

PROPAGACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES EN LA TEORÍA
GENERALIZADA DE PROCA SU(2)

ANGIE MILENA SÁNCHEZ MENDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2026

PROPAGACIÓN DE ONDAS GRAVITACIONALES EN LA TEORÍA
GENERALIZADA DE PROCA SU(2)

ANGIE MILENA SÁNCHEZ MENDEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR

JOSE FERNANDO RODRIGUEZ RUIZ
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

CODIRECTOR

YEINZON RODRIGUEZ GARCÍA
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2026

CONTENIDO

	pág.
Introducción	9
1. Teoría generalizada de Proca	41
1.1. Teorías métricas de la gravedad	43
1.1.1. Teoría de Brans–Dicke	45
1.1.2. Otras teorías métricas de la gravedad	46
1.2. Teoría Generalizada de Proca SU(2)	47
2. Radiación Gravitacional	52
2.1. Formulación linealizada de la gravedad	53
2.2. Radiación gravitacional en espaciotiempo plano	54
2.2.1. Fijación del Gauge	56
2.3. Radiación gravitacional en espaciotiempo curvo	59
2.4. Polarización de las Ondas Gravitacionales	64
2.4.1. Propagación de OG en la Aproximación Eikonal (WKB)	67
2.4.2. Descomposición por Helicidades	69
2.4.3. Descomposición por helicidades de la teoría Brans-Dicke	75
2.5. Clasificación E(2) de Ondas Gravitacionales	78
3. Propagación de OG en fondo de FLRW	91
3.1. Forma general de las ecuaciones de Propagación	91
3.2. Descomposición por helicidades en la teoría GSU2P	97
3.3. Velocidades de propagación en GSU2P	102
3.3.1. Configuración de fondo: triada cósmica	107
3.3.2. Configuración del fondo: Puramente Temporal	116
3.4. Perspectivas Observacionales	122

4. Conclusiones	126
BIBLIOGRAFÍA	108
ANEXOS	119

LISTA DE FIGURAS

- pág.**
- Figura 1. Representación gráfica de las zonas de generación y propagación de ondas gravitacionales, basado en S. J. Kovacs y K. S. Thorne: *The Generation of Gravitational Waves. 3. Derivation of Bremsstrahlung Formulas*. En: *Astrophys. J.* 217 (1977), págs. 252-280. DOI: 10.1086/155576. 60
- 86figure.caption.5
- Figura 3. Representación pictórica de la deformación que presentarían las partículas masivas de prueba la pasar una onda gravitacional polarizada según las seis permitidas, donde el eje z corresponde al eje de propagación. La imagen (a) representa el modo tensorial transversal-transversal, o modo (+); la (b), el modo tensorial transversal-transversal o modo (\times); la (c) el modo escalar transversal-transversal; la (d) el modo escalar transversal-longitudinal; la (e) y (d) los modos vectoriales transversal-longitudinal. La línea discontinua representa el estado inicial de las partículas de prueba, mientras que las líneas continuas muestran la nueva distribución en presencia de la onda gravitacional. 89
- Figura 4. Restricciones para los valores de φ y α_3 . La franja azul corresponde la zona donde las velocidades son reales, es decir v_g^2 es positivo. La zona línea roja corresponde al caso en el que los vectores propios no son linealmente dependientes. Sólo lo valores dentro de la franja azul son admisibles. 112
- Figura 5. Representación pictórica de la propagación multimodal de las ondas gravitacionales en un fondo homogéneo e isótropo de FLRW, para los modos tensoriales. 124

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Mecanismos de observación requeridos (denotada por el símbolo \checkmark) y no requeridos (\times) para medir los fenómenos de velocidad anómala, propagación multimodal y modos de propagación extra en las ondas gravitacionales.	106
Tabla 2. Caracterización de las piezas lagrangianas de la teoría GPSU2 bajo la configuración puramente espacial de los campo vectoriales.	116
Tabla 3. Caracterización de las piezas lagrangianas de la teoría GPSU2 bajo la configuración puramente temporal de los campo vectoriales.	122

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Ecuaciones de Campo en la teoría GSU2P	119
Anexo B. Ecuaciones de Campo Linealizadas en GSU2P	124

RESUMEN

TÍTULO: Propagación de Ondas Gravitacionales en la Teoría Generalizada de Proca SU(2) ¹

AUTOR: Angie Milena Sánchez Mendez ¹.

PALABRAS CLAVE: Ondas Gravitacionales, Teoría Generalizada de Proca SU(2), Velocidad de Propagación, Aproximación Eikonal.

DESCRIPCIÓN: En el marco de la Relatividad General de Einstein, las ondas gravitacionales admiten dos modos de polarización que se propagan a la velocidad de la luz, hecho confirmado observacionalmente por el evento GW170817, en el que se analizó la fusión de un sistema binario de estrellas de neutrones junto con su contraparte electromagnética. Sin embargo, otras teorías métricas de la gravedad predicen hasta seis modos de polarización, lo que da lugar a fenómenos que no pueden ser explicados dentro de la Relatividad General. Entre estos se encuentran la propagación no lumínica y la propagación multimodal, los cuales constituyen observables potencialmente accesibles mediante los interferómetros actualmente operativos. Así pues, el objetivo de este trabajo es falsear la teoría Generalizada de Proca SU(2) como candidata a gravedad modificada a la luz de dichos observables. Para ello, se implementó un fondo homogéneo e isótropo de FriedmannLemaîtreRobertsonWalker y se consideraron cinco de las veintiuna piezas lagrangianas de la teoría, a saber, \mathcal{L}_4^1 , \mathcal{L}_4^3 , \mathcal{L}_4^4 , $\mathcal{L}_{3,p}^4$ y \mathcal{L}_2^6 . A partir del principio variacional se encontraron las ecuaciones de campo, las cuales fueron posteriormente perturbadas con el fin de extraer su parte principal mediante la aproximación eikonal. Como resultado, se encontró que, para el modo tensorial y bajo la configuración de triada cósmica de los campos vectoriales, las piezas \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^3 presentan velocidades anómalas, siendo únicamente una de ellas la que exhibe propagación multimodal, mientras que en la configuración puramente temporal dichas piezas presentan únicamente velocidades anómalas. De este modo, se muestra que la teoría Generalizada de Proca SU(2) exhibe señales observacionales distinguibles frente a la Relatividad General para los modos analizados, lo que amplía las posibilidades para evaluar su viabilidad mediante futuras detecciones de ondas gravitacionales.

¹ Trabajo de investigación.

¹ Facultad de Ciencias, Escuela de Física, José Fernando Rodríguez Ruiz (Director).

ABSTRACT

TITLE: Propagation of Gravitational Waves in the Generalized Propagation Theory $SU(2)^2$.

AUTHOR: Angie Milena Sánchez Mendez³.

KEYWORDS: Gravitational Waves, Generalized Propagation Theory $SU(2)$, Propagation Speed, Eikonal Approximation.

DESCRIPTION: Within the framework of Einstein's General Relativity, gravitational waves admit two polarization modes that propagate at the speed of light, a fact observationally confirmed by the GW170817 event, in which the merger of a binary neutron star system along with its electromagnetic counterpart was analyzed. However, other metric theories of gravity predict up to six polarization modes, giving rise to phenomena that cannot be explained within General Relativity. Among these are non-luminous propagation and multimodal propagation, which constitute observables potentially accessible through currently operational interferometers. Thus, the objective of this work is to falsify Proca's Generalized $SU(2)$ theory as a candidate for modified gravity in light of these observables. To this end, a homogeneous and isotropic FriedmannLemaîtreRobertsonWalker background was implemented, and five of the twenty-one Lagrangian pieces of the theory were considered, namely, \mathcal{L}_4^1 , \mathcal{L}_4^3 , \mathcal{L}_4^4 , $\mathcal{L}_{3,p}^4$, and \mathcal{L}_2^6 . From the variational principle, the field equations were found, which were subsequently perturbed in order to extract their principal part using the eikonal approximation. As a result, it was found that, for the tensor mode and under the cosmic triad configuration of the vector fields, the pieces \mathcal{L}_4^1 and \mathcal{L}_4^3 exhibit anomalous velocities, with only one of them showing multimodal propagation, whereas in the purely temporal configuration these pieces exhibit only anomalous velocities.

Thus, it is shown that Proca's Generalized $SU(2)$ theory exhibits distinguishable observational signals compared to General Relativity for the analyzed modes, which expands the possibilities for evaluating its viability through future gravitational wave detections.

² Master Thesis.

³ Faculty of Sciences, School of Physics, José Fernando Rodríguez Ruiz (Director).

Introducción

Las ondas gravitacionales, en el régimen de campo débil, se definen como perturbaciones dinámicas del espaciotiempo, las cuales se propagan a velocidad finita y constituyen soluciones a las ecuaciones linealizadas de campo de la Relatividad General (RG) ⁴. Las ondas gravitacionales se generan cuando la segunda derivada del cuadrupolo de masa es no nula ⁵. Tales variaciones originan una redistribución del campo gravitacional que se propaga hacia el infinito en forma de ondas transversales, transportando energía y momento angular ⁶. Entre las fuentes astrofísicas capaces de generar señales detectables se incluyen la coalescencia de sistemas binarios compactos (agujeros negros, estrellas de neutrones o combinaciones de ambos) y las asimetrías en colapsos gravitacionales y explosiones de supernovas. Asimismo, procesos del universo temprano podrían originar un fondo estocástico de radiación gravitacional. ⁷.

La primera evidencia observacional indirecta de la existencia de ondas gravitacionales (OG) se obtuvo a partir del seguimiento de un sistema binario de púlsares, PSR B1913+16, descubierto y estudiado por Joel M. Weisberg y Joseph H. Taylor

-
- ⁴ Charles W. Misner, K. S. Thorne y J. A. Wheeler: *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973; M. Maggiore: *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008
- ⁵ K. S. Thorne: *Multipole Expansions of Gravitational Radiation*. En: *Rev. Mod. Phys.* 52 (1980), págs. 299-339. DOI: 10.1103/RevModPhys.52.299
- ⁶ Bernard F. Schutz: *Gravitational wave astronomy*. En: *Class. Quant. Grav.* 16 (1999), A131-A156. DOI: 10.1088/0264-9381/16/12A/312
- ⁷ B. P. Abbott et al.: *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. En: *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), pág. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc]; Chiara Caprini y Daniel G. Figueroa: *Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves*. En: *Class. Quant. Grav.* 35.16 (2018), pág. 163001. DOI: 10.1088/1361-6382/aac608. arXiv: 1801.04268 [astro-ph.CO]

en 1975 ⁸. Este sistema está compuesto por dos estrellas de neutrones en órbita mutua, las cuales emiten pulsos de radio; su análisis permitió medir la evolución temporal de su período orbital. Según la Relatividad General, un sistema binario pierde energía debido a la emisión continua de radiación gravitacional. Esta pérdida energética implica que la separación entre las componentes del sistema binario disminuya gradualmente, lo que a su vez provoca una reducción gradual del período orbital. En el caso de PSR B1913+16, la tasa de disminución observada coincidió con la predicción teórica de la Relatividad General con una precisión del orden del 0,2% ⁹.

La existencia de OG fue confirmada de manera directa por los detectores de la colaboración LIGO VIRGO. La primera señal, GW150914, fue detectada de forma independiente por los dos interferómetros LIGO Hanford-LIGO Livingston, y resultó consistente con la coalescencia de un sistema binario de agujeros negros ¹⁰. A esta detección siguieron GW151226 y GW170104, igualmente interpretadas como fusiones de agujeros negros binarios. En 2017, la misma colaboración registró una señal procedente de la colisión de un sistema binario de estrellas de neutrones, GW170817 ¹¹, que permitió observaciones conjuntas en ondas gravitacionales y electromagnéticas. Hasta la fecha, el catálogo GWTC-3 recopila 90 eventos confirmados. Más recientemente, se logró la detección de ondas gravitacionales en la banda de nanohertz mediante el seguimiento de 57 púlsares a lo largo de 15 años, en un análisis del Observatorio de Ondas Gravitacionales de Nanohertz de Norte-

⁸ Russell A Hulse y Joseph H Taylor: *Discovery of a pulsar in a binary system*. En: *Astrophys. J.*. 195 (1975), págs. L51-L53

⁹ Joel M. Weisberg y Joseph H. Taylor: *Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis*. En: *ASP Conf. Ser.* 328 (2005), pág. 25. arXiv: astro-ph/0407149

¹⁰ Abbott et al. 2016

¹¹ B. P. Abbott et al.: *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.16 (2017), pág. 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101. arXiv: 1710.05832 [gr-qc]

américa (NANOGrav) ¹², lo que constituye un paso relevante hacia la caracterización de fondos estocásticos de origen astrofísico o cosmológico.

Las ondas gravitacionales presentan únicamente dos modos de polarización transversales en RG, mientras que teorías de gravedad modificadas pueden predecir hasta seis modos en cuatro dimensiones ¹³, así como también alterar su velocidad de propagación, dispersión y atenuación. Estas propiedades, asociadas a la existencia de grados de libertad adicionales, pueden inferirse a partir de la fase, amplitud y frecuencia ¹⁴, las cuales han sido estudiadas en teorías alternativas de la gravedad como la teoría de Horndeski ¹⁵, la teoría Escalar-Tensor-Vector (MOG) ¹⁶, la teoría Generalizada de Proca ¹⁷ y la teoría modificada de la gravedad tipo Chern-Simons ¹⁸, entre otras; generalmente sobre fondos planos, isótropos y homogéneos. La reconstrucción completa de todas las polarizaciones requiere al menos cinco detec-

-
- ¹² Gabriella Agazie et al.: *The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background*. En: *Astrophys. J. Lett.* 951.1 (2023), pág. L8. DOI: 10.3847/2041-8213/acdac6. arXiv: 2306.16213 [astro-ph.HE]
- ¹³ Douglas M Eardley, David L Lee y Alan P Lightman: *Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity*. En: *Phys. Rev. D* 8.10 (1973), pág. 3308
- ¹⁴ Atsushi Nishizawa et al.: *Probing non-tensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers*. En: *Phys. Rev. D* 79 (2009), pág. 082002. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.082002. arXiv: 0903.0528 [astro-ph.CO]; Katerina Chatziioannou, Nicolas Yunes y Neil Cornish: *Model-Independent Test of General Relativity: An Extended post-Einsteinian Framework with Complete Polarization Content*. En: *Phys. Rev. D* 86 (2012), pág. 022004. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.022004. arXiv: 1204.2585 [gr-qc]
- ¹⁵ Gregory Walter Horndeski: *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974), págs. 363-384. DOI: 10.1007/BF01807638
- ¹⁶ L. Heisenberg: *Generalization of the Proca Action*. En: *JCAP* 2014.05 (2014), pág. 015. DOI: 10.1088/1475-7516/2014/05/015
- ¹⁷ J. W. Moffat: *Scalartensorvector gravity theory*. En: *JCAP* 2006.03 (2006), pág. 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2006/03/004
- ¹⁸ R. Jackiw y S.-Y. Pi: *ChernSimons modification of general relativity*. En: *Phys. Rev. D* 68.10 (2003), pág. 104012. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.104012

tores no paralelos ¹⁹. Con este objetivo, además de la expansión de la red terrestre (LIGO, Virgo, KAGRA, LIGO-India) ²⁰, se proyectan misiones espaciales como TianQin ²¹, LISA ²² y Taiji ²³ para incrementar la sensibilidad y el rango de frecuencias observables.

La identificación y caracterización de OG en presencia de ruido instrumental se realiza mediante el método de *filtro óptimo*, que consiste en correlacionar los datos del detector con un conjunto de plantillas para la forma de las ondas y maximizar la relación señalruido. La fiabilidad de esta técnica depende de que las plantillas representen con precisión la señal real. Por ello, es necesario un banco extenso de plantillas que cubra el espacio de parámetros astrofísicos de la fuente (masas, espines, excentricidad, distancia, orientación) y, en el caso de gravedad modificada, también los parámetros adicionales de la teoría. Así, la elección del modelo gravitacional condiciona tanto la interpretación física de las señales detectadas como la estructura del algoritmo de búsqueda y el diseño del banco de plantillas empleado para su identificación.

Por otra parte, al ser una teoría de campo efectiva, la Relatividad General constituye actualmente la descripción más precisa de la interacción gravitacional en el univer-

¹⁹ K. Hayama y A. Nishizawa: *Model-independent test of gravity with a network of ground-based gravitational-wave detectors*. En: *Phys. Rev. D* 87 (2013), pág. 062003

²⁰ E. Capote et al.: *Advanced LIGO detector performance in the fourth observing run*. En: *Phys. Rev. D* 111.6 (2025), pág. 062002. DOI: 10.1103/PhysRevD.111.062002. arXiv: 2411.14607 [gr-qc]; F. Acernese et al.: *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*. En: *Class. Quant. Grav.* 32.2 (2015), pág. 024001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/2/024001. arXiv: 1408.3978 [gr-qc]

²¹ Jun Luo et al.: *TianQin: a space-borne gravitational wave detector*. En: *Class. Quant. Grav.* 33.3 (2016), pág. 035010. DOI: 10.1088/0264-9381/33/3/035010. arXiv: 1512.02076 [astro-ph.IM]

²² Pau Amaro Seoane et al.: *Astrophysics with the Laser Interferometer Space Antenna*. En: *Living Rev. Rel.* 26.1 (2023), pág. 2. DOI: 10.1007/s41114-022-00041-y. arXiv: 2203.06016 [gr-qc]

²³ Wen Rui Hu y Yue Liang Wu: *The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity*. En: *Natl. Sci. Rev.* 4.5 (2017), págs. 685-686. DOI: 10.1093/nsr/nwx116

so local ²⁴, estando su validez restringida a ciertos rangos de energía, perdiendo capacidad predictiva fuera de ellos. Ejemplos de estas limitaciones incluyen la aparición inevitable de singularidades ²⁵ y su no renormalizabilidad perturbativa ²⁶. En el ámbito cosmológico, RG requiere la introducción de dos componentes adicionales, energía oscura y materia oscura, para reproducir la dinámica observada del universo ²⁷; sin embargo, la naturaleza física de ambas sigue sin identificarse, pese a décadas de investigación ²⁸. Estas limitaciones han motivado el desarrollo y estudio de modelos clásicos de gravedad modificada como posibles alternativas a RG ²⁹.

La implicación de GW170817 para la gravedad modificada fue analizada en cuatro trabajos publicados consecutivamente, que en conjunto establecieron un nuevo estándar observacional para teorías alternativas a la Relatividad General. Baker et al. demostraron que la coincidencia temporal entre GW170817 y GRB170817A impone un límite de $|\alpha_T| \lesssim 10^{-15}$, restringiendo severamente los acoplamientos no mínimos

-
- ²⁴ John F Donoghue: *Quantum general relativity and effective field theory*. En: *Handbook of quantum gravity*. 2024, págs. 3-26; C. P. Burgess: "General Relativity as an Effective Theory". En: *Introduction to Effective Field Theory: Thinking Effectively about Hierarchies of Scale*. Cambridge University Press, 2020, págs. 241272
- ²⁵ Clifford M. Will: *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. En: *Living Rev. Rel.* 17 (2014), pág. 4. DOI: 10.12942/lrr-2014-4. arXiv: 1403.7377 [gr-qc]
- ²⁶ Roland Steinbauer: *The Singularity Theorems of General Relativity and Their Low Regularity Extensions*. En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 125.2 (nov. de 2022), págs. 73119. DOI: 10.1365/s13291-022-00263-7; Stephen L. Adler: *Einstein Gravity as a Symmetry-Breaking Effect in Quantum Field Theory*. En: *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982). [Erratum: *Rev.Mod.Phys.* 55, 837 (1983)], pág. 729. DOI: 10.1103/RevModPhys.54.729
- ²⁷ Rudolf Bach y H Wevl: *Neue lösungen der Einsteinschen gravitationsgleichungen*. En: *Mathematische Zeitschrift* 13.1 (1922), págs. 134-145
- ²⁸ Jaco de Swart: *Five decades of missing matter*. En: *Physics Today* 77.8 (ago. de 2024), págs. 34-43. DOI: 10.1063/pt.ozhk.lfeb. eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/77/8/34/20082503/34_1_pt.ozhk.lfeb.pdf
- ²⁹ Mustapha Ishak: *Testing General Relativity in Cosmology*. En: *Living Rev. Rel.* 22.1 (2019), pág. 1. DOI: 10.1007/s41114-018-0017-4. arXiv: 1806.10122 [astro-ph.CO]; S. Shankaranarayanan y Joseph P. Johnson: *Modified theories of gravity: Why, how and what?* En: *General Relativity and Gravitation* 54.5 (mayo de 2022). DOI: 10.1007/s10714-022-02927-2

en teorías escalar-tensor y vector-tensor ³⁰. Creminelli et. al. abordaron el problema desde el formalismo del EFT de energía oscura y su formulación covariante, mostrando que la ausencia de desviaciones en la velocidad de propagación exige relaciones algebraicas precisas entre los operadores cuárticos y quínticos de Horndeski y más allá de Horndeski, reduciendo dramáticamente el espacio de modelos viables ³¹.

En la misma línea, Sakstein y Jain, además de encontrar el mismo límite temporal para la velocidad de la luz, analizaron las consecuencias para teorías escalar-tensor en contextos astrofísicos y cosmológicos, mientras que Ezquiaga y Zumalacárregui sistematizaron las restricciones sobre Horndeski, GLPV y DHOST, destacando que, salvo cancelaciones finamente ajustadas, los sectores cuártico y quíntico quedan esencialmente descartados³². En conjunto, estos trabajos consolidaron la propagación luminal de las ondas gravitacionales como un criterio estructural fundamental para la viabilidad de teorías de gravedad modificada.

Adicionalmente, en el 2020, Ezquiaga y Zumalacárregui presentaron un trabajo en el que desarrollaron un formalismo general para describir la propagación de ondas gravitacionales más allá de la Relatividad General en presencia de grados de libertad adicionales³³. Mediante la aproximación eikonal, identificaron los estados propios

³⁰ T. Baker et al.: *Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251301. arXiv: 1710.06394 [astro-ph.CO]

³¹ Paolo Creminelli y Filippo Vernizzi: *Dark Energy after GW170817 and GRB170817A*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251302

³² Jeremy Sakstein y Bhuvnesh Jain: *Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251303. arXiv: 1710.05893 [astro-ph.CO]; Jose María Ezquiaga y Miguel Zumalacárregui: *Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251304. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251304. arXiv: 1710.05901 [astro-ph.CO]

³³ Jose María Ezquiaga y Miguel Zumalacárregui: *Gravitational wave lensing beyond general relati-*

de propagación como combinaciones lineales del tensor métrico y de los campos adicionales, mostrando que estos pueden viajar con velocidades distintas dependiendo de la teoría y del fondo. Esta diferencia induce fenómenos de birrefringencia gravitacional, manifestados como retardos temporales entre las polarizaciones tensoriales, sin necesidad de contrapartes electromagnéticas. Asimismo, demostraron que en entornos con lentes gravitacionales pueden aparecer interferencias en la señal, scrambling, ecos gravitacionales y componentes no radiativas, sombras, cuya presencia permite sondear regiones del espacio de parámetros inaccesibles mediante las restricciones impuestas por el evento GW170817.

En extensiones de la RG con campos vectoriales masivos no abelianos, como la teoría de Proca Generalizada $SU(2)$, GPSU2, el campo de gauge se acopla a la métrica y algunas cantidades invariantes. El lagrangiano contiene términos cinéticos y potenciales para los campos vectoriales, así como acoplamiento no mínimo con la curvatura, lo que modifica las ecuaciones de propagación de las OG sobre el fondo³⁴. Se espera que dichas modificaciones puedan alterar la velocidad ($v_g \neq c$)³⁵, así como excitar modos vectoriales y escalares adicionales acoplados a los tensoriales³⁶ y generar birrefringencia gravitacional en fondos anisótropos o inhomogéneos³⁷. En configuraciones como la tríada cósmica, el fondo es homogéneo e isótropo; sin embargo, las perturbaciones presentan modificaciones en la ecuación caracte-

vity: Birefringence, echoes, and shadows. En: *Phys. Rev. D* 102.12 (2020), pág. 124048

³⁴ Alexander Gallego Cadavid, Yeinzon Rodriguez y L. Gabriel Gómez: *Generalized $SU(2)$ Proca theory reconstructed and beyond.* En: *Phys. Rev. D* 102.10 (2020), pág. 104066. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.104066. arXiv: 2009.03241 [hep-th]

³⁵ C. de Rham y S. Melville: *Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff.* En: *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018), pág. 221101

³⁶ José Beltrán Jiménez, José María Ezquiaga y Lavinia Heisenberg: *Probing cosmological fields with gravitational-wave oscillations.* 2019. arXiv: 1912.06104 [gr-qc]

³⁷ S. Murk, D. R. Terno y R. Vadapalli: *Gravity-induced birefringence in spherically symmetric spacetimes.* En: *Class. Quant. Grav.* 42 (2025), pág. 045004

rística de propagación.

Con base en lo anterior, cabe preguntarse: *¿Existe algún observable presente en las ondas gravitacionales que permita falsear la teoría GSU2P, con los interferómetros actuales?* En respuesta a esta pregunta, el presente trabajo tiene como objetivo determinar la existencia de velocidades anómalas y propagación multimodal³⁸ para 5 de las 21 piezas lagrangianas de la teoría, con base en el formalismo presentado por Ezquiaga y Zumalacárregui³⁹. Estos dos fenómenos son favorables, puesto que no necesitan detectores adicionales para su posible observación. Para ello, se determinaron las ecuaciones de campo linealizadas de la teoría GSU2P, bajo la aproximación eikonal en el régimen de orden dominante. Se consideran dos configuraciones de fondo distintas: una solución de tipo tríada cósmica y un fondo con un campo vectorial puramente temporal, ambas en un fondo para la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. Posteriormente, se obtuvieron las ecuaciones de propagación asociadas a cada pieza lagrangiana, donde se hallaron los grados de libertad radiativos, los cuales permitieron determinar las velocidades características respectivas. Cabe resaltar que este estudio no ha sido registrado antes en la literatura.

Los grados de libertad se clasifican a partir de la tétrada de Newman Penrose, al proyectar las ecuaciones de propagación asociadas a las perturbaciones de la métrica y los campos vectoriales, en esta base nula. Además, la tétrada de Newman Penrose también permite obtener escalares de curvatura, los cuales son utilizados para la categorización de las teorías gravitacionales según Eardley et al.⁴⁰.

³⁸ Se denomina propagación multimodal al régimen en el cual el sistema linealizado de perturbaciones presenta múltiples modos propios dinámicos, caracterizados por un espectro no degenerado de la matriz de propagación, dando lugar a varias relaciones de dispersión independientes y, por tanto, a distintos frentes de onda asociados a una misma helicidad.

³⁹ Ezquiaga y Zumalacárregui 2020

⁴⁰ Eardley, Lee y Lightman 1973b

En todo el desarrollo se emplean unidades geometrizadas, fijando $G = c = 1$, y se adopta la convención de signos de Wheeler⁴¹; las letras griegas representan índices espaciotemporales en la variedad tetradimensional (0,1,2,3); las primeras 4 letras latinas (a,b,c,d) corresponden a los índices tridimensionales de grupo, mientras que las demás letras latinas representan índices tridimensionales puramente espaciales.

La organización del trabajo se presenta en cinco capítulos. El Capítulo 1 corresponde a la introducción y motivación del trabajo. El Capítulo 2 desarrolla la formulación teórica de la teoría Generalizada de Proca con simetría interna $SU(2)$, describiendo sus piezas lagrangianas, los acoplamientos relevantes, la estructura de sus ecuaciones de campo y las configuraciones de fondo compatibles con la simetría cosmológica, como las configuraciones tríada cósmica y puramente temporal. El Capítulo 3 presenta la teoría de perturbaciones y la propagación de ondas gravitacionales en fondos FLRW, introduciendo la aproximación eikonal a orden dominante y el formalismo de Newman-Penrose para caracterizar los modos de polarización. El Capítulo 4 contiene el análisis detallado de las ecuaciones de propagación asociadas a las piezas lagrangianas seleccionadas, la identificación de las velocidades de propagación en el sector tensorial, destacando la aparición de velocidades no lumínicas y otras señales distintivas frente a la Relatividad General. Finalmente, el Capítulo 5 expone las conclusiones principales del estudio, discutiendo sus implicaciones fenomenológicas para futuras observaciones de ondas gravitacionales y señalando las posibles extensiones del trabajo en contextos astrofísicos y cosmológicos.

⁴¹ Misner, Thorne y Wheeler 1973

1. Teoría generalizada de Proca

La teoría de RG constituye un marco teórico para la descripción de los fenómenos gravitacionales y cosmológicos, la cual ha sido confirmada mediante múltiples pruebas experimentales y observacionales en diversos regímenes ⁴². Entre estas validaciones se incluyen los ensayos de precisión en el sistema solar, la medición del corrimiento gravitacional al rojo, el efecto de lentes gravitacionales y, más recientemente, la detección directa de OG mediante interferometría láser terrestre.

La detección directa de OG ha permitido someter a prueba teorías gravitacionales en el régimen de campos fuertes. La próxima generación de detectores, como Cosmic Explorer y Einstein Telescope, se proyecta con una relación señal-ruido (SNR) al menos 50 veces superior a la alcanzada por los interferómetros actuales, lo que incrementará la capacidad de caracterizar señales y explorar posibles desviaciones respecto a GR ⁴³.

A escalas cosmológicas, una de las evidencias más relevantes proviene de la observación de la expansión acelerada del universo ⁴⁴, entre otras explicaciones⁴⁵. Este fenómeno puede interpretarse como el efecto de una componente de energía oscura o como resultado de modificaciones a RG en escalas de gran longitud⁴⁶. En

⁴² Clifford M Will: *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge university press, 2018

⁴³ Varun Sahni y Alexei A. Starobinsky: *The Case for a positive cosmological Lambda term*. En: *Int. J. Mod. Phys. D* 9 (2000), págs. 373-444. DOI: 10.1142/S0218271800000542. arXiv: astro-ph/9904398; Abbott et al. 2017b

⁴⁴ Adam G Riess et al.: *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. En: *Astron. J* 116.3 (1998), págs. 1009-1038

⁴⁵ Sahni y Starobinsky 2000; T. Padmanabhan: *Cosmological constant: The Weight of the vacuum*. En: *Phys. Rept.* 380 (2003), págs. 235-320. DOI: 10.1016/S0370-1573(03)00120-0. arXiv: hep-th/0212290

⁴⁶ Austin Joyce, Lucas Lombriser y Fabian Schmidt: *Dark Energy Versus Modified Gravity*. En: *Ann.*

este contexto, el contraste de RG mediante observaciones cosmológicas y de OG constituye una herramienta para favorecer o desfavorecer su validez como teoría de gravedad modificada.

Bajo la hipótesis del principio cosmológico y la validez de RG, el modelo Λ CDM adopta como fondo cosmológico la métrica de LemaîtreRobertsonWalker (FLRW) para describir el universo a gran escala⁴⁷, ya que se ajusta a la mayoría de datos observacionales y constituye el paradigma estándar en cosmología⁴⁸. Sin embargo, este modelo implica que la materia bariónica representa menos del 5% del contenido total del universo, mientras que el resto corresponde a materia oscura y energía oscura, cuya naturaleza física permanece desconocida⁴⁹.

La detección directa de la materia oscura y la energía oscura no se ha logrado hasta la fecha, y su existencia se infiere exclusivamente a partir de sus efectos gravitacionales⁵⁰. Adicionalmente, el modelo Λ CDM presenta desafíos teóricos y observacionales, como el problema del ajuste fino, la coincidencia cosmológica y discrepancias entre observaciones del universo temprano y tardío⁵¹. En respuesta a estas limita-

Rev. Nucl. Part. Sci. 66 (2016), págs. 95-122. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102115-044553. arXiv: 1601.06133 [astro-ph.CO]

⁴⁷ Steven Weinberg: *Cosmology*. Oxford University Press, 2008

⁴⁸ N. Aghanim et al.: *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. En: *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO]

⁴⁹ Gianfranco Bertone y Tim M.P. Tait: *A new era in the search for dark matter*. En: *Nature* 562 (2018), págs. 51-56. DOI: 10.1038/s41586-018-0542-z

⁵⁰ Joshua A. Frieman, Michael S. Turner y Dragan Huterer: *Dark energy and the accelerating universe*. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 46 (2008), págs. 385-432. DOI: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243; Gianfranco Bertone, Dan Hooper y Joseph Silk: *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*. En: *Phys. Rept.* 405 (2005), págs. 279-390. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031. arXiv: hep-ph/0404175

⁵¹ Philip Bull et al.: *Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead*. En: *Phys. Dark Univ.* 12 (2016), págs. 56-99. DOI: 10.1016/j.dark.2016.02.001. arXiv: 1512.05356 [astro-ph.CO]; Riess et al. 1998

ciones, se han propuesto diversas teorías modificadas de la gravedad que amplían el sector gravitacional mediante la inclusión de términos adicionales en la acción⁵². Estas extensiones pueden incorporar campos escalares, vectoriales o tensoriales, los cuales introducen grados de libertad adicionales que modifican la dinámica gravitacional y, potencialmente, ofrecen explicaciones alternativas a los fenómenos atribuidos a la energía y la materia oscuras.

Una de las estrategias para formular teorías de gravedad modificada consiste en preservar la naturaleza métrica de la descripción gravitacional, pues la mantiene como variable fundamental que define la geometría del espaciotiempo y determina las trayectorias de partículas y campos a través del principio de acción estacionaria. Bajo este enfoque, las modificaciones se implementan mediante la adición de términos en la acción que introducen grados de libertad adicionales o acoplamientos no presentes en la Relatividad General, con el propósito de modificar la dinámica gravitacional en distintos regímenes y proporcionar marcos alternativos para describir fenómenos atribuidos a la energía oscura, la materia oscura y las discrepancias observacionales en cosmología.

1.1. Teorías métricas de la gravedad

Una teoría métrica de la gravedad es un marco en el que la interacción gravitacional con los campos no gravitacionales está determinada por una métrica, $g_{\mu\nu}$, definida sobre una variedad diferencial cuadrídimensional⁵³. Las ecuaciones dinámicas se obtienen de una acción que depende de la métrica, y de su curvatura, las cuales

⁵² S. Nojiri, S. D. Odintsov y V. K. Oikonomou: *Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution*. En: *Phys. Rept.* 692 (2017), págs. 1-104. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.06.001. arXiv: 1705.11098 [gr-qc]; Oliver Pitt y Timothy Clifton: *Constraining the Cosmological Evolution of Post-Newtonian Parameters with Gravitational Wave Signals from Compact Binary Inspirals*. En: *arXiv preprint arXiv:2510.08756* (2025)

⁵³ Will 2018

pueden también incluir campos gravitacionales adicionales ⁵⁴.

Algunos ejemplos representativos corresponden a la Relatividad General y extensiones como la teoría de Horndeski y sus generalizaciones, las cuales introducen grados de libertad adicionales. Estos pueden ser de tipo escalar, vectorial o tensorial, y su incorporación obedece a motivaciones teóricas y observacionales, como la resolución de tensiones cosmológicas o la descripción de fenómenos astrofísicos sin depender exclusivamente de materia o energía oscuras ⁵⁵.

Las teorías métricas de gravedad se distinguen de otros enfoques en que mantienen a la métrica, $g_{\mu\nu}$, como objeto central que determina la geometría del espaciotiempo, a diferencia de la gravedad afín, o métrico-afín, donde la conexión es independiente de la métrica ⁵⁶. Por otro lado, en las teorías teleparalelas, el campo gravitacional se describe mediante torsión en lugar de curvatura, aunque permanezcan en el contexto de una geometría basada en tetradas⁵⁷. Estos enfoques alternativos se comparan y contrastan desde las perspectivas del principio de equivalencia de Einstein, la covarianza general y las restricciones impuestas por pruebas post-newtonianas y observaciones de ondas gravitacionales. Algunos casos particulares de teorías métricas se abordan en la siguiente sección.

⁵⁴ Tsutomu Kobayashi: *Horndeski theory and beyond: a review*. En: *Rept. Prog. Phys.* 82.8 (2019), pág. 086901. DOI: 10.1088/1361-6633/ab2429. arXiv: 1901.07183 [gr-qc]

⁵⁵ Astrid Eichhorn: *Curvaturization in metric scalar-tensor theories: spontaneous scalarization of Kerr black holes*. En: *Phys. Rev. D* 111.10 (2025), pág. 104007. DOI: 10.1103/PhysRevD.111.104007

⁵⁶ Thomas P. Sotiriou y Stefano Liberati: *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*. En: *Annals of Physics* 322.4 (abr. de 2007), págs. 935966. DOI: 10.1016/j.aop.2006.06.002; Salvatore Capozziello, Vittorio De Falco y Carmen Ferrara: *Comparing equivalent gravities: common features and differences*. En: *Eur. Phys. J. C* 82.10 (2022), pág. 865. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10823-x. arXiv: 2208.03011 [gr-qc]

⁵⁷ H. I. Arcos y J. G. Pereira: *Torsion Gravity: a Reappraisal*. En: *Int. J. Mod. Phys. D* (2005); Capozziello, De Falco y Ferrara 2022

1.1.1. Teoría de Brans–Dicke La teoría de Brans–Dicke (BD), introducida en 1961 como una extensión de la RG, incorpora un campo escalar dinámico ϕ adicional al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como campos de la interacción gravitacional⁵⁸. Esta propuesta, inspirada en ideas previas de Fierz y Jordan, responde a la motivación de permitir que la constante gravitacional efectiva pueda variar espacial y temporalmente, en concordancia con hipótesis como la de Dirac sobre los números grandes⁵⁹
60.

La teoría se caracteriza por un único parámetro adimensional ω_{BD} , constante, que controla la intensidad del acoplamiento entre el campo escalar y la geometría. El límite $\omega_{BD} \rightarrow \infty$ recupera la RG, lo que explica que valores experimentales altos de ω_{BD} , tal que hacen a la teoría prácticamente indistinguible de esta. Generalizaciones posteriores permiten una función de acoplamiento $\omega(\phi)$ y un potencial $U(\phi)$, lo que amplía el rango fenomenológico e introduce comportamientos diferentes en regímenes de campo fuerte o en escalas cosmológicas.

La acción puede escribirse como:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \Psi_m], \quad (1)$$

donde R es el escalar de Ricci de $g_{\mu\nu}$, y S_m es la acción de la materia, que acopla mínimamente a la métrica. En el caso Brans–Dicke original, $\omega(\phi) = \omega_{BD}$ y $U(\phi) = 0$.

⁵⁸ Will 2018

⁵⁹ Dirac formuló la Hipótesis de los Números Grandes (LNH, por Large Number Hypothesis), según la cual estas coincidencias no serían casuales, sino que reflejarían una relación física profunda. En particular, propuso que algunas constantes fundamentales, como G , podrían no ser realmente constantes, sino variar con la edad del universo de forma que estas relaciones adimensionales se mantengan aproximadamente constantes en el tiempo.

⁶⁰ Hubert Goenner: *Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories*. En: *Gen. Rel. Grav.* 44 (2012), págs. 2077-2097. DOI: 10.1007/s10714-012-1378-8. arXiv: 1204.3455 [gr-qc]

1.1.2. Otras teorías métricas de la gravedad Dentro de la clasificación de las teorías de gravedad modificada, la teoría de Brans-Dicke pertenece al subgrupo de teorías métricas escalar-tensoriales con un único campo escalar acoplado no mínimamente a la curvatura, constituyendo un caso particular de las teorías de Horndeski⁶¹. Su carácter métrico garantiza la validez del Principio de Equivalencia de Einstein, en el sentido de que los campos de materia se acoplan mínimamente a la métrica y las partículas de prueba se desplazan a lo largo de geodésicas definidas por la conexión de Levi-Civita asociada a $g_{\mu\nu}$.

Dentro del marco de las teorías métricas de gravedad modificada, además de las formulaciones escalar-tensor, se han desarrollado extensiones vector-tensor que introducen campos de tipo Proca. La teoría generalizada de Proca $U(1)$ constituye la extensión abeliana de este esquema, en la que un único campo vectorial, A_μ , posee interacciones construidas de forma que las ecuaciones de movimiento permanezcan de segundo orden, evitando inestabilidades asociadas a modos fantasma de Ostrogradski⁶². En este contexto, el campo vectorial propaga tres grados de libertad físicos, dos modos transversales y uno longitudinal, lo que permite explorar escenarios cosmológicos alternativos, incluyendo modelos de inflación, energía oscura dinámica y la posible existencia de modos adicionales de polarización de ondas gravitacionales⁶³.

⁶¹ Gregory W. Horndeski y Alessandra Silvestri: *50 Years of Horndeski Gravity: Past, Present and Future*. En: *Int. J. Theor. Phys.* 63.2 (2024), pág. 38. DOI: 10.1007/s10773-024-05558-2. arXiv: 2402.07538 [gr-qc]; Kobayashi 2019; Shinji Tsujikawa: *The effective field theory of inflation/dark energy and the Horndeski theory*. En: *Lect. Notes Phys.* 892 (2015). Ed. por Eleftherios Papanonopoulos, págs. 97-136. DOI: 10.1007/978-3-319-10070-8_4. arXiv: 1404.2684 [gr-qc]

⁶² Heisenberg 2014; Gianmassimo Tasinato: *Cosmic acceleration from Abelian symmetry breaking*. En: *J. High Energ. Phys.* 2014.04 (2014), pág. 67. DOI: 10.1007/JHEP04(2014)067

⁶³ Jose Beltrán Jiménez y Antonio L. Maroto: *Cosmology with vectortensor theories*. En: *Phys. Rev. D* 78.6 (2013), pág. 063005. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.063005; Antonio De Felice et al.: *Cosmology in generalized Proca theories*. En: *JCAP* 06 (2016), pág. 048. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/06/048. arXiv: 1603.05806 [gr-qc]

Una generalización de este marco es la teoría generalizada de Proca $SU(2)$, que introduce tres de campos vectoriales no abelianos B_μ^a . Esto aumenta el número modos radiativos con excitaciones escalares, vectoriales y tensoriales, y que ha demostrado ser un escenario consistente para investigar tanto el régimen cosmológico temprano como el de ondas gravitacionales en fondos homogéneos e isótropos ⁶⁴.

1.2. Teoría Generalizada de Proca $SU(2)$

La teoría generalizada de Proca $SU(2)$, GSU2P, es un modelo de gravedad modificada de tipo vector-tensor, cuya formulación incorpora un triplete de campos vectoriales B_μ^a ($a = 1, 2, 3$) no abelianos. La acción es invariante bajo difeomorfismos y bajo transformaciones globales del grupo $SU(2)$ que actúan sobre el índice interno a . Este marco teórico fue inicialmente desarrollado por E. Allys, P. Peter y Y. Rodríguez ⁶⁵, y posteriormente extendido por L. Heisenberg y J. Beltrán Jiménez en el contexto de campos multi-Proca generalizados ⁶⁶. En un análisis posterior se identificó que la formulación original presentaba una omisión importante: la ausencia de una restricción secundaria necesaria para garantizar que cada uno de los tres campos vectoriales propagara únicamente tres grados de libertad físicos ⁶⁷. Esta observación condujo a una reformulación completa de la teoría, cuya versión final y consistente fue presentada en ⁶⁸.

⁶⁴ Erwan Allys, Patrick Peter y Yeinzon Rodriguez: *Generalized Proca action for an Abelian vector field*. En: *JCAP* 02 (2016), pág. 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/02/004. arXiv: 1511.03101 [hep-th]; Jose Beltrán Jiménez y Lavinia Heisenberg: *Generalized multi-Proca fields*. En: *Phys. Lett. B* 770 (2017), págs. 16-26. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.03.002. arXiv: 1610.08960 [hep-th]; Juan C. Garnica et al.: *Constant-Roll Inflation in the Generalized $SU(2)$ Proca Theory*. En: *Annalen Phys.* 534.2 (2022), pág. 2100453. DOI: 10.1002/andp.202100453. arXiv: 2109.10154 [gr-qc]

⁶⁵ Allys, Peter y Rodriguez 2016

⁶⁶ Beltrán Jiménez y Heisenberg 2017

⁶⁷ Verónica Errasti Díez et al.: *Maxwell-Proca theory: Definition and construction*. En: *Phys. Rev. D* 101.4 (2020), pág. 045009. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.045009. arXiv: 1905.06968 [hep-th]

⁶⁸ Garnica et al. 2022

En el ámbito cosmológico, se ha demostrado que la teoría GSU2P puede sostener un periodo de inflación primordial, mediante una adecuada elección de sus parámetros libres que hace coincidir formalmente las perturbaciones tensoriales con las de la Relatividad General, lo que garantiza la propagación lumínica de las ondas gravitacionales⁶⁹. Más allá de este resultado, la teoría GSU2P predice modos de polarización adicionales y posibles mezclas entre perturbaciones tensoriales, vectoriales y escalares, lo que abre la posibilidad de identificar desviaciones observacionales en futuras detecciones de ondas gravitacionales⁷⁰. La triada de campos vectoriales permite, además, construir configuraciones homogéneas e isotrópicas en fondos FLRW, lo que habilita su uso en el estudio de la inflación y la energía oscura dinámica⁷¹.

La acción que describe la teoría GSU2P es:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} - 2\mu^2 B_{\mu a} B^{\mu a} + \sum_{i=1}^6 \alpha_i \mathcal{L}_4^i + \sum_{i=1}^7 \chi_i \mathcal{L}_2^i + \sum_{k=1}^4 \delta_i \mathcal{L}_{4,p}^i \right); \quad (2)$$

donde el primer término corresponde al lagrangiano de Einstein-Hilbert; el segundo al lagrangiano de Yang-Mills, siendo

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + \tilde{g} \varepsilon_{abc} B_\mu^b B_\nu^c.$$

El tercer término corresponde al lagrangiano de masa, donde μ corresponde a $\mu \equiv m_a \hbar$, donde m_a es la masa de cada uno de los campos B_μ^a ; el término ε_{abc} ,

⁶⁹ Garnica et al. 2022

⁷⁰ Gabriel Gómez y José F. Rodríguez: *New non-Abelian Reissner-Nordström black hole solutions in the generalized SU(2) Proca theory and some astrophysical implications*. En: *Phys. Rev. D* 108.2 (2023), pág. 024069. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.024069. arXiv: 2301.05222 [gr-qc]

⁷¹ Garnica et al. 2022

son los coeficientes de estructura del grupo SU(2) y \tilde{g} es la constante de gauge o constante de acoplamiento de los campos vectoriales.

En teorías métricas de la gravedad, como en este caso, el acoplamiento mínimo corresponde a la inclusión de campos adicionales en la acción únicamente mediante la métrica $g_{\mu\nu}$, el elemento de volumen $\sqrt{-g}$ y las derivadas covariantes definidas por la conexión de Levi-Civita, sin interacción directa con contracciones con el tensor de curvatura. Por el contrario, el acoplamiento no mínimo introduce términos en el lagrangiano donde los campos se combinan explícitamente con objetos geométricos del espaciotiempo, como el escalar de curvatura o el tensor de Ricci.

Las piezas lagrangianas, \mathcal{L}_4^i , son:

$$\mathcal{L}_4^1 = -B_\rho^b B_b^\rho S_\nu^{a\mu} S_{a\mu}^\nu - 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\nu^{a\mu} S_\mu^{b\nu} + B_\rho^b B_b^\rho S_\mu^{a\mu} S_{a\nu}^\nu + 2B_{\rho b} B_a^\rho S_\mu^{a\mu} S_\nu^{b\nu}, \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_4^2 = -B_b^\nu B_a^\sigma A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{b\mu} + B_a^\nu B_b^\sigma A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{b\mu} + B_a^\mu B_b^\nu A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{b\sigma}, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_4^3 = \frac{3}{4} B_{\rho a} B^{\rho a} B_{\sigma b} B^{\sigma b} R + B_{\alpha a} B^{\mu a} B^{\rho b} B_b^\sigma R^\alpha_{\sigma\rho\mu}, \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_4^4 = B_\rho^b B_b^\rho B_{\sigma a} B^{\sigma a} R + 2 B_{\rho b} B_a^\rho B_\sigma^b B^{\sigma a} R, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_4^5 = B^{\mu a} B_a^\nu B_{\rho b} B^{\rho b} G_{\mu\nu}, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_4^6 = B^{\mu a} B^{\nu b} B_{\rho b} B_a^\rho G_{\mu\nu}; \quad (8)$$

donde $G_{\mu\nu}$ corresponde al tensor de Einstein;

$$S_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a + \nabla_\nu B_\mu^a, \quad (9)$$

al tensor simétrico, y

$$A_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a - \nabla_\nu B_\mu^a, \quad (10)$$

al antisimétrico.

Las piezas lagrangianas, \mathcal{L}_{4p}^i , que poseen acople mínimo son :

$$\mathcal{L}_2^1 = B_\mu^a B_a^\mu B_\nu^b B_b^\nu, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}_2^2 = B_\mu^a B_b^\mu B_\nu^b B_a^\nu, \quad (12)$$

$$\mathcal{L}_2^3 = B_\mu^b B_{\rho b} A^{\mu\nu a} A_{a\nu}^\rho, \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_2^4 = B_\mu^b B_{\rho a} A^{\mu\nu a} A_{b\nu}^\rho, \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_2^5 = B_{\mu a} B_\rho^b A^{\mu\nu a} A_{b\nu}^\rho, \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_2^6 = B_\rho^b B_b^\rho A_{\mu\nu a} A^{\mu\nu a}, \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_2^7 = B_\rho^b B_a^\rho A_{\mu\nu b} A^{\mu\nu a} \quad (17)$$

y, las piezas que violan paridad; es decir, no son invariantes ante transformaciones del tipo $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$, son:

$$\mathcal{L}_{4,p}^1 = B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{b\mu} - B_{\beta b} B^{\rho a} \tilde{A}_a^{\alpha\beta} S_{\rho\alpha}^b + B_\alpha^a B_\beta^b \tilde{A}_a^{\alpha\beta} S_{b\rho}^\rho, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_{4,p}^2 = -2 B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} G_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} + B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} S_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\nu b}, \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_{4,p}^3 = B_\alpha^a B_\beta^b B_{\tau b} B_a^\tau \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta}, \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_{4,p}^4 = B_\alpha^a B_{\beta a} B_{\tau b} B^\tau{}^b \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta} R^\alpha{}_{\sigma\mu\rho}. \quad (21)$$

donde $\epsilon^{\mu\rho\sigma\beta}$ corresponde al tensor de Levi Civita y

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\rho\sigma} A_{\rho\sigma a},$$

al dual de Hodge del tensor A .

La teoría GSU2P proporciona un marco vectortensor con ecuaciones de movimiento de segundo orden. Asimismo, En GSU2P la simetría global SU2 permite que la configuración de triada cósmica emerja de modo natural. Esto da cabida al conteo

de grados de libertad radiativos y no radiativos en el régimen linealizado ⁷².

En el dominio astrofísico de campo gravitacional fuerte, se han estudiado soluciones compactas y sus firmas observacionales. Para agujeros negros estáticos y esféricos, los términos vectoriales no abelianos efectivos modifican el potencial geodésico y, por ende, la ubicación de la esfera de fotones y el tamaño aparente de la sombra; estas dependencias inducen mapas directos entre observables (sombra, curvatura de trayectorias de fotones) y combinaciones de acoplamientos del lagrangiano, que pueden contrastarse con medidas del Event Horizon Telescope ⁷³. En estrellas de neutrones, la presencia del triplete vectorial altera la estructura de equilibrio y las secuencias masaradio para ecuaciones de estado nucleares realistas, con implicaciones sobre compacidad y deformabilidad de marea que pueden confrontarse con inferencias de NICER y con catálogos de ondas gravitacionales de sistemas binarios de estrellas de neutrones.

⁷² Jhan N. Martinez et al.: *Neutron stars in the generalized SU(2) Proca theory*. En: *Phys. Rev. D* 110.10 (2024), pág. 104070. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.104070. arXiv: 2408.07674 [gr-qc]

⁷³ Gabriel Gomez y Jose F. Rodriguez: *Internal symmetry to the rescue: well-posed 1 + 1 evolution of self-interacting vector fields*. En: *Eur. Phys. J. C* 85.8 (2025), pág. 921. DOI: 10.1140/epjc/s10052-025-14657-1. arXiv: 2503.09757 [gr-qc]

2. Radiación Gravitacional

En Relatividad General, las ecuaciones de campo establecen la relación entre la geometría del espaciotiempo y el contenido de energía–momento. El estudio de ondas gravitacionales débiles se realiza al representar la métrica como la suma de un fondo $g_{\mu\nu}^{(B)}$ y una perturbación $h_{\mu\nu}$ de amplitud pequeña ⁷⁴. El fondo $g_{\mu\nu}^{(B)}$ corresponde a una solución exacta de las ecuaciones de Einstein sin radiación gravitacional, pudiendo ser un espaciotiempo plano de Minkowski o un espaciotiempo curvo como una métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) o un agujero negro de Schwarzschild/Kerr ⁷⁵, entre otros. En este marco, la perturbación $h_{\mu\nu}$ satisface ecuaciones de onda linealizadas sobre la geometría de $g_{\mu\nu}^{(B)}$ ⁷⁶.

En el vacío, las OG son soluciones tensoriales transversales de la ecuación de onda linealizada sobre el fondo, con dos modos de polarización independientes (+, ×) que, en RG, se propagan a la velocidad de la luz ⁷⁷. En el límite de la aproximación Eikonal, la fase de estas ondas satisface la ecuación de eikonal $l^\mu l_\mu = 0$, tratada en la siguiente sección, donde l^μ es el vector tangente a las geodésicas nulas del fondo, y los vectores de polarización se transportan paralelamente ⁷⁸. La observación GW170817–GRB170817A estableció la restricción $|v_g - c|/c \lesssim 10^{-15}$ ⁷⁹.

⁷⁴ Misner, Thorne y Wheeler 1973

⁷⁵ R. M. Wald: *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984

⁷⁶ R. A. Isaacson: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics*. En: *Phys. Rev.* 166 (1968), pág. 1263

⁷⁷ Michele Maggiore: *Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018

⁷⁸ Will 2018

⁷⁹ Abbott et al. 2017b

El Principio de Equivalencia de Einstein (EEP) establece que, en regiones locales del espaciotiempo donde los gradientes gravitacionales son despreciables, las leyes de la física no gravitacional son indistinguibles de las de un sistema inercial en ausencia de gravedad. Se compone de tres postulados: la universalidad de la caída libre (UFF), la invariancia local de Lorentz (LLI) y la invariancia local de posición (LPI). En conjunto, garantizan que los efectos gravitacionales puedan eliminarse localmente mediante un sistema de referencia apropiado, fundamento de las teorías métricas de la gravedad. El EEP también implica que los campos no gravitacionales sin masa en reposo se propaguen a la velocidad de la luz, aunque no fija la velocidad de las ondas gravitacionales, la cual depende de las ecuaciones de campo de cada teoría métrica.

2.1. Formulación linealizada de la gravedad

En Relatividad General, es sabido que las ecuaciones de campo de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (22)$$

poseen invarianza ante difeomorfismos⁸⁰, i.e., son invariantes ante el grupo de todas las posibles transformaciones del coordenadas,

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x), \quad (23)$$

donde $x'^\mu(x)$, es invertible, diferenciable al igual que su inversa. Con ello, la métrica se transforma como sigue:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x). \quad (24)$$

En particular, en la Relatividad General, si se considera una onda gravitacional ca-

⁸⁰ Misner, Thorne y Wheeler 1973

racterizada por una perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ sobre un fondo $g_{\mu\nu}^{(B)}$, y se asume que la longitud de onda corta, la velocidad de propagación resultante coincide con la de la luz, $c = 1$, en unidades geométricas. Por débil se entiende que

$$\frac{|h_{\mu\nu}|}{|g_{\mu\nu}^{(B)}|} \ll 1, \quad (25)$$

tal que las contribuciones cuadráticas o de orden superior en $h_{\mu\nu}$ puedan ignorarse en un tratamiento perturbativo. Por longitud de onda corta se entiende que λ , la longitud de onda, sea mucho menor que el radio de curvatura \mathcal{R} del espacio-tiempo de fondo,

$$\left| \frac{\lambda}{\mathcal{R}} \right| \ll 1. \quad (26)$$

Así, la variación de la curvatura a lo largo de cada ciclo de la onda es despreciable.

2.2. Radiación gravitacional en espaciotiempo plano

Cuando se considera el fondo de Minkowski, entonces:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (27)$$

a primer orden de $h_{\mu\nu}$, implica que únicamente se están considerando sistemas de referencia en donde (27) es válida en regiones suficientemente alejadas de la fuente. Elegir un sistema de referencia privilegiado rompe la simetría bajo transformaciones generales de coordenadas en ec. (23). Sin embargo, existe una simetría que aún se mantiene, la invarianza ante transformaciones de gauge:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x). \quad (28)$$

Si $|\partial_\mu \xi_\nu|$ son como máximo del mismo orden de pequeñez que $|h_{\mu\nu}|$, la condición $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ se conserva y, por lo tanto, estos difeomorfismos que varían infinitesimalmente son una simetría de la teoría linealizada.

Adicionalmente, dado que el fondo se considera plano, son aplicables las transformaciones de Lorentz globales

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu; \quad (29)$$

las cuales determinan la transformación covariante de la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ y preservan su carácter tensorial. Esto garantiza que las cantidades físicas, obtenidas a partir de objetos geométricos construidos con $h_{\mu\nu}$, permanezcan invariantes bajo cambios de observador inercial. En efecto, la métrica perturbada transforma según

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma g_{\rho\sigma}(x) = \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}(x), \quad (30)$$

de donde se deduce que

$$h'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma h_{\rho\sigma}(x), \quad (31)$$

confirmando que $h_{\mu\nu}$ transforma como un tensor bajo el grupo de Lorentz. Las rotaciones no afectan la condición perturbativa $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, mientras que los boosts deben restringirse para mantener este límite.

Una vez caracterizada la transformación de $h_{\mu\nu}$ bajo el grupo de Lorentz, es posible los objetos geométricos construidos a partir de la perturbación, en particular el tensor de Riemann linealizado. Al expandirlo a primer orden en la perturbación se obtiene:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}), \quad (32)$$

expresión que es invariante bajo transformaciones de gauge infinitesimales. Este tensor es imprescindible para la descripción de los efectos físicos de las ondas gravitacionales, como la aceleración relativa de partículas de prueba. Así pues, del tensor de Riemann se obtienen las ecuaciones de campo; sin embargo, para escribirlas de manera compacta, se define la métrica transversa como

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (33)$$

siendo $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. De modo que la perturbación, $h_{\mu\nu}$, adopta la forma

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \quad (34)$$

A partir de las ecuaciones (32) y (34), se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein linealizadas:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = 0, \quad (35)$$

en regiones fuera de la fuente. No obstante, esta ecuación se puede simplificar más al aplicar el gauge de Lorentz, como se verá en la siguiente subsección.

2.2.1. Fijación del Gauge Si además de la invariancia de Lorentz, el régimen linealizado posee libertad de gauge adicional derivada de la invariancia bajo difeomorfismos infinitesimales como se muestra en la ecuación (28). Bajo esta transformación, la perturbación cambia como

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu; \quad (36)$$

libertad que refleja distintas representaciones de $h_{\mu\nu}$, las cuales describen el mismo fenómeno físico, por lo que resulta necesario imponer una condición de gauge para simplificar las ecuaciones de campo linealizadas en ec.(35). La condición de gauge de Lorentz,

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (37)$$

es especialmente conveniente, pues diagonaliza la parte principal del operador de Einstein linealizado y conduce a ecuaciones tipo onda. No obstante, esta condición no fija completamente el gauge: si bajo un difeomorfismo infinitesimal la función

generadora ξ_μ satisface

$$\square \xi_\mu = 0; \quad (38)$$

de modo que la condición de Lorentz permanece invariante. Por tanto, incluso después de imponer dicho gauge persiste una libertad residual que puede explotarse para simplificar aún más la forma de las perturbaciones.

Consecuentemente, estas consideraciones pueden retomarse en Relatividad General en las ecuaciones linealizadas de Einstein en el vacío

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (39)$$

utilizadas para describir tanto la propagación de ondas gravitacionales como su interacción con partículas de prueba. Dado que el operador de D'Alembert satisface $\square = -c^{-2}\partial_0^2 + \nabla^2$, implica que en esta teoría las ondas viajan necesariamente a la velocidad de la luz, c . Sin embargo, cabe resaltar que la condición en ec.(37) no fija completamente el gauge, puesto que si se aplica en

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu),$$

adopta la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho), \quad (40)$$

o también

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu. \quad (41)$$

Si $\square \xi_\mu = 0$, entonces también se cumple $\square \xi_{\mu\nu} = 0$, donde

$$\xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho.$$

Dado que el espaciotiempo es plano, el operador d'Alembertiano, \square , conmuta con

las derivadas parciales ∂_μ . Por lo tanto, la ecuación (41) muestra que si $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de onda $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, entonces la transformación de gauge preserva esta condición siempre que ξ_μ también satisfaga $\square\xi_\mu = 0$.

En consecuencia, a partir de las seis componentes independientes de $\bar{h}_{\mu\nu}$ que cumplen la ecuación de onda, es posible realizar una transformación de gauge que dependa de cuatro funciones arbitrarias independientes ξ_μ , las cuales obedecen la misma ecuación. Esto permite imponer cuatro condiciones adicionales sobre $\bar{h}_{\mu\nu}$, reduciendo así el número de grados de libertad físicos.

Condición para el gauge transversal sin traza Posteriormente, se elige ξ^0 tal que la traza $\bar{h} = 0$. De este modo, si $\bar{h} = 0$, entonces $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Las tres funciones $\xi^i(x)$ ahora se eligen de modo que $h^{0i}(x) = 0$. Dado que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, el gauge de Lorentz con $\mu = 0$ se obtiene $\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0$; de tal forma que si se fija $h_{0i} = 0$ entonces, $\partial^0 h_{00} = 0$, lo que hace que h_{00} sea constante en el tiempo. Este término independiente del tiempo h_{00} corresponde a la parte estática de la interacción gravitacional, es decir, al potencial newtoniano de la fuente que generó la onda gravitacional.

Así pues, se han establecido los cuatro componentes $h_{0\mu} = 0$ y solo quedan los componentes espaciales h_{ij} , para los cuales la condición de gauge de Lorentz, ec. (37), luego se establecen las condiciones

$$h^{0\mu} = 0, \quad h^i_i = 0, \quad \partial^j h_{ij} = 0, \quad (42)$$

lo que se define como el gauge transversal libre de traza, h_{ij}^{TT} . Nótese que tal condición no se puede elegir dentro de la fuente, ya que en este caso $\square\bar{h}_{\mu\nu} \neq 0$. Esto no representa inconveniente alguno para el presente análisis, puesto que la propagación de ondas gravitacionales ocurre en las afueras de la fuente. Una vez encontrada la forma de la ecuación de onda en espacio tiempo plano, en el gauge transversal sin

traza, se hace necesario conocer la forma explícita de las soluciones, t3pico abordado en la siguiente secci3n.

2.3. Radiaci3n gravitacional en espaciotiempo curvo

En la secci3n anterior se analiz3 la propagaci3n de ondas gravitacionales sobre un fondo plano, ec. (27), la cual permite distinguir de manera directa entre la geometr3a de fondo y la perturbaci3n, mediante la aproximaci3n de onda corta, como se muestra en las ecuaciones (25) y (26). An3logamente, cuando el espaciotiempo de fondo es curvo, la descomposici3n adopta la forma:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}. \quad (43)$$

La validez de esta separaci3n requiere una jerarqu3a de escalas bien definida entre la longitud de onda reducida λ , la escala caracter3stica de curvatura del fondo \mathcal{R} y la distancia radial r respecto a la fuente, como se muestra en la figura(1).

La propagaci3n puede organizarse al dividir el espacio en regiones determinadas por estas escalas. En la zona cercana, caracterizada por $r \lesssim \lambda$, los efectos de retardo son despreciables y el campo gravitacional se comporta cuasiest3ticamente. M3s all3 de esta regi3n se define la zona de radiaci3n, donde $\lambda \ll r$ y las perturbaciones adquieren comportamiento ondulatorio.

Dentro de la zona de radiaci3n puede distinguirse una regi3n local de propagaci3n, en la cual $r \ll \mathcal{R}$, de modo que la curvatura de fondo no altera de forma significativa la fase ni la amplitud de la onda. En esta subregi3n la propagaci3n es efectivamente equivalente al caso plano y puede emplearse el formalismo desarrollado previamente. Sin embargo, para distancias tales que $r \gtrsim \mathcal{R}$, la curvatura del fondo induce efectos acumulativos sobre la fase, incluyendo corrimientos gravitacionales y posibles contribuciones de retrodispersi3n geom3trica.

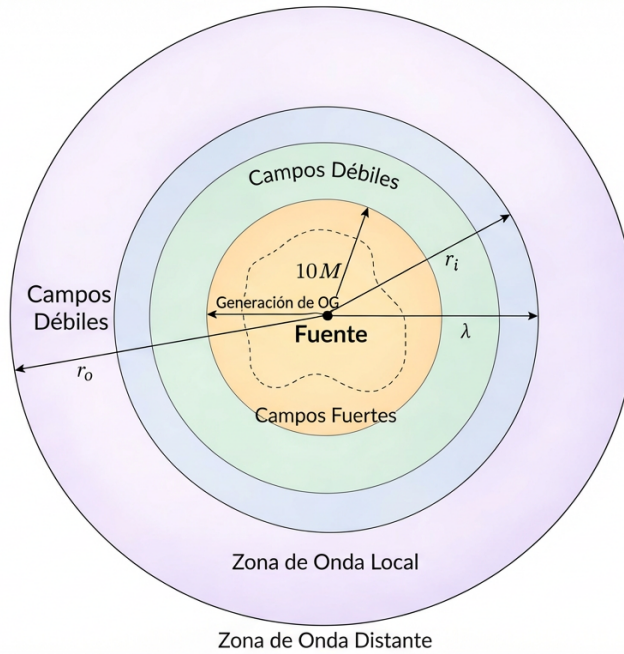


Figura 1. Representación gráfica de las zonas de generación y propagación de ondas gravitacionales, basado en S. J. Kovacs y K. S. Thorne: *The Generation of Gravitational Waves. 3. Derivation of Bremsstrahlung Formulas*. En: *Astrophys. J.* 217 (1977), págs. 252-280. DOI: 10.1086/155576.

Esta separación permite desacoplar conceptualmente el problema de generación de ondas gravitacionales⁸¹, controlado por la dinámica interna de la fuente, del problema de propagación, determinado por la geometría del fondo. En consecuencia, mientras que en el régimen plano la estructura ondulatoria se determina exclusivamente por la ecuación de propagación hiperbólica local, en un fondo curvo la evolución de fase y amplitud incorpora correcciones geométricas asociadas a la conexión y a los invariantes de curvatura del espaciotiempo.

Para encontrar las ecuaciones de propagación en espaciotiempo curvo, se parte de las ecuaciones de campo (22), reescritas en la forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right), \quad (44)$$

⁸¹ Maggiore 2008

expandida a segundo orden en $h_{\mu\nu}$ ⁸²:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(B)} + R_{\mu\nu}^{(1)}(h) + R_{\mu\nu}^{(2)}(h) + \mathcal{O}(h^3), \quad (45)$$

donde $R_{\mu\nu}^{(1)}$ es lineal en la perturbación y $R_{\mu\nu}^{(2)}$ contiene los términos cuadráticos responsables de la no linealidad gravitacional. Sustituyendo en las ecuaciones de campo (44) se obtiene

$$R_{\mu\nu}^{(B)} + R_{\mu\nu}^{(1)}(h) + R_{\mu\nu}^{(2)}(h) = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \mathcal{O}(h^3). \quad (46)$$

Para aislar las ecuaciones de propagación es necesario separar las contribuciones que varían en escalas distintas. Como se discutió anteriormente, el sistema está gobernado por dos escalas características: la longitud de onda reducida asociada a la perturbación y la escala de curvatura del fondo \mathcal{R} . Para formalizar esta separación se introduce una escala auxiliar \bar{l} tal que

$$\ll \bar{l} \ll \mathcal{R}, \quad (47)$$

la cual permite definir un operador de promedio espacial-temporal sobre volúmenes de tamaño \bar{l}^3 . Este procedimiento elimina las variaciones rápidas asociadas a $h_{\mu\nu}$, sin afectar las cantidades de gran escala.

Bajo este promedio, las perturbaciones lineales satisfacen:

$$\langle R_{\mu\nu}^{(1)}(h) \rangle = 0, \quad (48)$$

ya que son lineales en una cantidad que oscila en la escala \bar{l} . En cambio, los términos cuadráticos $R_{\mu\nu}^{(2)}$ contienen productos de perturbaciones que, al promediarse, generan contribuciones efectivas de gran escala. Como resultado, la parte lenta de las ecuaciones de campo queda determinada por

⁸² Maggiore 2008

$$R_{\mu\nu}^{(B)} + \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) \rangle = \frac{8\pi G}{c^4} \left\langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right\rangle. \quad (49)$$

La ecuación (49) muestra que la curvatura del fondo no depende únicamente del contenido material promedio, sino también del efecto no lineal de las propias perturbaciones gravitacionales. En ausencia de materia, la contribución efectiva proviene exclusivamente de los términos cuadráticos en $h_{\mu\nu}$, lo que implica que la propagación de ondas gravitacionales induce curvatura de fondo a segundo orden.

Por otra parte, la parte rápidamente oscilante de las ecuaciones de campo está gobernada por el término lineal $R_{\mu\nu}^{(1)}(h)$, cuya anulación determina las ecuaciones de propagación. En el régimen de alta frecuencia, esta ecuación adopta la forma de una ecuación hiperbólica sobre el fondo curvo, con correcciones geométricas controladas por la conexión asociada a $g_{\mu\nu}^{(B)}$.

Así pues, la parte de variación rápida asociada a las perturbaciones puede aislarse restando a cualquier magnitud su contribución promediada. Es decir, para una cantidad genérica F , la componente de corta escala se define como $F^{\text{short}} = F - \langle F \rangle$ ⁸³. Aplicando este procedimiento a las ecuaciones de Einstein expandida a segundo orden, la dinámica en la escala de la longitud de onda queda gobernada por

$$R_{\mu\nu}^{(1)}(h) + R_{\mu\nu}^{(2)}(h) - \langle R_{\mu\nu}^{(2)}(h) \rangle = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right]^{\text{short}}. \quad (50)$$

Esta expresión muestra que, más allá del orden lineal, la perturbación no satisface una ecuación puramente homogénea: los términos cuadráticos en $h_{\mu\nu}$ actúan como fuentes efectivas en la escala corta. En consecuencia, a segundo orden en la amplitud, las ondas gravitacionales no sólo contribuyen a la curvatura promedio del fondo, a través de $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$, sino que también interactúan consigo mismas, introduciendo correcciones no lineales en la ecuación de propagación. Este fenómeno de

⁸³ Michele Maggiore: *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. OUP Oxford, 2007

auto-interacción es una manifestación directa de la naturaleza no lineal de las ecuaciones de Einstein y no aparece en la aproximación estrictamente lineal sobre fondo plano.

Posteriormente, se consideran las ecuaciones de campo, ec.(50), en el vacío, donde el término de materia es despreciable y la dinámica está gobernada únicamente por la geometría. En este régimen, el análisis a orden lineal en la perturbación conduce a la ecuación

$$-2 R_{\mu\nu}^{(1)} = \nabla_\alpha \nabla^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}^{(B)} \nabla_\alpha \nabla_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} - 2 \nabla_{(\mu} \nabla_\alpha \bar{h}_{\nu)}{}^\alpha + 2 R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(B)} \bar{h}^{\alpha\beta} - 2 R_{\alpha(\mu}^{(B)} \bar{h}_{\nu)}{}^\alpha = 0 \quad (51)$$

donde las derivadas covariantes están definidas respecto a la métrica de fondo, B , y la perturbación con traza invertida $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(B)} h$. Esta expresión conserva invariancia bajo transformaciones de gauge infinitesimales y permite imponer el gauge de Lorentz generalizado

$$\nabla^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (52)$$

Bajo esta condición, la ecuación de campo (51) se simplifica a

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} + 2 R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(B)} \bar{h}^{\alpha\beta} = 0, \quad (53)$$

lo que constituye la generalización covariante de la ecuación de onda al caso de fondo curvo. La presencia explícita del tensor de Riemann del fondo evidencia que la propagación no depende únicamente de la estructura hiperbólica local, sino que incorpora acoplamientos directos con la curvatura.

No obstante, en la zona de onda local, caracterizada por $r \ll \mathcal{R}$ y ausencia de efectos de fondo acumulativos, el término de curvatura resulta subdominante, luego ec.(53) se reduce a la ec.(39), válido espaciotiempo plano. De este modo, la propa-

gación en fondo curvo coincide localmente con la del espacio plano, mientras que a escalas comparables con \mathcal{R} emergen correcciones geométricas que modifican la evolución de fase y amplitud de la perturbación. En la siguiente sección se obtienen las polarizaciones asociadas a estas ecuaciones de propagación, para posteriormente, ser abordadas en la aproximación eikonal.

2.4. Polarización de las Ondas Gravitacionales

En la sección anterior se evidenció que la estructura ondulatoria de las ecuaciones de campo en ec.(51) surge al imponer la condición de gauge de Lorenz (52). Esto conduce a preguntarse si dicha condición es la única responsable del carácter radiativo del sistema o si existen elecciones de coordenadas en las que tales ecuaciones no exhiban explícitamente esta forma de onda. Para ello, resulta conveniente analizar el tensor de Riemann, cuya invariancia bajo transformaciones de gauge permite identificar el contenido físico independiente de la elección de coordenadas. Supóngase una perturbación de la forma $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(z - V_g t)$ ⁸⁴, las componentes no nulas del tensor de Riemann linealizado pueden clasificarse de acuerdo con los modos de propagación de la onda, considerando únicamente la dirección de propagación z . La división de estas componentes puede ser catalogada como: totalmente transversales,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{zyzy} = \frac{1}{2}h''_{yy} \quad R_{zyyt} = -\frac{1}{2}V_g h''_{yy} \quad R_{ytyt} = \frac{1}{2}V_g^2 h''_{yy}, \\ R_{zyzx} = \frac{1}{2}h''_{yx} \quad R_{zyxt} = -\frac{1}{2}V_g h''_{yx} = R_{zxyt} \quad R_{tytx} = \frac{1}{2}V_g^2 h''_{xy}, \\ R_{zxzx} = \frac{1}{2}h''_{xx} \quad R_{zxxt} = -\frac{1}{2}V_g h''_{xx} \quad R_{xtxt} = \frac{1}{2}V_g^2 h''_{xx}; \end{array} \right. \quad (54)$$

⁸⁴ Arthur Stanley Eddington: *The propagation of gravitational waves*. En: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 102 (1922), págs. 268-282. DOI: 10.1098/rspa.1922.0085

componentes longitudinal-transversales,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{ztyt} = \frac{1}{2} V_g^2 h''_{zy} - \frac{1}{2} V_g h''_{yt} \quad R_{ztxt} = \frac{1}{2} V_g^2 h''_{zx} - \frac{1}{2} V_g h''_{tx}, \\ R_{zyzt} = \frac{1}{2} h'' - \frac{1}{2} V_g h''_{zy} \quad R_{zxzt} = \frac{1}{2} h''_{xt} - \frac{1}{2} V_g h''_{zx}; \end{array} \right. \quad (55)$$

y totalmente longitudinales

$$\left\{ R_{tztz} = \frac{1}{2} V_g^2 h''_{zz} - V_g h''_{zt} + \frac{1}{2} h''_{tt}, \right. \quad (56)$$

donde donde prima denota derivada con respecto a $z - V_g t$. De modo que sólo se tienen 6 componentes independientes. Así, se esperarían que las ondas gravitacionales tuvieran la misma cantidad de modos de polarización para un espaciotiempo, cuya conexión sea la de Levi-Civita, satisfagan o no, las ecuaciones de campo de Einstein⁸⁵.

Si al imponer que la métrica en la ec.(43) constituye una solución a las ecuaciones de Einstein, entonces, las componentes plausibles del tensor de Riemann que dan información sobre la polarización de las ondas gravitacionales se reducen a dos de tipo transversal-transversal (t-t) y sin traza:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - V_g^2) h_{xx} = 0, \\ (1 - V_g^2) h_{yy} = 0, \\ (1 - V_g^2) h_{xy} = 0, \\ h_{xx} + h_{yy} = 0. \end{array} \right. \quad (57)$$

⁸⁵ Will 2018

Esto permite inferir que la rapidez de propagación de las ondas gravitacionales, V_g , debería ser lumínica, así como también identificar que existen dos grados de libertad físicos, los demás pueden ser eliminados a través de la escogencia de un gauge en particular⁸⁶. En un fondo plano, la ecuación (39), tiene como solución ondas planas, de las cuales, si el gauge escogido corresponde al transversal sin traza, $h_{\mu\nu}^{TT}$, entonces, adoptan la forma:

$$h_{ij}^{TT}(x) = e_{ij}(\mathbf{k})e^{ikx}, \quad (58)$$

donde el vector de onda es $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ y satisface la relación de dispersión $\omega/c = |\mathbf{k}|$. El tensor $e_{ij}(\mathbf{k})$ se denomina tensor de polarización y contiene las polarizaciones de la onda gravitacional.

Para una onda plana individual con vector de onda fijo \mathbf{k} , o para una superposición de ondas con distintas frecuencias pero con una misma dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, se desprende de la ecuación (42) que las componentes no nulas de h_{ij}^{TT} se encuentran en el plano transversal a $\hat{\mathbf{n}}$. En efecto, para una onda plana la condición de transversalidad $\partial^j h_{ij} = 0$ se reduce a $n^i h_{ij} = 0$, lo que restringe la perturbación a direcciones ortogonales a la propagación. Dado que la dirección de propagación se eligió en la dirección z , la perturbación de la métrica se escribe como:

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad (59)$$

siendo h_+ y h_\times las dos polarizaciones tensoriales independientes de la onda gravitacional.

⁸⁶ Eddington 1922

2.4.1. Propagación de OG en la Aproximación Eikonal (WKB) A una distancia suficientemente lejos de la fuente, el espacio tiempo puede considerarse casi plano, luego la aproximación Eikonal es aplicable a la propagación de ondas gravitacionales, al igual que la óptica geométrica de las ondas electromagnéticas. Esta se cumple cuando la longitud de onda reducida⁸⁷, , es considerablemente más pequeña que otras longitudes consideradas en el fondo elegido. De modo que $L_B \gg$, donde L_B corresponde a la escala de variación de la métrica de fondo, y $L_c \gg$, siendo L_c la longitud característica sobre la cual la amplitud, polarización y longitud de onda varían; es decir, se busca que sea menor al radio de curvatura del frente de onda.

Bajo las condiciones de separación de escalas previamente establecidas, la aproximación eikonal se basa en buscar soluciones en las que la fase de la onda varía rápidamente, mientras que la amplitud lo hace de forma lenta. En particular, se supone que la fase $\theta(x)$ presenta variaciones en la escala de la longitud de onda λ , mientras que la amplitud depende únicamente de las escalas largas del problema, asociadas a la variación del fondo geométrico o a la evolución de la polarización, caracterizadas por L_B y L_c .

Así pues, el campo perturbativo que se propaga sobre el fondo, $\bar{h}_{\mu\nu}$ puede ser escrito como el producto de la amplitud expandida en series de Taylor y una fase θ que varía rápidamente⁸⁸:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = [A_{\mu\nu}(x) + \epsilon B_{\mu\nu}(x) + \dots] e^{i\theta(x)/\epsilon}, \quad (60)$$

donde ϵ corresponde a un parámetro que da cuenta del orden en cada término que depende de λ/L , siendo L el menor valor entre L_b y L_c , es decir, cualquier término

⁸⁷ Se define longitud de onda reducida como $\lambda/2\pi$. Esta debe cumplir la condición $\gg \mathcal{R}$, siendo \mathcal{R} el escalar de Ricci.

⁸⁸ Para un campo vectorial, la expansión eikonal es: $\bar{h}_\mu(x) = [A_\mu(x) + \epsilon B_\mu(x) + \dots] e^{i\theta(x)/\epsilon}$.

con un factor ϵ^n varía como $(/L)^n$.

Al reemplazar (60) en la condición del gauge de lorentz, $\nabla^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, se obtiene a orden dominante:

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0, \quad \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad (61)$$

Ahora, al reemplazar el ansatz (60) en $\nabla^\rho \nabla_\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0$, se encuentra a orden dominante:

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad (62)$$

en donde $k_\mu \equiv \partial_\mu \theta$. El término siguiente al orden dominante corresponde a:

$$2k_\mu A^\mu \nabla^\alpha + k_\mu \nabla^\mu A^\alpha = 0, \quad \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right). \quad (63)$$

Se define ahora el tensor de polarización:

$$e_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}/\mathcal{A}, \quad (64)$$

y la amplitud escalar como:

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2} A_{\mu\nu}^* A^{\mu\nu}\right)^{1/2}, \quad (65)$$

donde $A_{\mu\nu}^*$ denota el complejo conjugado de $A^{\mu\nu}$. El gauge de Lorentz (61) en términos del tensor de polarización se escribe de la forma:

$$e_{\mu\alpha} k^\alpha = 0. \quad (66)$$

Por consiguiente, a partir de (63), se obtienen las ecuaciones:

$$k^\mu \partial_\mu \mathcal{A} = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu k^\mu) \mathcal{A}, \quad (67)$$

$$\nabla_\alpha e_{\mu\nu} k^\alpha = 0.$$

Cabe resaltar que, en Relatividad General, la deflexión gravitacional que experimen-

taría una onda gravitacional al pasar por un objeto masivo, corresponde a la misma que experimentaría una electromagnética ⁸⁹q.

2.4.2. Descomposición por Helicidades Cuando el fondo es homogéneo e isótropo, como en el caso de FLRW, las simetrías espaciales imponen una estructura restrictiva sobre las ecuaciones de campo linealizadas. En particular, la invariancia bajo el grupo de rotaciones espaciales implica que las perturbaciones pueden clasificarse según cómo transforman bajo estas rotaciones. Como consecuencia, las ecuaciones perturbadas se desacoplan en sectores independientes: escalares, vectoriales y tensoriales, que no se mezclan entre sí al orden lineal. Esta propiedad permite estudiar cada sector de forma independiente y asociar a cada uno grados de libertad con helicidades bien definidas y velocidades de propagación propias. La descomposición en helicidades es conveniente para identificar los modos radiativos y no radiativos. Para ello, se comienza considerando perturbaciones alrededor del espacio plano,

En general, La descomposición de Helmholtz permite separar un campo en contribuciones con significado físico distinto. Cualquier campo vectorial puede escribirse como la suma de una parte longitudinal y una parte transversal,

$$\mathbf{V} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (68)$$

donde Φ es un campo escalar y \mathbf{A} es un potencial vectorial. Estas dos contribuciones se distinguen por sus propiedades diferenciales: la parte longitudinal tiene rotacional nulo,

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0, \quad (69)$$

mientras que la parte transversal es libre de divergencia,

⁸⁹ Misner, Thorne y Wheeler 1973

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (70)$$

Esta separación permite identificar qué componentes del campo están completamente determinadas por condiciones de ligadura, a través de ecuaciones tipo Poisson, y cuáles corresponden a grados de libertad dinámicos asociados a ecuaciones hiperbólicas de propagación.

El procedimiento puede extenderse, análogamente, a campos tensoriales espaciales simétricos de segundo orden. En ese caso, un tensor T_{ij} puede descomponerse en una combinación de términos construidos a partir de escalares, vectores transversales, además de un tensor transversal y sin traza:

$$T_{ij} = \delta_{ij}T^{(S)} + \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) T^{(L)} + \partial_i T_j^{(V)} + \partial_j T_i^{(V)} + T_{ij}^{(TT)}, \quad (71)$$

sujeto a las condiciones

$$\partial^i T_i^{(V)} = 0, \quad \partial^j T_{ij}^{(TT)} = 0, \quad \delta^{ij} T_{ij}^{(TT)} = 0. \quad (72)$$

Tal descomposición separa explícitamente las contribuciones escalares, vectoriales y tensoriales bajo rotaciones espaciales y permite clasificar las distintas helicidades del campo. Cuando el fondo es homogéneo e isótropo, esta estructura garantiza que las ecuaciones de campo linealizadas se desacoplen en sectores independientes, lo que posibilita identificar los grados de libertad radiativos y distinguirlos de las restricciones no dinámicas. En la siguiente sección se aplica la descomposición de Helmholtz a la perturbación de la métrica.

Identificación de los grados de libertad radiativos y no radiativos en gravitación

En teorías métricas de gravedad con campos adicionales, se ve directamente modificada la identificación de grados de libertad radiativos, puesto que los campos de fondo se mezclan con las perturbaciones de la métrica, dando lugar a nuevos términos; así como también, las perturbaciones extra tienen su propia evo-

lución acoplada a $h_{\mu\nu}$, lo que ocasiona que la descomposición en grados de libertad radiativos y no radiativos dependa del fondo de manera no covariante.

Cabe resaltar también que las nuevas interacciones pueden ser fuente de los grados no radiativos, incluso en el vacío Ezquiaga y Zumalacárregui 2020. Motivo por el cual se deben considerar tanto ligaduras como grados de libertad en las ecuaciones de propagación.

En una zona específica del espacio-tiempo, dentro del marco de la gravedad linealizada, es posible descomponer las diez perturbaciones métricas asociadas al espacio plano de la siguiente manera:

$$ds^2 = - (1 + 2\Phi)dt^2 + w_i (dtdx^i + dx^i dt) + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}) dx^i dx^j, \quad (73)$$

aquí, Φ representa un escalar con un grado de libertad, w_i corresponde a un vector con tres grados de libertad, s_{ij} es un tensor simétrico y sin traza con cinco grados de libertad, y Ψ es otro escalar con un grado de libertad; los índices i, j, k, \dots representan coordenadas espaciales. Tal como se mencionó previamente, ciertas perturbaciones no tienen significado físico y pueden ser descartadas mediante la elección de un gauge adecuado.

Según la descomposición de Helmholtz en la sección anterior aplicado a tensores de rango 2, la perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$, adopta la forma:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2U/c^2, \\ h_{0j} &= -4U_j/c^3 - \partial_j A/c, \\ h_{jk} &= 2\delta_{jk}V/c^2 + \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{jk}\nabla^2 \right) B + (\partial_j B_k + \partial_k B_j)/c^2 + h_{jk}^{TT}, \end{aligned} \quad (74)$$

bajo las condiciones:

$$\partial_j U^j = 0, \quad \partial_j B^j = 0, \quad \partial_k h_{TT}^{jk} = 0 = \delta_{jk} h_{TT}^{jk}, \quad (75)$$

siendo U, A, V, B , las componentes escalares; U_j, B_j , las vectoriales; y h_{jk}^{TT} , la tensorial transversal sin traza, denominados como potenciales. Las 10 componentes independientes de $h_{\mu\nu}$ corresponden a: 4 provenientes de cada escalar así como 2 para las partes vectoriales y tensorial por separado.

Una vez realizada la descomposición, es preciso ver cómo estos potenciales escalares, vectoriales y tensorial transforman bajo transformaciones de gauge; para ello, se denota el generador de la transformación, ζ_α , como:

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \alpha/c, \\ \zeta_j &= 4\beta_j/c^2 + \partial_j \gamma, \\ \partial^j \beta_j &= 0, \end{aligned} \quad (76)$$

de tal modo que las ecuaciones en (74), al ser reemplazadas en (40), adoptan la forma:

$$\begin{aligned} U' &= U - \partial_\eta \alpha; \\ U'_j &= U_j + \partial_\eta \beta_j; \\ V' &= V - \frac{1}{3} c^2 \nabla^2 \gamma; \\ h_{jk}^{TT} &= h_{jk}^{TT}; \\ A' &= A + \alpha + \partial_\eta \gamma; \\ B' &= B - 2\gamma; \\ B'_j &= B_j - 4\beta_j \end{aligned} \quad (77)$$

donde es posible notar que h_{jk}^{TT} es un invariante de gauge Eric Poisson y Clifford M Will: *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, 2014, caso contrario de los demás potenciales. Bajo un análisis adicional, otras cantidades invariantes de gauge pueden ser encontradas a partir de (77). Estas

son:

$$\begin{aligned}
\Phi &:= U + \partial_\eta A + \frac{1}{2} \partial_{tt} B, \\
\Phi_j &:= U_j + \frac{1}{4} \partial_\eta B_j, \\
\Psi &:= V - \frac{1}{6} c^2 \nabla^2 B,
\end{aligned} \tag{78}$$

razón por la cual es posible afirmar que estas cantidades, al igual que h_{jk}^{TT} contienen información relacionada al campo gravitacional, y a su vez, son independientes de la elección de coordenadas. Bajo esta nueva definición de potenciales, el número de componentes independientes de la perturbación de la métrica se reduce a 6; pues se conservan las 2 de la parte tensorial, 1 por cada parte escalar, Φ , Ψ ; y 2 de la parte vectorial, Φ_j , viendo que se han reducido 4 componentes independientes de las 10 iniciales.

El tensor de Riemann en (32), bajo el gauge de Coulomb adopta la forma:

$$\begin{aligned}
R_{0j0k} &= -\frac{1}{c^2} \partial_{jk} \Phi - \frac{1}{c^4} \delta_{jk} \partial_{tt} \Psi - \frac{2}{c^4} (\partial_{tj} \Phi_k + \partial_{tk} \Phi_j) - \frac{1}{2c^2} \partial_{tt} h_{jk}^{TT}, \\
R_{0jkm} &= \frac{1}{c^3} (\delta_{jk} \partial_{tm} \Psi - \delta_{jm} \partial_{tk} \Psi) - \frac{2}{c^3} (\partial_{jk} \Phi_m - \partial_{jm} \Phi_k) \\
&\quad - \frac{1}{2c} (\partial_{tk} h_{jm}^{TT} - \partial_{tm} h_{jk}^{TT}), \\
R_{jkmn} &= \frac{1}{c^2} (\delta_{km} \partial_{jn} \Psi - \delta_{kn} \partial_{jm} \Psi - \delta_{jm} \partial_{kn} \Psi + \delta_{jn} \partial_{km} \Psi) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\partial_{km} h_{jn}^{TT} - \partial_{kn} h_{jm}^{TT} - \partial_{jm} h_{kn}^{TT} + \partial_{jn} h_{km}^{TT}).
\end{aligned} \tag{79}$$

Como caso particular, en Relatividad General, las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, $G_{\mu\nu} = 0$, se escribe como

$$\begin{aligned}
G_{00} &= -\frac{2}{c^2} \nabla^2 \Psi, \\
G_{0j} &= -\frac{2}{c^3} \partial_{tj} \Psi + \frac{2}{c^3} \nabla^2 \Phi_j, \\
G_{jk} &= -\frac{2}{3c^2} \delta_{jk} \nabla^2 (\Phi - \Psi) - \frac{2}{c^4} \delta_{jk} \partial_{tt} \Psi + \frac{1}{c^2} \left(\partial_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} \nabla^2 \right) (\Phi - \Psi) \\
&\quad + \frac{2}{c^4} (\partial_{tj} \Phi_k + \partial_{tk} \Phi_j) - \frac{1}{2} \square h_{jk}^{TT}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Esto permite descomponer las ecuaciones de Einstein en sus partes irreducibles Eanna E Flanagan y Scott A Hughes: *The basics of gravitational wave theory*. En: *New Journal of Physics* 7.1 (2005), pág. 204, siendo G_{0j} de tipo longitudinales y transversales, G_{jk} que contiene piezas con traza, longitudinales sin trazas, longitudinales-transversales y transversales sin traza.

Una vez descompuesto el tensor de Einstein en sus partes irreducibles, es posible obtener también las del tensor energía-Momentun, $T_{\mu\nu}$, bajo las condiciones,

$$\partial_i S^j = 0 \quad \partial_i \sigma^j = 0 \quad \partial_\eta \sigma^{jk} = 0 = \delta_{il} \sigma^{jk}, \quad (81)$$

de la forma:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \varrho c^2, \\ T^{0j} &= (s^j + \partial^j s) c, \\ T^{jk} &= \tau \delta^{jk} + \left(\partial^{jk} - \frac{1}{3} \delta^{jk} \nabla^2 \right) \sigma + \partial^j \sigma^k + \partial^k \sigma^j + \sigma^{jk}. \end{aligned} \quad (82)$$

En este contexto, ϱ representa la densidad de masa de la distribución de materia según un observador inmóvil en el sistema de coordenadas x^α . La cantidad $s^j + \partial^j s$ caracteriza la densidad de momento de la materia, mientras que el tensor T^{jk} describe los esfuerzos dentro del sistema.

Al descomponer $T^{\alpha\beta}$, se identifican diez variables irreducibles; sin embargo, no todas son independientes entre sí. Un cálculo directo muestra que la ecuación de conservación del momento y la energía en la teoría linealizada, dada por $\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, establece restricciones adicionales sobre las variables:

$$\nabla^2 s = -\partial_\eta \varrho, \quad \nabla^2 \sigma^j = -\partial_\eta s^j, \quad \nabla^2 \sigma = -\frac{3}{2} (\partial_\eta s + \tau); \quad (83)$$

lo que significa que de las 10 componentes, hay seis componentes independientes, ϱ, s^j, τ y σ_{jk} . Así pues, las ecuaciones de campo de Einstein descritas en sus partes

irreducibles son:

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi G \rho, \quad (84)$$

$$\nabla^2 (\Phi - \Psi) = -\frac{12\pi G}{c^2} (\partial_\eta s + \tau), \quad (85)$$

$$\nabla^2 \Phi_j = -4\pi G s_j, \quad (86)$$

$$\square h_{jk}^{TT} = -\frac{16\pi G}{c^4} \sigma_{jk}. \quad (87)$$

De las ecuaciones en (84-87), es posible notar que las tres primeras expresiones obedecen a una ecuación tipo Poisson, mientras que la cuarta a una tipo onda, dando lugar únicamente a dos grados de libertad radiativos por parte de esta última ecuación.

2.4.3. Descomposición por helicidades de la teoría Brans-Dicke Otro caso particular a considerar sería la teoría Escalar-Tensor, primeramente formulada por Brans y Dicke Carl Brans y Robert H Dicke: *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. En: *Physical review* 124.3 (1961), pág. 925 cuya acción es:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - U(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x + I_{NG}(q_A, g_{\mu\nu}), \quad (88)$$

siendo ϕ , el campo escalar. De modo que luego de variar (88), las ecuaciones de campo corresponden a:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square_g \phi), \\ \square_g \phi &= \frac{1}{3 + 2\omega(\phi)} \left(8\pi G T - \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{,\lambda} \phi^{,\lambda} + \frac{d}{d\phi} (\phi^2 U) \right), \end{aligned} \quad (89)$$

donde ϕ es el campo escalar dinámico, ϕ_0 el valor asintótico del campo escalar, $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ y \square_g es el escalar d'Alembertiano con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$.

En el régimen de gravedad linealizada, las ecuaciones de campo (89), en regiones fuera de la fuente, adoptan la forma:

$$\square_\eta \phi = 0, \quad (90)$$

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{\varphi_0} (\varphi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \square_\eta \phi), \quad (91)$$

donde

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\nu h_{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu h - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h; \quad (92)$$

cuya solución a la primera expresión está dada por:

$$\phi = \varphi_0 e^{i l_\mu x^\mu}, \quad (93)$$

la cual corresponde a la solución de onda plana.

Si se impone, sin pérdida de generalidad, que la onda se propaga únicamente en la dirección espacial z , con las componentes de la perturbación de la métrica dadas por

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Phi(t, z) & w_1(t, z) & w_2(t, z) & 0 \\ w_1(t, z) & -2\Psi(t, z) & 0 & 0 \\ w_2(t, z) & 0 & -2\Psi(t, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\Psi(t, z) \end{pmatrix}, \quad (94)$$

para el caso de teoría de Brans-Dicke, en el gauge de Coulomb, las ecuaciones de

(84)-(87), son respectivamente:

$$2 \frac{\partial^2 \Psi(t, z)}{\partial z^2} - \frac{1}{\varphi_0} \frac{\partial^2 \varphi(t, z)}{\partial z^2} = 0; \quad (95)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Phi(t, z) + \Psi(t, z)) = 0; \quad (96)$$

$$-\frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} = 0; \quad (97)$$

$$-\frac{\partial^2 h_+(t, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 h_+(t, z)}{\partial t^2} = 0. \quad (98)$$

De este modo, la primera ecuación en (90) es de tipo hiperbólica, describe un movimiento ondulatorio; luego, es posible afirmar que la función del campo escalar gravitacional $\varphi(t, z)$ posee un grado de libertad radiativo escalar. La segunda ecuación, descrita en componentes, se tiene que la solución a la ec. (95) es

$$\Psi(t, z) = \frac{1}{2\varphi_0} \varphi(t, z), \quad (99)$$

de donde se obtiene una primera ecuación de ligadura, lo que indica que el campo escalar gravitacional φ , induce la propagación de $\Psi(t, z)$, denominado sombra Jose María Ezquiaga y Miguel Zumalacárregui: *Dark energy after GW170817: dead ends and the road ahead*. En: *Physical review letters* 119.25 (2017), pág. 251304, ya que se propaga, no debido a que obedece una ecuación hiperbólica, sino debido a una ligadura.

Análogamente, en la ec. (96), se evidencia una segunda ecuación de ligadura de la forma

$$\Phi(t, z) + \Psi(t, z) = 0, \quad (100)$$

lo que relaciona los potenciales Φ y Ψ , que a su vez se relacionan con el campo escalar φ , lo cual induce que Φ se propague a modo de una sombra.

Consecuentemente, para determinar los modos y las velocidades de propagación de la radiación gravitacional débil en la teoría GSU2P, se adoptará como fondo el espacio-tiempo homogéneo e isótropo descrito por la métrica FLRW. Este marco permite llevar a cabo una descomposición en helicidad, la cual resulta esencial dado que, a diferencia de la teoría de Brans-Dicke, la GSU2P incorpora tres campos vectoriales que inducen de modos escalares, vectoriales y tensoriales adicionales a los modos presentes en la Relatividad General.

A partir de dicha descomposición, se mostrará en la sección siguiente que las ecuaciones de campo linealizadas pueden formularse en términos de cantidades invariantes bajo transformaciones de gauge, y mediante los escalares de Newman-Penrose, obtenidos al proyectar las perturbaciones sobre una tétrada nula (l, n, m, \bar{m}) .

Posteriormente, se muestra en detalle cómo los seis modos pueden ser identificados experimentalmente y hasta qué punto esta información limita la teoría que mejor describe la gravedad en sus diferentes escalas.

2.5. Clasificación E(2) de Ondas Gravitacionales

Dado que el tensor de Riemann linealizado constituye una cantidad invariante bajo transformaciones de gauge, su análisis puede realizarse de manera consistente en distintos sistemas de referencia, cada uno elegido de acuerdo con el objetivo conveniente. En este trabajo se emplean dos marcos complementarios con propósitos diferenciados.

El primer marco corresponde a la tétrada de Newman-Penrose, un marco de referencia adaptado donde el vector de onda coincide parcialmente con dos de los vectores de la base, lo que simplifica las expresiones asociadas a las ecuaciones de propa-

gación de cada teoría, además de ser el marco implementado en la clasificación de Petrov, ⁹⁰, la cual, bajo una adaptación, es útil para favorecer o desfavorecer dichas teorías según los modos de polarización que predigan.

El segundo observador corresponde al marco de Fermi-Walker, sistema de referencia que corresponde a un observador en caída libre, de tal forma que se pueda medir la desviación geodésica entre dos o más partículas de prueba al paso de una onda gravitacional.

Considere una onda gravitacional débil, plana y cuasi nula en cualquier teoría métrica junto con un determinado marco ortonormal de Lorentz local. Las componentes del tensor de Riemann linealizado que dependen sólo del tiempo retardado u :

$$R_{\mu\nu\sigma\tau} = R_{\mu\nu\sigma\tau}(u), \quad (101)$$

donde el vector de onda \tilde{l}_μ que es normal a superficies de \tilde{u} constante, definido por

$$\tilde{l}_\mu = -\tilde{u}_{,\mu}, \quad (102)$$

el cual es cuasi nulo con respecto a la métrica local de Lorentz; es decir que:

$$\eta^{\mu\nu}\tilde{l}_\mu\tilde{l}_\nu \equiv \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (103)$$

siendo el parámetro

$$\varepsilon = (c/v_g)^2 - 1, \quad (104)$$

que determina la diferencia entre la velocidad de la onda v_g y la velocidad de la luz, c .

⁹⁰ Subrahmanyan Chandrasekhar: *The mathematical theory of black holes*. Vol. 69. Oxford university press, 1998

Tétrada de Newman Penrose La tetra de Newman penrose es una base no coordinada:

$$\{\Omega^{(a)}\} = \{l, n, m, \bar{m}\}, \quad (105)$$

que cumple las condiciones:

$$\begin{aligned} l \cdot l = n \cdot n = m \cdot m = \bar{m} \cdot \bar{m} &= 0, \\ l \cdot n = -m \cdot \bar{m} &= 1 \\ l \cdot m = n \cdot \bar{m} &= 0. \end{aligned} \quad (106)$$

Por lo tanto la métrica está dada por:

$$\mathbf{g} = l \otimes n + n \otimes l - m \otimes \bar{m} - \bar{m} \otimes m. \quad (107)$$

Para el espacio tiempo de Minkowski se escoge la tetra de Newman Penrose:

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), & n &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1) \\ m &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), & \bar{m} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) \end{aligned} \quad (108)$$

De este modo, la identificación de las helicidades para un fondo homogéneo e isótropo se facilita al realizar la proyección de las ecuaciones de propagación en la tetra nula para $h_{\mu\nu}$.

Cuando la onda se propaga a la velocidad de la luz, en dirección z , en un marco local de Lorentz, entonces la onda puede ser descrita en términos del tiempo retardado $u = t - z$, de tal modo que al definir los campos vectoriales $l = l^\mu e_\mu$ y $n = n^\mu e_\mu$, se tiene que:

$$l_\mu = -u_{,\mu}, \quad n_\mu = -\frac{1}{2}v_{,\mu};$$

cantidades que conforman las componentes de la tetra nula de Newman-Penrose.

No obstante, dado que la onda no es exactamente nula a priori, el vector de onda \tilde{l}_μ debe ser expandido en términos del parámetro, ϵ , que expresa la diferencia de la onda con la de la luz, tal que

$$\tilde{l}^\mu = l^\mu (1 + \epsilon_l) + \epsilon_n n^\mu + \epsilon_m m^\mu + \epsilon_{\bar{m}} \bar{m}^\mu. \quad (109)$$

En este contexto, se puede orientar la base de tal manera que la dirección espacial de l^μ sea la misma que la dirección de propagación de la onda, es decir, $\tilde{l}^j \propto l^j$, y ajustar la componente temporal de l^μ de modo que $\tilde{l}^0 = l^0$. Estas condiciones implican que $\epsilon_m = 0$ y $\epsilon_l = -\frac{\epsilon_n}{2}$, luego

$$\tilde{l}^\mu = l^\mu - \epsilon_n \left(\frac{1}{2} l^\mu - n^\mu \right).$$

Así pues, es posible afirmar que el tensor de Riemann linealizado es función únicamente del nuevo tiempo retardado $\tilde{u} = t - \frac{z}{V_g}$:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta,\mu} \equiv -\tilde{l}_\mu (\partial/\partial\tilde{u}) R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv -\tilde{l}_\mu \dot{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (110)$$

como se estipuló en (101) Al aplicar las relaciones de ortogonalidad de los vectores de la tétrada nula y las identidades de Bianchi linealizadas $R_{ab[cd,e]} = 0$ ⁹¹, se obtiene que $R_{abpq,n} = O(\epsilon_n \dot{R})$; lo que implica que las únicas componentes independientes son de la forma

$$R_{abpq} = R_{pqab} = O(\epsilon_n R), \quad (111)$$

es decir, seis, las demás se podrán obtener a partir de una combinación de ellas.

⁹¹ Los subíndices romanos (excluyendo los índices espaciales i, j, k) para denotar componentes de tensores con respecto a la base de tétrada nula l, n, m, \bar{m} , es decir, $P_{apb\dots} \equiv P_{\alpha\beta\gamma\dots} a^\alpha p^\beta b^\gamma \dots$, donde a, b, c, \dots recorren l, n, m , y \bar{m} , mientras que p, q, r, \dots recorren solo l, m , y \bar{m} .

Trabajo desarrollado por Douglas M, Eardley, David L. Lee y Alan P. Lightman en D. M. Eardley, D. L. Lee y A. P. Lightman: *Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity*. En: *Phys. Rev. D* 8 (1973), págs. 3308-3321. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3308. Estas cantidades pueden ser descritas a su vez por las componentes irreducibles del tensor de Riemann, conocidas como los escalares Ψ_A, Φ_{AB} de Newman-Penrose, en términos del tensor de Weyl, el tensor de Ricci libre de traza del escalar de Ricci, respectivamente. Estas componentes son

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= -\frac{1}{6}R_{nlnl} + O(\epsilon_n R), \\
\Psi_3 &= -\frac{1}{2}R_{nlm\bar{m}} + O(\epsilon_n R), \\
\Psi_4 &= -R_{n\bar{m}n\bar{m}}, \\
\Phi_{22} &= -R_{nmn\bar{m}}.
\end{aligned} \tag{112}$$

Estas seis cantidades, los escalares Ψ_3 y Ψ_4 son complejos, describen los seis posibles modos de polarización que puede tener la onda en una teoría métrica general de la gravedad.

Consecuentemente, en cualquier teoría métrica el preámbulo para la determinación de la clasificación E(2), se parte de las ecuaciones (108) y (111), con la representación del tensor de Riemann en la tétrada nula (l, n, m, \bar{m}) , de la forma:

$$\begin{aligned}
R_{nl} &= R_{nlnl} + O(\epsilon_n R), \\
R_{nn} &= 2R_{nmn\bar{m}} + O(\epsilon_n R), \\
R_{nm} &= R_{nlm\bar{m}} + O(\epsilon_n R), \\
R &= -2R_{nl} + O(\epsilon_n R),
\end{aligned} \tag{113}$$

donde

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(h_{\mu\beta,\alpha\nu} - h_{\mu\alpha,\beta\nu} + h_{\nu\alpha,\beta\mu} - h_{\nu\beta,\alpha\mu}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{l}_\alpha\tilde{l}_\nu\ddot{h}_{\mu\beta} - \tilde{l}_\beta\tilde{l}_\nu\ddot{h}_{\mu\alpha} + \tilde{l}_\beta\tilde{l}_\mu\ddot{h}_{\nu\alpha} - \tilde{l}_\alpha\tilde{l}_\mu\ddot{h}_{\nu\beta}\right),
\end{aligned} \tag{114}$$

y, consecuentemente, los escalares de Newman-Penrose se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &= \frac{1}{12} \ddot{h}_{ll} + O(\epsilon_n R), \\
\Psi_3 &= \frac{1}{4} \ddot{h}_{l\bar{m}} + O(\epsilon_n R), \\
\Psi_4 &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{\bar{m}\bar{m}} + O(\epsilon_n R), \\
\Phi_{22} &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{m\bar{m}} + O(\epsilon_n R).
\end{aligned} \tag{115}$$

De acuerdo con las proyecciones de las componentes de las amplitudes de la onda en (115), nótese que Ψ_2 corresponde a un modo de polarización escalar, Ψ_3 a dos vectoriales; Ψ_4 , dos tensoriales y Φ_{22} a uno escalar.

Hasta el momento, se tienen las ecuaciones de propagación proyectadas en la tétrada nula, ahora, con el ánimo de determinar las polarizaciones y, por ende, las clases E(2), se ha de analizar el comportamiento de dichas componentes en un marco de Lorentz local que se relaciona con el marco preferido por transformaciones de boost y rotaciones.

Sin embargo, es preciso restringirse a aquellos observadores que coincidan con el observador preferido tanto en la frecuencia de la onda gravitacional como en su dirección de propagación. Estos observadores simplifican el estudio de los modos de polarización de las ondas. Sus marcos de Lorentz se conectan mediante un subgrupo de las transformaciones de Lorentz que dejan inalterado el vector de onda \tilde{l}_μ . La forma más general de tal transformación es:

$$\begin{aligned}
l' &= (1 - \alpha\bar{\alpha}\epsilon_n) l - \epsilon_n(\bar{\alpha}m + \alpha\bar{m}) + O(\epsilon_n^2), \\
n' &= (1 - \alpha\bar{\alpha}\epsilon_n) (n + \alpha\bar{\alpha}l + \bar{\alpha}m + \alpha\bar{m}) + O(\epsilon_n^2), \\
m' &= (1 - \alpha\bar{\alpha}\epsilon_n) e^{i\phi}(m + \alpha l) - \epsilon_n \alpha e^{i\phi}(n + \alpha\bar{m}) + O(\epsilon_n^2), \\
\bar{m}' &= (1 - \alpha\bar{\alpha}\epsilon_n) e^{-i\phi}(\bar{m} + \bar{\alpha}l) - \epsilon_n \bar{\alpha} e^{-i\phi}(n + \bar{\alpha}m) + O(\epsilon_n^2),
\end{aligned} \tag{116}$$

donde α es un número complejo que produce rotaciones nulas y ϕ es una fase real arbitraria ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) que produce una rotación alrededor del eje z . El parámetro α varía bajo la restricción $\alpha\bar{\alpha} \ll \epsilon_n^{-1}$. Esto implica que los resultados son válidos siempre que la velocidad del marco no sea comparable con la de la luz o de la onda gravitacional.

Las amplitudes de la onda gravitacional cambian según el grupo de transformación:

$$\begin{aligned}
\Psi'_2 &= \Psi_2 + O(\epsilon_n R) \\
\Psi'_3 &= e^{-i\phi} (\Psi_3 + 3\bar{\alpha}\Psi_2) + O(\epsilon_n R) \\
\Psi'_4 &= e^{-2i\phi} (\Psi_4 + 4\bar{\alpha}\Psi_3 + 6\bar{\alpha}^2\Psi_2) + O(\epsilon_n R) \\
\Phi'_{22} &= \Phi_{22} + 2\alpha\Psi_3 + 2\bar{\alpha}\bar{\Psi}_3 + 6\alpha\bar{\alpha}\Psi_2 + O(\epsilon_n R).
\end{aligned} \tag{117}$$

Si se consideran únicamente las rotaciones espaciales a lo largo del eje de propagación z , se tiene que las amplitudes solo dependan del factor $e^{is\phi}$, lo que permite inferir que los observadores poseen una determinada helicidad:

$$\begin{aligned}
\Psi_2 : s = 0, \quad \Phi_{22} : s = 0, \\
\Psi_3 : s = -1, \quad \bar{\Psi}_3 : s = +1, \\
\Psi_4 : s = -2, \quad \bar{\Psi}_4 : s = +2.
\end{aligned} \tag{118}$$

A partir de la Ecuación (117) se aprecia que las amplitudes en cuestión no son magnitudes invariantes bajo cambio de observador. Así, si en un marco de referencia $\Psi_4 \neq 0$ pero $\Psi_2 \neq 0$, puede existir otro marco en el cual $\Psi'_4 = 0$; es decir, la presencia o ausencia de componentes asociadas a diferentes helicidades depende del marco considerado.

Así pues, las correcciones del orden $O(\epsilon_n R)$, se organizan en una clasificación casi invariante de Lorentz para las ondas gravitacionales, cada clase se identifica mediante (i) el tipo de Petrov del tensor de Weyl que no se anula y (ii) el número máximo

de amplitudes no nulas que pueden observarse en algún marco. Dichos identificadores son independientes del sistema de referencia. Para ondas estrictamente nulas ($\epsilon_n = 0$), las clases resultantes son ⁹²:

1. Clase II_6 : $\Psi_2 \neq 0$. Todos los observadores estándar miden el mismo valor para Ψ_2 , pero discrepan sobre la presencia o ausencia de todos los demás modos.
2. Clase III_5 : $\Psi_2 = 0, \Psi_3 \neq 0$. Todos los observadores estándar coinciden en la ausencia de Ψ_2 y en la presencia de Ψ_3 , pero discrepan en la presencia o ausencia de Ψ_4 y Φ_{22} .
3. Clase N_3 : $\Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0, \Phi_{22} \neq 0, \Psi_4 \neq 0$. La presencia o ausencia de todos los modos es independiente del observador.
4. Clase N_2 : $\Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0, \Phi_{22} = 0, \Psi_4 \neq 0$. Independiente del observador.
5. Clase O_1 : $\Psi_2 = 0, \Psi_3 = 0, \Phi_{22} \neq 0, \Psi_4 = 0$. Independiente del observador.
6. Clase O_0 : $\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = \Psi_4 = 0$. Independiente del observador: No hay onda.

Esta caracterización se denomina la clasificación $E(2)$ de ondas gravitacionales, pues, cuando se consideran ondas planas estrictamente nulas ($\epsilon_n = 0$), las ecuaciones de transformación (116) definen el denominado *Grupo Pequeño*, $E(2)$, de transformaciones, que constituye un subgrupo particular del grupo de Lorentz. Una descripción gráfica que clasifica, en orden descendente, los modos de polarización de las ondas según la clase $E(2)$, se muestra en la figura (2).

Dentro del formalismo $E(2)$, se permiten hasta 6 modos de polarización, dependiendo de la teoría de gravedad elegida, algunos de los cuales podrían ser detectados experimentalmente; para esto se considera un observador en un marco local en

⁹² Eardley, Lee y Lightman 1973a

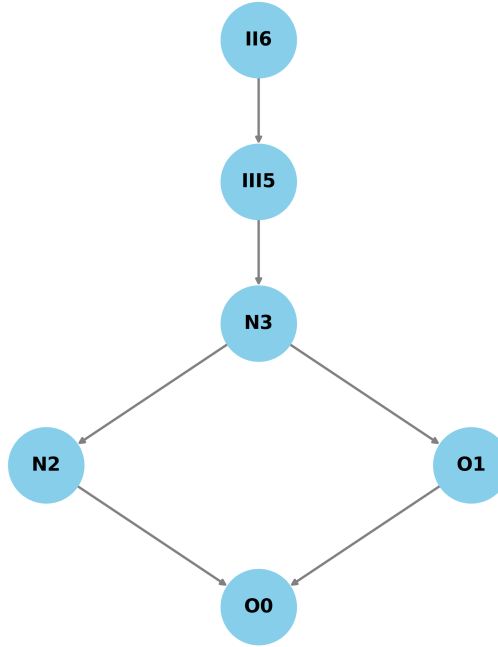


Figura 2. Representación de las clase $E(2)$ de ondas débiles, planas y nulas se organizan en un diagrama jerárquico donde, en los niveles superiores, se encuentran las configuraciones más generales⁹³. Al descender por una rama dentro de dicho diagrama, se obtiene la clase imponiendo que cierta amplitud sea nula para todos los observadores. Así, una clase se considera más general que otra si existe un camino que permita descender de la primera a la segunda a lo largo de las líneas del diagrama.

caída libre. En la vecindad de una línea de mundo elegida $\gamma(t)$, se construye un sistema de coordenadas ortonormal de Lorentz localmente (t, ξ^j) con t como tiempo propio a lo largo de la línea de mundo y \mathcal{P} como origen espacial⁹⁴, cuya métrica correspondería a

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

donde

$$g_{00} = -1 - R_{0p0q}(\gamma)\xi^p\xi^q + O(\xi^3),$$

$$g_{0j} = \frac{2}{3}R_{jppq0}(\gamma)\xi^p\xi^q + O(\xi^3)$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} - \frac{1}{3}R_{jppkq}(\gamma)\xi^p\xi^q + O(\xi^3).$$

⁹⁴ Poisson y Will 2014

Para una partícula de prueba con coordenadas espaciales ξ^j , momentáneamente en reposo en el marco, la aceleración relativa al origen es

$$\frac{d^2 \xi_j}{dt^2} = \frac{1}{2} g_{00,j} = -R_{0j0q}(\gamma) \xi^q. \quad (119)$$

Esta expresión es válida incluso en presencia de campos gravitacionales auxiliares, tales como escalares, vectoriales o tensoriales, salvo por los cuerpos autogravitantes.

Es importante resaltar que los invariantes en (115) proyectados en la tétrada nula, no corresponden a observables directos, por tal razón, se supone que las ondas provienen de una única fuente y que el vector de onda espacial k se orienta a lo largo del eje z , a través de la aceleración relativa expresada en ec.(119). Para describir la polarización, se seleccionan dos vectores base e_X y e_Y , ambos perpendiculares a z , de modo que queden en el plano celeste. El observador, al compilar los desplazamientos ξ^k , puede organizarlos en una matriz simétrica de 3×3 , definida por

$$R_{0j0k} \equiv -\frac{1}{2R} \frac{d^2}{dt^2} h_{jk}(t), \quad (120)$$

siendo R la distancia a la fuente, luego, a primer orden en el pequeño desplazamiento ξ^k . De modo que al expandir (119) a primer orden en los desplazamientos ξ^k , la matriz A se puede expresar de la forma:

$$h_{jk} = \begin{pmatrix} h_+ + h_S & h_\times & h_{V_1} \\ h_\times & -h_+ + h_S & h_{V_2} \\ h_{V_1} & h_{V_2} & h_L \end{pmatrix}; \quad (121)$$

cantidades que también pueden ser expresadas en términos de los escalares de Newman-Penrose en la ecuación (115), de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Re } \Psi_4 &= \frac{1}{2R} \ddot{h}_+, \\
\text{Im } \Psi_4 &= -\frac{1}{2R} \ddot{h}_\times, \\
\text{Re } \Psi_3 &= \frac{1}{4\sqrt{2}R} \ddot{h}_{V_1}, \\
\text{Im } \Psi_3 &= -\frac{1}{4\sqrt{2}R} \ddot{h}_{V_2}, \\
\Phi_{22} &= \frac{1}{2R} \ddot{h}_S, \\
\Psi_2 &= \frac{1}{12R} \ddot{h}_L.
\end{aligned} \tag{122}$$

Cada uno de estos modos de polarización (amplitudes) induce una distorsión o modo de polarización sobre una determinada organización de partículas masivas de prueba, las cuales se pueden visualizar como se muestra en la figura (3).

Algunos ejemplos que se pueden presentar, a la luz de esta clasificación sería el de Relatividad General, cuyas ecuaciones de campo en el vacío cumplen $R_{\mu\nu} = 0$, lo que implica que las ondas sean nulas ($\epsilon_n = 0$). De la ecuación (113) se deduce entonces que

$$R_{nlml} = R_{nmnm} = R_{nlmn} = 0,$$

y por consiguiente,

$$\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0.$$

La única componente sin restricción es $\Psi_4 \neq 0$, de modo que, en relatividad general, la clasificación corresponde a la clase $E(2)$ es la N_2 . Existen solamente dos modos de polarización, asociados a helicidad ± 2 , es decir, son de tipo tensorial. Si ahora se considera la clasificación de la teoría Escalar-Tensor sin masa, las ecuaciones de campo linealizadas en el vacío toman la forma

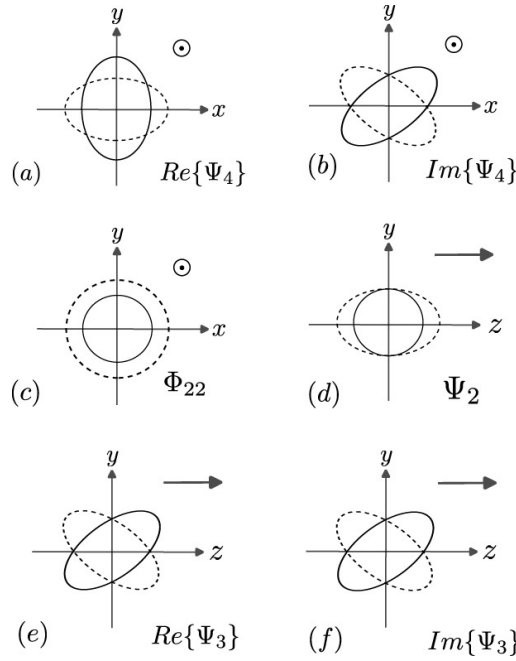


Figura 3. Representación pictórica de la deformación que presentarían las partículas masivas de prueba la pasar una onda gravitacional polarizada según las seis permitidas, donde el eje z corresponde al eje de propagación. La imagen (a) representa el modo tensorial transversal-transversal, o modo (+); la (b), el modo tensorial transversal-transversal o modo (\times); la (c) el modo escalar transversal-transversal; la (d) el modo escalar transversal-longitudinal; la (e) y (d) los modos vectoriales transversal-longitudinal. La línea discontinúa representa el estado inicial de las partículas de prueba, mientras que las líneas continuas muestran la nueva distribución en presencia de la onda gravitacional.

$$\square_{\eta}\phi = 0;$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{\phi_0} (\phi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\square_{\eta}\phi);$$

$$R = O(\phi^2_{,\mu}),$$

donde ϕ_0 representa el valor de ϕ en el límite cosmológico. La primera ecuación (113) posee una solución de onda plana

$$\phi = \phi_0 \exp(i l_{\mu} x^{\mu}),$$

sujeta a la condición de nulidad $\eta_{\mu\nu} l^{\mu} l^{\nu} = 0$. A partir de las otras dos ecuaciones de (113) se llega a

$$R_{\mu\nu} = -\exp(il_\mu x^\mu) l_\mu l_\nu.$$

En consecuencia, se verifica que $R_{nl} = R_{nm} = 0$, pero $R_{nn} \neq 0$. Esto implica

$$\Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Phi_{22} \neq 0, \quad \Psi_4 \neq 0,$$

y, por lo tanto, dentro de las teorías tensor-escalar, la clasificación resultante es N_3 . Cabe resaltar que, además del modo $\Psi_4 \neq 0$ característico de las ondas tensoriales, existe una contribución adicional en Φ_{22} debida al campo escalar. Un proceso análogo detallado a este se estudia en este trabajo para clasificar a la Teoría Generalizada de Proca SU(2) en la siguiente sección.

3. Propagación de OG en fondo de FLRW

3.1. Forma general de las ecuaciones de Propagación

En relatividad general, el campo gravitacional se modela exclusivamente mediante el tensor métrico, que posee inicialmente diez componentes independientes debido a su carácter simétrico. La dinámica está dada por las ecuaciones de Einstein, obtenidas de la acción de Einstein-Hilbert; sin embargo, no todas estas componentes corresponden a grados de libertad radiativos. Una forma heurística de entender esta reducción es a través de la invariancia bajo difeomorfismos, pues permite fijar cuatro funciones arbitrarias a través de una transformación de coordenadas, lo que reduce el número de componentes independientes a seis. Adicionalmente, la identidad de Bianchi:

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0, \tag{123}$$

impone cuatro ecuaciones de ligadura sobre las derivadas temporales de las componentes de la métrica, restringiendo aún más la dinámica. Como consecuencia, de los diez grados de libertad iniciales, se encuentra que sólo dos son radiativos, los cuales corresponden a las polarizaciones tensoriales transversales de las ondas gravitacionales ⁹⁵.

Para otras teorías de gravedad modificada que introducen campos adicionales, escalares, vectoriales o tensoriales, las restricciones de gauge no son suficientes para eliminar todos los grados dinámicos. Así, aparecen modos de polarización adicionales, cuya naturaleza depende del campo adicional introducido. Por ejemplo, en teorías escalar-tensor como Horndeski, los grados de libertad escalar generan mo-

⁹⁵ Maggiore 2008

dos de propagación escalares y vectoriales ⁹⁶.

En particular, la teoría GPSU2, en la que además del tensor métrico, se introducen tres campos vectoriales con simetría SU(2), de modo que se espera también obtener grados de libertad adicionales a los predichos en RG, y a diferencia de las teorías escalar-tensor, que existan grados de libertad tensoriales sombra, generados por la perturbación de los campos $B_{a\mu}$ ⁹⁷.

Para determinar los grados de libertad, es necesario obtener las ecuaciones de propagación en la teoría GSU2P. Así pues, se expanden la métrica y los campos vectoriales, tal que:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(B)} + h_{\mu\nu}; \quad B_{a\mu} = B_{a\mu}^{(B)} + y_{a\mu}, \quad (124)$$

donde $g_{\mu\nu}^{(B)}$ y $B_{\mu}^{(B)a}$ representan los fondos respectivamente, mientras que $h_{\mu\nu}$ y $y_{\mu a}$ son las perturbaciones.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen al aplicar el principio variacional al funcional de acción GPSU2,

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = \frac{\delta S_{GPSU(2)}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad \delta H_{a\mu} = \frac{\delta S_{GPSU(2)}}{\delta B^{\mu a}} = 0; \quad (125)$$

estas se presentan a detalle en el Apéndice (1). Una vez encontradas dichas ecuaciones de campo, se reemplazan (124) en ellas. El sistema perturbativo resultante corresponde a las ecuaciones linealizadas en la teoría de GSU2P; las ecuaciones se presentan a detalle en el Apéndice (2).

⁹⁶ Ezquiaga y Zumalacárregui 2017a; Yungui Gong et al.: *Gravitational waves in Einstein-æther and generalized TeVeS theory after GW170817*. En: *Phys. Rev. D* 97.8 (2018), pág. 084040

⁹⁷ Ezquiaga y Zumalacárregui 2017a

Una vez linealizadas dichas ecuaciones de campo, se aplica el límite Eikonal (véase Sec. 2.4.1, ecuación (60)), y se considera el orden dominante, es decir, los términos de orden $1/\epsilon^2$, los cuales corresponden a las derivadas de orden superior: $\nabla\nabla h_{\mu\nu}$, $\nabla\nabla y_\mu^a$. Las ecuaciones resultantes al aplicar las aproximaciones mencionadas, se denominan las ecuaciones de propagación.

A continuación se presenta, el sistema de ecuaciones de propagación asociado a la perturbación de las componentes del tensor métrico, provenientes de las ecuaciones de campo (6), (3), (20) y (16),

1.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(-\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu} (-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} \right. \\
& + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho{}_\rho) + 4\alpha_4 B^a{}_\nu B_{b\rho} (2B_a{}^\rho B^b{}_\mu + B_{a\mu} B^{b\rho}) (\nabla_\beta \nabla_\sigma h^{\sigma\beta} - \nabla_\beta \nabla^\beta h^\sigma{}_\sigma) \\
& - \alpha_4 B^{a\rho} (2B_a{}^\sigma B^b{}_\rho + B_{a\rho} B^{b\sigma}) (4\nabla_\nu \nabla_\mu h_{b\sigma} + 4(\nabla_\mu \nabla_\nu h_{b\sigma} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta h_{b\sigma}) \\
& - 2B_b{}^\beta (\nabla_\nu \nabla_\mu h_{\sigma\beta} + \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\sigma\beta} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\sigma\beta}) + B_{b\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\mu h^\beta{}_\beta \\
& \left. - \nabla_\beta \nabla_\nu h_\mu{}^\beta - \nabla_\beta \nabla_\mu h_\nu{}^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu} (\nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\beta\alpha} - \nabla_\alpha \nabla^\alpha h^\beta{}_\beta)) \right) = 0;
\end{aligned} \tag{126}$$

2.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(-\nabla_\nu \nabla_\mu h_\rho^\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} \right. \\
& + 4\alpha_1 B_{b\rho} B^{b\rho} \left(B_\mu^a \left(-2\nabla_\nu \nabla_\sigma y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{a\nu} \right) \right. \\
& + B_\nu^a \left(-2\nabla_\mu \nabla_\sigma y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\mu y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{a\mu} \right) + g_{\nu\mu} \left(-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho \right) \\
& - 4\alpha_1 B_a^\rho \left(B_\mu^a \left(B_{b\sigma} B^{b\sigma} \left(\nabla_\nu \nabla_\rho h_\beta^\beta - 2\nabla_\nu \nabla_\beta h_\rho^\beta + \nabla_\beta \nabla_\nu h_\rho^\beta - \nabla_\beta \nabla_\rho h_\nu^\beta \right. \right. \right. \\
& + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\rho} \left. \left. \left. + 2B_\rho^b \left(2\nabla_\nu \nabla_\sigma y_b^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\nu y_b^\sigma - \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{b\nu} + B_b^\sigma \left(\nabla_\nu \nabla_\sigma h_\beta^\beta \right. \right. \right. \right. \\
& - 2\nabla_\nu \nabla_\beta h_\sigma^\beta + \nabla_\beta \nabla_\nu h_\sigma^\beta - \nabla_\beta \nabla_\sigma h_\nu^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\sigma} \left. \left. \left. \right) \right) \right) \right) ; \\
& + B_\nu^a \left(B_{b\sigma} B^{b\sigma} \left(\nabla_\mu \nabla_\rho h_\beta^\beta - 2\nabla_\mu \nabla_\beta h_\rho^\beta + \nabla_\beta \nabla_\mu h_\rho^\beta - \nabla_\beta \nabla_\rho h_\mu^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\mu\rho} \right) \right. \\
& + 2B_\rho^b \left(2\nabla_\mu \nabla_\sigma y_b^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\mu y_b^\sigma - \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{b\mu} + B_b^\sigma \left(\nabla_\mu \nabla_\sigma h_\beta^\beta - 2\nabla_\mu \nabla_\beta h_\sigma^\beta \right. \right. \\
& + \nabla_\beta \nabla_\mu h_\sigma^\beta - \nabla_\beta \nabla_\sigma h_\mu^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\mu\sigma} \left. \left. \right) \right) - 4\alpha_1 B^{a\rho} \left(2B_a^\sigma B_\rho^b \right. \\
& + B_{a\rho} B^{b\sigma} \left. \left(\nabla_\sigma \nabla_\nu y_{b\mu} + \nabla_\sigma \nabla_\mu y_{b\nu} - B_b^\beta \left(\nabla_\beta \nabla_\nu h_{\mu\sigma} + \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\nu\sigma} - \nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\nu\mu} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - g_{\nu\mu} \left(2\nabla_\sigma \nabla_\beta y_b^\beta + B_b^\beta \left(\nabla_\beta \nabla_\sigma h_\alpha^\alpha - 2\nabla_\beta \nabla_\alpha h_\sigma^\alpha \right) \right) \right) \right) = 0;
\end{aligned} \tag{127}$$

3.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(-\nabla_\nu \nabla_\mu h_\rho^\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu} \left(-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} \right. \right. \\
& + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho \left. \left. \right) - \delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_\rho^b \left(\epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\nu} + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\mu} \right. \right. \\
& + B_b^\beta \left(\epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \left(\nabla_\nu \nabla^\theta h_\sigma^\alpha - \nabla^\theta \nabla_\nu h_\sigma^\alpha \right) + \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \left(\nabla_\mu \nabla^\theta h_\sigma^\alpha - \nabla^\theta \nabla_\mu h_\sigma^\alpha \right) \right) \\
& - \delta_3 B_\mu^a \left(B_b^\sigma \left(B^{b\rho} \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho} - B_a^\rho B_\rho^b \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\nu^\beta \right) \right. \\
& + B_a^\rho \left(\epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \left(B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} + B_\rho^b \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b^\sigma \right) - B_b^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma} \right) \\
& + \delta_3 B_\nu^a \left(B_a^\rho \left(-\epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \left(B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} + B_\rho^b \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b^\sigma \right) + B_b^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma} \right) \right. \\
& + B_b^\sigma \left(-B^{b\rho} \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho} + B_a^\rho \left(\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \left(B_\rho^b \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\mu^\beta + B_\mu^b \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\rho^\beta \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + B_\mu^b \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\sigma^\beta \right) \right) \left. \right) = 0;
\end{aligned} \tag{128}$$

4.

$$\frac{1}{2}(-\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho_\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu}(-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho_\rho)) = 0; \quad (129)$$

5.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(-4\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho_\rho + 4(\nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu}(-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho_\rho)) - 2\alpha_3(-4B_\mu^a B_b^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{a\nu} + B_a^\rho (B^a_\mu B^{b\sigma} (2(\nabla_\rho \nabla_\sigma y_{b\nu} + \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{b\nu})) + B_b^\beta (3\nabla_\nu \nabla_\rho h_{\sigma\beta} - \nabla_\rho \nabla_\nu h_{\sigma\beta} - 2\nabla_\beta \nabla_\nu h_{\rho\sigma} - 6\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\nu\sigma} + 6\nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\nu\rho})) + B_\nu^a (B^{b\sigma} (2(\nabla_\rho \nabla_\sigma y_{b\mu} + \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{b\mu})) + B_b^\beta (3\nabla_\mu \nabla_\rho h_{\sigma\beta} - \nabla_\rho \nabla_\mu h_{\sigma\beta} - 2\nabla_\beta \nabla_\mu h_{\rho\sigma} - 6\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\mu\sigma} + 6\nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\mu\rho})) + B_\mu^b (2\nabla_\rho \nabla_\sigma y_b^\sigma + B_b^\sigma (\nabla_\rho \nabla_\sigma h^\beta_\beta - 2\nabla_\rho \nabla_\beta h_\sigma^\beta + \nabla_\sigma \nabla_\rho h^\beta_\beta - 2(\nabla_\sigma \nabla_\beta h_\rho^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\rho\sigma})))))) \\ & + 2B_\nu^a (B_b^\rho B_\mu^b (\nabla_\rho \nabla_\sigma y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\rho y_a^\sigma) - B^{b\rho} (2B_b^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{a\mu} + B_{a\mu} (2\nabla_\rho \nabla_\sigma y_b^\sigma + 2\nabla_\sigma \nabla_\rho y_b^\sigma + B_b^\sigma (\nabla_\sigma \nabla_\rho h^\beta_\beta - 2\nabla_\sigma \nabla_\beta h_\rho^\beta - \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\rho\sigma})) + 3B_{b\rho} (\nabla_\beta \nabla_\sigma h^{\sigma\beta} - \nabla_\beta \nabla^\beta h^\sigma_\sigma)))) + 2B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} g_{\nu\mu} (\nabla_\alpha \nabla_\sigma h_{\rho\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta h_{\rho\sigma}) \\ & - 3\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} (4\nabla_\nu \nabla_\mu y_{b\sigma} + 4(\nabla_\mu \nabla_\nu y_{b\sigma} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta y_{b\sigma}) \\ & - 2B_b^\beta (\nabla_\nu \nabla_\mu h_{\sigma\beta} + \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\sigma\beta} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\sigma\beta}) + B_{b\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\mu h^\beta_\beta \\ & - \nabla_\beta \nabla_\nu h_\mu^\beta - \nabla_\beta \nabla_\mu h_\nu^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu} (\nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\beta\alpha} - \nabla_\alpha \nabla^\alpha h^\beta_\beta)))) = 0; \quad (130) \end{aligned}$$

Acto seguido, se presentan las ecuaciones de propagación asociadas a la perturbación de las componentes de los campos vectoriales en el mismo orden:

1.

$$4(-\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + \nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} + \alpha_4 B_{b\mu} (2B_a^\mu B^{b\nu} + B_{a\nu} B^{b\mu}) (\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} - \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho_\rho)) = 0; \quad (131)$$

2.

$$\begin{aligned}
& 4(-\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + \nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} + \alpha_1 B_{b\mu} B^{b\mu} (-2\nabla_\nu \nabla_\rho y_a^\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu y_a^\rho + \nabla_\rho \nabla^\rho y_{a\nu})) \\
& - \alpha_1 B_a^\mu \left(B_{b\rho} B^{b\rho} (\nabla_\nu \nabla_\mu h_\sigma^\sigma - 2\nabla_\nu \nabla_\sigma h_\mu^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_\mu^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\mu h_\nu^\sigma \right. \\
& + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_{\nu\mu}) + 2B_\mu^b (2\nabla_\nu \nabla_\rho y_b^\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu y_b^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho y_{b\nu} + B_b^\rho (\nabla_\nu \nabla_\rho h_\sigma^\sigma \\
& - 2\nabla_\nu \nabla_\sigma h_\rho^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_\rho^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho h_\nu^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_{\nu\rho})) \Big) = 0;
\end{aligned} \tag{132}$$

3.

$$4(-\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + \nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} + \alpha_6 B_{b\mu} B^{b\mu} (\nabla_\rho \nabla_\nu y_a^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho y_{a\nu})) = 0; \tag{133}$$

4.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(-\nabla_\nu \nabla_\mu h_\rho^\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} + g_{\nu\mu} (-\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} \right. \\
& + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho) - \delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_\rho^b (\epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\nu} + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\mu} \\
& + B_b^\beta (\epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} (\nabla_\nu \nabla^\theta h_\sigma^\alpha - \nabla^\theta \nabla_\nu h_\sigma^\alpha) + \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} (\nabla_\mu \nabla^\theta h_\sigma^\alpha - \nabla^\theta \nabla_\mu h_\sigma^\alpha)) \\
& - \delta_3 B_a^\mu (B_b^\rho (B^{b\rho} \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho} - B_a^\rho B_\rho^b \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\nu^\beta) \\
& + B_a^\rho (\epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} (B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} + B_\rho^b \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b^\sigma) - B_b^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma})) \\
& + \delta_3 B_a^\nu (B_a^\rho (-\epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} (B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} + B_\rho^b \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b^\sigma) + B_b^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma}) \\
& + B_b^\sigma (-B^{b\rho} \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho} + B_a^\rho (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} (B_\rho^b \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\mu^\beta + B_\mu^b \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\rho^\beta) \\
& + B_\mu^b \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\sigma^\beta)) \Big) = 0;
\end{aligned} \tag{134}$$

5.

$$\begin{aligned}
& -4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} + 2\alpha_3 B_a^\mu B_b^\sigma B^{b\rho} (-\nabla_\nu \nabla_\mu h_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_{\mu\rho} \\
& + \nabla_\sigma \nabla_\mu h_{\nu\rho} - \nabla_\sigma \nabla_\rho h_{\nu\mu}) + 3\alpha_3 B_{a\nu} B_{b\mu} B^{b\mu} (\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} - \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho) = 0.
\end{aligned} \tag{135}$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de propagación asociadas a cada término lagrangiano en la teoría GSU2P, el objetivo principal es determinar las velocidades de propagación asociadas a cada pieza lagrangiana. Para ello, resulta necesario

especificar un fondo sobre el cual analizar las perturbaciones. Para este propósito, se adopta un espaciotiempo homogéneo e isótropo descrito por la métrica FLRW, dado que constituye el modelo de referencia para la evolución cosmológica a gran escala. La elección de un fondo de este tipo asegura que las simetrías espaciales de homogeneidad e isotropía se preserven; esto permite una descomposición de las ecuaciones de propagación en modos escalares, vectoriales y tensoriales.

Dentro de este marco se consideran dos configuraciones distintas para los campos vectoriales de la teoría. La primera corresponde a la denominada tríada cósmica, donde las tres direcciones espaciales están ocupadas por vectores ortogonales y de igual norma, alineados con los generadores internos de la simetría $SU(2)$. Esta configuración conserva la isotropía efectiva del fondo, ya que una rotación espacial es invariante ante transformaciones de gauge. De este modo, se obtiene un tensor energía-momento que mantiene la estructura FLRW y, al mismo tiempo, permite que los campos vectoriales actúen como fuentes dinámicas de nuevos modos radiativos.

La segunda corresponde a la configuración puramente temporal, en la cual sólo la componente temporal de los vectores es distinta de cero. Esta construcción es compatible con la isotropía espacial, ya que los vectores no seleccionan ninguna dirección espacial preferente, y permite estudiar los campos sobre la dinámica cosmológica sin introducir anisotropías a nivel de fondo.

3.2. Descomposición por helicidades en la teoría GSU2P

La perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$, en su forma general, puede ser dividida en conjuntos según la helicidad: tensoriales o helicidad 2, vectoriales o helicidad 1, y escalares o helicidad 0. Para esto se utilizó una base adecuada, correspondiente a la tétrada Newman-Penrose, mostrada en la sección (2.5), en la que el vector de onda está en la misma dirección de l^μ en la ec.(109).

En este contexto, las componentes de la perturbación métrica pueden organizarse

de manera explícita según su contenido en modos escalares, vectoriales y tensoriales de la forma

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1 & h_s + h_+ & h_\times & h_{v_1} \\ w_2 & h_\times & h_s - h_+ & h_{v_2} \\ w_3 & h_{v_1} & h_{v_2} & h_l \end{bmatrix}, \quad (136)$$

donde cada componente tensorial se corresponde a cada uno de los modos de polarización asociados a las ondas gravitacionales. Asimismo, el tensor asociado a las helicidad de la perturbación de los campos vectoriales $y_{a\mu}$, de manera natural, se pueden descomponer en su parte simétrica:

$$y_{a\mu} = \begin{bmatrix} t_1 & y_s + y_+ & y_\times & y_{v_1} \\ t_2 & y_\times & y_s - y_+ & y_{v_2} \\ t_3 & y_{v_1} & y_{v_2} & y_L \end{bmatrix}, \quad (137)$$

y en su parte antisimétrica $\tilde{y}_{a\mu}$:

$$y_{a\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{y}_{v_1} & -\tilde{y}_{v_2} \\ 0 & \tilde{y}_{v_1} & 0 & \tilde{y}_{v_3} \\ 0 & \tilde{y}_{v_2} & -\tilde{y}_{v_3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (138)$$

En particular, para la teoría GSU2P, con grados de libertad adicionales a $h_{\mu\nu}$, aceptaría hasta 22 modos diferentes de polarización de las ondas gravitacionales con las 3 helicidad mencionadas anteriormente; no obstante, algunos serán radiativos, susceptibles a ser medidos; y otros serán ecuaciones de ligadura. Esta diferencia se establece de acuerdo al tipo de ecuación diferencial parcial acoplada en el que esté : inmerso las ecuaciones tipo onda obedecen a las hiperbólicas, mientras que las elípticas o tipo Poisson son no radiativas ⁹⁸.

⁹⁸ Maggiore 2018

De manera explícita, las ecuaciones de la perturbación de la métrica, según ecuación (170), proyectadas en la tétrada de Newman-Penrose (l, n, m, \bar{m}) , para cada índice espaciotemporal, son:

$$h_{ll} = h_L(\eta, z) + w_0(\eta, z) + 2w_3(\eta, z), \quad (139)$$

$$h_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_{v_1}(\eta, z) + ih_{v_2}(\eta, z) + w_1(\eta, z) + iw_2(\eta, z)), \quad (140)$$

$$h_{ln} = \frac{1}{2} (-h_L(\eta, z) + w_0(\eta, z)), \quad (141)$$

$$h_{l\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (h_{v_1}(\eta, z) - i(h_{v_2}(\eta, z) + iw_1(\eta, z) + w_2(\eta, z))), \quad (142)$$

$$h_{nm} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (-h_{v_1}(\eta, z) - ih_{v_2}(\eta, z) + w_1(\eta, z) + iw_2(\eta, z)), \quad (143)$$

$$h_{nn} = \frac{1}{4} (h_L(\eta, z) + w_0(\eta, z) - 2w_3(\eta, z)), \quad (144)$$

$$h_{n\bar{m}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (-h_{v_1}(\eta, z) + ih_{v_2}(\eta, z) + w_1(\eta, z) - iw_2(\eta, z)), \quad (145)$$

$$h_{mm} = ih_{\times}(\eta, z) + h_{+}(\eta, z), \quad (146)$$

$$h_{m\bar{m}} = h_s(\eta, z), \quad (147)$$

$$h_{\bar{m}\bar{m}} = -ih_{\times}(\eta, z) + h_{+}(\eta, z). \quad (148)$$

La descomposición por helicidades para ecs. (139)-(148) se deduce a partir de las transformaciones en (116) para cada componente de la tétrada nula. Para este caso, el parámetro $\alpha = 0$ y $\varphi \neq 0$. Por lo tanto, los vectores de la base l y n son invariantes, mientras que m transforma como $m \mapsto e^{i\phi}m$, y $\bar{m} \mapsto e^{-i\phi}$. De modo que las componentes h_{ll} , $h_{m\bar{m}}$, h_{ln} y h_{nn} son invariantes. Luego, los modos h_L , w_0 , w_3 y h_s son de tipo escalar. Los modos vectoriales se deducen de las componentes h_{lm} , h_{nm} , $h_{n\bar{m}}$ y $h_{l\bar{m}}$, lo cual, implica que h_{v_1} , h_{v_2} , w_1 y w_2 son modos vectoriales o de helicidad 1. Finalmente, las componentes h_{mm} y $h_{\bar{m}\bar{m}}$ son de helicidad 2, por consiguiente, los modos h_{+} y h_{\times} son tensoriales. Cabe resaltar que esta clasificación en modos escalares, vectoriales y tensoriales, se realizan respecto a rotaciones a lo largo del

eje de propagación.

De otro lado, las ecuaciones de propagación, asociadas al sector simétrico de la perturbación de los campos vectoriales, se proyectan en una base tridimensional adaptada para las componentes de grupo (N, M, \bar{M}) . Cada componente de la base, análoga a los índices espaciotemporales proyectados en la tétrada de Newman-Penrose, se define como

$$\begin{aligned} N^a &= (0, 0, 1), \\ M^a &= (1, i, 0), \\ \bar{M}^a &= (1, -i, 0). \end{aligned} \tag{149}$$

Para la parte simétrica de las perturbaciones de campos vectoriales, las proyecciones en las bases son:

$$y_{Nl} = y_L(\eta, z) + t_3(\eta, z), \tag{150}$$

$$y_{Nm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{v_1}(\eta, z) + iy_{v_2}(\eta, z)), \tag{151}$$

$$y_{Nn} = \frac{1}{2}(-y_L(\eta, z) + t_3(\eta, z)), \tag{152}$$

$$y_{N\bar{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_{v_1}(\eta, z) - iy_{v_2}(\eta, z)), \tag{153}$$

$$y_{Ml} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1(\eta, z) + it_2(\eta, z) + y_{v_1}(\eta, z) + iy_{v_2}(\eta, z)), \tag{154}$$

$$y_{Mn} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(t_1(\eta, z) + i(t_2(\eta, z) + iy_{v_1}(\eta, z) - y_{v_2}(\eta, z))), \tag{155}$$

$$y_{M\bar{m}} = y_{\bar{M}m} = y_s(\eta, z), \tag{156}$$

$$y_{\bar{M}l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1(\eta, z) - i(t_2(\eta, z) + iy_{v_1}(\eta, z) + y_{v_2}(\eta, z))), \tag{157}$$

$$y_{\bar{M}n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(t_1(\eta, z) - it_2(\eta, z) - y_{v_1}(\eta, z) + iy_{v_2}(\eta, z)), \tag{158}$$

$$y_{\bar{M}\bar{m}} = -iy_{\times}(\eta, z) + y_{+}(\eta, z), \tag{159}$$

$$y_{Mm} = iy_{\times}(\eta, z) + y_{+}(\eta, z), \tag{160}$$

donde, en analogía con la perturbación de la métrica, los y_{+} y y_{\times} corresponden a los modos tensoriales transversales sin traza. El mismo análisis del caso $h_{\mu\nu}$, se aplica

a la perturbación simétrica de los campos vectoriales. Los modos escalares son y_L , y_s , t_3 ; los vectoriales son y_{v_1} , y_{v_2} , t_1 , t_2 ; los tensoriales son y_\times y y_+ .

Para el sector antisimétrico de la perturbación de los campos vectoriales, la proyección en la base para el grupo y la tétrada de Newman-Penrose son:

$$y_{Nl} = y_{Nn} = y_{\bar{M}\bar{m}} = y_{Mm} = 0, \quad (161)$$

$$y_{Nm} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) + i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (162)$$

$$y_{N\bar{m}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) - i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (163)$$

$$y_{Ml} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) + i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (164)$$

$$y_{Mn} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) - i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (165)$$

$$y_{M\bar{m}} = -y_{\bar{M}m} = i\tilde{y}_{v_1}(\eta, z), \quad (166)$$

$$y_{\bar{M}l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) - i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (167)$$

$$y_{\bar{M}n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-\tilde{y}_{v_2}(\eta, z) + i\tilde{y}_{v_3}(\eta, z)), \quad (168)$$

tal que los modos \tilde{y}_{v_2} , \tilde{y}_{v_3} son vectoriales, y \tilde{y}_{v_1} es escalar.

Observación: El subíndice latino a en $B_{a\mu}$, y por tanto en $y_{a\mu}$, etiqueta componentes asociadas al grupo $SU(2)$. Aunque no es un índice espacial, existe un homomorfismo de grupo entre $SU(2)$ y el grupo de rotaciones $SO(3)$, además sus álgebras de Lie son isomorfas ($su(2) \simeq so(3)$), lo que permite tomar el índice a , como si fuesen localmente equivalentes.

El fondo adoptado es el de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. La homogeneidad e isotropía induce un desacople de las ecuaciones de campo perturbadas según su helicidad en tres sectores escalar, vectorial, tensorial.

3.3. Velocidades de propagación en GSU2P

Las ecuaciones de propagación para las perturbaciones de la métrica y para los grados de libertad de los campos vectoriales, y , pueden escribirse en forma de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden⁹⁹:

$$\mathcal{D} \begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix} = [\hat{N} \partial_\eta^2 + \hat{H} \partial_\eta \partial_z + \hat{Z} \partial_z^2] \begin{pmatrix} h \\ y \end{pmatrix} = 0. \quad (169)$$

La expresión asociada a la perturbación de la métrica para el modo tensorial corresponde a:

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (170)$$

dado que son las componentes transversal y sin traza de $h_{\mu\nu}$. Asimismo, la expresión para la perturbación de los campos vectoriales para el modo tensorial es:

$$y_{a\mu} = \begin{bmatrix} 0 & y_+ & y_\times & 0 \\ 0 & y_\times & y_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (171)$$

de acuerdo con descomposición por helicidad descrita en en la sección (3.2), los demás modos, vectorial y escalar, forman un sistema de ecuaciones diferenciales acoplados, de manera separada.

Las ecuaciones de propagación asociadas a cada una de las tres helicidad presentes se pueden agrupar en un sistema de ecuaciones acopladas. De acuerdo con la ec. (169), para los modos de helicidad dos se tiene que:

⁹⁹ Jose Beltrán Jiménez, Jose María Ezquiaga y Lavinia Heisenberg: *Probing cosmological fields with gravitational wave oscillations*. En: *JCAP* 04 (2020), pág. 027. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/04/027. arXiv: 1912.06104 [astro-ph.CO]

$$\mathcal{D}^{S_2} \vec{\Phi} = \left[\hat{N} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \hat{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \vec{\Phi} = 0, \quad (172)$$

siendo el vector

$$\vec{\Phi} = \begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \\ y_+ \\ y_\times \end{pmatrix}, \quad (173)$$

son todos los posibles modos tensoriales, tanto de la perturbación de la métrica como la de los campos vectoriales.

Por consiguiente, la ecuación dinámica en (172) puede ser expresada también a modo de matriz de operadores diferenciales de la forma

$$\mathcal{D}^{S_2} \begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \\ y_+ \\ y_\times \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{hh}^{S_2} & 0 & D_{hy}^{S_2} & 0 \\ 0 & D_{hh}^{S_2} & 0 & D_{hy}^{S_2} \\ D_{yh}^{S_2} & 0 & D_{yy}^{S_2} & 0 \\ 0 & D_{yh}^{S_2} & 0 & D_{yy}^{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_+ \\ h_\times \\ y_+ \\ y_\times \end{pmatrix} = 0. \quad (174)$$

Al agrupar por términos iguales y extraer los nulos, es posible reducir la matriz \mathcal{D}^{S_2} de 16 componentes a 4, de la forma

$$\mathcal{D}^{S_2} \begin{pmatrix} h_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{hh}^{S_2} & D_{hy}^{S_2} \\ D_{yh}^{S_2} & D_{yy}^{S_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_A \\ y_A \end{pmatrix} = 0, \quad (175)$$

el índice A , representa los modos $+$ y \times . Dado que para este trabajo se consideran las ondas gravitacionales propagándose únicamente en la dirección z a lo largo del tiempo η , como se mostró en la sección (2.4). La ecuación (175), puede ser escrita como:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \begin{pmatrix} C_{hh} & C_{hy} \\ C_{yh} & C_{yy} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \vec{\Phi} = 0, \quad (176)$$

donde

$$\hat{C} = -\hat{N}^{-1}\hat{Z},$$

dado que se encontró que \hat{N} no es singular.

De esta manera, la ecuación (176) puede ser interpretada con un problema de valores y vectores propios. Al definir $\vec{\Phi} = \vec{f}(z - v_g \eta) = \vec{f}(u)$ se obtiene la expresión:

$$v_g^2 \frac{d^2}{du^2} \vec{f}(u) - \hat{C} \frac{d^2}{du^2} \vec{f}(u) = 0. \quad (177)$$

De este modo, el cuadrado de las velocidades corresponde al valor de los autovalores:

$$v_{gi}^2 = \left(C_{hh} - \frac{1}{2} \Delta C \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta C^2 + 4 C_{hy} C_{yh}} \right), \quad (178)$$

donde

$$\Delta C = C_{hh} - C_{yy},$$

Consecuentemente, los autovectores asociados a los autovalores en ec. (178) son:

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2C_{hy}}{\Delta C + \sqrt{4C_{hy}C_{yh} - \Delta C^2}} \\ \frac{2C_{yh}}{\Delta C + \sqrt{4C_{hy}C_{yh} + \Delta C^2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (179)$$

estos corresponden a los estados propios de propagación de las ondas. Cuando las velocidades de propagación de las ondas gravitacionales difieren de la velocidad lumínica, se las denomina anómalas y su cuantificación resulta ser un observable directo para descartar teorías de gravedad modificada. La desviación de la velocidad de propagación de las ondas gravitacionales respecto a la velocidad de la luz puede parametrizarse mediante la cantidad

$$\alpha_{GW} = \frac{v_{gi}^2}{c} - 1 = C_{hh} - 1 - \frac{1}{2} \Delta C \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{4C_{hy}C_{yh} + \Delta C^2} \right), \quad (180)$$

la cual cuantifica la diferencia con la velocidad de la luz, la cual en las unidades fijadas, corresponde a $c = 1$. En esta expresión, los términos C_{hy} y C_{yh} codifican

posibles términos de mezcla entre la perturbación de la métrica y la de los campos vectoriales. Aún cuando las cantidades $C_{hh} = C_{yy} = 1$, si los términos de mezcla son diferentes de cero, se induce una velocidad de propagación anómala. La magnitud α_{GW} caracteriza, por tanto, una modificación efectiva del cono causal asociado a las perturbaciones gravitacionales, permitiendo que su velocidad de propagación difiera de la lumínica sin introducir, en este análisis, efectos de dispersión en frecuencia.

Si la velocidad de propagación de fase de las ondas gravitacionales es $v_{gi} > 1$, el cono característico de ese modo queda estrictamente más abierto que el cono nulo electromagnético: pares de eventos que son no conectables por señales lumínicas pasan a ser conectables por perturbaciones gravitacionales de dicho modo. En ese escenario, para una emisión simultánea de radiación gravitacional y electromagnética, un observador puede registrar primero la señal gravitacional; el adelanto temporal observable viene fijado por la distancia y la diferencia entre las velocidades de propagación, además de posibles retardos intrínsecos de la fuente y de propagación en el medio para la componente electromagnética. Cabe precisar que la causalidad está gobernada por la velocidad de grupo: una v_{gi} superluminal no implica por sí misma violación causal si la velocidad de grupo permanece lumínica.

Si la velocidad de frente del modo es sublumínica, $v_{gi} < 1$, el cono característico gravitacional queda estrictamente contenido en el cono nulo electromagnético. En ese caso existen pares de eventos que pueden conectarse mediante señales electromagnéticas pero permanecen causalmente inconectables por perturbaciones gravitacionales de ese modo. En cambio, un valor sublumínico de la velocidad de grupo no modifica la estructura causal: describe propagación dispersiva, es decir, existe retraso del máximo del sobre y ensanchamiento del pulso, sin implicar estrechamiento del dominio causal.

A partir de las ecuaciones (178) y (179), se puede afirmar que es posible la existencia de dos velocidades diferentes para los modos $h_{+, \times}$. Las condiciones para que se

presente este fenómeno son:

1. El término de mezcla $C_{hy} \neq 0$ en la matriz de velocidades. Esto se ve reflejado en los autovalores

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix}, \quad (181)$$

siendo a y d diferentes de cero.

2. Las velocidades de propagación, provenientes de los autovalores en (178), deben ser $v_{g1} \neq v_{g2}$.

La propagación multimodal de ondas gravitacionales puede utilizarse como prueba observacional para favorecer o desfavorecer teorías métricas alternativas a RG sin requerir ni una red adicional de interferómetros capaz de reconstruir polarizaciones extra, ni coincidencias con contrapartes electromagnéticas¹⁰⁰. Este enfoque no exige reconstrucción completa de polarizaciones, lo cual sí requiere redes con múltiples orientaciones. El cuadro (??) sintetiza las posibles vías de observación necesarias para detectar los posibles fenómenos presentes en las ondas gravitacionales.

Fenómeno/ Vía de observación	Colaboración LIGO-VIRGO	Contraparte E.M.	Detectores Adicionales
<i>Velocidad Anómala</i>	✓	✓	×
<i>Propagación multimodal</i>	✓	×	×
<i>Polarizaciones extra</i>	✓	×	✓

Tabla 1. Mecanismos de observación requeridos (denotada por el símbolo ✓) y no requeridos (×) para medir los fenómenos de velocidad anómala, propagación multimodal y modos de propagación extra en las ondas gravitacionales.

A diferencia de la propagación multimodal, la cual consiste en identificar discrepancias en las velocidades de propagación de un mismo modo de polarización, el

¹⁰⁰ S. Hou e Y. Gong: *Gravitational waves in a general class of Horndeski theories*. En: *Eur. Phys. J. C* 78 (2018), pág. 378; Yu-Qi Dong, Yu-Qiang Liu y Yu-Xiao Liu: *Polarization modes of gravitational waves in generalized Proca theory*. En: *Phys. Rev. D* 109.2 (2024), pág. 024014. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.024014. arXiv: 2305.12516 [gr-qc]

fenómeno de birrefringencia se presenta cuando existen diferencias entre las velocidades de propagación de los autovalores asociados a los autoestados entre los diferentes modos de propagación. Así pues, en la teoría GSU2P, los campos vectoriales introducen acoplamientos que generan mezclas entre los modos tensoriales, vectoriales y/o escalares sobre el fondo FLRW como se muestran en las siguientes dos subsecciones.

3.3.1. Configuración de fondo: triada cósmica Una solución particular de las ecuaciones de campo en la teoría GSU2P que preserva homogeneidad e isotropía corresponde al espaciotiempo de FLRW. En coordenadas cartesianas conformes, el elemento de línea se escribe de la forma:

$$ds^2 = a^2(-c^2 d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (182)$$

donde $a(\eta)$ es el factor de escala que describe la expansión del universo en función del tiempo conforme, η Steven Weinberg: *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley y Sons, 1972. Este fondo se toma como la referencia geométrica sobre la cual se definen las perturbaciones gravitacionales y de los campos vectoriales adicionales.

Posteriormente, este fondo se emplea en las ecuaciones de propagación en (126)-(135) en coordenadas cartesianas, junto con el fondo asociado a los campos vectoriales, cuya configuración puramente espacial o triada cósmica, de la forma:

$$B_{a\mu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi(\eta) \end{bmatrix}; \quad (183)$$

siendo φ un campo escalar dependiente únicamente del tiempo conforme η . Para el estudio de perturbaciones sobre este fondo, se utiliza la aproximación eikonal en el régimen de orden dominante. Esta aproximación se aplica cuando la longitud de

onda reducida de la perturbación es mucho menor que las escalas características de variación del fondo, lo que permite formular la propagación como un problema local.

A continuación se muestran los operadores diferenciales asociados a cada ecuación de propagación según la ec. (172):

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_4^1 , la matriz de operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4^1}^{S_2}$ es:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1 + 40\alpha_1\varphi^4}{2a}\partial_\eta^2 - \frac{1 + 60\alpha_1\varphi^4}{2a}\partial_z^2,$$

$$D_{hy}^{S_2} = -D_{yh}^{S_2} = \frac{20\alpha_1\varphi^3}{a}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{yy}^{S_2} = 4\left(\frac{1 - 5\alpha_1\varphi^2}{a^2}\right)(\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

En este caso, la matriz debe ser diagonalizada puesto que los modos tensoriales de h_A y y_A se mezclan entre sí, dando indicios de una posible variación en la velocidad de propagación de los modos.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_4^3 , la matriz de operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4^3}^{S_2}$ es:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1}{8}\left(\frac{4 + 23\alpha_3\varphi^4}{a}\right)\partial_\eta^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{4 + 47\alpha_3\varphi^4}{a}\right)\partial_z^2,$$

$$D_{hy}^{S_2} = -D_{yh}^{S_2} = \frac{2\alpha_3\varphi^3}{a}\partial_z^2,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

Al igual que el operador inmediatamente anterior, la matriz debe ser diagonalizada puesto que los modos tensoriales de h_A y y_A se mezclan entre sí, dando indicios de una posible variación en la velocidad de propagación de los modos.

- Las componentes no triviales de la matriz $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4^4}^{S_2}$ para los operadores D^{S_2} en el caso de la ecuación de campo proveniente del lagrangiano \mathcal{L}_4^4 son:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1 + 15\alpha_4\varphi^4}{2a}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

Dado que la matriz es diagonal, los modos tensoriales de h_A y y_A no se mezclan. Este hecho no implica directamente que los modos, aunque se propaguen libremente, tengan velocidad lumínica.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_{p3}^4 , las componentes de la matriz de operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_{p3}^4}^{S_2}$ son:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1}{2a}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2);$$

lo que muestra que los modos tensoriales de h_A y y_A permanecen independientes y no se mezclan entre sí.

- Asimismo, para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_2^6 , las componentes de $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_2^6}^{S_2}$ corresponden a:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1}{2a}(\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = 4 \left(\frac{1 - 3\alpha_6 \varphi^2}{a^2} \right) (\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

La matriz también es diagonal, luego se evidencia directamente que los modos tensoriales de h_A y y_A no se mezclan entre sí.

Ahora bien, para determinar las velocidades de propagación asociadas a cada pieza lagrangiana mencionada anteriormente, es necesario encontrar sus eigenvectores y sus autovalores, los cuales corresponden a los modos propios de oscilación y las velocidades de propagación de acuerdo con sus ecuaciones de campo, respectivamente.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}_4^1}^{S_2}$ es:

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_4^1} = \begin{pmatrix} \frac{1+5\alpha_1\varphi^2(1+12\varphi^2+20\alpha_1\varphi^4)}{1+5\alpha_1\varphi^2+40\alpha_1\varphi^4} & 0 \\ \frac{100\alpha_1^2\varphi^7}{1+5\alpha_1\varphi^2+40\alpha_1\varphi^4} & 1 \end{pmatrix}, \quad (184)$$

cuyos valores propios son:

$$v_{g_1}^2 = \frac{1 + 5\alpha_1\varphi^2 (1 + 12\varphi^2 + 20\alpha_1\varphi^4)}{1 + 5\alpha_1\varphi^2 + 40\alpha_1\varphi^4}, \quad (185)$$

$$v_{g_2}^2 = 1;$$

de modo que sus respectivos vectores propios son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5\alpha_1\varphi^4}{\varphi+5\alpha_1\varphi^3} \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (186)$$

Los resultados obtenidos en ecs.(185) y (186) permiten afirmar que los modos tensoriales para el lagrangiano \mathcal{L}_4^1 , el modo h_+ presenta velocidad anómala sin propagación multimodal. Esto no implica existencia de birrefringencia, pues la

diferencia entre las velocidades de propagación entre un estado propio y otro no depende de las polarizaciones, sino de la mezcla entre los modos del fondo y de los vectoriales de fondo. Además, el valor en las velocidades de propagación tanto para el modo h_+ como para el h_\times , luego de un procedimiento análogo para h_\times , se evidencia que son las mismas.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}_4^3}^{S_2}$ es:

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_4^3} = \begin{pmatrix} \frac{4+47\alpha_3\varphi^4}{4+23\alpha_3\varphi^4} & -\frac{16\alpha_3\varphi^3}{4+23\alpha_3\varphi^4} \\ -\frac{1}{2}\alpha_3\varphi^3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (187)$$

cuyos valores propios son:

$$\begin{aligned} v_{g_1}^2 &= \frac{4 + 35\alpha_3\varphi^4 + 2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_3^2\varphi^6(4 + 18\varphi^2 + 23\alpha_3\varphi^4)}}{4 + 23\alpha_3\varphi^4}, \\ v_{g_2}^2 &= \frac{4 + 35\alpha_3\varphi^4 - 2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_3^2\varphi^6(4 + 18\varphi^2 + 23\alpha_3\varphi^4)}}{4 + 23\alpha_3\varphi^4}; \end{aligned} \quad (188)$$

sus respectivos vectores propios son:

$$\vec{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{6\alpha_3\varphi^4 + \sqrt{2}\sqrt{\alpha_3^2\varphi^6(4+18\varphi^2+23\alpha_3\varphi^4)}}{8\alpha_3\varphi^3} \end{bmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{bmatrix} \frac{8\alpha_3\varphi^3}{6\alpha_3\varphi^4 - \sqrt{2}\sqrt{\alpha_3^2\varphi^6(4+18\varphi^2+23\alpha_3\varphi^4)}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (189)$$

Estas diferencias en las velocidades de propagación de los modos tensoriales en relación con la lumínica generan un fenómeno denominado propagación multimodal, el cual no se exhibe en la teoría de gravedad de Einstein. En general, para que exista el fenómeno dicho fenómeno de propagación, debe aparecer un desfase entre las velocidades de fase de propagación de los modos de helicidad 2 observables, h_\times y h_+ . Así pues, la diferencia entre las

velocidades de propagación para los modos de helicidad 2, de acuerdo con la ecuación característica es

$$\Delta v_g^2 = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{\alpha_3^2\varphi^6(4 + 18\varphi^2 + 23\alpha_3\varphi^4)}}{4 + 23\alpha_3\varphi^4}. \quad (190)$$

Ahora bien, para que cada sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden 2x2, asociada a cada pieza lagrangiana (ec. 176), sea fuertemente hiperbólico se debe cumplir dos condiciones. La primera consiste en que los valores propios deben ser positivos, luego deben estar dentro del intervalo $v_g^2 > 0$. La segunda corresponde a que el determinante de la matriz de vectores propios deben ser diferente de cero. Para el caso de la pieza \mathcal{L}_4^3 , esta condición se cumple para el primer valor v_{g1}^2 ; sin embargo, para el segundo valor se deben imponer restricciones, como se muestra en la figura 4.

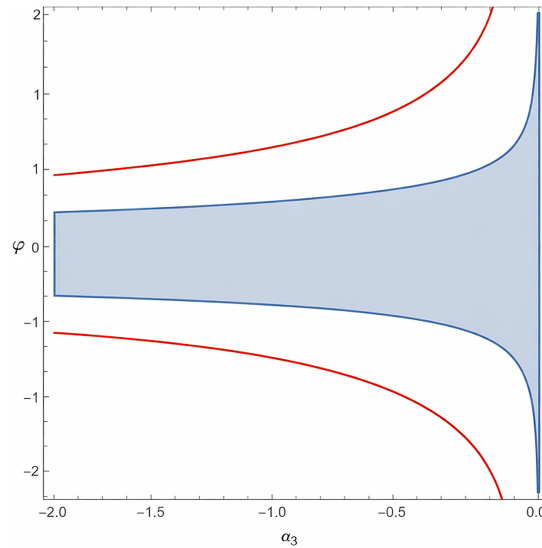


Figura 4. Restricciones para los valores de φ y α_3 . La franja azul corresponde la zona donde las velocidades son reales, es decir v_g^2 es positivo. La zona línea roja corresponde al caso en el que los vectores propios no son linealmente dependientes. Sólo los valores dentro de la franja azul son admisibles.

Esto implica que las dos condiciones de sistema hiperbólico no se cumple fuera de la zona azul, ni a lo largo de toda la curva representada en rojo. Luego los valores que se tendrán en cuenta son únicamente aquellos que se encuentran dentro o en los bordes de la franja azul.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}_4^4}^{S_2}$ es:

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_4^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (191)$$

con autovalores

$$\boxed{v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1}, \quad (192)$$

los cuales corresponden a la velocidad de la luz.

De allí, se deduce que los vectores propios asociados son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (193)$$

Con base en los criterios para la existencia del fenómeno de propagación multimodal, dado que la matriz es diagonal

$$C_{hy} = 0,$$

es posible afirmar que no se presenta para esta pieza lagrangiana.

La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}_{p3}^4}^{S_2}$ es

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_{p3}^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (194)$$

con autovalores

$$\boxed{v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1}, \quad (195)$$

siendo nuevamente, la velocidad de la luz. De allí, se deduce que los vectores propios son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que

$$C_{hy} = 0,$$

es posible afirmar que esta pieza lagrangiana no exhibe fenómeno de propagación multimodal.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}_6^2}^{S_2}$ es

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_6^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$\boxed{v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1}, \quad (196)$$

los cuales corresponden a la velocidad de la luz. De allí, se deduce que los vectores propios son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que se obtiene también

$$C_{hy} = 0,$$

luego, para este caso, no hay evidencia de propagación multimodal.

Cabe resaltar que la discrepancia entre las velocidades de las ondas gravitacionales y la lumínica ya ha sido medida experimentalmente en GW170817 y GRB 170817A, dado que la colisión del binario de estrellas de neutrones poseen su contraparte electromagnética mediante Gamma Ray Burst GRBs ¹⁰¹. Al considerar un retardo temporal entre la señal electromagnética y la de la onda gravitacional de 10 segundos, se obtuvo una cota inferior; mientras que al considerar que las señales se emitieron simultáneamente, se obtuvo una cota superior:

$$-3 \times 10^{-15} \leq v_g - 1 \leq 7 \times 10^{-16}, \quad (197)$$

las cuales resultan ser asimétricas. No obstante, al simetrizar (197), se obtiene que la velocidad de la luz, posee una diferencia relativa con la onda gravitacional de la forma:

$$|v_g - 1| \leq 5 \cdot 10^{-16}. \quad (198)$$

Este valor representa órdenes de magnitud más estrictos que los límites directos anteriores reportados en ¹⁰², los cuales son $0.55 < v_g - 1 < 1.42$, con un porcentaje del 90% de credibilidad, a partir de las 3 primeras mediciones de la colaboración Ligo-Virgo.

La determinación de estas velocidades anómalas ya han sido halladas en teorías

¹⁰¹ B. P. Abbott et al.: *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*. En: *Astrophys. J. Lett.* 848.2 (2017), pág. L13. DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c. arXiv: 1710.05834 [astro-ph.HE]

¹⁰² Neil Cornish, Diego Blas y Germano Nardini: *Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.16 (2017), pág. 161102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161102. arXiv: 1707.06101 [gr-qc]

como Horndeski y Proca Generalizada ¹⁰³, en donde se evalúa su posible viabilidad. No obstante, para la teoría de GPSU2 no se había calculado el valor específico a la fecha.

Lo anterior muestra que, para la triada cósmica sobre un fondo FLRW homogéneo-isótropo, los lagrangianos \mathcal{L}_1^4 y \mathcal{L}_3^4 exhiben velocidad anómala; sin embargo, únicamente \mathcal{L}_3^4 presenta propagación multimodal como se detalla en el cuadro (2).

Operador Diferencial (Triada Cósmica)	Presenta Velocidad anómala	Presenta Propagación Multimodal	Presenta Birrefringencia
\mathcal{L}_{p3}^4	×	×	×
\mathcal{L}_4^4	×	×	×
\mathcal{L}_1^4	✓	×	×
\mathcal{L}_3^4	✓	✓	×
\mathcal{L}_1^6	×	×	×

Tabla 2. Caracterización de las piezas lagrangianas de la teoría GPSU2 bajo la configuración puramente espacial de los campo vectoriales.

De otro lado, ningún término reportado presenta el fenómeno de birrefringencia gravitacional, dado que no se estudiaron más modos de propagación diferentes al tensorial; objetivo que se deja para una extensión futura del presente trabajo.

3.3.2. Configuración del fondo: Puramente Temporal Una vez determinadas las velocidades asociadas a un fondo cuya configuración es puramente espacial, se procede a estudiar su contraparte puramente temporal, cuya forma explícita de los campos es:

$$B_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} \varphi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ \varphi(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ \varphi(\eta) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (199)$$

¹⁰³ Ezquiaga y Zumalacárregui 2017a

de tal forma que las ecuaciones de propagación bajo la aproximación Eikonal a orden dominante para cada pieza lagrangiana serán mencionadas a continuación.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_4^1 , la matriz de operadores $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4^1}^{S_2}$ es:

$$D_{hh}^{S_2} = \left(\frac{1 + 108\alpha_1\varphi^4}{2a} \right) \partial_\eta^2 - \frac{1}{2a} \partial_z^2,$$

$$D_{hy}^{S_2} = -\frac{1}{2a} \partial_z^2,$$

$$D_{yh}^{S_2} = \frac{4(1 - 5\alpha_1\varphi^2)}{a\eta^2} \partial_z^2,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \left(\frac{4(1 - 5\alpha_1\varphi^2)}{a\eta^2} \right) (\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

Nótese que la matriz de operadores diferenciales no es diagonal, lo que implica acoplamiento entre los modos tensores h_A y y_A y sugiere una discrepancia en las velocidades de propagación características. Para calcular dichas velocidades se diagonaliza la matriz: primero se obtienen los vectores propios y, a partir de ellos, los valores propios que, según las ecuaciones de campo linealizadas, representan las velocidades de cada modo.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_4^3 , se tiene que la matriz $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_4^3}^{S_2}$ es:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{4 + 27\alpha_3\varphi^4}{8a} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2);$$

luego, la matriz también es diagonal; se evidencia directamente que los modos

tensoriales de h_A y y_A se mezclan entre sí.

- La expresión asociada a la matriz $D_{\mathcal{L}_4^4}^{S_2}$ para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_4^4 , en componentes, es:

$$D_{hh}^{S_2} = \left(\frac{1 + 27\alpha_4\varphi^4}{2a} \right) (\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

En este caso la matriz resulta diagonal, por lo que los modos tensoriales h_A y y_A permanecen desacoplados y se propagan de forma independiente. Sin embargo, la ausencia de mezclas no garantiza que dichas perturbaciones viajen necesariamente a la velocidad de la luz.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_{p3}^4 es:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1}{2a} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \frac{4}{a^2} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

Estas componentes muestran que la matriz cinética asociada a la pieza lagrangiana \mathcal{L}_{p3}^4 también es diagonal, lo que evidencia de manera directa que los modos tensoriales de h_A y y_A no se mezclan entre sí.

- Para la pieza lagrangiana \mathcal{L}_6^2 , se tiene que la matriz $D_{\mathcal{L}_6^2}^{S_2}$ es:

$$D_{hh}^{S_2} = \frac{1}{2a} (\partial_\eta^2 - \partial_z^2),$$

$$D_{hy}^{S_2} = D_{yh}^{S_2} = 0,$$

$$D_{yy}^{S_2} = \left(\frac{4(1 + 3\alpha_6\varphi^2)}{a^2} \right) (\partial_\eta^2 - \partial_z^2).$$

Dado que la matriz es diagonal; se evidencia directamente que los modos tensoriales de h_A y y_A no se mezclan entre sí.

A partir las componentes de la matriz de operadores, es posible determinar la matriz de velocidades y, consecuentemente, las velocidades características que posee cada una de las piezas lagrangianas en estudio.

- La matriz de velocidades para \mathcal{L}_4^1 es

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+108\alpha_1\varphi^4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (200)$$

cuyos valores propios son:

$$v_{g_1}^2 = \frac{1}{1 + 108\alpha_1\varphi^4}, \quad (201)$$

$$v_{g_2}^2 = 1.$$

Asimismo, los estados propios de oscilación o vectores propios son:

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (202)$$

Los resultados obtenidos en ecs. (201) y (202) permiten concluir que los modos tensoriales para el lagrangiano \mathcal{L}_4^1 , los modos h_+ y h_\times no presentan velocidad anómala bajo esta configuración de fondo, luego tampoco existe birrefringencia, pues la diferencia entre las velocidades de propagación entre un estado propio y otro no depende de las polarizaciones, sino de la mezcla entre los modos del fondo y de los vectoriales de fondo.

$$\alpha_{GW} = \left(1 - \frac{1}{(1 + 108\alpha_1\varphi^4)^2} \right). \quad (203)$$

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}_4^3}^{S_2}$ es:

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_4^3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (204)$$

cuyos valores propios son los mismo que para las tres primeras piezas lagrangianas tratadas anteriormente:

$$\begin{aligned} v_{g_1}^2 &= 1, \\ v_{g_2}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (205)$$

Los respectivos vectores propios son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (206)$$

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}_4^4}^{S_2}$ es

$$\hat{C}_{\mathcal{L}_4^4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (207)$$

con autovalores

$$\boxed{v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1}, \quad (208)$$

donde los vectores propios son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (209)$$

Dado que, para este caso, la matriz es diagonal, $c_{hy} = 0$, es posible afirmar que no hay fenómeno de propagación multimodal.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}^4_{p3}}^{S_2}$ es

$$\hat{C}_{\mathcal{L}^4_{p3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (210)$$

con autovalores

$$v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1,$$

cuyos autovectores son

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esta pieza lagrangiana tampoco presenta fenómeno de propagación multimodal.

- La matriz de velocidades asociada al operador $\hat{D}_{\mathcal{L}^2_6}^{S_2}$ es

$$\hat{C}_{\mathcal{L}^2_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con autovalores

$$v_{g_1}^2 = v_{g_2}^2 = 1,$$

y sus respectivos autovectores:

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en la configuración anterior, esta pieza lagrangiana no exhibe fenómeno de propagación multimodal.

De este modo, se puede concluir que, en una configuración puramente temporal sobre un espaciotiempo FLRW homogéneo-isótropo, los lagrangianos \mathcal{L}_3^4 exhiben velocidad anómala y ninguna presenta el fenómenos de birrefringencia, tal como se recoge en el Cuadro(3).

Operador Diferencial (Triada Cósmica)	Presenta Velocidad anómala	Presenta Propagación Multimodal	Presenta Birrefringencia
\mathcal{L}_{p3}^4	×	×	×
\mathcal{L}_4^4	×	×	×
\mathcal{L}_1^4	✓	×	×
\mathcal{L}_3^4	✓	×	×
\mathcal{L}_1^6	×	×	×

Tabla 3. Caracterización de las piezas lagrangianas de la teoría GPSU2 bajo la configuración puramente temporal de los campo vectoriales.

Caso análogo a la configuración triada cósmica, ningún término reportado presenta el fenómeno de birrefringencia gravitacional, dado que no se estudiaron más modos de propagación diferentes al tensorial. No obstante, con la información obtenida y proyección para extensiones futuras a este trabajo, a continuación se presentan la perspectivas observacionales.

3.4. Perspectivas Observacionales

Estos resultados cobran relevancia cuando se requiere contrastar la Relatividad General con teorías métricas alternativas de la gravedad, entre ellas la teoría GSU2P, pues la astrofísica de ondas gravitacionales ofrece las tres estrategias observacionales, sensibles a distintos aspectos de la propagación y del contenido dinámico de la teoría, mencionadas anteriormente. Todas ellas se formulan en el marco de la teoría linealizada sobre fondos cosmológicos casi FLRW y, en el régimen eikonal,

permiten obtener observables directamente medibles en los interferómetros de la colaboración LIGO-VIRGO. Las tres perspectivas son:

1. La velocidad de propagación necesita de una contraparte electromagnética para medir diferencias entre el tiempo de detección las señales las ondas gravitacionales y las electromagnéticas. La detección de GW170817 y GRB170817A fija límites estrictos con la velocidad de la luz y descarta desviaciones posibles producidas en fondos cosmológicos, lo que restringe directamente la elección de marcos alternativos a relatividad general¹⁰⁴. En el caso de la teoría GSU2P, los campos vectoriales introducen grados adicionales de tipo tensorial, vectorial y escalar sobre el fondo de FLRW. Para la configuración triada cósmica, se encontró que de las cinco piezas lagrangianas, dos poseen velocidad anómala, \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^3 ; adicionalmente, sólo \mathcal{L}_4^3 presenta propagación multimodal. Para la configuración puramente espacial, las piezas \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^3 presentan velocidades anómalas, sin embargo, ninguna pieza evidencia propagación multimodal.

Puesto que las velocidades de propagación dependen de la función escalar $\varphi(\eta)$, que cuantifica la evolución dinámica del fondo vectorial, es necesario conocer la dinámica de fondo. Desafortunadamente, este análisis, para las piezas lagrangianas de la teoría *GSU2P*, no ha sido registrado en la literatura hasta el momento. De otro lado, el trabajo ¹⁰⁵ estudia la dinámica del fondo, donde se encuentran limitaciones de la teoría GSU2P para reproducir la historia térmica del universo. Sin embargo, en este trabajo se elige una combinación particular de los parámetros libres de la teoría, la cual no coincide con la utilizada en

¹⁰⁴ Ezquiaga y Zumalacárregui 2017a

¹⁰⁵ Santiago Garcia-Serna et al.: *Dynamical shortcomings in the Generalized SU(2) Proca theory: challenges for cosmic acceleration*. En: *JCAP* 07 (2025), pág. 037. DOI: 10.1088/1475-7516/2025/07/037. arXiv: 2501.17280 [gr-qc]

el presente trabajo. La selección de los parámetros libres en ¹⁰⁶, permite que las ecuaciones de las perturbaciones tensoriales sean idénticas a las de la Relatividad General, por lo cual es bastante restrictiva, lo que garantiza que la velocidad de propagación sea luminal. No obstante, esta combinación no es la única que garantiza velocidad de propagación luminal, tal y como se muestra en este trabajo, pues las piezas $\mathcal{L}_{4,}^4$, $\mathcal{L}_{3,p}^4$ y \mathcal{L}_2^6 presentan propagación luminal.

2. La detección de polarizaciones adicionales permite favorecer o no una determinada teoría de gravedad. No obstante, esto requiere el montaje de detectores adicionales dispuestos a distintos ángulos con el ánimo de tener cobertura en diferentes direcciones para aquellos modos que son no solo tipo transversal-transversal, sino, transversal-longitudinal o longitudinal-longitudinal¹⁰⁷.

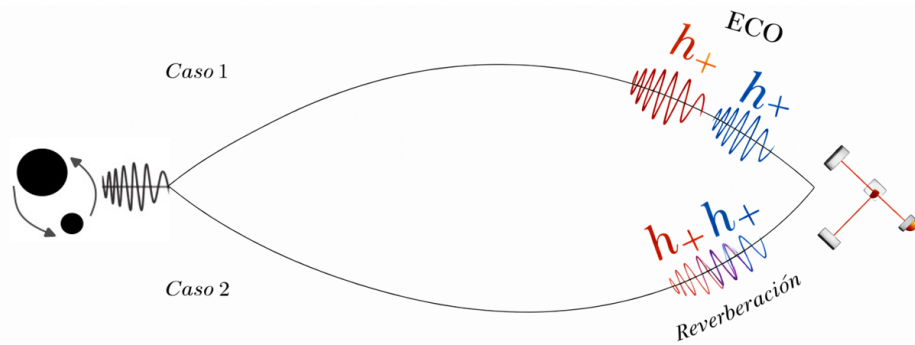


Figura 5. Representación pictórica de la propagación multimodal de las ondas gravitacionales en un fondo homogéneo e isótropo de FLRW, para los modos tensoriales.

3. El fenómeno de propagación multimodal se presenta cuando existen discrepancias en las velocidades de los estados propios de propagación de las ondas gravitacionales. Las observaciones para este fenómeno son posibles bajo dos condiciones distintas, las cuales se definen mediante la resolución temporal del detector, σ_{tg} ; el tiempo de duración de la señal, T_g ; el tiempo de obser-

¹⁰⁶ Garnica et al. 2022

¹⁰⁷ Abbott et al. 2017b

vación o medición del detector T_{obs} y el tiempo de retraso entre dos señales emitidas por la misma fuente, Δt_{12} . La primera opción se presenta cuando

$$\sigma_{tg} \leq |\Delta t_{12}| \leq T_g,$$

la duración de las señales son menores al tiempo de retraso entre las dos, causa patrones de interferencia, se denomina *Scrambling* o reverberación, dado que la señal resultante se observa como una sola, distorcionando las señales iniciales.

La segunda ocurre cuando la duración de la señal es menor al tiempo de retraso entre las señales,

$$T_g \leq |\Delta t_{12}| \leq T_{obs},$$

la señal resultante se observa como dos señales independientes. Este fenómeno se denomina *Eco*. Cabe resaltar que hasta el momento, ninguna señal de Eco o Reverberación ha sido detectada.

4. Conclusiones

La Relatividad General constituye la teoría estándar de la gravitación, en la que el tensor métrico es el único campo dinámico asociado a la interacción gravitacional, y sus ecuaciones de movimiento derivan de la acción de Einstein-Hilbert. Una vez consideradas las simetrías de difeomorfismo y las identidades de Bianchi, la teoría predice únicamente dos grados de libertad radiativos: los modos tensoriales transversales h_+ y h_\times , interpretados como las polarizaciones de las ondas gravitacionales. No obstante, algunas teorías modificadas de la gravedad extienden la dinámica gravitacional mediante campos escalares, vectoriales o tensoriales de orden superior, prediciendo hasta 6 modos de polarización.

Dentro de este conjunto de teorías se encuentra la teoría Generalizada de Proca $SU(2)$ (GSU2P). Esta teoría extiende el marco de los campos de Proca, empleando una tríada de campos vectoriales que transforman en la representación adjunta de $SU(2)$. La elección de este grupo no abeliano, homomorfo a $SO(3)$, permite formular configuraciones de tríada cósmica que mantienen la isotropía y homogeneidad propias de un fondo tipo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Este trabajo abordó el estudio de la propagación de ondas gravitacionales en la teoría GSU2P, sobre un fondo homogéneo e isótropo, en el régimen linealizado, bajo la aproximación eikonal a orden dominante. Esta aproximación es válida cuando la longitud de onda reducida de las perturbaciones es pequeña en comparación con las escalas características asociadas a la variación de la métrica de fondo, la curvatura y los parámetros dinámicos de la teoría.

La acción general de la teoría GSU2P contiene 21 piezas lagrangianas, entre ellas la de Einstein-Hilbert, Yang-Mills, y de materia. Se consideraron en particular las piezas \mathcal{L}_4^1 , \mathcal{L}_4^2 , \mathcal{L}_4^3 , \mathcal{L}_6^2 y \mathcal{L}_{4p}^3 , en donde cada una de ellas exhibe una característica

particular. A partir de la linealización de las ecuaciones de campo sobre un fondo FLRW, se obtuvieron las ecuaciones de propagación a orden dominante, las cuales adoptan una forma matricial. Estas ecuaciones involucran tanto a las perturbaciones de la métrica como a las de los campos vectoriales, lo que conduce a un sistema acoplado de naturaleza tensor-vector.

La identificación de las helicidad de las perturbaciones se realizó mediante el formalismo de Newman-Penrose, que permite proyectar las componentes de diferentes tensores como la métrica o el tensor de Riemann, sobre una tétrada nula. Este análisis muestra que en general la teoría GSU2P admite un total de 22 grados de libertad, entre radiativos y no radiativos. En el sector métrico se recuperan los dos modos tensoriales de la Relatividad General, junto con cuatro modos escalares y cuatro vectoriales adicionales, mientras que en el sector vectorial emergen dos modos tensoriales, cuatro escalares y seis vectoriales.

En conjunto, la teoría predice polarizaciones adicionales, las cuales resultan separables en un fondo FLRW, permitiendo la identificación individual de cada helicidad. Sin embargo, el análisis de los modos escalares y vectoriales se pospone para un trabajo posterior, debido a la complejidad de las ecuaciones de campo. Una vez separadas las ecuaciones de propagación por helicidad, se determinaron los modos propios de propagación con sus respectivas velocidades características. Allí se encontró el fenómeno de propagación multimodal y velocidades anómalas para una de las dos configuraciones de los campos vectoriales elegidas.

Más específicamente, para la teoría de GSU2P se obtuvieron los siguientes resultados en un fondo de FLRW: Las piezas lagrangianas \mathcal{L}_4^4 , \mathcal{L}_{3p}^4 y \mathcal{L}_6^2 predicen una propagación lumínica, haciendo que permanezcan compatibles con las restricciones observacionales actuales y constituyan a ser candidatos viables dentro del sector lumínico de la gravedad modificada. En contraste, los términos \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^3 predicen velocidades de propagación no lumínicas y, en el caso de \mathcal{L}_4^3 , propagación multimodal,

fenómenos hasta el momento, no observados por los experimentos.

Para que se dé una propagación lumínica en los lagrangianos \mathcal{L}_4^1 y \mathcal{L}_4^3 se requiere que los parámetros α_1 o α_3 , de la acción en la ecuación (2), así como el valor del campo de fondo, $\varphi(\eta)$, adopten valores específicos en la época cosmológica actual. Si bien esta condición no excluye de manera estricta dichos términos, sí introduce la necesidad de justificar dinámicamente por qué el sistema evoluciona de forma natural hacia un régimen luminal en el universo tardío.

Por su parte, las restantes piezas analizadas no presentan esta dependencia y satisfacen las restricciones de propagación sin requerir ajustes adicionales. Este estudio constituye un primer paso en el proceso de contrastar la teoría GSU2P desde la perspectiva de la propagación de ondas gravitacionales, dado que un análisis completo debe considerar escenarios en los que coexistan simultáneamente dos o más piezas lagrangianas y evaluar sus efectos combinados sobre la dinámica y la causalidad de las perturbaciones.

Por otra parte, no se identificó birrefringencia gravitacional, ya que la simetría entre los modos tensoriales h_+ y h_\times se mantiene en todos los casos estudiados. No obstante, en la pieza \mathcal{L}_4^3 se observa que cada polarización se descompone en múltiples frentes de onda, como consecuencia de que la matriz de velocidades del sistema acoplado métrica-vector posee un espectro de autovalores no degenerado. La ausencia de evidencias observacionales de ecos o fenómenos asociados a propagación multimodal exige descartar o restringir estos sectores lagrangianos en cualquier extensión consistente de la Relatividad General que busque describir las detecciones actuales.

Es importante resaltar que la evolución dinámica del campo de fondo $\varphi(\eta)$ no se encuentra determinada en el marco del presente análisis. En consecuencia, los resultados obtenidos se expresan en términos de parámetros efectivos que encapsulan

la dependencia funcional de las velocidades de propagación respecto al fondo cosmológico y a los acoplamientos de la teoría. Esta formulación permite que, una vez se establezca de manera consistente la historia cosmológica y térmica del universo dentro de la teoría GSU2P, sea posible fijar de forma explícita las velocidades de propagación y, en caso de presentarse, estimar los tiempos característicos asociados a ecos o fenómenos de reverberación en las señales de ondas gravitacionales.

Asimismo, es importante destacar que este comportamiento difiere de la teoría generalizada de Proca, en la cual no se presenta propagación multimodal en fondos homogéneos e isótropos. Esta ausencia se debe a que el sector abeliano carece de la estructura interna necesaria para inducir mezclas entre estados propios de propagación en el sector tensorial. Luego, la aparición de propagación multimodal en la teoría GSU2P constituye una evidencia directa de su carácter no abeliano.

Consecuentemente, dentro del esquema de clasificación $E(2)$ de Eardley ¹⁰⁸, basado en los escalares de Newman-Penrose asociados al tensor de Riemann linealizado, se mostró que el escalar Ψ_4 es distinto de cero para las piezas lagrangianas $\mathcal{L}_4^1, \mathcal{L}_4^2, \mathcal{L}_4^3, \mathcal{L}_6^2$ y \mathcal{L}_{4p}^3 , lo que confirma la presencia de modos tensoriales radiativos. En consecuencia, estos sectores no pertenecen a las clases O_0 ni O_1 , caracterizadas por la ausencia de radiación tensorial, sino que se ubican en clases radiativas con contenido tensorial no trivial.

La teoría GSU2P presenta consecuencias observacionales relevantes en contextos astrofísicos y cosmológicos. En agujeros negros, los campos vectoriales no abelianos modifican la estructura de las geodésicas nulas, afectando la esfera de fotones y la sombra observable. En estrellas de neutrones, alteran el equilibrio hidrostático y las relaciones masa-radio, así como la deformabilidad de marea, parámetros accesibles mediante observaciones de NICER y ondas gravitacionales de fusiones

¹⁰⁸ Eardley, Lee y Lightman 1973b

binarias. En cosmología, la configuración de tríada cósmica permite construir escenarios de inflación y energía oscura compatibles con la homogeneidad e isotropía observacionales. La extensión natural de este trabajo consiste en analizar los modos de polarización restantes y evaluar la posible aparición de birrefringencia gravitacional al considerar el conjunto completo que incluye el sector escalar y vectorial.

BIBLIOGRAFÍA

Abbott, B. P. et al.: *Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A*. En: *Astrophys. J. Lett.* 848.2 (2017), pág. L13. DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c. arXiv: 1710.05834 [astro-ph.HE].

— *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.16 (2017), pág. 161101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101. arXiv: 1710.05832 [gr-qc].

— *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. En: *Phys. Rev. Lett.* 116.6 (2016), pág. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

Acernese, F. et al.: *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*. En: *Class. Quant. Grav.* 32.2 (2015), pág. 024001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/2/024001. arXiv: 1408.3978 [gr-qc].

Adler, Stephen L.: *Einstein Gravity as a Symmetry-Breaking Effect in Quantum Field Theory*. En: *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982). [Erratum: *Rev.Mod.Phys.* 55, 837 (1983)], pág. 729. DOI: 10.1103/RevModPhys.54.729.

Agazie, Gabriella et al.: *The NANOGrav 15 yr Data Set: Evidence for a Gravitational-wave Background*. En: *Astrophys. J. Lett.* 951.1 (2023), pág. L8. DOI: 10.3847/2041-8213/acdac6. arXiv: 2306.16213 [astro-ph.HE].

Aghanim, N. et al.: *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. En: *Astron. Astrophys.* 641 (2020). [Erratum: *Astron.Astrophys.* 652, C4 (2021)], A6. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].

Allys, Erwan et al.: *Generalized Proca action for an Abelian vector field*. En: *JCAP* 02 (2016), pág. 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/02/004. arXiv: 1511.03101 [hep-th].

Arcos, H. I. et al.: *Torsion Gravity: a Reappraisal*. En: *Int. J. Mod. Phys. D* (2005).

Bach, Rudolf et al.: *Neue lösungen der Einsteinschen gravitationsgleichungen*. En: *Mathematische Zeitschrift* 13.1 (1922), págs. 134-145.

Baker, T. et al.: *Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251301. arXiv: 1710.06394 [astro-ph.CO].

Beltrán Jiménez, José et al.: *Probing cosmological fields with gravitational-wave oscillations*. 2019. arXiv: 1912.06104 [gr-qc].

Beltrán Jiménez, Jose et al.: *Probing cosmological fields with gravitational wave oscillations*. En: *JCAP* 04 (2020), pág. 027. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/04/027. arXiv: 1912.06104 [astro-ph.CO].

Beltrán Jiménez, Jose et al.: *Cosmology with vectortensor theories*. En: *Phys. Rev. D* 78.6 (2013), pág. 063005. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.063005.

Beltrán Jiménez, Jose et al.: *Generalized multi-Proca fields*. En: *Phys. Lett. B* 770 (2017), págs. 16-26. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.03.002. arXiv: 1610.08960 [hep-th].

Bertone, Gianfranco et al.: *A new era in the search for dark matter*. En: *Nature* 562 (2018), págs. 51-56. DOI: 10.1038/s41586-018-0542-z.

Bertone, Gianfranco et al.: *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*. En: *Phys. Rept.* 405 (2005), págs. 279-390. DOI: 10.1016/j.physrep.2004.08.031. arXiv: hep-ph/0404175.

Brans, Carl et al.: *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. En: *Physical review* 124.3 (1961), pág. 925.

Bull, Philip et al.: *Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead*. En: *Phys. Dark Univ.* 12 (2016), págs. 56-99. DOI: 10.1016/j.dark.2016.02.001. arXiv: 1512.05356 [astro-ph.CO].

Burgess, C. P.: "General Relativity as an Effective Theory". En: *Introduction to Effective Field Theory: Thinking Effectively about Hierarchies of Scale*. Cambridge University Press, 2020, págs. 241-272.

Capote, E. et al.: *Advanced LIGO detector performance in the fourth observing run*. En: *Phys. Rev. D* 111.6 (2025), pág. 062002. DOI: 10.1103/PhysRevD.111.062002. arXiv: 2411.14607 [gr-qc].

Capozziello, Salvatore et al.: *Comparing equivalent gravities: common features and differences*. En: *Eur. Phys. J. C* 82.10 (2022), pág. 865. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10823-x. arXiv: 2208.03011 [gr-qc].

Caprini, Chiara et al.: *Cosmological Backgrounds of Gravitational Waves*. En: *Class. Quant. Grav.* 35.16 (2018), pág. 163001. DOI: 10.1088/1361-6382/aac608. arXiv: 1801.04268 [astro-ph.CO].

Chandrasekhar, Subrahmanyan: *The mathematical theory of black holes*. Vol. 69. Oxford university press, 1998.

Chatziioannou, Katerina et al.: *Model-Independent Test of General Relativity: An Extended post-Einsteinian Framework with Complete Polarization Content*. En: *Phys. Rev. D* 86 (2012), pág. 022004. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.022004. arXiv: 1204.2585 [gr-qc].

Cornish, Neil et al.: *Bounding the speed of gravity with gravitational wave observations*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.16 (2017), pág. 161102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161102. arXiv: 1707.06101 [gr-qc].

Creminelli, Paolo et al.: *Dark Energy after GW170817 and GRB170817A*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251302.

De Felice, Antonio et al.: *Cosmology in generalized Proca theories*. En: *JCAP* 06 (2016), pág. 048. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/06/048. arXiv: 1603.05806 [gr-qc].

Dong, Yu-Qi et al.: *Polarization modes of gravitational waves in generalized Proca theory*. En: *Phys. Rev. D* 109.2 (2024), pág. 024014. DOI: 10.1103/PhysRevD.109.024014. arXiv: 2305.12516 [gr-qc].

Donoghue, John F: *Quantum general relativity and effective field theory*. En: *Handbook of quantum gravity*. 2024, págs. 3-26.

Eardley, D. M. et al.: *Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity*. En: *Phys. Rev. D* 8 (1973), págs. 3308-3321. DOI: 10.1103/PhysRevD.8.3308.

Eardley, Douglas M et al.: *Gravitational-wave observations as a tool for testing relativistic gravity*. En: *Phys. Rev. D* 8.10 (1973), pág. 3308.

Eddington, Arthur Stanley: *The propagation of gravitational waves*. En: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 102 (1922), págs. 268-282. DOI: 10.1098/rspa.1922.0085.

Eichhorn, Astrid: *Curvaturization in metric scalar-tensor theories: spontaneous scalarization of Kerr black holes*. En: *Phys. Rev. D* 111.10 (2025), pág. 104007. DOI: 10.1103/PhysRevD.111.104007.

Errasti Díez, Verónica et al.: *Maxwell-Proca theory: Definition and construction*. En: *Phys. Rev. D* 101.4 (2020), pág. 045009. DOI: 10.1103/PhysRevD.101.045009. arXiv: 1905.06968 [hep-th].

Ezquiaga, Jose María et al.: *Dark Energy After GW170817: Dead Ends and the Road Ahead*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251304. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251304. arXiv: 1710.05901 [astro-ph.CO].

— *Dark energy after GW170817: dead ends and the road ahead*. En: *Physical review letters* 119.25 (2017), pág. 251304.

— *Gravitational wave lensing beyond general relativity: Birefringence, echoes, and shadows*. En: *Phys. Rev. D* 102.12 (2020), pág. 124048.

Flanagan, Eanna E et al.: *The basics of gravitational wave theory*. En: *New Journal of Physics* 7.1 (2005), pág. 204.

Frieman, Joshua A. et al.: *Dark energy and the accelerating universe*. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 46 (2008), págs. 385-432. DOI: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.

Gallego Cadavid, Alexander et al.: *Generalized $SU(2)$ Proca theory reconstructed and beyond*. En: *Phys. Rev. D* 102.10 (2020), pág. 104066. DOI: 10.1103/PhysRevD.102.104066. arXiv: 2009.03241 [hep-th].

Garcia-Serna, Santiago et al.: *Dynamical shortcomings in the Generalized $SU(2)$ Proca theory: challenges for cosmic acceleration*. En: *JCAP* 07 (2025), pág. 037. DOI: 10.1088/1475-7516/2025/07/037. arXiv: 2501.17280 [gr-qc].

Garnica, Juan C. et al.: *Constant-Roll Inflation in the Generalized $SU(2)$ Proca Theory*. En: *Annalen Phys.* 534.2 (2022), pág. 2100453. DOI: 10.1002/andp.202100453. arXiv: 2109.10154 [gr-qc].

- Goenner, Hubert: *Some remarks on the genesis of scalar-tensor theories*. En: *Gen. Rel. Grav.* 44 (2012), págs. 2077-2097. DOI: 10.1007/s10714-012-1378-8. arXiv: 1204.3455 [gr-qc].
- Gomez, Gabriel et al.: *Internal symmetry to the rescue: well-posed 1 + 1 evolution of self-interacting vector fields*. En: *Eur. Phys. J. C* 85.8 (2025), pág. 921. DOI: 10.1140/epjc/s10052-025-14657-1. arXiv: 2503.09757 [gr-qc].
- Gómez, Gabriel et al.: *New non-Abelian Reissner-Nordström black hole solutions in the generalized SU(2) Proca theory and some astrophysical implications*. En: *Phys. Rev. D* 108.2 (2023), pág. 024069. DOI: 10.1103/PhysRevD.108.024069. arXiv: 2301.05222 [gr-qc].
- Gong, Yungui et al.: *Gravitational waves in Einstein-æther and generalized TeVeS theory after GW170817*. En: *Phys. Rev. D* 97.8 (2018), pág. 084040.
- Hayama, K. et al.: *Model-independent test of gravity with a network of ground-based gravitational-wave detectors*. En: *Phys. Rev. D* 87 (2013), pág. 062003.
- Heisenberg, L.: *Generalization of the Proca Action*. En: *JCAP* 2014.05 (2014), pág. 015. DOI: 10.1088/1475-7516/2014/05/015.
- Horndeski, Gregory W. et al.: *50 Years of Horndeski Gravity: Past, Present and Future*. En: *Int. J. Theor. Phys.* 63.2 (2024), pág. 38. DOI: 10.1007/s10773-024-05558-2. arXiv: 2402.07538 [gr-qc].
- Horndeski, Gregory Walter: *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974), págs. 363-384. DOI: 10.1007/BF01807638.
- Hou, S. et al.: *Gravitational waves in a general class of Horndeski theories*. En: *Eur. Phys. J. C* 78 (2018), pág. 378.

Hu, Wen Rui et al.: *The Taiji Program in Space for gravitational wave physics and the nature of gravity*. En: *Natl. Sci. Rev.* 4.5 (2017), págs. 685-686. DOI: 10.1093/nsr/nwx116.

Hulse, Russell A et al.: *Discovery of a pulsar in a binary system*. En: *Astrophys. J.* 195 (1975), págs. L51-L53.

Isaacson, R. A.: *Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics*. En: *Phys. Rev.* 166 (1968), pág. 1263.

Ishak, Mustapha: *Testing General Relativity in Cosmology*. En: *Living Rev. Rel.* 22.1 (2019), pág. 1. DOI: 10.1007/s41114-018-0017-4. arXiv: 1806.10122 [astro-ph.CO].

Jackiw, R. et al.: *ChernSimons modification of general relativity*. En: *Phys. Rev. D* 68.10 (2003), pág. 104012. DOI: 10.1103/PhysRevD.68.104012.

Joyce, Austin et al.: *Dark Energy Versus Modified Gravity*. En: *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 66 (2016), págs. 95-122. DOI: 10.1146/annurev-nucl-102115-044553. arXiv: 1601.06133 [astro-ph.CO].

Kobayashi, Tsutomu: *Horndeski theory and beyond: a review*. En: *Rept. Prog. Phys.* 82.8 (2019), pág. 086901. DOI: 10.1088/1361-6633/ab2429. arXiv: 1901.07183 [gr-qc].

Kovacs, S. J. et al.: *The Generation of Gravitational Waves. 3. Derivation of Bremsstrahlung Formulas*. En: *Astrophys. J.* 217 (1977), págs. 252-280. DOI: 10.1086/155576.

Luo, Jun et al.: *TianQin: a space-borne gravitational wave detector*. En: *Class. Quant. Grav.* 33.3 (2016), pág. 035010. DOI: 10.1088/0264-9381/33/3/035010. arXiv: 1512.02076 [astro-ph.IM].

Maggiore, M.: *Gravitational Waves, Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008.

Maggiore, Michele: *Gravitational Waves. Vol. 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press, 2018.

— *Gravitational waves: Volume 1: Theory and experiments*. OUP Oxford, 2007.

Martinez, Jhan N. et al.: *Neutron stars in the generalized SU(2) Proca theory*. En: *Phys. Rev. D* 110.10 (2024), pág. 104070. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.104070. arXiv: 2408.07674 [gr-qc].

Misner, Charles W. et al.: *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.

Moffat, J. W.: *Scalartensorvector gravity theory*. En: *JCAP* 2006.03 (2006), pág. 004. DOI: 10.1088/1475-7516/2006/03/004.

Murk, S. et al.: *Gravity-induced birefringence in spherically symmetric spacetimes*. En: *Class. Quant. Grav.* 42 (2025), pág. 045004.

Nishizawa, Atsushi et al.: *Probing non-tensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers*. En: *Phys. Rev. D* 79 (2009), pág. 082002. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.082002. arXiv: 0903.0528 [astro-ph.CO].

Nojiri, S. et al.: *Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution*. En: *Phys. Rept.* 692 (2017), págs. 1-104. DOI: 10.1016/j.physrep.2017.06.001. arXiv: 1705.11098 [gr-qc].

Padmanabhan, T.: *Cosmological constant: The Weight of the vacuum*. En: *Phys. Rept.* 380 (2003), págs. 235-320. DOI: 10.1016/S0370-1573(03)00120-0. arXiv: hep-th/0212290.

Pitt, Oliver et al.: *Constraining the Cosmological Evolution of Post-Newtonian Parameters with Gravitational Wave Signals from Compact Binary Inspirals*. En: *arXiv preprint arXiv:2510.08756* (2025).

Poisson, Eric et al.: *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic*. Cambridge University Press, 2014.

Rham, C. de et al.: *Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff*. En: *Phys. Rev. Lett.* 121 (2018), pág. 221101.

Riess, Adam G et al.: *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. En: *Astron. J* 116.3 (1998), págs. 1009-1038.

Sahni, Varun et al.: *The Case for a positive cosmological Lambda term*. En: *Int. J. Mod. Phys. D* 9 (2000), págs. 373-444. DOI: 10.1142/S0218271800000542. arXiv: astro-ph/9904398.

Sakstein, Jeremy et al.: *Implications of the Neutron Star Merger GW170817 for Cosmological Scalar-Tensor Theories*. En: *Phys. Rev. Lett.* 119.25 (2017), pág. 251303. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251303. arXiv: 1710.05893 [astro-ph.CO].

Schutz, Bernard F.: *Gravitational wave astronomy*. En: *Class. Quant. Grav.* 16 (1999), A131-A156. DOI: 10.1088/0264-9381/16/12A/312.

Seoane, Pau Amaro et al.: *Astrophysics with the Laser Interferometer Space Antenna*. En: *Living Rev. Rel.* 26.1 (2023), pág. 2. DOI: 10.1007/s41114-022-00041-y. arXiv: 2203.06016 [gr-qc].

Shankaranarayanan, S. et al.: *Modified theories of gravity: Why, how and what?* En: *General Relativity and Gravitation* 54.5 (mayo de 2022). DOI: 10.1007/s10714-022-02927-2.

Sotiriou, Thomas P. et al.: *Metric-affine $f(R)$ theories of gravity*. En: *Annals of Physics* 322.4 (abr. de 2007), págs. 935-966. DOI: 10.1016/j.aop.2006.06.002.

Steinbauer, Roland: *The Singularity Theorems of General Relativity and Their Low Regularity Extensions*. En: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 125.2 (nov. de 2022), págs. 731-119. DOI: 10.1365/s13291-022-00263-7.

Swart, Jaco de: *Five decades of missing matter*. En: *Physics Today* 77.8 (ago. de 2024), págs. 34-43. DOI: 10.1063/pt.ozhk.lfeb. eprint: https://pubs.aip.org/physicstoday/article-pdf/77/8/34/20082503/34_1_pt.ozhk.lfeb.pdf.

Tasinato, Gianmassimo: *Cosmic acceleration from Abelian symmetry breaking*. En: *J. High Energ. Phys.* 2014.04 (2014), pág. 67. DOI: 10.1007/JHEP04(2014)067.

Thorne, K. S.: *Multipole Expansions of Gravitational Radiation*. En: *Rev. Mod. Phys.* 52 (1980), págs. 299-339. DOI: 10.1103/RevModPhys.52.299.

Tsujikawa, Shinji: *The effective field theory of inflation/dark energy and the Horndeski theory*. En: *Lect. Notes Phys.* 892 (2015). Ed. por Eleftherios Papantonopoulos, págs. 97-136. DOI: 10.1007/978-3-319-10070-8_4. arXiv: 1404.2684 [gr-qc].

Wald, R. M.: *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

Weinberg, Steven: *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.

— *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley y Sons, 1972.

Weisberg, Joel M. et al.: *Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis*. En: *ASP Conf. Ser.* 328 (2005), pág. 25. arXiv: astro-ph/0407149.

Will, Clifford M.: *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. En: *Living Rev. Rel.* 17 (2014), pág. 4. DOI: 10 . 12942/lrr-2014-4. arXiv: 1403 . 7377 [gr-qc].

Will, Clifford M: *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge university press, 2018.

Wolfram Research, Inc.: *Mathematica, Versión 14.2*. Champaign, IL, USA. 2024.

ANEXOS

Anexo A. Ecuaciones de Campo en la teoría GSU2P

A continuación se presentan las 4 expresiones¹⁰⁹ seleccionadas en este trabajo, en componentes tensoriales, asociadas a las ecuaciones de campo provenientes de variar la acción (2) respecto a la métrica:

1. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano $\mathcal{L}_{4,p}^3$ en (20):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left(-4g_c^2 B_{a\mu} B^a{}_\nu B_{b\rho} B^{b\rho} + 2G_{\nu\mu} - g_c^2 B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} + g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \right. \\
 & - \delta_3 B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} R_\nu{}^\alpha{}_\sigma{}^\theta - \delta_3 B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} R_\mu{}^\alpha{}_\sigma{}^a \\
 & - 4g_c B_a{}^\mu B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\nu B^c{}_\rho - 4g_c B_a{}_\nu B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\mu B^c{}_\rho + 4g_c B_a{}_\mu B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho B^c{}_\nu \\
 & + 4g_c B_a{}_\nu B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho B^c{}_\mu + 4\delta_{ab} \left(-\nabla_\nu B^{a\rho} \nabla_\mu B^b{}_\rho + (\nabla_\mu B^b{}_\rho - \nabla_\rho B^b{}_\mu) \nabla^\rho B^a{}_\nu \right. \\
 & \left. + \nabla_\nu B^b{}_\rho \nabla^\rho B^a{}_\mu \right) - 4g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B^c{}_\rho - 2g_{\nu\mu} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B^{a\rho} \\
 & + 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_{a\rho} \nabla^\sigma B^{a\rho} - \delta_3 B_a{}^\mu B_b{}^\sigma B^{b\rho} \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{a\rho} \\
 & - \delta_3 B_a{}_\nu B_b{}^\sigma B^{b\rho} \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{a\rho} - \delta_3 B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{b\nu} \\
 & - \delta_3 B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{b\mu} + B_a{}^\rho \left(-\delta_3 B_a{}_\mu (B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} R_\nu{}^{\beta\alpha\theta} \right. \\
 & \left. + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} (B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{b\rho} + B^b{}_\rho \nabla^\alpha \nabla^\beta B_b{}^\sigma)) + B_a{}_\nu (4g_c^2 B_{b\rho} B^b{}_\mu \right. \\
 & \left. - \delta_3 (B_b{}^\sigma (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} (B^b{}_\rho R_\mu{}^{\beta\alpha\theta} + B^b{}_\mu R_\rho{}^{\beta\alpha\theta})) + B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} R_\sigma{}^{\beta\alpha\theta}) \right. \\
 & \left. + \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} (B^{b\sigma} \nabla^\alpha \nabla^\beta B_{b\rho} + B^b{}_\rho \nabla^\alpha \nabla^\beta B_b{}^\sigma)) \right) = 0;
 \end{aligned} \tag{211}$$

¹⁰⁹ Cada ecuación expresada en este apéndice y en los siguientes fue verificada empleando el software Mathematica Xact¹¹⁰.

2. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^1 en (3):

$$\begin{aligned}
& G_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g_c^2 (4B^a{}_\nu B_{b\rho} (B_a{}^\rho B^b{}_\mu - B_{a\mu} B^{b\rho}) + B^{a\rho} B_{b\sigma} (-B_a{}^\sigma B^b{}_\rho + B_{a\rho} B^{b\sigma}) g_{\nu\mu}) \\
& - 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^{a\rho} \nabla_\mu B^b{}_\rho + 2\delta_{ab} \nabla_\mu B^b{}_\rho \nabla^\rho B^a{}_\nu - 2\delta_{ab} \nabla_\rho B^b{}_\mu \nabla^\rho B^a{}_\nu \\
& + 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^b{}_\rho \nabla^\rho B^a{}_\mu - 2g_c \epsilon_{abc} (B^{b\rho} (B^a{}_\mu (\nabla_\nu B^c{}_\rho - \nabla_\rho B^c{}_\nu) + B^a{}_\nu (\nabla_\mu B^c{}_\rho \\
& - \nabla_\rho B^c{}_\mu)) + B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B^c{}_\rho) - g_{\nu\mu} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B^{a\rho} + g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_{a\rho} \nabla^\sigma B^{a\rho} \\
& + \alpha_1 (B^a{}_\mu (2B_{b\rho} B^{b\rho} (-2\nabla_\nu \nabla_\sigma B_a{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu B_a{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma B_{a\nu}) + 4B^{b\rho} \\
& (-2\nabla_\nu B_{b\rho} \nabla_\sigma B_a{}^\sigma - 2\nabla_\nu B_{a\rho} \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + \nabla_\sigma B_{b\rho} (\nabla_\nu B_a{}^\sigma + \nabla^\sigma B_{a\nu}) \\
& + \nabla_\sigma B_{a\rho} (\nabla_\nu B_b{}^\sigma + \nabla^\sigma B_{b\nu})) + 4B_a{}^\rho (-2\nabla_\nu B^b{}_\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + B^b{}_\rho \\
& (-2\nabla_\nu \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu B_b{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma B_{b\nu}) + \nabla_\sigma B_{b\rho} (\nabla_\nu B^{b\sigma} + \nabla^\sigma B^b{}_\nu))) \\
& + 2B^a{}_\nu (-4B_a{}^\rho B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + B_{b\rho} B^{b\rho} (-2\nabla_\mu \nabla_\sigma B_a{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\mu B_a{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma B_{a\mu}) \\
& + 2(B^b{}_\mu (2\nabla_\rho B_a{}^\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma - (\nabla_\rho B_{b\sigma} + \nabla_\sigma B_{b\rho}) \nabla^\sigma B_a{}^\rho) + B^{b\rho} (-2\nabla_\mu B_{b\rho} \nabla_\sigma B_a{}^\sigma \\
& - 2\nabla_\mu B_{a\rho} \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + \nabla_\sigma B_{b\rho} (\nabla_\mu B_a{}^\sigma + \nabla^\sigma B_{a\mu}) + \nabla_\sigma B_{a\rho} (\nabla_\mu B_b{}^\sigma + \nabla^\sigma B_{b\mu})) \\
& + B_a{}^\rho (-2\nabla_\mu B^b{}_\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + B^b{}_\rho (\nabla_\sigma \nabla_\mu B_b{}^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma B_{b\mu}) + \nabla_\sigma B_{b\rho} (\nabla_\mu B^{b\sigma} \\
& + \nabla^\sigma B^b{}_\mu))) + B_{a\mu} \delta_{bc} (2\nabla_\rho B^{b\rho} \nabla_\sigma B^{c\sigma} - (\nabla_\rho B^c{}_\sigma + \nabla_\sigma B^c{}_\rho) \nabla^\sigma B^{b\rho})) \\
& + B^{a\rho} (-4B_a{}^\sigma (\nabla_\nu B^b{}_\mu + \nabla_\mu B^b{}_\nu) \nabla_\sigma B_{b\rho} - 4B^{b\sigma} (\nabla_\nu B_{a\mu} + \nabla_\mu B_{a\nu}) (\nabla_\rho B_{b\sigma} \\
& + \nabla_\sigma B_{b\rho}) + 8g_{\nu\mu} (B^{b\sigma} (\nabla_\rho B_{a\sigma} + \nabla_\sigma B_{a\rho}) + B_a{}^\sigma \nabla_\sigma B^b{}_\rho) \nabla_\beta B_b{}^\beta + 2B^b{}_\rho \\
& (-2\nabla_\nu B_a{}^\sigma \nabla_\mu B_{b\sigma} - 2(\nabla_\nu B_{a\mu} + \nabla_\mu B_{a\nu}) \nabla_\sigma B_b{}^\sigma - 2B_a{}^\sigma (\nabla_\sigma \nabla_\nu B_{b\mu} + \nabla_\sigma \nabla_\mu B_{b\nu} \\
& - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\beta B_b{}^\beta) + 2\nabla_\sigma B_{b\mu} \nabla^\sigma B_{a\nu} + g_{\nu\mu} (2\nabla_\sigma B_a{}^\sigma \nabla_\beta B_b{}^\beta + (\nabla_\sigma B_{b\beta} \\
& + \nabla_\beta B_{b\sigma}) \nabla^\beta B_a{}^\sigma)) + B_{a\rho} (-2B^{b\sigma} (\nabla_\sigma \nabla_\nu B_{b\mu} + \nabla_\sigma \nabla_\mu B_{b\nu} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\beta B_b{}^\beta) \\
& + \delta_{bc} (-2\nabla_\nu B^{b\sigma} \nabla_\mu B^c{}_\sigma - 2(\nabla_\nu B^b{}_\mu + \nabla_\mu B^b{}_\nu) \nabla_\sigma B^{c\sigma} + 2\nabla_\sigma B^c{}_\mu \nabla^\sigma B^b{}_\nu \\
& + g_{\nu\mu} (2\nabla_\sigma B^{b\sigma} \nabla_\beta B^{c\beta} + (\nabla_\sigma B^c{}_\beta + \nabla_\beta B^c{}_\sigma) \nabla^\beta B^{b\sigma}))) = 0;
\end{aligned} \tag{212}$$

3. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^3 en (16):

$$\begin{aligned}
& G_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g_c^2 (4B^a{}_\nu B_{b\rho} (B_a{}^\rho B^b{}_\mu - B_{a\mu} B^{b\rho}) + B^{a\rho} B_{b\sigma} (-B_a{}^\sigma B^b{}_\rho + B_{a\rho} B^{b\sigma}) g_{\nu\mu}) \\
& - 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^{a\rho} \nabla_\mu B^b{}_\rho + 2\delta_{ab} \nabla_\mu B^b{}_\rho \nabla^\rho B^a{}_\nu - 2\delta_{ab} \nabla_\rho B^b{}_\mu \nabla^\rho B^a{}_\nu \\
& + 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^b{}_\rho \nabla^\rho B^a{}_\mu - 2g_c \epsilon_{abc} (B^{b\rho} (B^a{}_\mu (\nabla_\nu B^c{}_\rho - \nabla_\rho B^c{}_\nu) + B^a{}_\nu (\nabla_\mu B^c{}_\rho \\
& - \nabla_\rho B^c{}_\mu)) + B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B^c{}_\rho) - g_{\nu\mu} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B^{a\rho} + g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_{a\rho} \nabla^\sigma B^{a\rho} \\
& + \frac{1}{4}\alpha_3 (6B_{a\mu} B^a{}_\nu B_{b\rho} B^{b\rho} R - 2B_a{}^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\alpha B^{b\beta} g_{\nu\mu} R_{\rho\beta\sigma\alpha} - 24B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\nu B_{a\rho} \nabla_\mu B_{b\sigma} \\
& - 2B^a{}_\nu (B_b{}^\rho B^b{}_\mu \nabla_\rho \nabla_\sigma B_a{}^\sigma - 2B_{a\mu} B^{b\rho} \nabla_\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma) - 4B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\rho B_{b\mu} \nabla_\sigma B_{a\nu} \\
& - 4B^a{}_\mu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{b\nu} \nabla_\sigma B_a{}^\sigma - 4B^a{}_\nu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{b\mu} \nabla_\sigma B_a{}^\sigma - 4B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\rho B_{a\nu} \nabla_\sigma B_{b\mu} \\
& + 8B_a{}^\sigma B^{a\rho} \nabla_\rho B^b{}_\nu \nabla_\sigma B_{b\mu} + 8B^a{}_\mu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{a\nu} \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + 8B^a{}_\nu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{a\mu} \nabla_\sigma B_b{}^\sigma \\
& - 4B^a{}_\nu B^b{}_\mu \nabla_\rho B_a{}^\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + 4B_{a\mu} B^a{}_\nu \nabla_\rho B^{b\rho} \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + 4B^a{}_\mu B_b{}^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho B_{a\nu} \\
& + 4B^a{}_\nu B_b{}^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho B_{a\mu} - 2B^a{}_\nu B_b{}^\rho B^b{}_\mu \nabla_\sigma \nabla_\rho B_a{}^\sigma + 4B_{a\mu} B^a{}_\nu B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho B_b{}^\sigma \\
& + 8B^a{}_\mu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B_{a\nu} + 8B^a{}_\nu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B_{a\mu} - 4B^a{}_\nu B^b{}_\mu \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B_a{}^\rho \\
& - 4B^a{}_\mu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B_{b\nu} - 4B^a{}_\nu B^{b\rho} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B_{b\mu} - 2B_a{}^\rho (B^a{}_\mu (B^{b\sigma} \\
& (-3B_b{}^\beta R_{\nu\sigma\rho\beta} + \nabla_\rho \nabla_\sigma B_{b\nu} + \nabla_\sigma \nabla_\rho B_{b\nu})) + 2(\nabla_\rho B^b{}_\nu \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B^b{}_\nu)) \\
& + B^a{}_\nu (B^{b\sigma} (-3B_b{}^\beta R_{\mu\sigma\rho\beta} + \nabla_\rho \nabla_\sigma B_{b\mu} + \nabla_\sigma \nabla_\rho B_{b\mu})) + B^b{}_\mu (\nabla_\rho \nabla_\sigma B_b{}^\sigma \\
& + \nabla_\sigma \nabla_\rho B_b{}^\sigma) + 2(\nabla_\rho B^b{}_\mu \nabla_\sigma B_b{}^\sigma + \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B^b{}_\mu))) + 4B_{a\mu} B^a{}_\nu \nabla_\rho B_{b\sigma} \nabla^\sigma B^{b\rho} \\
& + 24B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B_{a\rho} + 3B_{a\rho} B^{a\rho} (-4\nabla_\nu B^{b\sigma} \nabla_\mu B_{b\sigma} + B^{b\sigma} (B_{b\sigma} G_{\nu\mu} \\
& - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu B_{b\sigma} + \nabla_\mu \nabla_\nu B_{b\sigma} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta B_{b\sigma})) + 4g_{\nu\mu} \nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B^{b\sigma})) = 0;
\end{aligned} \tag{213}$$

4. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_2^6 en (16):

$$\begin{aligned}
& G_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g_c^2 (4B_\nu^a B_{b\rho} (B_a^\rho B_\mu^b - B_{a\mu} B^{b\rho}) + B^{a\rho} B_{b\sigma} (-B_a^\sigma B_\rho^b + B_{a\rho} B^{b\sigma}) g_{\nu\mu}) \\
& - 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^{a\rho} \nabla_\mu B_\rho^b + 2\delta_{ab} \nabla_\mu B_\rho^b \nabla^\rho B_\nu^a - 2\delta_{ab} \nabla_\rho B_\mu^b \nabla^\rho B_\nu^a \\
& + 2\delta_{ab} \nabla_\nu B_\rho^b \nabla^\rho B_\mu^a - 2g_c \epsilon_{abc} (B^{b\rho} (B_\mu^a (\nabla_\nu B_\rho^c - \nabla_\rho B_\nu^c) + B_\nu^a (\nabla_\mu B_\rho^c \\
& - \nabla_\rho B_\mu^c)) + B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_\rho^c) - g_{\nu\mu} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B^{a\rho} + g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_{a\rho} \nabla^\sigma B^{a\rho} \quad (214) \\
& + \alpha_6 \delta_{bc} (2B_{a\mu} B_\nu^a (-\nabla_\rho B_\sigma^c + \nabla_\sigma B_\rho^c) \nabla^\sigma B^{b\rho} + B_{a\rho} B^{a\rho} (2\nabla_\nu B^{b\sigma} \nabla_\mu B_\sigma^c \\
& + 2(-\nabla_\mu B_\sigma^c + \nabla_\sigma B_\mu^c) \nabla^\sigma B_\nu^b - 2\nabla_\nu B_\sigma^c \nabla^\sigma B_\mu^b + g_{\nu\mu} (\nabla_\sigma B_\beta^c \\
& - \nabla_\beta B_\sigma^c) \nabla^\beta B^{b\sigma})) = 0;
\end{aligned}$$

5. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^4 en (6):

$$\begin{aligned}
& G_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g_c^2 (4B_\nu^a B_{b\rho} (B_a^\rho B_\mu^b - B_{a\mu} B^{b\rho}) + B^{a\rho} B_{b\sigma} (-B_a^\sigma B_\rho^b + B_{a\rho} B^{b\sigma}) g_{\nu\mu}) \\
& - 2\delta_{ab} \nabla_\nu B^{a\rho} \nabla_\mu B_\rho^b + 2\delta_{ab} \nabla_\mu B_\rho^b \nabla^\rho B_\nu^a - 2\delta_{ab} \nabla_\rho B_\mu^b \nabla^\rho B_\nu^a \\
& + 2\delta_{ab} \nabla_\nu B_\rho^b \nabla^\rho B_\mu^a - 2g_c \epsilon_{abc} (B^{b\rho} (B_\mu^a (\nabla_\nu B_\rho^c - \nabla_\rho B_\nu^c) + B_\nu^a (\nabla_\mu B_\rho^c \\
& - \nabla_\rho B_\mu^c)) + B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_\rho^c) - g_{\nu\mu} \nabla_\rho B_{a\sigma} \nabla^\sigma B^{a\rho} + g_{\nu\mu} \nabla_\sigma B_{a\rho} \nabla^\sigma B^{a\rho} \\
& + \alpha_4 (2B_\nu^a B_{b\rho} (2B_a^\rho B_\mu^b + B_{a\mu} B^{b\rho}) R + B^{a\rho} (8 (B^{b\sigma} (-\nabla_\nu B_{a\sigma} \nabla_\mu B_{b\rho} \\
& - \nabla_\nu B_{a\rho} \nabla_\mu B_{b\sigma} + g_{\nu\mu} (\nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B_{a\rho} + \nabla_\beta B_{b\rho} \nabla^\beta B_{a\sigma})) + B_\rho^b \\
& (-\nabla_\nu B_a^\sigma \nabla_\mu B_{b\sigma} + g_{\nu\mu} \nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B_a^\sigma)) + 2B_a^\sigma (-4\nabla_\nu B_\rho^b \nabla_\mu B_{b\sigma} + B_\rho^b (B_{b\sigma} G_{\nu\mu} \\
& - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu B_{b\sigma} + \nabla_\mu \nabla_\nu B_{b\sigma} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta B_{b\sigma})) + 4g_{\nu\mu} \nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B_\rho^b) \\
& + B_{a\rho} (-4\nabla_\nu B^{b\sigma} \nabla_\mu B_{b\sigma} + B^{b\sigma} (B_{b\sigma} G_{\nu\mu} - 2(\nabla_\nu \nabla_\mu B_{b\sigma} + \nabla_\mu \nabla_\nu B_{b\sigma} \\
& - 2g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta B_{b\sigma})) + 4g_{\nu\mu} \nabla_\beta B_{b\sigma} \nabla^\beta B^{b\sigma})) = 0. \quad (215)
\end{aligned}$$

Ecuaciones de campo provenientes de variar la acción (2) respecto a los campos vectoriales $B_{a\mu}$:

1. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano $\mathcal{L}_{4,p}^3$ en (20):

$$\begin{aligned}
& B_a^\mu \left(4g_c^2 B_{b\mu} B^b{}_\nu + \delta_3 B_b{}^\rho \left(-\epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} \left(B^b{}_\mu R_\nu{}^{\sigma\beta\alpha} + B^b{}_\nu R_\mu{}^{\sigma\beta\alpha} \right) - \left(B^b{}_\mu \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + B^b{}_\nu \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \right) R_\rho{}^{\sigma\beta\alpha} \right) - 2 \left(2g_c \left(g_c B_{a\nu} B_{b\mu} B^{b\mu} + \epsilon_{abc} \left(B^{b\mu} \left(\nabla_\nu B^c{}_\mu - 2\nabla_\mu B^c{}_\nu \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + B^b{}_\nu \nabla_\mu B^{c\mu} \right) \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu B_a{}^\mu - \nabla_\mu \nabla^\mu B_{a\nu} + \delta_{ab} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu B^{b\mu} - \nabla_\mu \nabla^\mu B^b{}_\nu \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{216}$$

2. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^1 en (3):

$$\begin{aligned}
& 2 \left(2g_c^2 B_{b\mu} \left(B_a{}^\mu B_\nu{}^b - B_{a\nu} B^{b\mu} \right) - 2g_c \epsilon_{abc} \left(B^{b\mu} \left(\nabla_\nu B^c{}_\mu - 2\nabla_\mu B^c{}_\nu \right) + B_\nu{}^b \nabla_\mu B^{c\mu} \right) \right. \\
& \left. - \nabla_\mu \nabla_\nu B_a{}^\mu - \delta_{ab} \nabla_\mu \nabla_\nu B^{b\mu} + \nabla_\mu \nabla^\mu B_{a\nu} + \delta_{ab} \nabla_\mu \nabla^\mu B_\nu{}^b - 2\alpha_1 \left(B_{b\mu} B^{b\mu} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(2\nabla_\nu \nabla_\rho B_a{}^\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu B_a{}^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho B_{a\nu} \right) + 2B^{b\mu} \left(2\nabla_\nu B_{b\mu} \nabla_\rho B_a{}^\rho + 2\nabla_\nu B_{a\mu} \nabla_\rho B_b{}^\rho \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \nabla_\rho B_{b\mu} \left(\nabla_\nu B_a{}^\rho + \nabla^\rho B_{a\nu} \right) - \left(\nabla_\nu B_{b\rho} + \nabla_\rho B_{b\nu} \right) \nabla^\rho B_{a\mu} \right) + 2B_\nu{}^b \left(-2\nabla_\mu B_a{}^\mu \nabla_\rho B_b{}^\rho \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\nabla_\mu B_{b\rho} + \nabla_\rho B_{b\mu} \right) \nabla^\rho B_a{}^\mu \right) + B_a{}^\mu \left(B^b{}_\mu \left(4\nabla_\nu \nabla_\rho B_b{}^\rho - 2 \left(\nabla_\rho \nabla_\nu B_b{}^\rho + \nabla_\rho \nabla^\rho B_{b\nu} \right) \right) \right. \\
& \left. - 2\delta_{bc} \left(-2\nabla_\nu B^b{}_\mu \nabla_\rho B^{c\rho} + \nabla_\rho B^c{}_\mu \left(\nabla_\nu B^{b\rho} + \nabla^\rho B^b{}_\nu \right) \right) \right) + B_{a\nu} \delta_{bc} \\
& \left. \left(-2\nabla_\mu B^{b\mu} \nabla_\rho B^{c\rho} + \left(\nabla_\mu B^c{}_\rho + \nabla_\rho B^c{}_\mu \right) \nabla^\rho B^{b\mu} \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{217}$$

3. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^3 en (16):

$$\begin{aligned}
& B_{a\nu} B_{b\mu} B^{b\mu} \left(-4g_c^2 + 3\alpha_3 R \right) + 4B_a{}^\mu \left(g_c^2 B_{b\mu} B_\nu{}^b + \alpha_3 B_b{}^\sigma B^{b\rho} R_{\nu\rho\mu\sigma} \right) - 2 \left(2g_c \epsilon_{abc} \right. \\
& \left. \left(B^{b\mu} \left(\nabla_\nu B^c{}_\mu - 2\nabla_\mu B^c{}_\nu \right) + B_\nu{}^b \nabla_\mu B^{c\mu} \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu B_a{}^\mu - \nabla_\mu \nabla^\mu B_{a\nu} \right. \\
& \left. + \delta_{ab} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu B^{b\mu} - \nabla_\mu \nabla^\mu B_\nu{}^b \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{218}$$

4. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^4 en (6):

$$\begin{aligned}
& 2 \left(-2B_{a\nu} B_{b\mu} B^{b\mu} \left(g_c^2 - \alpha_4 R \right) + 2B_a{}^\mu B_{b\mu} B_\nu{}^b \left(g_c^2 + 2\alpha_4 R \right) - 2g_c \epsilon_{abc} \left(B^{b\mu} \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\nabla_\nu B^c{}_\mu - 2\nabla_\mu B^c{}_\nu \right) + B_\nu{}^b \nabla_\mu B^{c\mu} \right) - \nabla_\mu \nabla_\nu B_a{}^\mu + \nabla_\mu \nabla^\mu B_{a\nu} + \delta_{ab} \right. \\
& \left. \left(-\nabla_\mu \nabla_\nu B^{b\mu} + \nabla_\mu \nabla^\mu B_\nu{}^b \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{219}$$

5. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_2^6 en (16):

$$\begin{aligned}
& 2(2g_c^2 B_{b\mu} (B_a^\mu B_\nu^b - B_{a\nu} B^{b\mu}) - 2g_c \epsilon_{abc} (B^{b\mu} (\nabla_\nu B_\mu^c - 2\nabla_\mu B_\nu^c) \\
& + B_\nu^b \nabla_\mu B^{c\mu}) - \nabla_\mu \nabla_\nu B_a^\mu - \delta_{ab} \nabla_\mu \nabla_\nu B^{b\mu} + \nabla_\mu \nabla^\mu B_{a\nu} \\
& + \delta_{ab} \nabla_\mu \nabla^\mu B_\nu^b + 2\alpha 6 (B^{b\mu} (B_{b\mu} (\nabla_\rho \nabla_\nu B_a^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho B_{a\nu}) \\
& + 2\nabla_\rho B_{b\mu} (\nabla_\nu B_a^\rho - \nabla^\rho B_{a\nu})) + B_{a\nu} \delta_{bc} (-\nabla_\mu B_\rho^c + \nabla_\rho B_\mu^c) \nabla^\rho B^{b\mu}) = 0.
\end{aligned} \tag{220}$$

Anexo B. Ecuaciones de Campo Linealizadas en GSU2P

1. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano $\mathcal{L}_{4,p}^3$ en (20):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} (-8g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} y_{b\sigma} + 8g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} y_{b\sigma} - 2g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} \\
& + 2g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} + 2G^{\rho\sigma} g_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} + 4g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} \\
& - 4g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 2h_{\nu\mu} R + g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} R \\
& + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\theta\tau} h^{\alpha\theta} R_{\nu\alpha\sigma}{}^\tau - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} y_{b\rho} R_{\nu}{}^\alpha{}_\sigma{}^\theta \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} y_b^\beta R_{\nu}{}^\alpha{}_\sigma{}^\theta - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} \epsilon_{\mu\sigma\alpha\theta} y_{b\rho} R_{\nu}{}^\alpha{}_\beta{}^\theta \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\sigma\alpha\theta} y_b^\beta R_{\nu}{}^\alpha{}_\beta{}^\theta + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} \epsilon_{\mu\alpha\theta\tau} h_{\rho\beta} R_{\nu}{}^\theta{}_\sigma{}^\tau \\
& - \delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\theta\tau} h^\alpha{}_\alpha R_{\nu}{}^\theta{}_\sigma{}^\tau + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\alpha R_{\nu}{}^\theta{}_\beta{}^\tau \\
& + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\theta\tau} h_\sigma{}^\alpha R_{\nu}{}^\theta{}_\alpha{}^\tau - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{b\nu} R_\mu{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\theta\tau} h^{\alpha\theta} R_{\mu\alpha\sigma}{}^\tau - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} y_{b\rho} R_\mu{}^\alpha{}_\sigma{}^\theta \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} y_b^\beta R_\mu{}^\alpha{}_\sigma{}^\theta - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} \epsilon_{\nu\sigma\alpha\theta} y_{b\rho} R_\mu{}^\alpha{}_\beta{}^\theta \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\sigma\alpha\theta} y_b^\beta R_\mu{}^\alpha{}_\beta{}^\theta + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} \epsilon_{\nu\alpha\theta\tau} h_{\rho\beta} R_\mu{}^\theta{}_\sigma{}^\tau \\
& - \delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\theta\tau} h^\alpha{}_\alpha R_\mu{}^\theta{}_\sigma{}^\tau + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\alpha R_\mu{}^\theta{}_\beta{}^\tau \\
& + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\theta\tau} h_\sigma{}^\alpha R_\mu{}^\theta{}_\alpha{}^\tau - 2\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \nabla_\nu \nabla^\theta h_\sigma{}^\alpha - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \nabla_\mu \nabla^\theta h_\sigma{}^\alpha \\
& + 2\nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + 2\nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - 2\nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} - 8g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma y^c{}_\rho \\
& - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho{}_\rho - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\nu} \\
& - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\mu} + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla_\nu h_\sigma{}^\alpha \\
& + 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla_\mu h_\sigma{}^\alpha - 2\delta_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{b\mu} R_\nu{}^{\beta\alpha\theta}
\end{aligned} \tag{221}$$

$$\begin{aligned}
& - B^a{}_\mu (8g_c^2 B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\nu} + 2B^{b\rho} (4g_c \epsilon_{abc} (\nabla_\nu y_\rho^c - \nabla_\rho y_\nu^c) + \delta_3 B_b{}^\sigma (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{a\rho} R_\nu{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho})) + B_a{}^\rho (B^b{}_\rho (-8g_c^2 y_{b\nu} + 2\delta_3 (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_b{}^\sigma R_\nu{}^{\beta\alpha\theta} + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b{}^\sigma) \\
& + \delta_3 B_b{}^\sigma (\epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} (h^\beta{}_\beta R_\nu{}^{\alpha\theta\tau} + 2h^{\beta\alpha} (-R_{\nu\beta}{}^{\theta\tau} + R_\nu{}^\theta{}_\beta{}^\tau)) - 2 (\epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\beta R_\nu{}^{\alpha\theta\tau} \\
& + \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\nu{}^\beta))) + 2\delta_3 B^{b\sigma} (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} (y_{b\rho} R_\nu{}^{\beta\alpha\theta} + y_{b\nu} R_\rho{}^{\beta\alpha\theta}) + \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} y_{b\nu} R_\sigma{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} - B_b{}^\beta (\epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_{\rho\sigma} R_\nu{}^{\alpha\theta\tau} + \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma}))) \\
& - B^a{}_\nu (8g_c^2 B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\mu} - 8g_c^2 B_a{}^\rho B^b{}_\rho y_{b\mu} - 8g_c^2 B_a{}^\rho B^b{}_\mu y_{b\rho} + 16g_c^2 B_{a\mu} B^{b\rho} y_{b\rho} \\
& + 8g_c^2 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu h_{\rho\sigma} - 8g_c^2 B_{a\mu} B_b{}^\sigma B^{b\rho} h_{\rho\sigma} - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_{\mu\beta}{}^{\theta\tau} \\
& + 2\delta_3 B_b{}^\sigma B^{b\rho} \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{a\rho} R_\mu{}^{\beta\alpha\theta} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{b\rho} R_\mu{}^{\beta\alpha\theta} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_b{}^\sigma R_\mu{}^{\beta\alpha\theta} \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_{\rho\sigma} R_\mu{}^{\alpha\theta\tau} - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\beta R_\mu{}^{\alpha\theta\tau} \\
& + \delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^\beta{}_\beta R_\mu{}^{\alpha\theta\tau} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_\mu{}^\theta{}_\beta{}^\tau \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_{\rho\beta}{}^{\theta\tau} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_{b\mu} R_\rho{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} y_b{}^\sigma R_\rho{}^{\beta\alpha\theta} - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\beta R_\rho{}^{\alpha\theta\tau} \\
& + \delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^\beta{}_\beta R_\rho{}^{\alpha\theta\tau} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_\rho{}^\theta{}_\beta{}^\tau \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_{\sigma\beta}{}^{\theta\tau} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} y_{b\mu} R_\sigma{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} y_b{}^\sigma R_\sigma{}^{\beta\alpha\theta} + 2B_b{}^\rho B^b{}_\mu (-4g_c^2 y_{a\rho} + \delta_3 y_a{}^\sigma (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} R_\rho{}^{\beta\alpha\theta} \\
& + \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} R_\sigma{}^{\beta\alpha\theta})) - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\beta\alpha\theta\tau} h_\rho{}^\beta R_\sigma{}^{\alpha\theta\tau} + \delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\alpha\theta\tau} h^\beta{}_\beta R_\sigma{}^{\alpha\theta\tau} \\
& + 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\alpha\theta\tau} h^{\beta\alpha} R_\sigma{}^\theta{}_\beta{}^\tau - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\alpha\theta\tau} h_\rho{}^\beta R_\beta{}^{\alpha\theta\tau} \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\alpha\theta\tau} h_\sigma{}^\beta R_\beta{}^{\alpha\theta\tau} + 8g_c B^{b\rho} \epsilon_{\delta abc} \nabla_\mu y_\rho^c - 8g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho y_\mu^c \\
& + 2\delta_3 B_b{}^\sigma B^{b\rho} \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{a\rho} + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_{b\rho} \\
& + 2\delta_3 B_a{}^\rho B^b{}_\rho \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta y_b{}^\sigma - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\rho \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\mu{}^\beta \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\beta B^{b\sigma} \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_{\rho\sigma} - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\rho{}^\beta \\
& - 2\delta_3 B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu \epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} \nabla^\theta \nabla^\alpha h_\sigma{}^\beta)) = 0;
\end{aligned}$$

2. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^1 en (3):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left(-8g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} y_{b\sigma} + 8g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} y_{b\sigma} - 2g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} \right. \\
& + 2g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} + 2G^{\rho\sigma} g_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} + 4g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} \\
& - 4g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 2h_{\nu\mu} R + g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} R - 2\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho \\
& + 2\nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + 2\nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - 2\nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} - 8g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma y^c{}_\rho \\
& - 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \nabla_\sigma \nabla_\nu y_{b\mu} - 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\sigma \nabla_\nu y_{b\mu} \\
& - 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu y_{b\nu} - 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\sigma \nabla_\mu y_{b\nu} - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} \\
& + 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho{}_\rho + 32\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\beta y_b^\beta + 16\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\beta y_b^\beta \\
& + 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\mu\sigma} + 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\nu h_{\mu\sigma} \alpha_1 \\
& + 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\nu\sigma} + 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\nu\sigma} \\
& - 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\nu\mu} - 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\nu\mu} \\
& + 16\alpha_1 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla_\sigma h^\alpha{}_\alpha + 8\alpha_1 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla_\sigma h^\alpha{}_\alpha \\
& - 8B^\alpha{}_\mu (g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} (\nabla_\nu y_\rho^c - \nabla_\rho y_\nu^c) + B_{b\rho} B^{b\rho} (g_c^2 y_{a\nu} + \alpha_1 (2\nabla_\nu \nabla_\sigma y_a^\sigma \\
& - \nabla_\sigma \nabla_\nu y_a^\sigma - \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{a\nu})) + B_a^\rho (\alpha_1 B_{b\sigma} B^{b\sigma} (\nabla_\nu \nabla_\rho h^\beta{}_\beta - 2\nabla_\nu \nabla_\beta h_\rho{}^\beta \\
& + \nabla_\beta \nabla_\nu h_\rho{}^\beta - \nabla_\beta \nabla_\rho h_\nu{}^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\rho})) - B^b{}_\rho (g_c^2 y_{b\nu} + 2\alpha_1 (-2\nabla_\nu \nabla_\sigma y_b^\sigma \\
& + \nabla_\sigma \nabla_\nu y_b^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{b\nu} - B_b^\sigma (\nabla_\nu \nabla_\sigma h^\beta{}_\beta - 2\nabla_\nu \nabla_\beta h_\sigma{}^\beta + \nabla_\beta \nabla_\nu h_\sigma{}^\beta \\
& - \nabla_\beta \nabla_\sigma h_\nu{}^\beta + \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\sigma})))) - 8B^\alpha{}_\nu (-g_c^2 B_b^\rho B^b{}_\mu y_{a\rho} - g_c^2 B_a^\rho B^b{}_\rho y_{b\mu} \\
& - g_c^2 B_a^\rho B^b{}_\mu y_{b\rho} + 2g_c^2 B_{a\mu} B^{b\rho} y_{b\rho} + g_c^2 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\mu h_{\rho\sigma} - g_c^2 B_{a\mu} B_b^\sigma B^{b\rho} h_{\rho\sigma} \\
& + g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\mu y_\rho^c + \alpha_1 B_a^\rho B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\rho h^\beta{}_\beta + 4\alpha_1 B_a^\rho B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma y_b^\sigma \\
& + 2\alpha_1 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\sigma h^\beta{}_\beta - 2\alpha_1 B_a^\rho B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\beta h_\rho{}^\beta \\
& - 4\alpha_1 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\beta h_\sigma{}^\beta - g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho y^c{}_\mu \\
& - 2\alpha_1 B_a^\rho B^b{}_\rho \nabla_\sigma \nabla_\mu y_b^\sigma + B_{b\rho} B^{b\rho} (g_c^2 y_{a\mu} + \alpha_1 (2\nabla_\mu \nabla_\sigma y_a^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\mu y_a^\sigma \\
& - \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{a\mu})) - 2\alpha_1 B_a^\rho B^b{}_\rho \nabla_\sigma \nabla^\sigma y_{b\mu} + \alpha_1 B_a^\rho B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\mu h_\rho{}^\beta \\
& + 2\alpha_1 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\mu h_\sigma{}^\beta - \alpha_1 B_a^\rho B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\rho h_\mu{}^\beta \\
& - 2\alpha_1 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\sigma h_\mu{}^\beta + \alpha_1 B_a^\rho B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\mu\rho} \\
& + 2\alpha_1 B_a^\rho B_b^\sigma B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\mu\sigma}) - 16\alpha_1 B^{a\rho} B_b^\beta (2B_a^\sigma B^b{}_\rho \\
& + B_{a\rho} B^{b\sigma}) g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla_\alpha h_\sigma{}^\alpha = 0;
\end{aligned}$$

3. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^3 en (16):

$$\begin{aligned}
& 1/16 \left(-32g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} y_{b\sigma} + 32g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} y_{b\sigma} \right. \\
& - 8g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} + 8g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} + 8G^{\rho\sigma} g_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} \\
& - 24\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} G_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} + 16g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} \\
& - 16g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} + 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} G^{\beta\alpha} g_{\nu\mu} h_{\beta\alpha} \\
& - 8h_{\nu\mu} R - 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} R + 4g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} R \\
& + 3\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h^\beta{}_\beta R - 24\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} y_{b\mu} R_{\nu\rho\sigma\beta} \\
& - 24\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} y_{b\nu} R_{\mu\rho\sigma\beta} - 32\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B^{b\beta} g_{\nu\mu} y_b{}^\alpha R_{\rho\beta\sigma\alpha} \\
& - 8\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} h_{\nu\mu} R_{\rho\beta\sigma\alpha} - 24\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} g_{\nu\mu} h_\rho{}^0 R_{\sigma\beta\alpha 0} \\
& - 24\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu y_{b\sigma} + 12\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\sigma\beta} \\
& - 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu h^\beta{}_\beta - 24\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\nu y_{b\sigma} \\
& + 12\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\sigma\beta} + 8 \left(6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} G_{\nu\mu} y_{b\sigma} \right. \\
& - \nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho + \nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + \nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} \left. \right) \\
& - 32g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma y_\rho{}^c - 8g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 8g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho{}^\rho \\
& + 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\nu h_\mu{}^\beta + 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\mu h_\nu{}^\beta \\
& - 4B^\mu{}_\mu \left(2B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\nu} \left(4g_c^2 - 3\alpha_3 R \right) + 2B^{b\rho} \left(4g_c \epsilon_{abc} \left(\nabla_\nu y_\rho{}^c - \nabla_\rho y_\nu{}^c \right) \right. \right. \\
& + \alpha_3 B_b^\sigma \left(3y_a{}^\beta R_{\nu\rho\sigma\beta} - 2\nabla_\sigma \nabla_\rho y_{a\nu} \right) \left. \left. - B_a{}^\rho \left(8g_c^2 B^b{}_\rho y_{b\nu} \right. \right. \right. \\
& + \alpha_3 B^{b\sigma} \left(6y_b{}^\beta \left(R_{\nu\sigma\rho\beta} + R_{\nu\beta\rho\sigma} \right) - 2 \left(\nabla_\rho \nabla_\sigma y_{b\nu} + \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{b\nu} \right) \right. \right. \\
& + B_b^\beta \left(6h_\rho{}^\alpha R_{\nu\sigma\beta\alpha} - 6h_\sigma{}^\alpha R_{\nu\alpha\rho\beta} - 3\nabla_\nu \nabla_\rho h_{\sigma\beta} + \nabla_\rho \nabla_\nu h_{\sigma\beta} \right. \\
& \left. \left. + 2\nabla_\beta \nabla_\nu h_{\rho\sigma} + 6\nabla_\beta \nabla_\rho h_{\nu\sigma} - 6\nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\nu\rho} \right) \right) \left. \right) \\
& + 48\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta y_{b\sigma} - 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\mu} \\
& - 4B^\nu{}_\nu \left(-8g_c^2 B_a{}^\rho B^b{}_\rho y_{b\mu} - 8g_c^2 B_a{}^\rho B^b{}_\mu y_{b\rho} + 16g_c^2 B_{a\mu} B^{b\rho} y_{b\rho} \right. \\
& + 8g_c^2 B_a{}^\rho B_b^\sigma B^b{}_\mu h_{\rho\sigma} - 8g_c^2 B_{a\mu} B_b^\sigma B^{b\rho} h_{\rho\sigma} - 12\alpha_3 B_{a\mu} B^{b\rho} y_{b\rho} R \\
& + 6\alpha_3 B_{a\mu} B_b^\sigma B^{b\rho} h_{\rho\sigma} R + 6\alpha_3 B_b^\sigma B^{b\rho} y_a{}^\beta R_{\mu\rho\sigma\beta} - 6\alpha_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} y_b{}^\beta R_{\mu\sigma\rho\beta} \\
& - 6\alpha_3 B_a{}^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} h_\rho{}^\alpha R_{\mu\sigma\beta\alpha} - 6\alpha_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} y_b{}^\beta R_{\mu\beta\rho\sigma} \\
& + 6\alpha_3 B_a{}^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} h_\sigma{}^\alpha R_{\mu\alpha\rho\beta} + 8g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\mu y_\rho{}^c \\
& + 3\alpha_3 B_a{}^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\rho h_{\sigma\beta} - 8g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho y_\mu{}^c \\
& - \alpha_3 B_a{}^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\rho \nabla_\mu h_{\sigma\beta} + 2\alpha_3 B_a{}^\rho B^{b\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma y_{b\mu} \\
& \left. + 2\alpha_3 B_a{}^\rho B^b{}_\mu \nabla_\rho \nabla_\sigma y_b{}^\sigma - 4\alpha_3 B_{a\mu} B^{b\rho} \nabla_\rho \nabla_\sigma y_b{}^\sigma \right)
\end{aligned} \tag{223}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_3 B_a^\rho B_b^\sigma B_\mu^b \nabla_\rho \nabla_\sigma h_\beta^\beta - 2\alpha_3 B_a^\rho B_b^\sigma B_\mu^b \nabla_\rho \nabla_\beta h_\sigma^\beta - 4\alpha_3 B_b^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{a\mu} \\
& + 2B_b^\rho B_\mu^b (-4g_c^2 y_{a\rho} + \alpha_3 (\nabla_\rho \nabla_\sigma y_a^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\rho y_a^\sigma)) + 2\alpha_3 B_a^\rho B^{b\sigma} \nabla_\sigma \nabla_\rho y_{b\mu} \\
& + 2\alpha_3 B_a^\rho B_\mu^b \nabla_\sigma \nabla_\rho y_b^\sigma - 4\alpha_3 B_{a\mu} B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho y_b^\sigma + \alpha_3 B_a^\rho B_b^\sigma B_\mu^b \nabla_\sigma \nabla_\rho h_\beta^\beta \\
& - 2\alpha_3 B_{a\mu} B_b^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\rho h_\beta^\beta - 2\alpha_3 B_a^\rho B_b^\sigma B_\mu^b \nabla_\sigma \nabla_\beta h_\rho^\beta + 4\alpha_3 B_{a\mu} B_b^\sigma B^{b\rho} \nabla_\sigma \nabla_\beta h_\rho^\beta \\
& - 2\alpha_3 B_a^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\mu h_{\rho\sigma} - 6\alpha_3 B_a^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\rho h_{\mu\sigma} + 6\alpha_3 B_a^\rho B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\sigma h_{\mu\rho} \\
& + 2\alpha_3 B_b^\sigma (-B_a^\rho B_\mu^b + B_{a\mu} B^{b\rho}) \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\rho\sigma} + B_{b\rho} B^{b\rho} (y_{a\mu} (8g_c - 6\alpha_3 R) + 3\alpha_3 B_{a\mu} \\
& (2G^{\sigma\beta} h_{\sigma\beta} + h^\sigma{}_\sigma R - 2\nabla_\beta \nabla_\sigma h^{\sigma\beta} + 2\nabla_\beta \nabla^\beta h^\sigma{}_\sigma)) - 8\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla_\sigma h_{\rho\beta} \\
& + 8\alpha_3 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\alpha B^{b\beta} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta h_{\rho\sigma} - 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\beta\alpha} \\
& - 24\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\sigma\beta} + 6\alpha_3 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_\beta^\beta = 0;
\end{aligned}$$

4. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^4 en (6):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left(32\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho G_{\nu\mu} y_{b\sigma} + 16\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} G_{\nu\mu} y_{b\sigma} - 8g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} y_{b\sigma} \right. \\
& + 8g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} y_{b\sigma} - 2g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} + 2g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} \\
& + 2G^{\rho\sigma} g_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} - 16\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho G_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 8\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} G_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} \\
& + 4g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 4g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 2h_{\nu\mu} R \\
& + 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho G^{\beta\alpha} g_{\nu\mu} h_{\beta\alpha} + 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} G^{\beta\alpha} g_{\nu\mu} h_{\beta\alpha} \\
& - 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} R - 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} R + g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} R \\
& + 2\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h^\beta{}_\beta R + \alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h^\beta{}_\beta R \\
& - 16\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \nabla_\nu \nabla_\mu y_{b\sigma} - 8\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu y_{b\sigma} - 2\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho \\
& + 8\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\sigma\beta} + 4\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\sigma\beta} \\
& - 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho \nabla_\nu \nabla_\mu h^\beta{}_\beta - 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\nu \nabla_\mu h^\beta{}_\beta \\
& - 16\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\nu y_{b\sigma} - 8\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\nu y_{b\sigma} \\
& + 8\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b^\beta B^b{}_\rho \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\sigma\beta} + 4\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b^\beta B^{b\sigma} \nabla_\mu \nabla_\nu h_{\sigma\beta} \\
& + 8B^a{}_\mu (B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\nu} (-g_c^2 + \alpha_4 R) + B_a{}^\rho B^b{}_\rho y_{b\nu} (g_c^2 + 2\alpha_4 R) + g_c B^{b\rho} \epsilon_{abc} \\
& (-\nabla_\nu y^c{}_\rho + \nabla_\rho y^c{}_\nu)) + 2\nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + 2\nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - 2\nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} \\
& - 8g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma y^c{}_\rho - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho{}_\rho \\
& + 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\nu h_\mu{}^\beta + 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\nu h_\mu{}^\beta \\
& + 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla_\mu h_\nu{}^\beta + 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla_\mu h_\nu{}^\beta
\end{aligned}$$

(224)

$$\begin{aligned}
& + 32\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta y_{b\sigma} + 16\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\beta \nabla^\beta y_{b\sigma} \\
& - 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\mu} - 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} \nabla_\beta \nabla^\beta h_{\nu\mu} \\
& - 4B^a{}_\nu \left(-2 \left(B_b{}^\rho B^b{}_\mu y_{a\rho} \left(g_c^2 + 2\alpha_4 R \right) + B_a{}^\rho \left(B^b{}_\rho y_{b\mu} + B^b{}_\mu \left(y_{b\rho} - B_b{}^\sigma h_{\rho\sigma} \right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \left(g_c^2 + 2\alpha_4 R \right) + B^{b\rho} \left(-B_{a\mu} \left(2y_{b\rho} - B_b{}^\sigma h_{\rho\sigma} \right) \left(g_c^2 - \alpha_4 R \right) + g_c \epsilon_{abc} \left(-\nabla_\mu y^c{}_\rho \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \nabla_\rho y^c{}_\mu \right) \right) + B_{b\rho} \left(2\alpha_4 B_a{}^\rho B^b{}_\mu \left(2G^{\sigma\beta} h_{\sigma\beta} + h^\sigma{}_\sigma R - 2\nabla_\beta \nabla_\sigma h^{\sigma\beta} + 2\nabla_\beta \nabla^\beta h^\sigma{}_\sigma \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + B^{b\rho} \left(2y_{a\mu} \left(g_c^2 - \alpha_4 R \right) + \alpha_4 B_{a\mu} \left(2G^{\sigma\beta} h_{\sigma\beta} + h^\sigma{}_\sigma R - 2\nabla_\beta \nabla_\sigma h^{\sigma\beta} + 2\nabla_\beta \nabla^\beta h^\sigma{}_\sigma \right) \right) \right) \right) \\
& - 4\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\beta\alpha} - 2\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla_\beta h^{\beta\alpha} \\
& - 16\alpha_4 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\sigma\beta} - 8\alpha_4 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b{}^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h_{\sigma\beta} \\
& + 2\alpha_4 B^{a\rho} B_{b\sigma} \left(2B_a{}^\sigma B^b{}_\rho + B_{a\rho} B^{b\sigma} \right) g_{\nu\mu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha h^\beta{}_\beta = 0;
\end{aligned}$$

5. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_2^6 en (16):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left(-8g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B^b{}_\rho g_{\nu\mu} y_{b\sigma} + 8g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B^{b\sigma} g_{\nu\mu} y_{b\sigma} - 2g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_{b\sigma} B^b{}_\rho h_{\nu\mu} \right. \\
& + 2g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_{b\sigma} B^{b\sigma} h_{\nu\mu} + 2G^{\rho\sigma} g_{\nu\mu} h_{\rho\sigma} + 4g_c^2 B_a^\sigma B^{a\rho} B_b{}^\beta B^b{}_\rho g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} \\
& - 4g_c^2 B_{a\rho} B^{a\rho} B_b{}^\beta B^{b\sigma} g_{\nu\mu} h_{\sigma\beta} - 2h_{\nu\mu} R + g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} R - 2\nabla_\nu \nabla_\mu h^\rho{}_\rho \\
& + 8g_c B^a{}_\mu \left(-g_c B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\nu} + g_c B_a{}^\rho B^b{}_\rho y_{b\nu} + B^{b\rho} \epsilon_{abc} \left(-\nabla_\nu y^c{}_\rho + \nabla_\rho y^c{}_\nu \right) \right) \\
& + 8g_c B^a{}_\nu \left(-g_c B_{b\rho} B^{b\rho} y_{a\mu} + g_c B_b{}^\rho B^b{}_\mu y_{a\rho} + g_c B_a{}^\rho B^b{}_\rho y_{b\mu} + g_c B_a{}^\rho B^b{}_\mu y_{b\rho} \right. \\
& - 2g_c B_{a\mu} B^{b\rho} y_{b\rho} - g_c B_a{}^\rho B_b{}^\sigma B^b{}_\mu h_{\rho\sigma} + g_c B_{a\mu} B_b{}^\sigma B^{b\rho} h_{\rho\sigma} - B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\mu y^c{}_\rho \\
& + B^{b\rho} \epsilon_{abc} \nabla_\rho y^c{}_\mu \left. \right) + 2\nabla_\rho \nabla_\nu h_\mu{}^\rho + 2\nabla_\rho \nabla_\mu h_\nu{}^\rho - 2\nabla_\rho \nabla^\rho h_{\nu\mu} \\
& \left. - 8g_c B^{a\rho} B^{b\sigma} \epsilon_{abc} g_{\nu\mu} \nabla_\sigma y^c{}_\rho - 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2g_{\nu\mu} \nabla_\sigma \nabla^\sigma h^\rho{}_\rho \right) = 0.
\end{aligned} \tag{225}$$

Ecuaciones de campo provenientes de variar la acción (2) respecto a los campos vectoriales $B_{a\mu}$:

1. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano $\mathcal{L}_{4,p}^3$ en (20):

$$\begin{aligned}
& 4g_c^2 (B_b^\mu B_\nu^b y_{a\mu} + B_a^\mu (B_\mu^b y_{b\nu} + B_\nu^b (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho})) + B^{b\mu} (-B_{b\mu} y_{a\nu} \\
& + B_{a\nu} (-2y_{b\mu} + B_b^\rho h_{\mu\rho})) - 4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} - 2g_c \epsilon_{abc} \\
& (2B^{b\mu} (\nabla_\nu y_\mu^c - 2\nabla_\mu y_\nu^c - B^{c\rho} \nabla_\rho h_{\nu\mu}) + B_\nu^b (2\nabla_\mu y^{c\mu} + B^{c\mu} (\nabla_\mu h_\rho^\rho \\
& - 2\nabla_\rho h_\mu^\rho)) - \frac{1}{2} \delta_3 (2B_b^\rho B^{b\mu} y_{a\mu} (\epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} R_\nu^{\sigma\beta\alpha} + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} R_\rho^{\sigma\beta\alpha}) \\
& + 2B_b^\mu B_\nu^b y_a^\rho (\epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} R_\mu^{\sigma\beta\alpha} + \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} R_\rho^{\sigma\beta\alpha}) \\
& + B_a^\mu (2 (y_b^\rho (\epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} (B_\mu^b R_\nu^{\sigma\beta\alpha} + B_\nu^b R_\mu^{\sigma\beta\alpha}) \\
& + (B_\mu^b \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} + B_\nu^b \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha}) R_\rho^{\sigma\beta\alpha}) + B^{b\rho} (\epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} (y_{b\mu} R_\nu^{\sigma\beta\alpha} + y_{b\nu} R_\mu^{\sigma\beta\alpha}) \\
& + (\epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} y_{b\nu} + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} y_{b\mu}) R_\rho^{\sigma\beta\alpha} - B_b^\sigma h_{\mu\rho} (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} R_\nu^{\beta\alpha\theta} + \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} R_\sigma^{\beta\alpha\theta}))) \\
& - B_b^\rho (B_\mu^b (\epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} (-h_\sigma^\sigma R_\nu^{\beta\alpha\theta} + 2h^{\sigma\beta} (R_{\nu\sigma}^{\alpha\theta} - R_\nu^{\alpha\theta}))) + \epsilon_{\nu\beta\alpha\theta} \\
& (-h_\sigma^\sigma R_\rho^{\beta\alpha\theta} + 2h^{\sigma\beta} (R_{\rho\sigma}^{\alpha\theta} - R_\rho^{\alpha\theta})) + 2h_\rho^\sigma R_\sigma^{\beta\alpha\theta}) + 2 (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} h_\rho^\sigma R_\nu^{\beta\alpha\theta} \\
& + \epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta h_\nu^\sigma + \epsilon_{\nu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta h_\rho^\sigma)) + B_\nu^b (\epsilon_{\rho\beta\alpha\theta} (-h_\sigma^\sigma R_\mu^{\beta\alpha\theta} + 2h^{\sigma\beta} \\
& (R_{\mu\sigma}^{\alpha\theta} - R_\mu^{\alpha\theta})) + 2h_\mu^\sigma R_\sigma^{\beta\alpha\theta}) + \epsilon_{\mu\beta\alpha\theta} (-h_\sigma^\sigma R_\rho^{\beta\alpha\theta} + 2h^{\sigma\beta} (R_{\rho\sigma}^{\alpha\theta} - R_\rho^{\alpha\theta}) \\
& + 2h_\rho^\sigma R_\sigma^{\beta\alpha\theta}) + 2 (\epsilon_{\sigma\beta\alpha\theta} (h_\rho^\sigma R_\mu^{\beta\alpha\theta} + h_\mu^\sigma R_\rho^{\beta\alpha\theta}) + \epsilon_{\rho\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta h_\mu^\sigma \\
& + \epsilon_{\mu\sigma\beta\alpha} \nabla^\alpha \nabla^\beta h_\rho^\sigma)) = 0;
\end{aligned} \tag{226}$$

2. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^1 en (3):

$$\begin{aligned}
& 4g_c^2 (B_b^\mu B^\nu y_{a\mu} + B_a^\mu (B^\mu y_{b\nu} + B^\nu (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho}))) + B^{b\mu} (-B_{b\mu} y_{a\nu} \\
& + B_{a\nu} (-2y_{b\mu} + B_b^\rho h_{\mu\rho})) - 4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} - 2g_c \epsilon_{abc} \\
& (2B^{b\mu} (\nabla_\nu y_c^\mu - 2\nabla_\mu y_c^\nu - B^{c\rho} \nabla_\rho h_{\nu\mu}) + B^\nu (2\nabla_\mu y^{c\mu} + B^{c\mu} (\nabla_\mu h^\rho_\rho \\
& - 2\nabla_\rho h_\mu^\rho))) - 4\alpha_1 (B_{b\mu} B^{b\mu} (2\nabla_\nu \nabla_\rho y_a^\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu y_a^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho y_{a\nu}) \\
& + B_a^\mu (B_{b\rho} B^{b\rho} (\nabla_\nu \nabla_\mu h^\sigma_\sigma - 2\nabla_\nu \nabla_\sigma h_\mu^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_\mu^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\mu h_\nu^\sigma \\
& + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_{\nu\mu}) + 2B^\mu_\mu (2\nabla_\nu \nabla_\rho y_b^\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu y_b^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho y_{b\nu} + B_b^\rho (\nabla_\nu \nabla_\rho h^\sigma_\sigma \\
& - 2\nabla_\nu \nabla_\sigma h_\rho^\sigma + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_\rho^\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\rho h_\nu^\sigma + \nabla_\sigma \nabla^\sigma h_{\nu\rho}))) = 0; \tag{227}
\end{aligned}$$

3. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^3 en (16):

$$\begin{aligned}
& 4g_c^2 (B_b^\mu B^\nu y_{a\mu} + B_a^\mu (B^\mu y_{b\nu} + B^\nu (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho}))) + B^{b\mu} (-B_{b\mu} y_{a\nu} \\
& + B_{a\nu} (-2y_{b\mu} + B_b^\rho h_{\mu\rho})) - 4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} \\
& - 2g_c \epsilon_{abc} (2B^{b\mu} (\nabla_\nu y_c^\mu - 2\nabla_\mu y_c^\nu - B^{c\rho} \nabla_\rho h_{\nu\mu}) + B^\nu (2\nabla_\mu y^{c\mu} \\
& + B^{c\mu} (\nabla_\mu h^\rho_\rho - 2\nabla_\rho h_\mu^\rho))) + 2\alpha_3 B_a^\mu B^{b\rho} (2y_b^\sigma (R_{\nu\rho\mu\sigma} + R_{\nu\sigma\mu\rho}) \\
& + B_b^\sigma (2h_\mu^\beta R_{\nu\rho\sigma\beta} - 2h_\rho^\beta R_{\nu\beta\mu\sigma} - \nabla_\nu \nabla_\mu h_{\rho\sigma} + \nabla_\sigma \nabla_\nu h_{\mu\rho} \\
& + \nabla_\sigma \nabla_\mu h_{\nu\rho} - \nabla_\sigma \nabla_\rho h_{\nu\mu})) - \frac{1}{2}\alpha_3 B^{b\mu} (-6B_{b\mu} y_{a\nu} R + 8B_b^\rho y_a^\sigma R_{\nu\mu\rho\sigma} \\
& + 3B_{a\nu} (-4y_{b\mu} R + 2B_b^\rho h_{\mu\rho} R + B_{b\mu} (2G^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + h_\rho^\rho R \\
& - 2\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2\nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho)) = 0; \tag{228}
\end{aligned}$$

4. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_4^4 en (6):

$$\begin{aligned}
& 4g_c^2 (B_b^\mu B_\nu^b y_{a\mu} + B_a^\mu (B_\mu^b y_{b\nu} + B_\nu^b (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho}))) + B^{b\mu} (-B_{b\mu} y_{a\nu} \\
& + B_{a\nu} (-2y_{b\mu} + B_b^\rho h_{\mu\rho})) - 4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} - 2g_c \epsilon_{abc} \\
& (2B^{b\mu} (\nabla_\nu y_\mu^c - 2\nabla_\mu y_\nu^c - B^{c\rho} \nabla_\rho h_{\nu\mu})) + B_\nu^b (2\nabla_\mu y^{c\mu} + B^{c\mu} (\nabla_\mu h_\rho^c \\
& - 2\nabla_\rho h_\mu^c)) - 2\alpha_4 (-2 (B_{b\mu} B^{b\mu} y_{a\nu} + 2B_b^\mu B_\nu^b y_{a\mu}) R + B_{a\nu} B^{b\mu} (-4y_{b\mu} R \\
& + 2B_b^\rho h_{\mu\rho} R + B_{b\mu} (2G^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + h_\rho^\rho R - 2\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2\nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho)) \\
& + 2B_a^\mu (-2B_\mu^b y_{b\nu} R + B_\nu^b (-2 (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho}) R + B_{b\mu} (2G^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma} \\
& + h_\rho^\rho R - 2\nabla_\sigma \nabla_\rho h^{\rho\sigma} + 2\nabla_\sigma \nabla^\sigma h_\rho^\rho))) = 0;
\end{aligned} \tag{229}$$

5. Ecuaciones de campo de la acción asociada al lagrangiano \mathcal{L}_2^6 en (16):

$$\begin{aligned}
& 4g_c^2 (B_b^\mu B_\nu^b y_{a\mu} + B_a^\mu (B_\mu^b y_{b\nu} + B_\nu^b (y_{b\mu} - B_b^\rho h_{\mu\rho}))) + B^{b\mu} (-B_{b\mu} y_{a\nu} \\
& + B_{a\nu} (-2y_{b\mu} + B_b^\rho h_{\mu\rho})) - 4\nabla_\mu \nabla_\nu y_a^\mu + 4\nabla_\mu \nabla^\mu y_{a\nu} - 2g_c \epsilon_{abc} \\
& (2B^{b\mu} (\nabla_\nu y_\mu^c - 2\nabla_\mu y_\nu^c - B^{c\rho} \nabla_\rho h_{\nu\mu})) + B_\nu^b (2\nabla_\mu y^{c\mu} + B^{c\mu} (\nabla_\mu h_\rho^c \\
& - 2\nabla_\rho h_\mu^c)) + 4\alpha_6 B_{b\mu} B^{b\mu} (\nabla_\rho \nabla_\nu y_a^\rho - \nabla_\rho \nabla^\rho y_{a\nu}) = 0.
\end{aligned} \tag{230}$$