $f_{NL}$

$$\frac{3}{5} f_{NL} = 3 \left( \frac{\Gamma''\Gamma}{\Gamma'^2} - 1 \right). \quad (9.2.14)$$

De igual forma, finalmente aplicando la ecuación (8.0.15), que define a  $\tau_{NL}$ , se obtiene

$$\tau_{NL} = \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{-\Gamma''}{\Gamma} + \frac{\Gamma'^2}{\Gamma^2}\right)^2 \left(\frac{1\Gamma'^2}{36\Gamma^2}\right)}{\left(\frac{\Gamma'^2}{36\Gamma^2}\right)^3}, \quad (9.2.15)$$

de la cual se deduce

$$\tau_{NL} = 9 \left(1 - \frac{2\Gamma''\Gamma}{\Gamma'^2} + \frac{\Gamma^2\Gamma''^2}{\Gamma'^4}\right). \quad (9.2.16)$$

Conociendo la naturaleza del inflatón y su acoplamiento con otros campos, además la dependencia de su razón de decaimiento  $\Gamma$  con respecto al campo escalar  $s$ , se podrán calcular los niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  y compararlos con los valores mostrados en el capítulo 7. Por lo tanto, considerando un ejemplo sencillo con una razón de decaimiento de la forma [12, 18]:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 \left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2, \quad (9.2.17)$$

en donde  $\Gamma_0$  es la razón de decaimiento promedio (sin considerar fluctuaciones, y no depende de  $s$ ) y  $\Gamma_1$  describe la fracción de la razón de decaimiento que está modulada por el campo escalar ligero  $s$ , se puede obtener un estimativo de los niveles de no gaussianidad con base en las ecuaciones (9.2.14) y (9.2.16). Al calcular derivadas  $\Gamma'$  y  $\Gamma''$  evaluadas en  $\bar{s}$  (valor promedio de  $s$ ) se obtiene

$$\Gamma' = 2 \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial s}\right)_{\bar{s}} = 2\frac{\Gamma_1 s}{\bar{s}^2}, \Gamma'' = 2\frac{\Gamma_1}{\bar{s}^2}. \quad (9.2.18)$$

Introduciendo lo anterior en la ecuación (9.2.17)

$$f_{NL} = \frac{5\Gamma_0}{2\Gamma_1}. \quad (9.2.19)$$

De igual forma, reemplazando la razón de decaimiento  $\Gamma$  de la expresión (9.2.17) en la ecuación (9.2.16), se obtiene

$$\tau_{NL} = 9 \left( \frac{9}{4} - \frac{1\Gamma_0}{2\Gamma_1} + \frac{1\Gamma_0^2}{4\Gamma_1^2} \right). \quad (9.2.20)$$

Tomando en cuenta que la razón  $\Gamma_0/\Gamma_1$  es del orden de 1, los anteriores valores hallados de  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  expresados en las ecuaciones (9.2.19) y (9.2.20), son lo suficientemente grandes como para ser detectados en las observaciones de la RCF (tomando en cuenta por ejemplo, que con el mecanismo estandar de slow-roll  $f_{NL} \sim 10^{-2}$  [2]).

# 10

## Conclusiones

De acuerdo a la teoría del recalentamiento estándar y haciendo una analogía con el comportamiento del oscilador armónico amortiguado, el inflatón oscilante alrededor del mínimo de su potencial efectivo se comporta como materia no relativista debido a que la presión promedio generada mientras oscila es igual a cero.

Seguidamente, se consideró que la razón de decaimiento del inflatón  $\Gamma$  fluctúa en el espacio; y para ello se estableció una dependencia funcional de  $\Gamma$  con respecto a campos escalares ligeros  $s$  cuyos valores esperados igualmente fluctúan debido al principio de incertidumbre de Heisenberg. Por lo tanto, el período inflacionario no termina en todos los lugares al mismo tiempo y como consecuencia durante el recalentamiento, se genera un universo perturbado que concuerda con las observaciones de la Radiación Cósmica de Fondo (RCF).

Por consiguiente, para calcular los niveles de no gaussianidad, resultó satisfactorio usar el formalismo  $\delta N$  como alternativa a la teoría de perturbaciones cosmológicas, ya que al trabajar en escala de superhorizonte, el Universo en su totalidad se puede modelar como una colección de universos separados de FRW. Entonces, considerando una razón de decaimiento

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 \left(\frac{s}{\bar{s}}\right)^2, \quad (10.0.1)$$

se encuentran unos niveles de no gaussianidad  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$  suficientemente grandes como para ser detectados en las observaciones de la RCF, en contraste con el mecanismo estándar de slow-roll para el cual por ejemplo  $f_{NL} \sim 10^{-2}$ . Además, se puede ver claramente que estos valores se encuentran entre las cotas observacionales las cuales son:  $-10 < f_{NL} < 74$  y  $-0,6 < \tau_{NL}/10^4 < 3,3$  a  $2\sigma$ .

Finalmente, cabe mencionar que la importancia del hallazgo de los parámetros  $A_\zeta^{1/2}$ ,  $f_{NL}$  y  $\tau_{NL}$ , radica en que éstos servirán como discriminantes para los distintos modelos bajo el dominio del escenario del recalentamiento inhomogéneo. Se hace necesario conocer la naturaleza del inflatón para establecer su acoplamiento efectivo con los campos a los cuales decae. Así, se podrían hallar los niveles de no gaussianidad y contrastarlos con los hallados vía las observaciones de la RCF.

# Bibliografía

- [1] S. Weinberg, *Cosmology*, (Oxford University Press, 2008).
- [2] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation. Cosmology, inflation and the origin of structure*, (Cambridge University Press, 2009).
- [3] A. H. Guth, *The inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [4] R. Allahverdi, R. Brandenberger, F-Y Cyr-Racine and A. Mazumdar, *Reheating in inflationary cosmology: theory and applications*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **60**, 27 (2010).
- [5] G. F. Smoot et. al., *Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps*, Astrophys. J. **396**, L1 (1992).
- [6] C.L. Bennett et. al., *First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **148**, 1 (2003).
- [7] S. Mollerach, *Isocurvature baryon perturbations and inflation*, Phys. Rev. D **42**, 313 (1990).
- [8] A. Linde and V. Mukhanov, *Nongaussian isocurvature perturbations from inflation*, Phys. Rev. D **56**, R535 (1997).
- [9] K. Enqvist and M.S. Sloth, *Adiabatic CMB perturbations in pre - big bang string cosmology*, Nucl. Phys. B **626**, 395 (2002).
- [10] D. H. Lyth and D. Wands, *Generating the curvature perturbation without an inflaton*, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002).

- [11] T. Moroi and T. Takahashi, *Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background*, Phys. Lett. B **522**, 215 (2001), Erratum-ibid.B **539**, 303, (2002).
- [12] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, *New mechanism for generating density perturbations from inflation*, Phys. Rev. D **69**, 023505 (2004).
- [13] S. Li. *Inhomogeneous reheating scenario with DBI fields*, JCAP **1008**, 024 (2010).
- [14] K. Dimopoulos and D. H. Lyth, *Models of inflation liberated by the curvaton hypothesis*, Phys. Rev. D **69**, 123509 (2004).
- [15] D. H. Lyth, C. Ungarelli and D. Wands, *The primordial density perturbation in the curvaton scenario*, Phys. Rev. D **67**, 023503 (2003).
- [16] D. H. Lyth and Y. Rodriguez, *The inflationary prediction for primordial non-Gaussianity*, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).
- [17] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, *Cosmological perturbations from inhomogeneous reheating, freeze-out, and mass domination*, Phys. Rev. D **69**, 083505 (2004).
- [18] M. Zaldarriaga, *Non-Gaussianities in models with a varying inflaton decay rate*, Phys. Rev. D **69**, 043508 (2004).
- [19] T. Suyama and M. Yamaguchi, *Non-Gaussianity in the modulated reheating scenario*, Phys. Rev. D **77**, 023505 (2008).
- [20] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a cosmological model and angular variations of the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [21] A. A. Starobinsky, *Multicomponent de Sitter (inflationary) stages and the generation of perturbations*, JETP Lett. **42**, 152 (1985) [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42**, 124 (1985)].
- [22] M. Sasaki and E.D. Stewart, *A general analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation.*, Prog. Theor. Phys. **95**, 71 (1996).
- [23] D. H. Lyth, K. A. Malik and M. Sasaki, *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, JCAP **0505**, 004 (2005).
- [24] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922) [*On the curvature of space*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1991 (1999)].
- [25] H. P. Robertson, *Kinematics and world structure I*, Astrophys. J. **82**, 248 (1935).

- [26] A. G. Walker, *On Milnes's theory of world structure*, Proc. London Math. Soc. **42**, 90 (1936).
- [27] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, (John Wiley and Sons, 1972).
- [28] D. Baumann, *TASI lectures on Inflation*, arXiv:0907.5424 [hep-th].
- [29] E. F. Bunn and M. J. White, *The four year COBE normalization and large scale structure*, Astrophys. J. **480**, 6 (1997).
- [30] E. Komatsu et. al., *Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, Astrophys J. Suppl. Ser. **192**, 18 (2011).
- [31] A. R. Liddle, *An introduction to cosmological inflation*, arXiv:astro-ph/9901124.
- [32] M. S. Turner, *Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe*, Phys. Rev. D **28**, 1243 (1983).
- [33] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, *Reheating after inflation*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3195 (1994).
- [34] A. Linde, *Particle physics and inflationary cosmology* (Harwood Academic, 1990), arXiv:hep-th/0503203.
- [35] H. R. S. Cogollo, Y. Rodríguez, and C. A. Valenzuela-Toledo, *On the issue of the  $\zeta$  series convergence and loop corrections in the generation of observable primordial non-gaussianity in slow-roll inflation. Part I: the bispectrum*, JCAP **0808**, 029 (2008).
- [36] M. Sasaki, J. Väliviita and D. Wands, *Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model*, Phys. Rev. D **74**, 103003 (2006).
- [37] D. H. Lyth and D. Seery, *Classicality of the primordial perturbations*, Phys. Lett. B **662**, 309 (2008).
- [38] D. H. Lyth, *Large scale energy density perturbations and inflation*, Phys. Rev. D **31**, 1792 (1985).
- [39] L. Boubekeur and D. H. Lyth, *Detecting a small perturbation through its non-Gaussianity*, Phys. Rev. D **73**, 021301(R) (2006).
- [40] J. Maldacena, *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, JHEP **0305**, 013 (2003).

- [41] J. Smidt *et. al.*, *A measurement of cubic-order primordial non-gaussianity ( $g_{NL}$  and  $\tau_{NL}$ ) with WMAP 5-year data*, arXiv:1001.5026 [astro-ph.CO].
- [42] M. E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).
- [43] C. A: Valenzuela-Toledo, Y. Rodriguez and J. P. Beltran Almeida, *Feynman-like rules for calculating  $n$ -point correlators of the primordial curvature perturbation*, JCAP **10**, 020 (2011).

# Apéndices

# A

## Pequeñas oscilaciones en un sistema ligado

La energía potencial de todo sistema ligado en el equilibrio, tiene un mínimo. Suponiendo que, utilizando la expansión en series de Taylor, se expande la energía potencial de un sistema ligado  $U(r)$ , alrededor de la posición del mínimo de su potencial  $r_0$ , se obtiene

$$U(r) = U(r_0) + (r - r_0) \left( \frac{dU}{dr} \right)_{r_0} + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \left( \frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r_0} + \dots \quad (\text{A.0.1})$$

Sin embargo, como  $U$  tiene un mínimo en  $r_0$ ,  $(dU/dr)_{r_0} = 0$ . Por lo tanto, para desplazamientos lo suficientemente pequeños, se puede despreciar los términos de tercer orden en adelante. Entonces en este caso se obtiene

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2} (r - r_0)^2 \left( \frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r_0}. \quad (\text{A.0.2})$$

La ecuación [A.0.2](#) es la energía potencial para un oscilador armónico, la cual es

$$U(r) = \text{Constante} + \frac{kx^2}{2}, \quad (\text{A.0.3})$$

en donde  $k = \left( \frac{d^2U}{dr^2} \right)_{r_0}$ .

# B

## Solución de las ecuaciones para el oscilador armónico amortiguado

La ecuación general para el oscilador armónico amortiguado es de la forma de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, la cual se expresa como:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = 0, \quad (\text{B.0.1})$$

siendo  $a_n$  constantes. Para hallar la solución primero se construye la ecuación característica:

$$a_2 f^2 + a_1 f + a_0 = 0, \quad (\text{B.0.2})$$

en donde la derivada de orden 2 se sustituye por  $f^2$  y de orden 1 por  $f$ , siendo  $f$  una variable desconocida.

A continuación se determinan las raíces, que son soluciones de la ecuación característica (B.0.2):

$$f_{\pm} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2} \quad (\text{B.0.3})$$

Dependiendo de como sean las raíces obtenidas, si son reales (y en general  $f_+$  diferente de  $f_-$ ) entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = C_1 e^{f_+ t} + C_2 e^{f_- t}. \quad (\text{B.0.4})$$

En caso de que  $f_{\pm}$  sea compleja la solución es de la forma:

$$y(t) = e^{pt}(C_1 \cos(qt) + C_2 \text{sen}(qt)) = A e^{pt} \cos(qt + \alpha), \quad (\text{B.0.5})$$

en donde  $p$  y  $q$  son la parte real e imaginaria de  $f$  respectivamente. Además  $C_1$  y  $C_2$  son dos constantes arbitrarias y  $A$  es la amplitud dada por  $A^2 = C_1^2 + C_2^2$ . Por otra parte,  $\alpha$  es la fase, la cual cumple con  $A \cos(\alpha) = C_1$  y  $A \text{sen}(\alpha) = C_2$ .

Ahora bien, la ecuación para el oscilador armónico amortiguado de una masa  $m$  oscilante sujeta a un resorte es:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky(t) = 0, \quad (\text{B.0.6})$$

en donde  $k$  es la constante del resorte y  $b$  es un coeficiente que mide el amortiguamiento debido a una fuerza de fricción.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, las soluciones dependen de si las raíces son reales o complejas. Por lo tanto, las soluciones para raíces reales, de la forma expuesta en la ecuación (B.0.4) son para el caso sobreamortiguado ( $b^2 - 4km > 0$ ), en el que realmente el sistema no oscila. De igual manera, el amortiguamiento crítico ( $b^2 - 4km = 0$ , que ocurre cuando  $f_+ = f_-$ ) corresponde al caso límite entre un sistema oscilante y no oscilante. Por otro lado, cuando se tiene raíces complejas ( $b^2 - 4km < 0$ ), el sistema se comporta de manera subamortiguada, y esto ocurre cuando oscilador oscila con amplitud decreciente alrededor de su posición de equilibrio (figura 6). Para este caso, que es el de principal interés, la solución de acuerdo con la expresión (B.0.5) es:

$$y(t) = A e^{\frac{-b}{2m} t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (\text{B.0.7})$$

en donde la frecuencia angular  $\omega$  viene dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \quad (\text{B.0.8})$$

Finalmente, la frecuencia de las oscilaciones es  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .

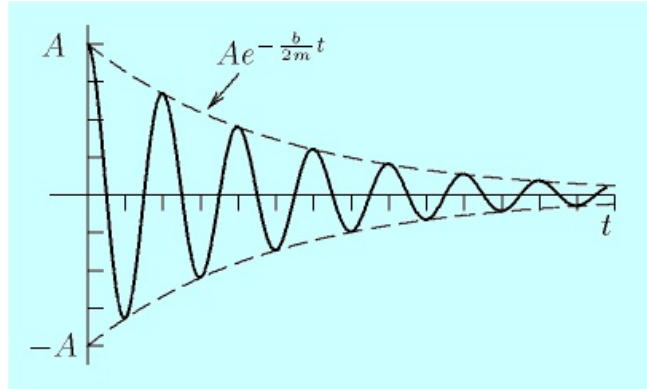


Figura B.1: **Oscilaciones amortiguadas.** La amplitud de las oscilaciones está modulada por la exponencial  $e^{-\frac{b}{2m}t}$ , de manera que  $A$  decrece con el tiempo.

# C

## Obtención de los correladores de dos y tres puntos para $\zeta$ en el espacio de momento

Con base en la ecuación obtenida para  $\zeta$ , (8.0.8), tomando en cuenta los términos hasta segundo orden y pasando al espacio de momento se obtiene:

$$\zeta(\mathbf{k}, t_F) \approx N_i \delta\phi^i(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} N_{ij} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta\phi^i(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \phi^j(\mathbf{q}) - \frac{1}{2} N_{ij} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \langle \delta\phi^i(x) \delta\phi^j(x) \rangle . \quad (\text{C.0.1})$$

De acuerdo a lo anterior, el correlador de dos puntos es:

$$\begin{aligned} & \langle \zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = \\ & \langle (N_i \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) + \frac{1}{2} N_{ij} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) \delta\phi^j(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} N_{ij} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \langle \delta\phi^i(\mathbf{x}) \delta\phi^j(\mathbf{x}) \rangle) \\ & (N_k \delta\phi^k(\mathbf{k}_2) + \frac{1}{2} N_{kl} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{2} N_{kl} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^k(\mathbf{x}) \delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle) \rangle \quad (\text{C.0.2}) \end{aligned}$$

Realizando las operaciones, tomando en cuenta que las perturbaciones en los campos  $\delta\phi_i$  son gaussianas, los términos que contengan correladores de 3 puntos se eliminan. También, se obtiene un término de la forma

$$\frac{1}{4}N_{ij}N_{kl} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^j(\mathbf{q}_1)\delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2)\delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle, \quad (\text{C.0.3})$$

el cual, teniendo en cuenta que el correlador de 4 puntos se puede descomponer en correladores de más bajo orden (vía el teorema de Wick [42]):

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^j(\mathbf{q}_1)\delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2)\delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle = & \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^j(\mathbf{q}_1) \rangle \langle \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2)\delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \\ & + \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \rangle \langle \delta\phi^j(\mathbf{q}_1)\delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \\ & + \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \langle \delta\phi^j(\mathbf{q}_1)\delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.0.4})$$

Por lo tanto, dado que se trabaja a nivel árbol [43] (suponiendo que tras la expansión en series el nivel árbol domina, aunque en general esto no sucede), los términos que contengan

$$\int d^3q_1 P^{il}(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1|) P^{jk}(q_1), \quad (\text{C.0.5})$$

se desprecian, y la expresión (C.0.3) queda de la forma:

$$\frac{1}{4}N_{ij}N_{kl}(2\pi)^6\delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2) \int d^3q_1 P^{ij}(q_1) \int d^3q_2 P^{kl}(q_2). \quad (\text{C.0.6})$$

Tomando en cuenta la definición del correlador de 2 puntos, dada por la ecuación (7.0.7), se puede deducir la siguiente expresión:

$$\langle \delta\phi^i(x)\delta\phi^j(x) \rangle = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k P^{ij}(k), \quad (\text{C.0.7})$$

lo que implica que el término dado en la expresión (C.0.6) se cancela con

$$\frac{1}{4}N_{ij}N_{kl}(2\pi)^6\delta(\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^i(\mathbf{x})\delta\phi^j(\mathbf{x}) \rangle \langle \delta\phi^k(\mathbf{x})\delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle. \quad (\text{C.0.8})$$

Finalmente, de los tres términos restantes, dos que son de la forma

$$-\frac{1}{4}N_{ij} \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1)\delta\phi^j(\mathbf{q}_1) \rangle N_{kl}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^k(\mathbf{x})\delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle,$$

se desprecian, ya que como se mencionó anteriormente, se trabaja a nivel árbol y por tanto su contribución no es significativa respecto a los términos restantes que surgen de la expresión (C.0.3). Por consiguiente, el correlador de dos puntos queda expresado como:

$$\langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) N_i N_j P^{ij}(k_1). \quad (\text{C.0.9})$$

Ahora bien, con base en lo anterior el correlador de tres puntos es:

$$\begin{aligned} & \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle = \\ & \langle (N_i \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) + \frac{1}{2} N_{ij} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \delta\phi^i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}_1) \delta\phi^j(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} N_{ij} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1) \langle \delta\phi^i(\mathbf{x}) \delta\phi^j(\mathbf{x}) \rangle) \\ & (N_k \delta\phi^k(\mathbf{k}_2) + \frac{1}{2} N_{kl} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{2} N_{kl} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^k(\mathbf{x}) \delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle) \\ & (N_m \delta\phi^m(\mathbf{k}_3) + \frac{1}{2} N_{mn} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta\phi^m(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_3) \delta\phi^n(\mathbf{q}_3) - \frac{1}{2} N_{mn} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_3) \langle \delta\phi^m(\mathbf{x}) \delta\phi^n(\mathbf{x}) \rangle) \rangle \quad (\text{C.0.10}) \end{aligned}$$

De igual manera que se hizo con el caso para el correlador de dos puntos, al asumir que las perturbaciones en los campos  $\phi^i$  son gaussianas, los correladores con un número de puntos impares mayor que tres, se desprecian. Por consiguiente, de los 27 términos que surgen del correlador de tres puntos, uno contiene un correlador de tres puntos y 12 contienen correladores de cinco puntos. Estos 12 términos se desprecian y de los 14 términos restantes, tres contienen correladores de cuatro puntos, los cuales son de la forma:

$$\frac{1}{2} N_i N_j N_{kl} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) \delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle + 2perms, \quad (\text{C.0.11})$$

en donde *perms* se refiere a las permutaciones que surgen al intercambiar los  $k_s$  y  $q_s$ . Siguiendo con lo realizado para el correlador de dos puntos, los correladores de 4 puntos pueden descomponerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) \delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle = & \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) \delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \rangle \langle \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \\ & + \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \rangle \langle \delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \\ & + \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1) \delta\phi^l(\mathbf{q}_2) \rangle \langle \delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \delta\phi^k(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}_2) \rangle \quad (\text{C.0.12}) \end{aligned}$$

De acuerdo a la ecuación para el correlador de 2 puntos dada en la expresión(7.0.7), cada término de la ecuación (C.0.11) es de la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_2)4\pi^6P(k_1) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}P(q_2) \\ & +N_iN_jN_{ij}\frac{4\pi^6}{(2\pi)^3}P(k_1)P(k_3)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (\text{C.0.13})$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (C.0.7), la expresión (C.0.13) se transforma en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_2)P(k_1)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(x)\delta\phi^j(x) \rangle \\ & +N_iN_jN_{ij}\frac{16\pi^6}{(2\pi)^3}P(k_1)P(k_3)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (\text{C.0.14})$$

Dada las permutaciones anteriormente mencionadas, a la expresión (C.0.14) se le adhieren

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1)P(k_3)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(x)\delta\phi^j(x) \rangle \\ & +N_iN_jN_{ij}\frac{16\pi^6}{(2\pi)^3}P(k_2)P(k_3)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (\text{C.0.15})$$

y

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3)P(k_2)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^i(x)\delta\phi^j(x) \rangle \\ & +N_iN_jN_{ij}\frac{16\pi^6}{(2\pi)^3}P(k_1)P(k_2)\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3). \end{aligned} \quad (\text{C.0.16})$$

Por otro lado, entre los 27 términos del correlador de 3 puntos dado en la ecuación (C.0.10), también se tiene 3 términos de la forma:

$$-\frac{1}{2}N_iN_jN_{kl} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1)\delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^k(\mathbf{x})\delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle + 2perms, \quad (\text{C.0.17})$$

en donde el primer término de la expresión (C.0.17) es:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}N_iN_jN_{kl} \langle \delta\phi^i(\mathbf{k}_1)\delta\phi^j(\mathbf{k}_3) \rangle (2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_2) \langle \delta\phi^k(\mathbf{x})\delta\phi^l(\mathbf{x}) \rangle \\
& = -\frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_2)P(k_1)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^k(x)\delta\phi^l(x) \rangle . \quad (\text{C.0.18})
\end{aligned}$$

Análogamente los otros dos términos debidos a las permutaciones quedan expresados de la forma:

$$-\frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1)P(k_3)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^k(x)\delta\phi^l(x) \rangle, \quad (\text{C.0.19})$$

y

$$-\frac{1}{2}N_iN_iN_{kk}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_3)P(k_2)\frac{4\pi^7}{(2\pi)^3} \langle \delta\phi^k(x)\delta\phi^l(x) \rangle . \quad (\text{C.0.20})$$

Se puede ver que los términos resultantes en las expresiones (C.0.18), (C.0.19) y (C.0.20) se eliminan con los primeros términos de las expresiones (C.0.14), (C.0.15) y (C.0.16), por lo tanto, la suma de estos 9 términos da como resultado:

$$N_iN_jN_{ij}\frac{16\pi^6}{(2\pi)^3}\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)(P(k_1)P(k_3) + P(k_2)P(k_3) + P(k_1)P(k_2)). \quad (\text{C.0.21})$$

De los 27 términos que surgen en la ecuación (C.0.10), además de los términos expuestos en la expresión (C.0.21), surgen ocho términos. Estos ocho términos, análogo a lo mencionado para el caso del correlador de dos puntos, se desprecian porque su aporte no es significativo ya que se trabaja a nivel árbol [43]. Por lo tanto, es una buena aproximación asumir que el correlador de 3 puntos es:

$$\begin{aligned}
& \langle \zeta(\mathbf{k}_1)\zeta(\mathbf{k}_2)\zeta(\mathbf{k}_3) \rangle \\
& = N_iN_jN_{ij}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)(P(k_1)P(k_3) + P(k_2)P(k_3) + P(k_1)P(k_2)). \quad (\text{C.0.22})
\end{aligned}$$

Con base en esta última expresión, de acuerdo a la definición del correlador de 3 puntos (7.0.8), claramente se observa que el biespectro de  $\zeta$ ,  $B_\zeta$ , concuerda con el descrito en la ecuación (8.0.11). Además, de acuerdo con (7.0.18), se obtiene el valor de  $f_{NL}$  obtenido en (8.0.14).

Finalmente, cabe mencionar que ésta es la forma de abordar el cálculo del correlador de 4 puntos, de manera que se obtenga las expresiones (8.0.12) y (8.0.15).