

DISEÑO DE ABSORBEDORES ELECTROMAGNÉTICOS ÓPTIMOS  
UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS Y  
ANÁLISIS DE INTERVALOS

ÉDGAR EDUARDO SALAZAR FLÓREZ  
JULIÁN EDUARDO MORA MORENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y  
TELECOMUNICACIONES

BUCARAMANGA

2011

DISEÑO DE ABSORBEDORES ELECTROMAGNÉTICOS ÓPTIMOS  
UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS Y  
ANÁLISIS DE INTERVALOS

ÉDGAR EDUARDO SALAZAR FLÓREZ  
JULIÁN EDUARDO MORA MORENO

Trabajo de investigación para optar al título de Ingeniero Electrónico

Director:

PhD. Carlos Rodrigo Correa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y  
TELECOMUNICACIONES

BUCARAMANGA

2011

## TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción.....	13
2. Absorbedores electromagnéticos.....	14
2.1. Modelado de un absorbedor electromagnético multicapa.....	14
3. Fundamentos del análisis de intervalos.....	17
4. Optimización por enjambre de partículas.....	19
4.1. PSO síncrono.....	20
5. Análisis y resultados obtenidos.....	21
5.1. Software y Hardware usados.....	21
5.2. Escogencia de la banda de trabajo.....	21
5.3. Implementación del algoritmo PSO.....	21
5.3.1. Condiciones preestablecidas.....	21
5.3.2. Selección del tipo del PSO adecuado.....	23
5.3.3. Criterio de frontera.....	24
5.3.4. Número de partículas.....	26
5.3.5. Selección del escenario adecuado.....	27
5.3.6. Diseño final.....	28
5.4. Implementación del algoritmo basado en análisis de intervalos.....	31
5.4.1. Algoritmo inicial.....	31
5.4.2. Propuesta para aumentar la velocidad de convergencia.....	32
5.4.3. Escogencia de materiales.....	32
5.4.4. Resultados encontrados.....	33
6. Conclusiones.....	34
7. Agradecimientos.....	35
8. Referencias.....	36
9. Anexos.....	38

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Absorbedor multicapa.....	15
Figura 2. Histogramas de resultados obtenidos, formas I y II .....	24
Figura 3. Histogramas de resultados obtenidos, métodos I y II .....	25
Figura 4. Histogramas de resultados obtenidos, población I y II.....	27
Figura 5. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, primer diseño .....	28
Figura 6. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, segundo diseño.....	29
Figura 7. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, tercer diseño. ....	29
Figura 8. Número de aciertos del algoritmo .....	30
Figura 9. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias.....	33
Figura 10. Comportamiento que emula el PSO .....	38
Figura 11. Diagrama de flujo algoritmo PSO .....	41
Figura 12. Método empleado por Arquímedes.....	42
Figura 13. Diagrama de flujo del algoritmo para aumentar la velocidad de convergencia.....	43
Figura 14. Diagram de flujo del algoritmo para escoger los materiales mediante el análisis de intervalos .....	44
Figura 15. Diagrama de flujo del algoritmo usado para optimizar mediante análisis de intervalos.....	45

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Banco de materiales usado. Fuente [11].....	22
Tabla 2. Mediciones estadísticas, formas I y II .....	24
Tabla 3. Mediciones estadísticas, métodos I y II.....	25
Tabla 4. Mediciones estadísticas, población I y II.....	26
Tabla 5. Diseños realizados.....	28
Tabla 6. Resultados con análisis de intervalos .....	33
Tabla 7. Definiciones básicas del algoritmo PSO. Fuente [8] .....	38

## **LISTA DE ANEXOS**

- Anexo 1. Explicación detallada de la optimización por enjambre de partículas 38  
Anexo 2. Explicación detallada de la optimización por análisis de intervalos ...42

## RESUMEN

**TÍTULO:** DISEÑO DE ABSORBEDORES ELECTROMAGNÉTICOS ÓPTIMOS UTILIZANDO OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS Y ANÁLISIS DE INTERVALOS. \*

**AUTORES:** Édgar Eduardo Salazar Flórez, Julián Eduardo Mora Moreno. \*\*

**PALABRAS CLAVE:** Absorbedor electromagnético, PSO, análisis de intervalos, reflectividad, refinamiento, sobreestimación.

### DESCRIPCIÓN

Un absorbedor electromagnético es un elemento que se encarga de disipar la energía que incide sobre él. Esta característica los hace aplicables en diversos campos, como el militar, para ocultar los vehículos de combate de los radares y proteger los sensores de los misiles teledirigidos. También, se han utilizado en la electrónica para reducir la interferencia que afecta a los circuitos integrados y en las telecomunicaciones, para construir cámaras anecoicas con el fin de realizar pruebas de compatibilidad electromagnética (EMC) a los dispositivos que salen al mercado. Es debido a estas y a otras aplicaciones, que las investigaciones para el mejoramiento de su proceso de diseño están aumentando en los últimos años.

En el presente trabajo, se diseña un absorbedor electromagnético plano multicapa. Para este propósito, se utiliza la optimización por enjambre de partículas (PSO), un algoritmo simple que muestra una alta velocidad de convergencia, pero que es inexacto con funciones objetivo de elevado grado de complejidad. También se implementa el análisis de intervalos, con el cual se obtienen siempre los mismos resultados debido a su naturaleza determinística, pero con un costo computacional considerable. Debido a las características de la función objetivo, los dos métodos de optimización muestran limitaciones. Se comprueban diferentes escenarios para establecer los mejores parámetros y condiciones de cada uno. Se obtienen los resultados óptimos y se compara el desempeño de los algoritmos utilizados.

---

\* Proyecto de Grado.

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director PhD. Carlos Rodrigo Correa.

## ABSTRACT

**TITLE:** DESIGN OF OPTIMAL ELECTROMAGNETIC ABSORBERS USING PARTICLE SWARM OPTIMIZATION AND INTERVAL ANALYSIS. \*

**AUTHORS:** Édgar Eduardo Salazar Flórez, Julián Eduardo Mora Moreno. \*\*

**KEYWORDS:** Electromagnetic absorbers, PSO, Interval analysis, reflectivity, refinement, overestimation.

### DESCRIPTION

An electromagnetic absorber is a device which dissipates a portion of the energy that strikes it. This feature makes them useful in different fields, such as the military industry for combat vehicles to hide them from radar systems and for isolate the sensors of radar guided missiles. Also, they have been implemented in electronic applications to reduce interference on integrated circuits. In telecommunications, they have been used for build anechoic chambers with the purpose of test electromagnetic compatibility (EMC) in devices that are released. Because of these and other applications, research to improve their process design has been increasing in recent years.

The design of a multilayer planar electromagnetic absorber is described. For this purpose, the particle swarm optimization (PSO) is used, which is quite simple and shows a high rate of convergence, but it is inaccurate dealing with objective functions of high complexity. Also, the interval analysis is implemented which obtains the same results in each execution because of its deterministic nature, but its computational cost is quite high. Due to the form of the objective function, the two optimization methods show limitations. Different scenarios are tested to establish the best parameters and conditions for each one. Optimal results are obtained and they are used to compare the performance of the simulated algorithms.

---

\* Proyecto de Grado.

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director PhD. Carlos Rodrigo Correa.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los absorbedores electromagnéticos son elementos usados para atenuar la energía que incide sobre ellos. Esto los ha hecho indispensables en la construcción de cámaras anecoicas [1], las cuales son usadas por las grandes compañías de telecomunicaciones para realizar pruebas de compatibilidad electromagnética (EMC) y medir los patrones de radiación de las antenas y la sección radar equivalente (RCS). Además, el aumento de las comunicaciones Wireless y los estudios no concluyentes sobre el impacto de la radiación no ionizante en la salud humana [2], han hecho a los absorbedores más importantes aún, lo que se ha reflejado en un incremento de los estudios enfocados a su mejoramiento en las últimas décadas.

El diseño de un absorbedor, ya sea piramidal, multicapa etc., implica lograr un equilibrio entre todas las variables que afectan el desempeño de éste. Entre dichas variables se destacan las dimensiones físicas y los tipos de materiales usados, cuya escogencia se debe hacer con el fin de proporcionar una atenuación aceptable dentro de un rango de frecuencias predeterminado.

Son muchas las formas que existen para lograr un diseño óptimo. La más comúnmente aplicada es el algoritmo de optimización por enjambre de partículas (PSO), que se basa en el comportamiento que las bandadas y enjambres muestran dentro de la naturaleza. Su continua implementación, para este problema en particular, se debe a la obtención de resultados fiables con un esfuerzo computacional relativamente bajo. Los algoritmos genéticos también han sido utilizados, logrando resultados similares a los obtenidos con el PSO [3]. Sin embargo, debido a que la función que describe el comportamiento de un absorbedor tiene un alto grado de complejidad, el PSO no siempre arroja los parámetros óptimos[4]. Por esta razón, un método determinístico es una gran opción para eliminar el margen de error en la optimización. Uno de estos métodos es el análisis de intervalos, que consiste simplemente en ir encerrando la respuesta en un intervalo que paulatinamente se va haciendo más pequeño, lo que necesariamente conduce a la solución correcta en una sola oportunidad.

El desarrollo de este trabajo se centrará en buscar un diseño óptimo de un absorbedor electromagnético mediante la implementación del PSO y mediante el análisis de intervalos, con el fin de comparar sus ventajas, desventajas y la viabilidad de la aplicación de cada uno en este escenario en particular.

## 2. ABSORBEDORES ELECTROMAGNÉTICOS

Un absorbedor electromagnético es un elemento diseñado para disipar gran parte de la energía que sobre él incide. Su principal parámetro de rendimiento es el coeficiente de reflexión, que depende de la permitividad y permeabilidad de los materiales usados y de su disposición geométrica. Se debe hacer claridad en que la permitividad y permeabilidad relativas son generalmente cantidades complejas y están descritas por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r' \tan(\delta_d) \quad (1)$$

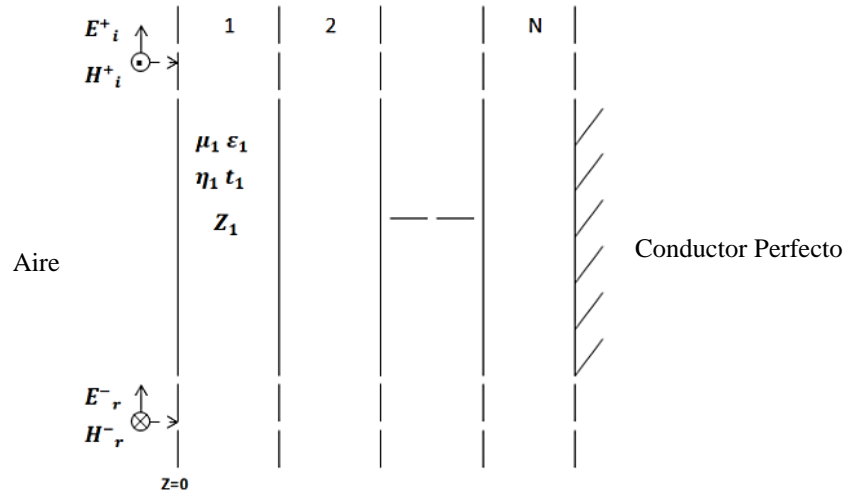
$$\mu_r = \mu_r' - j\mu_r' \tan(\delta_m) \quad (2)$$

donde  $\delta_d$  y  $\delta_m$  son el ángulo de pérdidas eléctricas y magnéticas respectivamente.

### 2.1 MODELADO DE UN ABSORBEDOR ELECTROMAGNÉTICO MULTICAPA

La figura 1 muestra el esquema general de un absorbedor multicapa. Cada capa está conformada por un material caracterizado por su permitividad y permeabilidad. La última de ellas está en contacto con un conductor perfecto. Además, la onda incidente lo hace de forma perpendicular (es decir, el absorbedor está ubicado en la zona "Far Field").

Figura 1. Absorbedor multicapa



Fuente: Autores

Los campos eléctrico y magnético totales en cada región, se pueden escribir en función de los campos incidentes y reflejados. Las expresiones se muestran a continuación:

$$E_x(z) = E_i e^{-\gamma z} \left[ 1 + \frac{E_r e^{2\gamma z}}{E_i} \right] \quad (3)$$

$$H_y(z) = \frac{E_i e^{-\gamma z}}{\eta} \left[ 1 - \frac{E_r e^{2\gamma z}}{E_i} \right] \quad (4)$$

donde:

- $z$  es el eje que atraviesa perpendicularmente el absorbedor multicapa.
- $\gamma = \alpha + j\beta$ .
- $\eta$  es la impedancia intrínseca del material.

El coeficiente de reflexión se define de la siguiente forma:

$$\Gamma(z) = \frac{E_r e^{2\gamma z}}{E_i} \quad (5)$$

La impedancia total de campo del absorbedor, está definida como la relación entre su campo eléctrico y su campo magnético. Teniendo en cuenta (3), (4) y (5), se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$Z(z) = \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (6)$$

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta} \quad (7)$$

Según la teoría de las líneas de transmisión, la impedancia total de campo del material k de un absorbedor de N capas está dada por la siguiente relación [5]:

$$Z_k = \begin{cases} \eta_k \frac{Z_{k+1} + \eta_k \tanh(\gamma_k t_k)}{\eta_k + Z_{k+1} \tanh(\gamma_k t_k)} & k < N \\ \eta_N \tanh(\gamma_N t_N) & k = N \end{cases} \quad (8)$$

donde  $t_k$  es el grosor de la k-ésima capa. Puesto que la última capa ( $k = N$ ), está en contacto con un metal, la expresión de su impedancia se simplifica a la especificada en la ecuación (8).

Si se supone que la banda de frecuencias de trabajo está ubicada en UHF o superior [5], la expresión (8) se reduce a:

$$Z_k = \begin{cases} \eta_k \frac{Z_{k+1} + j\eta_k \tan(\beta_k t_k)}{\eta_k + jZ_{k+1} \tan(\beta_k t_k)} & k < N \\ j\eta_N \tan(\beta_N t_N) & k = N \end{cases} \quad (9)$$

donde  $\beta_k$  es la constante de fase de la k-ésima capa y se define de la siguiente manera:

$$\beta_k = 2\pi f \sqrt{\mu_k \epsilon_k} \quad (10)$$

La función objetivo para el diseño de un absorbedor electromagnético depende del coeficiente de reflexión, pues éste es el parámetro que indica la eficiencia en la absorción de energía incidente. La impedancia total de campo  $Z$  en (7) es equivalente a la del material 1 y la impedancia intrínseca  $\eta$  es la impedancia del

aire, que se aproxima a la del vacío. Por tanto, la ecuación se reescribe de la siguiente manera:

$$R(f) = \frac{Z_1(f) - \eta_0}{Z_1(f) + \eta_0} \quad (11)$$

Puesto que el diseño del absorbedor debe realizarse sobre una banda de frecuencias específica, el problema de optimización consiste en minimizar el máximo del coeficiente de reflexión que se presenta sobre esta banda; por lo tanto, la función objetivo se puede escribir de la siguiente forma [4]:

$$F_{objetivo} = 20 \text{Log}(\max |R(f)|, f \in B) \quad (12)$$

donde  $B$  es la banda de diseño. Ya que tanto los grosores de las capas como los materiales en cada una de ellas son desconocidos, si se diseña un absorbedor de  $N$  capas, existen  $2N$  parámetros a optimizar durante el proceso.

### 3. FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS DE INTERVALOS

El análisis de intervalos es un método matemático utilizado para encerrar de forma certera la solución a un problema descrito por un sistema de ecuaciones dado. Este análisis se basa en un conjunto de definiciones, propiedades y operaciones que conforman una aritmética particular. La definición de intervalo, que es la unidad básica, se muestra a continuación:

$$X = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad (13)$$

Dos cantidades que describen un intervalo son el ancho ( $width(X)$ ) y el punto medio ( $mid(X)$ ), que se definen de la siguiente manera:

$$width = (Sup(X) - Inf(X)) \quad (14)$$

$$mid(X) = Inf(X) + \frac{width(X)}{2} \quad (15)$$

El *infimum* ( $Inf(X)$ ) y el *supremum* ( $Sup(X)$ ) de un intervalo hacen referencia al límite inferior y al superior respectivamente.

Realizar una operación entre dos o más intervalos, implica construir un intervalo respuesta como se muestra en (16). Generalmente, los límites inferior y superior de este intervalo no son equivalentes a operar los límites inferiores y superiores de los intervalos operandos.

$$X \bullet Y = \{x \bullet y: x \in X, y \in Y\} \quad (16)$$

Las definiciones (13) y (16), aunque simples, son la base de la aritmética de intervalos. Sin embargo, para la identificación de los puntos críticos de una función con base en el análisis de intervalos, es necesario profundizar mucho más en el tema. Esta profundización implica conocer todos los conceptos relacionados con el mapeo de una expresión del dominio real al dominio de intervalos, como inclusión isotónica, extensión unidad, extensión intervalo, extensión intervalo natural y el teorema fundamental [6]. Con base en los conceptos anteriormente nombrados, se puede afirmar que, al utilizar variables intervalo como dominio en una función, el rango solución será una sobreestimación del verdadero. Este es el principal obstáculo a vencer si se desea identificar con certeza un punto crítico. Un camino apropiado para superar este inconveniente, es utilizar una definición llamada Lipschitz, que se explica a continuación:

- Se dice que una extensión intervalo es Lipschitz en un intervalo  $X_0$ , si existe una constante  $L$  tal que:

$$\omega(F(K)) \leq L\omega(K) \text{ para todo } K \subseteq X_0 \quad (17)$$

Lo anterior implica que entre más pequeño sea  $K$ , más exacto va a ser el intervalo de salida  $F(K)$ . Por lo tanto, es posible obtener un intervalo solución (ISR) más exacto al dividir  $X_0$  en  $N$  partes. El intervalo solución (ISR), se define de la siguiente forma:

$$ISR = (F(K_1) \cup F(K_2) \cup \dots \cup F(K_N)) \quad (18)$$

donde  $\cup$  simboliza el intervalo de Hull. El anterior proceso se conoce como refinamiento. Con la implementación de un refinamiento acertado, es posible identificar más fácilmente los puntos críticos de una función mediante la aplicación del siguiente algoritmo:

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  subintervalos de  $X$ :

1.  $Fub = \min[F(\text{mid}(X_1)), F(\text{mid}(X_2)), \dots, F(\text{mid}(X_n)), Fub]$ .
2. Si  $\text{Inf}(F(X_a)) > Fub \Rightarrow \text{Descartar } X_a$ ; Donde  $a = 1, 2, \dots, n$ .
3. Biseccion de los intervalos no descartados.
4. Si  $\text{width}(F(X_a)) > \text{epsilon} \Rightarrow \text{Retornar } 1$   
De lo contrario  $\Rightarrow \text{Terminar}$ .

Cuando  $X$  es un vector de intervalos, se biseccionará la componente con el mayor ancho. El método anteriormente descrito funciona correctamente sólo para una función que sea Lipschitz en un intervalo  $X_0$ , que tenga la propiedad de inclusión isotónica y que además sea del tipo  $FC_n(X_0)$ .

Una explicación más detallada de todos los conceptos descritos anteriormente se puede encontrar en la referencia [6].

#### 4. OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS

El algoritmo PSO (Particle Swarm Optimization) fue creado por Kennedy y Eberhart en 1995 [7]. Consiste en una técnica de optimización basada en el comportamiento social de una colectividad animal, ya sean enjambres o bandadas [8]. El PSO ha sido ampliamente utilizado desde que fue introducido, debido a su velocidad de convergencia y a su precisión, lo que ha generado en los últimos años un elevado estudio e interés en esta técnica.

El algoritmo PSO consiste en la deposición de un enjambre de partículas sobre un espacio muestral de  $N$  dimensiones. Estas partículas se comunican entre sí para establecer la mejor posición encontrada por cada una de ellas, basándose en una función objetivo. Cada partícula tiene una velocidad y una posición que se actualizan dependiendo de dos valores. Estos son el  $pbest$  y el  $gbest$ , que hacen referencia a la coordenada donde se encuentra la mejor solución de la función objetivo, encontrada por un solo individuo y por todo el enjambre respectivamente. La velocidad se actualiza de la siguiente manera [8]:

$$v_n = \omega v_n + c1 \text{rand}() (pbest_n - x_n) + c2 \text{rand}() (gbest_n - x_n) \quad (19)$$

donde  $v_n$  es la velocidad de la  $n$ -ésima partícula;  $x_n$  es la posición de la  $n$ -ésima partícula;  $c1$  es el factor que determina el grado de influencia de la memoria de la partícula sobre ella misma;  $c2$  es el factor que determina el grado de influencia del enjambre sobre la partícula;  $\omega$  es la inercia de la partícula y  $\text{rand}()$  es un número aleatorio. Estos dos últimos parámetros oscilan entre 0 y 1. La velocidad también se puede escribir de la siguiente forma:

$$v_n = K(\omega v_n + \phi1 \text{rand}() (pbest_n - x_n) + \phi2 \text{rand}() (gbest_n - x_n)) \quad (20)$$

donde  $K = 0,729$ ,  $\phi1 = 2,8$  y  $\phi2 = 1,3$  son los valores óptimos que se usan en esta ecuación [8].

Una vez se halla la velocidad, ésta se aplica por un periodo  $\Delta t$  y se halla la nueva coordenada como se muestra a continuación:

$$x_n = x_n + \Delta t v_n \quad (21)$$

Generalmente  $\Delta t$  es igual a 1. El proceso de iteración puede ser terminado de diferentes maneras, de las cuales se destacan tres [8]: la definición de un número máximo de iteraciones, la definición de un valor esperado de la función objetivo y la definición de una mínima desviación estándar de la posición de las partículas.

#### 4.1 PSO SÍNCRONO.

La principal característica del PSO síncrono es que el  $Gbest$  sólo se establece después de que la función objetivo es evaluada en cada una de las partículas. Este proceso logra aislarlas en una iteración, permitiendo que una computadora pueda obtener las coordenadas de cada una de ellas y evaluar la función objetivo al mismo tiempo [9]. Las ecuaciones (7) y (8) no sufren ningún

cambio y se pueden aplicar directamente al análisis síncrono; lo único que cambia es el método de actualización del Gbest.

## 5. ANÁLISIS Y RESULTADOS OBTENIDOS

### 5.1 SOFTWARE Y HARDWARE USADO

Todos los programas realizados para este trabajo, fueron ejecutados en un computador con un procesador Intel® Core™2 Quad Q8200 (4M Cache, 2,33 GHz, 1333 MHz FSB), con una memoria RAM de 2 GHz y un sistema operativo Windows 7 Ultimate de 32 bits. El entorno de trabajo fue MATLAB7.9 y se utilizó la *Toolbox* INTLAB desarrollada por Prof. Dr. Siegfried M. Rump.

### 5.2 ESCOGENCIA DE LA BANDA DE TRABAJO

En este trabajo, el absorbedor diseñado se implementará en el rango de frecuencias de las tecnologías inalámbricas (Wireless). Dentro de la banda de frecuencia de esta tecnología se encuentran los operadores de telefonía móvil (0,85GHz, 1,8 GHz, 1,9 GHz) el protocolo de comunicaciones Bluetooth (2,4GHz) [IEEE 802.15.1], Wi Fi (2,4GHz, 5GHz, 5,4GHz) [IEEE 802.11a, IEEE 802.11b, IEEE 802.11g, IEEE 802.11n] y el protocolo de comunicación ZigBee (0,868GHz, 0,915GHz, 2,4GHz) [IEEE 802.15.4]. Estas serán las frecuencias a tener en cuenta en la ejecución de los algoritmos.

### 5.3 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO PSO

5.3.1 Condiciones preestablecidas. Se diseñó un absorbedor de tres capas. Se estableció un rango de [0,1, 2] mm [10] para el grosor de las capas, con el fin de limitar la respuesta a un valor coherente, pues la implementación de una capa demasiado delgada o gruesa no tiene justificaciones prácticas. Para

realizar la optimización, se dispone de un banco heterogéneo de materiales (Tabla 1).

Tabla 1. Banco de materiales usado[11].

Materiales dieléctricos sin pérdidas ( $\mu_r = 1$ )				
Número		$\epsilon_r$		
1		10		
2		50		
Materiales magnéticos con pérdidas ( $\epsilon_r = 15$ )				
$\mu_r = \mu' - j\mu''$ $\mu'(f) = \frac{\mu'}{f^a} \qquad \mu''(f) = \frac{\mu''}{f^b}$				
Número	$\mu'$ (1 GHz)	$a$	$\mu''$ (1 GHz)	$b$
3	5	0,974	10	0,961
4	3	1,000	15	0,957
5	7	1,000	12	1,000
Materiales dieléctricos con pérdidas ( $\mu_r = 1$ )				
$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$ $\epsilon'(f) = \frac{\epsilon'}{f^a} \qquad \epsilon''(f) = \frac{\epsilon''}{f^b}$				
Número	$\epsilon'$ (1 GHz)	$a$	$\epsilon''$ (1 GHz)	$b$
6	5	0,861	8	0,569
7	8	0,778	10	0,682
8	10	0,778	6	0,861
Materiales magnéticos de tipo relajación ( $\epsilon_r = 15$ )				
$\mu_r = \mu' - j\mu''$ $\mu'(f) = \frac{\mu_m f_m^2}{f^2 + f_m^2} \qquad \mu''(f) = \frac{\mu_m f_m f}{f^2 + f_m^2}$				
Número	$\mu_m$	$f_m$		
9	35	0,8		
10	35	0,5		
11	30	1,0		
12	18	0,5		
13	20	1,5		
14	30	2,5		
15	30	2,0		
16	25	3,5		

Fuente: E. Michielssen, JM. Sajer, S. Ranjithan, y R. Mittra.

Las tres dimensiones que indican los tipos de materiales estarán limitadas a un rango discreto de [1, 16], pues son 16 los elementos disponibles en el banco. La tabla 1, muestra las características de materiales ficticios los cuales son representativos de los reales. Para el PSO implementado, se establecieron las siguientes condiciones:  $\omega$  es una cantidad variable que disminuye de 0,9 a 0,4 durante el proceso [4]. Las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se suponen idénticas con valor de 1,46 [8]. Además, el  $G_{best}$  es establecido después de que cada partícula haya sido evaluada en la función objetivo. La velocidad debe definirse en un rango similar al de la posición [8]. Para el caso de las dimensiones de los grosores, la velocidad estará entre -0,0021 y 0,0021. Para las dimensiones de los materiales, la velocidad estará entre -16,1 y 16,1. Con el fin de verificar el desempeño del algoritmo realizado, éste se ejecutó 30 veces. Además, el criterio de parada se basó en el grado de dispersión de las posiciones de las partículas.

Las clases utilizadas (en decibeles) para la construcción de todos los histogramas son: [-21,5000, -20,9166], (-20,9166, -20,3333], (-20,3333, -19,7500], (-19,7500, 19,1666], (-19,1666, -18,5833], (-18,5833, 0,0000].

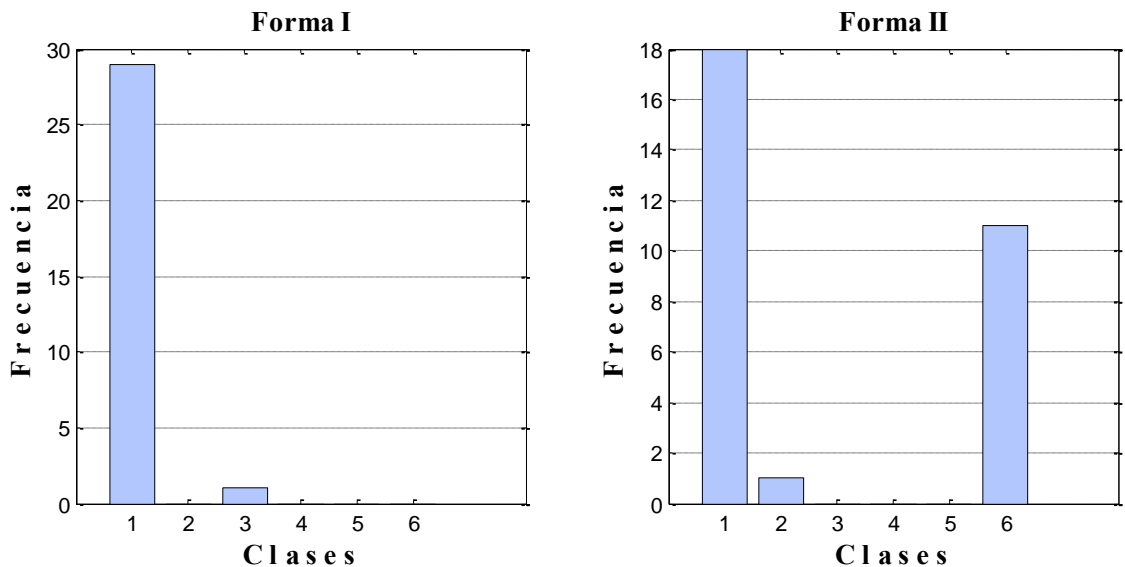
5.3.2 Selección del tipo de PSO adecuado. Las ecuaciones (19) y (20), son dos maneras de calcular la velocidad de las partículas. En este trabajo, el algoritmo se ejecutó con las dos y los resultados se muestran en la tabla 2 y figura 2, donde la Forma I y la Forma II corresponden a las ecuaciones (19) y (20) respectivamente. Inicialmente se asumió que cuando las partículas sobrepasan los límites del espacio solución, su velocidad cambia de sentido; además se trabajó con una población igual a 30 partículas.

Tabla 2. Mediciones estadísticas de las dos formas.

	<b>Forma I</b>	<b>Forma II</b>
<b>Media</b>	-21,3311dB	-20,2405dB
<b>Varianza</b>	0,0830dB	1,8749dB
<b>Mínimo global</b>	-21,4626dB	-21,4624dB
<b>Número de Iteraciones</b>	77395	3760

Fuente: Autores.

Figura 2. Histogramas de resultados obtenidos, Formas I y II.



Fuente: Autores.

Se observa que la Forma I, presenta menos dispersión que la Forma II. De 30 ejecuciones, 29 se encuentran en la primera clase del histograma.

5.3.3 Criterio de frontera. Cuando las partículas superan los límites establecidos para cada dimensión, es necesario utilizar un criterio para que éstas vuelvan al espacio solución válido. En este trabajo, se analizaron dos posibles métodos, adicionales al usado anteriormente:

- I. Ubicar las partículas en el Gbest actual.
- II. Ubicar las partículas en los límites conservando su velocidad.

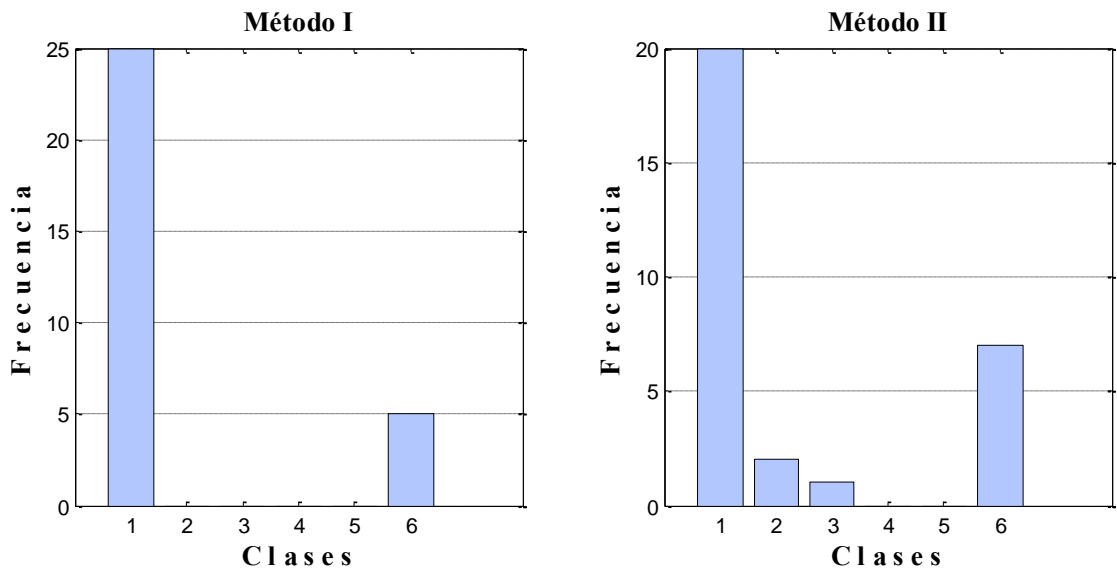
Los resultados se muestran a continuación en la tabla 3 y figura 3. De nuevo, se asumió una población de 30 partículas y la Forma I es la utilizada para la ejecución del algoritmo, por los resultados obtenidos anteriormente.

Tabla 3. Mediciones estadísticas de los dos escenarios

	<b>Método I</b>	<b>Método II</b>
<b>Media</b>	-20,4031dB	-19,3227dB
<b>Varianza</b>	6,5725dB	12,7869dB
<b>Mínimo global</b>	-21,4622dB	-21,4612dB
<b>Número de Iteraciones</b>	13495	12953

Fuente: Autores

Figura 3. Histogramas de resultados obtenidos, métodos I y II.



Fuente: Autores.

La figura 3 y los datos de la tabla 3 indican que el método I ofrece mayores garantías para encontrar el diseño óptimo debido a menor dispersión. Sin embargo, este método es inferior al utilizado en la sección anterior (figura 2

Formar I), donde se invertía la velocidad de las partículas cuando éstas llegaban a los límites.

5.3.4 Número de partículas. En los problemas concernientes al electromagnetismo, el tamaño de la población debe ser menor a 30[8]. Las pruebas anteriormente hechas se hicieron con esta cantidad de partículas; sin embargo, dependiendo de las condiciones, este número puede ser menor. En este trabajo, se decidió ejecutar el algoritmo con otros dos tamaños de poblaciones:

- I. 10 partículas.
- II. 20 partículas.

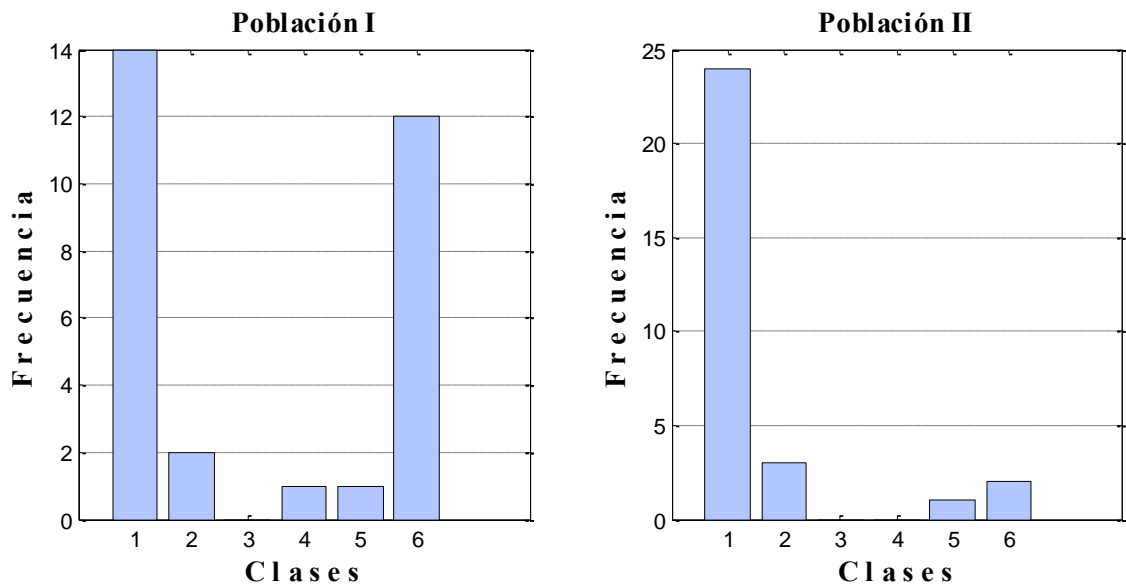
Los resultados obtenidos se muestran a continuación en la figura 4 y tabla 4. Los resultados que ya se dedujeron anteriormente (criterio de frontera, tipo de PSO), ya se asumen como válidos.

Tabla 4. Resultados obtenidos.

	<b>Población I</b>	<b>Población II</b>
<b>Media</b>	-18,6572dB	-20,8608dB
<b>Varianza</b>	11,2920dB	1,8464dB
<b>Mínimo global</b>	-21,4626dB	-21,4626dB
<b>Número de Iteraciones</b>	72003	77177

Fuente: Autores

Figura 4. Histogramas de resultados, población I y II.



Fuente: Autores.

Un algoritmo con una población de 20 partículas arroja resultados menos dispersos que uno con una población de 10 partículas. Sin embargo, éstos son muy inferiores en comparación a los obtenidos con una población de 30 partículas (figura 2, Forma I).

5.3.5 Selección del escenario adecuado. Del análisis de las figuras mostradas anteriormente y de los datos de dispersión consignados en las tablas, es posible determinar cuáles son las condiciones adecuadas del algoritmo PSO para este escenario en particular. Estas condiciones son:

- I. Tamaño de población 30.
- II. Las partículas deben invertir su velocidad cuando se encuentran en el límite del espacio solución.
- III. La velocidad debe ser calculada con la ecuación (19).

La figura 2, Forma I muestra los resultados obtenidos al ejecutar el algoritmo con las restricciones mencionadas anteriormente. Se puede ver que de 30 ejecuciones, 29 caen en la primera clase, siendo la que tiene menor dispersión.

5.3.6 Diseño final. La ejecución del algoritmo las 30 veces, arroja tres posibles diseños que caen sobre la primera clase del histograma ([-21,5000, -20,9166]):

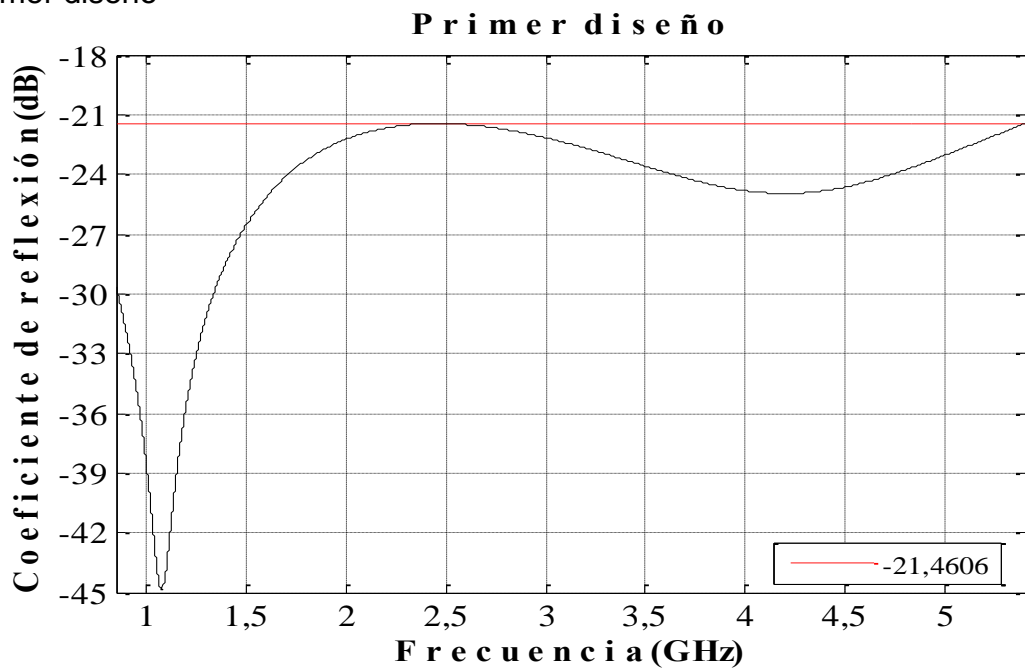
Tabla 5. Diseños realizados

	Primer Diseño		Segundo Diseño		Tercer Diseño	
	Material	Espesor [mm]	Material	Espesor [mm]	Material	Espesor [mm]
<b>Capa 1</b>	16	0,5998	16	0,6842	16	0,5845
<b>Capa 2</b>	3	2,0000	12	1,8003	5	1,7433
<b>Capa 3</b>	4	1,6268	4	1,6890	4	1,9588

Fuente: Autores

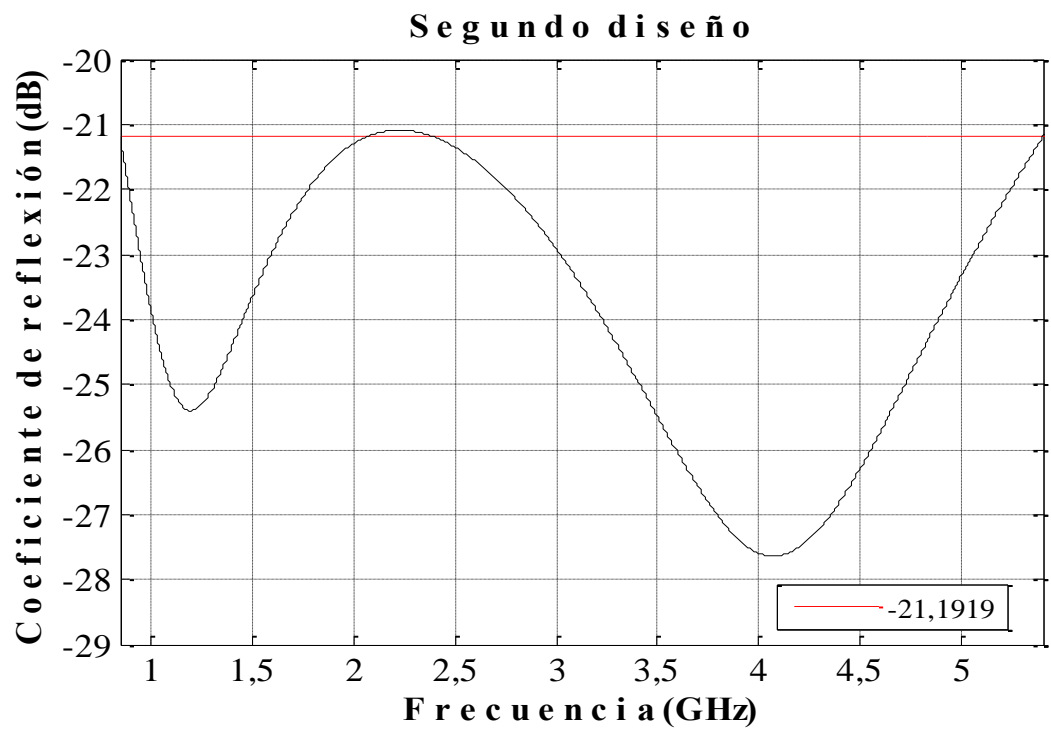
El comportamiento de los tres absorbedores sobre la banda de frecuencias [0,85GHz, 5,4GHz], se muestra en las siguientes figuras.

Figura 5. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, primer diseño



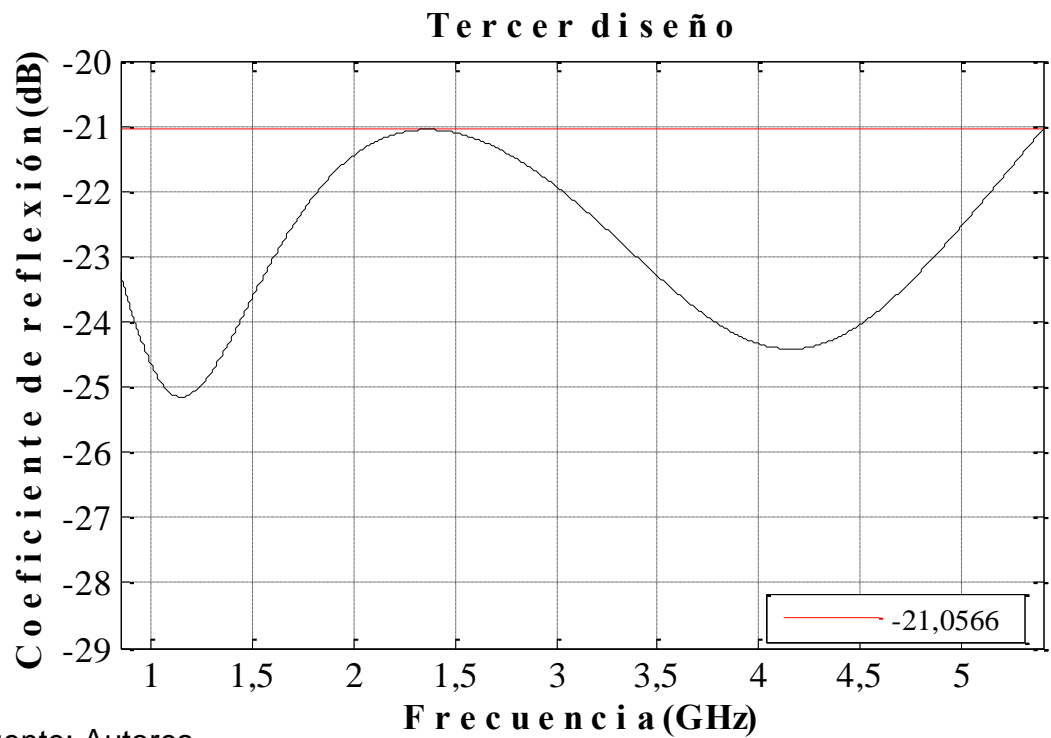
Fuente: Autores.

Figura 6. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, segundo diseño.



Fuente: Autores.

Figura 7. Comportamiento del absorbedor sobre la banda de frecuencias, tercer diseño.

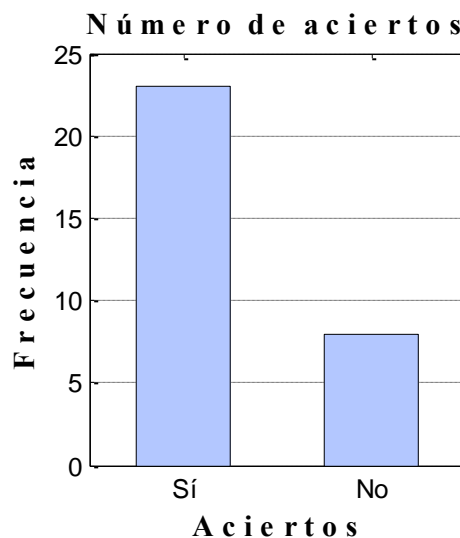


Fuente: Autores.

Las figuras 5, 6 y 7, aunque no presentan una forma similar en toda la banda de frecuencias, sí poseen una máxima atenuación casi idéntica (línea roja en cada figura). Sin embargo, el primer diseño es el que presenta la mínima máxima atenuación (-21,4606dB), es decir, es el diseño óptimo.

Los resultados anteriores indican que existe la posibilidad de no encontrar los parámetros deseados con una sola ejecución del algoritmo. Sin embargo, es posible predecir el número de ejecuciones para disminuir la probabilidad de error a un valor aceptable como se muestra a continuación.

Figura 8. Número de aciertos del algoritmo



Fuente: Autores.

Según la figura 8, se puede establecer la probabilidad de llegar al resultado óptimo (Evento A) y de no llegar a este (Evento B):

$$P(A) = \frac{23}{30} * 100 \approx 76,667\% \quad (22)$$

$$P(B) = 1 - P(A) \approx 23,333\% \quad (23)$$

Por medio de probabilidad condicional se puede establecer el número mínimo de veces ( $n$ ) que se debe ejecutar el algoritmo para obtener el valor óptimo con una probabilidad alta. Esta probabilidad fue fijada como de 99,9%. Ya que la

ejecución del algoritmo (EventoC) es independiente de las demás ejecuciones, se tiene [12]:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1)P(C_1|C_2) = P(C_1) * P(C_2) \quad (24)$$

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{99,9}{100} \leq 1 - (0,23333)^n \quad (25)$$

Resolviendo se obtiene que  $n \geq 4,7$ , por tanto  $n = 5$  y la probabilidad de éxito es del 99,93%.

## 5.4 IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO BASADO EN ANÁLISIS DE INTERVALOS

5.4.1 Algoritmo inicial. El algoritmo usado para la detección de puntos críticos con base en el análisis de intervalos, debe sufrir algunas modificaciones con el fin de que pueda adaptarse a las condiciones del problema. El algoritmo modificado se muestra a continuación:

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  subintervalos de  $X$  y  $f_1, f_2, \dots, f_k$  las frecuencias de diseño:

1.  $Fub =$

$$\min[\max(F(\text{mid}(X_1))|_{f=f_1, f_2, \dots, f_k}), \dots, \max(F(\text{mid}(X_n))|_{f=f_1, f_2, \dots, f_k}), Fub]$$

2. Si  $\text{Inf}(F(X_a)|_{f=f_c}) < Fub$  y  $\text{sup}(F(X_a)|_{f=f_c}) > Fub \Rightarrow$  No descartar  $X_a$ ;

Donde  $a = 1, 2, \dots, n$  y  $f_c$  es la frecuencia donde está el  $\min(\max)$ .

3. Bisecar todos los intervalos no descartados

4. Si  $\text{width}(X_a) > \text{epsilon} \Rightarrow$  Retornar a 1

De lo contrario  $\Rightarrow$  Terminar

El punto cuatro del algoritmo debió ser modificado, pues la función con la que se trata presenta una sobreestimación alta en el intervalo de salida para intervalos de entrada con anchos relativamente pequeños.

La evaluación de la función se hizo mediante la utilización de un refinamiento de 6, para evitar la sobreestimación y la posible aparición de un elemento NaN (Not A Number).

El algoritmo anteriormente descrito fue ejecutado durante 19,1058 horas, con materiales fijos de 16, 3 y 4 y no se llegaron a resultados concluyentes.

5.4.2 Propuesta para aumentar la velocidad de convergencia. Debido a la lentitud en la convergencia del algoritmo, se hizo necesario encontrar un método que aumentara la rapidez y arrojara resultados relativamente precisos.

El método que se usó consistió en:

1.  $[X_1, X_2] = \text{Bisección}(X)$ .
2.  $[K_1, K_2, \dots, K_\psi] = \text{Bisección}(X_1)\psi \text{ veces}; [U_1, U_2, \dots, U_\psi] = \text{Bisección}(X_2)\psi \text{ veces}.$
3.  $\text{mínimo}(X_1) = \min\left(F(\text{mid}(K_1)), F(\text{mid}(K_2)), \dots, F(\text{mid}(K_\psi))\right).$
4.  $\text{mínimo}(X_2) = \min\left(F(\text{mid}(U_1)), F(\text{mid}(U_2)), \dots, F(\text{mid}(U_\psi))\right).$
5.  $\text{Simínimo}(X_1) = \text{mínimo}(X_2) \Rightarrow \text{Aumentar y retornar a (2)}$
6.  $\text{Simínimo}(X_1) < \text{mínimo}(X_2) \Rightarrow X = X_1.$

*Delo contrario*  $\Rightarrow X = X_2.$

7. *Retornar a (1).*

Este algoritmo disminuye el espacio solución inicial del problema planteado, con una baja probabilidad de descartar el espacio solución verdadero. Esta probabilidad es inversamente proporcional al número de divisiones  $\psi$  realizadas sobre cada espacio.

5.4.3 Escogencia de materiales. Para determinar los materiales óptimos que componen el absorbedor, se utilizó la propuesta para aumentar la velocidad de convergencia, con el fin de evaluar todas las combinaciones posibles y encontrar la óptima. Para disminuir la probabilidad de error,  $\psi$  se estableció en 15 y los materiales encontrados son equivalentes a los hallados con el algoritmo PSO (16, 3 y 4). Sin embargo, para reducir el tiempo de ejecución,  $\psi$  se disminuyó desde 15 hasta 10, encontrándose que 11 es el menor valor para encontrar resultados correctos. El tiempo de cómputo con  $\psi=11$  fue de aproximadamente 8,7468 horas.

5.4.4 Resultados encontrados. Dos casos fueron estudiados. En el primero, se ejecutó 12 veces la propuesta para aumentar la velocidad de convergencia; en el segundo se ejecutó 15 veces. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 6.

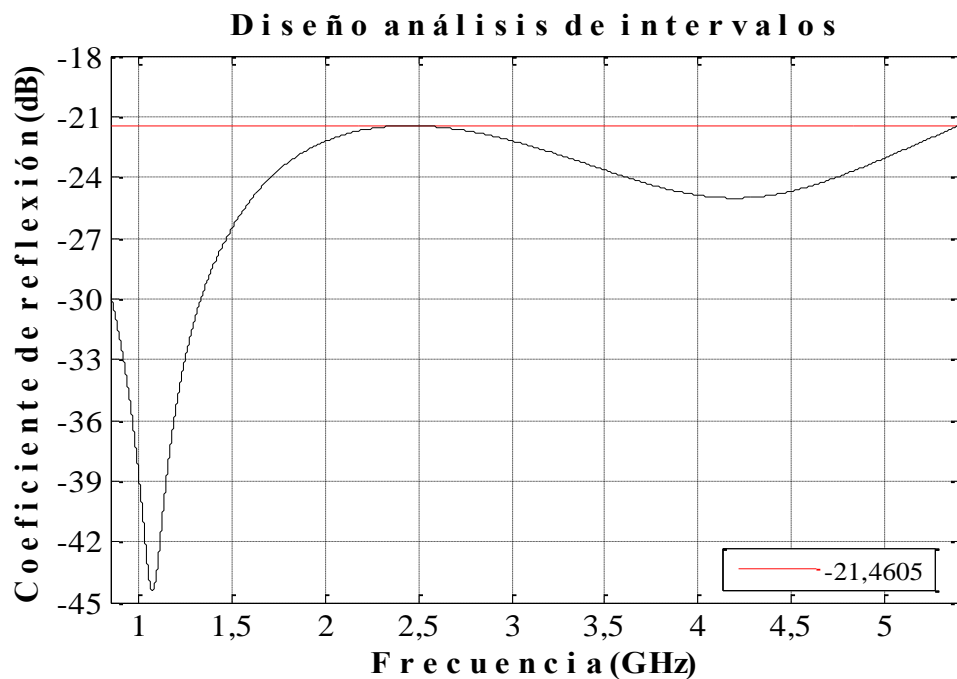
Tabla 6. Resultados con análisis de intervalos

	<b>Caso I</b>	<b>Caso II</b>
<b>Intervalo inicial (recalculado)</b>	[0,000574999 , 0,000693750] [0,001881250 , 0,002000000] [0,001524999 , 0,001643750]	[0,000574999 , 0,000634375] [0,001940625 , 0,002000000] [0,001584375 , 0,001644375]
<b>Mínimo hallado (dB)</b>	-21,4605	-21,4605
<b>Tiempo de cómputo (s)</b>	4196,2323	1620,1082
<b>Grosos de las capas (mm)</b>	0,6009; 1,9963; 1,6326	0,6009; 1,9963; 1,6326

Fuente: Autores

El comportamiento del diseño mediante el análisis de intervalos se muestra en la figura 9.

Figura 9. Comportamiento del absorbidor sobre la banda de frecuencias



Fuente: Autores.

## 6. CONCLUSIONES

Se diseñó un absorbedor electromagnético que mostró un buen desempeño en toda la banda de frecuencias (0,85GHz, 5,4GHz). La utilización del algoritmo PSO no garantizó la identificación del diseño óptimo de un absorbedor en una sola ejecución. Sin embargo, la escogencia acertada de los parámetros y condiciones más relevantes como el tamaño de la población, la función de velocidad y el criterio de frontera aumentó la probabilidad de tener una respuesta correcta con un mínimo número de ejecuciones. El algoritmo utilizado en este trabajo garantizó una probabilidad de éxito del 99,93% en cinco ejecuciones. El criterio de frontera basado en la ubicación de las partículas en el Gbest no ofreció buenos resultados en comparación con el criterio usado para la ejecución del algoritmo (inversión de la velocidad) a pesar de su mayor velocidad de convergencia. Esto se debe a que forzar a las partículas a ir a este punto aumenta la probabilidad de que el PSO converja a mínimos locales.

El diseño de un absorbedor electromagnético mediante el análisis de intervalos, requirió la utilización de un tiempo de simulación alto, además de algunas aproximaciones para poder identificar los materiales más adecuados y reducir el espacio solución inicial. Sin embargo, debido a que éste es un método determinístico, la identificación de los parámetros óptimos está garantizada en una sola ejecución del algoritmo. El éxito del método de análisis de intervalos propuesto, depende de la correcta escogencia de  $\psi$ . Para este problema en particular, su valor debió ser mayor o igual a 11 para garantizar la convergencia a un valor correcto. El algoritmo basado en el análisis de intervalos, necesitó utilizar la técnica de refinamiento para este problema de optimización en particular. Esto se debió a que, la complejidad de la función objetivo genera una sobreestimación alta para intervalos de entrada relativamente pequeños. Por ejemplo, la evaluación directa de un intervalo de entrada con ancho de  $1e-5$ , generó un intervalo de salida con un ancho de 0,0372.

Al realizar la comparación de los dos métodos utilizados para diseñar un absorbedor electromagnético, es posible afirmar que la optimización por

enjambre de partículas es superior al método de análisis de intervalos. El PSO solamente necesitó un tiempo de cómputo de 4,7566 minutos para identificar el diseño óptimo, con una probabilidad de éxito de 99,93%. Por otro lado, el método de análisis de intervalo empleó un tiempo de cómputo de 9,1968 horas, para identificar el diseño óptimo utilizando las aproximaciones descritas en el trabajo para aumentar su velocidad de convergencia.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer al Prof. Dr. Siedfreg M. Rump del Institute for Reliable Computing en Hamburgo, por la facilitación de la herramienta de trabajo INTLAB, la cual se empleó para todo lo concerniente al análisis de intervalos. Los autores también agradecen al Dr. Carlos Rodrigo Correa, por su constante asesoramiento a lo largo del desarrollo de este artículo.

## 8. REFERENCIAS

- [1] X. C. Tong, *Advanced Materials and Design for Electromagnetic Interference Shielding*, Editorial CRC Press, pp. 237-255, 2009.
- [2] P. Vecchia, R. Matthes, G. Ziegelberger, J. Lin, R. Saunders y A. Swerdlow, *Exposure to high frequency electromagnetic fields, biological effects and health consequences (100 kHz-300 GHz)*, ICNIRP 16/2009.
- [3] S. Cui, D. S. Weiley, J. L. Volakis, *Novel Planar Electromagnetic Absorber Designs Using Genetic Algorithm*, IEEE transactions on antennas and propagation, Vol. 54, pp. 1811-1817, 2006.
- [4] H. Liu, L. Zhang, Y. Gao, Y. Shen y D. Shi, *Electromagnetic Wave Absorber Optimal Design Based on Improved Particle Swarm Optimization*, International Symposium on Electromagnetic Compatibility, Kyoto, pp. 797-800, 2009.
- [5] A. Bronwell, *Transmission-Line Analogies of Plane Electromagnetic-Wave Reflections*, Proceedings of I.R.E., pp. 233-241, 1994
- [6] R. E. Moore, R. Baker y M. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, Editorial SIAM, pp. 1-219, 2009.
- [7] J. Kennedy y R. Eberhart, *Particle swarm optimization*, in Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks (Perth, Australia), IEEE Service Center, Piscataway, NJ, IV: pp. 1942- 1948, 1995.
- [8] J. Robinson y Y. Rahmat-Samii, *Particle Swarm Optimization in Electromagnetics*, IEEE Transaction On Antennas and Propagation, Vol. 52, No. 2, pp. 397-407, 2004.
- [9] S. Cui y D. S. Weile, *Application of a Novel Parallel Swarm Optimization to Design Electromagnetic Absorber*, IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Vol. 2A, pp. 41-44, 2005.
- [10] S. Chamaani, S. A. Mirtaheri, M. Teshnehlab, M. A. Shoorehdeli y V. Seydi, *Modified Multi-Objective Particle Swarm Optimization for*

*Electromagnetic Absorber Design*, Progress In Electromagnetics Research, PIER 79, pp. 353–366, 2008.

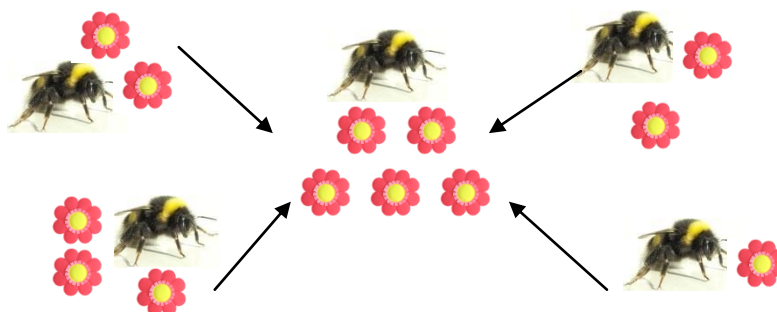
- [11] E. Michielssen, J.M. Sajer, S. Ranjithan, y R. Mittra, *Design of Lightweight, Broad-Band Microwave Absorbers Using Genetic Algorithms*, IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques, Vol. 41, No. 617, 1993.
- [12] M. R. Spiegel, J. Schiller, R.A. Srinivasan, *Probabilidad y estadística*, 2da Edición, Mc Graw Hill, pp.8-9, 2006.

## ANEXO 1

### EXPLICACIÓN DETALLADA DE LA OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS

EXPLICACIÓN INTUITIVA: El objetivo del algoritmo PSO es emular el comportamiento que los enjambres muestran en la naturaleza, con el fin de encontrar un punto crítico de una función determinada. Para entender su forma de operación, es necesario plantear un escenario hipotético, en el cual un enjambre de abejas trata de encontrar la mayor concentración de flores sobre un jardín [8]. Las abejas empiezan su labor en un punto aleatorio sobre el jardín. Cada abeja tiene la capacidad de recordar la posición en donde encontró la mayor concentración de flores; además, también puede saber la posición en la cual el enjambre ha encontrado la mayor concentración. Con base en esta información, la abeja corrige su rumbo, en ocasiones siendo más influenciada por la memoria colectiva y en ocasiones por la memoria personal. Cuando la abeja se encuentra en la nueva posición, vuelve a retomar su labor. Idealmente, después de muchos sobrevuelos por el jardín, las abejas se concentrarán en el punto que para ellas tiene la mayor cantidad de flores. La figura 10 muestra el comportamiento que se desea emular mediante el PSO.

Figura 10. Comportamiento que emula el PSO.



Fuente: Autores.

En el algoritmo como tal, el jardín equivale a la función a ser optimizada y las concentraciones de flores equivalen a los puntos críticos absolutos y relativos.

DEFINICIONES BÁSICAS DEL ALGORITMO PSO: La tabla 7 muestra las definiciones que se deben tener en cuenta para implementar el algoritmo PSO.

Tabla 7. Definiciones básicas del algoritmo PSO.

Partícula	Individuo perteneciente al enjambre.
Enjambre	El conjunto entero de individuos.
Fitness	Es la mejor solución encontrada de la función objetivo.
Pbest	Coordenada del mejor fitness encontrado por un solo individuo.
Gbest	Coordenada del mejor fitness encontrado por todo el enjambre.
$V_{max}$	Velocidad máxima permitida en una dirección dada.

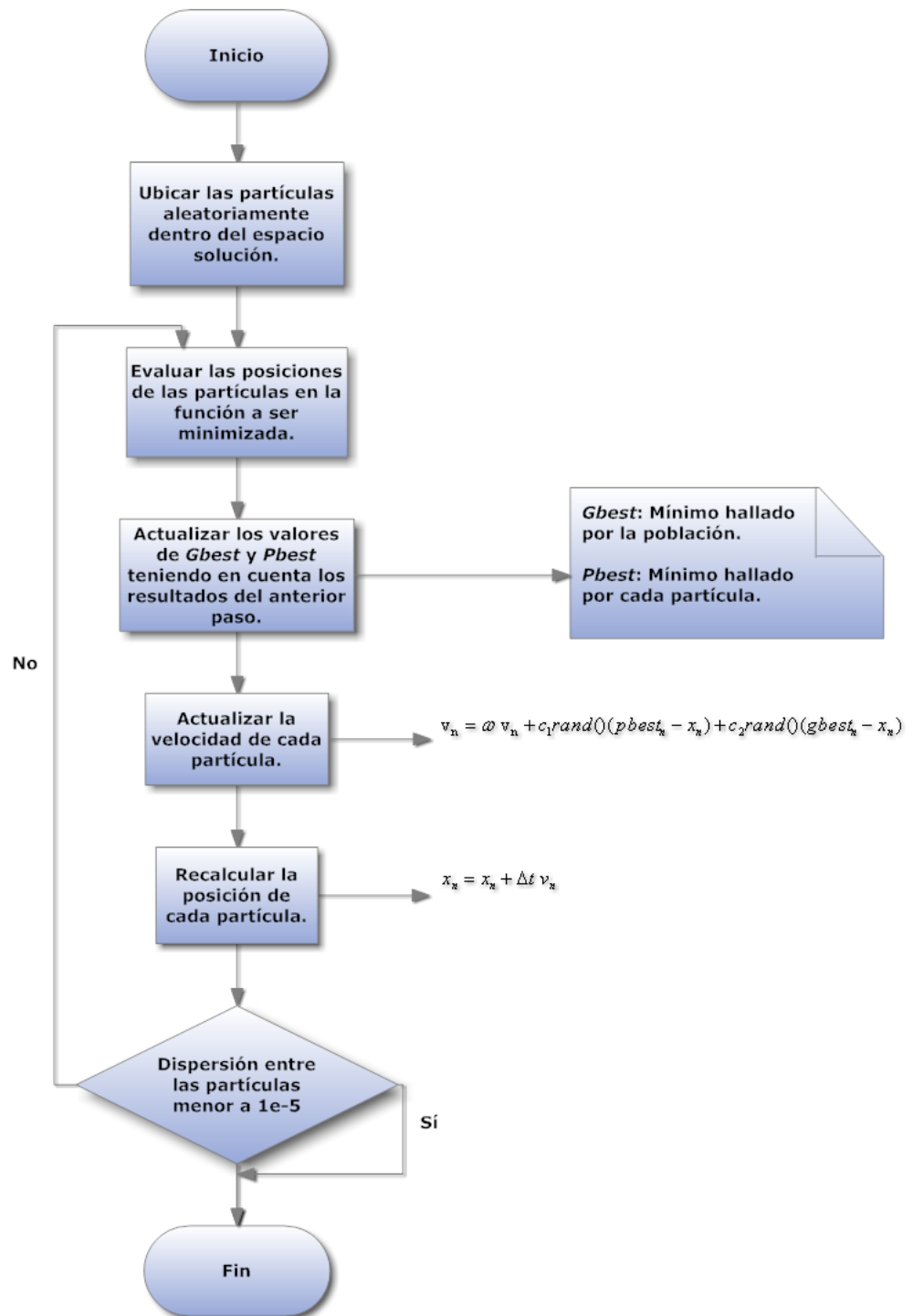
Fuente: J. Robinson y Y. Rahmat-Samii.

PASOS DEL ALGORITMO: La implementación del PSO en software se basa en un conjunto de pasos [8] que se explican a continuación:

1. **Definición del espacio solución:** Establecer el rango de cada parámetro de la función objetivo en el cual se buscará la solución.
2. **Definición Función objetivo:** Establecer la función a ser optimizada por el algoritmo.
3. **Inicialización de la velocidad y la posición del enjambre:** Cada partícula del enjambre empezará su búsqueda con una posición y velocidad aleatoria. La posición inicial de cada partícula se considera como el Pbest inicial.

4. **Recorrido del espacio en búsqueda de la solución:** Durante el proceso de la búsqueda de la solución, se deben realizar diferentes acciones. Entre éstas se encuentran evaluar la función objetivo en la coordenada actual de la partícula, actualizar los valores de Gbest y Pbest, calcular la nueva velocidad de cada partícula mediante la ecuación (19) y calcular la posición de cada partícula con la ecuación (21).
5. **Repetición:** El proceso debe repetirse entonces desde la comparación de los valores para actualizar el Pbest y el Gbest. El proceso de iteración puede ser terminado de diferentes maneras, de las cuales se destacan tres: la definición de un número máximo de iteraciones, la definición de un valor esperado de la función objetivo y la definición de una mínima desviación estándar de la posición de las partículas.

Figura 11. Diagrama de flujo del algoritmo PSO



Fuente: Autores.

## ANEXO 2

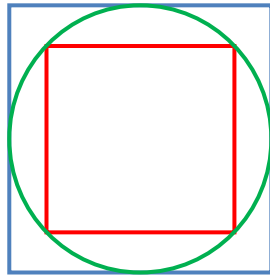
### EXPLICACIÓN DETALLADA DE LA OPTIMIZACIÓN POR ANÁLISIS DE INTERVALOS

EXPLICACION INTUITIVA: El análisis de intervalos (AI) se remonta a los tiempos de Arquímedes (287-212 a.C). Él fue capaz de encerrar el valor de  $\pi$  mediante una forma ingeniosa que se muestra a continuación en la figura 12 y que ilustra el concepto de AI.

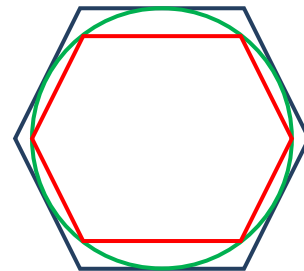
Se considera un círculo de radio 1. Por lo tanto el área del círculo será  $\pi$  y siempre será mayor que el área del polígono inscrito en él y menor que el área del polígono circunscrito.

Figura 12. Método empleado por Arquímedes

Para un cuadrado.      Para un hexágono.



$$4 \geq \pi \geq 2\sqrt{2}$$

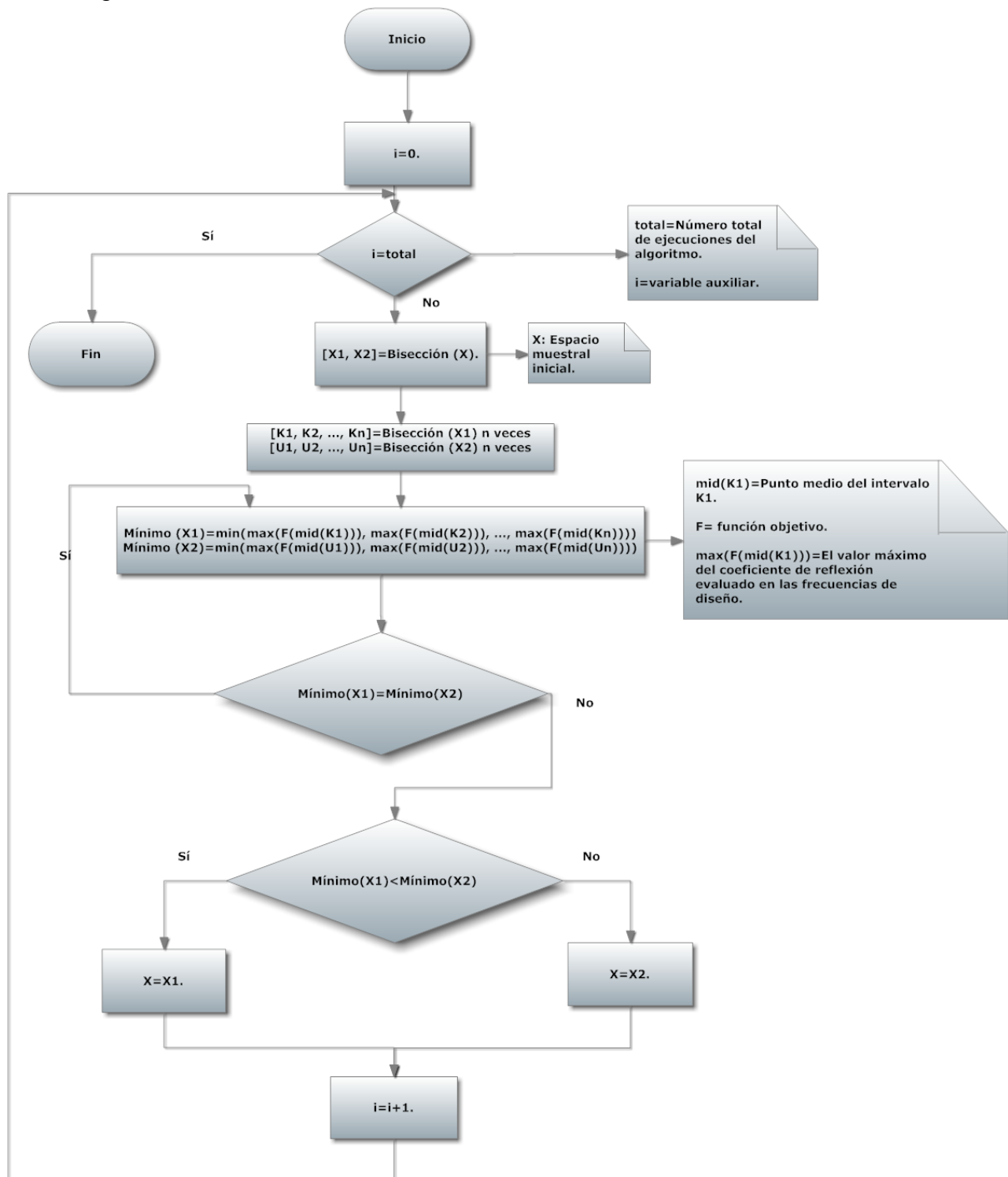


$$2\sqrt{3} \geq \pi \geq 3$$

Fuente: Autores

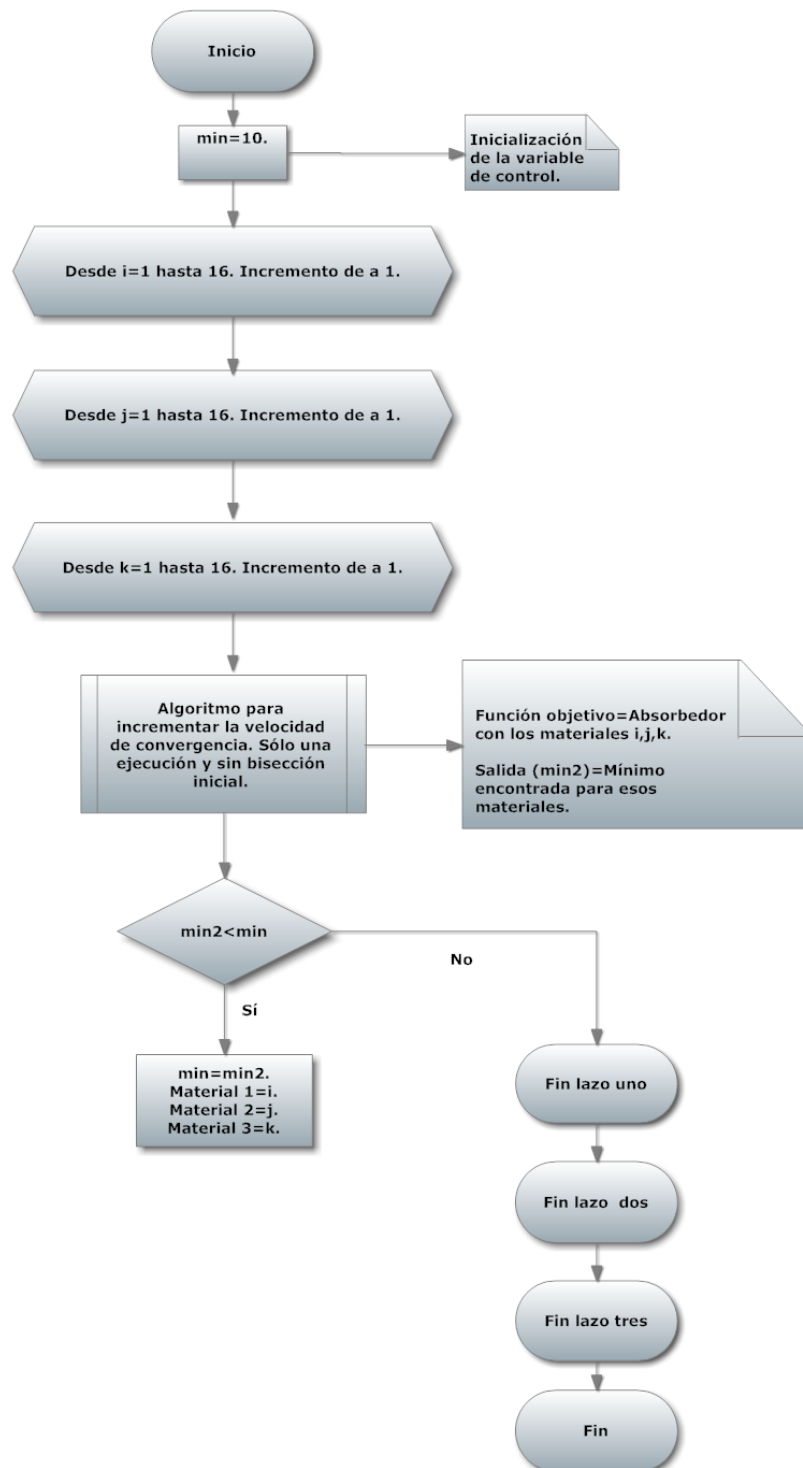
Se puede entonces mostrar la siguiente analogía. El área del círculo se relaciona con el punto crítico de una función a ser encontrado y el número de lados del polígono se relaciona con el número de ejecuciones del algoritmo de optimización por análisis de intervalos. El punto crítico es acotado inferiormente (cuadrado rojo) y acotado superiormente (cuadrado color azul) reduciendo el espacio solución inicial al ejecutar progresivamente el algoritmo.

Figura 13. Diagrama de flujo del algoritmo para aumentar la velocidad de convergencia.



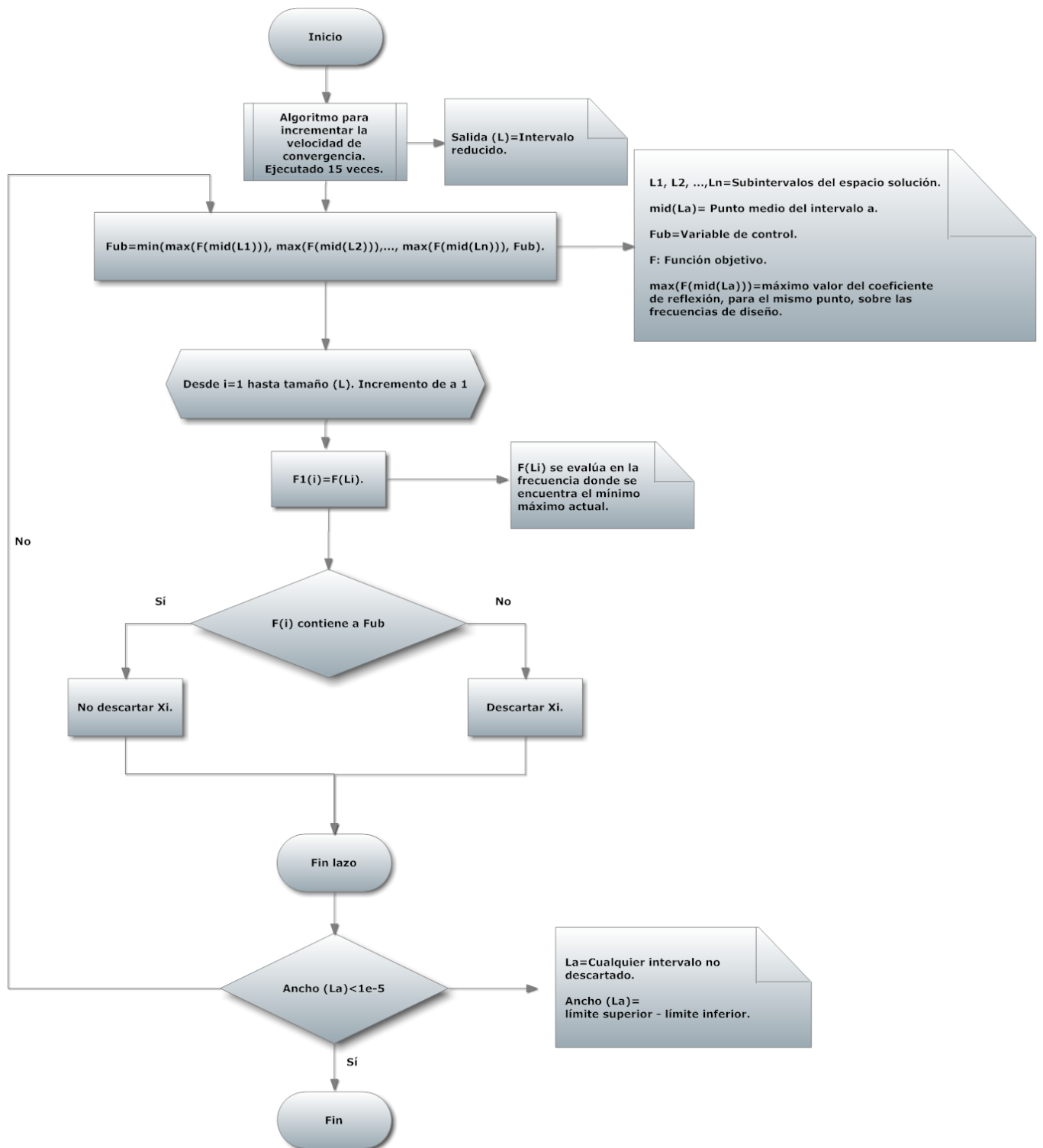
Fuente: Autores

Figura 14. Diagrama de flujo del algoritmo para escoger los materiales mediante análisis de intervalos



Fuente: Autores.

Figura 15. Diagrama de flujo del algoritmo usado para optimizar mediante análisis de intervalos



Fuente: Autores.