

# **ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR CHUA**

**JUAN FELIPE MEJÍA RÍOS  
RICARDO ANDRÉS GÓMEZ VILLALOBOS**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIAS ELECTRICA, ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA  
2015**

# **ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR CHUA**

**JUAN FELIPE MEJÍA RÍOS  
RICARDO ANDRÉS GÓMEZ VILLALOBOS**

**Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el título de ingeniero  
Electrónico.**

**Director:  
ERNESTO AGUILERA BERMÚDEZ  
Ingeniero Electrónico, Ph.D**

**Codirector:  
RICARDO ALZATE CASTAÑO  
Ingeniero Electrónico, Ph.D**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECANICAS  
ESCUELA DE INGENIERIAS ELECTRICA, ELECTRONICA Y TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2015**

# CONTENIDO

INTRODUCCION.....	18
1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	20
2. JUSTIFICACIÓN .....	21
3. OBJETIVOS .....	22
3.1. OBJETIVO GENERAL.....	22
3.1.1. Objetivos específicos.....	22
4. CONCEPTOS BÁSICOS.....	23
4.1. SISTEMAS LINEALES.....	23
4.1.1. Sistemas lineales de primer orden. ....	23
4.1.2. Sistemas lineales de segundo orden. ....	24
4.1.3. Ecuaciones de estado, vectores de campo y trayectorias. ....	25
4.1.4. Puntos de equilibrio. ....	27
4.1.5. Estabilidad.....	27
4.2. SISTEMAS NO LINEALES.....	29
4.2.1. Sistemas no lineales con linealidad a tramos. ....	29

4.2.2. Ciclos límites y bifurcaciones. . . . .	29
4.2.3. Caos. . . . .	30
5. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN (RLC).....	31
5.1. ANÁLISIS TEÓRICO.....	31
5.2. ANÁLISIS EN MATLAB®.....	34
5.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®.....	36
5.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO.....	40
6. ANÁLISIS DE UN ELEMENTO NO LINEAL - DIODO CHUA.....	41
6.1. ANÁLISIS TEÓRICO.....	41
6.2. ANÁLISIS EN MATLAB®.....	43
6.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®.....	45
6.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO.....	46
7. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO DE SEGUNDO ORDEN CON UN ELEMENTO NO LINEAL.....	48
7.1. ANÁLISIS TEÓRICO.....	48
7.1.1. Descripción como circuito no lineal a trozos. . . . .	49

7.1.2.	Región media ( $-E \leq VR' \leq E$ ).	49
7.1.3.	Regiones exteriores $V1 > E$ .	51
7.1.4.	Análisis global del circuito.	54
7.2.	ANÁLISIS EN MATLAB®	55
7.3.	ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®	57
7.4.	ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO	63
8.	ANÁLISIS DE UN CIRCUITO NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON LINEALIDAD A TRAMOS (RLC CON UN ELEMENTO NO LINEAL EN SERIE).	66
8.1.	ANÁLISIS TEÓRICO	66
8.1.1.	Descripción del circuito no lineal a trozos.	68
8.1.2.	Región media $V1 \leq E$ .	69
8.1.3.	Regiones exteriores $V1 > E$ .	71
8.1.4.	Análisis global del circuito.	72
8.1.4.1.	$Ga'' < 0$ .	73
8.1.4.2.	$Ga'' > 0$ .	75
8.2.	ANÁLISIS EN MATLAB®	77
8.3.	ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®	77

8.4.	ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO .....	81
9.	ANÁLISIS DEL CIRCUITO CHUA.....	83
9.1.	ANÁLISIS TEÓRICO.....	83
9.1.1.	Descripción del circuito no lineal a tramos. ....	85
9.1.2.	Región media $V1 \leq E$ . ....	86
9.1.3.	Regiones exteriores $V1 > E$ .....	89
9.1.4.	Análisis global del circuito. ....	93
9.2.	ANÁLISIS EN MATLAB® .....	99
9.3.	ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®.....	104
9.4.	ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO .....	108
9.4.1.	Diseño en KiCad. ....	108
9.4.2.	Resultado final del PCB en laboratorio. ....	112
10.	EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL CIRCUITO CHUA.....	116
10.1.	SIMULACIÓN EN ORCAD-CADENCE® .....	117
10.2.	DISEÑO EN KICAD .....	119
10.3.	RESULTADO FINAL DE PCB EN EL LABORATORIO.....	126

11. CONCLUSIONES .....	128
12. RECOMENDACIONES.....	130
CITAS.....	131
BIBLIOGRAFIA.....	132
ANEXOS .....	133

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1:</b> Circuitos de primer orden, donde a) Circuito RC y b) Circuito RL.....	24
<b>Figura 2:</b> Circuitos de segundo orden, donde a) Circuito RLC serie y b) Circuito RLC paralelo.....	25
<b>Figura 3:</b> Trayectoria en el espacio de estados. $CI = (3e-3, 0)$ . Solución de $x1 = -55.55 x2$ y $x2 = 10e3x1-5x2$ . .....	26
<b>Figura 4:</b> Circuito RLC. ....	31
<b>Figura 5:</b> Señales en el tiempo y trayectorias en el espacio de estado. $CI = 3e-3, 0$ en donde: a) $G = 0$ , b) $G = 500\mu S$ y c) $G = -500\mu S$ . ....	35
<b>Figura 6:</b> Esquema del circuito RLC.....	37
<b>Figura 7:</b> Voltaje en capacitancia Vs Tiempo. ....	37
<b>Figura 8:</b> Voltaje en capacitancia Vs Corriente en la inductancia. ....	37
<b>Figura 9:</b> Esquema del sistema.....	38
<b>Figura 10:</b> Voltaje en capacitancia Vs Tiempo. ....	38
<b>Figura 11:</b> Voltaje en capacitancia Vs Corriente en la inductancia. ....	38
<b>Figura 12:</b> Esquema del sistema.....	39
<b>Figura 13:</b> Voltaje en la capacitancia Vs Tiempo.....	39
<b>Figura 14:</b> Voltaje en la capacitancia Vs Corriente en la inductancia. ....	39
<b>Figura 15:</b> Diodo Chua.....	41
<b>Figura 16:</b> Esquema interno del diodo Chua.....	41
<b>Figura 17:</b> Punto de conducción característico del diodo Chua, $IR$ Vs $VR$ . ....	42
<b>Figura 18:</b> Punto de conducción característico del Diodo Chua, donde a) $Ga = -2.5757e-4s$ y en b) $Ga = 2.4243e-4 s$ . ....	44
<b>Figura 19:</b> Esquema interno del diodo Chua.....	45
<b>Figura 20:</b> Simulación del punto de conducción característico del diodo Chua. ....	46
<b>Figura 21:</b> Resultado en montaje en laboratorio de diodo Chua.....	47
<b>Figura 22:</b> Circuito RLC en paralelo con el diodo Chua.....	48
<b>Figura 23:</b> Circuito representativo de la región media, para $Ra' = 1Ga'$ . ....	50
<b>Figura 24:</b> Circuito representativo de la región exterior, para $Rb' = 1Gb'$ .....	52
<b>Figura 25:</b> Grafica para $Ga' > 0$ , $CI = 0.01, 0$ . a) Comportamiento respecto al tiempo. b) Diagrama de fase. ....	56

<b>Figura 26:</b> Grafica para $Ga' < 0$ , $CI = 0.01, 0$ . a) Comportamiento respecto al tiempo. b) Diagrama de fase. ....	56
<b>Figura 27:</b> Grafica para $Ga' < 0$ , $CI = (0, 0.01)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo y b) Diagrama de fase. ....	57
<b>Figura 28:</b> Grafica para $Ga' < 0$ , $CI = (0, 0)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo y en b) Diagrama de fase. ....	57
<b>Figura 29:</b> Simulación del esquema del circuito RLC en paralelo con el diodo para $G > 0$ . ....	59
<b>Figura 30:</b> Comportamiento de la corriente en la bobina respecto al tiempo para $G > 0$ . ....	59
<b>Figura 31:</b> Comportamiento de la tensión en la capacitancia con respecto al tiempo para $G > 0$ .....	60
<b>Figura 32:</b> Comportamiento de voltaje en capacitancia respecto a la corriente en el inductor.....	60
<b>Figura 33:</b> Simulación del esquema del circuito RLC en paralelo con el diodo Chua en el programa Orcad Capture para un $G < 0$ . ....	61
<b>Figura 34:</b> Comportamiento de la corriente en la bobina respecto al tiempo para $G < 0$ . ....	62
<b>Figura 35:</b> Comportamiento de la tensión en la capacitancia con respecto al tiempo para $G < 0$ .....	62
<b>Figura 36:</b> Comportamiento de voltaje en capacitancia respecto a la corriente en el inductor.....	63
<b>Figura 37:</b> Montaje en el laboratorio de la Figura 29. a) Señal en el tiempo. b) Señal modo XY.....	65
<b>Figura 38:</b> Circuito no lineal con resistencia en serie al diodo Chua.....	66
<b>Figura 39:</b> Comportamiento para, a) $Ga'' < 0$ . b) $Ga'' > 0$ , donde $P^-$ y $P^+$ son los puntos de equilibrio en las zonas exteriores. ....	68
<b>Figura 40:</b> Circuito equivalente para la región media, donde $Ra'' = 1/Ga''$ . ....	69
<b>Figura 41:</b> Circuito representativo de la región exterior. ....	71
<b>Figura 42:</b> Se muestra la relación entre $V1$ y $V2$ , donde se muestra el comportamiento para: a) $Ga'' < 0$ , b) $Ga'' > 0$ .....	73
<b>Figura 43:</b> Muestra el comportamiento global en 3-D y 2-D del sistema para $Ga'' < 0$ . .	74

<b>Figura 44:</b>	Muestra el comportamiento global en 3-D y 2-D del sistema para $Ga'' > 0$ .	75
<b>Figura 45:</b>	Esquema del circuito RLC con resistencia en serie con el diodo Chua.	78
<b>Figura 46:</b>	Señal de tensión en la capacitancia $C2$ , para $G > 0$ .	78
<b>Figura 47:</b>	Señal de corriente que pasa a través de la bobina $L1$ , para $G > 0$ .	79
<b>Figura 48:</b>	Comportamiento de voltaje en capacitancia con respecto a la corriente en el inductor. $R = 2k\Omega$ , $I3$ vs $V2$ , para $G > 0$ .	79
<b>Figura 49:</b>	Señal de tensión en la capacitancia $C2$ , para $G < 0$ .	80
<b>Figura 50:</b>	Señal de corriente en la bobina $L1$ , para $G < 0$ .	80
<b>Figura 51:</b>	Comportamiento de voltaje en capacitancia con respecto a la corriente en el inductor para una resistencia de $641.0256\Omega$ , para $G < 0$ .	81
<b>Figura 52:</b>	Señales obtenidas en el osciloscopio para el circuito de la Figura 45. En la imagen a) Señal en el tiempo b) Señal modo XY	82
<b>Figura 53:</b>	Punto de conducción característico del diodo Chua, $I_R$ Vs $V_R$ .	83
<b>Figura 54:</b>	Elemento no lineal para $G_b$ negativo.	84
<b>Figura 55:</b>	Circuito de Chua.	85
<b>Figura 56:</b>	Equivalente del circuito de Chua en la región $D0$ , Cuando $R_a = 1G_a$ .	87
<b>Figura 57:</b>	Equivalente del circuito Chua en la región $D1$ . $R_b = 1G_b$ .	89
<b>Figura 58:</b>	Dinámica de la región $D0$ .	92
<b>Figura 59:</b>	Dinámica de la región $D1$ .	92
<b>Figura 60:</b>	Equivalente en DC del circuito Chua.	93
<b>Figura 61:</b>	Puntos de equilibrio en DC determinados gráficamente por la intersección de la corriente $I_R = -GVR$ con el punto de conducción característico de $N_R$ .	94
<b>Figura 62:</b>	Bifurcación Hopf	95
<b>Figura 63:</b>	En la parte a) Ciclo límite, en b) Período de duplicación, en c) Período de 4 ciclos, en d) Atractor extraño, en e) Ventanas periódicas y en f) Período de 3 ciclos	97
<b>Figura 64:</b>	a) Espiral atractor de Chua hallado con una resistencia de $1886\Omega$ , b) Doble desplazamiento del espiral atractor de Chua hallado con una resistencia de $1797\Omega$ .	99
<b>Figura 65:</b>	Para una resistencia de $2k\Omega$ , a). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores $C2$ y $C1$ ., b). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión $V2$ vs $V1$ .	100
<b>Figura 66:</b>	Para una resistencia de $1.8k\Omega$ a). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión $V2$ vs $V1$ , b). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores $C2$ y $C1$ .	101

<b>Figura 67:</b> Para una resistencia de $1.7k\Omega$ a). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión $V_2$ vs $V_1$ , b). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores $C_2$ y $C_1$ .	102
<b>Figura 68:</b> Para una resistencia de $1.7k\Omega$ a). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores $C_2$ y $C_1$ , b). Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión $V_2$ vs $V_1$ .	103
<b>Figura 69:</b> Esquema de simulación del circuito de Chua.	105
<b>Figura 70:</b> Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores $C_2$ y $C_1$ , en el eje “x” se ubica el tiempo y en el eje “y” el voltaje en $C_2$ y el voltaje en $C_1$ .	106
<b>Figura 71:</b> Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión $V_2$ vs $V_1$ .	107
<b>Figura 72:</b> Esquemático del circuito Chua.	109
<b>Figura 73:</b> <i>Netlist del circuito de Chua. Tomado de KiCad.</i>	109
<b>Figura 74:</b> Board del circuito de Chua.	110
<b>Figura 75:</b> Cara Frontal de la board del circuito de Chua.	110
<b>Figura 76:</b> Cara posterior de la board del circuito de Chua.	111
<b>Figura 77:</b> Imagen 3D del Circuito de Chua.	111
<b>Figura 78:</b> <i>Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores <math>C_2</math> y <math>C_1</math>.</i>	114
<b>Figura 79:</b> Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión $V_2$ vs $V_1$ .	115
<b>Figura 80:</b> Diagrama de Bloques del transmisor.	116
<b>Figura 81:</b> Diagrama de Bloques del receptor.	116
<b>Figura 82:</b> <i>Esquema de la aplicación en comunicación segura.</i>	118
<b>Figura 83:</b> Resultado de la simulación, donde la onda de color rojo representa la señal de entrada y la verde indica la salida.	119
<b>Figura 84:</b> Esquemático del transmisor Chua en el circuito de aplicación.	120
<b>Figura 85:</b> Esquemático del transmisor Sumador-Inversor en el circuito de aplicación.	121
<b>Figura 86:</b> Esquemático del receptor Chua en el circuito de aplicación.	121
<b>Figura 87:</b> Esquemático del Receptor substractor y de la alimentación en el circuito de aplicación.	122
<b>Figura 88:</b> Netlist del circuito de aplicación.	123
<b>Figura 89:</b> Board del circuito de aplicación.	124
<b>Figura 90:</b> Cara frontal de la board del circuito de aplicación.	124
<b>Figura 91:</b> Cara posterior de la board del circuito de aplicación.	125
<b>Figura 92:</b> Imagen 3D del circuito de aplicación.	125
<b>Figura 93:</b> Señal obtenida en el laboratorio con el osciloscopio del circuito aplicativo.	127

<b>Figura 94:</b> Código de Matlab del circuito en paralelo RLC .....	133
<b>Figura 95:</b> Código de Matlab del elemento no lineal o Diodo Chua .....	134
<b>Figura 96:</b> Código de Matlab del circuito en paralelo RLC con un elemento no lineal.	135
<b>Figura 97:</b> Código de Matlab del circuito de Chua.....	136
<b>Figura 98:</b> Código de Matlab del circuito de Chua.....	137
<b>Figura 99:</b> Imagen de la composición interna del elemento. Tomado de Texas Instruments Incorporated (modificado por autores).....	138

## LISTA DE TABLAS

<b>Tabla 1:</b> Tipos de estabilidad.....	28
<b>Tabla 2:</b> Elementos usados en el montaje del circuito RLC en paralelo con el elemento no lineal. ....	64
<b>Tabla 3:</b> Referencias de los elementos físicos usados y algunas recomendaciones. .	112

## RESUMEN

**TÍTULO:** ANÁLISIS Y EXPERIMENTOS CON UN OSCILADOR CHUA\*

**AUTORES:** JUAN FELIPE MEJÍA RÍOS, RICARDO ANDRÉS GÓMEZ VILLALOBOS\*\*

**PALABRAS CLAVES:** SISTEMAS LINEALES, CIRCUITOS NO LINEALES, CAOS, CIRCUITO CHUA.

### DESCRIPCION:

En el presente proyecto de grado se desea a partir de los sistemas lineales abrir un camino dirigido hacia el análisis de conceptos no lineales y el caos. Se inicia analizando algunos de los conceptos básicos lineales los cuales servirán para adentrarse en la dinámica caótica no lineal a través del estudio del circuito Chua.

Posteriormente partiendo del circuito RLC y aplicando los conceptos básicos analizados, se inicia el camino con el estudio de la dinámica lineal, la cual aporta conceptos importantes que sirven para entrar poco a poco en el mundo de los sistemas no lineales. Este salto de los sistemas lineales a la dinámica no lineal se logra gracias al resistor no lineal o diodo Chua, a través del cual se realizan múltiples análisis que sirven para comprender los comportamientos no lineales, que culminan en la dinámica caótica del circuito de Chua.

Mediante un estudio básico de tipo teórico, junto con algunas simulaciones numéricas y de circuito se exhibe paulatinamente el comportamiento cualitativo y cuantitativo de un circuito oscilador hasta lograr los comportamientos caóticos deseados, tales como: equilibrio, estabilidad, comportamientos locales y globales, bifurcaciones, y soluciones de estado estacionario. En cada una de estas etapas el montaje circuital respectivo es verificado en el laboratorio.

Finalmente, en esta investigación se ilustra una aplicación práctica sencilla del oscilador Chua en los campos de las telecomunicaciones y el control que comprobaran la aplicabilidad de la dinámica no lineal así como la de ciertos comportamientos caóticos, teniendo en cuenta que se dejan bases para futuros estudios relacionados con sistemas no lineales

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director: Ernesto Aguilera Bermúdez, PhD. Codirector: Ricardo Alzate Castaño

## ABSTRACT

**TITLE:** ANALYSIS AND EXPERIMENTS WITH OSCILLATOR CHUA\*

**AUTHORS:** JUAN FELIPE MEJÍA RÍOS, RICARDO ANDRÉS GÓMEZ VILLALOBOS\*\*

**KEYWORDS:** LINEAR SYSTEMS, NONLINEAR CIRCUITS, CHAOS, CHUA'S CIRCUIT.

### DESCRIPTION:

In the present draft desired degree from linear systems open a path directed towards the analysis of nonlinear concepts and chaos. It start analyzing some basic concepts of linear which will serve to enter the nonlinear chaotic dynamics through the study of Chua circuit.

Then starting from the RLC circuit and applying the basic concepts discussed, the road begins with the study of nonlinear dynamics, which provides important concepts which gradually enter the world of nonlinear systems. This jump linear systems to nonlinear dynamics is achieved by the nonlinear resistor or diode Chua, through which multiple analyzes used to understand the non-linear behavior, culminating in the chaotic dynamics of Chua's circuit are performed.

Using a basic study of theoretical type, along with some numerical simulations and circuit gradually exhibits qualitative and quantitative behavior of an oscillator circuit to achieve the desired chaotic behaviors, such as balance, stability, local and global behaviors, forks, and steady state solutions. In each of these stages circuital respective mounting is verified in the laboratory.

Finally in this research a simple oscillator Chua practical application in the fields of telecommunications and control to verify the applicability of nonlinear dynamics and chaotic behavior of certain illustrated, given that foundation for future studies related to nonlinear systems are left.

---

\* Degree Work.

\*\* Physico-mechanical Engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Director: Ernesto Aguilera Bermúdez, PhD. Codirector: Ricardo Alzate Castaño

## INTRODUCCION

Partiendo de circuitos básicos vistos en un curso normal de pregrado, este trabajo muestra cómo lograr un comportamiento caótico de los mismos de una manera gradual. Para este propósito se agrega un elemento no lineal dentro de un circuito oscilador RLC paralelo y se varía el valor de algunos de sus componentes, principalmente resistencias, que son elegidos adecuadamente como sus parámetros. Esta variación exhibe los diferentes cambios cualitativos que pueden ocurrir en el circuito, uno de ellos su comportamiento caótico.

Al estudiar un oscilador lineal, su comportamiento puede ser descrito en ecuaciones ordinarias que adquieren complejidad al agregarle al circuito un elemento no lineal. La lógica no lineal es un campo muy poco analizado en los estudios de pregrado, que muestra de una forma más precisa los comportamientos físicos reales. En este caso se usa un elemento no lineal con la intención de realizar un análisis lineal a tramos, ver su comportamiento en los puntos de cambio y desde ahí obtener un resultado global del sistema. Para argumentar lo dicho anteriormente se tiene como base análisis teóricos, el uso de las herramientas computacionales que ayuden a la simulación de ecuaciones y por último experiencias en laboratorio.

La metodología de esta tesis está basada en un seguimiento detallado del artículo de M. P. Kennedy, Three Steps to Chaos [1], [2], se muestran algunos de sus desarrollos en forma más explícita y con ayuda de herramientas computacionales numéricas y circuitales resultados más explícitos en los cálculos con ayuda de herramientas computacionales numéricas y conocimiento un poco más actualizado del tema propuesto.

Cada capítulo muestra un paso hacia el caos. Se comienza con un oscilador lineal en paralelo RLC en el capítulo 3 al que se le añade un elemento no lineal, también en paralelo, el cual es el estudio principal del capítulo 4.

Posteriormente, se hace una modificación pequeña al circuito en el capítulo 5 y finalmente se le añade una nueva capacitancia, adquiriendo la estructura del circuito de Chua que es

un exponente de situaciones caóticas, ver capítulos 6 y 7. Continuo a esto hay un capítulo que describe una aplicación del circuito de Chua, para al final con las conclusiones ayudar al lector a entender un poco más este tema tan extenso.

## 1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

A pesar de los estudios existentes enfocados en la solución de los problemas vistos en la naturaleza y en el ámbito académico, mediante el uso de procesos de linealización, existen ciertas dinámicas en el ambiente que deben ser estudiadas mediante la implementación de soluciones no lineales las cuales describen de manera más precisa estos problemas, de manera que no se absuelvan parámetros importantes con el fin de llegar a una solución lineal. La formación académica dada a nivel de pregrado se enfoca en la solución de problemas mediante métodos lineales los cuales no describen bien la naturaleza caótica del problema en cuestión, por tanto se hace necesario ofrecer a los estudiantes herramientas que les permita el análisis del comportamiento de los sistemas no lineales complejos, los cuales no pueden ser abordados a través de los métodos lineales tradicionales. De manera específica el presente proyecto se limitará al montaje de un prototipo de laboratorio del circuito Chua orientado a las necesidades de formación a nivel de pregrado de la escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y telecomunicaciones.

## 2. JUSTIFICACIÓN

Tomando como base ciertos conceptos básicos conocidos se realiza el estudio de un sistema dinámico no lineal en el cual se presentan comportamientos interesantes como bifurcaciones, comportamientos caóticos y entre otras características, que se pueden modelar mediante el circuito de Chua. Gracias a la facilidad de producir cambios bruscos a la salida en función de su gran sensibilidad a las condiciones iniciales, lo hacen especial en la implementación del caos presentándose así como un medio didáctico para el análisis de la teoría del caos, teniendo una visión práctica de los sistemas no lineales respecto al área de control y telecomunicaciones.

Por medio del estudio, simulación y montaje de dicho circuito se pueden conocer conceptos importantes sobre los sistemas no lineales como lo son equilibrio, estabilidad, comportamientos locales y globales, bifurcaciones, y soluciones de estado estacionario; y realizar algunas aplicaciones básicas en el área de control y las telecomunicaciones.

## **3. OBJETIVOS**

### **3.1. OBJETIVO GENERAL**

Mediante el estudio, simulación e implementación del circuito de Chua, ilustrar algunos conceptos importantes en la dinámica de un sistema no lineal con comportamiento caótico tales como: equilibrio, estabilidad, comportamientos locales y globales, bifurcaciones, y soluciones de estado estacionario; y realizar algunas aplicaciones básicas en el área de control y las telecomunicaciones.

#### **3.1.1. Objetivos específicos**

- Realizar un análisis teórico que sirva como justificación del uso del circuito Chua en el análisis de los comportamientos caóticos en los sistemas no lineales.
- Mediante el uso de software de simulación de circuitos eléctricos e implementación de modelos numéricos que solucionan el conjunto de ecuaciones diferenciales asociadas a los mismos, mostrar el comportamiento de los sistemas caóticos mediante el uso del circuito Chua.
- Realizar un prototipo de laboratorio para el oscilador Chua que permita verificar experimentalmente fenómenos dinámicos como equilibrios, estabilidad, órbitas periódicas, bifurcaciones y caos, conforme a predicciones teóricas por simulación.
- Ilustrar una aplicación del oscilador Chua en las áreas de control y telecomunicaciones.

## 4. CONCEPTOS BÁSICOS

Los sistemas se pueden considerar como la transformación de un conjunto de señales de entrada derivado de la respuesta de un sistema. Los sistemas son la interconexión de componentes, dispositivos o subsistemas, que representan desde procesamiento de señales y comunicaciones, motores electromecánicos, hasta plantas de procesos, entre otros [3].

### 4.1. SISTEMAS LINEALES

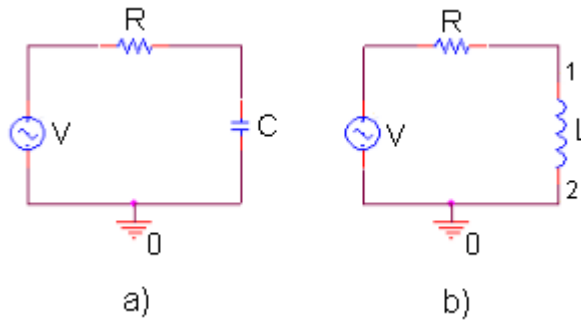
Se considera un sistema lineal cuando la relación de las señales de entrada y salida es una línea recta que pasa por el origen. Teóricamente son aquellos sistemas que cumplen con la propiedad de superposición, es decir, que la respuesta de un sistema ante una entrada formada por la suma ponderada de varias señales, es la suma ponderada de las respuestas del sistema a cada una de estas señales de entrada. Matemáticamente se dice que un sistema es lineal si:

Sea  $y_1(t)$  la respuesta de un sistema continuo a una entrada  $x_1(t)$  y sea  $y_2(t)$  la respuesta de un sistema continuo a una entrada  $x_2(t)$ , entonces, el sistema es lineal si se cumple:

1. *Propiedad aditiva*; la respuesta a  $x_1(t) + x_2(t)$  es  $y_1(t) + y_2(t)$ .
2. *Propiedad homogénea*; la respuesta a  $a * x_1(t)$  es  $a * y_1(t)$ , donde  $a$  es una constante.

**4.1.1. Sistemas lineales de primer orden.** Estos sistemas pueden usarse para describir circuitos lineales de primer orden como los mostrados en la Figura 1.

**Figura 1:** Circuitos de primer orden, donde a) Circuito RC y b) Circuito RL.



Por tanto, dicho sistema es aquel cuya salida  $y(t)$  puede ser descrita por una ecuación diferencial de primer orden, la cual se obtiene a través del análisis en el tiempo de los circuitos.

Obteniendo:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bf(t) \quad , \quad y(0) = Y_0$$

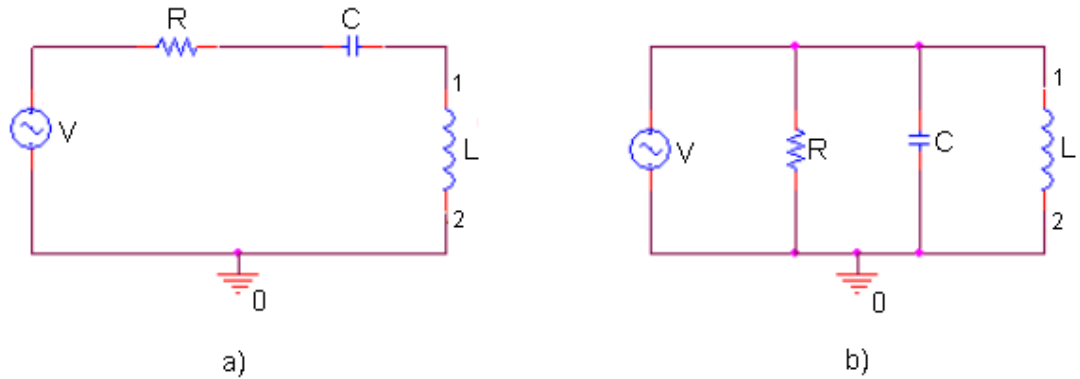
Donde  $a_1$ ,  $a_0$  y  $b$  son constantes, y  $f(t)$  es la entrada al sistema.

Estas ecuaciones diferenciales sirven para el análisis de circuitos de primer orden RC y RL, siendo la capacitancia (C) y la inductancia (L) elementos almacenadores de energía, en los cuales se pueden establecer las condiciones iniciales. Se dice que un circuito electrónico es de primer orden cuando éste contiene sólo un elemento almacenador de energía.

Experimentalmente se puede describir un sistema real por medio de una ecuación diferencial de primer orden siendo esta la forma más sencilla de mostrar matemáticamente un sistema dinámico.

**4.1.2. Sistemas lineales de segundo orden.** Estos sistemas pueden usarse para describir circuitos lineales de segundo orden como los mostrados en la Figura 2.

**Figura 2:** Circuitos de segundo orden, donde a) Circuito RLC serie y b) Circuito RLC paralelo.



Por tanto, dicho sistema es aquel cuya salida  $y(t)$  puede ser descrita por una ecuación diferencial de segundo orden, la cual se obtiene a través del análisis en el tiempo de los circuitos.

Obteniendo por ejemplo:

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bf(t) \quad , \quad y(0) = Y_{01} , y'(0) = Y_{02}$$

Donde  $a_2, a_1, a_0$  y  $b$  son constantes, y  $f(t)$  es la entrada al sistema.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se usan para el análisis de circuitos de segundo orden, es decir aquellos que poseen dos elementos almacenadores de energía, como el circuito RLC.

**4.1.3. Ecuaciones de estado, vectores de campo y trayectorias.** En el análisis del dominio del tiempo de sistemas lineales, no lineales y lineales a tramos, se utiliza el concepto de estado de un sistema, el cual describe un conjunto de variables tal que el conocimiento de estas, sus funciones en la entrada, junto con las ecuaciones que describen su dinámica, son suficientes para proporcionar la salida y el estado futuro del sistema.

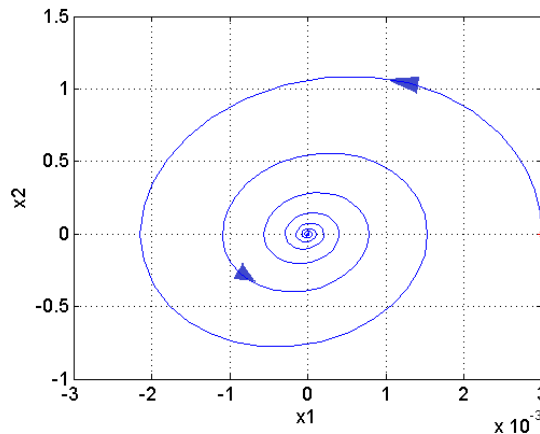
Un circuito conformado por elementos resistivos y elementos almacenadores de energía, puede describirse a través de un sistema de ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = F[X(t), t] \quad , \quad x(0) = X_0$$

Donde  $x(t) = [X_1(t), X_2(t), X_3(t) \dots, X_n(t)]^T \in R^n$  se conoce como vector de estado, y  $F[X(t), t] = [F_1(X(t), t), F_2(X(t), t) \dots, F_n(X(t), t)]^T$  es un mapa de n dimensiones o vector de campo el cual define la dirección y la velocidad de las trayectorias en cada punto del espacio de estados en cualquier instante de tiempo determinado, sabiendo que  $\dot{x}(t)$  es la derivada de  $x(t)$  respecto al tiempo, siendo  $X_0$  es la condición inicial del sistema. [1]

Las trayectorias son curvas de solución en el espacio de fase que representan cambios tanto en comportamientos físicos como lógicos, de tal forma que permite comprender el cambio de una variable. También permite compararlo con otra variable de igual importancia en un sistema determinado, estas representan la dirección del sistema mediante los tipos de graficas que genera y brindan información que no se podría obtener al graficar señales en función del tiempo. Como ejemplo ya sean  $x_1$  en función de  $x_2$ , mostrando una dirección y su comportamiento en un tiempo determinado por esto la gráfica se muestra una trayectoria que comienza en  $(3e-3, 0)$  y va hacia el origen, es la solución cuando  $\dot{x}_1 = -55.55 x_2$  y  $\dot{x}_2 = (10e3)x_1 - (5)x_2$ . Ver Figura 3.

**Figura 3:** Trayectoria en el espacio de estados. CI =  $(3e-3, 0)$ . Solución de  $\dot{x}_1 = -55.55 x_2$  y  $\dot{x}_2 = (10e3)x_1 - (5)x_2$ .



**4.1.4. Puntos de equilibrio.** Representa una coordenada en la cual el sistema presenta comportamientos inusuales de estabilidad en comparación a los otros puntos. En el espacio de estados un punto de equilibrio se define por:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 \dots = \dot{x}_n = 0$$

Se puede decir que el punto de equilibrio se obtiene cuando igualamos la derivada de cada variable de estado a cero. En los sistemas no lineales se pueden obtener múltiples puntos de equilibrio. A continuación se mostrará un ejemplo sencillo:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_2}x_1 - \frac{1}{C_2}I, \quad I = Gx_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C_2}x_1 - \frac{G}{C_2}x_2\end{aligned}$$

*Para hallar el punto de equilibrio se tiene:*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = \dot{x}_2 &= 0 \\ 0 &= -\frac{1}{L}x_{2eq} \\ x_{2eq} &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{C_2}x_{1eq} - \frac{G}{C_2}x_{2eq}\end{aligned}$$

*Al reemplazar  $x_{2eq}$  se obtiene*

$$\begin{aligned}x_{1eq} &= 0 \\ \text{punto de equilibrio} &= (0,0)\end{aligned}$$

**4.1.5. Estabilidad.** Considerando el sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = Ax$$

Donde  $A$  es una matriz real  $2 \times 2$  la cual representa a la matriz Jacobiana ( $J_F(x)$ ). Esta se forma por las derivadas parciales de una función ( $F(x)$ ). Dicha matriz se representa así:

$$J_F(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Ahora, para conocer el comportamiento cualitativo se deben hallar los auto valores que salen de la matriz jacobiana, estos predicen exactamente qué comportamiento está involucrado dependiendo del valor obtenido. Para conocer el auto valor se calcula  $\lambda$ , haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Donde  $I$  es la matriz identidad. Al obtener los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  se debe tener en cuenta que:

**Tabla 1:** Tipos de estabilidad. Fuente: Nonlinear Systems / H. Khalil – 2da edición.

Auto valores de $A$	Tipo de equilibrio
si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales negativos	nodo estable
si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales positivos	nodo inestable
si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son complejos con $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$	foco estable
si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son complejos con $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$	foco inestable
si $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son imaginarios	Centro

## 4.2. SISTEMAS NO LINEALES

Los sistemas no lineales modelan un comportamiento más real de los movimientos dinámicos. Poseen múltiples equilibrios los cuales pueden ser mirados de forma local o global. De igual manera en algunos casos se presentan ciclos límites, bifurcaciones y caos, las cuales son características que sólo poseen este tipo de sistemas. Por ejemplo, las ecuaciones vistas a continuación modelan un péndulo simple amortiguado siendo estas una representación de los sistemas autónomos no lineales de segundo orden.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) = x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) = -a \sin x_1 - bx_2\end{aligned}$$

*Donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas.*

El plano  $x_1, x_2$  muestra a través de ecuaciones ideas básicas de cómo es descrito el comportamiento de los sistemas no lineales de orden superior, a este plano se le conoce como plano de fase o plano de estados.

**4.2.1. Sistemas no lineales con linealidad a tramos.** Existen sistemas no lineales que pueden ser analizados por partes obteniendo comportamientos lineales en ciertos tramos, a esto se le llama comportamiento local. Para realizar esta acción se debe dividir la parte no lineal de tal forma que se obtengan partes lineales en cada tramo; conocer su comportamiento cualitativo y cuantitativo en cada situación para luego tener una conclusión global a partir de los tramos lineales. Sin este procedimiento es más complicado el análisis aunque con mayor riqueza en su comportamiento.

**4.2.2. Ciclos límites y bifurcaciones.** Un sistema no lineal presenta un ciclo límite cuando existe una oscilación sin amortiguación, es decir, tiene una solución periódica no trivial. Cuando este se observa en el plano de fase tenemos una órbita de trayectoria cerrada; esta característica solo es visible en los sistemas no lineales.

El ciclo límite también puede ser estable o inestable, es estable cuando todas las trayectorias vecinas tienen dirección hacia una órbita cerrada, la cual representa una región de equilibrio. Cuando existe un ciclo límite inestable pasa una situación similar a lo nombrado anteriormente, solo que esta vez las trayectorias divergen o se repelen del ciclo límite alejándose de la órbita cerrada. Ahora, teniendo en cuenta el concepto de ciclo límite, una bifurcación aparece cuando se varía un parámetro del sistema produciendo un cambio cualitativo, como por ejemplo, se tiene un ciclo límite inestable y al variar uno de sus parámetros, este cambia a estable o a una órbita de diferentes puntos.

**4.2.3. Caos.** Antes de comprender la definición de caos es importante mencionar que existe una línea de conceptos y definiciones previos que se deben entender. Primero se debe partir del estudio de los sistemas lineales para así conocer los diferentes tipos de oscilaciones, las cuales en este caso son producidas en un circuito en paralelo RLC. Posteriormente se empieza el estudio del elemento no lineal (diodo de Chua) y como al relacionar este con el circuito en paralelo RLC nos enseña conceptos como los sistemas dinámicos no lineales, los cuales son el primer paso para entender el caos.

Teniendo claro lo anterior se puede entrar a estudiar el caos, este se caracteriza por mecanismos de *stretching* y *folding*, los cuales actúan sobre las trayectorias de un sistema dinámico específico produciendo que estas se expandan exponencialmente y se plieguen de nuevo. Este comportamiento caótico de las trayectorias es muy sensible tanto a las condiciones iniciales como a los cambios producidos en el sistema. Por esta razón es importante saber que los valores para generar caos son muy exactos y cualquier pequeño cambio mostrará un comportamiento diferente. Para el estudio del caos se muestra al circuito de Chua<sup>(\*)</sup> como un circuito electrónico simple, de fácil construcción y económico, el cual es el único sistema físico conocido para el que se ha demostrado matemáticamente la presencia de caos, y es a través de este que en la sección 7 de este libro se brindarán los conceptos y herramientas necesarias que ayudan a comprender un poco el concepto de caos.

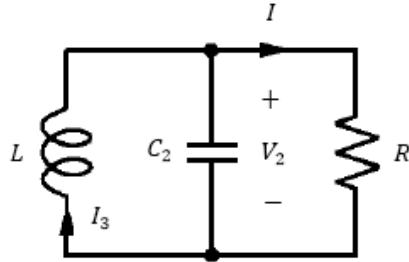
---

(\*) El circuito de Chua fue introducido en el año 1993 por el ingeniero eléctrico e informático Leon Ong Chua durante una visita a la Universidad de Waseda, Japón. Este es un circuito electrónico simple, de fácil construcción el cual exhibe el comportamiento caótico clásico.

## 5. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN (RLC)

### 5.1. ANÁLISIS TEÓRICO

**Figura 4:** Circuito RLC.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Cuando se trabaja un circuito paralelo RLC, ver Figura 4, existen dos elementos almacenadores de energía que son la capacitancia y el inductor. Inicialmente en el tiempo  $t = 0$ , la corriente en el inductor es  $I_{30}$  y la tensión en el capacitor es  $V_{20}$ , por tanto se dice que la energía total almacenada en el campo magnético del inductor y en el campo eléctrico del capacitor se determina por la siguiente ecuación:

$$W_T = W_l + W_c = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CV^2$$

$$W_T(0) = \frac{1}{2}LI_{30}^2 + \frac{1}{2}C_2V_{20}^2 \quad t = 0 \quad (1)$$

Luego, al analizar el circuito RLC en el tiempo  $t > 0$ , las ecuaciones que describen el circuito son:

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L}V_2 \quad (2)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{1}{C_2}I \quad , \quad I = GV_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}V_2 \quad (3)$$

Donde  $I_3$  es la corriente que pasa por el inductor,  $V_2$  es el voltaje en la capacitancia y  $G$  es la inversa del valor de la resistencia siendo así su equivalente en conductancia.

Teniendo las ecuaciones (2) y (3) se mostrará un análisis cuantitativo y cualitativo del circuito comenzando por su punto de equilibrio. Como es un sistema lineal solo tendrá un punto de equilibrio, este se hallará haciendo esta igualdad:

$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= \frac{dV_2}{dt} = 0 \\ 0 &= -\frac{1}{L}V_2 \\ V_{2eq} &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{C_2}I_{3eq} - \frac{G}{C_2}V_{2eq}\end{aligned}$$

*Reemplazamos  $V_{2eq}$  y obtenemos que:  $I_{3eq} = 0$*  (4)

De esta forma se sabe que el punto de equilibrio ( $V_{2eq}, I_{3eq}$ ) estará en (0,0) pero además de eso se deberá conocer el tipo de equilibrio hallando sus auto-valores. Para esto se hace uso de la matriz jacobiana de las ecuaciones (2) y (3), en este caso será:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} \end{bmatrix}$$

Se sabe que  $\det(\lambda I - A) = 0$  ; donde  $A = J$

$$\lambda^2 + \frac{G}{C_2}\lambda + \frac{1}{LC_2} = 0$$

Los auto-valores obtenidos son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{G}{2C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C_2}\right)^2 - \frac{1}{LC_2}} \tag{5}$$

Si  $\left(\frac{G}{2C_2}\right)^2 > \frac{1}{LC_2}$ , el resultado serán auto-valores reales, si  $G$  es negativa se tendrá un auto-valor real positivo que nos mostrará un nodo inestable y si  $G$  es positiva se tendrá un auto-valor real negativo que mostrará un nodo estable en el origen.

Si  $\left(\frac{G}{2C_2}\right)^2 < \frac{1}{LC_2}$ , se tiene como resultados auto-valores complejos conjugados y con la expresión (5) se observa que  $G$  se vuelve condicional para el comportamiento cualitativo del sistema, es decir, si  $G > 0$  se tendrá un equilibrio con foco estable, el resistor tendría un comportamiento disipativo, por tanto la energía almacenada en el inductor y en el capacitor se disipará en forma de calor en la resistencia, obteniendo un comportamiento Subamortiguado. Si  $G < 0$  se tendrá un equilibrio con foco inestable, la resistencia tendrá una disipación negativa y por lo tanto esta energía, la cual alimenta todo el circuito, crecerá con el tiempo en forma exponencial ya que esta no se consume y finalmente, si  $G = 0$  no habrá un equilibrio, la energía almacenada en el inductor y capacitor no es disipada por la resistencia, por lo que se obtiene un comportamiento no amortiguado, en el que la energía oscila entre los dos elementos almacenadores de energía.

Para comprobar lo anterior se utiliza la ecuación (5) con los valores de,  $G = 500 * 10^{-6} [s]$  y  $-500 * 10^{-6} [s]$  y  $0 [s]$ ,  $L = 18 * 10^{-3} [H]$ ,  $C_2 = 100 * 10^{-9} [F]$ .

Auto valores para  $G = 500 * 10^{-6} [s]$ ;

$$\lambda_1 = -2.5 * 10^3 + j2.3437 * 10^4$$

$$\lambda_2 = -2.5 * 10^3 - j2.3437 * 10^4$$

Los valores que se obtienen indican que hay un equilibrio con foco estable, es decir, las trayectorias van hacia el origen.

Auto valores para  $G = -500 * 10^{-6} [s]$ ;

$$\lambda_1 = 2.5 * 10^3 + j2.3437 * 10^4$$

$$\lambda_2 = 2.5 * 10^3 - j2.3437 * 10^4$$

Los valores que se obtienen indican que hay un equilibrio con foco inestable, es decir, las trayectorias van hacia afuera del origen.

## 5.2. ANÁLISIS EN MATLAB®

Para comprobar los resultados anteriores utilizamos la herramienta Matlab y por medio de un código se simulan las ecuaciones que modelan el sistema y se comparan los resultados con los obtenidos en la sección 3.1. Ver anexo A.1. Se procede a simular las ecuaciones diferenciales que representan al circuito en paralelo RLC, considerando los siguientes valores para sus parámetros:

Parametros de simulacion:

$$G = 500 * 10^{-6} [s] , -500 * 10^{-6} [s] , 0 [s]$$

$$L = 18 * 10^{-3} [H]$$

$$C_2 = 100 * 10^{-9} [F]$$

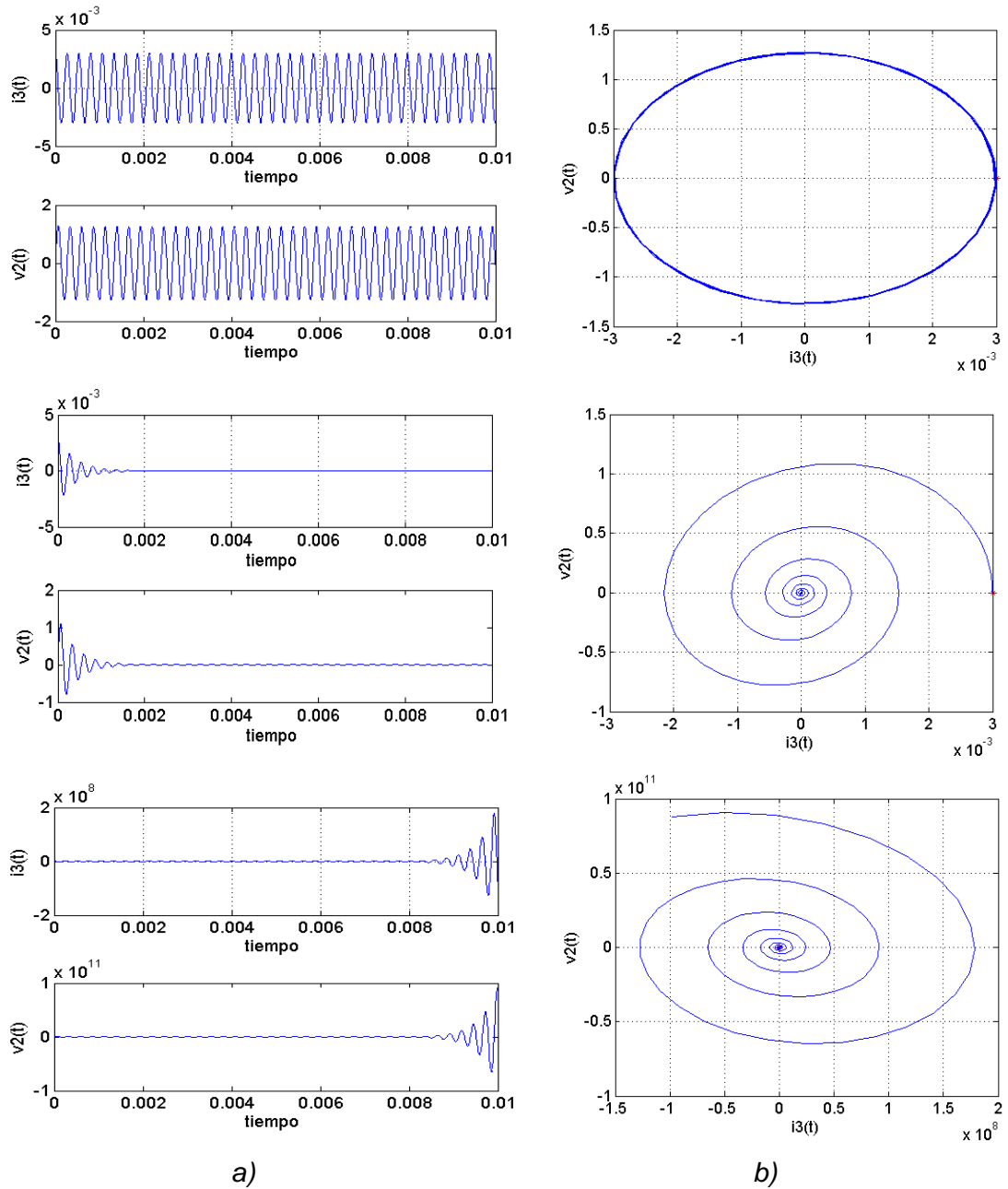
Es importante mencionar que la elección de los parámetros no se hizo de forma aleatoria, estos fueron tomados del artículo guía *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*. Se destaca que aunque se hicieron pruebas con otros valores se decidieron tomar estos, para de esa forma tener como punto de comparación el documento guía.

El código es basado en el comando ode45 como se muestra en el anexo A.4, que le da solución a las ecuaciones diferenciales para obtener las gráficas de la Figura 5, dependiendo del valor de G asignado.

En la Figura 5(a), se obtiene que la solución para un valor de  $G = 0$  es un comportamiento no amortiguado. Esto significa que no hay una resistencia en el circuito y la energía que existe no tiene como disiparse si no que se oscila entre ellos. Por esta razón se aprecia en la gráfica en función del tiempo un comportamiento oscilatorio para la corriente en la bobina y para la tensión en el capacitor. Cuando se observa el comportamiento de las trayectorias en el modo XY al graficar  $i_3$  vs  $v_2$ , se muestra una trayectoria cerrada lo cual indica que las señales en el tiempo nunca dejan de oscilar ya que para este caso no existe un punto de equilibrio. Por otro lado la Figura 5(b) se da para un valor de  $G = 500\mu S$ , lo que da por resultado un comportamiento Subamortiguado, para un  $G > 0$ . Esto se traduce en que la energía existente en los elementos almacenadores de energía se disipa en la resistencia R, lo cual es apreciable en la gráfica en el tiempo de la tensión  $v_2$  y de la corriente  $i_3$ . Por

lo cual al realizar la grafica  $i_3$  vs  $v_2$  en modo XY se observa como las trayectorias se dirigen hacia el punto de equilibrio ubicado en  $(0,0)$  conocido como foco estable.

**Figura 5:** Señales en el tiempo y trayectorias en el espacio de estado. CI =  $(3e - 3, 0)$  en donde: a)  $G = 0$ , b)  $G = 500\mu S$  y c)  $G = -500\mu S$ .



Hecho en MATLAB®

Finalmente para un valor de  $G = -500\mu S$  se obtiene la gráfica de la Figura 5(c), la cual representa al comportamiento sobre amortiguado, para un  $G < 0$ . Esto quiere decir que la resistencia tendrá una disipación negativa provocando que la energía almacenada en la bobina y en el capacitor crezca exponencialmente a través del tiempo. Lo anterior se puede apreciar al analizar la gráfica en el tiempo de la tensión  $v_2$  y de la corriente  $i_3$ . Por lo tanto el comportamiento de las trayectorias en el modo XY será alejarse del punto de equilibrio conocido como foco inestable.

Considere que las gráficas de Figura 5 tienen una condición inicial  $(3e - 3, 0)$  la cual es mostrada con un punto rojo en las trayectorias en el espacio de estados.

### 5.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®

Al realizar la simulación del circuito lineal de segundo orden RLC en el programa OrCAD-Cadence® se tuvieron en cuenta los mismos parámetros de la sección 5.2.

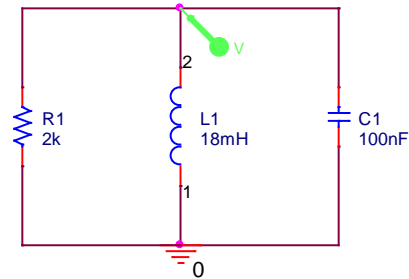
$$\begin{aligned} \text{Condiciones iniciales: } I_{L0} &= 3e - 3[A]; V_{C0} = 0[V]; \\ L &= 18mH; C = 100nF \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales tomadas fueron las mismas del artículo guía [1], [2]. Si se desea tomar otros valores debe considerarse el análisis teórico de la sección 5.1.

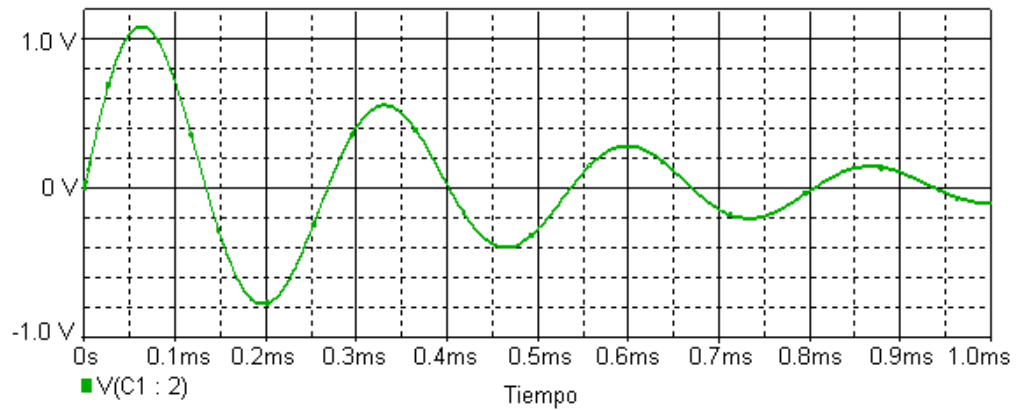
Según lo anterior se procede a realizar el esquema del circuito de la Figura 4 y teniendo en cuenta los parámetros dados, se procede a variar el valor de la conductancia  $G$ , es decir la resistencia  $R$ , asignándole su valor equivalente en ohmios. De esta forma se obtienen las Figuras de la 6 a la 14, las cuales pueden ser comparadas con los resultados obtenidos en la sección 3.2 para el software Matlab, donde se consideraron las mismas condiciones y parámetros.

**Simulación para la situación  $G > 0$ , Comportamiento Subamortiguado:  $G = 500\mu S$ :**

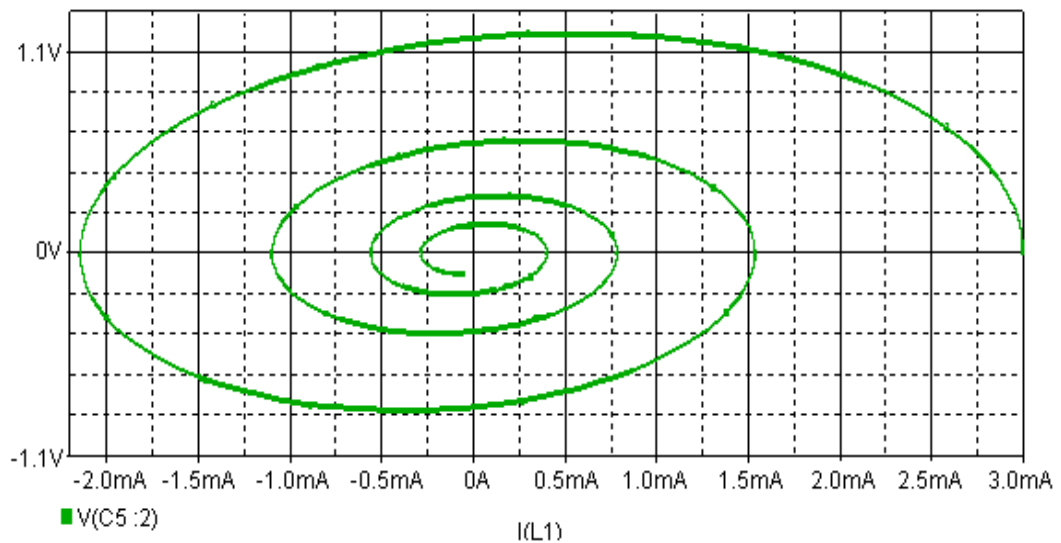
**Figura 6:** Esquema del circuito RLC.



**Figura 7:** Voltaje en capacitancia Vs Tiempo.



**Figura 8:** Voltaje en capacitancia Vs Corriente en la inductancia.



Simulación para la situación  $G < 0$ , Comportamiento Sobreamortiguado:  $G = -500\mu S$

Figura 9: Esquema del sistema.

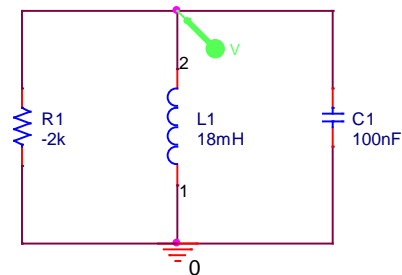


Figura 10: Voltaje en capacitancia Vs Tiempo.

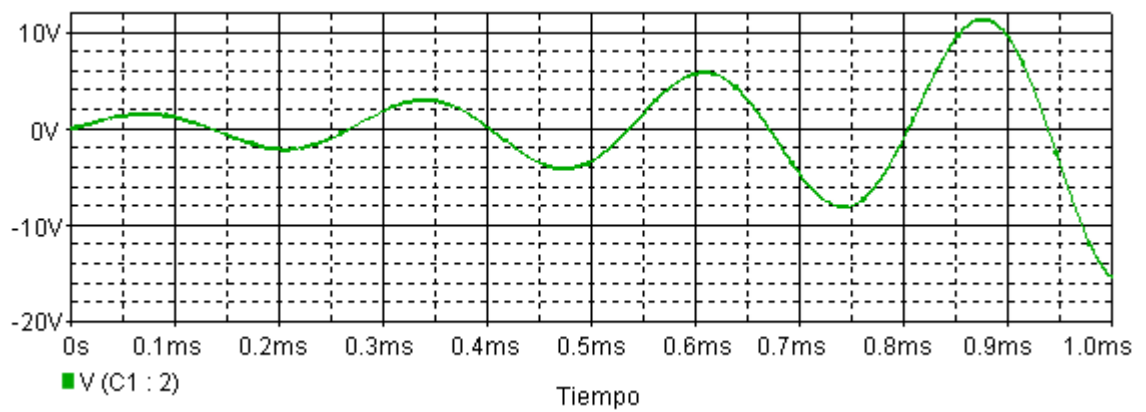
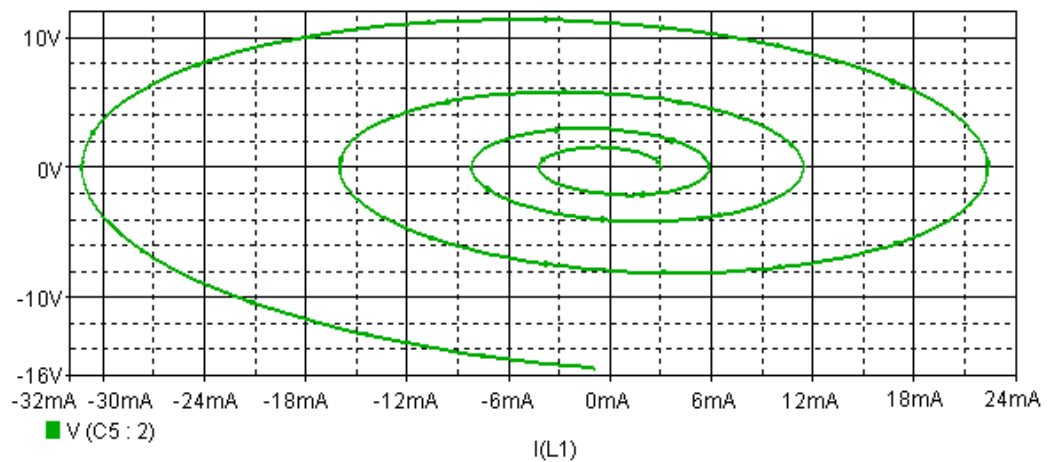
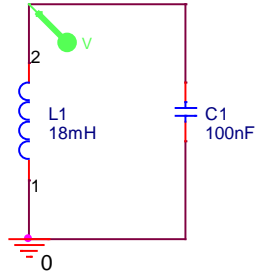


Figura 11: Voltaje en capacitancia Vs Corriente en la inductancia.

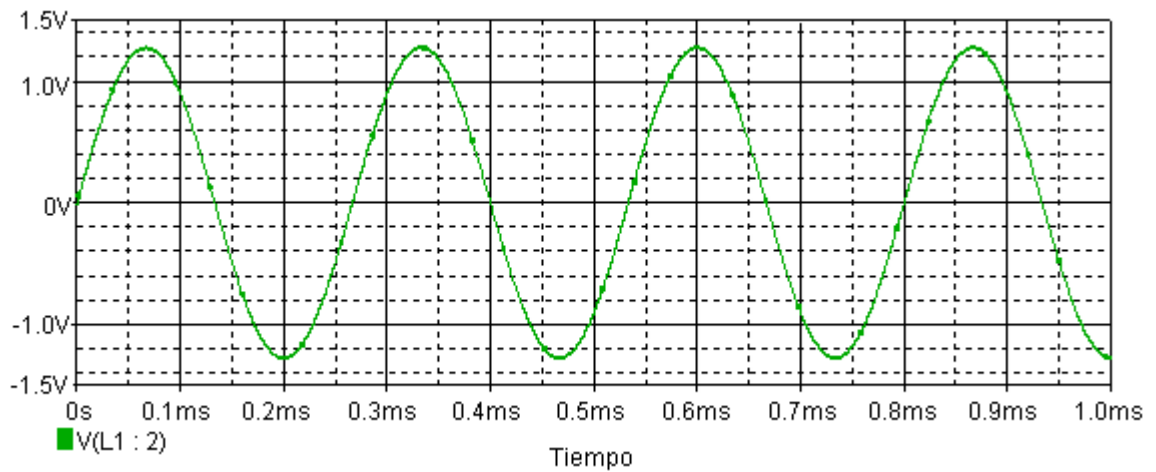


**Simulación para la situación  $G = 0$ , Comportamiento No amortiguado.**

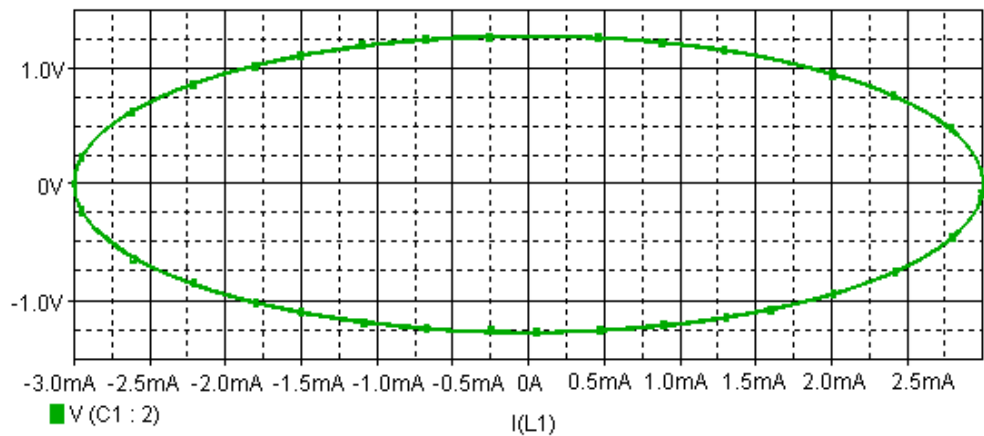
**Figura 12:** Esquema del sistema.



**Figura 13:** Voltaje en la capacitancia Vs Tiempo.



**Figura 14:** Voltaje en la capacitancia Vs Corriente en la inductancia.



Con los resultados obtenidos en OrCAD-Cadence® corroboramos el análisis teórico y el de Matlab en tres tipos de comportamientos cualitativos más significativos del circuito, como lo son  $G > 0$ ,  $G < 0$ ,  $G = 0$ , los cuales mostraron comportamientos Subamortiguado, sobreamortiguado y oscilación continua, respectivamente, demostrando la importancia de un parámetro para controlar cada situación, en este caso el parámetro  $G$  es quien nos dicta cada comportamiento y de aquí en adelante se seguirá trabajando en torno a él.

#### **5.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO**

Al realizar el montaje de laboratorio del circuito RLC, se encontraron dos inconvenientes. El primero fue encontrar un procedimiento a través del cual se le pudieran asignar condiciones iniciales al inductor y al capacitor. Lo que decidió hacer fue conectarle durante unos minutos al circuito una fuente alterna, con una señal senoidal de frecuencia y amplitud elegidas aleatoriamente. Posterior a esto se desconectaba la fuente alterna y se procedía a medir las señales que existieran con el osciloscopio, pero no se podía observar ninguna señal que mostrara que la inductancia y la capacitancia presentaran alguna energía almacenada procedente de la fuente que fue conectada por un intervalo de tiempo.

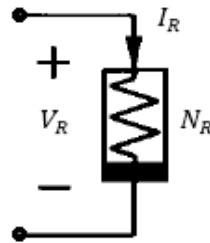
La razón dada para no poder observar las señales deseadas en el osciloscopio fue que los elementos almacenadores de energía si lograban cargarse gracias a la fuente alterna conectada pero que al retirar dicha excitación estos elementos se descargaban tan rápidamente que no fue posible capturar dichas señales en el osciloscopio.

## 6. ANÁLISIS DE UN ELEMENTO NO LINEAL - DIODO CHUA

### 6.1. ANÁLISIS TEÓRICO

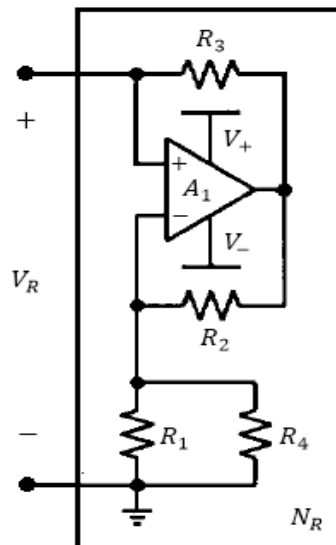
Un diodo Chua es un resistor activo no lineal que puede describirse con ecuaciones lineales a tramos. Este resistor no es comercial, pues se construye a partir de componentes de circuito como amplificadores operacionales y resistencias.

**Figura 15:** Diodo Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

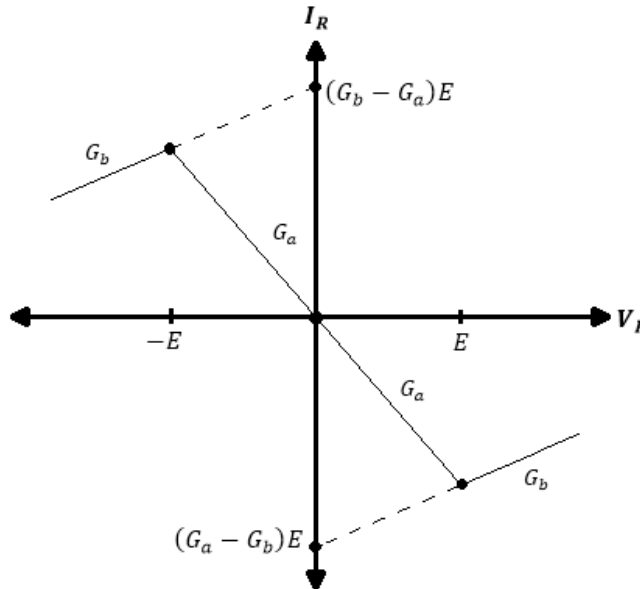
**Figura 16:** Esquema interno del diodo Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Siendo  $N_R$  un resistor no lineal, por medio de pruebas de laboratorio se encuentra su curva característica que se muestra gráficamente:

**Figura 17:** Punto de conducción característico del diodo Chua,  $I_R$  Vs  $V_R$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Para representar analíticamente la curva de conducción del resistor no lineal  $N_R$  es importante un análisis a tramos de la Figura 17, teniendo en cuenta las ecuaciones de la pendiente (1) y línea recta (2),

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2)$$

Podemos decir que para:

$$\begin{aligned} -E < V_R < E \quad , \quad \text{si } I_R = G_a V_R &\Rightarrow \text{si } V_R = 0 \rightarrow I_R = 0 \\ &\text{si } V_R = -E \rightarrow I_R = G_a(-E) \\ &\text{si } V_R = E \rightarrow I_R = G_a(E) \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} -\infty < V_R < E \quad , \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow G_b = \frac{y_2 - (-G_a E)}{0 - (-E)} = \frac{y_2 + G_a E}{E} \\ y_2 = (G_b - G_a)E \end{aligned}$$

Despejando  $y_2$  de la ecuación de la pendiente  $G_b$  en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) , \quad \text{donde } (x_0, y_0) = (0, (G_b - G_a)E) \\ y - (G_b - G_a)E &= m(x - 0) \\ \mathbf{I_R} &= \mathbf{G_b V_R} + (\mathbf{G_b} - \mathbf{G_a})\mathbf{E} \end{aligned} \quad (3)$$

Entonces:

$$E < V_R < \infty , \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow G_b = \frac{G_a E - y_1}{E - 0} = \frac{G_a E - y_1}{E}$$

$$\begin{aligned} \text{donde } (x_1, y_1) &= (0, y_1) \\ (x_2, y_2) &= (E, G_a E) \\ y_1 &= (G_a - G_b)E, \end{aligned}$$

Despejando  $y_1$  de la ecuación de la pendiente  $G_b$  en la ecuación de la recta:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) , \quad \text{donde } (x_0, y_0) = (0, (G_a - G_b)E) \\ y - (G_a - G_b)E &= m(x - 0) \\ \mathbf{I_R} &= \mathbf{G_b V_R} + (\mathbf{G_a} - \mathbf{G_b})\mathbf{E} \end{aligned} \quad (4)$$

Por tanto, la ecuación que representa analíticamente la curva de conducción del resistor no lineal o diodo Chua  $N_R$ , es:

$$\mathbf{I_R} = \mathbf{f(V_R)} = \begin{cases} \mathbf{G_b V_R} + (\mathbf{G_b} - \mathbf{G_a})\mathbf{E} , & \mathbf{V_R} < -\mathbf{E} \\ \mathbf{G_a V_R} , & -\mathbf{E} \leq \mathbf{V_R} \leq \mathbf{E} \\ \mathbf{G_b V_R} + (\mathbf{G_a} - \mathbf{G_b})\mathbf{E} , & \mathbf{V_R} > \mathbf{E} \end{cases} \quad (5)$$

## 6.2. ANÁLISIS EN MATLAB®

Para comprobar lo dicho en la sección 4.1, se realiza un cogido en Matlab (*ver anexo A.2*) donde se tomaran en cuenta los siguientes parámetros:

*Parametros de simulacion:*

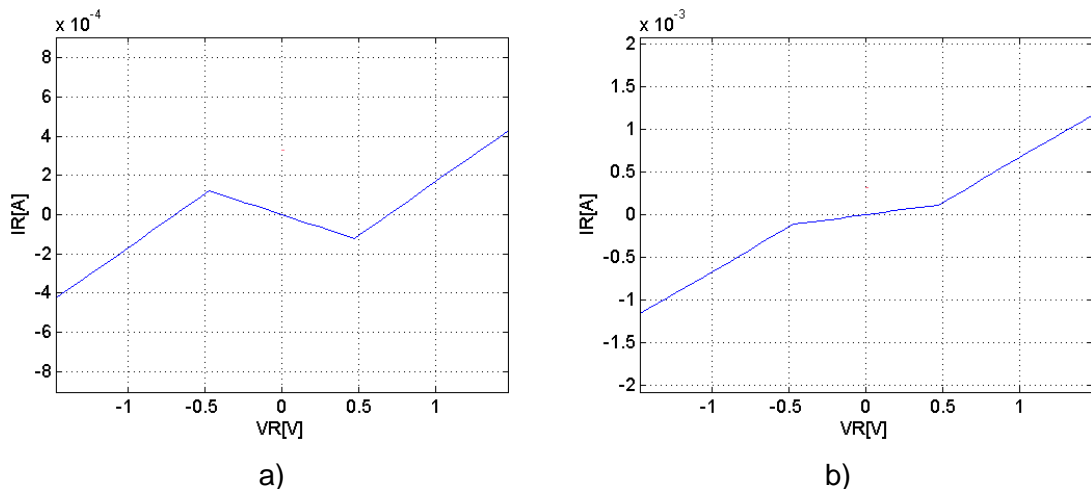
$$\begin{aligned} G_a &= -2.5757e - 4 [s] \quad \text{y} \quad 2.4243e - 4 [s] \\ G_b &= 45.45 * 10^{-6} [s] \end{aligned}$$

Dicho código nos permite obtener gráficamente el comportamiento lineal a tramos del elemento no lineal expuesto en el análisis teórico de la sección 4.1, ver la Figura 18.

Es importante mencionar que la elección de los parámetros no se hizo de forma aleatoria, estos fueron tomados del artículo guía *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*. Se destaca que aunque se hicieron pruebas con otros valores se decidieron tomar estos para de esa forma tener como punto de comparación el documento guía. Si se desea tomar otros valores para los parámetros se debe tomar como guía el análisis teórico de la sección 6.1.

Enfocándonos en el comportamiento del elemento no lineal desde una perspectiva circuital se debe tener en cuenta que cada tramo queda caracterizado por una línea recta con su respectiva pendiente. Esto nos indica que cuando existe un valor positivo en la pendiente de uno de sus tramos la resistencia se comporta como un elemento pasivo, ver Figura 18 (b), ya que disipa energía. En cambio cuando uno de sus tramos tiene un valor negativo en su pendiente este elemento se comporta como elemento activo suministrando energía hacia el circuito. Ver Figura 18(a).

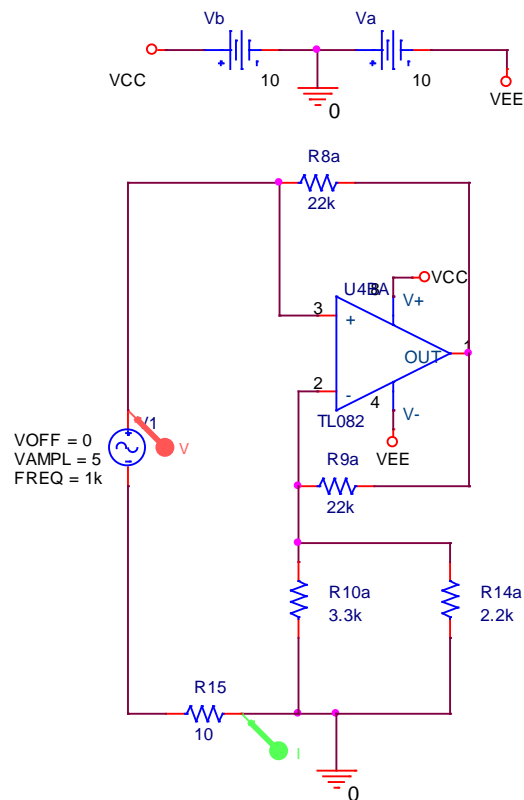
**Figura 18:** Punto de conducción característico del Diodo Chua, donde a)  $Ga = -2.5757e - 4[s]$  y en b)  $Ga = 2.4243e - 4 [s]$ .



### 6.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®

Teniendo en cuenta la Figura 16, con la intención de medir la corriente que pasa por el elemento no lineal, se adiciona un generador de señal senoidal y una resistencia de  $10\ \Omega$ , ver Figura 19. El generador va desde  $-5[V]$  hasta  $+5[V]$  formando el eje “x” de la gráfica, mientras la corriente que es medida en la resistencia de  $10\ \Omega$  forma el eje “y” para obtener el comportamiento lineal a tramos esperado como se puede ver en la Figura 20.

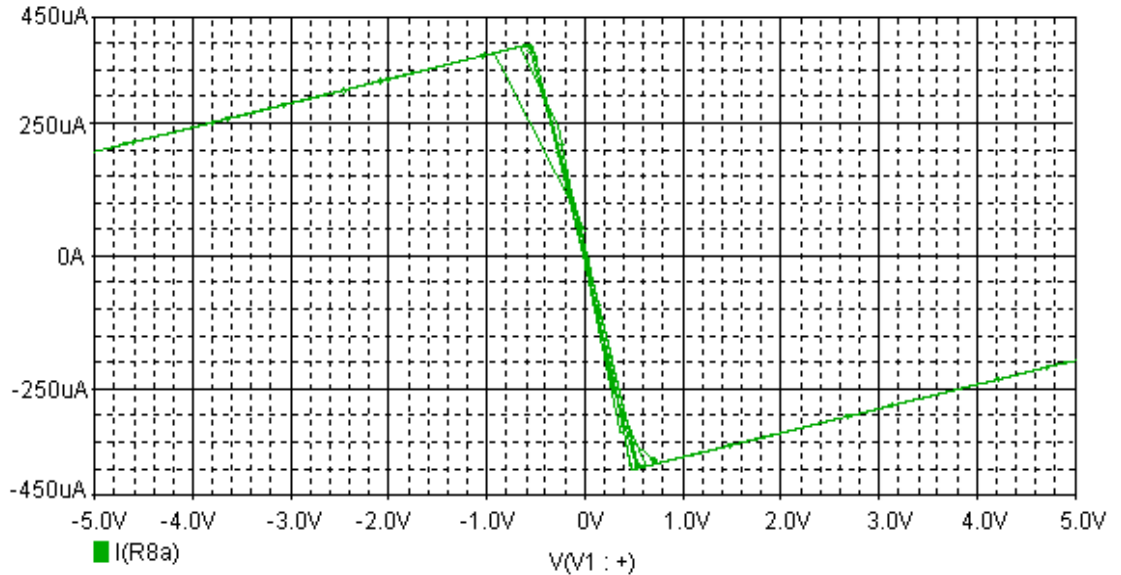
**Figura 19:** Esquema interno del diodo Chua.



Se debe tener en cuenta que la topología usada para representar circuitalmente el diodo Chua, ver Figura 19, así como todos los valores de los parámetros que la conforman fueron tomadas de *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*, y aunque existen otras topologías para representar el diodo Chua, esta es suficiente para mostrar el comportamiento lineal a tramos que lo caracteriza. Las otras topologías generalmente se

usan cuando se desea introducir el diodo Chua en un circuito más complejo, donde su comportamiento lineal a tramos se ve afectado por la dinámica del mismo.

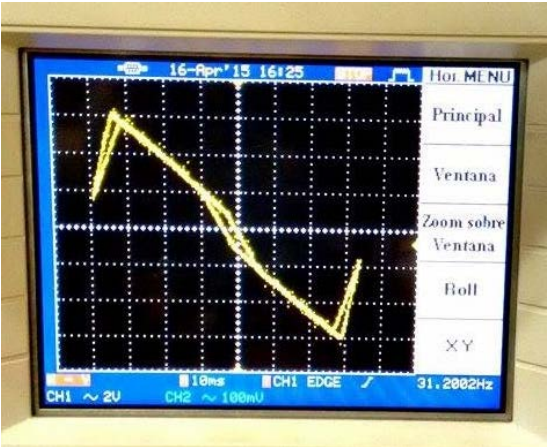
**Figura 20:** Simulación del punto de conducción característico del diodo Chua.



#### 6.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO

En la Figura 21 se puede apreciar el comportamiento lineal a tramos del elemento no lineal al montar en el laboratorio el esquema del circuito de la Figura 19 que lo representa. Note que la gráfica obtenida en el osciloscopio se puede comparar con los resultados simulados en los software Matlab y Orcad Capture®. En el montaje del circuito hay que tener en cuenta que la alimentación no es la misma que la simulada por que al hacerlo físicamente solo responde como un elemento lineal a tramos si se alimenta con  $+13[V]$  y  $-10[V]$  ya que operar el circuito con una alimentación dual de  $\pm 10[V]$  no se obtienen los resultados esperados. La razón para este comportamiento es que el circuito es alimentado con una fuente senoidal en dos extremos, donde colocando una resistencia en serie al terminal negativo de la fuente para así medir la corriente que pasa a través de todo el esquema que representa el diodo Chua, por tanto esto produce un desequilibrio en la toma de la señal al alimentarse el amplificador operacional con una fuente dual, razón por la cual debe ser alimentado con una pequeña diferencia para así lograr corregir un poco el efecto de la resistencia agregada.

**Figura 21:** Resultado en montaje en laboratorio de diodo Chua.

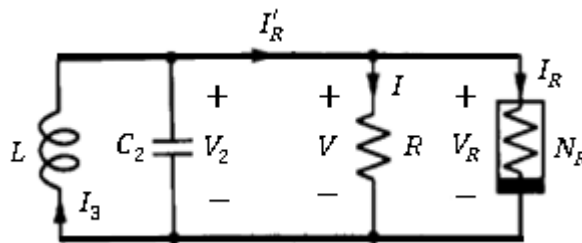


## 7. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO DE SEGUNDO ORDEN CON UN ELEMENTO NO LINEAL.

### 7.1. ANÁLISIS TEÓRICO

En este capítulo se agregará una resistencia no lineal al análisis y por lo tanto el circuito RLC será modificado para incluir en paralelo con “R” un resistor no lineal “NR”, ver Figura 22.

**Figura 22:** Circuito RLC en paralelo con el diodo Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Se puede simplificar el circuito si se combinan los elementos resistivos \$R\$ y \$N\_R\$ en un resistor no lineal \$N\_R'\$. Este se determina analíticamente por medio de las leyes de Kirchoff.

$$V_R' = V_2 = V_R$$

$$I_R' = I + I_R$$

Por lo tanto:

$$I_R' = (G * V_R') + f(V_R') = f'(V_R')$$

$$I_R' = f'(V_R') = \begin{cases} (G_b * V_R') + (G_b - G_a)E & \text{si } V_R' < -E \\ (G_a * V_R') & \text{si } -E \leq V_R' \leq E \\ (G_b * V_R') + (G_a - G_b)E & \text{si } V_R' > E \end{cases}$$

Donde:

$$G_a' = (G + G_a) \text{ y } G_b' = (G + G_b)$$

**7.1.1. Descripción como circuito no lineal a trozos.** El circuito de la Figura 22 puede ser descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias tomando a la corriente del inductor  $I_3$  y al voltaje en la capacitancia  $V_2$  como variables de estado.

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{I'_R}{C_2} \\ \frac{dV_2}{dt} &= \begin{cases} \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_b * V'_R)}{C_2} - \frac{(G_b - G_a)E}{C_2} & \text{si } V'_R < -E \\ \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_a * V'_R)}{C_2} & \text{si } -E \leq V'_R \leq E \\ \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_b * V'_R)}{C_2} - \frac{(G_a - G_b)E}{C_2} & \text{si } V'_R > E \end{cases} \end{aligned}$$

El análisis lineal a trozos se utiliza para que el espacio de estados de un sistema dinámico no lineal sea dividido en un grupo de regiones afines separadas, para estudiarlas en aislamiento y luego unir las en cada frontera.

Para este caso se puede separar en 3 regiones afines que son:

$$\begin{aligned} V'_R < -E & \text{ región exterior} \\ -E \leq V'_R \leq E & \text{ región media} \\ V'_R > E & \text{ región exterior} \end{aligned}$$

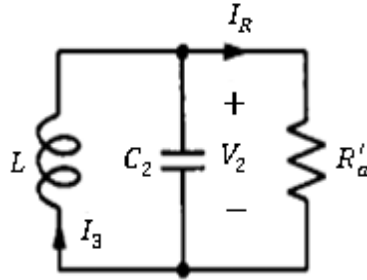
Haciendo uso del análisis lineal por partes se analiza cada región.

**7.1.2. Región media ( $-E \leq V'_R \leq E$ ).** El circuito en esta región está descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_a * V'_2)}{C_2} \end{aligned}$$

El circuito equivalente a las ecuaciones diferenciales mostradas se muestra en la Figura 23.

**Figura 23:** Circuito representativo de la región media, para  $R'_a = 1/G'_a$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Tanto el circuito como las ecuaciones describen un comportamiento lineal con un simple punto de equilibrio, similar al circuito RLC, mostrando un punto de equilibrio en el origen cuya estabilidad será mostrada por los auto-valores obtenidos de la matriz Jacobiana, que en este caso será:

$$J_{a'} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{LC_2} & -\frac{G'_a}{C_2} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\det(\lambda * I - A) \quad ; \quad \text{donde } A = J_{a'}$$

$$\lambda^2 + \frac{G'_a}{C_2} * \lambda + \frac{1}{LC_2} = 0$$

Los auto-valores obtenidos son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{G'_a}{2C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{G'_a}{2C_2}\right)^2 - \frac{1}{LC_2}} \quad (1)$$

Si  $\left(\frac{G'_a}{2C_2}\right)^2 > \frac{1}{LC_2}$ , el resultado serán auto-valores reales, si  $G'_a$  es negativa se tendrá un auto-valor real positivo que mostrará un nodo inestable y si  $G'_a$  es positiva se tendrá un auto-valor real negativo que mostrará un nodo estable en el origen.

Por otro lado si  $\left(\frac{G'_a}{2C_2}\right)^2 < \frac{1}{LC_2}$ , se tiene como resultado auto-valores complejos conjugados.

Según la expresión (1) se observa que  $G'_a$  se vuelve condicional para el comportamiento

cualitativo del sistema, es decir si  $G'_a > 0$ , las trayectorias tendrán dirección hacia el origen y se observara un equilibrio foco estable, pero si  $G'_a < 0$ , las trayectorias se mueven hacia afuera del origen y se obtendrá un equilibrio foco inestable.

Para comprobar lo anterior,  $G$  tomara los valores de  $500 * 10^{-6} [s]$  y  $1 * 10^{-3} [s]$ ,  $L = 18 * 10^{-3} [H]$ ,  $C_2 = 100 * 10^{-9} [F]$ ,  $G_a = -757.57 * 10^{-6} [s]$ ,  $G_b = 45.45 * 10^{-6} [s]$

*Auto-valores para  $G = 500 * 10^{-6} [s]$*

$$\begin{aligned} G_a' &= -2.5758 * 10^{-4} \\ \lambda_1 &= 1.2879 * 10^3 + j2.3535 * 10^4 \\ \lambda_2 &= 1.2879 * 10^3 - j2.3535 * 10^4 \end{aligned}$$

El resultado anterior indica que un equilibrio es foco inestable, es decir, las trayectorias van hacia afuera del origen.

*Auto-valores para  $G = 1 * 10^{-3} [s]$*

$$\begin{aligned} G_a' &= 2.4242 * 10^{-4} \\ \lambda_1 &= -1.2121 * 10^3 + j2.3539 * 10^4 \\ \lambda_2 &= -1.2121 * 10^3 - j2.3539 * 10^4 \end{aligned}$$

El resultado anterior indica que un equilibrio es foco estable, es decir, las trayectorias van hacia el origen.

**7.1.3. Regiones exteriores ( $|V_1| > E$ ).** El circuito para estas regiones está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_b * V'_R)}{C_2} - \frac{(G_b - G_a)E}{C_2} \quad \text{si } V'_R < -E \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G'_b * V'_R)}{C_2} - \frac{(G_a - G_b)E}{C_2} \quad \text{si } V'_R > E \end{aligned}$$

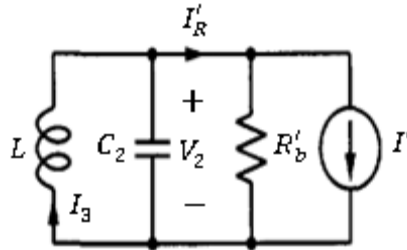
Ahora se dice que:

$$I' = (G_b - G_a)E \text{ cuando } V'_R < -E$$

$$I' = (G_a - G_b)E \text{ cuando } V_R' > E$$

Las dos regiones exteriores son circuitos equivalentes a fines que consisten de un paralelo RLC con una derivación de corriente que se llamará  $I'$  como muestra la Figura 24.

**Figura 24:** Circuito representativo de la región exterior, para  $R_b' = 1/G_b'$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Para hallar los puntos de equilibrio se trabaja las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G_b' * V_R')}{C_2} - \frac{I'}{C_2}$$

Para hallar el punto de equilibrio se iguala:

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = 0$$

$$0 = -\frac{1}{L} V_{2eq}$$

$$V_{2eq} = 0$$

$$0 = \frac{1}{C_2} I_{3eq} - \frac{(G_b' * V_{2eq})}{C_2} - \frac{1}{C_2} I'$$

Se reemplaza  $V_{2eq}$  para obtener:

$$I_{3eq} = I'$$

$$\text{punto de equilibrio } (I_{3eq}, V_{2eq}) = (I', 0)$$

Como el valor de  $I'$  es conocido se dice que:

$$\text{punto de equilibrio para la región } V_R' < -E = ((G_b - G_a)E, 0)$$

$$\text{punto de equilibrio para la región } V_R' > E = ((G_a - G_b)E, 0)$$

De esta forma el punto de equilibrio es conocido, pero además de eso hay que hallar el tipo de equilibrio dependiendo de sus auto-valores, para esto se usa la matriz jacobiana la cual en este caso será:

$$J_{a'} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G'_b}{C_2} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\det(\lambda * I - A) \quad ; \quad \text{donde } A = J_{a'}$$

$$\lambda^2 + \frac{G'_b}{C_2} * \lambda + \frac{1}{LC_2} = 0$$

Los auto-valores obtenidos son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{G'_b}{2C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{G'_b}{2C_2}\right)^2 - \frac{1}{LC_2}} \quad (2)$$

Si  $\left(\frac{G'_b}{2C_2}\right) > \frac{1}{LC_2}$ , el resultado serán auto-valores reales, si  $G'_b$  es negativa se tendrá un auto-valor real positivo que mostrará un nodo inestable y si  $G'_b$  es positiva se tendrá un auto-valor real negativo que mostrará un nodo estable en el origen.

Pero si  $\left(\frac{G'_b}{2C_2}\right) < \frac{1}{LC_2}$ , se tiene como resultados auto-valores complejos conjugados. Según la expresión (2) se observa que  $G'_b$  se vuelve condicional para el comportamiento cualitativo del sistema, es decir si  $G'_b > 0$ , las trayectorias se dirigen al origen y se tendrá un equilibrio foco estable, pero si  $G'_b < 0$  las trayectorias se mueven hacia afuera del origen y se tendrá un equilibrio foco inestable.

Para comprobar lo anterior  $G$  tendrá los valores de  $-1 * 10^{-3}[s]$  y  $1 * 10^{-3}[s]$ ,  $L = 18 * 10^{-3} [H]$ ,  $C_2 = 100 * 10^{-9}[F]$ ,  $G_a = -757.57 * 10^{-6}[s]$ ,  $G_b = 45.45 * 10^{-6} [s]$

El punto de equilibrio para estos valores será:

$$\text{punto de equilibrio para la región } V'_R < -E = (3.7742 * 10^{-4}, 0)$$

$$\text{punto de equilibrio para la región } V'_R > E = (-3.7742 * 10^{-4}, 0)$$

*Auto-valores para  $G = -1 * 10^{-3}$ [s]*

$$Gb' = -9.5455 * 10^{-4}$$

$$\lambda_1 = 4.7728 * 10^3 + j2.3082 * 10^4$$

$$\lambda_2 = 4.7728 * 10^3 - j2.3082 * 10^4$$

El resultado anterior indica que hay un equilibrio con foco inestable, es decir, las trayectorias van hacia afuera del origen.

*Auto-valores para  $G = 1 * 10^{-3}$ [s]*

$$Gb' = 1.0 * 10^{-3}$$

$$\lambda_1 = -5.2272 * 10^3 + j2.2983 * 10^4$$

$$\lambda_2 = -5.2272 * 10^3 - j2.2983 * 10^4$$

El resultado anterior indica que hay un equilibrio con foco estable, es decir, las trayectorias van hacia el origen.

**7.1.4. Análisis global del circuito.** El campo vectorial del circuito lineal a tramos, se forma uniendo cada campo vectorial obtenido de las tres regiones (región media y las regiones exteriores). Se consideraron dos casos en especial, cuando  $Ga' > 0$  y cuando  $Ga' < 0$ .

Si  $Ga' > 0$ , el circuito es disipativo en todas partes y todas las trayectorias colapsan hacia la región interior, es decir, la región media. En esta región la única solución en estado estacionario del circuito es el equilibrio estable en el origen.

Por otro lado, Si  $Ga' < 0$ , el punto de equilibrio en el origen es inestable y el campo vectorial de la región media empuja las trayectorias lejos de él, mientras en las regiones exteriores las trayectorias son atraídas hacia el punto de equilibrio y lo que resulta de la unión de las fuerzas es una trayectoria de estado estacionario periódico llamado ciclo límite. Hay que tener en cuenta la condición inicial, dependiendo de en qué región se encuentre ocasiona cambios en el comportamiento, si la condición inicial está en la región media, las trayectorias son repelidas por el punto de equilibrio inestable en el origen hasta que se

encuentran con el ciclo límite y permanecen allí. Si la condición inicial se encuentra en la región exterior las trayectorias se mueven hacia el ciclo límite hasta quedarse en esa zona.

## 7.2. ANÁLISIS EN MATLAB®

Por medio de un código creado en el Software MATLAB® se hace un análisis de forma global al circuito mostrado en la *Figura 22* simulando las ecuaciones que lo describen, ver anexo A.3. La metodología es ver cómo se comporta el voltaje en la capacitancia  $C_2$  y la corriente en la inductancia  $L$  por medio de la función *plot* que se usa para graficar.

*Parametros de simulacion:*

$$Ga = -757.576e - 6 [S]$$

$$Gb = 45.455e - 6 [S] \quad L = 18e - 3 [H]$$

$$C2 = 100e - 9 [F]$$

$$E = 0.47[V]$$

$$G = 1e - 3 [s] \quad y \quad 500e - 6 [S]$$

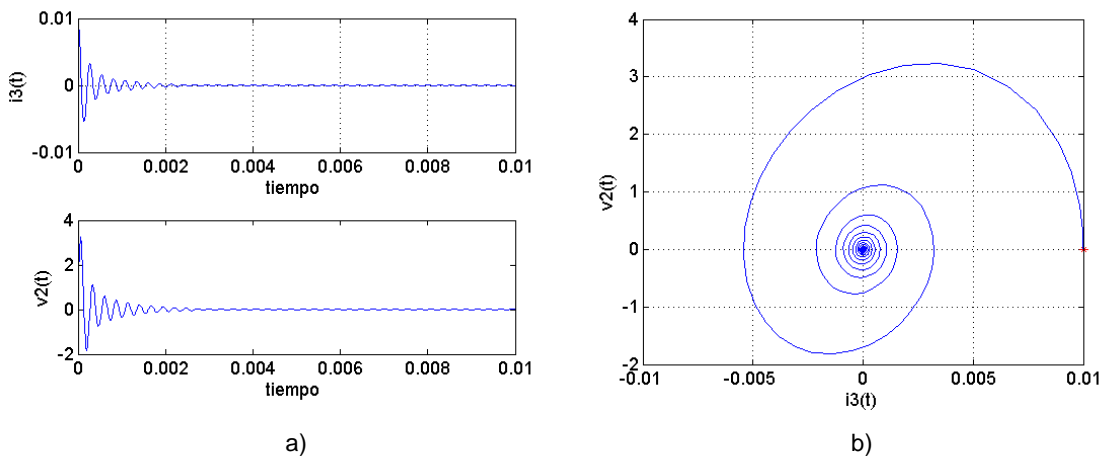
Se recuerda que la elección de los parámetros no se hizo de forma aleatoria, estos fueron tomados del artículo guía *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*. Se decidieron tomar estos para así tener como punto de comparación el documento guía. Para entender que significa cada parámetro y tener una idea de que valores asignarles, se debe tomar como guía el análisis teórico realizado en la sección 7.1.

Se programa un código utilizando el comando *function*, donde se describan tanto las ecuaciones a tramos del diodo Chua como también las ecuaciones diferenciales del circuito que han sido nombradas en la parte teórica de esta sección, para así representar al circuito RLC en paralelo con un elemento no lineal. Esta función luego es llamada en un código base por medio del comando ODE45 que se utiliza para resolver las ecuaciones diferenciales del circuito. Por último se procede a graficar la solución, a continuación en las *Figuras 25, 26, 27, 28*, se muestran los resultados, donde la condición inicial se muestra en la gráfica como un punto rojo.

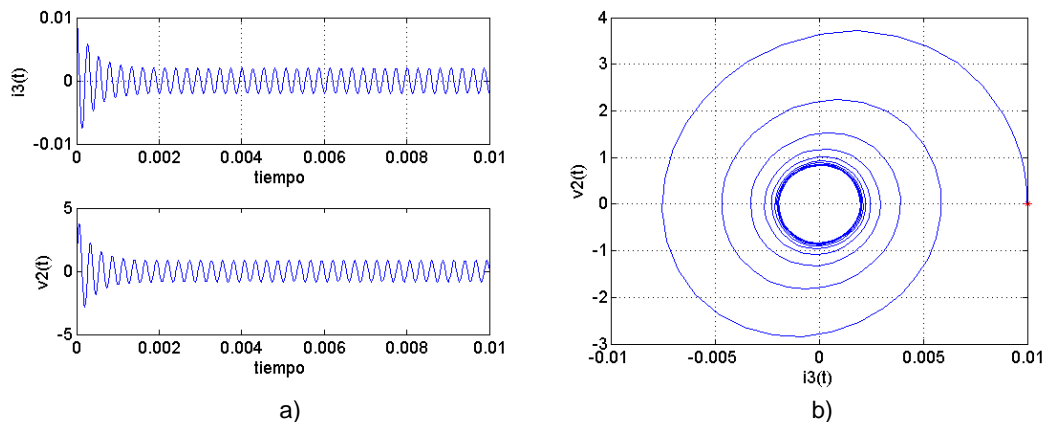
El primer caso es cuando  $Ga' > 0$ , acá existe un punto de equilibrio estable en el origen, por lo tanto este atrae las trayectorias como se puede ver en la *Figura 25*, no importa cuál sea

la condición inicial, las trayectorias siempre van a ir al origen. Para el caso  $Ga' < 0$ , cuando la condición inicial se da en la región exterior las trayectorias se acercan al ciclo límite desde afuera y va decreciendo hasta estabilizarse como se ve en la *Figura 26*. Por otro lado la situación es diferente cuando se posee una condición inicial en la región media, las trayectorias se acercan al ciclo límite desde adentro y va creciendo hasta quedarse oscilando en un punto como se ve en la *Figura 27*. Finalmente, cuando la condición inicial es el origen, las trayectorias no se mueven de ahí, se quedan como un punto fijo porque así sea inestable, es un punto de equilibrio, como se puede ver en la *Figura 28*.

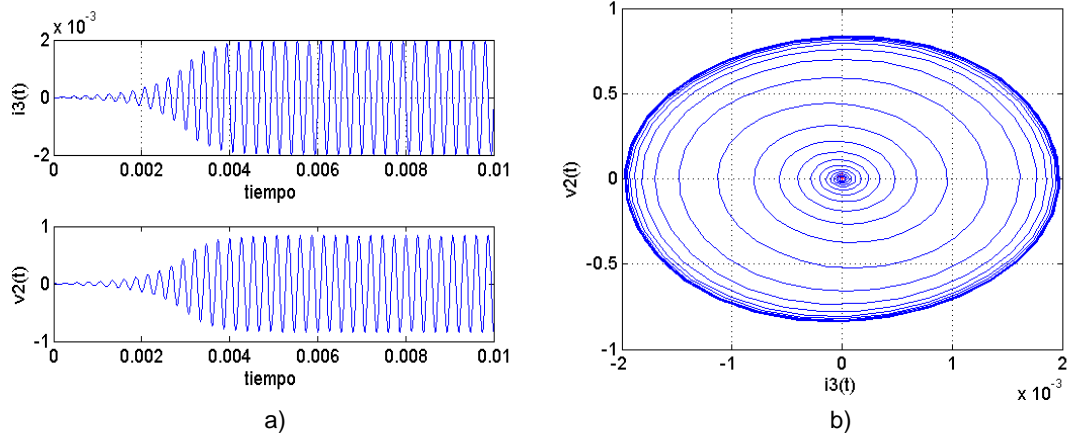
**Figura 25:** Grafica para  $Ga' > 0$ ,  $CI = (0.01, 0)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo. b) Diagrama de fase.



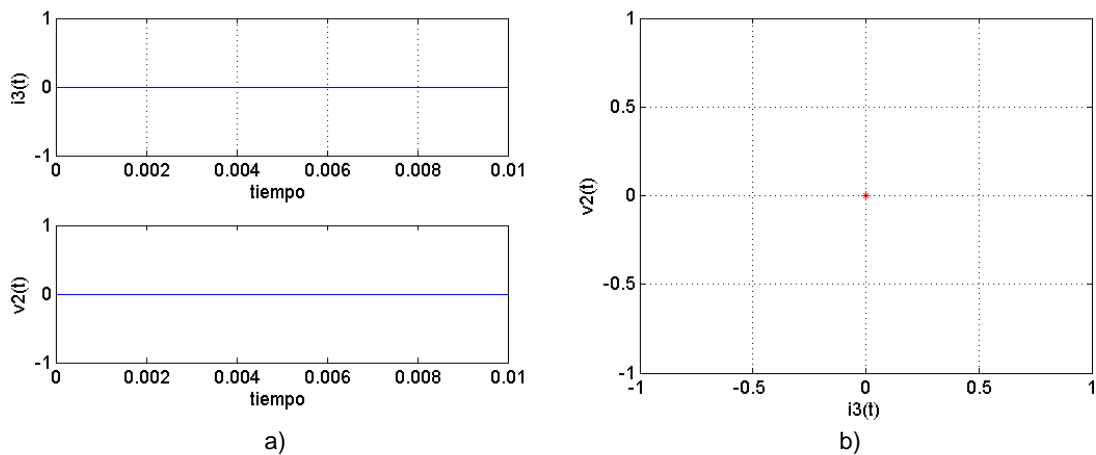
**Figura 26:** Grafica para  $Ga' < 0$ ,  $CI = (0.01, 0)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo. b) Diagrama de fase.



**Figura 27:** Grafica para  $Ga' < 0$ ,  $CI = (0, 0.01)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo y b) Diagrama de fase.



**Figura 28:** Grafica para  $Ga' < 0$ ,  $CI = (0, 0)$ . a) Comportamiento respecto al tiempo y en b) Diagrama de fase.



### 7.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®

Ahora se procede a simular en el software Orcad el esquema del circuito de la Figura 22, para que a través de este comprobar los resultados obtenidos en las secciones 7.1 y 7.2. Esta simulación servirá como una aproximación de los resultados que se deben obtener en el montaje del circuito en el laboratorio.

Primero se inicia por establecer una simulación circuital del elemento no lineal. Esto se logra usando un amplificador operacional y cuatro resistencias, configuración encontrada en el artículo guía *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*. Posteriormente se procede a montar los otros componentes en el programa teniendo en cuenta los siguientes parámetros.

Parámetros de simulación:

$$L = 18e - 3 [H] , C2 = 100e - 9 [F] , G = 1e - 3 [s] \text{ y } 500e - 6 [S] R = 12.5[\Omega] , \\ R1 = 22k[\Omega] , R2 = 22k[\Omega] , R3 = 3.3k[\Omega] , R4 = 2.2k[\Omega] , Opam TL082 \\ VDC+= 8.3[V] , VDC-= 8.3[V] , Condicion inicial, (i_3, v_2) = (0.01, 0)$$

Los parámetros elegidos al igual que en las secciones anteriores y posteriores son elegidos del texto guía [1], [2]. Para asignarle valores distintos se recomienda tener en cuenta el análisis teórico de la sección 7.1 y se remite el lector al texto guía para tener un mayor conocimiento de cómo elegirlos.

Es importante darle una condición inicial a los elementos almacenadores de energía para que el circuito funcione correctamente. Se puede apreciar que en el circuito se colocó una resistencia en serie con la bobina, esto se hace con el fin de poder obtener en el software la corriente que pasa a través de esta y para poder graficar el comportamiento de las trayectorias. Hecho esto, se procede a graficar en función del tiempo la tensión en el capacitor  $C1$ , y tomando dicha señal al igual que la corriente que pasa por la bobina  $L$  con la ayuda de la resistencia puesta en serie, se obtiene el comportamiento de las trayectorias en el modo XY, el cual es dependiente del valor dado para el parámetro  $G$ . Cabe mencionar que este se modifica dando valores equivalentes en ohmios a la resistencia  $R$ .

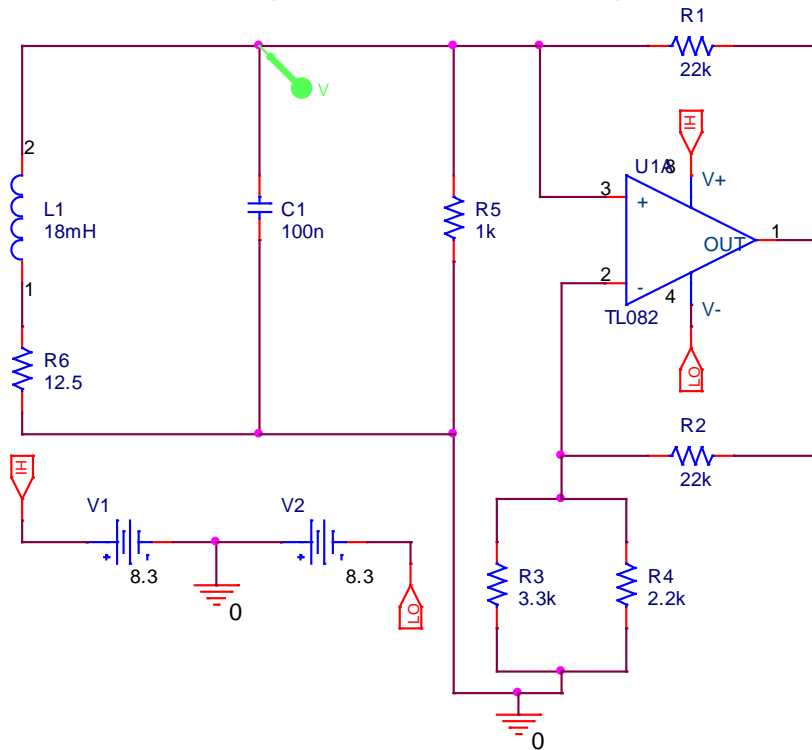
Es por esto que para lograr los resultados necesarios que me permitirán comprobar los obtenidos en las secciones anteriores se tomaran un valor mayor a cero y otro menor que cero, esto se aprecia en las Figuras de la 29 a la 36.

**Simulación para la situación  $G > 0$ , esquema del circuito ( $G=1mS$ )**

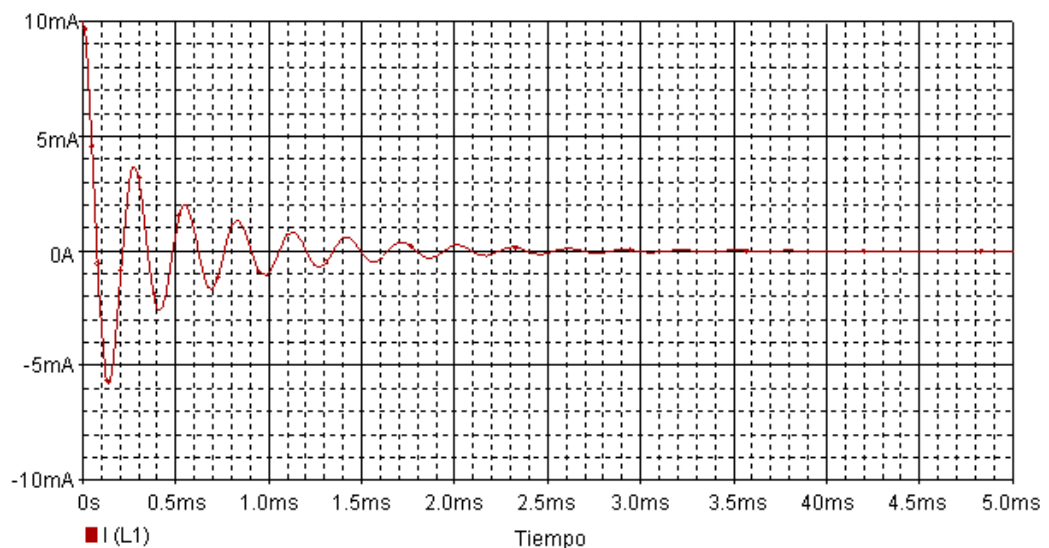
En las Figuras 29, 30, 31 y 32, se muestra el circuito equivalente de la Figura 22, la corriente en el tiempo de la bobina  $L1$ , la señal en el tiempo del capacitor  $C1$  y el comportamiento de

las trayectorias en el modo XY, respectivamente. En este caso se dio un valor de  $G > 0$ , es decir  $G = 1mS$ .

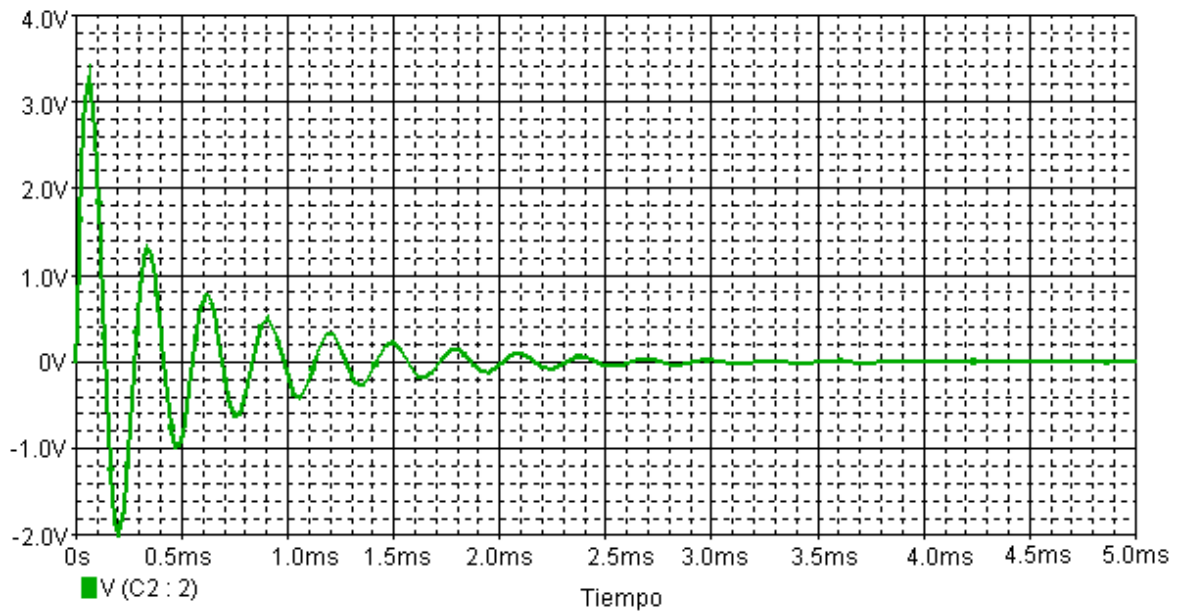
**Figura 29:** Simulación del esquema del circuito RLC en paralelo con el diodo para  $G > 0$ .



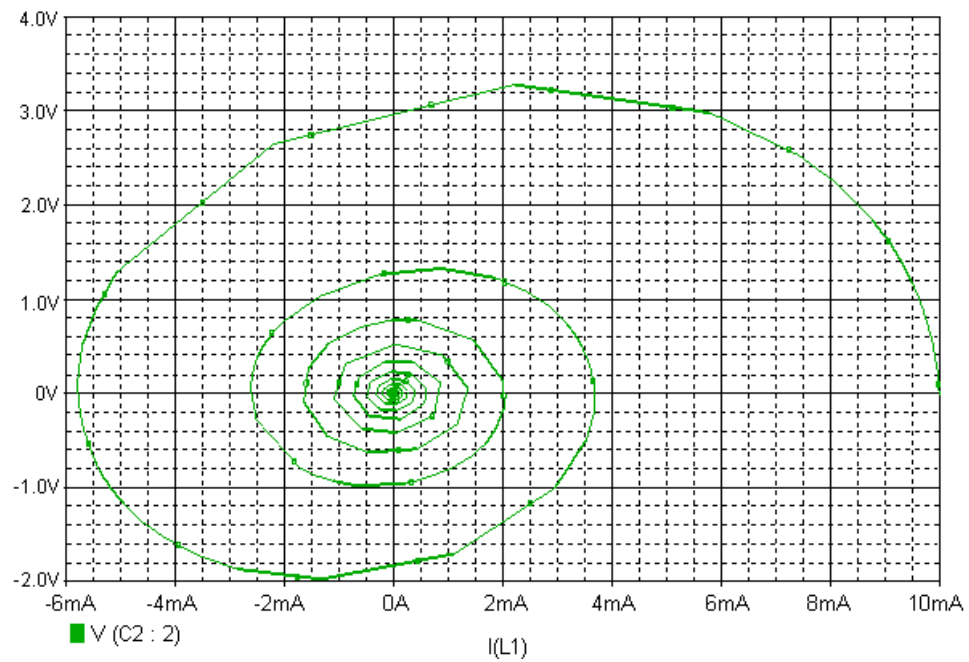
**Figura 30:** Comportamiento de la corriente en la bobina respecto al tiempo para  $G > 0$ .



**Figura 31:** Comportamiento de la tensión en la capacitancia con respecto al tiempo para  $G > 0$ .



**Figura 32:** Comportamiento de voltaje en capacitancia respecto a la corriente en el inductor.

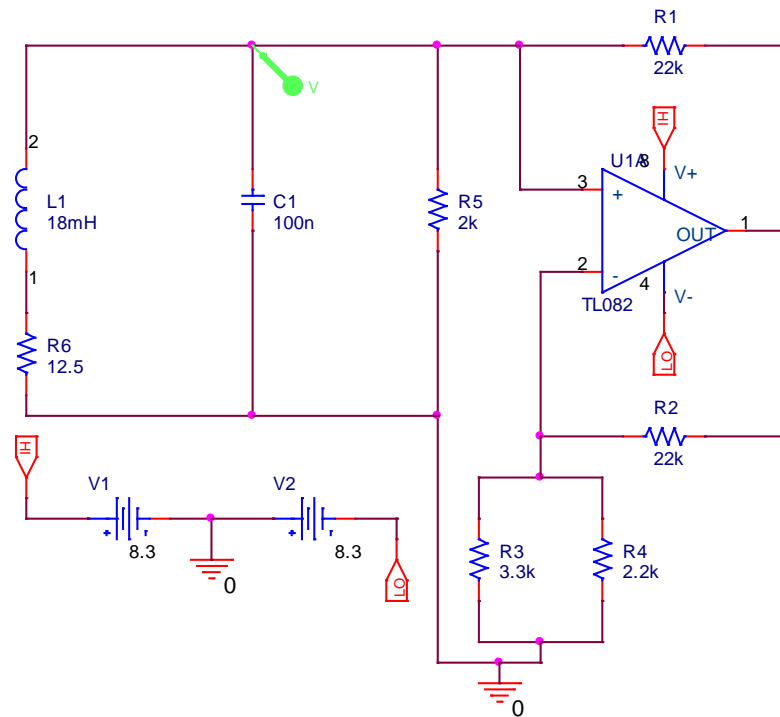


Por tanto al analizar el resultado de la simulación en Orcad para un valor de resistencia  $R = 1k\Omega$  ( $G = 1mS$ ), y comparando los resultados obtenidos en Matlab, se puede afirmar, teniendo claro los conceptos teóricos de la sección 7.1, que para este valor de resistencia, existe un punto de equilibrio estable en el origen, es decir que sin importar la condición inicial dada al circuito, las trayectorias se dirigirán hacia este.

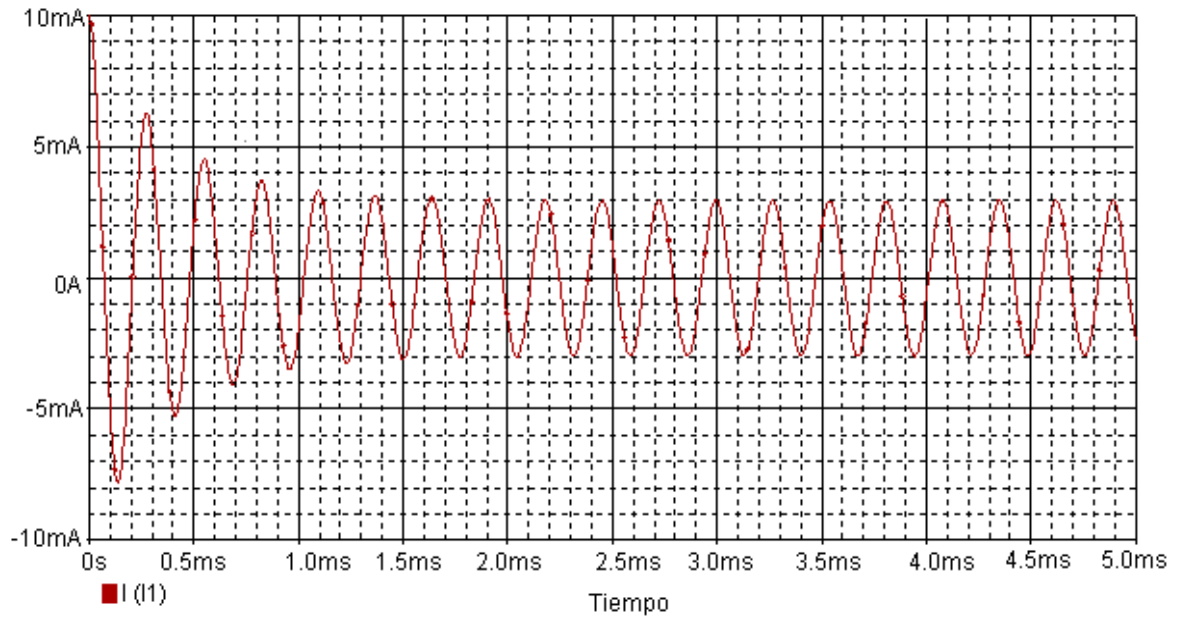
### Simulación para la situación $G < 0$ , esquema del circuito ( $G=500\mu S$ )

Consecuentemente al variar el valor de la resistencia a  $R = 2k\Omega$ , se cambia la situación otorgándole al circuito un valor de  $G < 0$ , es decir  $G = 500\mu S$ . El comportamiento obtenido para este caso se puede apreciar en las Figuras 33, 34, 35 y 36, donde se mostrara el circuito equivalente de la Figura 22, la corriente en el tiempo de la bobina L1, la señal en el tiempo del capacitor C1 y el comportamiento de las trayectorias en el modo XY, respectivamente.

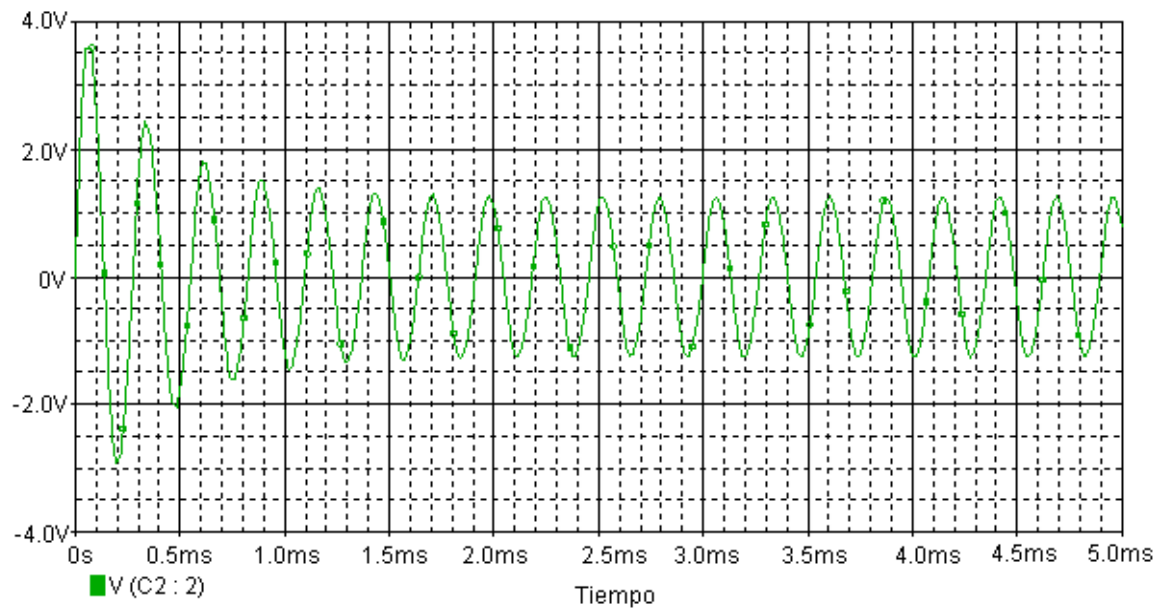
**Figura 33:** Simulación del esquema del circuito RLC en paralelo con el diodo Chua en el programa Orcad Capture para un  $G < 0$ .



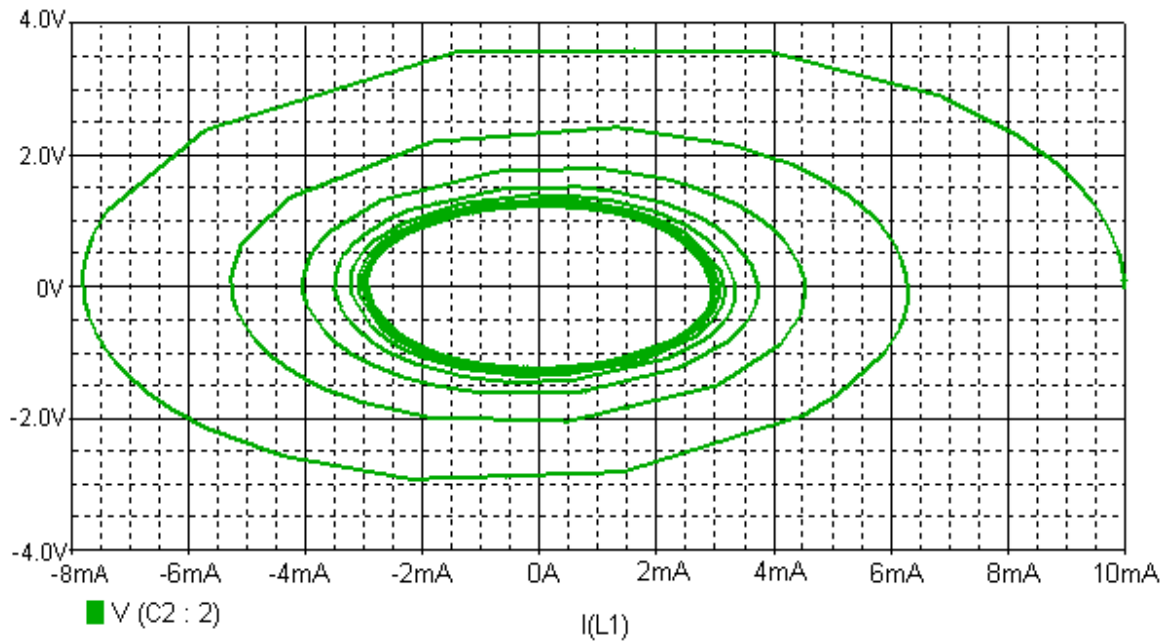
**Figura 34:** Comportamiento de la corriente en la bobina respecto al tiempo para  $G < 0$ .



**Figura 35:** Comportamiento de la tensión en la capacitancia con respecto al tiempo para  $G < 0$ .



**Figura 36:** Comportamiento de voltaje en capacitancia respecto a la corriente en el inductor.



Posteriormente al comparar los resultados obtenidos de la simulación del esquema de la figura 22 para un valor de resistencia de  $2k\Omega$ , con los mostrados en las secciones 7.1 y 7.2, se puede observar que cuando  $G < 0$ , el circuito mostrara un comportamiento ciclo limite, es decir que sin importar en que región se determine la condición inicial del circuito, las trayectorias obtenidas siempre se dirigirán hacia él. Esto se traduce en que no interesa si las trayectorias inician dentro o fuera del ciclo límite, estas crecerán o disminuirán hasta caer en este.

#### 7.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO

Cuando se estudia el circuito hay que considerar dos situaciones,  $Ga' < 0$  y  $Ga' > 0$ , cuando  $Ga' > 0$  el comportamiento en el tiempo es una onda amortiguada y las trayectorias se dirigen al origen de una forma muy rápida que al tratar de observarlo en el osciloscopio fue difícil, por esa razón para el montaje en laboratorio se implementó una situación en la cual se obtenía una oscilación continua, es decir un ciclo límite.

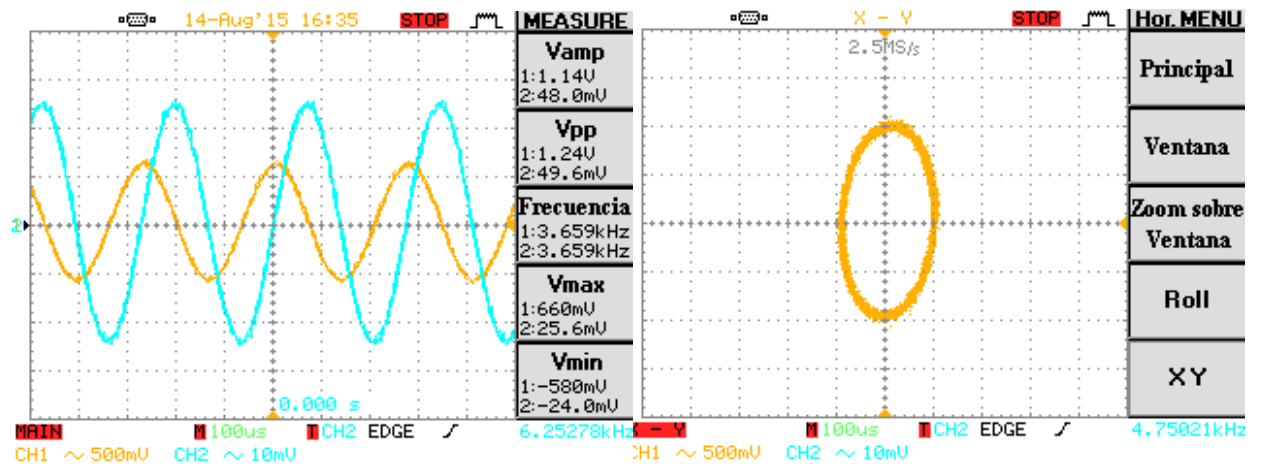
**Tabla 2:** Elementos usados en el montaje del circuito RLC en paralelo con el elemento no lineal.

Elementos del circuito	Referencias	Recomendaciones
Inductancia, $L = 18mH \pm 10\%$	PCH-45X-186KLT ( <i>Fixed Inductors PCH-45 Power Choke Higher Current Axial</i> )	Esta inductancia fue encontrada en <a href="http://www.coilcraft.com">http://www.coilcraft.com</a> . Se recomienda usar esta referencia sin embargo si se desea usar otra en particular se debe tratar que tenga especificaciones cercanas a la bobina usada, y tenga en cuenta que esta debe tener núcleo de hierro.
Capacitores, $C_2 = 100nF \pm 5\%$	Capacitores Mylar ( <i>Color verde</i> )	Se recomienda usar este tipo de capacitor debido a que produce que las señales obtenidas sean más nítidas.
Resistencia variable, $0 \leq R \leq 2k\Omega$	Potenciómetros de precisión.	Es recomendable usar dos potenciómetros en serie uno de un $2k\Omega$ y otro de $220\Omega$ . Esto con el fin de que al variar la resistencia R se puedan obtener cambios más precisos en los valores resistivos para así poder apreciar mejor las variaciones y obtener más fácilmente los atractores deseados
Resistencias, $R_1 = 3.3k\Omega \pm 5\%$ $R_2 = R_3 = 22k\Omega \pm 5\%$ $R_4 = 2.2k\Omega \pm 5\%$ $R_6 = 12.5\Omega \pm 5\%$	Resistencias de $\frac{1}{4}$ W	Con estos valores de resistencia se obtuvieron los resultados deseados. No se consideró necesario usar resistencias de mayor precisión. Estos valores fueron obtenidos de Three steps to chaos Part II / Michael Peter Kennedy.
Amplificador operacional que conforman el diodo Chua, $A_1$	TL082 ( <i>Wide Bandwidth Dual JFET Input Operational Amplifier</i> ) de Texas Instruments ó AD712 ( <i>Precision, Low Cost, High Speed BiFET Dual Op Amp</i> ) de Analog Devices	El integrado usado para este montaje fue el TL082 de Texas Instruments. Si se desea usar otro en particular elija con cuidado especificaciones cercanas a las mostradas en el datasheet del TL082 o del AD712.
Osciloscopio	Gwinstek GDS-2062	Esta es la referencia del osciloscopio con el que se contó para observar las señales arrojadas por el circuito.

Para la alimentación se utilizó +13[V] y -10[V] y se varió la resistencia hasta  $1.9k\Omega$  para obtener el comportamiento para el caso  $G < 0$  en el cual la señal muestra una oscilación para la corriente en  $i_3$  y en el voltaje de  $C_2$ , en la Figura 37 se puede ver el resultado, aunque posee un poco de ruido es el esperado. En la Figura 37(b) se muestra el

comportamiento del voltaje en V2 respecto a la corriente multiplicada por una resistencia de 1 ohmio. En el canal 1 tenemos la corriente de la bobina y el canal 2 el voltaje en el capacitor.

**Figura 37:** Montaje en el laboratorio de la Figura 29. a) Señal en el tiempo. b) Señal modo XY.



a)

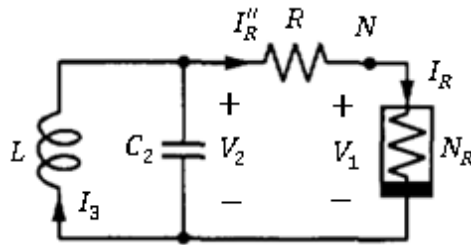
b)

## 8. ANÁLISIS DE UN CIRCUITO NO LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON LINEALIDAD A TRAMOS (RLC CON UN ELEMENTO NO LINEAL EN SERIE).

### 8.1. ANÁLISIS TEÓRICO

Hasta este momento el circuito lineal RLC en paralelo no produce una oscilación estable pero si se agrega un elemento no lineal provoca que el circuito tenga una oscilación periódica y robusta, haciendo más difícil su análisis. Para producir más comportamientos complejos dinámicos y acercarse al caos, se sigue en el mismo camino pero esta vez se ubica una resistencia en serie como muestra la siguiente Figura 38.

**Figura 38:** Circuito no lineal con resistencia en serie al diodo Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Este reordenamiento en los elementos provoca cambios fundamentales en la dinámica del circuito y al igual que la sección pasada se simplifica el análisis combinando la resistencia en serie con el elemento no lineal formando dos nuevas variables que son:

$$Ga'' = \frac{G * Ga}{G + Ga}$$

$$Gb'' = \frac{G * Gb}{G + Gb}$$

Donde

$$I''_R = I_{resistencia} = I_R \quad , \quad I''_R = \begin{cases} (G_b'' V_R'') + \frac{(G_b - G_a)E}{G + Gb} & \text{si } V_R < -E \\ (G_a'' V_R'') & \text{si } -E \leq V_R \leq E \\ (G_b'' V_R'') + \frac{(G_a - G_b)E}{G + Gb} & \text{si } V_R > E \end{cases}$$

Donde  $V_R''$  es la suma del voltaje  $V_R$  del terminal  $NR$  y del voltaje  $V$  en la resistencia.

$$V_R = V_R'' - V$$

Por medio de la ecuación se obtienen las variables  $I_R''$ ,  $G_a''$  y  $G_b''$  a partir de este análisis:

$$V_R'' = V + V_R \quad (1)$$

Por la sección 4 se tiene entendido que:

$$I_R = f(V_R) = \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a)E & , V_R < -E \\ G_a V_R & , -E \leq V_R \leq E \\ G_b V_R + (G_a - G_b)E & , V_R > E \end{cases} \quad (2)$$

A partir de la ecuación (2), se despeja el valor de  $V_R$  y reemplazando en (1) se conoce su valor:

$$V_R = \begin{cases} \frac{I_R}{G_b} - \frac{(G_b - G_a)E}{G_b} & , V_R < -E \\ \frac{I_R}{G_a} & , -E \leq V_R \leq E \\ \frac{I_R}{G_b} - \frac{(G_a - G_b)E}{G_b} & , V_R > E \end{cases} \Rightarrow V_R'' = V + V_R = \begin{cases} I_R R + \frac{I_R}{G_b} - \frac{(G_b - G_a)E}{G_b} & , V_R < -E \\ I_R R + \frac{I_R}{G_a} & , -E \leq V_R \leq E \\ I_R R + \frac{I_R}{G_b} - \frac{(G_a - G_b)E}{G_b} & , V_R > E \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que  $I_R'' = I = I_R$

$$\Rightarrow V_R'' = \begin{cases} I_R'' \left( R + \frac{1}{G_b} \right) - \frac{(G_b - G_a)E}{G_b} & , V_R < -E \\ I_R'' \left( R + \frac{1}{G_a} \right) & , -E \leq V_R \leq E \\ I_R'' \left( R + \frac{1}{G_b} \right) - \frac{(G_a - G_b)E}{G_b} & , V_R > E \end{cases}$$

Donde finalmente se puede despejar y obtener  $I_R''$

$$\Rightarrow I_R'' = \begin{cases} \frac{V_R''}{\left( R + \frac{1}{G_b} \right)} + \frac{\frac{(G_b - G_a)E}{G_b}}{\left( R + \frac{1}{G_b} \right)} & , V_R < -E \\ \frac{V_R''}{\left( R + \frac{1}{G_a} \right)} & , -E \leq V_R \leq E \\ \frac{V_R''}{\left( R + \frac{1}{G_b} \right)} + \frac{\frac{(G_a - G_b)E}{G_b}}{\left( R + \frac{1}{G_b} \right)} & , V_R > E \end{cases}$$

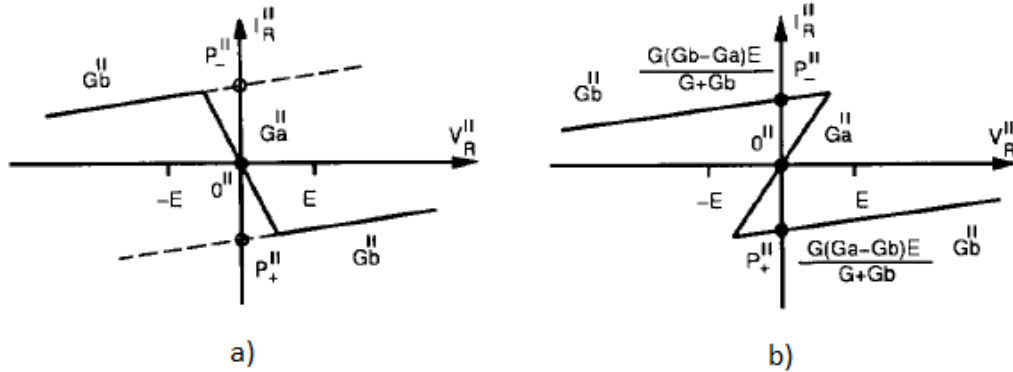
Al simplificar se obtiene finalmente que

$$I_R'' = \begin{cases} (G_b'' V_R'') + \frac{(G_b - G_a)E}{G + G_b} & \text{si } V_R < -E \\ (G_a'' V_R'') & \text{si } -E \leq V_R \leq E \\ (G_b'' V_R'') + \frac{(G_a - G_b)E}{G + G_b} & \text{si } V_R > E \end{cases}$$

$$\text{Cuando } \frac{1}{\left( R + \frac{1}{G_b} \right)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G_b} \right)} = \frac{G \cdot G_b}{G + G_b} = G_b'' \text{ y } \frac{1}{\left( R + \frac{1}{G_a} \right)} = \frac{1}{\left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G_a} \right)} = \frac{G \cdot G_a}{G + G_a} = G_a''$$

Para el análisis gráfico del comportamiento de  $NR''$  la variable  $V_R''$  es ubicada en el eje horizontal mientras  $I_R''$  en el eje vertical para los casos de  $Ga'' < 0$  y  $Ga'' > 0$ . Ver Figura 39.

**Figura 39:** Comportamiento para, a)  $Ga'' < 0$ . b)  $Ga'' > 0$ , donde  $P_-''$  y  $P_+''$  son los puntos de equilibrio en las zonas exteriores.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

**8.1.1. Descripción del circuito no lineal a trozos.** El circuito de la Figura 38 puede ser descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias tomando a la corriente del inductor  $I_3$  y al voltaje en la capacitancia  $V_2$  como variables de estado igual que la sección pasada.

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{I_R''}{C_2} \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G * (V_2 - V_1)}{C_2} \end{aligned}$$

Cuando se analiza la corriente que pasa por la resistencia se tiene que:

$$I_R'' = G * (V_2 - V_1) \quad (3)$$

La ecuación (3) representa una condición que  $V_1$  debe satisfacer mientras la dinámica del circuito evoluciona en el plano 2D ( $I_3, V_2$ ).

Para continuar con el estudio el circuito se divide en tres regiones a fines como se muestra a continuación.

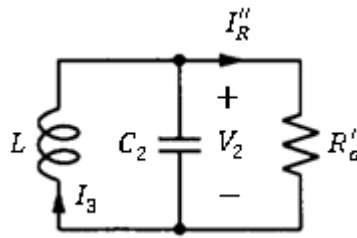
**8.1.2. Región media** ( $|V_1| \leq E$ ). Cuando  $|V_1| \leq E$  la ecuación (3) se convierte en  $G_a V_1$ , luego se resuelve para  $V_1$  en términos de  $V_2$  en la ecuación general del circuito para obtener lo siguiente en un plano 2D:

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G_a'' * V_2)}{C_2}$$

El circuito equivalente a las anteriores ecuaciones diferenciales se muestra en la Figura 40.

**Figura 40:** Circuito equivalente para la región media, donde  $R_a'' = \frac{1}{G_a''}$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Se tiene un simple punto de equilibrio en el origen cuya estabilidad puede ser determinada por el análisis de la matriz jacobiana.

$$J_a'' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G_a''}{C_2} \end{bmatrix}$$

Se sabe que

$$\det(\lambda * I - A) ; \text{ donde } A = J_a'$$

$$\lambda^2 + \frac{G_a''}{C_2} * \lambda + \frac{1}{LC_2} = 0$$

Los auto-valores obtenidos son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{G_a''}{2C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{G_a''}{2C_2}\right)^2 - \frac{1}{LC_2}} \quad (4)$$

Si  $\left(\frac{G_a''}{2C_2}\right)^2 > \frac{1}{LC_2}$ , el resultado serán auto-valores reales, si  $G_a''$  es negativa se tendrá un autovalor real positivo que nos mostrará un nodo inestable y si  $G_a''$  es positiva se tendrá un autovalor real negativo que nos mostrará un nodo estable en el origen.

Por otro lado si  $\left(\frac{G_a''}{2C_2}\right)^2 < \frac{1}{LC_2}$ , se tiene como resultados auto-valores complejos conjugados. Con la expresión (3) se observa que  $G_a''$  se vuelve condicional para el comportamiento cualitativo del sistema, es decir, si  $G_a'' > 0$  las trayectorias tendrán dirección hacia el origen y se tendrá un equilibrio foco estable, pero si  $G_a'' < 0$ , las trayectorias se mueven hacia afuera del origen y se tendrá un equilibrio foco inestable.

Para comprobar lo anterior  $G$  tendrá los valores de  $500 * 10^{-6} [s]$  y  $1 * 10^{-3} [s]$ ,  $L = 18 * 10^{-3} [H]$ ,  $C_2 = 100 * 10^{-9} [F]$ ,  $G_a = -757.57 * 10^{-6} [s]$ ,  $G_b = 45.45 * 10^{-6} [s]$

Auto-valores para  $G = 500 * 10^{-6} [s]$

$$G_a'' = 0.0015$$

$$\lambda_1 = -7.3529e3 + j2.2394e4$$

$$\lambda_2 = -7.3529e3 - j2.2394e4$$

El resultado anterior indica que se tiene un equilibrio con foco estable, es decir, las trayectorias van hacia el origen.

Auto valores para  $G = 1 * 10^{-3} [s]$

$$G_a'' = -0.0031$$

$$\lambda_1 = 1.5625e4 + j1.7647e4$$

$$\lambda_2 = 1.5625e4 - j1.7647e4$$

El resultado anterior indica que se tiene un equilibrio con foco inestable, es decir, las trayectorias van hacia afuera del origen.

**8.1.3. Regiones exteriores ( $|V_1| > E$ ).** Cuando  $V_1 < -E$  la ecuación (3) se convierte en  $G_b V_1 + (G_b - G_a)E$ , luego se resuelve  $V_1$  en términos de  $V_2$  en la ecuación general del circuito para obtener lo siguiente en un plano 2D:

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G_b'' * V_2)}{C_2} - \frac{(G_b - G_a)E}{(G + G_b)C_2} \text{ si } V_1 < -E$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G_b'' * V_2)}{C_2} - \frac{(G_a - G_b)E}{(G + G_b)C_2} \text{ si } V_1 > E$$

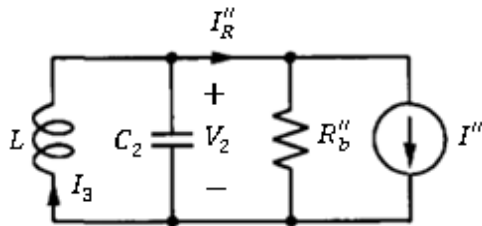
Ahora se dice que:

$$I'' = \frac{(G_b - G_a)E}{G + G_b} \text{ cuando } V_1 < -E$$

$$I'' = \frac{(G_a - G_b)E}{G + G_b} \text{ cuando } V_1 > E$$

Las dos regiones exteriores son circuitos equivalentes a fin que consiste de un paralelo lineal RLC con una derivación de corriente que se nombra  $I''$  como muestra la Figura 41.

**Figura 41:** Circuito representativo de la región exterior.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Para hallar los puntos de equilibrio se define la ecuación

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(G_b'' * V_2)}{C_2} - \frac{I''}{C_2}$$

Para hallar el punto de equilibrio se iguala

$$\frac{dI_3}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = 0; 0 = -\frac{1}{L} V_{2eq}$$

$$V_{2eq} = 0$$

$$0 = \frac{1}{C_2} I_{3eq} - \frac{(G_b'' * V_{2eq})}{C_2} - \frac{1}{C_2} I''$$

Se reemplaza  $V_{2eq}$  para obtener

$$I_3 = I''$$

$$\text{punto de equilibrio } (I_{3eq}, V_{2eq}) = (I'', 0)$$

Como el valor de  $I''$  es conocido el resultado es:

$$\text{punto de equilibrio para la región } V_1 < -E = \left( \frac{(G_b - G_a)E}{G + Gb}, 0 \right)$$

$$\text{punto de equilibrio para la región } V_1 > E = \left( \frac{(G_a - G_b)E}{G + Gb}, 0 \right)$$

**8.1.4. Análisis global del circuito.** Se puede encontrar un punto de equilibrio en el circuito de la figura 38 haciendo un cortocircuito en  $L$  y un circuito abierto en  $C_2$ , esto representa la de intersección de la curva característica de  $N_R''$  con el eje  $I_R$  (donde  $V_2 = V_R'' = 0$ ). La estabilidad de un punto de equilibrio es determinada por la pendiente de la característica de  $N_R''$  en ese punto, Si la pendiente es positiva, el punto de equilibrio es estable, Si la pendiente es negativa, el punto de equilibrio es inestable.

Los puntos  $P_-''$  y  $P_+''$  son equilibrios virtuales (son equilibrios virtuales porque no se interceptan si no que se proyectan) estables y el origen es un punto de equilibrio inestable cuando en el circuito simplificado está bajo la condición de  $G_a'' < 0$  como se ve en la figura 42 (a). De igual manera, en la figura 42 (b) que observa que en  $P_-''$ ,  $0''$ , y  $P_+''$  solo existen equilibrios estables para el circuito simplificado en la condición  $G_a'' > 0$ .

Para determinar el comportamiento dinámico del circuito en cada región, se resuelve:

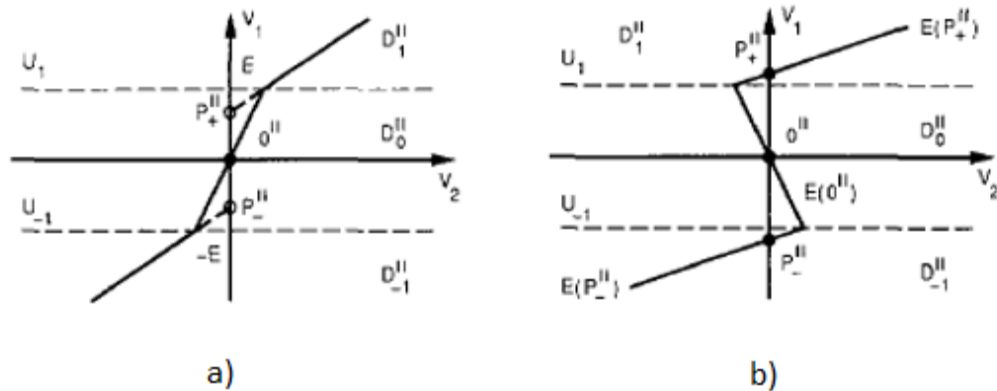
$$I_R''(V_1) = G * (V_2 - V_1) \tag{5}$$

Para  $V_1$  en términos de  $V_2$  y sustituye en  $\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{I_R''}{C_2}$  para obtener un circuito equivalente 2-D el cual será:

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G}{C_2} (V_2 - V_1)$$

Considerando ahora la relación entre  $V_1$  y  $V_2$  mostrada gráficamente en la Figura 42. Donde  $U_1$  es el plano definido por  $V_1 \equiv E$  y  $U_{-1}$  separa el plano cuando  $V_1 \equiv -E$ , los planos están definidos por  $D_0''$  para la región media y  $D_1'', D_{-1}''$  para las regiones exteriores.

**Figura 42:** Se muestra la relación entre  $V_1$  y  $V_2$ , donde se muestra el comportamiento para: a)  $G_a'' < 0$ , b)  $G_a'' > 0$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Cuando  $G_a'' < 0$ ,  $V_1$  está dependiendo solo de  $V_2$ , pero no cuando  $G_a'' > 0$  por eso se hay que ver estos caso en detalle.

**8.1.4.1.  $G_a'' < 0$ .** Cuando  $G_a'' < 0$ , las regiones exteriores tienen sus equilibrios virtuales  $P_-''$  y  $P_+''$  estables y en la región media se tiene un punto de equilibrio inestable en el origen. Por lo tanto, el circuito tiene un único punto de equilibrio inestable en  $0''$ .

Cuando  $G_a'' < 0$ ,

$$V_2 = (V_1 + I_R''(V_1)) / G = g(V_1)$$

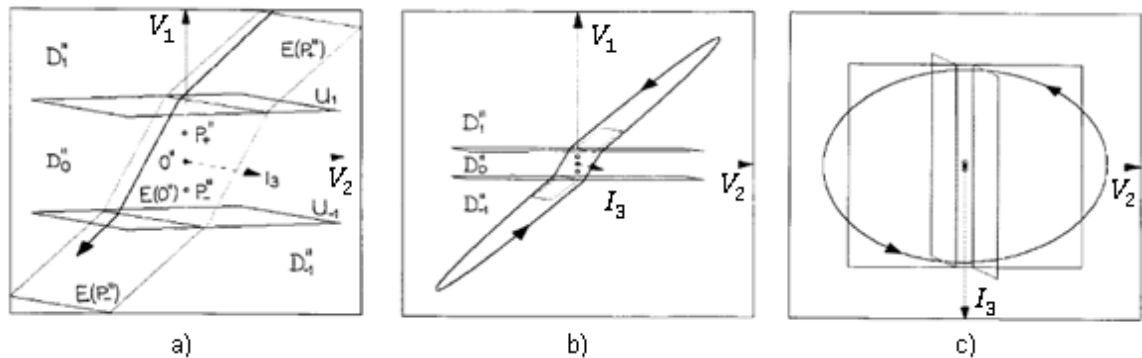
La ecuación anterior está función de  $V_1$ . Esto permite escribir  $V_1$  en función de  $V_2$  y expresar la dinámica global del circuito.

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{(V_2 - g^{-1}(V_2))}{C_2}$$

En el sistema de coordenadas 3-D  $(I_3, V_2, V_1)$  la ecuación (5) define tres planos como se muestra en la Figura 43. Se tiene en cuenta que hay una sección transversal a través de estos planos con una constante  $I_3$ , que se muestra gráficamente en la Figura 43(a). En cada región una trayectoria está obligada a moverse en el plano correspondiente que se relaciona  $V_2$  y  $V_1$ , donde  $E(P_+')$  es la región superior,  $E(P_-')$  es la región inferior y  $E(0'')$  es la región media mostrada en el plano 3-D.

**Figura 43:** Muestra el comportamiento global en 3-D y 2-D del sistema para  $G_a'' < 0$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

El comportamiento global del circuito se puede determinar mediante la unión de los tres planos. Ya que se tiene una expresión para la dinámica de cada región, se estudiará que ocurre en cada límite.

Cuando una trayectoria comienza en la región  $D_1''$  se mueve hacia el punto de equilibrio virtual  $P_+''$  hasta que se cruza en la región  $D_0''$ . En la región  $D_0''$ , la trayectoria es repelida por el punto de equilibrio inestable en  $0''$  hasta que cruza la región  $D_{-1}''$ , donde la trayectoria es atraída de nuevo hacia el punto de equilibrio virtual  $P_-''$  hasta devolverse a la región  $D_0''$ . Por lo tanto el comportamiento en estado estacionario resultante es un ciclo límite estable, como se muestra en la *Figura 43 (b)*. De hecho, este ciclo límite es la solución en estado estacionario único para este circuito. Al ver los resultados se puede pensar que este

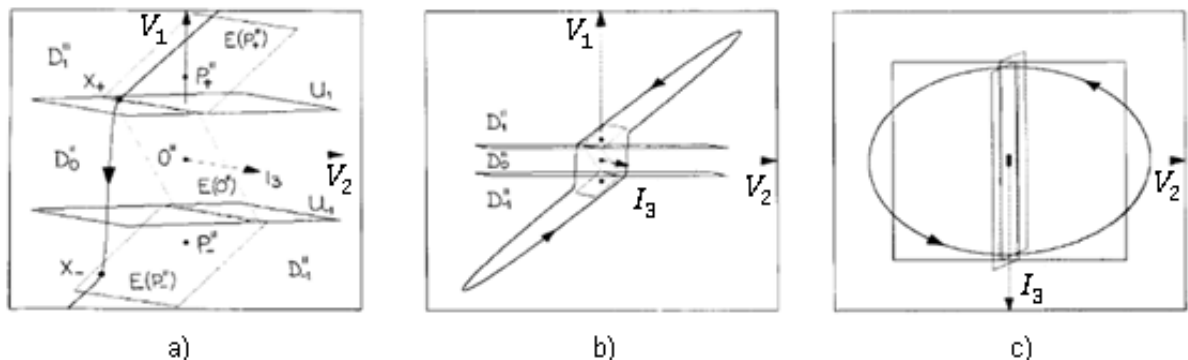
oscilador tiene un comportamiento parecido al del ejemplo mostrado en la sección 7 con  $G'_a < 0$  pero en ese caso, la solución en estado estacionario fue un ciclo límite en un plano. Aquí, hemos introducido un *Kink* (traduce torcedura) en la dirección  $V_1$  en el plano  $(I_3, V_2)$ . La dinámica global 2-D es simplemente la proyección de las trayectorias en  $(I_3, V_2, V_1)$  en el sistema de coordenadas en el plano  $(I_3, V_2)$ , como se muestra en la 41 (c).

**8.1.4.2.  $G''_a > 0$ .** Cuando se tiene  $G''_a > 0$ , el sistema está descrito por:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L} V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G}{C_2} (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que  $V_2$  es una función no monótona de  $V_1$  en este caso,  $V_1$  no se puede expresar a nivel global como una función de  $V_2$  a diferencia del caso anterior, esto significa que no se puede escribir las ecuaciones de estado globales para el circuito cuando  $G''_a > 0$ . De hecho, el circuito ya no se comporta de una manera 2-D y por esto el análisis simplificado en 2-D no es válido. Sin embargo, el problema se puede resolver mediante la integración de un condensador en paralelo con  $NR$  en el esquema utilizado en la figura 38, como se verá más adelante. Cuando  $G''_a > 0$ , el circuito estudiado tiene tres puntos de equilibrio que son nombrados como  $P''_-, 0''$  y  $P''_+$ . Con  $G''_b > 0$  y  $G''_a > 0$ , el análisis lineal a tramos 2-D nos muestra que los tres puntos de equilibrio son estables. Por tanto se podría esperar que todas las trayectorias se unirán en dirección a uno de los equilibrios estables.

**Figura 44:** Muestra el comportamiento global en 3-D y 2-D del sistema para  $G''_a > 0$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

En el sistema de coordenadas 3-D  $(I_3, V_2, V_1)$ , ecuación (5) define tres planos como se ilustra en la Figura 44. Se observa una sección transversal a través de estos planos con una constante  $I_3$ , que se muestra mejor en la Figura 44(b). Igual que antes, se tienen las expresiones para cada región, un comportamiento cualitativo global del circuito puede ser obtenido considerando por separado la evolución de  $I_3$  y  $V_2$  en cada región y las transiciones entre regiones, donde  $E(P_+')$  es la región superior,  $E(P_-')$  es la región inferior y  $E(0'')$  es la región media mostrada en el plano 3-D.

Si se considera una trayectoria que empieza en la región  $D_1''$ , una trayectoria que evoluciona en el plano  $E(P_+')$  en la región  $D_1''$ , se mueve hacia el punto de equilibrio en  $P_+''$ , donde  $E(P_+')$  se define por  $V_2 = (G + G_b) V_1 + (G_b - G_a) E$ . Una trayectoria que comienza en la región  $D_1''$  se mueve hacia el punto de equilibrio virtual  $P_+''$  hasta que se cruza en la región  $D_0''$ . Una vez en la región  $D_0''$ , la trayectoria es repelida por el punto de equilibrio inestable en  $0''$  hasta que se cruza la región  $D_{-1}''$ . Esta trayectoria en la región  $D_{-1}''$  es atraída de nuevo hacia su punto de equilibrio virtual  $P_-''$  hasta que se devuelve a la región  $D_0''$ . Por lo tanto el comportamiento de estado estacionario resultante es un ciclo límite estable, como se muestra en la *Figura 44* en la parte b). De hecho, este ciclo límite es la solución en estado estacionario único de este circuito.

Cuando  $G_a'' < 0$ , se vio que la estructura geométrica resultante era similar a poner un *kink* en el plano del campo de vectores; aquí,  $G_a'' > 0$  en su lugar se han doblado los planos en los que la dinámica del sistema está evolucionando a lo cual se le llama *Fold*.

La proyección del campo vectorial en cada región sobre el plano  $(I_3, V_2)$  produce ahora un único (triple valor) campo vectorial no en la región de solapamiento. Por definición, el campo vectorial de un sistema dinámico autónomo debe ser único en todos los puntos en su espacio de estados. Es precisamente por esta razón que las ecuaciones de estado globales no están definidos. Sin embargo, la proyección de la ciclo límite visto en la parte b) de la *Figura 44* en el plano  $(I_3, V_2)$  (parte (c) de la figura) es lisa; sólo  $V_1$  experimenta saltos.

## 8.2. ANÁLISIS EN MATLAB®

En el caso del circuito RLC en serie con el diodo Chua no se pudo realizar una simulación en Matlab ya que no se pudo obtener las ecuaciones diferenciales necesarias. Al realizar el análisis teórico necesario para obtener dichas ecuaciones se encontró que una de las variables necesarias para obtener es la tensión en la resistencia R que se encuentra en serie con el diodo Chua, la cual se suma al diodo Chua teniendo en cuenta su comportamiento por regiones. Debido a esto no se encontró un método por el cual se pudiera despejar dicha variable y que permitiera obtener las ecuaciones que eran necesarias para la simulación en Matlab. Es por esto que este análisis y simulación se deja como un reto para una investigación futura, de la cual se podrán sacar comportamientos interesantes que permiten describir mejor la dinámica caótica del circuito Chua.

## 8.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®

Consecuentemente se procede a simular el circuito de la Figura 38 con el fin de obtener los comportamientos estudiados en la sección 8.1. Es por eso que en la Figura 45 se simula un esquema del circuito de la Figura 38, en el cual se debieron tener en cuenta al igual que en las anteriores secciones los parámetros para su simulación, tomados del artículo guía [1], [2].

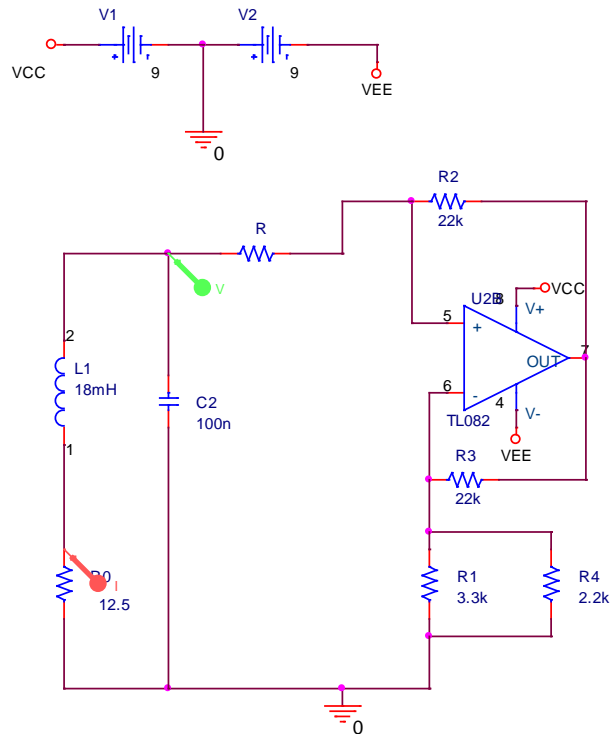
### Parámetros de simulación:

$$L1 = 18 [mH] \quad , \quad C2 = 100 [nF] \quad , \quad R_0 = 12.5\Omega \quad , \quad G = 1.56e - 3 [S] \text{ y } 500e - 6 [S] \\ , \quad R1 = 22k[\Omega] \quad , \quad R2 = 22k[\Omega] \quad , \quad R3 = 3.3k[\Omega] \quad , \quad R4 = 2.2k[\Omega] \quad , \quad Opam TL082 \\ VDC+ = 9[V] \quad , \quad VDC- = 9[V] \quad , \quad Condicion\ inicial, (i_3, v_2) = (0.03, 0)$$

Tenga en cuenta que la elección de estos parámetros se debe hacer considerando el análisis teórico de la sección 8.1, procedimiento que se recomienda si se desea elegir algún otro valor como parámetro para la simulación.

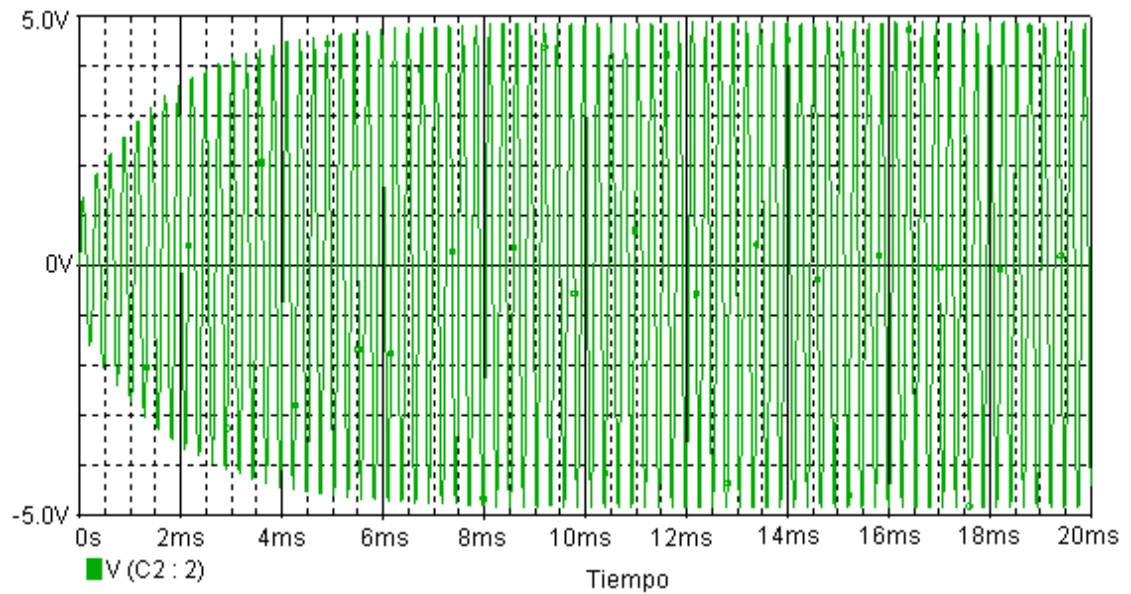
Ahora basándonos en los parámetros anteriores se procede a simular el circuito de la Figura 45 variando el valor del parámetro G con el fin de obtener los diversos comportamientos esperados.

**Figura 45:** Esquema del circuito RLC con resistencia en serie con el diodo Chua.

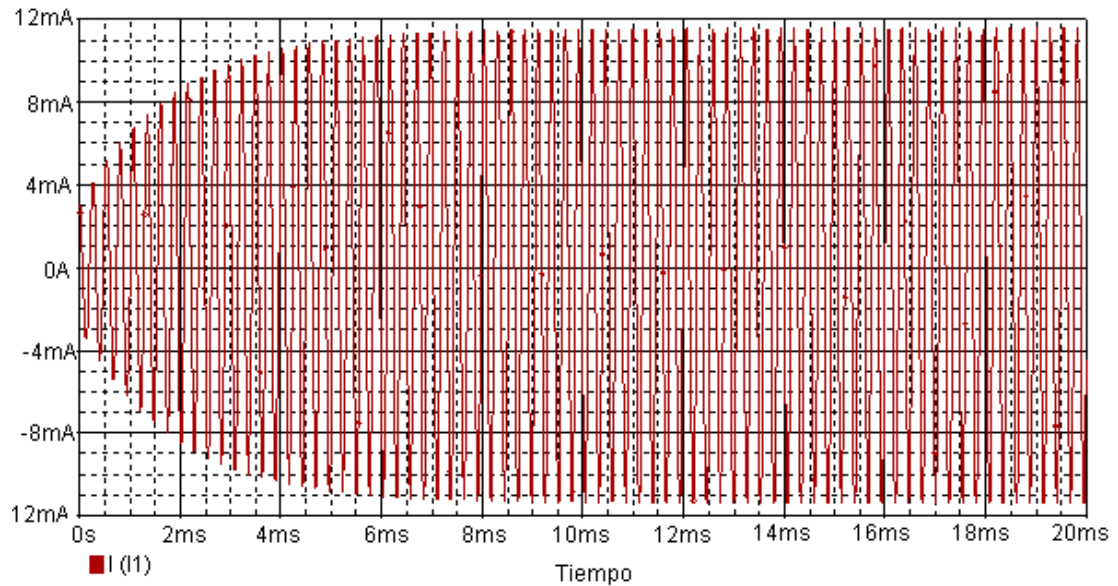


**Simulación para la situación  $G > 0$  ( $G=500\mu S$ )**

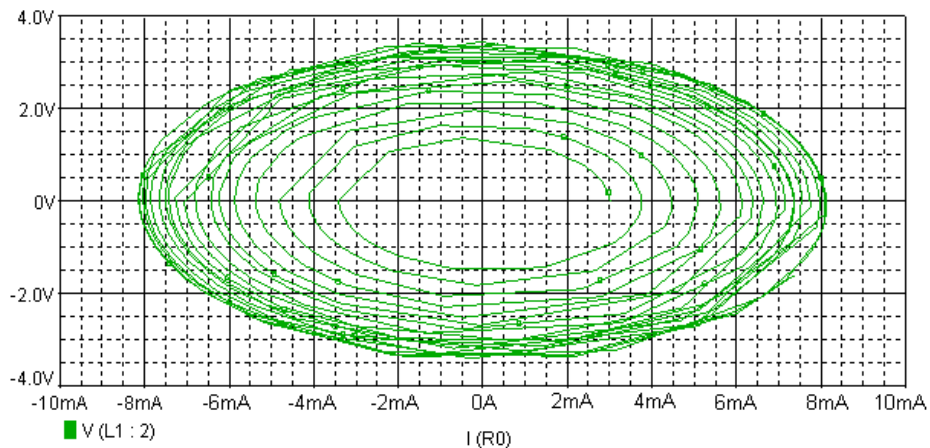
**Figura 46:** Señal de tensión en la capacitancia C2, para  $G>0$ .



**Figura 47:** Señal de corriente que pasa a través de la bobina L1, para  $G>0$ .



**Figura 48:** Comportamiento de voltaje en capacitancia con respecto a la corriente en el inductor.  $R = 2k\Omega$ ,  $I_3$  vs  $V_2$ , para  $G>0$ .

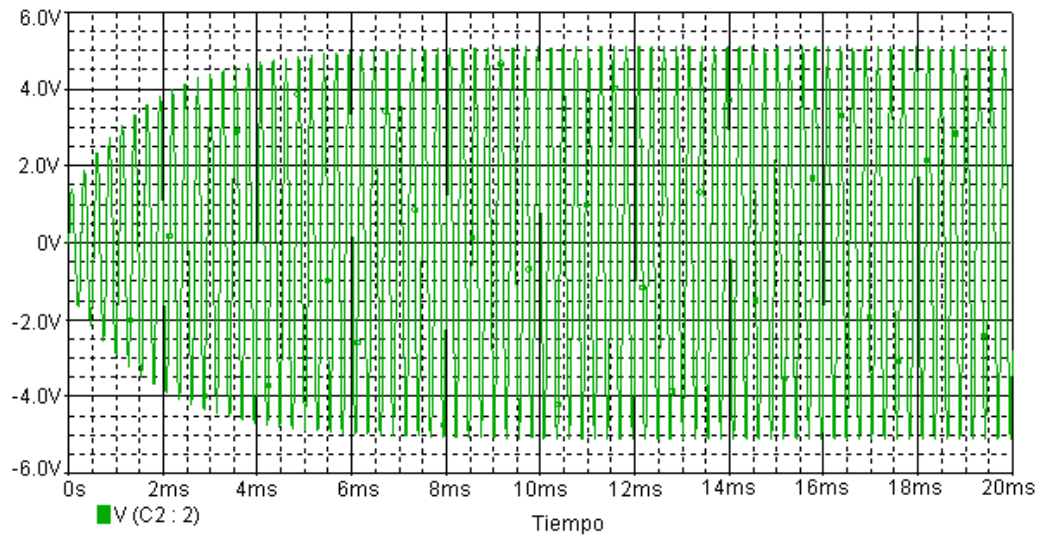


La simulación muestra resultados esperados, en la *Figura 46* y *47* muestra el comportamiento en el tiempo de la corriente en la bobina y el voltaje en la capacitancia, se puede notar que van creciendo hasta quedarse oscilando en cierto punto, lo que forma en el plano XY un comportamiento que parece un ciclo límite (ver *Figura 48*), pero anteriormente en la sección 8.1.4 se habla que en el plano 2D se ve así pero lo que en

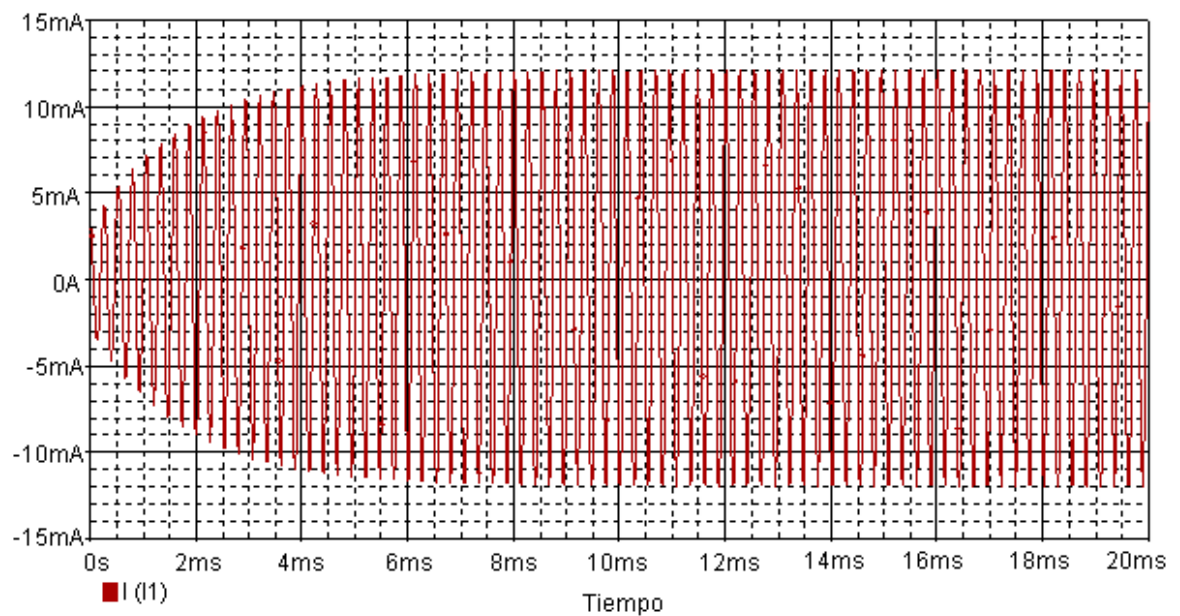
realidad pasa es que se produce un *Fold*, es un doblamiento que se forma en el eje  $V_1$  gracias al punto de equilibrio estable en el origen.

### Simulación para la situación $G < 0$ ( $G=1.56mS$ )

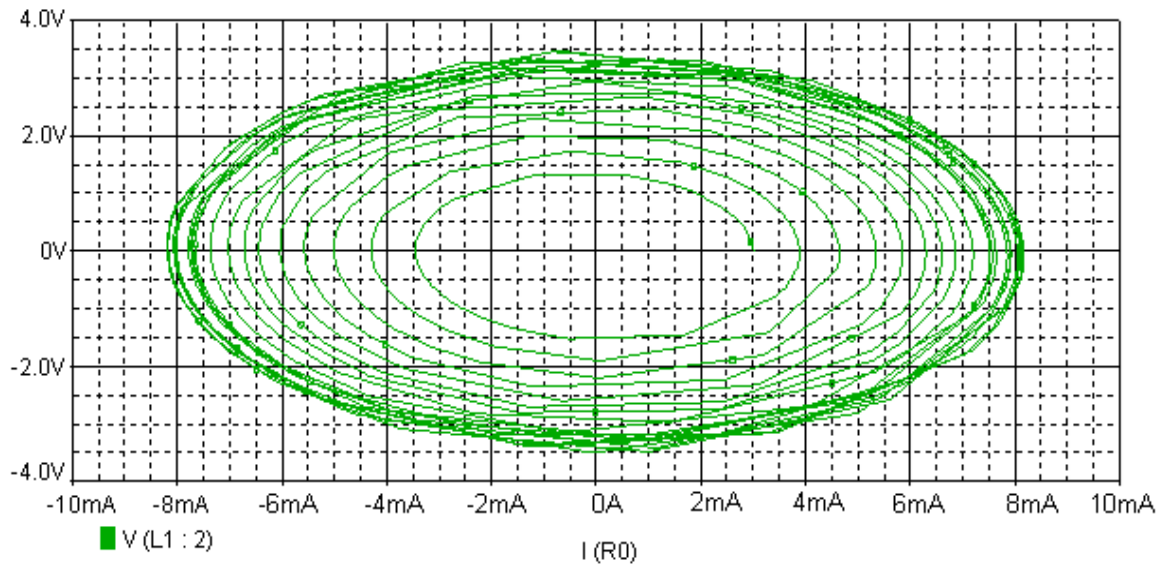
**Figura 49:** Señal de tensión en la capacitancia C2, para  $G < 0$ .



**Figura 50:** Señal de corriente en la bobina L1, para  $G < 0$ .



**Figura 51:** Comportamiento de voltaje en capacitancia con respecto a la corriente en el inductor para una resistencia de  $641.0256\Omega$ , para  $G < 0$ .



La simulación muestra resultados esperados, en la *Figura 49* y *50* muestra el comportamiento en el tiempo de la corriente en la bobina y el voltaje en la capacitancia, se puede notar que van creciendo hasta quedarse oscilando en cierto punto, lo que forma en el plano XY un comportamiento que parece un ciclo límite (ver *Figura 51*), pero anteriormente en la sección 8.1.4 se habla que en el plano 2D se ve así pero lo que en realidad pasa es que se produce un *Kink*, es como una torcedura que se forma en el eje  $V_1$  gracias al punto de equilibrio inestable en el origen.

#### 8.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO

A continuación se procede a realizar el montaje correspondiente al circuito de la *Figura 38*, con el fin de comprobar los resultados obtenidos en la sección 8.2. Para esto se debe tener en cuenta el análisis realizado de la sección 8.1 que nos permitirá identificar los diversos comportamientos y dar solución a los posibles problemas que se nos presenten.

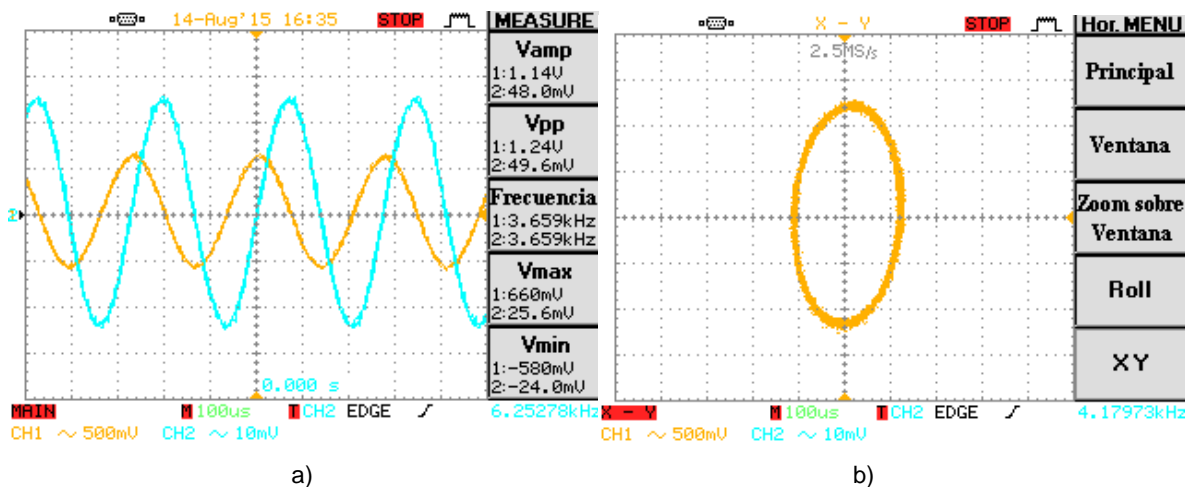
El montaje de dicho circuito se realiza teniendo en cuenta los valores y elementos mostrados en la tabla 2. Hay que tener en cuenta que el circuito funciona como un oscilador, y utilizar una resistencia fija no es conveniente. Por esa razón se utiliza un potenciómetro

para variar el la resistencia hasta llegar al valor deseado para que el diodo de Chua funcione correctamente.

Al momento de medir los valores en el osciloscopio, ubicamos uno de los pines en el terminal positivo de la capacitancia y se agrega el circuito una resistencia de  $12.5\Omega$  en serie con la bobina para registrar el valor de corriente que pasa por ella con el segundo pin.

En la Figura 52 b) se muestra el comportamiento del voltaje en  $V_2$  respecto a la corriente multiplicada por una resistencia de 1 ohmio. En el canal 1 tenemos la corriente de la bobina y el canal 2 el voltaje en el capacitor. Esta grafica se conoce como la solución del circuito en XY, esto quiere decir que se está mostrando en 2D donde se podría decir que la solución es un ciclo limite pero al recordar lo que se analizó teóricamente en este capítulo, se sabe que en la forma global existen 3 ejes  $(I_3, V_2, V_1)$ , para este caso se trabajó con una resistencia de  $2k\Omega$  la cual aplica para que  $G''_a > 0$  por tanto lo que en realidad pasa es que a medida que las trayectorias van evolucionando son atraídas por el punto de equilibrio  $P''_+$ , posteriormente estas intentan entrar en la región  $D''_0$  pero se encuentran con un punto de equilibrio inestable en el origen, el cual repele las trayectorias haciendo que estas salten desde la región  $D''_1$  a la región  $D''_{-1}$  para encontrarse con el punto de equilibrio estable  $P''_-$ . Este comportamiento se repite, pero hay que tener en cuenta que se añade un nuevo eje llamado  $V_1$  que producirá que un doblamiento en los planos que se llama *Fold*.

**Figura 52:** Señales obtenidas en el osciloscopio para el circuito de la Figura 45. En la imagen a) Señal en el tiempo b) Señal modo XY



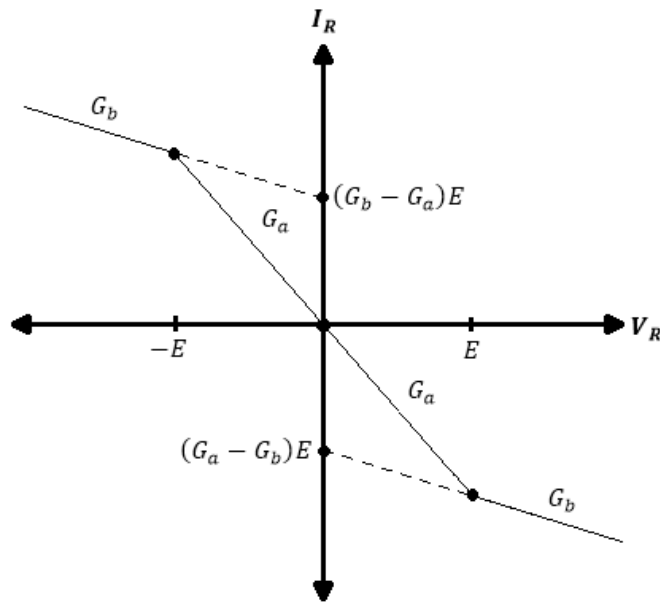
## 9. ANÁLISIS DEL CIRCUITO CHUA

### 9.1. ANÁLISIS TEÓRICO

Cabe recordar que esta sección, al igual que este trabajo en general, se fundamenta en la metodología del artículo *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*, sin embargo los cálculos que se muestran aquí son más explícitos que los mostrados en ese documento.

Considerando la importancia de los puntos de equilibrio para el comportamiento de las trayectorias del circuito, se resalta la necesidad de conocer la cantidad de puntos de equilibrio del sistema y su comportamiento específico para que el caos se produzca. Es por esto que se debe tener cuidado al momento de elegir los parámetros de conducción característicos del elemento no lineal (NR) ya que estos determinan la cantidad de puntos de equilibrio que posea el circuito. Para evitar sacrificar los beneficios del análisis lineal a tramos, se especifica un punto de conducción característico (DP) para la resistencia no lineal (NR), ver Figura 53. Esto produce al menos dos puntos de equilibrio inestables.

**Figura 53:** Punto de conducción característico del diodo Chua,  $I_R$  Vs  $V_R$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

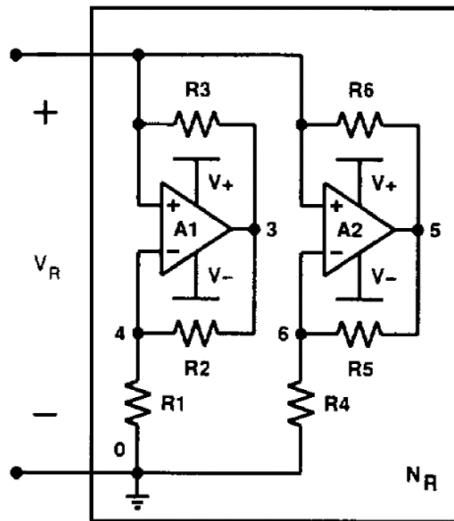
La característica (DP) lineal a tramos de la Figura 53 se define analíticamente de la siguiente manera:

$$I_R = f(V_R) = \begin{cases} G_b V_R + (G_b - G_a)E & , V_R < -E \\ G_a V_R & , -E \leq V_R \leq E \\ G_b V_R + (G_a - G_b)E & , V_R > E \end{cases}$$

donde  $E > 0$ ,  $G_a < 0$  y  $G_b < 0$ ,  $V_R = V_1$

Como ya se demostró en la sección 6 en contraste con la resistencia no lineal caracterizada, hay que tener en cuenta que en esta sección,  $G$  y  $G_b$  se consideran ambos negativos, por esta razón hay pequeña modificación en el elemento no lineal, en el cual es necesario incluir un amplificador operacional adicional para cumplir la condición de  $G_b$  negativo como se muestra en la Figura 54.

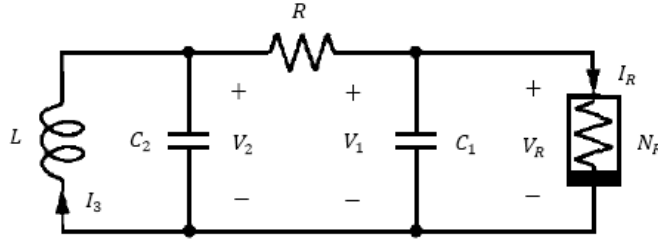
**Figura 54:** Elemento no lineal para  $G_b$  negativo.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

El circuito Chua está dado por el esquema visto en la Figura 55.

**Figura 55:** Circuito de Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

**9.1.1. Descripción del circuito no lineal a tramos.** Este circuito puede ser descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias cuyas variables de estado son  $I_3, V_2, V_1$ .

*Bobina:*

$$V_L = L \frac{dI_3}{dt} \rightarrow \frac{dI_3}{dt} = \frac{1}{L} V_L = -\frac{1}{L} V_2$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \dot{I}_3 = -\frac{1}{L} V_2$$

*Capacitor  $C_2$ :*

$$I_{C2} = C_2 \frac{dV_2}{dt} \rightarrow \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_{C2} = \frac{1}{C_2} (I_3 - I) \quad , \quad \text{sabemos que: } I = \frac{(V_2 - V_1)}{R} = G(V_2 - V_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_2}{dt} = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{1}{C_2} I = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G}{C_2} (V_2 - V_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dV_2}{dt} = \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2} I_3 - \frac{G}{C_2} (V_2 - V_1)$$

*Capacitor  $C_1$ :*

$$I_{C1} = C_1 \frac{dV_1}{dt} \rightarrow \frac{dV_1}{dt} = \frac{1}{C_1} I_{C1} = \frac{1}{C_1} (I - I_R)$$

$$\Rightarrow \frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1 = \frac{1}{C_1} I - \frac{1}{C_1} I_R = \frac{G}{C_1} (V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1} f(V_1)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1 = \begin{cases} \frac{G}{C_1} V_2 - \frac{G'_b}{C_1} V_1 - \frac{(G_b - G_a)}{C_1} E & \text{si } V_1 < -E \\ \frac{G}{C_1} V_2 - \frac{G'_a}{C_1} V_1 & \text{si } -E \leq V_1 \leq E \\ \frac{G}{C_1} V_2 - \frac{G'_b}{C_1} V_1 - \frac{(G_a - G_b)}{C_1} E & \text{si } V_1 > E \end{cases}$$

donde  $G = \frac{1}{R}$  ,  $G'_a = G + G_a$  ,  $G'_b = G + G_b$

Por tanto las ecuaciones diferenciales del circuito de Chua serán:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}f(V_1) = \begin{cases} \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{(G_b - G_a)}{C_1}E & \text{si } V_1 < -E \\ \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_a}{C_1}V_1 & \text{si } -E \leq V_1 \leq E \\ \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{(G_a - G_b)}{C_1}E & \text{si } V_1 > E \end{cases} \end{aligned}$$

Debido al comportamiento del elemento no lineal (NR), las ecuaciones del circuito se dividen en tres regiones afines:

$$\text{Region } D_{-1} \rightarrow V_1 < -E$$

$$\text{Region } D_0 \rightarrow -E \leq V_1 \leq E$$

$$\text{Region } D_1 \rightarrow V_1 > E$$

Por lo tanto se trabaja el circuito realizando un análisis lineal a tramos, es decir, tomando cada región por separado para juntarlas al final y concluir con un resultado global.

Esto se logra al hallar el punto de equilibrio de cada región, igualando las primeras derivadas de las ecuaciones a cero; posteriormente se clasifica el tipo de equilibrio al que este pertenece hallando los valores propios a través de la matriz jacobiana. Este mismo proceso se repite en las siguientes secciones.

**9.1.2. Región media ( $|V_1| \leq E$ ).** Para esta región se consideran  $|V_1| \leq E$  y es descrita por las siguientes ecuaciones diferenciales:

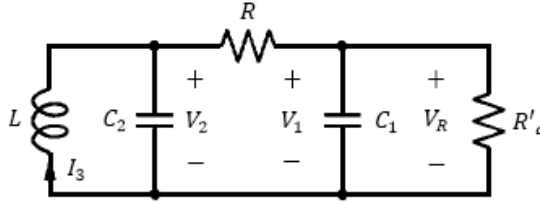
$$\frac{dI_3}{dt} = \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \quad (1)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \quad (2)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_a}{C_1}V_1 \quad (3)$$

Por tanto el circuito que describe a la región  $D_0$  se muestra en la figura 56.

**Figura 56:** Equivalente del circuito de Chua en la región  $D_0$ , Cuando  $R_a = 1/G_a$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales características de la región  $D_0$  podemos hallar el punto de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 0 \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_a}{C_1}V_1 = \frac{G}{C_1}(0) - \frac{G'_a}{C_1}V_1 = 0 \rightarrow V_1 = 0 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(0) = 0 \rightarrow I_3 = 0 \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos un punto de equilibrio en el origen  $(I_3, V_2, V_1) = (0, 0, 0)$ , cuya estabilidad se determina a través de los valores propios de la matriz jacobiana:

$$J_{Fa} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_a}{C_1} \end{bmatrix}$$

Ahora, haciendo uso de la ecuación  $\det(\lambda I - J_{Fa}) = 0$ , podemos determinar los valores propios a través del siguiente polinomio:

$$\lambda^3 + \left(\frac{G}{C_2} + \frac{G'_a}{C_1}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{LC_2} + \frac{GG_a}{C_1C_2}\right)\lambda + \frac{G'_a}{LC_1C_2} = 0$$

Cuando se soluciona la ecuación anterior y teniendo en cuenta los siguientes parámetros:  $L = 18 \text{ mH}, C_2 = 100 \text{ nF}, C_1 = 10 \text{ nF}, G_a = -55/60 \text{ mS} = -757.576 \mu\text{S}, G_b =$

$-9/22 \text{ mS} = -409.091 \mu\text{S}$ , y  $E = 1 \text{ V}$ , se tendrá que para un  $G = 550 \mu\text{S}$ , los valores propios de  $J_{Fa}$  son:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &\approx 25291 \\ \sigma_0 \pm j\omega_0 &\approx -5842 \pm j19720\end{aligned}$$

Considerando los valores propios hallados, se asocia al valor propio real  $\gamma_0$  un vector propio  $E^r(0)$  en relación al punto de equilibrio en la región  $D_0$ , el cual se hallara a partir de la siguiente ecuación:

$$J_{Fa}E^r(0) = \gamma_0 E^r(0) \quad , \quad \text{donde} \quad E^r(0) = [x, y, z]^T$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 & \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & \gamma_0 + \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} \\ 0 & -\frac{G}{C_1} & \gamma_0 + \frac{G'_a}{C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al normalizar la anterior ecuación como  $z = 1$ , se obtendrá que el vector propio se define por:

$$E^r(0) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\gamma_0 + \frac{G}{C_2}\right) \left(\gamma_0 + \frac{G'_a}{C_1}\right) \frac{C_1 C_2}{G} - G \\ \frac{C_1}{G} \left(\gamma_0 + \frac{G'_a}{C_1}\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ahora al valor propio  $\sigma_0 \pm j\omega_0$  se le asocia un vector propio complejo cuyas partes real e imaginaria generan un plano por definido por  $E^c(0)$ , el cual posee un vector normal denotado por:

$$\begin{bmatrix} -\frac{LC_2}{G} \left(\gamma_0 + \frac{G'_a}{C_1}\right) \left(\gamma_0 + \frac{G}{C_2}\right) + \frac{LG}{C_1} \\ \frac{C_2}{G} \left(\gamma_0 + \frac{G'_a}{C_1}\right) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{C_1} x \\ \frac{C_2}{C_1} y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{donde } \gamma_0 \text{ es el valor propio real.}$$

Teniendo en cuenta que ninguna trayectoria puede cruzar a través del plano  $E^c(0)$ , una trayectoria que inicia este plano solo se desarrolla sobre él. Por otro lado si una trayectoria inicia con una condición inicial por debajo del plano, esta permanecerá indefinidamente por debajo, pero si dicha trayectoria inicia en una condición inicial por encima del plano entonces esta permanecerá indefinidamente por encima.

**9.1.3. Regiones exteriores ( $|V_1| > E$ ).** Para las regiones exteriores se describen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1}\end{aligned}$$

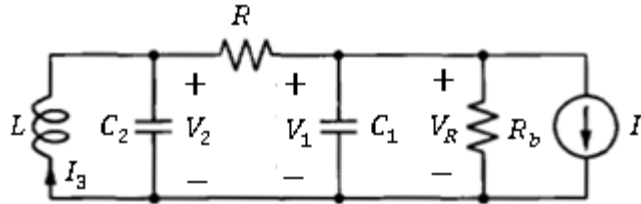
Donde

$$\text{En la region } D_{-1} (V_1 < -E) \rightarrow I' = (G_b - G_a)E$$

$$\text{En la region } D_1 (V_1 > E) \rightarrow I' = (G_a - G_b)E$$

Se sabe que existen circuitos equivalentes afines para las regiones  $D_{-1}$  y  $D_1$ , los cuales consisten de un circuito RLC en paralelo con una resistencia  $R'_b = 1/G'_b$  y con una fuente de corriente DC llamada  $I'$ , como se puede observar en la Figura 57.

**Figura 57:** Equivalente del circuito Chua en la región  $D_1$ .  $R_b = 1/G'_b$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Para hallar los puntos de equilibrio en las regiones exteriores se hace un corto circuito en  $L$  y un circuito abierto en  $C_1$  y  $C_2$ .

$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= -\frac{1}{L}V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 0 \\ \frac{dV_1}{dt} &= \frac{G}{C_1}V_2 - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1} = \frac{G}{C_1}(0) - \frac{G'_b}{C_1}V_1 - \frac{I'}{C_1} = 0 \rightarrow V_1 = -\frac{I'}{G'_b} \\ \frac{dV_2}{dt} &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}\left((0) - \left(-\frac{I'}{G'_b}\right)\right) = 0 \rightarrow I_3 = \frac{GI'}{G'_b}\end{aligned}$$

Considerando que  $I' = (G_b - G_a)E$  para la región  $D_{-1}$ , se dice que el punto de equilibrio en esta región es:

$$P_- = \begin{bmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(G_b - G_a)E}{G + G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_a - G_b)E}{G + G_b} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que  $I' = (G_a - G_b)E$  para la región  $D_1$ , se afirma que el punto de equilibrio en esta región es:

$$P_+ = \begin{bmatrix} I_3 \\ V_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G(G_a - G_b)E}{G + G_b} \\ 0 \\ \frac{(G_b - G_a)E}{G + G_b} \end{bmatrix}$$

Cuando el punto de equilibrio  $P_-$  se ubica fuera de la región  $D_{-1}$  se afirma que es un punto equilibrio virtual y por lo tanto no afecta al circuito.

Luego se procede a determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio a través de los valores propios la matriz jacobiana:

$$J_{Fb} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{G}{C_2} & \frac{G}{C_2} \\ 0 & \frac{G}{C_1} & -\frac{G'_b}{C_1} \end{bmatrix}$$

Donde los valores propios los podemos determinar a partir del  $\det(\lambda I - J_{Fb}) = 0$ , es decir:

$$\lambda^3 + \left(\frac{G}{C_2} + \frac{G'_b}{C_1}\right)\lambda^2 + \left(\frac{1}{LC_2} + \frac{GG_b}{C_1C_2}\right)\lambda + \frac{G'_b}{LC_1C_2} = 0$$

Cuando se soluciona la ecuación anterior y teniendo en cuenta los siguientes parámetros:  $L = 18 \text{ mH}$ ,  $C_2 = 100 \text{ nF}$ ,  $C_1 = 10 \text{ nF}$ ,  $G_a = -55/60 \text{ mS} = -757.576 \mu\text{S}$ ,  $G_b = -9/22 \text{ mS} = -409.091 \mu\text{S}$ , y  $E = 1 \text{ V}$ , se tendrá que para un  $G = 550 \mu\text{S}$ , los valores propios de  $J_{Fb}$  son:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\approx -23284 \\ \sigma_1 \pm j\omega_1 &\approx 1022 \pm j19260 \end{aligned}$$

Considerando los valores propios hallados, se asocia al valor propio real  $\gamma_1$  un vector propio  $E^r(P_+)$  en relación al punto de equilibrio en la región  $D_1$ , el cual se hallara a partir de la siguiente ecuación:

$$J_{Fa}E^r(P_+) = \gamma_0 E^r(P_+) \quad , \quad \text{donde } E^r(P_+) = [x, y, z]^T$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C_2} & \gamma_1 + \frac{G}{C_2} & -\frac{G}{C_2} \\ 0 & -\frac{G}{C_1} & \gamma_1 + \frac{G'_b}{C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al normalizar la anterior ecuación como  $z = 1$ , se obtendrá que el vector propio se define por:

$$E^r(P_+) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\gamma_1 + \frac{G}{C_2}\right) \left(\gamma_1 + \frac{G'_b}{C_1}\right) \frac{C_1 C_2}{G} - G \\ \frac{C_1}{G} \left(\gamma_1 + \frac{G'_b}{C_1}\right) \\ 1 \end{bmatrix}$$

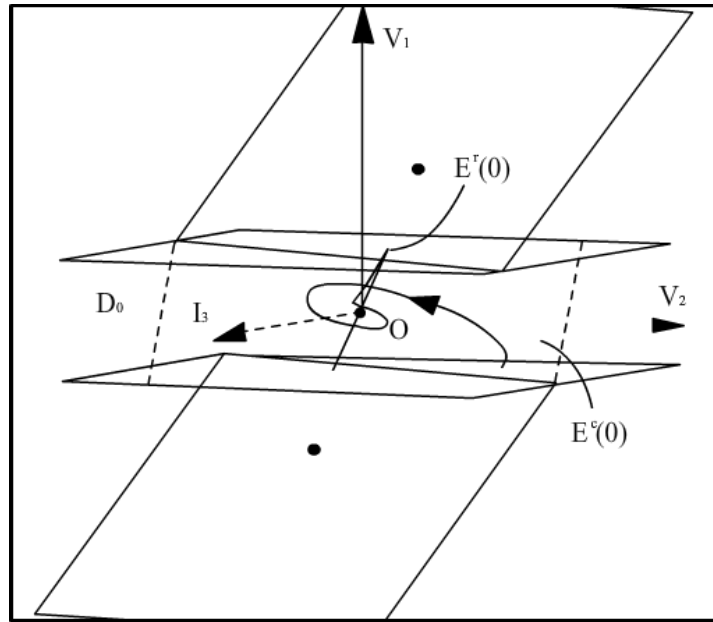
Al valor propio  $\sigma_1 \pm j\omega_1$ , se asocia a un vector propio complejo cuyas partes real e imaginaria abarcan un plano definido por  $E^c(P_+)$ , el cual posee un vector normal denotado por:

$$\begin{bmatrix} -\frac{LC_2}{G} \left(\gamma_1 + \frac{G'_b}{C_1}\right) \left(\gamma_1 + \frac{G}{C_2}\right) + \frac{LG}{C_1} \\ \frac{C_2}{G} \left(\gamma_1 + \frac{G'_b}{C_1}\right) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{C_1} x \\ \frac{C_2}{C_1} y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{donde } \gamma_1 \text{ es el valor propio real.}$$

Teniendo en cuenta que ninguna trayectoria puede cruzar a través del plano  $E^c(P_+)$ , una trayectoria que inicia este plano solo se desarrolla sobre él. Por otro lado si una trayectoria inicia con una condición inicial por debajo del plano, esta permanecerá indefinidamente por debajo, pero si dicha trayectoria inicia en una condición inicial por encima del plano entonces esta permanecerá indefinidamente por encima.

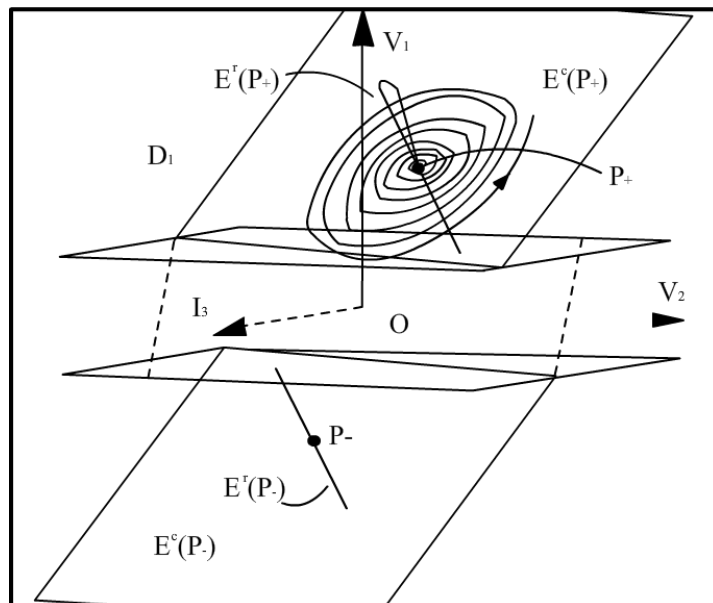
Para mostrar lo dicho anteriormente sobre el plano  $E^c$  y el vector  $E^r$ , se ilustra, en las figuras 58 y 59 el comportamiento cualitativo de las trayectorias.

**Figura 58:** Dinámica de la región  $D_0$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

**Figura 59:** Dinámica de la región  $D_1$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

**9.1.4. Análisis global del circuito.** Para comprender la dinámica global del circuito se deben juntar los campos vectoriales de las regiones  $D_{-1}$ ,  $D_0$  y  $D_1$  al igual que sus respectivos análisis. Para ello se inicia recordando que el circuito está determinado por las siguientes ecuaciones diferenciales.

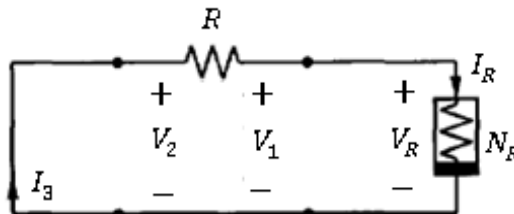
$$\begin{aligned}\frac{dI_3}{dt} &= \dot{I}_3 = -\frac{1}{L}V_2 \\ \frac{dV_2}{dt} &= \dot{V}_2 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ \frac{dV_1}{dt} &= \dot{V}_1 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R\end{aligned}$$

A partir de estas se empieza a realizar un análisis global, por lo cual se hallan los puntos de equilibrio del circuito, no por regiones si no esta vez analizando por completo el espacio vectorial como uno solo.

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{1}{L}V_2 \\ 0 &= \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \\ 0 &= \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R\end{aligned}$$

Realizando un análisis se realiza un análisis en DC al circuito, razón por la cual se debe reemplazar a las capacitancias por circuitos abiertos y a las inductancias por cortos circuitos y finalmente determinar la corriente que pasa a través del diodo NR es decir la solución en DC, Ver Figura 60.

**Figura 60:** Equivalente en DC del circuito Chua.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Se tiene:

$$V_2 = 0, V_1 = V_R$$

Es decir:

$$0 = -\frac{1}{L}V_2 \rightarrow V_2 = 0$$

$$0 = \frac{1}{C_2}I_3 - \frac{G}{C_2}(V_2 - V_1) \rightarrow I_3 = -GV_1$$

$$0 = \frac{G}{C_1}(V_2 - V_1) - \frac{1}{C_1}I_R \rightarrow I_R = -GV_1$$

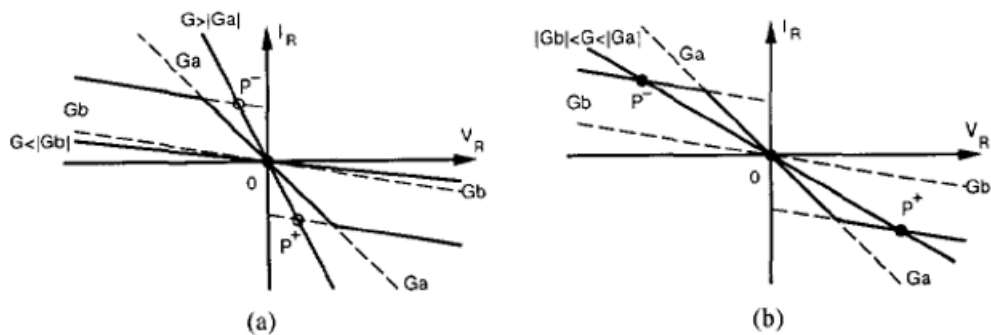
Donde:

$$I_3 = I_R = -GV_1 = -GV_R$$

$$I_R = -GV_R$$

Para determinar los puntos de equilibrio del circuito se grafican en una misma grafica la solución en DC y el punto de conducción característico de la resistencia no lineal donde la intersección de ambas graficas determina los puntos de equilibrio del sistema. Para esto se debe tener en cuenta que el valor de la conductancia  $G$  es importante para determinar la ubicación de los puntos de equilibrio, Ver Figura 61.

**Figura 61:** Puntos de equilibrio en DC determinados gráficamente por la intersección de la corriente  $I_R = -GV_R$  con el punto de conducción característico de  $N_R$ .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Si  $G > |G_a|$  y  $G < |G_b|$  entonces el circuito tendrá un punto de equilibrio en el origen y dos puntos de equilibrio virtuales ( $P_-$  y  $P_+$ ), ver Figura 61(a). Si por el contrario  $|G_b| < G < |G_a|$  entonces el circuito tendrá tres puntos de equilibrio los cuales son  $P_-$ , 0 y  $P_+$ , ver Figura

61(b). A continuación por medio de un ejemplo se quiere dar a conocer algunos de las características que conforman la dinámica caótica del circuito mostrado en la Figura 55 en el cual los valores de los elementos que lo conforman son  $L = 18 \text{ mH}$ ,  $C_2 = 100 \text{ nF}$ ,  $C_1 = 10 \text{ nF}$ ,  $G_a = -55/60 \text{ mS} = -757.576 \mu\text{S}$ ,  $G_b = -9/22 \text{ mS} = -409.091 \mu\text{S}$ , y  $E = 1 \text{ V}$ . Para realizar un análisis global del circuito se varia el valor de la resistencia  $R$  en el rango de  $0 \Omega \leq R \leq 2000 \Omega$ .

Iniciando el análisis con  $R = 2000 \Omega$  y al remplazar valores en las ecuaciones de las secciones anteriores se obtienen los respectivos valores propios:

**Para el punto de equilibrio (0) en la region media:**

*Valor propio real positivo ( $\gamma_0 > 0$ )*

*Par de valores propios complejos conjugados con parte real negativa ( $\sigma_0 < 0$  y  $\omega_0 \neq 0$ )*

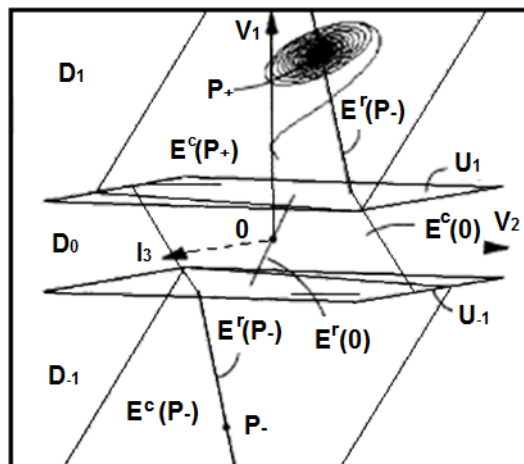
**Para los puntos de equilibrio ( $P_-$  y  $P_+$ ) las regiones exteriores:**

*Valor propio real negativo ( $\gamma_1 < 0$ )*

*Par de valores propios complejos conjugados con parte real negativa ( $\sigma_1 < 0$  y  $\omega_1 \neq 0$ )*

Se supone que el sistema inicia en el punto de equilibrio  $P_+$  en la región  $D_1$ , el valor propio real negativo comprime las trayectorias en forma de espiral haciendo que estas caigan bajo el plano  $E_c(P_+)$  dirigiéndose al punto de equilibrio  $P_+$ , Ver Figura 62.

**Figura 62:** Bifurcacion Hopf.



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

Tomando otros valores de resistencia partiendo de  $R = 2000 \Omega$  hasta decrecer a cero. Se produce una variación de los valores propios de los puntos de equilibrio tanto en la región media como en las regiones exteriores, un ejemplo, si se analiza los valores propios complejos conjugados es notable que la parte real de estos pasa a ser positiva, por lo tanto los puntos de equilibrio se convierten en inestables, a este comportamiento se le conoce como una **bifurcación Hopf**.

Por otro lado el valor propio real del punto de equilibrio  $P_+$  mantiene un valor negativo, ocasionando que las trayectorias en la región  $D_1$  se alejen en forma de espiral del punto de equilibrio  $P_+$  y converjan hacia el plano complejo  $E_c(P_+)$ , y finalmente estas se dividen en el plano  $U_1$  definido por  $V_1 = E$  para luego entrar en la región  $D_0$ , Ver Figura 62.

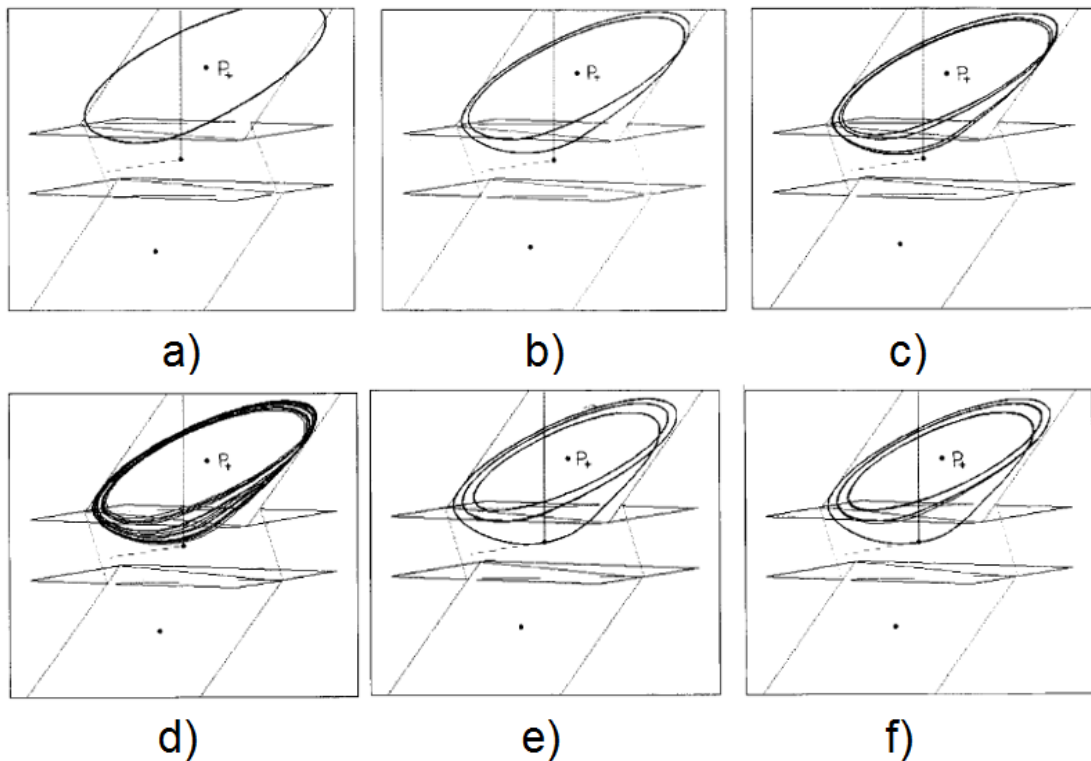
Si al variar la resistencia  $R$  se analiza la región  $D_0$ , se notará que el punto de equilibrio en el origen (0) posee un par de valores propios complejos estables y un valor propio real inestable provocando que las trayectorias que entren a esta región en el plano complejo  $E_c(0)$  sean atraídas hacia el origen, sin embargo si dichas trayectorias provienen de alguna de las regiones exteriores e ingresan a la región media  $D_0$  estas serán repelidas y devueltas a su región externa de la cual llegaron. A dicho comportamiento se le conoce como **ciclo limite**, y se presenta para un valor de resistencia  $R$  cercano a los  $2000 \Omega$ . Ver Figura 63(a).

Para observar otros comportamientos se continúa disminuyendo el valor de la resistencia  $R$ , el ciclo limite formado anteriormente se repite, es decir se producen dos ciclos límites consecutivos luego de girar alrededor del punto de equilibrio  $P_+$ . A esto se le conoce como **periodo de duplicación o periodo de dos ciclos** debido a que este demora el doble del tiempo en formarse en comparación con el tiempo en que se forma un ciclo límite. Ver Figura 63(b). Consecuentemente si se procede a seguir disminuyendo el valor numérico de la resistencia ( $R$ ) se repite nuevamente el comportamiento, es decir se generaría a medida que se disminuye la resistencia un **periodo de 4 ciclos** (Ver Figura 63(c)), luego un **periodo de 8 ciclos**, después un **periodo de 16 ciclos** hasta que casi faltando poco para llegar al límite inferior del rango de variación de valores de la resistencia  $R$  se produce una espiral de Chua más conocida como **atractor extraño** (Ver Figura 63(d)), el cual es una

trayectoria que inicialmente se originó en una condición inicial  $X_0$  pero que nunca retorno a ella.

Otro aspecto que se puede analizar se presenta al observar un pequeño rango de valores dentro del rango  $0 \leq R \leq 2000 \Omega$ . En este pequeño rango se genera un comportamiento donde las trayectorias presentan bifurcaciones de movimiento periódico estable a esto se le conoce como **ventanas periódicas** (Ver Figura 63(e)), en donde las trayectorias se someten a periodos de duplicación produciendo **periodos de 3 y 5 ciclos**. Ver Figura 63(f).

**Figura 63:** En la parte a) Ciclo limite, en b) Periodo de duplicación, en c) Periodo de 4 ciclos, en d) Atractor extraño, en e) Ventanas periódicas y en f) Periodo de 3 ciclos .



Fuente: Three steps to chaos Part I / Michael Peter Kennedy.

### ***Espiral atractor de Chua:***

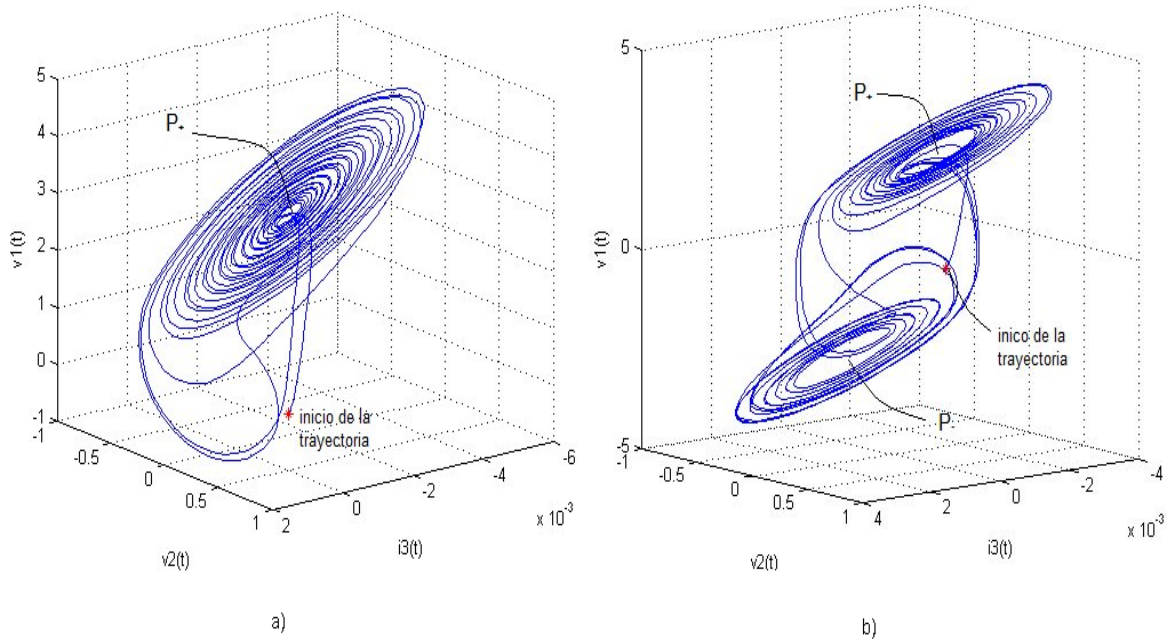
Tomando el mismo ejemplo anterior se parte del hecho que existe una trayectoria la cual genera un atractor extraño que gira alrededor del punto de equilibrio  $P_+$ , que se origina luego de variar el valor de la resistencia  $R$ , por tanto al analizar su comportamiento es destacable que sus trayectorias se encuentran en la región  $D_1$  y estas son comprimidas sobre el plano complejo  $E^C(P_+)$  a lo largo de la dirección del vector propio real estable  $E^r(P_+)$  cuyas espirales giran alrededor y lejos del punto de equilibrio  $P_+$  en el plano  $E^C(P_+)$ . Cuando dichas trayectorias crecen lo suficiente y entran en la región  $D_0$  cruzando a través del plano  $U_1$  que separa las regiones  $D_1$  y  $D_0$ , estas giran alrededor del vector propio real  $E^r(P_+)$  donde son devueltas a la región  $D_1$ , debido a que dichas trayectorias se mueven sobre el plano  $E^C(0)$  pero no son capaces de cruzarlo, ver figura 64(a).

### ***Espiral atractor de Chua de doble desplazamiento:***

En el concepto del espiral atractor de Chua, hay que considerar que este se encuentra enteramente ligado a la característica de conducción del elemento no lineal NR cuyo comportamiento es simétrico respecto al eje horizontal del plano cartesiano. Por lo tanto el espiral atractor de Chua presentara un comportamiento simétrico.

Se supone que existe un espiral atractor de Chua en la región  $D_1$  formado a lo largo del plano complejo  $E^C(P_+)$  el cual gira alrededor del punto de equilibrio  $P_+$  abarcando parte de la región  $D_0$ , por consiguiente se dice que podrá existir un espiral atractor de Chua simétrico que abarcara la región  $D_{-1}$  y parte de la región  $D_0$  el cual gira alrededor del punto de equilibrio  $P_-$  a lo largo del plano complejo  $E^C(P_-)$ , dependiendo sea el valor de la resistencia  $R$ . A este tipo de atractor cuyo comportamiento es el mismo del anterior se le conoce como *espiral atractor de Chua de doble desplazamiento*, donde el plano complejo  $E^C(0)$  representa un plano frontera, de modo que las trayectorias que cruzaron el plano  $U_1$  de la región  $D_1$  son forzadas a devolverse a la región  $D_1$  o en otros casos a cruzar a la región  $D_{-1}$ . Ver Figura 64(b).

**Figura 64:** a) Espiral atractor de Chua hallado con una resistencia de  $1886\Omega$ , b) Doble desplazamiento del espiral atractor de Chua hallado con una resistencia de  $1797\Omega$ .



Si se retoma el ejemplo planteado inicialmente de la resistencia  $R$  y si continua disminuyendo el valor de esta, habrá un momento en el cual la respuesta del circuito será producir regiones de caos junto con ventanas periódicas. Sin embargo existirá un momento en el que el valor de la resistencia  $R$  será lo suficientemente pequeña, ocasionando que se genere una trayectoria tipo silla la cual colisionará con el espiral atractor de Chua de doble desplazamiento.

## 9.2. ANÁLISIS EN MATLAB®

Se procede a comprobar por medio del software MATLAB® el comportamiento caótico del circuito Chua visto teóricamente en la sección 9.1. Para esto son simuladas las ecuaciones diferenciales del circuito incluyendo la del elemento no lineal. Consecuentemente se grafican en el tiempo las señales de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$  es decir  $V_2$  y  $V_1$ , respectivamente. Para poder observar el atractor de doble espiral o atractor Chua se grafica en modo XY las señales de tensión de los capacitores  $V_2$  vs  $V_1$ . Se procede a crear un código en Matlab con el comando *function*, el cual represente el comportamiento lineal a tramos del diodo Chua. Esto se logra haciendo uso de las ecuaciones que lo representan las cuales fueron expuestas y explicadas en el capítulo 6.

Posteriormente se crea un segundo código de Matlab pero esta vez se simulan las ecuaciones diferenciales que representan al circuito de Chua utilizando de igual forma el comando *function* e invocando el primer código desarrollado. Así tendríamos las ecuaciones diferenciales del circuito incluyendo al elemento no lineal. Finalmente, aquí mismo, se procede hacer uso de la función desarrollada de las ecuaciones diferenciales que ya contiene al elemento no lineal, y utilizando el comando ODE45 se halla la solución de las ecuaciones para luego graficar y obtener los resultados de la Figura 65. Cabe resaltar que este último código depende también de las condiciones iniciales y del tiempo a simular. Y es importante mencionar que la variación de la gráfica obtenida se obtiene al variar el valor de la resistencia R. A continuación se muestra algunos parámetros importantes para simular el código final. Estos son los mismos que son usados en las simulaciones de las secciones anteriores, los cuales se obtienen del artículo guía [1], [2]. Se debe considerar que si se quieren variar se debe considerar el análisis teórico de la sección 7.1.

Parámetros de simulación:

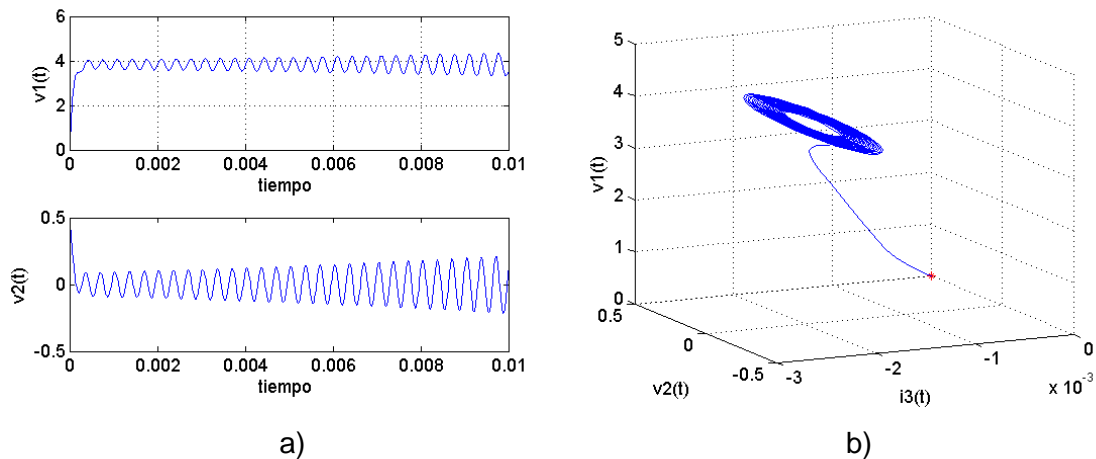
$$L = 18 \text{ mH} \quad , \quad C_2 = 100 \text{ nF} \quad , \quad C_1 = 10 \text{ nF}$$

$$G_a = -55/60 \text{ mS} = -757.576 \text{ } \mu\text{S} \quad , \quad G_b = -9/22 \text{ mS} = -409.091 \text{ } \mu\text{S} \quad , \quad E = 1 \text{ V}$$

Un tiempo de 10[ms], una condición inicial de  $[i3 \ v2 \ v3] = [0 \ 0.5 \ 0]$

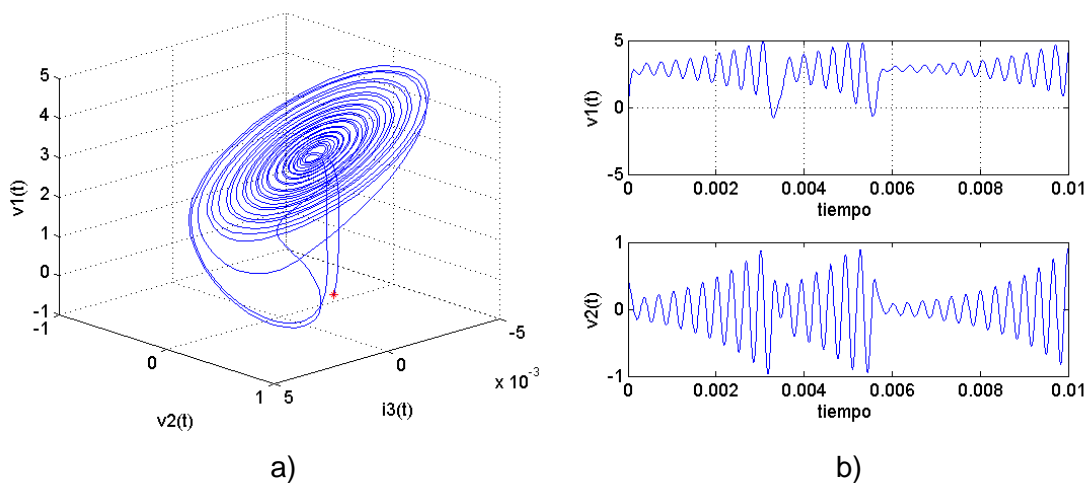
$$0 \ \Omega \leq R \leq 2000 \ \Omega.$$

**Figura 65:** Para una resistencia de 2kΩ, a). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores C2 y C1., b). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión V<sub>2</sub> vs V<sub>1</sub>.



La figura 65(a) muestra las señales en el tiempo de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$  es decir  $V_2$  y  $V_1$  respectivamente, para un valor de  $R = 2k\Omega$ . En dicha figura se puede apreciar cómo inicia una oscilación en las tensiones de los capacitores en el tiempo cero, y como estas aumentan en amplitud a medida que aumenta el tiempo. Dichas oscilaciones son de vital importancia ya que son estas la que generan el movimiento de las trayectorias. Por otro lado en la Figura 65(b) se observa un espiral atractor de Chua en 3D, al graficar en el modo XYZ,  $V_2$  vs  $I_3$  vs  $V_1$ , siendo  $I_3$  la corriente que pasa a través del inductor. Donde la condición inicial es marcada con un asterisco de color rojo. Nótese que la solución va moviéndose hacia el punto de equilibrio que se encuentra en la parte superior de ella, el cual es estable ya que las trayectorias van hacia él. Como se había nombrado en la parte teórica la trayectoria va hacia el punto de equilibrio y se queda constantemente ahí sin salir del plano, el cual es formado por el vector propio complejo asociado a la parte real e imaginaria del valor propio complejo obtenido en la sección anterior, donde las trayectorias son comprimidas, formando una espiral al que llamamos orbita.

**Figura 66:** Para una resistencia de  $1.8k\Omega$  a). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión  $V_2$  vs  $V_1$ , b). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ .

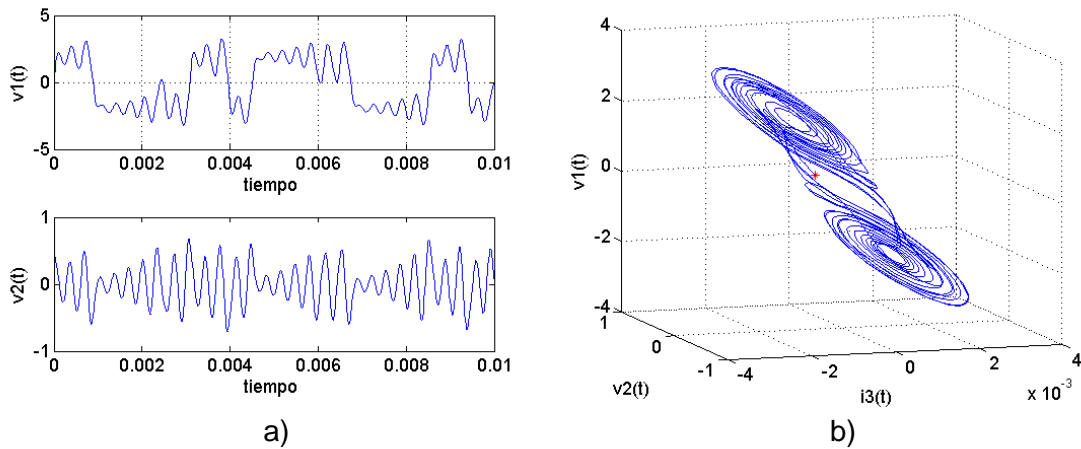


En la figura 66(b) se observa la gráfica de las señales en el tiempo de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$  es decir  $V_2$  y  $V_1$  respectivamente, para un valor de resistencia  $R = 1.8k\Omega$ . Es notable que a diferencia del comportamiento de la figura anterior, aquí se puede apreciar como la oscilación de las tensiones de los capacitores aumenta y disminuye de forma periódica a

medida el tiempo aumenta, particularidad que es de vital importancia para que las trayectorias generen un doble espiral.

En la figura 66(a) se observa la condición inicial marcada con un asterisco de color rojo, para un valor de resistencia  $R = 1.8k\Omega$ , el cual genera un atractor extraño visto en el modo XYZ el cual que gira en torno al punto de equilibrio  $P_+$ , cuyas trayectorias se encuentran en la región  $D_1$  sobre el plano complejo  $E^C(P_+)$ . La diferencia de esta situación a la anterior es que cuando las trayectorias son lo suficientemente grandes, estas entran en la región  $D_0$  donde son repelidas y regresadas la región  $D_1$ , por lo tanto estas se mueven en el plano  $E^C(0)$  pero no tienen la fuerza para cruzarlo, ya que los dos puntos de equilibrio las mantienen allí.

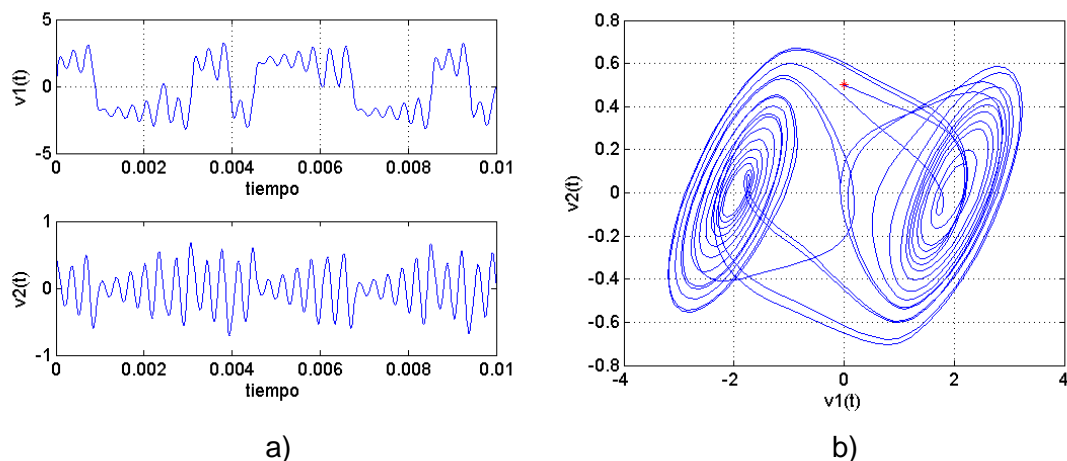
**Figura 67:** Para una resistencia de  $1.7k\Omega$  a). Señal caótica mostrada en el Modo XYZ, Tensión  $V_2$  vs  $V_1$ , b). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ .



La Figura 67(b) muestra las señales de tensión en el tiempo,  $V_2$  y  $V_1$  de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ , respectivamente, para un valor de resistencia  $R = 1.7k\Omega$ . Nótese que a diferencia de los comportamientos anteriores, dados para otros valores de resistencia, en este caso las señales en el tiempo obtenidas poseen oscilaciones cuya amplitud aumenta y disminuye en el tiempo mostrando un comportamiento aleatorio periódico. Los cambios en amplitud vistos para las señales de tensión de los capacitores oscilan de forma aleatoria variando constantemente los valores de amplitud. Este comportamiento es la razón por la cual las trayectorias se mueven de una región a otra. Por otro lado al observar la Figura 67(a) se puede apreciar el modo XYZ de las señales obtenidas que las trayectorias inician en la

condición inicial marcada con un asterisco rojo, las cuales al pasar el tiempo forman un espiral atractor de Chua en la región  $D_1$  sobre plano complejo  $E^C(P_+)$  el cual gira alrededor del punto de equilibrio  $P_+$ . Donde existen trayectorias que abarcan parte de la región  $D_0$ . Debido al comportamiento simétrico del elemento no lineal del cual es dependiente el circuito de Chua existe un espiral atractor de Chua simétrico que abarcara la región  $D_{-1}$  y parte de la región  $D_0$  el cual gira alrededor del punto de equilibrio  $P_-$  a lo largo del plano complejo  $E^C(P_-)$ . Para un valor de resistencia de  $R = 1.7k\Omega$  se provoca en el circuito este tipo de atractor de igual comportamiento al del caso anterior, más conocido como *espiral atractor de Chua de doble desplazamiento*, donde el plano complejo  $E^C(0)$  representa un plano frontera.

**Figura 68:** Para una resistencia de  $1.7k\Omega$  a). Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ , b). Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión  $V_2$  vs  $V_1$ .



En la Figura 68 se muestra los mismos resultados obtenidos de la Figura 67 para un valor de resistencia de  $R = 1.7k\Omega$ . La diferencia es que en este caso se grafican las tensiones de los capacitores en el modo XY para resaltar la importancia de la gráfica XYZ para un correcto análisis y como el plano cartesiano XY limita la correcta visualización del comportamiento de las trayectorias.

En la Figura 68(a) se puede apreciar las señales en el tiempo de las tensiones  $V_2$  y  $V_1$  en los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ , respectivamente. Nótese que al igual que en la Figura 67, se presentan oscilaciones con cambios aleatorios en su amplitud a medida que transcurre el

tiempo pero con un comportamiento aleatorio periódico. Por otro lado, en la figura 68(b) se puede apreciar claramente el espiral atractor de Chua de doble desplazamiento ya descrito, el cual tiene por condición inicial el asterisco marcado en rojo. En esta gráfica a pesar de poder apreciar claramente el atractor descrito, este se ve aplastado sobre un mismo plano y no es posible apreciar su comportamiento característico. Es importante que el lector note que a pesar de que en la Figura 68(b) se pueda ver como las trayectorias giran alrededor de los puntos de equilibrio  $P_+$  y  $P_-$ , es gracias a que se grafican las trayectorias en el modo XYZ que se puede ver que parte de la gráfica se encuentra en la región  $D_1$  sobre un plano específico  $E^C(P_+)$  y que la otra parte está sobre el plano  $E^C(P_-)$  en la región  $D_{-1}$ .

### 9.3. ANÁLISIS EN ORCAD-CADENCE®

Previamente a realizar el montaje de laboratorio del circuito, se realiza una simulación de este en el software OrCAD-Cadence®, con el fin de tener una información base de sus resultados usando modelos aproximados de los elementos físicos que componen el circuito. Luego de esto se simulan las señales de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$  en el tiempo. De la misma manera se grafican sus tensiones del modo XY es decir  $V_2$  vs  $V_1$ . De esta manera se puede realizar una comparación de las señales obtenidas en ambos programas y se tiene un guía de los resultados se obtendrán en el laboratorio.

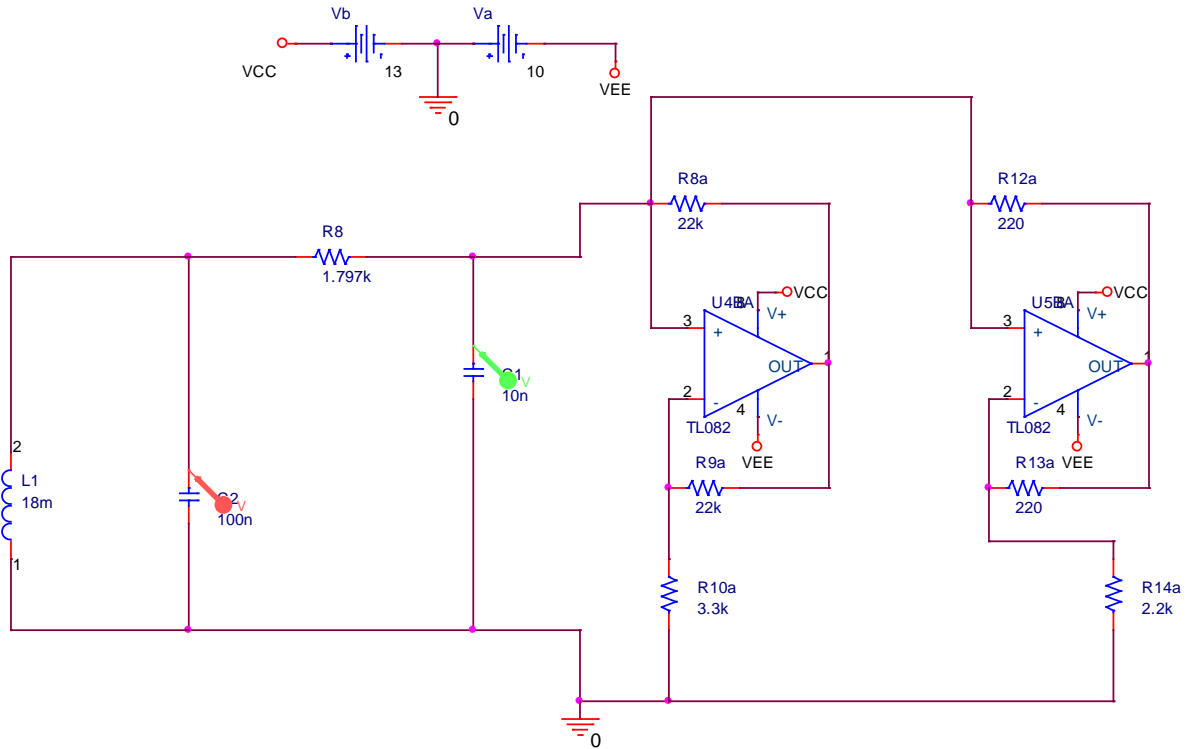
La Figura 69 muestra el esquema del circuito simulado en el software OrCAD-Cadence®, a continuación se muestran los elementos usados y sus respectivos valores. Los pines VCC y VEE representan la alimentación positiva ( $V+$ ) y negativa ( $V-$ ).

#### Elementos usados y sus valores:

$L = 18mH$  ,  $C_2 = 100nF$  ,  $C_1 = 10nF$  ,  $0 \leq R \leq 2k\Omega$  ,  $R_{10} = 3.3k\Omega$  ,  
 $R_8 = 22k\Omega$  ,  $R_9 = 22k\Omega$  ,  $R_{14} = 2.2k\Omega$  ,  $R_{12} = 220\Omega$  ,  $R_{13} = 220\Omega$  ,  
 $Opams = TL082$  ,  $VCC = 13V$  ,  $VEE = 10V$ .

Los valores de los parámetros dados deben asignarse teniendo en cuenta el análisis teórico de la sección 9.1. Se resalta que los valores dados son tomados del artículo *Three steps to chaos Part I - II / Michael Peter Kennedy*.

**Figura 69:** Esquema de simulación del circuito de Chua.



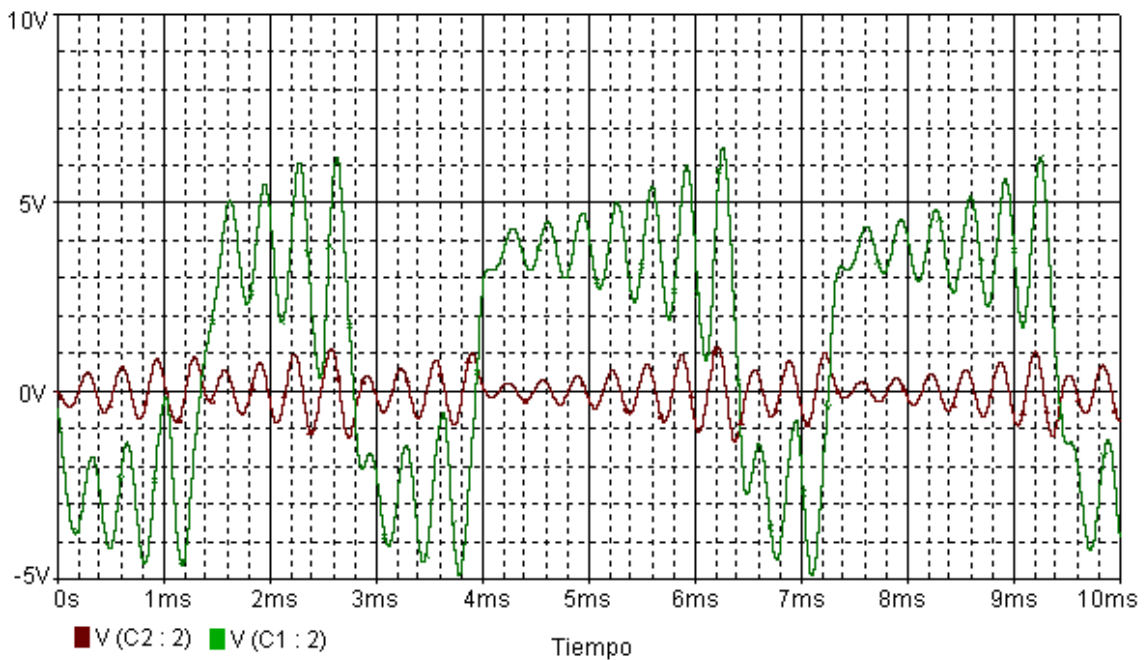
La razón los amplificadores operacionales no reciben el mismo valor de alimentación en los pines  $VCC$  y  $VEE$  es debido a que al colocarlo el mismo valor a ambos pines, la gráfica obtenida no es simétrica, por tanto se recomienda hacer un ajuste en la alimentación positiva el mismo valor a ambos pines, la gráfica obtenida no es simétrica, por tanto se recomienda hacer un ajuste en la alimentación positiva negativa con el fin de obtener una gráfica simétrica.

Al igual que en el software MATLAB® se debe dar una condición inicial al circuito para que este empiece a oscilar, esto se hace debido a que el circuito no posee una fuente de alimentación, solo cuenta con la alimentación que utilizan los amplificadores. De no hacer esto no se garantizan los resultados mostrados graficas posteriores.

Para dar una condición inicial al circuito se debe dar un valor de tensión inicial de 0.5 al capacitor  $C_2$  y dar a la inductancia  $L$  y al capacitor  $C_1$  el valor inicial de cero. La elección de la condición inicial no está amarrada a ninguna restricción, es posible darle cualquier valor pero para este caso particular se escogió 0,5 debido a que se obtienen mejores resultados

que en otros valores probados. Para dar un valor de tensión inicial a los elementos mencionados se da doble click en cada elemento del esquema montado en la herramienta capture y se modifica el parámetro IC por los valores que fueron indicados. Este procedimiento permite obtener las gráficas de las Figuras 70 y 71. Sin realizar este procedimiento no se obtendrán los resultados deseados ya que el circuito simulado necesita de una condición inicial para su funcionamiento.

**Figura 70:** Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores C2 y C1, en el eje “x” se ubica el tiempo y en el eje “y” el voltaje en C2 y el voltaje en C1.

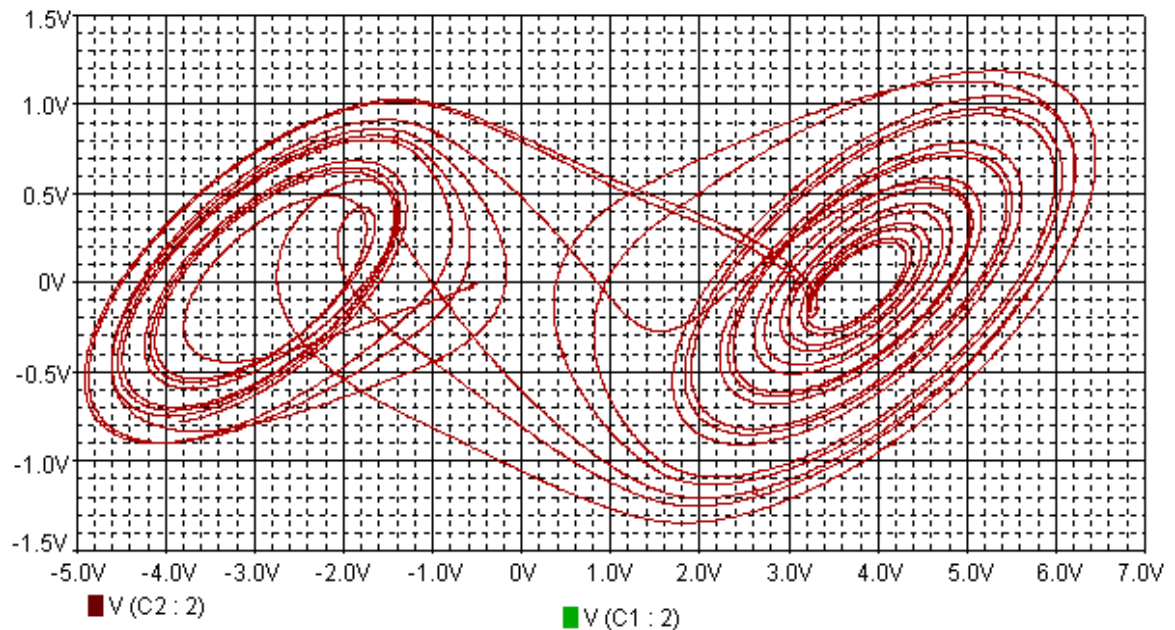


Posteriormente luego de haber simulado el circuito se procede a correr la simulación y mediante unas pinzas de toma de señales que ofrece el software ,se registran las tensiones de los capacitores. En la *Figura 70* se puede ver en rojo la señal de tensión  $V_2$  que corresponde el capacitor  $C_2$ . Por otro lado en color verde se muestra la señal de tensión  $V_1$  tomado del capacitor  $C_1$ . Estas señales fueron obtenidas para un valor de  $R = 1.7k\Omega$  en la resistencia que se encuentra entre los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ . Al comparar las señales obtenidas de la *Figura 70* con las mostradas en el software Matlab en la sección anterior se puede ver como de igual manera las señales de tensión en el tiempo presentan oscilaciones que varían en amplitud de forma aleatoria con un comportamiento aleatorio periodico, es

decir que se observa una periodicidad en la señal en donde cada periodo presenta cambios aleatorios en la amplitud de la oscilación.

El software OrCAD-Cadence® solo permite graficar el espiral atractor de Chua de doble desplazamiento en el modo XY. Como ya se sabe este programa usa la herramienta *Pspice* para graficar cualquier tipo de señal tomada en el esquemático montado en la herramienta capture. Haciendo uso de las pinzas de toma de señales que ofrece el programa se toman señales de tensión de los capacitores y se corre la simulación, el software grafica las señales en el tiempo en la herramienta *Pspice*. Luego dentro del simulador de señales dando doble click al eje que representa el tiempo se abre una pestaña que se conoce como *add trace*, esta me permite graficar cualquier señal del circuito simulado. En este caso se escribe la señal de tensión  $V_1$  correspondiente al capacitor  $C_1$ , solo si la gráfica a la cual se le cambia la señal de tiempo corresponde a la tensión  $v_2$ . Finalmente al realizar este procedimiento obtenemos la gráfica de las señales de los capacitores en el modo XY comúnmente conocida como espiral atractor de Chua de doble desplazamiento. Ver Figura 71.

**Figura 71:** Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión  $V_2$  vs  $V_1$ .



## 9.4. ANÁLISIS POR MONTAJE DE LABORATORIO

En esta sección se muestra la simulación realizada en el software KiCad, la cual se usa para realizar el impreso físico en PCB del circuito Chua. Este software nos proporciona al finalizar todo el procedimiento de simulación unos archivos llamados GERBER los cuales son usados para la fabricación del circuito.

**9.4.1. Diseño en KiCad.** El primer paso es realizar el esquemático del circuito en el software KiCad. Esto hace mediante la elección de los componentes en una base de datos que nos proporciona el software, donde se elegirán los componentes basándose en las dimensiones de los elementos físicos que se usarán para la fabricación del circuito. Cabe mencionar que la base de datos de componentes que posee el software me permite visualizar las dimensiones de cada uno de estos mediante un módulo de huella en 2D del elemento y al igual que uno 3D.

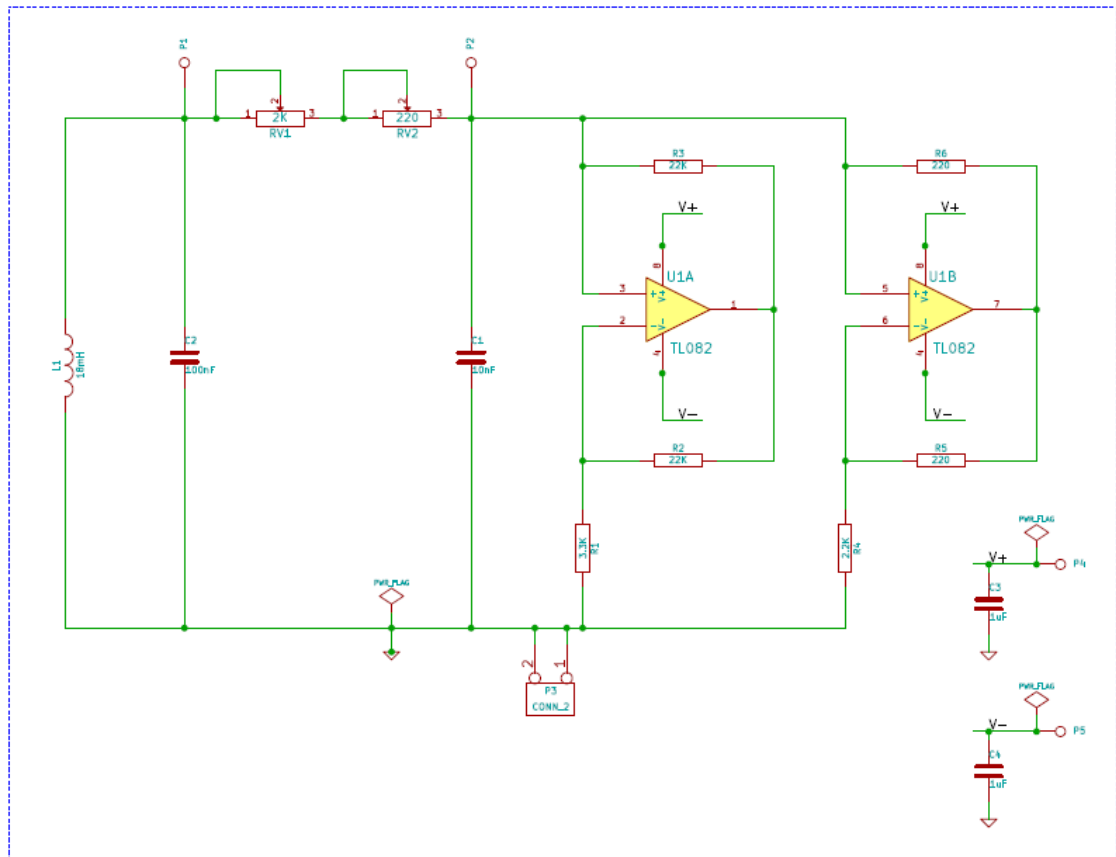
Posteriormente ya habiendo seleccionado y montado el esquemático como se muestra en la Figura 72, el software me permite mediante una de sus herramientas verificar que dicho esquema no posea errores de conexión o que haya algún elemento o cable de conexión sin conectar. Se resalta el hecho que el software me exige asignarle un componente especial a cada pin o conector que será usado como alimentación o tierra.

Terminado el esquema y la corrección de este por parte del software, se procede a usar otra herramienta para realizar una lista de los componentes (Netlist) usados en el esquemático de la Figura 72. Este netlist se realiza para que el usuario seleccione entre una lista de huellas de dimensiones de diversos componentes la que más se le parezca conveniente de acuerdo a los componentes que usará en el circuito. Ver Figura 73.

Ya habiendo hecho esto por medio otra herramienta del software KiCad se usa ese Netlist para realizar la simulación de la PCB digitalmente donde el software asignara los modelos seleccionados de los componentes y el usuario podrá realizar las conexiones de enrutamiento necesarias para finalmente obtener los archivos GERBER. Ver Figura 74.

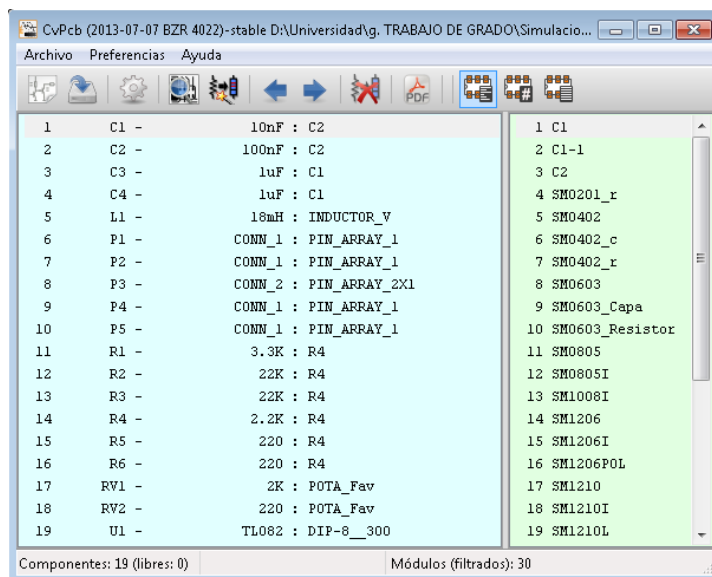
- *Esquemático:*

**Figura 72:** Esquemático del circuito Chua.



- *Netlist*

**Figura 73:** Netlist del circuito de Chua. Tomado de KiCad.



- Board

Figura 74: Board del circuito de Chua.

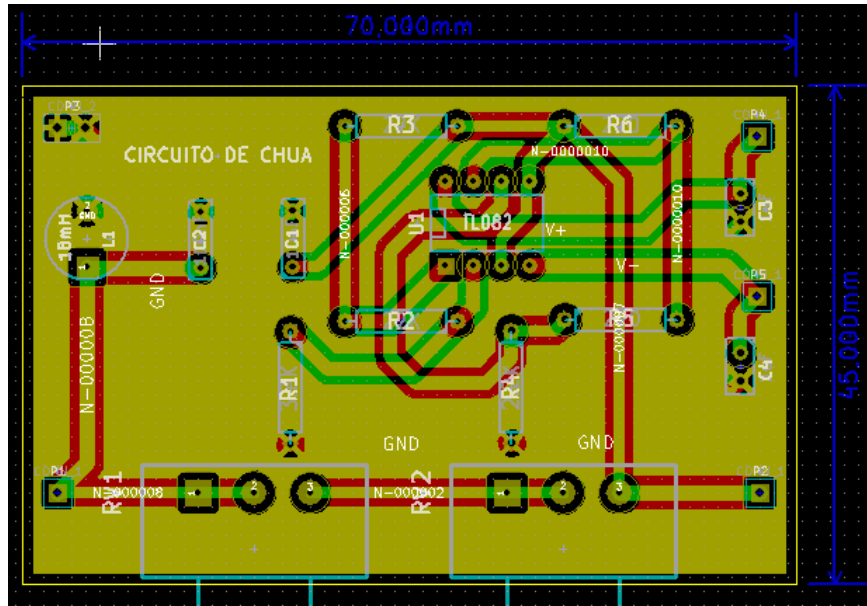
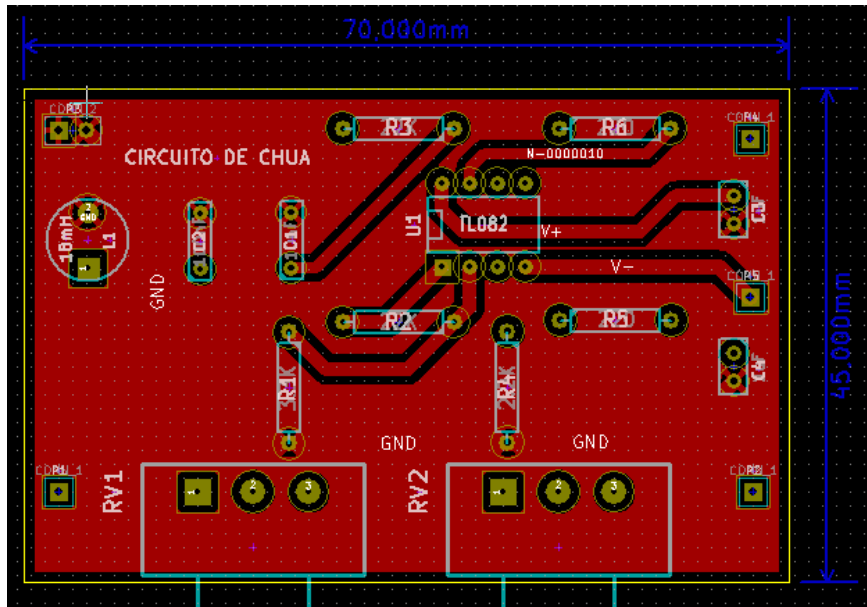
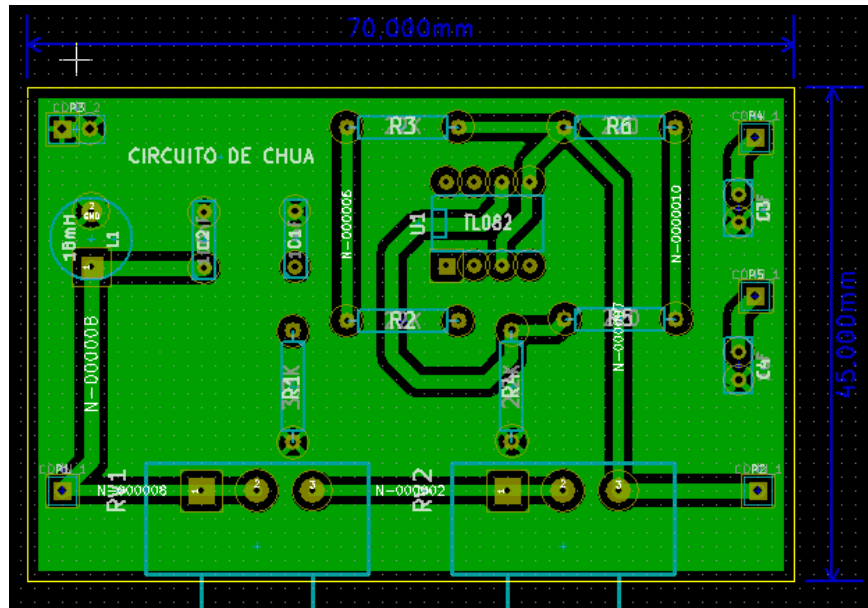


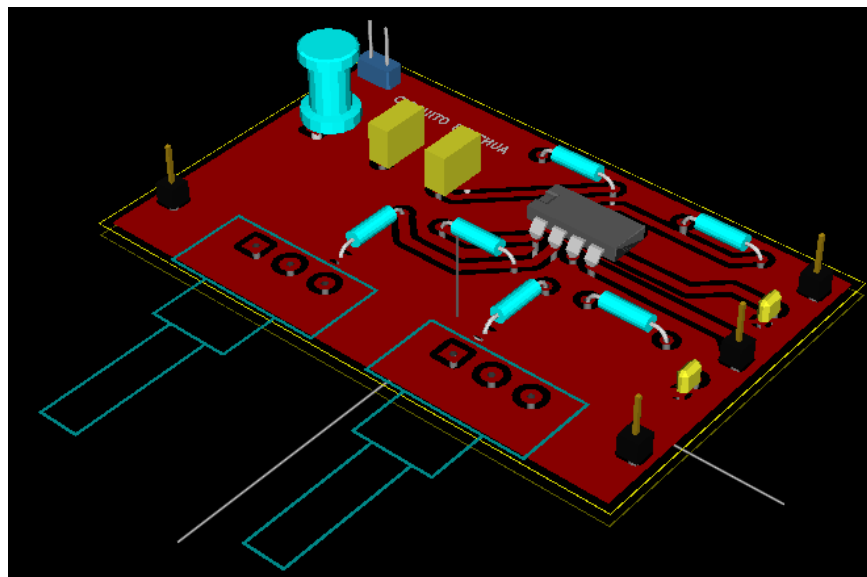
Figura 75: Cara Frontal de la board del circuito de Chua.



**Figura 76:** Cara posterior de la board del circuito de Chua.



**Figura 77:** Imagen 3D del Circuito de Chua.



**9.4.2. Resultado final del PCB en laboratorio.** En el momento de realizar el montaje del circuito Chua en el laboratorio se deben considerar ciertos aspectos relacionados con los implementos usados para así poder obtener los resultados esperados. Por tanto a continuación se muestra una lista de los elementos físicos usados que conforman la implementación del circuito Chua, con sus respectivas referencias.

**Tabla 3:** Referencias de los elementos físicos usados y algunas recomendaciones.

Elementos del circuito	Referencias	Recomendaciones
Inductancia, $L = 18mH \pm 10\%$	RFC0807 ( <i>Series Power Inductors</i> ) ó PCH-45X-186KLT ( <i>Fixed Inductors PCH-45 Power Choke Higher Current Axial</i> )	Esta inductancia fue encontrada en <a href="http://www.coilcraft.com">http://www.coilcraft.com</a> . Se recomienda usar esta referencia sin embargo si se desea usar otra en particular se debe tratar que tenga especificaciones cercanas a la bobina usada, y tenga en cuenta que esta debe tener núcleo de hierro.
Capacitores, $C_1 = 10nF \pm 5\%$ , $C_2 = 100nF \pm 5\%$	Capacitores Mylar ( <i>Color verde</i> )	Se recomienda usar este tipo de capacitor debido a que produce que las señales obtenidas sean más nítidas.
Resistencia variable, $0 \leq R \leq 2k\Omega$	Potenciómetros de precisión.	Es recomendable usar dos potenciómetros en serie uno de un $2k\Omega$ y otro de $220\Omega$ . Esto con el fin de que al variar la resistencia R se puedan obtener cambios más precisos en los valores resistivos para así poder apreciar mejor las variaciones y obtener más fácilmente los atractores deseados
Resistencias, $R_1 = 3.3k\Omega \pm 5\%$ $R_2 = R_3 = 22k\Omega \pm 5\%$ $R_4 = 2.2k\Omega \pm 5\%$ $R_5 = R_6 = 220\Omega \pm 5\%$	Resistencias de $\frac{1}{4}$ W	Con estos valores de resistencia se obtuvieron buenos resultados. No se consideró necesario usar resistencias de mayor precisión. Estos valores fueron obtenidos de Three steps to chaos Part II / Michael Peter Kennedy.
Amplificadores operacionales que conforman el diodo Chua, $A_1$ y $A_2$	TL082 ( <i>Wide Bandwidth Dual JFET Input Operational Amplifier</i> ) de Texas Instruments ó AD712 ( <i>Precision, Low Cost, High Speed BiFET Dual Op Amp</i> ) de Analog Devices	El integrado usado para este montaje fue el TL082 de Texas Instruments. Si se desea usar otro en particular elija con cuidado especificaciones cercanas a las mostradas en el datasheet del TL082 o del AD712.
Capacitores de rectificación, $C = 0.1\mu F$ (No incluidos en el esquema de la Figura 73)	Capacitancias de Tantalio	Se recomienda el uso de estos capacitores entre las fuentes de alimentación en DC y tierra. Esto se hace con el fin de que la alimentación recibida por los

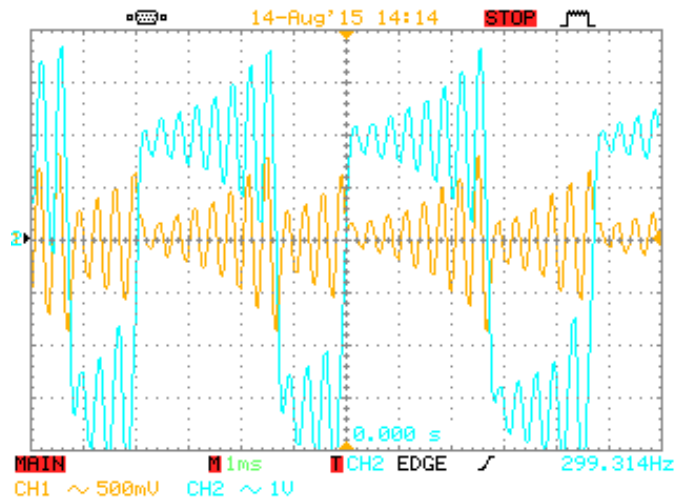
		amplificadores operacionales se lo mas estable posible. Se destaca que el uso de estos mejora considerablemente los resultados obtenidos en el osciloscopio.
Osciloscopio	Gwinstek GDS-2062	Esta es la referencia del osciloscopio con el que se contó para observar las señales arrojadas por el circuito.

Se debe tener en cuenta que las señales de tensión son tomadas en los capacitores  $C_1$  y  $C_2$  con el fin de observar el comportamiento que adquieren las tensiones al ubicar la resistencia en el valor simulado anteriormente, para producir una señal caótica y poder extraer los datos. La fuente de continua está alimentando de forma dual con valores de  $-10[V]$  y  $+13[V]$  a los amplificadores operacionales porque de esa manera el elemento no lineal muestra una señal más simétrica y puede funcionar de la forma estudiada, es decir lineal por partes.

En la Figura 78 se muestran las señales de tensión en el tiempo,  $V_2$  y  $V_1$  de los capacitores  $C_2$  y  $C_1$ , respectivamente, para un valor de resistencia  $R = 1.78k\Omega$ , obtenidas al tomarlas con las puntas del osciloscopio, donde el canal 1 del osciloscopio muestra la tensión  $V_1$  y el canal 2 la tensión  $V_2$ . Como se puede observar dichas señales poseen un comportamiento similar al obtenido en las simulaciones en MATLAB® y en OrCAD-Cadence®, es decir que las señales de tensión de los capacitores muestra un oscilaciones cuya amplitud varia aleatoriamente en cada periodo de la señal. Característica que se observó en los resultados anteriormente obtenidos y que es un comportamiento exclusivo del circuito de Chua.

Cabe resaltar la importancia de obtener las señales caóticas de la Figura 78, pues estas no solo representan el espiral atractor de Chua de doble desplazamiento en el espacio de estados, si no que estas señales cuya amplitud cambia de forma aleatoria en el tiempo podrían ser usadas para encriptar información en la transmisión de datos o para la generación de datos aleatorios, gracias al comportamiento caótico que estas presentan.

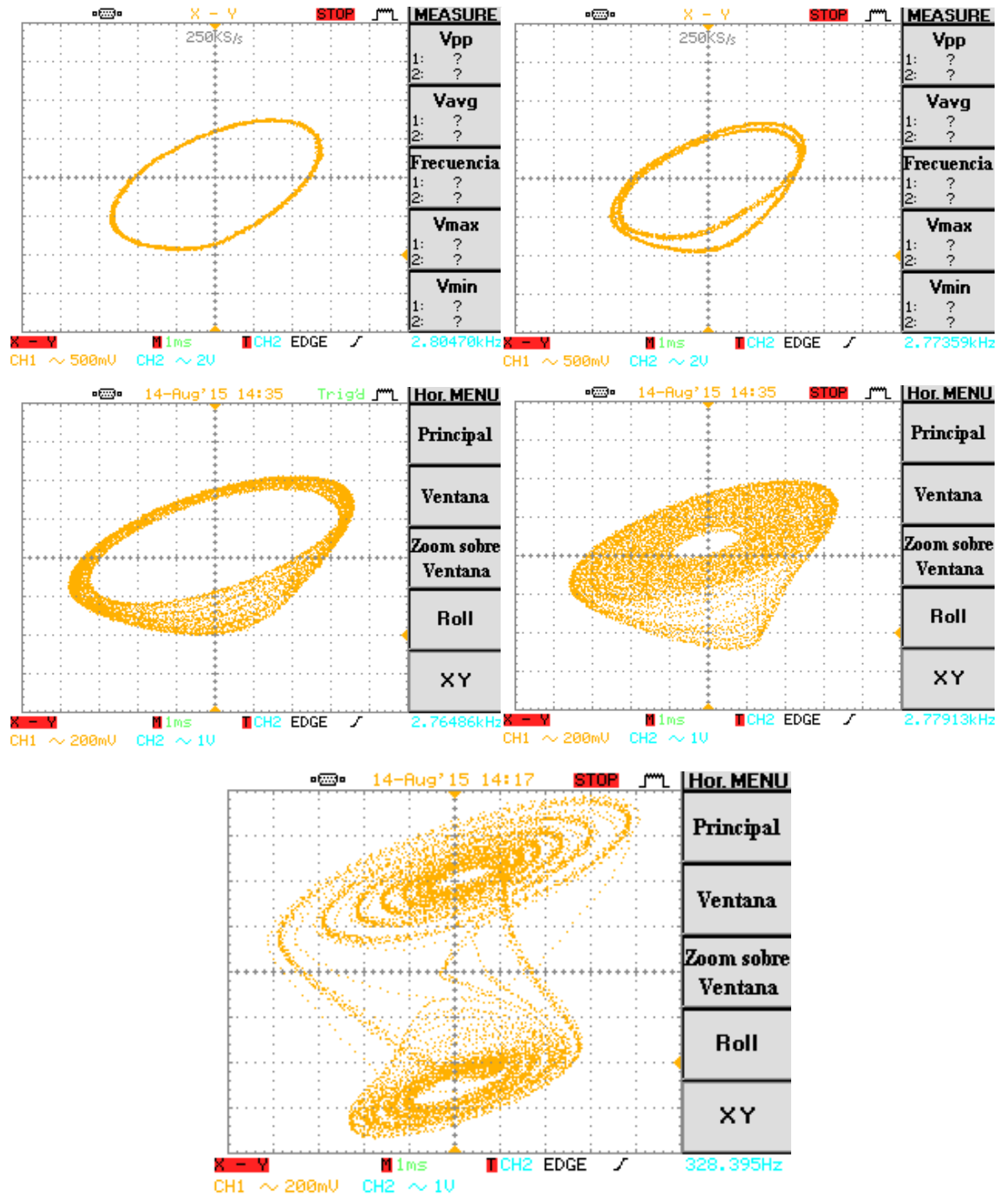
**Figura 78:** Señal caótica en el tiempo, obtenida de los capacitores C2 y C1.



Por otro lado se puede apreciar como el voltaje del canal 1 varía de forma tal que existe un comportamiento positivo y luego otro negativo, por eso se nota en la Figura 78 como las trayectorias obtenidas al tomar las señales en el modo XY se mueven de una región a otra constantemente. Cuando pasa el tiempo, en este caso de 5[ms] se forman unos espirales sobre los puntos de equilibrio  $P_+$  y  $P_-$ , mientras que en el centro se nota como existe un salto de la región  $D_1$  a la región  $D_{-1}$  pasando por encima de la región  $D_0$  formando de esta forma una doble Scroll, ver Figura 79.

En la gráfica de la Figura 79 se muestra cada una de las etapas que se explicaron de la Figura 63 en la sección 9.1.4, donde a partir de la variación de la resistencia R en el circuito de Chua poco a poco el comportamiento del circuito varía provocando cambios en las señales que forman las trayectorias en el espacio de estados, las cuales inician con un ciclo límite, seguido de un periodo de duplicación de dos ciclos, luego un periodo de duplicación de múltiples ciclos, lo que luego provoca un espiral de Chua sencillo que finalmente gracias a la variación de la resistencia R se forma un espiral atractor de Chua de doble desplazamiento el cual presenta un comportamiento simétrico debido a que el circuito de Chua es afectado con el comportamiento simétrico del elemento no lineal.

Figura 79: Señal caótica mostrada en el Modo XY, Tensión  $V_2$  vs  $V_1$ .

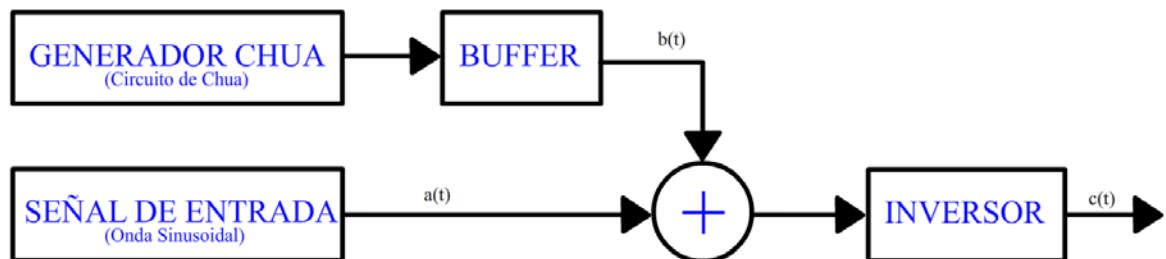


## 10. EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL CIRCUITO CHUA

Con la intención de mostrar un uso práctico y sencillo del circuito de Chua, en esta sección se muestra un ejemplo de su aplicación. Se utiliza un bloque transmisor el cual encripta una señal de audio con una señal caótica procedente de un diodo Chua. Posteriormente esta señal es decodificada en un bloque receptor, el cual tiene incorporado otro circuito de Chua. El transmisor suma la señal de audio  $a(t)$  a la entrada con la señal caótica  $b(t)$ , ya que este proceso invierte la señal a la salida y obtener  $c(t)$ , se requiere una etapa inversora como se muestra en la Figura 80. El receptor consta de un sustractor que suprime la señal caótica  $d(t)$  de la señal total que este recibe del transmisor (Figura 81), para así mostrar un resultado limpio y sin ruido, ósea  $y(t)$ . Este proceso resulta en un envío y recepción de la información en una forma segura.

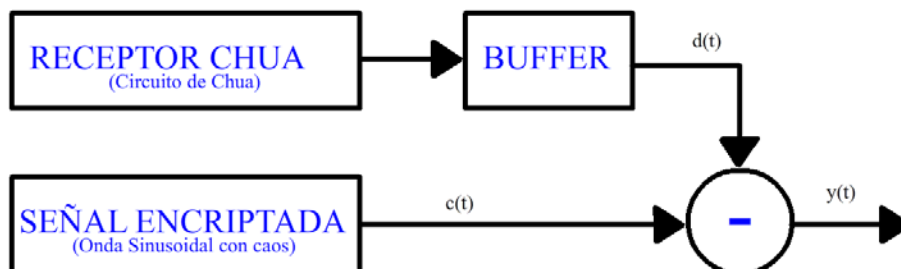
- Transmisor

**Figura 80:** Diagrama de Bloques del transmisor.



- Receptor

**Figura 81:** Diagrama de Bloques del receptor.



## 10.1. SIMULACIÓN EN ORCAD-CADENCE®

En la figura 82 se muestra el esquema simulado en OrCAD-Cadence®, el cual está compuesto por las siguientes partes:

*Transmisor:* Se conforma por un circuito de Chua transmisor y un transmisor sumador-inversor.

*Receptor:* Se compone por un circuito de Chua Receptor y un receptor sustractor.

Para no repetir lo expuesto, en este esquema de circuito de aplicación, no se hace referencia a los elementos usados que componen el circuito de Chua, esto ya fue especificado anteriormente en el capítulo 9. Por tanto en los circuitos de Chua transmisor y receptor se enfocan solo en nombrar su papel dentro del circuito aplicativo.

A continuación se muestran los nombres y valores de los elementos usados en el esquema de simulación del circuito aplicativo de la Figura 82, especificando únicamente los elementos usados para el transmisor sumador-inversor y para el circuito receptor sustractor:

### *Transmisor sumador – inversor, elementos usados y sus valores:*

*Resistencias,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = 1k\Omega$  , Tres opams LM741*

*Señal de entrada, senoidal 1.5V a 20kHz ,  $V_+ = V_{CC} = 15V$  ,  $V_- = V_{EE} = 15V$*

### *Receptor sustractor, elementos usados y sus valores:*

*Resistencias,  $R_{11} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = 1k\Omega$  , Tres opams LM741 ,*

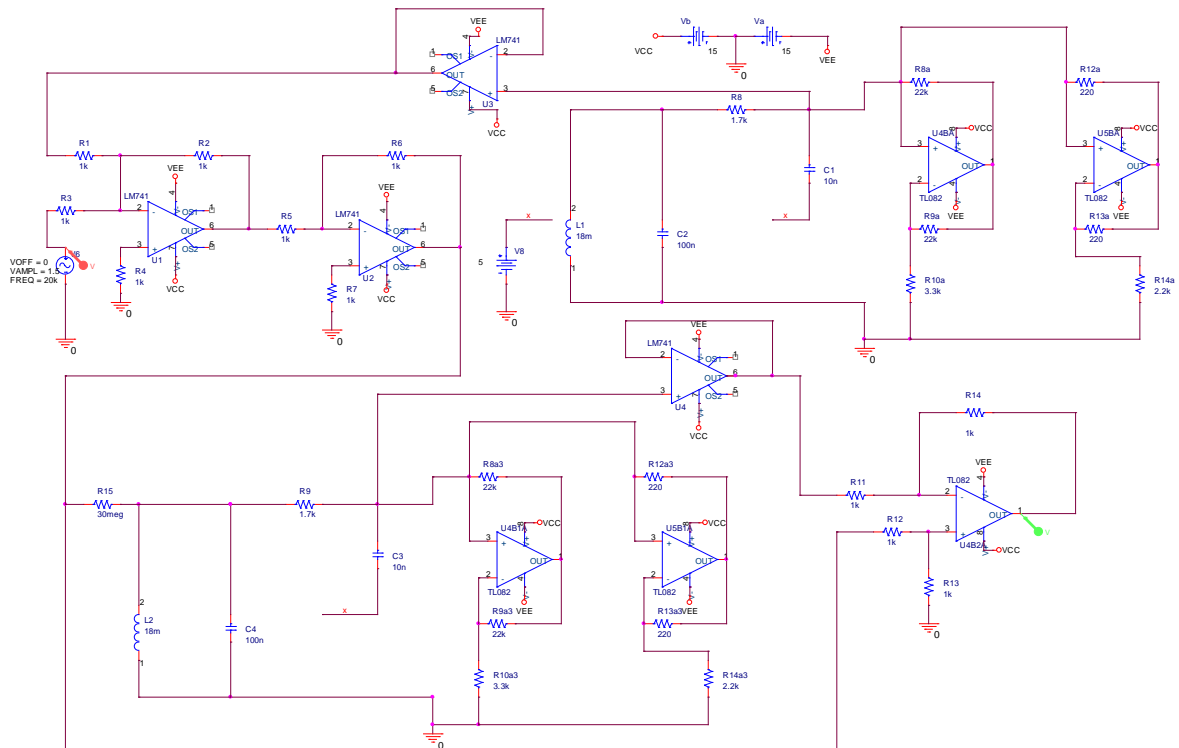
*$V_+ = V_{CC} = 15V$  ,  $V_- = V_{EE} = 15V$*

La elección de los parámetros mostrados se hizo de forma aleatoria teniendo en cuenta conocimientos previos de etapas amplificativas sobre amplificadores operacionales. Considere el hecho que este es un montaje propuesto donde se ilustra una de las posibles aplicaciones del estudio realizado del circuito de Chua. Si desea variar los valores de los parámetros acá mencionados debe considerar el funcionamiento total del circuito basándose en el análisis mostrado al inicio del capítulo 10.

Al circuito de Chua se le debe dar una condición inicial ya que este no posee una fuente de alimentación propia, gracias a la condición inicial que se le proporciona en el simulador este arroja la señal caótica esperada. Es por esto que a cada circuito de Chua que conforma el circuito aplicativo se le debe dar la misma condición inicial siguiendo el procedimiento indicado en la sección 9.3. Por consiguiente el valor inicial de tensión que se le proporciona a los elementos como condición inicial es de 5 V al capacitor  $C_1$ , un valor de cero Amperios a la corriente de la inductancia L y de 0 V al capacitor  $C_2$ . Esto se hace modificando el parámetro IC (*Initial Conditions*) de cada uno de ellos.

- Esquema del circuito

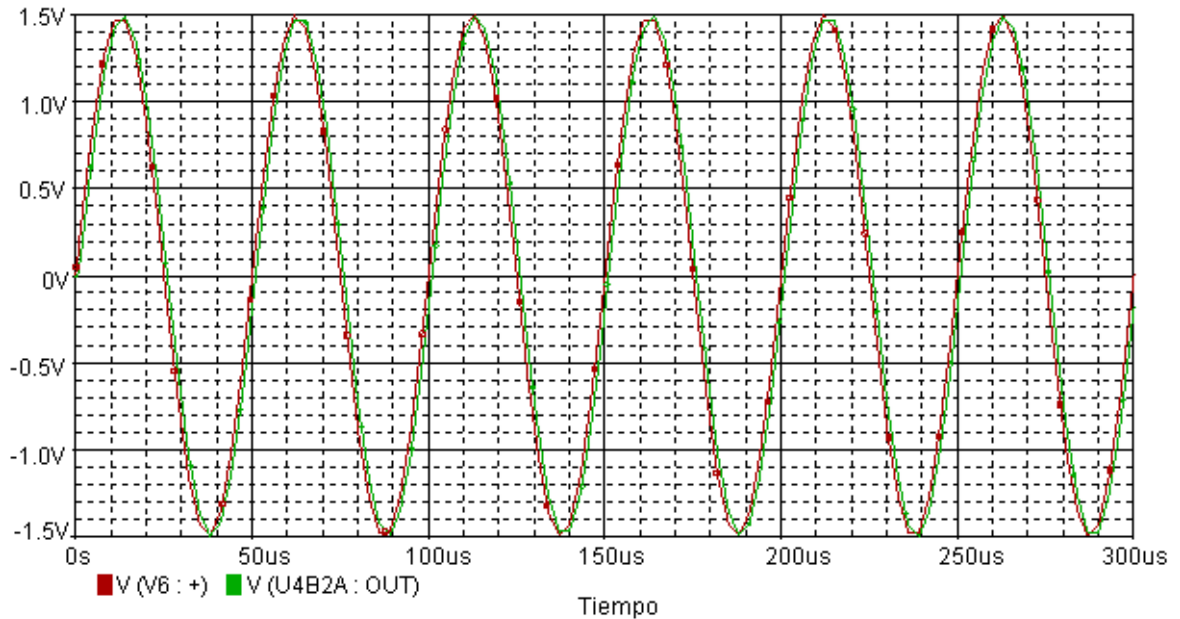
**Figura 82:** Esquema de la aplicación en comunicación segura.



La Figura 83 muestra las señales tomadas con las puntas de toma de tensión dadas por el software OrCAD. En esta Figura, en color verde, se muestra la señal senoidal luego de ser tomada por el receptor sustractor, y en color rojo se muestra la señal senoidal que se introdujo por el transmisor sumador-inversor. Como se puede apreciar ambas señales son casi iguales en forma, el único detalle que las diferencia es que la señal verde tomada a la

salida del circuito aplicativo está retrasada en algunos microsegundos. Se destaca el hecho de como una señal pequeña introducida al transmisor es descifrada por el receptor en poco tiempo.

**Figura 83:** Resultado de la simulación, donde la onda de color rojo representa la señal de entrada y la verde indica la salida.



## 10.2. DISEÑO EN KICAD

Para realizar el impreso físico PCB del circuito de aplicación, se realiza el mismo procedimiento explicado en la sección 9.4.1 para la fabricación del circuito de Chua, donde se muestra el procedimiento realizado para la simulación de este en el software Kicad.

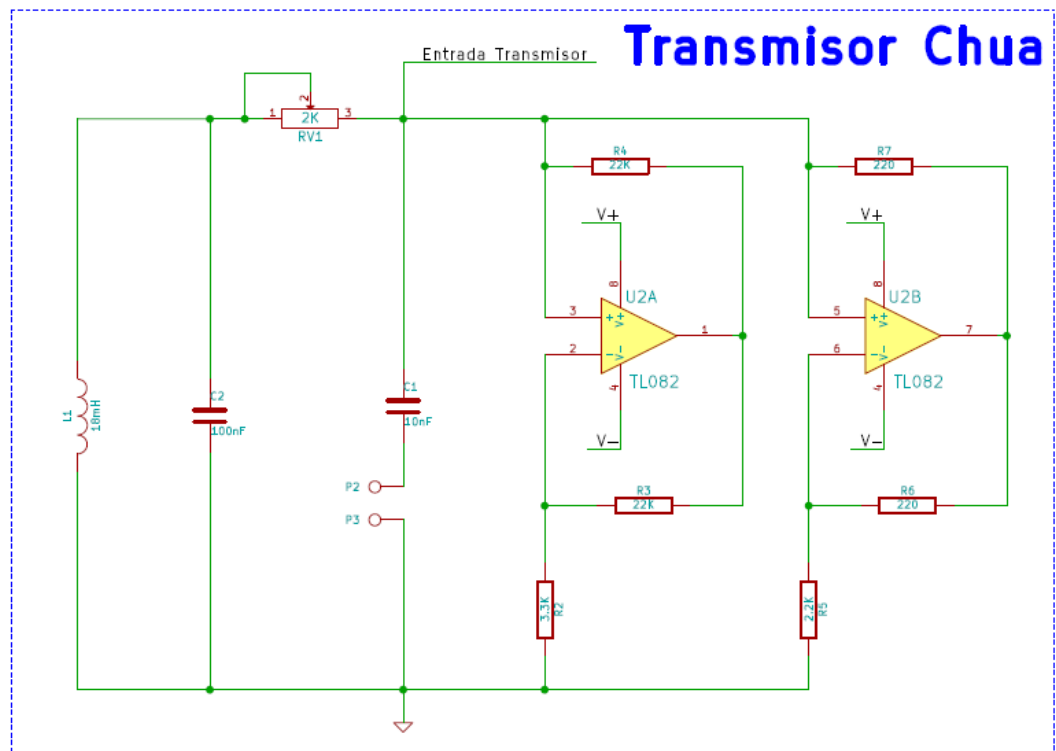
Primero se procede a realizar el circuito esquemático de la Figura 82 en el software Kicad asegurándose de seleccionar de la base de datos de componentes del software los elementos correctos en comparación a los que se poseen físicamente, ver Figuras 84, 85, 86 y 87. Posteriormente se procede a verificar a través del test que ofrece el Kicad, que las conexiones realizadas en el esquema realizado sean correctas y que se hayan determinado a través del uso de un elemento tomado de la base de componentes, que conectores serán usados como pines de alimentación o tierra. Al igual que en el circuito de Chua en este

circuito aplicativo también se usan una capacitancias de tantalio entre la alimentación de los amplificadores operacionales del circuito y tierra con el fin de asegurar que la alimentación DC proporcionada por la fuente sea lo más estable posible.

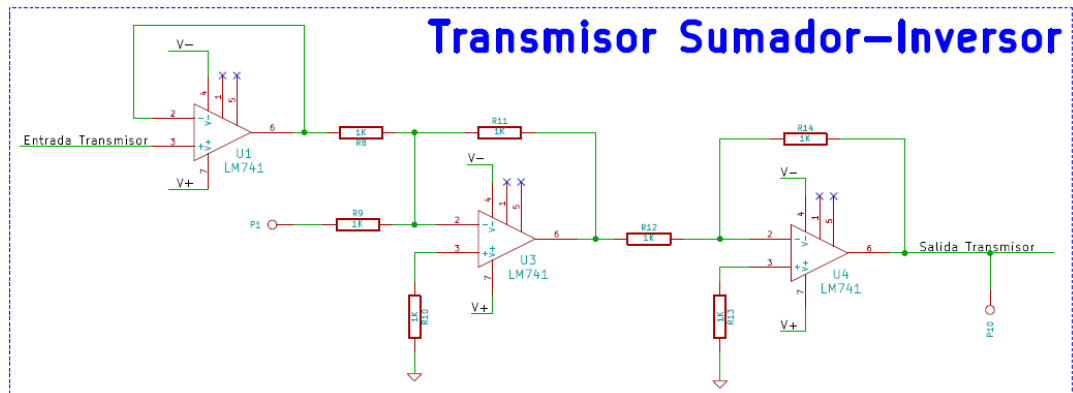
Por otra parte se puede apreciar en la Figura 82 que tanto en el circuito de Chua transmisor como en el receptor se conecta una señal en DC entre el capacitor  $C_1$  y tierra, esto se hace con el fin de que la señal caótica se encuentre sobre un voltaje DC y se inicie con una sincronización tanto en el transmisor como en el receptor, para facilitar la decodificación de la señal transmitida. Finalmente se recuerda que en este circuito aplicativo se usan dos circuitos de Chua los cuales cumplen un papel muy importante en la aplicación en general pero no se procede a realizar ningún comentario acerca de los componentes usados pues estos ya fueron mencionados y explicados anteriormente en la sección anterior.

- *Esquemático*

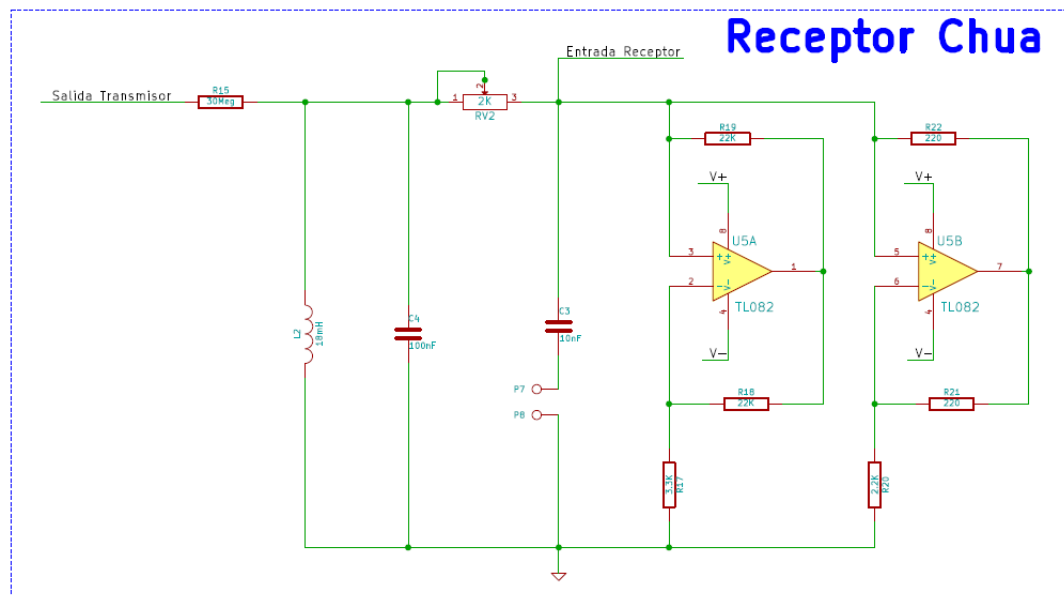
**Figura 84:** Esquemático del transmisor Chua en el circuito de aplicación.



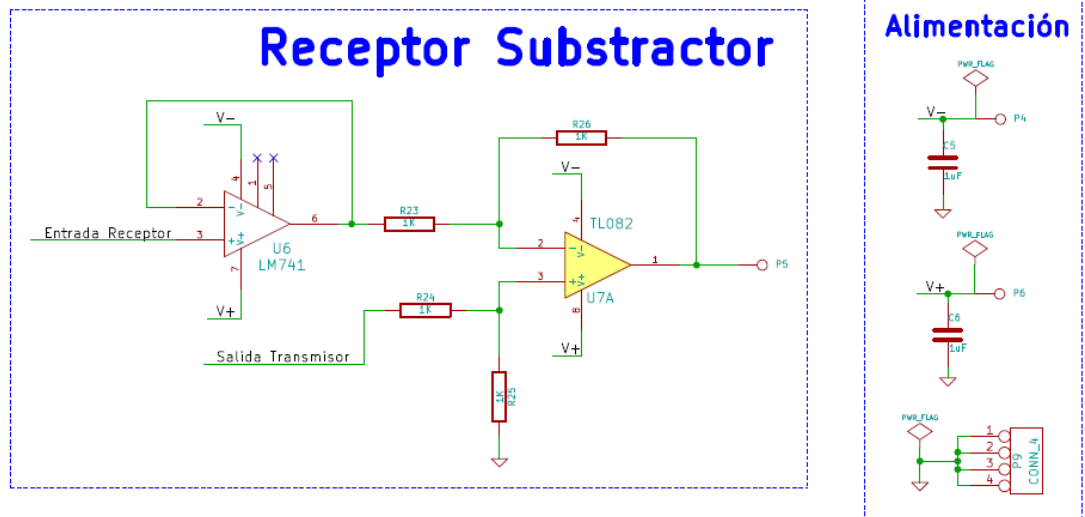
**Figura 85:** Esquemático del transmisor Sumador-Inversor en el circuito de aplicación.



**Figura 86:** Esquemático del receptor Chua en el circuito de aplicación.



**Figura 87:** Esquemático del Receptor substractor y de la alimentación en el circuito de aplicación.

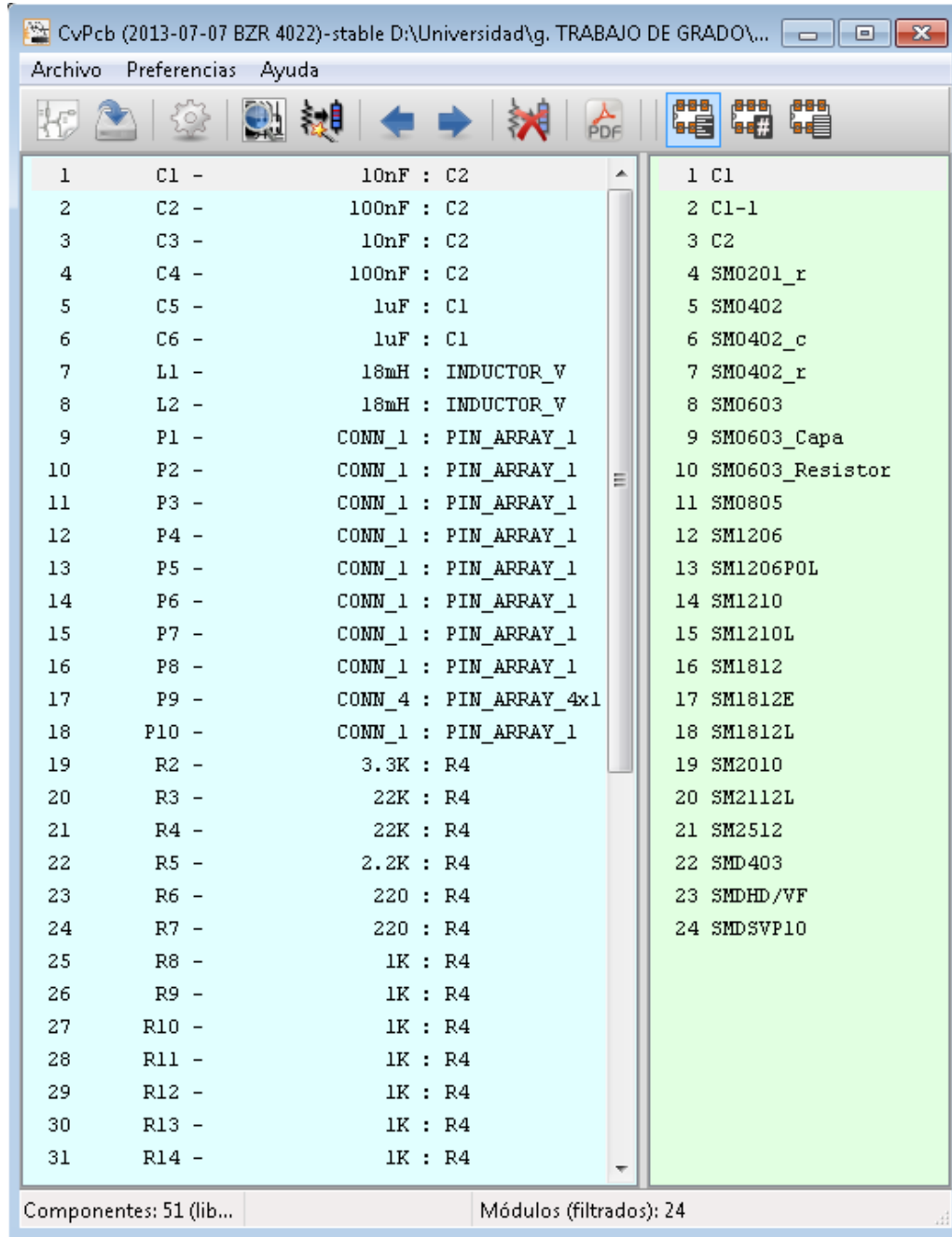


Habiendo verificado las conexiones del circuito se procede a crear el *netlist*. Es acá donde se le asignan a cada elemento usado en la construcción del esquemático, la huella del elemento físico que posee las medidas más aproximadas de los elementos que serán usados en el circuito aplicativo, ver Figura 88.

Finalmente, ya hecho el *netlist* se crea el archivo *board*, desde donde se llama al *netlist* creado y se le indica al software que huellas usar en cada elemento para que de esta manera el usuario tenga precaución del grosor que usará en las pistas, y en los pads de soldadura se encargue de enrutar los caminos de conexión que conformarán la PCB del circuito aplicativo. Las Figura 89, 90, 91 y 92 muestran el resultado final de la PCB creada en el software Kicad, a través del cual se obtendrán los archivos *gerber* que sirven para fabricar el circuito aplicativo físico.

- *Netlist*

**Figura 88:** Netlist del circuito de aplicación.



- Board

Figura 89: Board del circuito de aplicación.

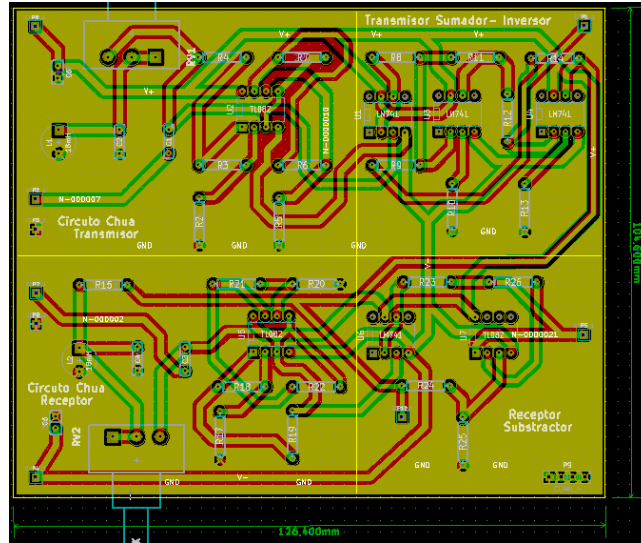
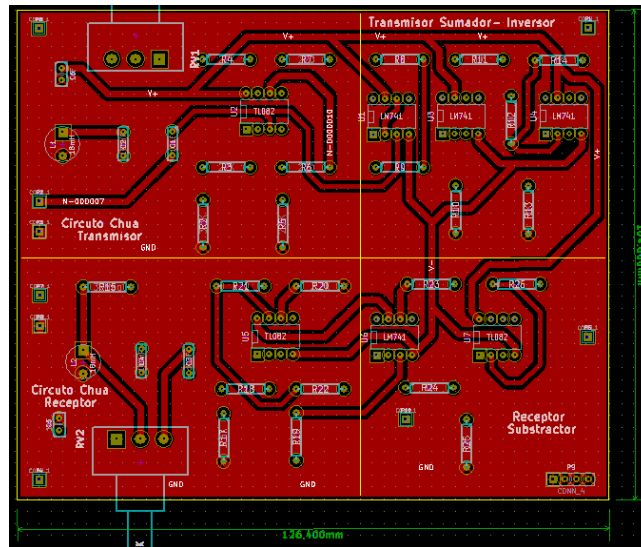
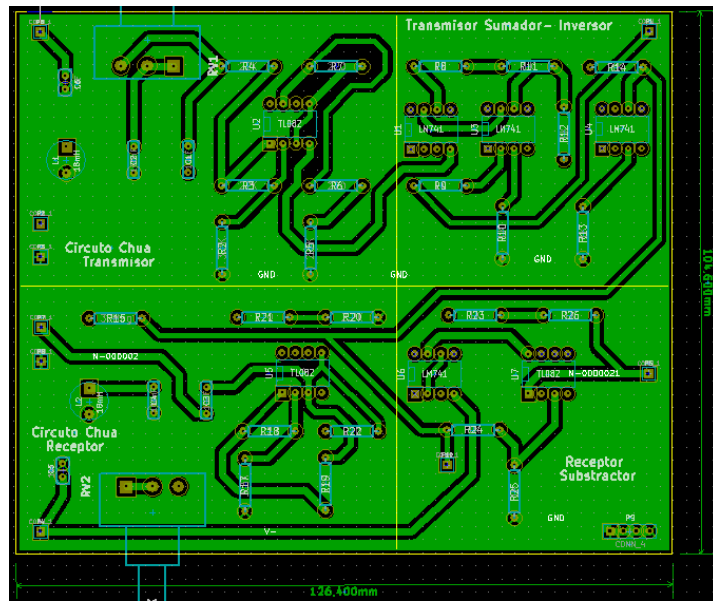


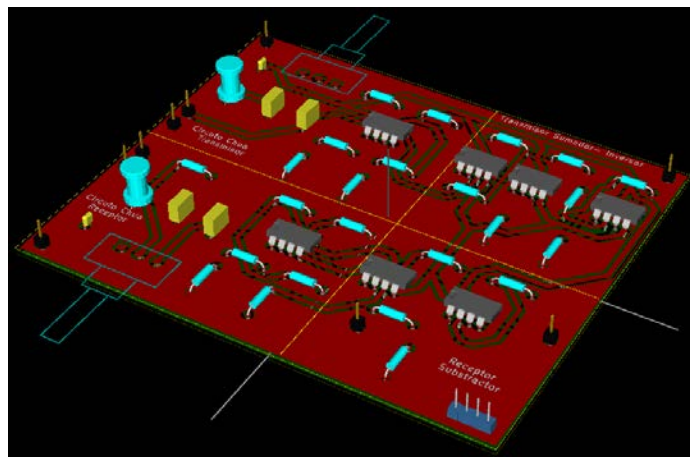
Figura 90: Cara frontal de la board del circuito de aplicación.



**Figura 91:** Cara posterior de la board del circuito de aplicación.



**Figura 92:** Imagen 3D del circuito de aplicación.



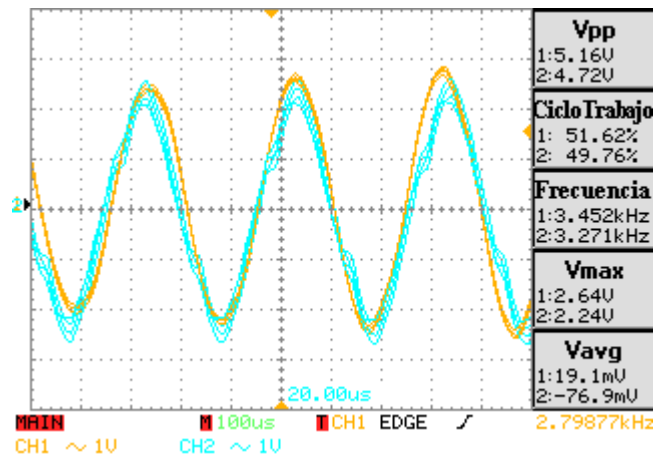
### 10.3. RESULTADO FINAL DE PCB EN EL LABORATORIO

En la Figura 93 se observa las señales obtenidas en el laboratorio del circuito de aplicación. El procedimiento usado para transmitir la señal senoidal fue el siguiente, luego de alimentar el circuito con una señal continua de  $\pm 12$  [V] valor elegido aleatoriamente según la especificación de alimentación de los amplificadores operacionales y de conectar la alimentación continua de  $\pm 5$  [V] para sincronizar los circuitos de Chua transmisor y receptor, primero se procedió a asignarle un valor de cero a los potenciómetros que se encuentran tanto en el circuito de Chua transmisor como en el receptor los cuales representan la resistencia R del esquema del circuito. Habiendo hecho esto con ayuda del osciloscopio se procede a calibrar la señal senoidal a transmitir la cual posee 1.5 [V] de amplitud a 20 [KHz] de frecuencia. Posterior a esto se conecta dicha señal a la entrada del transmisor y con ayuda del osciloscopio nuevamente se toma esta vez la señal en el puerto de salida del transmisor luego de que la señal senoidal es encriptada con la señal caótica del circuito de Chua del transmisor. A continuación con ayuda del potenciómetro del circuito de Chua transmisor, se varía la resistencia R hasta asignar un valor de resistencia al circuito que asegure que la señal codificada a la salida del transmisor vista en el osciloscopio presente una codificación dada por la señal caótica, en el momento de asegurar este comportamiento se afirma que el circuito de Chua transmisor ya presenta un comportamiento caótico en la transmisión y por tanto la señal transmitida ya se encuentra codificada. Ahora finalmente se procede a tomar la señal de salida del receptor luego de que sea restada la señal caótica y variando el potenciómetro del circuito de Chua receptor se trata de encontrar un valor de resistencia adecuado que me permite sincronizar los circuitos de Chua del transmisor y el receptor con el fin de que la señal senoidal transmitida sea des encriptada y pueda observarse la señal original transmitida.

Luego de hacer este experimento múltiples veces se encuentra que los resultados obtenidos no son los esperados, es decir, a pesar de que la señal senoidal si es transmitida por el circuito y que existen valores de resistencia en los cuales la señal se codifica un poco y la cual es mostrada correctamente a la salida, el circuito no logra decodificar la señal senoidal transmitida cuando se alcanza un estado caótico en el circuito de Chua transmisor. Esto sucede debido a la dificultad existente para sincronizar los circuitos de Chua, procedimiento que se hace necesario se perfeccione para mejorar la funcionalidad, pero

que acá se acota hasta este punto debido a que este montaje propuesto es simplemente una ilustración de las posibles aplicaciones que el circuito de Chua posee, resaltando su importancia y lo primordial de todos los análisis hechos en este libro. Todo el procedimiento hecho iniciando con el circuito RLC y finalizando en el circuito de Chua se toma como base para futuros estudios, pero se deja como reto para futuras investigaciones no solo mejorar esta aplicación si no también realizar otras de mayor complejidad basándose en los estudios acá realizados.

**Figura 93:** Señal obtenida en el laboratorio con el osciloscopio del circuito aplicativo.



## 11. CONCLUSIONES

- Se inició realizando un estudio acerca de los conceptos básicos que serían necesarios para el desarrollo de la tesis. Estos fueron consignados en el capítulo 4 de este libro, los cuales son de vital importancia para todos los análisis desarrollados.
- Comenzando desde lo más básico se trazó un camino enfocado hacia el caos, iniciado en el estudio del comportamiento lineal del circuito RLC, luego el incluir un elemento no lineal, fue un aporte que nos indujo al análisis de sistemas no lineales más complejos, que tras considerar varias configuraciones de circuitos incluyendo dicho elemento se llegó finalmente al circuito de Chua, el cual es el exponente de los comportamientos caóticos clásicos. Gracias a este camino, se facilitó mucho los análisis y experimentos del circuito de Chua pues poco a poco salió a la luz conceptos, comportamientos y análisis que ayudaron a comprender un poco su dinámica.
- El análisis del circuito RLC fue un inicio importante porque a pesar de ser un pobre modelo de la realidad, muestra comportamientos básicos necesarios para entender cualquier sistema oscilatorio. Entendiendo esto, se avanzó en la búsqueda de modelos más reales agregando un elemento no lineal al circuito RLC, y analizándolo con la teoría de la linealidad a tramos se trató de explicar el comportamiento local de cada región de algunos sistemas no lineales para luego obtener una predicción global. Estos fueron los primeros pasos en el estudio de los comportamientos locales y globales que caracterizan los modelos caóticos no lineales del circuito de Chua.
- Las simulaciones hechas en los software MATLAB® y OrCAD-Cadence® muestran información de gran ayuda para comprender los análisis y resultados teóricos que aparecieron en los circuitos desarrollados en el camino hacia el circuito de Chua. Estos nos mostraron desde una perspectiva grafica 2D y 3D los comportamientos matemáticos que describen a todos los circuitos estudiados en este libro. Es por

esto que mediante la simulación de cada circuito presentado, se mostró mediante señales en el tiempo y diagramas de fase, los cambios cualitativos importantes estudiados en su respectivo análisis teórico por medio de los valores propios obtenidos, que comienzan desde una oscilación continua, pasan a un ciclo límite, continuando con el stretching y el folding, aparecen las orbitas extrañas y finalmente encontrarse el impredecible caos.

- Teniendo una base teórica y unas simulaciones hechas en los software MATLAB® y OrCAD-Cadence®, se realizaron montajes en laboratorio de los circuitos que sirvieron como herramientas de estudio en el camino hacia el circuito de Chua, registrando en cada caso los resultados experimentales más importantes, pero se destaca que no se pudo obtener la misma cantidad de comportamientos que en los análisis teóricos y de simulación, debido a que hay cambios cualitativos que suceden muy rápido y no se pueden registrar todos en el osciloscopio utilizado.
- Se montó el circuito de Chua y los demás circuitos mostrados en esta tesis sobre elementos fácil de conseguir en el mercado, la finalidad es que cualquiera pueda desarrollar los montajes acá realizados, profundizar sobre las dinámicas no lineales entendiendo desde lo básico y motivar a estudios posteriores teniendo como base este trabajo.
- Las condiciones iniciales y los valores de los parámetros en general juegan un papel importante a la hora de crear el caos, de ellas depende el comportamiento cualitativo resultante, si el sistema empieza en una región central, no es lo mismo si empieza en la región exterior, el comportamiento es distinto y una pequeña variación puede hacer impredecible el resultado final.
- Se tuvo en cuenta que esta tesis se desarrolló como base para estudios posteriores basados en el circuito de Chua, por tanto se trató de desarrollar en detalle todos los análisis teóricos, de simulación y prácticos realizados para finalmente ilustrar una aplicación del circuito de Chua mediante un prototipo de laboratorio en el área de control y telecomunicaciones donde se trabajó con características ya estudiadas.

## 12. RECOMENDACIONES

- Para entender de una mejor manera el comportamiento analítico y dinámico del caos observado en el circuito Chua, se le recomienda al lector hacer un seguimiento de los montajes realizados en los capítulos anteriores al igual que a sus análisis teóricos y analíticos, pues es gracias a esto que se puede entender mejor la dinámica del caos de Chua.
- Antes de intentar realizar cualquier montaje de prueba en el laboratorio, se debe realizar un análisis de simulación en un software como MATLAB® y OrCAD-Cadence®, donde se pueda estudiar tanto la parte analítica como teórica de los circuitos, para así al momento de ir al laboratorio entender y dar solución fácilmente a los inconvenientes que surjan. De igual manera se obtendrá un punto de referencia con el cual se podrán comparar los resultados.
- Se sabe la importancia del Diodo de Chua en el circuito Chua, por tanto es de aclarar que este elemento no es comercial, en consecuencia para su uso de laboratorio y software de simulación debe ser construido a partir de resistencias y amplificadores operacionales.
- Se recomienda no hacer uso de capacitancias de cerámica en los montajes de laboratorio de esta tesis, pues se obtienen un comportamiento más nítido si se utilizan capacitancias de mylar o metal-film.
- Es indispensable que la alimentación DC de los opams usados en algunos de los circuitos montados en el laboratorio sea lo más estable y constante posible. Para esto se usan capacitancias de tantalio de 0,1uF colocadas entre cada terminal de la alimentación y tierra.
- Cabe resaltar que es importante que los elementos usados en el laboratorio estén correctamente calibrados y en buen estado, de esta forma se puede observar mejor los comportamientos del circuito Chua al igual que en los otros circuitos osciladores.

## CITAS

- [1] M. P. Kennedy, «Three Steps to Chaos - Part I: Evolution,» *IEEE Transactions on circuits and systems - I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 40, nº 10, pp. 640 - 656, October 1993.
- [2] M. P. Kennedy, «Three Steps to Chaos - Part II: A Chua's Circuit Primer,» *IEEE Transactions on Circuits And Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 40, nº 10, pp. 657 - 674, October 1993.
- [3] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky y S. Hamid Nawab, de *Señales y Sistemas, Segunda Edición*, Naucalpan de Juárez, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, 1998, p. 38.
- [4] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems - Second Edition*, Michigan State University: Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458, 1996.
- [5] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994.
- [6] R. Kılıç, *A practical guide for studying chua's circuits*, Singapore: World Scientific Series on Nonlinear Science, 2010.
- [7] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems - 7th ed*, New York: John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [8] R. L. Borrelli y C. S. Coleman, *Ecuaciones diferenciales, Una perspectiva de modelación*, Mexico: Alfa omega Grupo Editor. S.A. de C.V, 2005.

## BIBLIOGRAFIA

BORRELLI, R. L. y COLEMAN, C. S., Ecuaciones diferenciales, Una perspectiva de modelación, Mexico: Alfa omega Grupo Editor. S.A. de C.V, 2005.

BOYCE, W. E. y DIPRIMA, R. C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems - 7th ed, New York: John Wiley & Sons, Inc, 2001.

KENNEDY, Michael Peter. Three Steps to Chaos - Part I: Evolution. IEEE Transactions on circuits and systems - I: Fundamental Theory and Applications [ online] October 1993. vol. 40, nº 10 [citado 8 mayo 2015] pp. 640 – 656

----- . Three Steps to Chaos - Part II: Evolution. IEEE Transactions on circuits and systems - I: Fundamental Theory and Applications [ online] October 1993. vol. 40, nº 10 [citado 8 mayo 2015] pp. 657 – 674.

KHALIL, H. K., Nonlinear Systems - Second Edition, Michigan State University: Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.

KILIC, R. A practical guide for studying chua's circuits. Singapore: World Scientific Series on Nonlinear Science, 2010.

OPPENHEIM, Alan V.; WILLSKY , Alan S. y HAMID NAWAB, S. *Señales y Sistemas, Segunda Edición*. Naucalpan de Juárez, Mexico: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, 1998, p. 38.

STROGATZ, S.H., Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Massachusetts: Perseus Books Publishing, 1994.

## ANEXOS

### ANEXO A. CODIGOS DESARROLLADOS EN MATLAB®

#### A.1. Circuito en paralelo RLC

En este anexo se adjuntara el código de Matlab® desarrollado a partir de las ecuaciones diferenciales que representan este circuito. Este código sirve para corroborar el análisis desarrollado en el capítulo 5, y fue mediante este que se obtuvieron las gráficas mostradas en la sección 5.2.

**Figura 94:** Código de Matlab del circuito en paralelo RLC

```
1 function dy = michuaorig(t,y)
2
3 global G
4
5 L = 18e-3 ;
6 C2 = 100e-9 ;
7 G = 0;
8 %G= -500e-6 ;
9
10 dy = zeros(2,1) ;
11 dy(1) = -(1/L)*y(2) ;
12 dy(2) = (1/C2)*y(1) - (G/C2)*y(2) ;
13
14 return
```

## A.2. Elemento no lineal o Diodo Chua

Para comprobar lo visto en el análisis teórico del capítulo 6, se desarrolló un código de Matlab® para corroborar grafica el comportamiento lineal a tramos del elemento no lineal. Para esto se simularon las ecuaciones que lo caracterizan para posteriormente a través del comando *plot*, obtener el comportamiento deseado.

**Figura 95:** Código de Matlab del elemento no lineal o Diodo Chua

```
1 - clear all
2 - close all
3 - clc
4
5 - E=0.47 ;
6 - %G=500e-6 ;
7 - G=1e-3 ;
8 - Ga=-757.57e-6 ;
9 - Gb=45.45e-6 ;
10 - E1=-E ;
11 - d=E/8 ;
12 - VR=(E1*5):d:(E*5) ;
13 - Gap=G+Ga ;
14 - Gbp=G+Gb ;
15
16 - for j=1:(length(VR))
17 -     if (VR(j)<E1)
18 -         IR(j)=(Gbp*VR(j))+((Gb-Ga)*E) ;
19 -     elseif (VR(j)<=E)
20 -         IR(j)=Gap*VR(j) ;
21 -     elseif (VR(j)>E)
22 -         IR(j)=(Gbp*VR(j))+((Ga-Gb)*E) ;
23 -     end
24 - end
25 - T=[VR;IR]
26
27 - plot(VR,IR)
28 - text(0,(334e-6),'-', 'Color',[1 0.4 0.5] )
29 - grid on
30 - title('Comportamiento de NR')
31 - xlabel('VR')
32 - ylabel('IR')
33 - axis([min(E1-1) max(E+1) min(IR) max(IR)])
```

### A.3. Circuito en paralelo RLC con un elemento no lineal

A continuación se mostrara el código de Matlab® que representa al circuito en paralelo RLC con un elemento no lineal. Este código sirvió para corroborar el análisis desarrollado en el capítulo 7 y mediante el cual se obtuvieron las gráficas mostradas en la sección 7.2. Tenga en cuenta que en el código no solo se tienen en cuenta las ecuaciones diferenciales que representan a este circuito sino que también se simularon las ecuaciones del elemento no lineal o diodo de Chua.

**Figura 96:** Código de Matlab del circuito en paralelo RLC con un elemento no lineal.

```
1  function dy = michua(t,y)
2
3  global G
4
5  L = 18e-3 ;
6  C2 = 100e-9 ;
7  Ga = -757.576e-6 ;
8  Gb = 45.455e-6 ;
9  E = 0.47 ;
10 %G = 1e-3 ;
11 G = 500e-6 ;
12
13 Gap = (G + Ga) ;
14 Gbp = (G + Gb) ;
15
16 if (y(2) < -E),
17     Tp = - (Gbp/C2) *y(2) - ((Gb - Ga)/C2) *E ;
18 elseif (y(2) > E),
19     Tp = - (Gbp/C2) *y(2) - ((Ga - Gb)/C2) *E ;
20 else
21     Tp = - (Gap/C2) *y(2) ;
22 end
23
24 dy = zeros(2,1) ;
25 dy(1) = -(1/L) *y(2) ;
26 dy(2) = (1/C2) *y(1) + Tp ;
27
28 return
```

#### A.4. Circuito de Chua

El siguiente código se realizó a partir de las ecuaciones diferenciales que representan al circuito de Chua. Teniendo en cuenta también las ecuaciones del elemento no lineal del cual el circuito de Chua es dependiente. Este código fue el usado para el análisis de la sección 9.2 del capítulo 9.

**Figura 97:** Código de Matlab del circuito de Chua.

```
1 function dy = michua2(t,y)
2
3 global G
4
5 L = 18e-3 ;
6 C1 = 10e-9 ;
7 C2 = 100e-9 ;
8 Ga = -757.576e-6 ;
9 Gb = -409.091e-6 ;
10 E = 1 ;
11
12 Gap = G + Ga ;
13 Gbp = G + Gb ;
14
15 if (y(3) < -E),
16     Tp = -(Gbp/C1)*y(3) - ((Gb - Ga)/C1)*E ;
17 elseif (y(3) > E),
18     Tp = -(Gbp/C1)*y(3) - ((Ga - Gb)/C1)*E ;
19 else
20     Tp = - (Gap/C1)*y(3) ;
21 end
22
23 dy = zeros(3,1) ;
24 dy(1) = -(1/L)*y(2) ;
25 dy(2) = (1/C2)*y(1) - (G/C2)*(y(2) - y(3)) ;
26 dy(3) = (G/C1)*y(2) + Tp ;
27
28 return
```

## A.5. Código principal

Este es el código que permite llamar a las funciones de los códigos mostrados en los anexos anteriores donde es posible variar  $G$  para aplicar diferentes valores de resistencia y mediante el comando `ode45` darle solución a las ecuaciones simuladas en cada una de esas funciones, lo que permite obtener las gráficas obtenidas mostradas en este libro.

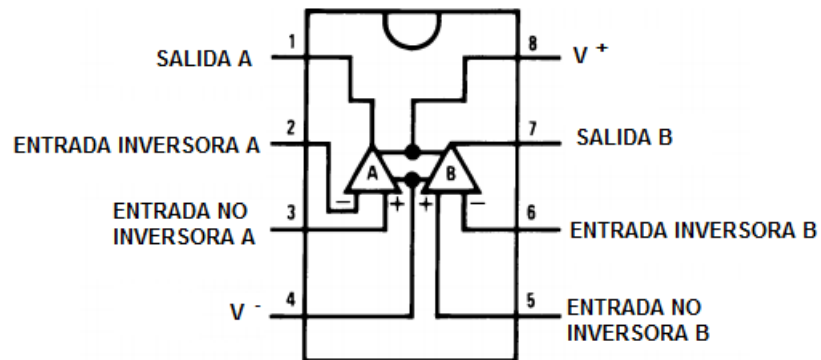
**Figura 98:** Código de Matlab del circuito de Chua.

```
1 - clear all ;
2 - close all ;
3 - clc ;
4
5 - disp('Chua 1.....') ;
6 - global G
7
8 - ti = 0 ;
9 - tf = 5e-3 ;
10 - G = 5.88e-4 ;
11
12 - y0 = [0 0.5 0]' ;
13
14 - %[t,Y] = ode45(@michuaorig,[ti tf],y0) ;
15 - %[t,Y] = ode45(@michua,[ti tf],y0) ;
16 - [t,Y] = ode45(@michua2,[ti tf],y0) ;
17
18 - subplot(211) ;
19 - plot(t,Y(:,3)) ;
20 - ylabel('v1(t)') ;
21 - subplot(212) ;
22 - plot(t,Y(:,2)) ;
23 - ylabel('v2(t)') ;
24 - xlabel('t') ;
25
26 - figure ;
27 - plot(y0(1),y0(2),'*r',Y(:,3),Y(:,2)) ;
28 - xlabel('v1(t)') ;
29 - ylabel('v2(t)') ;
30 - figure ;
31 - plot3(y0(1),y0(2),y0(3),'*r',Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3)) ;
32 - grid on ;
33 - xlabel('i3(t)') ;
34 - ylabel('v2(t)') ;
35 - zlabel('v1(t)') ;
```

## ANEXO B. CARACTERÍSTICAS DEL AMPLIFICADOR OPERACIONAL TL082

El amplificador utilizado para los montajes en el laboratorio y simulaciones en Orcad es descrito de la siguiente manera:

**Figura 99:** Imagen de la composición interna del elemento. Tomado de Texas Instruments Incorporated (modificado por autores).



- No. de amplificadores operacionales: 2
- Voltaje de alimentación max:  $\pm 18$  V
- Bajo consumo de potencia
- Ancho de banda típico: 4 MHz
- Alto Slew Rate: 13 V/ $\mu$ s
- Entradas a JFET con impedancias de entrada altas
- Corrientes de polarización y offset muy bajas
- Distorsión armónica total típica: 0.01%
- Compensado en frecuencia internamente
- Salida protegida contra cortocircuito
- Encapsulado: DIP 8 pines