ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EDWARD STIVENS SANCHEZ BADILLO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EDWARD STIVENS SANCHEZ BADILLO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Gilberto Arenas Díaz
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

DEDICATORIA

A mi familia, mis amigos compañeros de carrera y a mis docentes desde primaria hasta secundaria.
Gracias a todos ustedes logré llegar hasta aquí.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecerle a mi familia por inculcarme el alcanzar mis metas con esfuerzo y perseverancia, los cuales en muchos momentos de la carrera me motivaron a no rendirme y volver a intentar de una u otra manera cada problema que presentaba al estudiar, así mismo a mis amigos y compañeros de carrera que tuve el placer y la fortuna de conocer, siendo un apoyo emocional importante así como excelentes compañeros de estudio. Por ultimo pero no menos importante al profesor Gilberto por guiarme en el proceso de esta tesis, por su tiempo, consejos e ideas hoy por fin cumplo mi proceso de pregrado de matemáticas en la elaboración de este proyecto de grado.

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE SOLUCIONES POSITIVAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES *

AUTOR: EDWARD STIVENS SANCHEZ BADILLO **

PALABRAS CLAVE: ECUACIONES DIFERENCIALES, SOLUCIONES POSITIVAS, ESPACIOS DE BANACH, FUNCIÓN DE GREEN, TEOREMA DE KRASNOSEL'SKII.

DESCRIPCIÓN:
Este trabajo estudia la existencia de soluciones positivas para ecuaciones diferenciales de segundo orden en la semi-recta real positiva, sujetas a condiciones de frontera específicas. Se abordan dos tipos de ecuaciones, una que depende únicamente de la variable independiente y la función incógnita, y otra que también incluye la derivada de la función incógnita.

El estudio se desarrolla en el marco de los espacios de Banach, utilizando la norma de Bielecki, que permite establecer condiciones menos restrictivas para el crecimiento de las funciones involucradas. La función de Green juega un papel fundamental, permitiendo representar las soluciones mediante operadores integrales. Para garantizar la existencia de soluciones positivas, se utiliza el teorema de punto fijo de Krasnosel'skii en conos. Este teorema proporciona condiciones suficientes para la existencia de soluciones no triviales dentro de una región específica del espacio de Banach. Además, se presentan ejemplos de aplicación de los resultados obtenidos a ecuaciones diferenciales que surgen en contextos físicos, como la ecuación de p-Gardner, una generalización de la ecuación de Korteweg-de Vries, utilizada en la descripción de ondas no lineales.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF POSITIVE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS. *

AUTHOR: EDWARD STIVENS SANCHEZ BADILLO **

KEYWORDS: DIFFERENTIAL EQUATIONS, POSITIVE SOLUTIONS, BANACH SPACES, GREEN'S FUNCTION, KRASNOSEL'SKII'S THEOREM.

DESCRIPTION:

This work studies the existence of positive solutions for second-order differential equations on the positive real half-line, subject to specific boundary conditions. Two types of equations are addressed, one depending solely on the independent variable and the unknown function, and another that also includes the derivative of the unknown function.

The study is developed within the framework of Banach spaces, using the Bielecki norm, which allows establishing less restrictive conditions for the growth of the functions involved. Green's function plays a fundamental role, enabling the representation of solutions through integral operators.

To guarantee the existence of positive solutions, Krasnosel'skii's fixed-point theorem in cones is employed. This theorem provides sufficient conditions for the existence of non-trivial solutions within a specific region of the Banach space. Furthermore, examples are provided applying the obtained results to differential equations arising in physical contexts, such as the p-Gardner equation, a generalization of the Korteweg-de Vries equation, used in the description of nonlinear waves.

---

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Gilberto Arenas Díaz, Ph.D. in Mathematical Sciences.

CONTENIDO

pág.

1. Introducción **8**

2. Generalidades **9**

2.1. Problema central 9

2.2. Espacios de Banach 10

2.3. Espacios de Hilbert 11

2.3.1. Espacios de Banach con norma tipo Bielecki 23

2.4. Función de Green 27

2.4.1. Preliminares 34

3. Resultados Principales **46**

4. Aplicaciones **59**

5. Conclusión **63**

BIBLIOGRAFÍA **63**

LISTA DE FIGURAS

pág.

2.1. Envoltura convexa del conjunto $A = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$. El área sombreada representa Conv(A). 17

1. Introducción

Una ecuación diferencial es una ecuación que relaciona una función y sus derivadas. Las derivadas de una función definen la tasa de cambio de esta en un punto. Las ecuaciones diferenciales se utilizan para modelar diversos fenómenos en el mundo, como el movimiento de objetos, la propagación de enfermedades y el crecimiento de poblaciones. Estas ecuaciones son herramientas fundamentales en muchos campos, como la física, la ingeniería, la biología y la economía, ya que permiten modelar el comportamiento de sistemas que cambian con el tiempo y predecir cómo se comportarán en el futuro. También se emplean en el diseño de nuevos sistemas y en la optimización del rendimiento de los existentes.

En muchos casos, es crucial que las soluciones de las ecuaciones diferenciales sean positivas, ya que muchos sistemas del mundo real solo pueden tener valores positivos. Por ejemplo, al modelar el crecimiento de una población, la variable que representa el número de individuos debe ser positiva en todo momento. De manera similar, al modelar la propagación de una enfermedad, la cantidad de personas infectadas también debe ser positiva.

Las ecuaciones diferenciales constituyen una herramienta poderosa para modelar y predecir el comportamiento de sistemas en cambio, siendo utilizadas en múltiples disciplinas. Su importancia se incrementa a medida que el mundo se vuelve más complejo. Por lo tanto, las soluciones positivas son fundamentales en el estudio de estas ecuaciones, ya que muchos sistemas del mundo real solo admiten valores positivos. Antes de encontrar tales soluciones, es necesario garantizar su existencia. El objetivo de esta tesis es estudiar la existencia de soluciones positivas para un tipo de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para ello, se emplearán conceptos importantes del análisis funcional, junto con la función de Green (ver sección 2.4) y resultados para los espacios E y E', los cuales serán fundamentales para obtener los resultados deseados.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: primero, se plantean los problemas diferenciales a estudiar, luego en el marco teórico, se revisan brevemente algunas definiciones básicas sobre los espacios de Banach y Hilbert, así como resultados importantes para espacios con norma de Bielecki y la función de Green. y finalmente los teoremas que garantizarán la existencia de soluciones para los problemas 2.1 y 2.2.

2. Generalidades

En esta sección se presentan los conceptos fundamentales relacionados con los espacios de Banach y de Hilbert, así como los espacios de Banach dotados de la norma tipo Bielecki, cuya importancia radica en su capacidad para controlar el crecimiento de las soluciones a ecuaciones diferenciales. Asimismo, se introduce la función de Green, que desempeña un papel fundamental en la representación explícita de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales lineales.

2.1. Problema central

Un problema de valor en la frontera (PVF) es una ecuación diferencial acompañada de condiciones adicionales, conocidas como condiciones de frontera, que definen restricciones específicas en los límites del dominio. Los PVF son herramientas esenciales para modelar fenómenos físicos, como el flujo de calor en sólidos o las vibraciones en cuerdas. En el marco de esta tesis, y basándose en el trabajo de Zima [1], que introduce dos PVF específicos, junto con el apoyo conceptual y algunas cuentas de la tesis de Arenas G. [2], que aborda los PVF de forma general, se estudiará la existencia de soluciones positivas para los siguientes PVF de segundo orden.

$$\begin{cases} x''(t) - k^2 x(t) + f\big(t, x(t)\big) = 0, \\ x(0) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{cases} x''(t) - k^2 x(t) + f\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0, \\ x(0) = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

con $t \in I = [0, \infty)$, $k > 0$ y f una función continua y no negativa.

[1] M. Zima. «On positive solutions of boundary value problems on the half-line». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 259 (2001), págs. 127-136.

[2] G. Arenas. «Ondas viajeras para algunos modelos dispersivos no lineales». Tesis de doctorado. Universidad del Valle, 2019.

2.2. Espacios de Banach

Los espacios de Banach constituyen una herramienta fundamental en diversas áreas de las matemáticas, como el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales y el análisis numérico. Además, tienen aplicaciones en campos como la física, la ingeniería y la economía. En el contexto de las ecuaciones diferenciales, los espacios de Banach se emplean para estudiar las soluciones de dichas ecuaciones. Por ejemplo, el conjunto de todas las funciones que satisfacen una ecuación diferencial dada forma un espacio de Banach. Las definiciones y conceptos relacionados con los espacios de Banach utilizados en esta tesis se toman de [3], donde se exponen de manera detallada las propiedades y aplicaciones de estos espacios en el análisis funcional.

Definición 2.2.1. *Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, una norma en X es una función de X en $\mathbb{R}_0^+$, que cumple:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x|| \quad (\lambda \in \mathbb{K})$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Ejemplo 2.2.2. *Sean S un conjunto, $\mathbb{K}$ un campo, y el conjunto:*

$$A = \Big\{ f /\ f : S \to \mathbb{K} \text{ es una función acotada} \Big\},$$

donde se define la norma del supremo:

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty,S} := \sup \Big\{ \|f(x)\|,\ x \in S \Big\}. \tag{2.3}$$

Un espacio normado es un par $(X, ||\cdot||)$, donde X es un espacio vectorial y $||\cdot||$ es una norma en X. En caso de no haber confusión, se escribirá simplemente el espacio normado X. Por otro lado, se escribirá $||\cdot||_X$ cuando se quiera resaltar una norma en específico en el espacio X.

Proposición 2.2.3. *Todo espacio normado $(X, ||\cdot||)$ induce un espacio métrico con la distancia*

$$d(x, y) = ||y - x||.$$

[3] M. Martins. *Resúmenes de análisis funcional 2016*. Disponible en: `https://www.ugr.es/~mmartins/material/Resumenes_analisis_funcional.pdf`. 2016.

La topología asociada a la distancia d suele denominarse topología de la norma en X.

Definición 2.2.4. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, con $n_0 > 0$, tal que*

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon \quad \forall\ m, n > n_0.$$

Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X. Un espacio de Banach es un espacio métrico $(X, ||\cdot||)$ completo con la distancia d inducida por la norma $||\cdot||$. Cuando no se especifique lo contrario, todas las nociones topológicas sobre un espacio de Banach se referirán a la topología de la norma y todas las nociones métricas a la distancia d. Por lo tanto, dado que $\mathbb{R}^n$ cumple con todas estas propiedades, se concluye que es un espacio de Banach.

Definición 2.2.5. *Se dice que un conjunto S es relativamente compacto en un espacio topológico X si toda sucesión de elementos de S tiene una subsucesión de convergente en X.*

Definición 2.2.6. *Un subconjunto no vacío K de un espacio de Banach E se llama cono si K es convexo, cerrado y*

1. *$\alpha x \in K$, para todo $x \in K$ y $\alpha \geq 0$,*
2. *Si $x, -x \in K$, entonces $x = 0$.*

Definición 2.2.7. *Se dice que Ω es precompacto (o relativamente compacto) si toda sucesión admite una subsucesión convergente en Ω.*

2.3. Espacios de Hilbert

Los espacios de Hilbert son fundamentales en diversas áreas de las matemáticas, especialmente en el análisis funcional, la teoría de operadores y la física matemática. Su estructura de espacio vectorial con producto interno permite una geometría rica y útil, convirtiéndolos en una herramienta esencial para el estudio de problemas de optimización, ecuaciones diferenciales parciales y procesos estocásticos. En particular, los espacios de Hilbert son ampliamente utilizados en la mecánica cuántica, donde los estados cuánticos se representan como vectores en un espacio de Hilbert. Los conceptos y resultados presentados en esta sección se basan principalmente en los apuntes de clases de Galaz García [4], y se complementan con desarrollos adicionales de [5] que permiten profundizar en las propiedades y aplicaciones de los puntos fijos.

Definición 2.3.1. *Sea H un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un producto interno (PI) en H es una función*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K},$$

que cumple las siguientes condiciones: dados $x, y, z \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que

- *Es sesquilineal (lineal en la primera y antilineal en la segunda):*

  $$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \textit{y} \quad \langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

  donde $\overline{\lambda}$ es el conjugado de λ.

- *Es conjugadamente simétrico:*

  $$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

- *Es definido positivo:*

  $$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \textit{y solo se anula si } x = 0.$$

Ejemplo 2.3.2. $\mathbb{R}^n$*, donde el producto interno se define como*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

y la norma asociada es la norma euclidiana. Dado que $\mathbb{R}^n$ satisface todas estas propiedades, se concluye que es un espacio de Hilbert.

Definición 2.3.3. *Sea H un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con un producto interno asociado. Si $(H, \|\cdot\|)$ resulta ser un espacio de Banach, se le llamará espacio de Hilbert (EH).*

---

[4] F. Galaz-García. *Clase 22: Análisis II (Enero 2021)*. Notas de clase, Centro de Investigación en Matemáticas. 2021.

[5] F. Arrieta y M. Scazzola. *Teoremas del Punto Fijo*. Monografía, Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas. 2021.

Teorema 2.3.4. *Sea H un espacio de Hilbert. Dado $A \subset H$ que es cerrado y convexo, se establece que para todo $x \in H$ existe un único $a_0 \in A$ tal que $d(x, A) = \|x - a_0\|$, donde*

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Demostración. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de A tal que $\|x - a_n\| \to d(x, A)$. Dado que A es cerrado, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge a algún $a_0 \in A$. Por la continuidad de la función distancia, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \|x - a_{n_k}\| = \|x - \lim_{k \to \infty} a_{n_k}\| = \|x - a_0\| = d(x, A).$$

Ahora, se probará que a_0 es único. Se supone que existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $d(x, A) = \|x - a_1\| = \|x - a_2\|$ y se define $a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$.
Aplicando la desigualdad del paralelogramo, se obtiene

$$2\left(\|x - a_1\|^2 + \|x - a_2\|^2\right) = \|(x - a_1) + (x - a_2)\|^2 + \|(x - a_1) - (x - a_2)\|^2,$$

esto se puede expandir como

$$= \|2x - (a_1 + a_2)\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2 = \left\|2\left(x - \frac{a_1 + a_2}{2}\right)\right\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$2\left(d(x, A)^2 + d(x, A)^2\right) = 4\|x - a_0\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2.$$

Reemplazando la hipótesis de a_1 y a_2, se concluye que

$$4d(x, A)^2 = 4\|x - a_0\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2.$$

De esta manera, se deduce que

$$d(x, A)^2 = \|x - a_0\|^2 + \frac{\|a_1 - a_2\|^2}{4}.$$

Como $a_1 \neq a_2$ y $a_0 \in A$ (pues es el punto medio entre dos elementos de un conjunto convexo), se tiene que

$$d(x, A)^2 > \|x - a_0\|^2.$$

Dado que la norma es un valor positivo, esto implicaría que $d(x, A) > \|x - a_0\|$, lo cual contradice que $d(x, A)$ sea el ínfimo de todas las distancias entre x y un elemento de A. Por lo tanto, debe existir un único $a_0 \in A$ tal que $d(x, A) = \|x - a_0\|$. $\square$

Teorema 2.3.5 (Punto Fijo de Brouwer)**.** *Si $1 \leq d < \infty$, B es la bola unitaria cerrada de $\mathbb{R}^d$ y $f : B \to B$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en B para f.*

El Teorema de Brouwer es fundamental para la demostración del Teorema de Schauder, el cual se emplea para probar la existencia de soluciones positivas en un problema de valores en la frontera. La relación entre estos teoremas es crucial para establecer la base teórica sobre la que se construye el argumento principal de la tesis. La demostración del Teorema de Brouwer implica técnicas avanzadas en teoría topológica, como el uso de espacios de Hausdorff y conceptos avanzados de análisis funcional. Dado que el enfoque principal de la tesis está en analizar teóricamente la existencia de soluciones positivas para un problema de valores en la frontera de la forma 2.1 y 2.2, se considera que una presentación detallada de la prueba podría desviar el foco de los temas centrales. En lugar de incluir la prueba detallada del Teorema de Brouwer, se ha optado por utilizar el Teorema de Schauder, el cual está basado en el Teorema de Brouwer. El Teorema de Schauder proporciona un marco más manejable y directamente aplicable para demostrar la existencia de soluciones positivas para el problema de valores en la frontera. Esta elección permite enfocar la discusión en espacios Banach con norma tipo Bielecki, la función de Green y algunas condiciones necesarias, manteniendo la tesis dentro del alcance deseado.
Para aquellos interesados en una comprensión más detallada del Teorema de Brouwer y su demostración, el libro Principles of Mathematical Analysis de Walter Rudin [6] ofrece una presentación rigurosa y exhaustiva del teorema. Este texto proporciona una base sólida en los fundamentos del análisis matemático y es una excelente referencia para profundizar en los detalles del Teorema de Brouwer y su contexto teórico.

Ejemplo 2.3.6. *Un caso clásico es la función $f : B^2 \to B^2$ definida como $f(x, y) = (\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} - \frac{y}{2})$. Esta función es continua y tiene un punto fijo $(x, y) = (0, 0)$ en B^2.*

Ejemplo 2.3.7. *Otro ejemplo es la función $f : B \to B$ dada por $f(x) = \cos(x)$ para $x \in B = [-1, 1]$. Esta función es continua y tiene punto fijo en $x \approx 0{,}739085$ en B.*

---

[6] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis (3rd ed.)* McGraw-Hill, 1976.

Las siguientes definiciones y resultados son fundamentales para la demostración del Teorema de Schauder 2.3.17, el cual se empleará para demostrar el Teorema 2.3.18.

Definición 2.3.8. *Un isomorfismo entre dos espacios matemáticos X e Y $($por ejemplo, entre dos espacios vectoriales o dos grupos$)$ es una función biyectiva $f : X \to Y$ que preserva la estructura del espacio. Si existe un isomorfismo entre dos espacios, se dice que esos espacios son isomorfos.*

Definición 2.3.9. *Un homeomorfismo entre dos espacios topológicos X e Y es una función biyectiva $h : X \to Y$ que es continua, y cuya inversa h^{-1} también es continua. Dos espacios topológicos que son homeomorfos tienen las mismas propiedades topológicas.*

Definición 2.3.10. *Un isomorfismo lineal es un isomorfismo entre dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo que, además, preserva la estructura lineal. Es decir, una función $f : V \to W$ es un isomorfismo lineal si:*

1. *f es biyectiva.*
2. *f preserva la adición y multiplicación por escalares: para todos $u, v \in V$ y para todo escalar α, se cumple que*

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{y} \quad f(\alpha v) = \alpha f(v).$$

Colorario 2.3.11. *Si K es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio normado X de dimensión finita, y $f : K \to K$ es una función continua, entonces existe un punto fijo en K para f.*

Demostración. Para simplificar, se probará el caso en que $X = \mathbb{R}^d$, con $1 \leq d < \infty$. Dado que X es isomorfo a $\mathbb{C}^d$ o a $\mathbb{R}^d$, se puede considerar que es homeomorfo a $\mathbb{R}^{2d}$ o a $\mathbb{R}^d$. Además, este homeomorfismo puede ser elegido como lineal sobre $\mathbb{R}$ y preservará la convexidad. Sea $h : X \to \mathbb{R}^d$ un homeomorfismo lineal y $f : K \to K$ continua; entonces, $h(K)$ es un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^d$, y la función compuesta $h \circ f \circ h^{-1} : h(K) \to h(K)$ también es continua. Si esta última tiene un punto fijo y, se puede concluir que $h^{-1}(y)$ es un punto fijo de f. Por lo tanto, se puede asumir que el espacio considerado es $\mathbb{R}^d$ y estudiar un caso particular de K, del cual se pueden deducir otros.
Si se toma $K = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$, se define la función auxiliar $g : B \to B$ como

$$g(x) = \frac{1}{r} f(rx), \quad \text{para todo } x \in B,$$

y se observa que cumple con las hipótesis del Teorema de Brouwer. Por lo tanto, existe un punto fijo $x_0 \in B$ para g, lo que implica que $rx_0 \in K$ es un punto fijo de f.
Ahora, si K es cualquier subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^d$, se selecciona un $r > 0$ tal que $K \subseteq B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$. Como $\mathbb{R}^d$ es un espacio de Hilbert y K es cerrado y convexo, se considera la función $\varphi : B_r \to K$ que asigna a cada $x \in B_r$ el único $y \in K$ tal que $\|x-y\| = d(x, K)$. Se procederá a demostrar que φ es continua: sea $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in B_r$. Como $\{\varphi(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ y K es compacto, existen límites subsecuenciales en K (es decir, límites de ciertas subsucesiones de elementos de K). Supongamos que $\varphi(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} y$. Usando la definición de φ, se tiene que para todo $z \in K$:

$$\|x - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - \varphi(x_{n_k})\| \leq \lim_{k\to\infty} \|x_{n_k} - z\| = \|x - z\|,$$

lo que implica que $\varphi(x) = y$. Si se supusiera que $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$, existiría una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un $\epsilon > 0$ tal que $\|\varphi(x_{n_k}) - \varphi(x)\| > \epsilon$, y al considerar una subsucesión convergente (a $\varphi(x)$) se llegaría a una contradicción, por lo que se concluye que φ es continua.
Así, $f \circ \varphi : B_r \to K \subseteq B_r$ es continua, y por el caso anterior, existe un $x \in B_r$ tal que $f(\varphi(x)) = x \in K$. Finalmente, como $\varphi(x) = x$ para cada $x \in K$, se concluye que x es un punto fijo de f. $\square$

Lema 2.3.12. *Sean K un subconjunto de un espacio normado X, $\epsilon > 0$ y A un subconjunto finito de K tal que $K \subset \bigcup_{a\in A} B(a, \epsilon)$. Se define $\phi_A : K \to X$ como*

$$\phi_A(x) = \frac{\sum_{a\in A} m_a(x) \cdot a}{\sum_{a\in A} m_a(x)},$$

donde

$$m_a(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad \|x - a\| \geq \epsilon, \\ \epsilon - \|x - a\| & \textit{si} \quad \|x - a\| < \epsilon. \end{cases}$$

Entonces ϕ_A es continua y $\|\phi_A(x) - x\| < \epsilon$ para todo $x \in K$.

Demostración. Se observa que para cada $a \in A$, se tiene que $m_a \geq 0$ y

$$\sum_{a\in A} m_a(x) > 0$$

para cualquier $x \in K$. Esto garantiza que ϕ_A está bien definida en K. La continuidad de ϕ_A se deduce del hecho de que, para cada $a \in A$, la función $m_a : K \to [0, \varepsilon]$ es continua,

ya que se puede expresar como $m_a(x) = \text{máx}\{\varepsilon - \|x - a\|, 0\}$.
Para un $x \in K$, se puede escribir

$$\phi_A(x) - x = \frac{\sum_{a\in A} m_a(x) \cdot a}{\sum_{a\in A} m_a(x)} - \frac{\sum_{a\in A} m_a(x) \cdot x}{\sum_{a\in A} m_a(x)} = \frac{\sum_{a\in A} m_a(x) \cdot (a - x)}{\sum_{a\in A} m_a(x)}.$$

Se define el conjunto B_x como el subconjunto de elementos de A donde $m_a(x) > 0$. Se nota que si $a \in B_x$, entonces se cumple que $\|x - a\| < \varepsilon$. Esto permite observar que

$$\|\phi_A(x) - x\| \leq \frac{\sum_{a\in A} m_a(x) \cdot \|a - x\|}{\sum_{a\in A} m_a(x)} = \frac{\sum_{a\in B_x} m_a(x) \cdot \|a - x\|}{\sum_{a\in B_x} m_a(x)} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, se concluye que $\|\phi_A(x) - x\| < \epsilon$ para todo $x \in K$. □

Definición 2.3.13. *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo K, y sea $A \subseteq E$. La envoltura convexa de A denotada por Conv(A), es el conjunto de todos los elementos que pueden expresarse como combinaciones convexas de elementos en A. Es decir, son todos los elementos de la forma $\sum_{k\in I_n} \lambda_k a_k$, donde $a_k \in A$ y los escalares λ_k son no negativos, con la condición adicional de que $\sum_{k\in I_n} \lambda_k = 1$.*

Ejemplo 2.3.14. *Si se tienen un conjunto de puntos en el plano, como $A = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$, la envoltura convexa de estos puntos es el triángulo formado por ellos.*

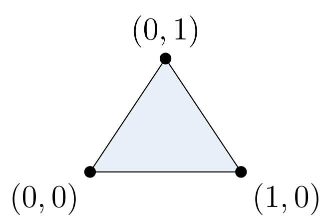

Figura 2.1: Envoltura convexa del conjunto $A = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$. El área sombreada representa Conv(A).

Definición 2.3.15. *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $A \subseteq E$. El conjunto de todos los elementos que pueden expresarse como combinaciones lineales de los elementos de A se denomina la generación lineal de A, o Span(A). Esto incluye a todos los elementos de la forma $\sum_{k\in I_n} \lambda_k a_k$, donde $a_k \in A$ y λ_k son escalares en K.*

Definición 2.3.16. *Una función lineal $T : X \to Y$ entre espacios de Banach se dice que es completamente continua (o compacta) si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos. Esto significa que si $B \subseteq X$ es un conjunto acotado, entonces $T(B) \subseteq Y$ es relativamente compacto en Y. En términos más formales, T es completamente continua si para cada conjunto acotado B en X, la imagen $T(B)$ en Y tiene la propiedad de que su cierre es compacto. En otras palabras, $T(B)$ está contenido en un conjunto compacto en el espacio de destino.*

Teorema 2.3.17 (Punto fijo de Schauder)**.** *Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio normado E. Si $f : C \to X$ es una aplicación completamente continua tal que $f(C) \subseteq C$, entonces f tiene al menos un punto fijo en C.*

Demostración. Se considera $K = \overline{f(C)}$. Como C es acotado y f es compacta, se establece que K es compacto y se cumple que $K \subseteq \overline{C} = C$. Para cada entero positivo n, se toma un conjunto finito $A_n \subseteq K$ tal que $K \subseteq \bigcup_{a \in A_n} B(a, 1/n)$, y se define $\phi_n = \phi_{A_n}$ como en el Lema 2.3.12. Por la definición de ϕ_n y dado que C es convexo, se puede afirmar que $\phi_n(K) \subseteq \text{Conv}(A_n) \subseteq \text{Conv}(K) \subseteq C$. Por lo tanto, se tiene que $f_n = \phi_n \circ f : C \to C$. Además, el Lema 2.3.12 indica que

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{n}, \quad \forall x \in C. \tag{1}$$

A continuación, se consideran subespacios de dimensión finita de X. Se define X_n como el subespacio generado por A_n y $C_n = C \cap X_n$. Se verifica que $\phi_n(K) \subseteq X_n$: se ha demostrado que $\phi_n(K) \subseteq C$, y además, se cumple que $\phi_n(K) \subseteq \text{Conv}(A_n) \subseteq \text{Span}(A_n) = X_n$. Por lo tanto, se concluye que $\phi_n(K)$ está contenido en la intersección de ambos, que es X_n.
Con esto establecido, se puede afirmar que $f_n : C_n \to C_n$ es continua. Dado que X_n es un espacio normado de dimensión finita y C_n es un subconjunto convexo de X_n (ya que es la intersección de dos conjuntos convexos), por el Corolario 2.3.11, existe un punto $x_n \in C_n$ tal que $f_n(x_n) = x_n$.
Como esta construcción se realizó para un n genérico, se observa que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en el compacto $K = \overline{f(C)}$. Por lo tanto, existe un punto x_0 y una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0$. Dado que $f_{n_k}(x_{n_k}) = x_{n_k}$, la desigualdad (1) lleva a

$$\|x_{n_k} - x_0\| \leq \|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\| + \|f(x_{n_k}) - x_0\| \leq \frac{1}{n_k} + \|f(x_{n_k}) - x_0\| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Esto implica que $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, y por la continuidad de la función f, se concluye que

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = x_0.$$

$\square$

Teorema 2.3.18 (Teorema del punto dijo de Krasnosel'skii)**.** *Sea E un espacio de Banach y $K \subset E$ un cono en E. Sean Ω_1 y Ω_2 dos conjuntos abiertos y acotados en E tal que $\theta \in \Omega_1$ (donde θ denota el origen de E) y $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Sea $F : K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right) \to K$ un operador completamente continuo tal que*

1. $\|Fx\| \leq \|x\|$ *para* $x \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Fx\| \geq \|x\|$ *para* $x \in K \cap \partial\Omega_2$ *ó*
2. $\|Fx\| \geq \|x\|$ *para* $x \in K \cap \partial\Omega_1$ *y* $\|Fx\| \leq \|x\|$ *para* $x \in K \cap \partial\Omega_2$.

Entonces F tiene al menos un punto fijo en $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$.

Demostración. Dado que $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, existe un punto $x \in K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$.

- **Caso 1:** Sean $x_1 \in \partial\Omega_1$ y $x_2 \in \partial\Omega_2$. Entonces, se tiene que:

  - $\|F(x_1)\| \leq \|x_1\|$ para $x_1 \in K \cap \partial\Omega_1$,
  - $\|F(x_2)\| \geq \|x_2\|$ para $x_2 \in K \cap \partial\Omega_2$.

  Ahora, se definen los segmentos de recta:

  - v_1 como el segmento de recta que une $F(x_1)$ con x, es decir,

  $$v_1 = \{(1-\lambda)F(x_1) + \lambda x : \lambda \in [0,1]\},$$

  - v_2 como el segmento de recta que une x con $F(x_2)$, es decir,

  $$v_2 = \{(1-\mu)x + \mu F(x_2) : \mu \in [0,1]\}.$$

  Estos segmentos de recta están contenidos en $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$.

  Se define el conjunto

  $$C = (v_1 \cup v_2) \cap \left(K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)\right).$$

Es claro que C es no vacío, ya que contiene al punto x. Además, es cerrado porque está formado por la unión de dos segmentos de recta, los cuales son cerrados en $K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$. También es acotado, ya que v_1 y v_2 son segmentos de recta acotados por la acotación de los conjuntos Ω_1 y Ω_2. Finalmente, C es convexo, ya que la unión de dos segmentos de recta es convexa. Como C es no vacío, cerrado, acotado y convexo, se puede aplicar el Teorema de Schauder sobre C. El teorema garantiza que existe un punto fijo de F en $C \subseteq K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$, es decir, existe un $y \in C$ tal que $F(y) = y$.

- **Caso 2:** Análogamente si $x_1 \in \partial\Omega_1$ y $x_2 \in \partial\Omega_2$. Entonces, se tiene que:
  - $\|F(x_1)\| \geq \|x_1\|$ para $x_1 \in K \cap \partial\Omega_1$,
  - $\|F(x_2)\| \leq \|x_2\|$ para $x_2 \in K \cap \partial\Omega_2$.

$\square$

Las siguientes definiciones y resultados son fundamentales para la demostración del Teorema de Arzelá-Ascoli 2.3.25, el cual es crucial para obtener conjuntos relativamentes compactos en los espacios de Banach E y E'.

Definición 2.3.19. *Sean M, X espacios métricos y D un conjunto no vacío. Sea $A \subseteq F(D)$ una familia de funciones uniformemente continuas, donde $F(D)$ es el conjunto de todas las funciones definidas en D. Si $f_k : M \to E$ son funciones en la familia A, entonces:*

- *Se dice que la sucesión $\{f_k\}$ es equicontinua si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

  $$\text{si } d_M(x,y) < \delta \Longrightarrow d_E\big(f_k(x), f_k(y)\big) < \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

  donde d_M es la métrica en M y d_E es la métrica en E.

- *Se dice que la sucesión $\{f_k\}$ converge puntualmente a f en D si para cada $\epsilon > 0$ y cada $x \in D$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se cumple*

  $$d_E\big(f_n(x), f(x)\big) < \epsilon.$$

Definición 2.3.20. *Un espacio métrico M es separable, si tiene un subconjunto que es denso y numerable. Un conjunto C en un espacio métrico M se dice que es denso en M si, para todo punto $x \in M$ y para cada $\epsilon > 0$, existe un punto $y \in C$ tal que $d(x,y) < \epsilon$.*

Lema 2.3.21. *Sea K un espacio métrico compacto. Entonces:*

1. *K es separable.*
2. *Si $D \subset K$ es denso, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $D_0 \subset D$ tal que $K \subset \bigcup_{d \in D_0} B(d, \epsilon)$.*

Demostración.

1. Como K es compacto y métrico, se concluye que es totalmente acotado. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un número finito de puntos $x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nJ(n)} \in K$ tales que
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J(n)} B\left(x_{nj}, \frac{1}{n}\right). \tag{2.4}$$
Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_{n,j} : j = 1, \ldots, J(n)\}$ la unión numerable de conjuntos finitos, por lo que D es numerable.
Sea $x \in K$, $\epsilon > 0$, y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Por (2.4), existe algún j tal que $d(x, x_{n_0,j}) < \epsilon$. Así, se concluye que D es un conjunto denso y numerable, lo que implica que K es separable.
2. Sea $\epsilon > 0$. Como K es totalmente acotado, existe un conjunto finito $K_0 \subset K$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in K_0} B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right)$.
Dado que $D \subset K$ es denso, para cada $x \in K_0$ se puede encontrar un $d \in D$ tal que $d(x, d) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, se obtiene que
$$K \subset \bigcup_{d \in D} B(d, \epsilon).$$

□

Teorema 2.3.22 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío y acotado. Entonces, cada sucesión $\{x_n\}$ de puntos en K tiene al menos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a un límite $x \in K$.*

Lema 2.3.23. *Si $\{f_n\} \subset F(D)$ es puntualmente acotada y D es numerable, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en D.*

Demostración. Como D es numerable entonces se puede expresar de la siguiente manera $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde $d_i \neq d_j$ si $i \neq j$, ahora, tomando la sucesión $\{f_n(d_1)\}$, la cual es acotada por hipótesis, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión convergente, denotada por $\{f_n^{(1,j)}(d_1)) : j \in \mathbb{N}\}$, de la misma manera la sucesión $\{f_n^{(1,j)}(d_2)\}$ es acotada, y aplicando de nuevo el teorema de Bolzano-Weierstrass se toma una subsucesión convergente $\{f_n^{(2,j)}(d_2) : j \in \mathbb{N}\}$. Continuando con el proceso se obtiene una familia de sucesiones $\{f_n^{(i,j)}(d_i) : i \in \mathbb{N}\}$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$ la siguiente sucesión es convergente

$$\{f_n^{(i,j)}(d_i)\}_j, \tag{2.5}$$

y

$$\{f_n^{(i+1,j)}\} \subseteq \{f_n^{(i,j)}\}. \tag{2.6}$$

A manera gráfica, el proceso de generar las sucesiones produce una matriz infinita

$$\begin{array}{ccccl} f_n^{(1,1)}(d_1) & \cdots & f_n^{(1,j)}(d_1) & \cdots & \to \text{converge} \\ f_n^{(2,1)}(d_2) & \cdots & f_n^{(2,j)}(d_2) & \cdots & \to \text{converge} \\ \vdots & & \vdots & & \\ f_n^{(j,1)}(d_j) & \cdots & f_n^{(j,j)}(d_j) & \cdots & \to \text{converge} \\ \vdots & & \vdots & & \end{array}$$

Considerando la sucesión diagonal $\{f_n^{(j,j)}\}$ y fijando $n_0 \in \mathbb{N}$ se tiene que la sucesión $\{f_n^{(j,j)}(d_{n_0})\}_j$ es una "subsucesión" de $\{f_n^{(n_0,j)}\}_j$ exceptuando quizás por los términos $f_n^{(1,1)}(d_{n_0})$, ..., $f_n^{(n_0-1,n_0-1)}(d_{n_0})$, (esto debido a que cada fila es una subsucesión de la fila anterior), con lo cual por (2.6), la sucesión $\{f_n^{(j,j)}(d_{n_0})\}_j$ converge. Como d_{n_0} fue arbitrario se tiene que $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en D.

□

Proposición 2.3.24. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones en $F(D)$ equicontinua y $\{f_n\}_k$ una subsucesión puntualmente convergente a f, entonces la sucesión es uniformemente de cauchy.*

Demostración. Para simplificar se denotará por $\{g_k\} = \{f_n\}_k$, sea $\epsilon > 0$, como $\{f_n\}$ es equicontinua para dicho ϵ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in D$ con $d(x, y) < \delta$ se cumple que

$$d\left(g_k(x), g_k(y)\right) < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\square$

Teorema 2.3.25 (Arzelá-Ascoli)**.** *Sea K un espacio métrico compacto. Si una sucesión $\{f_n\} \subset C(K)$ es puntualmente acotada y equicontinua, entonces tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

Demostración. Sea $D \subset K$ denso y numerable por el lema (2.3.23) existe una subsucesión $\{f_n^k\}_k$ que converge puntualmente en $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$. Se define $g_k = f_n^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$ como $\{g_k\}$ es puntualmente convergente por la Proposición 2.3.24 se tiene que es equicontinua, por lo cual existe $\delta > 0$ tal que

$$d\big(g_k(x), g_k(y)\big) \leq \frac{\epsilon}{3}, \text{ si } x, y \in K,\, d(x,y) \leq \delta,\, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Por la Lema 2.3.21 como D es denso en el compacto K, existe un conjunto finito $D_0 \subset D$, con $D_0 = \{d_j \in D : j = 1, 2, ..., J\}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{d \in D_0} B(d, \delta).$$

Por la construcción, cada sucesión $\{g_k(d_i)\}_k$ es convergente para $j = 1, 2, ..., J$, es posible escoger $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d\big(g_k(d_j), g_l(d_j)\big) \leq d\big(g_k(d_j), g(d_j)\big) + d\big(g(d_j), g_l(d_j)\big) \leq \frac{\epsilon}{6} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3},$$

$$d\big(g_k(d_j), g_l(d_j)\big) \leq \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall d_j \in D_0; \forall k, l \geq n_0. \tag{2.8}$$

Sea $x \in K$, se fija $j_0 \in \{1, 2, ..., J\}$ tal que $d(x, d_{j_0}) \leq \delta$ y sean $k, j \geq n_0$, entonces por (2.7) y (2.8) se tiene que

$$\begin{aligned} d\big(g_k(x), g_l(x)\big) &\leq d\big(g_k(x), g_k(d_{j_0})\big) + d\big(g_k(d_{j_0}), g_j(d_{j_0})\big) + d\big(g_j(d_{j_0}), g_j(x)\big) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

2.3.1. Espacios de Banach con norma tipo Bielecki Los siguientes espacios serán fundamentales para garantizar la existencia de solución para los problemas 2.1 y 2.2. Es indispensable demostrar que los operadores 2.22 y 3.3 son completamente continuos. Para ello, es necesario verificar que las imágenes $\big(F(K)\big)$ y $\big(F'(K')\big)$ sean relativamente

compactas, donde K y K' representan los conos definidos en 3.1 y 3.2, respectivamente. En este sentido, los resultados que se presentan a continuación serán de gran utilidad, basándose en los desarrollos y métodos expuestos en [7].
Sea $g : I \to (0, \infty)$ una función continua. Denote por E el espacio de Banach dado por la funciones x continuas en I tal que

$$\sup_I \Big\{ |x(t)| g(t) \Big\} < \infty,$$

equipado con la norma

$$\|x\| = \sup_I \Big\{ |x(t)| g(t) \Big\}.$$

El teorema de Arzelá-Ascoli 2.3.25 no funciona para el espacio E por lo que se utilizará un criterio modificado para compacidad.

Definición 2.3.26. *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). Se dice que f es casi equicontinua en un conjunto $E \subset X$ si, para cada punto $x_0 \in E$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \textit{para todo } x \in E.$$

Definición 2.3.27. *Un conjunto de operadores $\{T_\alpha : X \to Y\}$ se dice que está uniformemente acotado en el sentido de la norma si existe una constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|T_\alpha(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ y para cada } \alpha.$$

Esto implica que todos los operadores en el conjunto no amplifican la norma de los vectores más allá de un límite común, lo que sugiere un comportamiento controlado y predecible en el espacio normado considerado.

Proposición 2.3.28. *Sea $\Omega \subseteq E$. Si las funciones $x \in \Omega$ y sus derivadas son casi equicontinuas en I, y uniformemente acotadas en el sentido de la norma*

$$\|x\|_h = \sup_I \Big\{ |x(t)| h(t) \Big\},$$

[7] S. Hamdi et al. «Analytical solutions of long nonlinear internal waves: Part I». En: *Natural Hazards* 5.7 (2011), págs. 597-607.

donde $h(t)$ es positiva, continua en I, y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 0,$$

entonces Ω es relativamente compacto en E.

Denote por E' el espacio de Banach de las funciones x continuamente derivables en I tal que

$$\sup_I \Big\{ \Big[|x(t)| + |x'(t)| \Big] g(t) \Big\} < \infty,$$

con la norma

$$\|x\| = \sup_I \Big\{ \Big[|x(t)| + |x'(t)| \Big] g(t) \Big\}.$$

Proposición 2.3.29. *Sea $\Omega \subseteq E'$. Si las funciones $x \in \Omega$ y sus derivadas son casi equicontinuas en I, y uniformemente acotadas en el sentido de la norma*

$$\|x\|_h = \sup_I \Big\{ \Big[|x(t)| + |x'(t)| \Big] h(t) \Big\},$$

donde $h(t)$ es positiva, continua en I, y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = 0,$$

entonces Ω es relativamente compacto en E'.

Demostración. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de funciones de Ω, y sea $\{T_v\}$ una sucesión creciente de números reales tal que $T_v > 0$ y $\lim_{v\to\infty} T_v = \infty$. Por hipótesis como las funciones son acotadas, entonces

$$\exists\, K > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \|x_n\|_h \le k,$$

así que

$$\sup_I \Big\{ \Big[|x_n(t)| + |x_n'(t)| \Big] h(t) \Big\} \le k,$$

por lo cual

$$|x_n(t)| + |x_n'(t)| \le \frac{k}{h(t)} \quad \text{con } t \in I. \tag{2.9}$$

En cada intervalo $[0, T_v]$, las funciones x_n y x_n', $n = \{1, 2, ...\}$, son uniformemente acotadas y equicontinuas (ya que al ser casi equicontinuas, son uniformemente equicontinuas en el intervalo cerrado mencionado), tomando el intervalo $[0, T_1]$, por el teorema de Arzelá-Ascoli existe una subsucesión $\{(\xi_n^{(1)})'\}$ de $\{x_n'\}$ uniformemente convergente en el intervalo $[0, T_1]$, además la sucesión $\{\xi_n^{(1)}\}$ es uniformemente convergente en el intervalo $[0, T_1]$, sea

$$\varphi_1(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\xi_n^{(1)}(t)\right], \ \ t \in [0, T_1],$$

con lo cual

$$\varphi_1'(t) = \lim_{n\to\infty} \left[(\xi_n^{(1)})'(t)\right], \ \ t \in [0, T_1].$$

Ahora se considera el intervalo $[0, t_2]$, como las funciones $\xi_n^{(1)} \in \Omega$ se tiene que existe una subsucesión $\{\xi_n^{(2)}\}$ uniformemente convergente en el intervalo $[0, T_2]$, y sea

$$\varphi_2(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\xi_n^{(2)}(t)\right], \ \ t \in [0, T_2],$$

como $\{\xi_n^{(2)}(t)\}$ es subsucesión de $\{\xi_n^{(1)}(t)\}$ y esta última es convergente, entonces $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, con $t \in [0, T_1]$, además, la sucesión $\{(\xi_n^{(2)})'\}$ es uniformemente convergente en el intervalo $[0, T_2]$ a $\varphi_2'(t)$.
Continuando con el proceso, se obtiene la sucesión $\{\xi_n^{(1)}(t)\}, \{\xi_n^{(2)}(t)\}, ..., \{\xi_n^{(n)}(t)\}, ...$ tal que en el intervalo $[0, T_v]$ la sucesión $\{\xi_n^{(v)}(t)\}$ es uniformemente convergente a la función $\varphi_v(t)$, de la misma manera la sucesión de las derivadas es uniformemente convergente a $\varphi_v'(t)$. Tomando la sucesión diagonal $\{\xi_n^{(n)}(t)\}$ la cual es casi uniformemente convergente en el intervalo I, a una determinada función $\varphi(t)$, además la sucesión $\{(\xi_n^{(n)})'(t)\}$ es casi uniformemente convergente a la derivada $\varphi'(t)$. Es claro que en cada intervalo $[0, T_v]$ se obtiene la igualdad $\varphi(t) = \varphi_v(t)$, y que $\{\xi_n^{(n)}\}$ es una subsucesión de $\{x_n\}$.
con ayuda de la desigualdad (2.9) se obtiene lo siguiente

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall\, t \in [0, \infty) \ \ \left[|\xi_n^{(n)}(t)| + |(\xi_n^{(n)})'(t)|\right] \leq \frac{k}{h(t)}.$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$ se obtiene

$$\forall t \in [0, \infty) \ \ \left[|\varphi(t)| + |\varphi'(t)|\right] \leq \frac{k}{h(t)}, \tag{2.10}$$

por lo tanto

$$\forall t \in [0, \infty) \ \left[|\varphi(t)| + |\varphi'(t)|\right] g(t) \leq \frac{k\, g(t)}{h(t)} \leq \infty,$$

lo cual implica que φ pertenece a E'. Por ultimo se obtiene que φ es el límite de $\{\xi_n^{(n)}\}$ en el espacio E':

$$\begin{aligned}\|\xi_n^n-\varphi\|_g &= \sup_{[0,\infty)}\Big\{\Big[|\xi_n^n(t)-\varphi(t)|+|(\xi_n^n)'(t)-\varphi'(t)|\Big]g(t)\Big\}\\ &\leq \sup_{[0,T]}\Big\{\Big[|\xi_n^n(t)-\varphi(t)|+|(\xi_n^n)'(t)-\varphi'(t)|\Big]g(t)\Big\}\\ &\quad+\sup_{(T,\infty)}\Big\{\Big[|\xi_n^n(t)-\varphi(t)|+|(\xi_n^n)'(t)-\varphi'(t)|\Big]h(t)\Big[g(t)/h(t)\Big]\Big\},\end{aligned}$$

finalmente

$$\|\xi_n^n-\varphi\|_p \leq \left(\sup_{[0,T]}\Big\{\Big[|\xi_n^n(t)-\varphi(t)|+|(\xi_n^n)'(t)-\varphi'(t)\Big]\Big\}\right)\left(\sup_{[0,T]}\; g(t)\right)+2k\sup_{(T,\infty)}\big\{g(t)/h(t)\big\}.$$

Como la sucesión $\{\xi_n^{(n)}\}$ es casi uniformemente convergente a φ y la sucesión $\{(\xi_n^{(n)})'\}$ es casi uniformemente convergente a φ', además, $\sup_{(T,\infty)}\{g(t)/h(t)\}\to 0$ cuanto $T\to\infty$, entonces se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\|\xi_n^{(n)}-\varphi\|_g=0,$$

es decir existe una subsucesión convergente en E'.

$\square$

2.4. Función de Green

La función de Green es una herramienta fundamental en el análisis de problemas de valores en la frontera y ecuaciones diferenciales parciales. Permite expresar la solución de una ecuación diferencial en términos de las condiciones de frontera y las fuentes del problema, facilitando así la resolución de sistemas complejos. En el contexto de la teoría de funciones de Green, estas se utilizan para construir soluciones específicas que responden a condiciones particulares impuestas en el dominio considerado. Para esta tesis, el autor se centrará en el estudio de funciones de Green para un tipo particular del problema de valores en la frontera asociados al problema central. guiándose en los desarrollos y métodos de Amaya Z. en [8]. En concreto, se abordará el tipo de función de

[8] Z. Amaya. «La función de Green: Propiedades y aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales». Trabajo de fin de grado. Universidad de Cantabria, 2023.

Green que corresponde al siguiente problema

$$(PVF)\begin{cases}(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a,b],\\ a_1x(a) + a_2x'(a) = \alpha,\\ b_1x(b) + b_2x'(b) = \beta,\end{cases}$$

con $p(t) \neq 0$ y de clase C^1 en $[a,b]$, q y f continuas en $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$. Para abreviar se tendrán en cuenta las siguientes notaciones,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x](t) :=&(p(t)x'(t))' + q(t)x(t),\\ H_a[x] :=&a_1x(a) + a_2x'(a),\\ H_b[x] :=&b_1x(b) + b_2x'(b),\end{aligned} \tag{2.11}$$

Teorema 2.4.1 (Identidad de Lagrange.)**.** *Sean* $x, y : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones de clase* $C^1([a,b])$*, al aplicar* (2.11) *se tiene que*

$$x(t)\mathcal{L}[y](t) - y(x)\mathcal{L}[x](t) = \frac{d}{dt}\big(p(t)\mathbb{W}[x,y](t)\big) \quad \forall t \in [a,b], \tag{2.12}$$

donde $\mathbb{W}[x,y](t)$ *es el Wronskiano de* x, y *en el punto* $t \in [a,b]$ *dado por*

$$\mathbb{W}[x,y](t) = \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} = x(t)y'(t) - y(t)x'(t).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}x(t)\mathcal{L}[y](t) - y(x)\mathcal{L}[x](t) =&x(t)\Big[\big(p(t)y'(t)\big)' + q(t)y(t)\Big] - y(t)\Big[\big(p(t)x'(t)\big)' + q(t)x(t)\Big]\\ =&x(t)\big(p(t)y'(t)\big)' - y(t)\big(p(t)x'(t)\big)'\\ =&x'(t)\big(p(t)y'(t)\big) + x(t)\big(p(t)y'(t)\big)' - y'(t)\big(p(t)x'(t)\big)\\ &- y(t)\big(p(t)x'(t)\big)'\\ =&\frac{d}{dt}\Big[x(t)\big(p(t)y'(t)\big) - y(t)\big(p(t)x'(t)\big)\Big]\\ =&\frac{d}{dt}\Big[p(t)\big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\Big]\\ =&\frac{d}{dt}\big(p(t)\mathbb{W}[x,y](t)\big).\end{aligned}$$

□

Como ya se ha comentado, se va a trabajar únicamente con problemas del tipo

$$\text{(Problema de Cauchy)} \begin{cases} y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases}$$

donde el problema consiste en la búsqueda de soluciones de la ecuación diferencial definidas en un intervalo que contiene a x_0 y además verifiquen las condiciones iniciales. Y es importante tener en cuenta el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2 (Existencia y unicidad de solución global)**.** *Dado el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y''(x) + f(x)y'(x) + g(x)y(x) = h(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{B.2}$$

donde se buscan soluciones de la ecuación diferencial definidas en un intervalo que contenga a x_0 verificando las condiciones iniciales. Si las funciones f, g y h son continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ para cada punto $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$, entonces el problema $(B.2)$ tiene una única solución; además, dicha solución está definida en todo el intervalo I.

A continuación, se demuestra la existencia de una solución al problema planteado, así como la función de Green y la relación que existe entre ambas.

Teorema 2.4.3. *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, y el PVF*

$$(\textit{PVF}) \begin{cases} \mathcal{L}[x](t) = f(t), \quad t \in [a,b], \\ H_a[x] = 0, \\ H_b[x] = 0. \end{cases}$$

Si el PVF tiene única solución, entonces es posible encontrar una integral que incluye la función de Green $G(t,s)$ y el término no homogéneo $f(t)$. Esta integral proporciona una fórmula general para la solución, independientemente de la función f, es decir,

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds. \tag{2.13}$$

Demostración. Sea $x(t)$ la única solución del PVF, se considerarán dos problemas de

Cauchy asociados a él.

$$(\text{ PVF } 1) \begin{cases} \mathcal{L}[x](t) = 0, \quad t \in [a, b], \\ x(a) = a_2, \\ x'(a) = -a_1, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$(\text{ PVF } 2) \begin{cases} \mathcal{L}[x](t) = 0, \quad t \in [a, b], \\ x(b) = b_2, \\ x'(b) = -b_1. \end{cases} \tag{2.15}$$

La EDO asociada a ambos problemas es lineal con coeficientes $p(t)$ y $q(t)$ continuos en $[a, b]$, por lo que, según el Teorema de Existencia y Unicidad de solución global, ambos problemas tienen una solución única. Las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$, que son linealmente independientes, se emplean para resolver el problema no homogéneo mediante la técnica de variación de parámetros. Esta técnica consiste en buscar una solución de la forma $x(t) = A(t)x_1(t) + B(t)x_2(t)$, donde los coeficientes $A(t)$ y $B(t)$ se determinan a partir de las siguientes ecuaciones.
Primero, se expresa la derivada de $x(t)$:

$$x(t) = A(t)x_1(t) + B(t)x_2(t),$$

y al derivar con respecto a t, se obtiene:

$$p(t)x'(t) = p(t)\Big[A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) + A(t)x_1'(t) + B(t)x_2'(t)\Big].$$

Para garantizar que el sistema de ecuaciones se reduzca adecuadamente, se agrega la condición $A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) = 0$. Esta condición asegura que los coeficientes $A(t)$ y $B(t)$ puedan determinarse de manera independiente de la estructura homogénea, sin interferir con la ecuación original. Además, facilita el uso de la regla de Cramer para resolver el sistema resultante. Entonces se obtiene que:

$$p(t)x'(t) = p(t)\Big[A(t)x_1'(t) + B(t)x_2'(t)\Big],$$

y al derivar de nuevo

$$\big(p(t)x'(t)\big)' = p'(t)\Big[A(t)x_1'(t)+B(t)x_2'(t)\Big]+p(t)\Big[A'(t)x_1'(t)+B'(t)x_2'(t)+A(t)x_1''(t)+B(t)x_2''(t)\Big].$$

Sustituyendo en $\mathcal{L}[x](t) = f(t)$, se llega a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} p'(t)\Big[A(t)x_1'(t) + B(t)x_2'(t)\Big] + p(t)\Big[A'(t)x_1'(t) + B'(t)x_2'(t) + A(t)x_1''(t) + B(t)x_2''(t)\Big] \\ +q(t)\Big[A(t)x_1(t) + B(t)x_2(t)\Big] = A(t)\Big[p'(t)x_1'(t) + p(t)x''(t) + q(t)x_1'(t)\Big] \\ +B(t)\Big[p'(t)x_2'(t) + p(t)x''(t) + q(t)x_2'(t)\Big] \\ +p(t)\Big[A'(t)x_1'(t) + B'(t)x_2'(t)\Big] = f(t), \end{aligned}$$

lo que completa el sistema necesario para resolver el problema no homogéneo.
como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de la ecuación homogénea, la expresión anterior se simplifica a

$$p(t)\Big[A'(t)x_1'(t) + B'(t)x_2'(t)\Big] = f(t).$$

Entonces el objetivo es resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) = 0, \\ A'(t)x_1'(t) + B'(t)x_2'(t) = \dfrac{f(t)}{p(t)}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Como las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ eran linealmente independientes entonces $\mathbb{W}[x_1, x_2](t) \neq 0$, con lo cual gracias a la regla de Cramer se obtienen las soluciones únicas al sistema dado en (2.16).

$$A'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ \dfrac{f(t)}{p(t)} & x_2'(t) \end{vmatrix}}{\mathbb{W}[x_1, x_2](t)} = -\frac{x_2(t)f(t)}{p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)},$$

$$B'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ x_1'(t) & \dfrac{f(t)}{p(t)} \end{vmatrix}}{\mathbb{W}[x_1, x_2](t)} = \frac{x_1(t)f(t)}{p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)}.$$

Las expresiones $A(t)$ y $B(t)$ se obtienen integrando las soluciones anteriores, con lo cual la solución única al teorema es la expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\int_b^t -\frac{x_2(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](s)}\,ds\right)x_1(t) + \left(\int_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](t)}\,ds\right)x_2(t) \\ &= \left(\int_t^b \frac{x_2(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](s)}\,ds\right)x_1(t) + \left(\int_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](t)}\,ds\right)x_2(t). \end{aligned}$$

Al aplicar la identidad de Lagrange se tiene que

$$\frac{d}{dt}\big(p(t)\mathbb{W}[x_1,x_2](t)\big) = x_1(t)\mathcal{L}[x_2](t) - x_2(t)\mathcal{L}[x_1](t) = 0,$$

lo cual para todo $t \in [a,b]$, existe $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$ se tiene que $p(t)\mathbb{W}[x_1,x_2](t) = \mathcal{K}$.
Es claro que gracias a la construcción la solución cumple $\mathcal{L}[x](t) = f(t)$ en $[a,b]$, solo falta verificar las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} H_a[x](t) &= a_1\big(A(a)x_1(a) + B(a)x_2(a)\big) + a_2\big(A(a)x_1'(a)) + B(a)x_2'(a)\big) \\ &= A(a)(a_1a_2 - a_1a_2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_b[x](t) &= b_1\big(A(b)x_1(b) + B(b)x_2(b)\big) + b_2\big(A(b)x_1'(b) + B(b)x_2'(b)\big) \\ &= B(b)(b_1b_2 - b_1b_2) = 0. \end{aligned}$$

Para concluir todas las cuentas se define la función de green asociada al PVF como,

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{\mathcal{K}}, & \text{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{\mathcal{K}}, & \text{si } t \in [s,b]. \end{cases} \tag{2.17}$$

Entonces la solución puede expresarse como

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\int_a^t \frac{x_1(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](t)}\,ds\right)x_2(t) + \left(\int_t^b \frac{x_2(s)f(s)}{p(s)\mathbb{W}[x_1,x_2](s)}\,ds\right)x_1(t) \\ &= \int_a^t \frac{x_1(s)x_2(t)}{\mathcal{K}}\,f(s)\,ds + \int_t^b \frac{x_1(t)x_2(s)}{\mathcal{K}}\,f(s)\,ds \\ &= \int_a^t G(t,s)f(s)\,ds + \int_t^b G(t,s)f(s)\,ds, \end{aligned}$$

con lo cual

$$x(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\, ds.$$

$\square$

Observación 1. *En la demostración del Teorema* (2.4.3)*, se observa que la construcción de la función de Green no exige que x_1 y x_2 sean soluciones exactas de las ecuaciones* (2.14) *y* (2.15)*, basta con que cumplan $\mathcal{L}[u_1](t) = \mathcal{L}[u_2](t) = 0$ en el intervalo $[a,b]$, y satisfagan las condiciones de frontera $H_a[u_1] = H_b[u_2] = 0$. Así, cualquier par de soluciones linealmente independientes que verifiquen estas propiedades, puede usarse para definir la función de Green. Si x_1 y x_2 son soluciones exactas de la ecuación diferencial homogénea asociada y satisfacen las condiciones de frontera requeridas, sean las funciones u_1 y u_2 mencionadas anteriormente, entonces se tiene que $u_1 = \alpha x_1$ y $u_2 = \beta x_2$, con α y β constantes, entonces*

$$\begin{cases} \dfrac{u_1(t)u_2(s)}{\mathcal{K}_{u_1,u_2}}, & \textit{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{u_1(s)u_2(t)}{\mathcal{K}_{u_1,u_2}}, & \textit{si } t \in [s,b]. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{\alpha x_1(t)\beta x_2(s)}{p(t)\mathbb{W}[\alpha x_1, \beta x_2](t)}, & \textit{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{\alpha x_1(s)\beta x_2(t)}{p(t)\mathbb{W}[\alpha x_1, \beta x_2](t)}, & \textit{si } t \in [s,b]. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta x_1(t)x_2(s)}{\alpha\beta p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)}, & \textit{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{\alpha\beta x_1(s)x_2(t)}{\alpha\beta p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)}, & \textit{si } t \in [s,b]. \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)}, & \textit{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{p(t)\mathbb{W}[x_1, x_2](t)}, & \textit{si } t \in [s,b]. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x_1(t)x_2(s)}{\mathcal{K}_{x_1,x_2}}, & \textit{si } t \in [a,s], \\ \dfrac{x_1(s)x_2(t)}{\mathcal{K}_{x_1,x_2}}, & \textit{si } t \in [s,b]. \end{cases} = G(t,s).$$

Observación 2. *Como se puede observar en la función de Green* (2.17) *esta es independiente del término no homogéneo $f(t)$. Cuando la función de Green es hallada es posible encontrar la solución al PVF sin importar la función $f(t)$, es por esto que la función de Green es conocida como **solución fundamental** del PVF.*

Para esta tesis, la función de Green que se desea hallar será la asociada al siguiente PVF homogéneo:

$$\begin{cases} -\big(x''(t) - k^2 x(t)\big) = 0, & t \in I, \\ x(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Sean $u_1(t) = e^{kt} - e^{-kt}$ y $u_2(t) = e^{-kt}$ gracias a la Observación 1 solo queda verificar las condiciones mencionadas:

1.
$$\mathcal{L}[u_1](t) = -\big(u_1''(t) - k^2 x_1(t)\big) = -\big((k^2 e^{kx} - k^2 e^{-kx}) - k^2(e^{kx} - e^{-kx})\big) = 0$$

$$\mathcal{L}[u_2](t) = -\big(x_2''(t) - k^2 x_2(t)\big) = -\big((k^2 e^{-kx}) - k^2(e^{-kx})\big) = 0.$$

Entonces $\mathcal{L}[u_1](t) = \mathcal{L}[u_2](t) = 0$.

2.
$$H_0[u_1] = u_1(0) = e^0 - e^0 = 0.$$

3.
$$H_\infty[u_2] = \lim_{t\to\infty} u_2(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-kt} = 0.$$

Como se cumplen las condiciones entonces las funciones u_1 y u_2 se pueden usar para hallar la función de Green asociada al PVF homogéneo.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{u1,u2} =& p(t)\mathbb{W}[u_1,u_2](t) = -\begin{vmatrix} e^{kx} - e^{-kx} & e^{-kx} \\ k\big(e^{kx} + e^{-kx}\big) & -ke^{-kx}\end{vmatrix} \\ =& -\left(k(e^{-2kx} - 1) - k(1 + e^{-2kx})\right) = 2k.\end{aligned}$$

Con lo cual la función de Green asociada a (2.18) es

$$G(t,s) = \frac{1}{2k}\begin{cases} e^{-ks}(e^{kt} - e^{-kt}), & 0 \le t \le s, \\ e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks}), & 0 \le s \le t, \end{cases} \tag{2.19}$$

y su derivada parcial con respecto a t es

$$G_t(t,s) = \frac{1}{2}\begin{cases} e^{-ks}(e^{kt} + e^{-kt}), & 0 \le t < s, \\ -e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks}), & 0 \le s < t. \end{cases} \tag{2.20}$$

2.4.1. Preliminares En esta sección, se presentan resultados relevantes que se derivan del uso de las funciones de Green definidas en (2.19) y (2.20). Estas funciones ofrecen un marco teórico que permite abordar de manera efectiva el problema central de la tesis.

Proposición 2.4.4. *Sea* $\lambda > k$*,* $t, s \in I$ *entonces*

$$G(t,s)e^{-\lambda t} \leq G(s,s)e^{-ks}. \tag{2.21}$$

Demostración. Caso 1. $t \leq s$, entonces se obtiene que

$$\begin{cases} G(t,s)e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt} - e^{-kt})e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2k}e^{-ks}(e^{(k-\lambda)t} - e^{-(k+\lambda)t}), \\ G(s,s)e^{-ks} = \dfrac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks})e^{-ks} = \dfrac{1}{2k}e^{-ks}(1 - e^{-2ks}). \end{cases}$$

Como $k < \lambda$, entonces $(k-\lambda)t \leq 0$, con lo cual $e^{(k-\lambda)t} \leq 1$, y $t \leq s$ implica que $-2ks \leq -(k+\lambda)t$, por lo que $-e^{-(k+\lambda)t} \leq -e^{-2ks}$, así

$$e^{(k-\lambda)t} - e^{-(k+\lambda)t} \leq 1 - e^{-2ks},$$

por consiguiente, se establece que

$$G(t,s)e^{-\lambda t} = \frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{(k-\lambda)t} - e^{-(k+\lambda)t}) \leq \frac{1}{2k}e^{-ks}(1 - e^{-2ks}) = G(s,s)e^{-ks}.$$

Caso 2. $t > s$, en consecuencia

$$\begin{cases} G(t,s)e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks})e^{-\lambda t}, \\ G(s,s)e^{-ks} = \dfrac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks})e^{-ks}. \end{cases}$$

Como $s < t$, entonces $-kt \leq -ks$, con lo cual $e^{-kt} \leq e^{-ks}$ y $k < \lambda$ implica que $-\lambda t \leq -ks$ por lo que $e^{-\lambda t} \leq e^{-ks}$, por ende

$$G(t,s)e^{-\lambda t} = \frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks})e^{-\lambda t} \leq \frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks})e^{-ks} = G(s,s)e^{-ks}.$$

$\square$

Proposición 2.4.5. *Sea* $f\big(s, x(s)\big)$ *la función presentada en* $2{,}1$ *se define el siguiente operador integral* F

$$(Fx)(t) = \int_0^\infty G(t,s)f\big(s, x(s)\big)\, ds, \tag{2.22}$$

si existen funciones continuas $a, b : I \to I$ *tal que* $f(t,x) \leq a(t) + b(t)x$*, entonces*

1.

$$|(Fx)(t)|e^{-\lambda t} \leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}a(s)\ ds + \frac{1}{2k}\|x\|\int_0^\infty e^{(\lambda-k)s}b(s)\ ds.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t)|e^{-\lambda t} &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\ ds \leq \int_0^\infty e^{-ks}G(s,s)(a(s)+b(s)x)\ ds\\
&\leq \int_0^\infty \frac{1}{2k}e^{-ks}(1-e^{-2ks})(a(s)+b(s)x)\ ds \ \ \leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}(a(s)+b(s)x)\ ds\\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}a(s)\ ds + \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}b(s)\|x\|\ ds\\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}a(s)\ ds + \frac{1}{2k}\|x\|\int_0^\infty e^{(\lambda-k)s}b(s)\ ds.
\end{aligned}$$

□

2.

$$(Fx)(t) \geq me^{-k\tau}(Fx)(\tau) \ \ \forall\ t \in I,\ \tau \geq 0.$$

Demostración. Sea $\tau \geq 0$, $t \in [\gamma,\delta]$

Caso 1. $t \leq \tau$

$$\begin{aligned}
(Fx)(t) &= \int_0^\infty G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\ ds = \int_0^t G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\ ds + \int_t^\infty G(t,s)f\big(s,x(s)\big)\ ds\\
&= \underbrace{\int_0^t \frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})f\big(s,x(s)\big)\ ds}_{I_1} + \underbrace{\int_t^\infty \frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})f\big(s,x(s)\big)\ ds}_{I_2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
I_1 = \int_0^t \frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\left(\frac{2k}{e^{-k\tau}(e^{ks}-e^{-ks})}\right)\left(\frac{e^{-k\tau}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right)f(s,x(s))\ ds\\
= \int_0^t \frac{e^{-kt}}{e^{-k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\ ds,
\end{aligned}$$

y como $0 \leq s \leq t \leq \tau$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{e^{-kt}}{e^{-k\tau}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds &\geq \int_0^t G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&\geq e^{-k(t+\tau)} \int_0^t G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&= e^{-kt}\left(e^{-k\tau} \int_0^t G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \right).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
I_2 = &\int_t^\tau \frac{1}{2k} e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt}) f\big(s,x(s)\big)\, ds + \int_\tau^\infty \frac{1}{2k} e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt}) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
= &\int_t^\tau \frac{e^{-ks}}{2k}(e^{kt}-e^{-kt}) \left(\frac{2k}{e^{-k\tau}(e^{ks}-e^{-ks})} \right) \left(\frac{e^{-k\tau}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k} \right) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&+ \int_\tau^\infty \frac{e^{-ks}}{2k}(e^{kt}-e^{-kt}) \left(\frac{2k}{e^{-ks}(e^{k\tau}-e^{-k\tau})} \right) \left(\frac{e^{-ks}(e^{k\tau}-e^{-k\tau})}{2k} \right) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
= &\int_t^\tau \left(\frac{e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})}{(e^{ks}-e^{-ks})e^{-k\tau}} \right) G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&+ \int_\tau^\infty \left(\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{k\tau}-e^{-k\tau}} \right) G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds,
\end{aligned}$$

como para la primera integral $0 \leq t \leq s \leq \tau$ y para la segunda $0 \leq t \leq \tau \leq s$ entonces

$$\begin{aligned}
&\int_t^\tau \left(\frac{e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})}{(e^{ks}-e^{-ks})e^{-k\tau}} \right) G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds + \int_\tau^\infty \left(\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{k\tau}-e^{-k\tau}} \right) G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&\geq (e^{kt}-e^{-kt}) \int_t^\tau \frac{1}{e^{ks}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds + (e^{kt}-e^{-kt}) \int_\tau^\infty \frac{1}{e^{k\tau}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&\geq (e^{kt}-e^{-kt}) \int_t^\tau \frac{1}{e^{k\tau}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds + (e^{kt}-e^{-kt}) \int_\tau^\infty \frac{1}{e^{k\tau}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\
&= (e^{kt}-e^{-kt}) e^{-k\tau} \int_t^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds.
\end{aligned}$$

Concluyendo

$$\begin{aligned}
(Fx)(t) = I_1 + I_2 \geq & e^{-kt}\left(e^{-k\tau} \int_0^t G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \right) \\
&+ (e^{kt}-e^{-kt}) e^{-k\tau} \int_t^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds.
\end{aligned}$$

Como $t \in [\gamma, \delta]$ entonces $e^{-kt} \geq e^{-k\delta}$ y $e^{kt} - e^{-kt} \geq e^{k\gamma} - e^{-k\gamma}$, sea

$$m = \text{mín}\{e^{-k\delta}, e^{k\gamma} - e^{-k\gamma}\},$$

$$\begin{aligned}\implies (Fx)(t) &\geq m\left(e^{-k\tau}\int_0^{t_0} G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds + e^{-k\tau}\int_{t_0}^{\infty} G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\right)\\ &= me^{-k\tau}\int_0^{\infty} G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds = me^{-k\tau}(Fx)(\tau).\end{aligned}$$

Caso 2. $t > \tau$

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{2k}(e^{ks} - e^{-ks})f\big(s,x(s)\big)\,ds + \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}}{2k}(e^{ks} - e^{-ks})f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &= \int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{2k}(e^{ks} - e^{-ks})\left(\frac{2k}{e^{-k\tau}(e^{ks} - e^{-ks})}\right)\left(\frac{e^{-k\tau}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k}\right)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &\quad+ \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}}{2k}(e^{ks} - e^{-ks})\left(\frac{2k}{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}\right)\left(\frac{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}{2k}\right)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &= \int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{e^{-k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds + \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks})}{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds,\end{aligned}$$

para la primera integral se tiene que $0 \leq s \leq \tau \leq t$ y en la segunda $0 \leq \tau \leq s \leq t$, con lo cual

$$\begin{aligned}&\int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{e^{-k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds + \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}(e^{ks} - e^{-ks})}{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &\qquad\geq \int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{e^{k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds + \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}}{e^{-ks}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &\qquad\geq \int_0^{\tau} \frac{e^{-kt}}{e^{k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds + \int_{\tau}^{t} \frac{e^{-kt}}{e^{k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &\qquad= e^{-kt}\left(e^{-k\tau}\int_0^{t} G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds\right).\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_t^{\infty} \frac{e^{-ks}}{2k}(e^{kt} - e^{-kt})\left(\frac{2k}{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}\right)\left(\frac{e^{-ks}(e^{k\tau} - e^{-k\tau})}{2k}\right)f\big(s,x(s)\big)\,ds\\ &= \int_t^{\infty} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{e^{k\tau} - e^{-k\tau}}G(\tau,s)f\big(s,x(s)\big)\,ds,\end{aligned}$$

para lo cual $0 \leq \tau \leq t \leq s$, entonces

$$\begin{aligned}\int_t^\infty \frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{k\tau}-e^{-k\tau}} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds &\geq \int_t^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\ &\geq e^{-kt}\left(e^{-k\tau}\int_t^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds\right).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}(Fx)(t) &\geq e^{-kt}\left(e^{-k\tau}\int_0^{t_0} G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds\right) + e^{-kt}\left(e^{-k\tau}\int_{t_0}^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds\right) \\ &= e^{-kt}\left(e^{-k\tau}\int_0^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds\right) \geq m e^{-k\tau}\int_0^\infty G(\tau,s) f\big(s,x(s)\big)\, ds \\ &= m e^{-k\tau}(Fx)(\tau).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(Fx)(t) \geq m e^{-k\tau}(Fx)(\tau) \quad \forall\ t \in I,\ \tau \geq 0. \tag{2.23}$$

$\square$

Proposición 2.4.6. *Se denota $G_t^+(s,s)$ como la derivada por la derecha de la función de Green* (2.20) *en el punto (s,s). Sea $k \geq 1$, $t \in [\gamma,\delta]$ y $s \leq t$; entonces*

1.

$$2kG(t,s) + G_t(t,s) \geq m_1\Big[G(s,s) + \big|G_t^+(s,s)\big|\Big]e^{-ks},$$

donde

$$m_1 = \frac{k}{k+1}e^{-k\delta}.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
m_1\Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks} &= \frac{ke^{-k\delta}}{k+1}\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-ks}\\
&= \frac{k}{k+1}e^{-k\delta}e^{-ks}\left[\frac{k+1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\right]\\
&= e^{-k\delta}e^{-ks}\left[\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\right]\\
&\leq \frac{1}{2}e^{-k\delta}(e^{ks}-e^{-ks})\\
&\leq \frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\\
&= 2k\left(\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\right)-\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\\
&= 2kG(t,s)+G_t(t,s).
\end{aligned}
$$

□

2.

$$
\Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks} \geq \frac{1}{2}\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.
$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-\lambda t}\\
&\leq \left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-kt}\\
&= \Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks}.
\end{aligned}
$$

□

Análogamente se denota $G_t^{-}(s,s)$ la derivada por izquierda de la función de Green (2.20) *en (s,s), para este caso $t \leq s$ se tiene que*

3.

$$
2kG(t,s)+G_t(t,s) \geq m_1\Big[G(s,s)+\big|G_t^{-}(s,s)\big|\Big]e^{-ks}.
$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
m_1\Big[G(s,s)+\big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks} &= \frac{ke^{-k\delta}}{k+1}\left(\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\right)e^{-ks}\\
&= \frac{ke^{-k\delta}e^{-ks}}{k+1}e^{-ks}\left(\frac{k+1}{2k}e^{ks}+\frac{k-1}{2k}e^{-ks}\right)\\
&= \frac{e^{-k\delta}e^{-ks}}{k+1}e^{-ks}\left(\frac{k+1}{2}e^{ks}+\frac{k-1}{2}e^{-ks}\right)\\
&\le \frac{e^{-k\delta}e^{-ks}e^{-ks}}{k+1}\left(\frac{k+1}{2}e^{ks}+\frac{k+1}{2}e^{-ks}\right)\\
&= \frac{e^{-k\delta}e^{-ks}e^{-ks}}{2}(e^{ks}+e^{-ks})\\
&\le \frac{e^{-ks}e^{-ks}}{2}(e^{ks}+e^{-ks})\\
&= \frac{e^{-ks}}{2}(1+e^{-2ks})\le\frac{e^{-ks}}{2}(2)\le\frac{e^{-ks}}{2}(3e^{kt}-e^{-kt})\\
&= e^{-ks}\left(e^{kt}-e^{-kt}+\frac{1}{2}e^{kt}+\frac{1}{2}e^{-kt}\right)\\
&= 2k\left(\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})\right)+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{kt}+e^{-kt})\\
&= 2kG(t,s)+G_t(t,s).
\end{aligned}$$

$\square$

4.

$$\Big[G(s,s)+\big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks}\ge\frac{1}{2}\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{kt}+e^{-kt})\right]e^{-\lambda t}\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\left(\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{ks}-e^{-ks}}\right)+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\left(\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{e^{ks}+e^{-ks}}\right)\right]e^{-\lambda t}\frac{e^{-ks}}{e^{-ks}}\\
&\leq\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\left(\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{e^{ks}-e^{-ks}}\right)+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\left(\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{e^{ks}+e^{-ks}}\right)\right]e^{-kt}\frac{e^{-ks}}{e^{-ks}}\\
&=\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\left(\frac{1-e^{-2kt}}{1-e^{-2ks}}\right)+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\left(\frac{1+e^{-2kt}}{1+e^{-2ks}}\right)\right]e^{-ks}\\
&\leq\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\right]e^{-ks}\\
&=\Big[G(s,s)+\big|G_t^{-}(s,s)\big|\Big]e^{-ks}.
\end{aligned}
$$

□

Proposición 2.4.7. *Sea $0<k<1$ y $s\leq t$, entonces*

1.

$$G(t,s)+G_t(t,s)\geq m_2\Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks},$$

donde

$$m_2=\min\left\{\frac{1-k}{1+k}e^{-k\delta},e^{k\gamma}+\frac{k-1}{k+1}e^{-k\gamma}\right\}.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&m_2\Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks}\leq\frac{1-k}{1+k}e^{-k\delta}\left[\frac{e^{-ks}}{2k}\left(e^{ks}-e^{-ks}\right)+\frac{e^{-ks}}{2}\left(e^{ks}-e^{-ks}\right)\right]e^{-ks}\\
&\quad\leq\frac{1-k}{1+k}e^{-k\delta}\left[\frac{1}{2k}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}(e^{ks}-e^{-ks})\right]=\frac{1-k}{1+k}e^{-k\delta}\left[\frac{k+1}{2k}(e^{ks}-e^{-ks})\right]\\
&\quad\leq(1-k)e^{-kt}\left[\frac{1}{2k}(e^{ks}-e^{-ks})\right]=\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})-\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\\
&\quad=G(t,s)+G_t(t,s).
\end{aligned}
$$

□

2.

$$\Big[G(s,s)+\big|G_t^{+}(s,s)\big|\Big]e^{-ks}\geq\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\Big[G(s,s)+\big|G_t^+(s,s)\big|\Big]e^{-ks} &= \left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-ks}\\
&\geq \left[\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-ks}\\
&\geq \left[\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-\lambda s}\\
&\geq \left[\frac{1}{2k}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})\right]e^{-\lambda t}\\
&=\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

□

Si $t \leq s$, *entonces*

3.

$$G(t,s)+G_t(t,s) \geq m_2\Big[G(s,s)+\big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks}.$$

Demostración. Se tiene que

$$k-1\leq 0 \quad , \quad 0\leq (k+1)e^{2k\gamma}e^{-2ks}-e^{-2ks} \quad , \quad e^{-kt}\leq e^{-k\gamma} \quad \text{y} \quad e^{kt}+kt^{kt}\geq e^{k\gamma}+ke^{k\gamma},$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
1 &\leq \frac{1+k+ke^{-2ks}+(k+1)e^{2k\gamma}e^{-2ks}-e^{-2ks}}{k+1}\\
e^{-kt} &\leq e^{-k\gamma}\ \frac{1+k+ke^{-2ks}+(k+1)e^{2k\gamma}e^{-2ks}-e^{-2ks}}{k+1}\\
e^{-kt}(k-1) &\geq e^{-k\gamma}\frac{(k-1)}{k+1}\big(1+k+ke^{-2ks}+(k+1)e^{2k\gamma}e^{-2ks}-e^{-2ks}\big)\\
e^{kt}+ke^{kt}+e^{-kt}(k-1) &\geq\ +e^{-k\gamma}\frac{(k-1)}{k+1}\big(1+k+ke^{-2ks}+(k+1)e^{2k\gamma}e^{-2ks}-e^{-2ks}\big)\\
&\quad +e^{k\gamma}+ke^{k\gamma}\\
&= e^{k\gamma}\big(1+k+(k-1)e^{-2ks}\big)+\frac{k-1}{k+1}\ e^{-k\gamma}\ \big(1+k+(k-1)e^{-2ks}\big)\\
&= \left(e^{k\gamma}+\frac{k-1}{k+1}e^{-k\gamma}\right)\big(1+k+(k-1)e^{-2ks}\big)\\
&= \left(e^{k\gamma}+\frac{k-1}{k+1}e^{-k\gamma}\right)\Big((1-e^{-2ks})+k(1+e^{-2ks})\Big)\\
&\geq m_2\Big((1-e^{-2ks})+k(1+e^{-2ks})\Big),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
e^{kt}+ke^{kt}+e^{-kt}(k-1) &\geq m_2\Big((1-e^{-2ks})+k(1+e^{-2ks})\Big)\\
(e^{kt}-e^{-kt})+k(e^{kt}+e^{-kt}) &\geq m_2\Big((e^{ks}-e^{-ks})+k(e^{ks}+e^{-ks})\Big)e^{-ks}\\
\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{kt}+e^{-kt}) &\geq m_2\left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{ks}-e^{-ks})+\frac{1}{2}e^{-ks}(e^{ks}+e^{-ks})\right]e^{-ks},
\end{aligned}
$$

es decir

$$
G(t,s)+G_t(t,s)\geq m_2\Big[G(s,s)+\big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks}.
$$

$\square$

4.

$$
\Big[G(s,s)+\big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks}\geq\Big[G(t,s)+|G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.
$$

Demostración. Se tiene que

$$
e^{-2kt}-e^{-2ks}\geq 0 \quad \text{y} \quad 1-k\geq 0,
$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (e^{-2kt} - e^{-2ks})(1-k) \\
=&(e^{-2kt} - e^{-2ks}) + k(e^{-2ks} - e^{-2kt}) \\
=&(1 - e^{-2ks} - 1 + e^{-2kt}) + k(1 + e^{-2ks} - 1 - e^{2kt}) \\
=&(1 - e^{-2ks}) + k(1 + e^{-2ks}) - (1 - e^{-2kt}) - k(1 + e^{-2kt}),
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
(1 - e^{-2ks}) + k(1 + e^{-2ks}) &\geq (1 - e^{-2kt}) + k(1 + e^{-2kt}) \\
e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks}) + ke^{-ks}(e^{ks} + e^{-ks}) &\geq e^{-kt}\Big((e^{kt} - e^{-kt}) + k(e^{kt} + e^{-kt})\Big) \\
&\geq e^{-\lambda t}\Big((e^{kt} - e^{-kt}) + k(e^{kt} + e^{-kt})\Big),
\end{aligned}
$$

entonces

$$
e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks}) + ke^{-ks}(e^{ks} + e^{2ks}) \geq e^{-\lambda t}\Big((e^{kt} - e^{-kt}) + k(e^{kt} + e^{-kt})\Big)
$$

$$
\Big(e^{-ks}(e^{ks} - e^{-ks}) + ke^{-ks}(e^{ks} + e^{-ks})\Big)e^{-ks} \geq e^{-\lambda t}\Big((e^{kt} - e^{-kt}) + k(e^{kt} + e^{-kt})\Big)e^{-ks}
$$

$$
\left[\frac{e^{-ks}}{2k}(e^{ks} - e^{-ks}) + \frac{e^{-ks}}{2}(e^{ks} + e^{-ks})\right]e^{-ks} \geq \left[\frac{1}{2k}e^{-ks}(e^{kt} - e^{-kt}) + \frac{1}{2}e^{-ks}(e^{kt} + e^{-kt})\right]e^{-\lambda t}
$$

$$
\Big[G(s,s) + \big|G_t^-(s,s)\big|\Big]e^{-ks} \geq \Big[G(t,s) + |G_t(t,s)|\Big]e^{-\lambda t}.
$$

$\square$

3. Resultados Principales

En esta sección, se presentarán los resultados principales del artículo central, que incluyen teoremas fundamentales que garantizan la solución al problema principal de la tesis. Estos teoremas se apoyan en los resultados previamente obtenidos, los cuales servirán como base para abordar de manera efectiva el desafío planteado.
Se probarán las soluciones positivas del problema 2.1 en el espacio de Banach E definido en la sección 2.3.1 con $g(t) = e^{-\lambda t}$, donde $k < \lambda$.

Teorema 1. *Sea $G(t, s)$ la función de Green dada en* (2.19)*, tal que*

1. *$f : I \times I \to I$ es continua y $f(t, x) \leq a(t) + b(t)x$ para $f(t, x) \in I \times I$, donde $a, b : I \to I$ son funciones continuas.*

2. *La integral $M_1 = \int_0^\infty e^{-ks}a(s)\, ds$ y $M_2 = \int_0^\infty e^{(\lambda-k)s}b(s)\, ds$ son convergentes, y $M_2 < 2k$.*

3. *Existe $\alpha > 0$, $\alpha \neq M_1(2k - M_2)^{-1}$, γ, $\delta > 0$, $\gamma < \delta$, y $t_0 \in I$ tales que*

$$\min_{t\in[\gamma,\delta]} \min_{x\in[m\alpha,\alpha e^{\gamma\delta}]} f(t, x) \geq \alpha e^{\lambda t_0} \left[\int_\gamma^\delta G(t_0, s)\, ds\right]^{-1},$$

donde $m = min\{e^{-k\delta}, e^{k\gamma} - e^{-k\gamma}\}$, entonces el problema planteado en 2.1 *tiene al menos una solución positiva.*

Demostración. En el espacio E se considera el siguiente conjunto

$$K = \left\{x \in E : x(t) \geq 0 \text{ en } I \text{ y } \min_{[\gamma,\delta]} x(t) \geq m\|x\|\right\}, \tag{3.1}$$

1. Sean $x, y \in K$, y $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x(t) \geq 0,\ (1 - \lambda)y(t) \geq 0 \Longrightarrow \lambda x(t) + (1 - \lambda)y(t) \geq 0\ \ \forall t \in I,$$

además

$$\begin{aligned}
\min_{[\gamma,\delta]}(\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)) &= \min_{[\gamma,\delta]}\lambda x(t)+\min_{[\gamma,\delta]}(1-\lambda)y(t)\\
&= \lambda\min_{[\gamma,\delta]}x(t)+(1-\lambda)\min_{[\gamma,\delta]}y(t)\\
&\geq \lambda m\|x\|+(1-\lambda)\|y\|\\
&= m\big(\|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\|\big)\\
&= m\|\lambda x+(1-\lambda)y\|,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)\in K \ \ \forall\lambda\in[0,1],$$

por lo tanto K es convexo.

2. Sea $x(t)\in\overline{K}$, entonces existe $(x_n)\to x(t)$ tal que $x_n\in K\ \forall n$.
   I. Suponga que $x(t)<0$, sea $\epsilon>0$ tal que $x(t)+\epsilon<0$, por hipótesis para tal ϵ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq n_0$

$$|x_n(t)-x(t)|<\epsilon\Longrightarrow x_n(t)-x(t)<\epsilon,$$

$$\Longrightarrow x_n(t)<x(t)-\epsilon<0,$$

   con lo cual $x_n(t)<0$, y esto contradice el hecho de que $x_n(t)\in K$, por lo que $x(t)\geq 0$.
   II. Por hipótesis $\min_{[\gamma,\delta]}x_n\geq m\|x_n\|$ para todo n, con lo cual

$$\lim_{n\to\infty}\min_{[\gamma,\delta]}x_n\geq\lim_{n\to\infty}m\|x_n\|\Longrightarrow\min_{[\gamma,\delta]}\lim_{n\to\infty}x_n\geq m\left\|\lim_{n\to\infty}x_n\right\|,$$

   lo cual implica que

$$\min_{[\gamma,\delta]}x(t)\geq m\|x\|,$$

   por lo tanto por I. y II. $x(t)\in K$, lo cual implica que K es cerrado.

3. Sea $\alpha\geq 0$ y $x\in K$
   I. $\alpha x(t)\geq 0$.
   II. $\min_{[\gamma,\delta]}\alpha x(t)=\alpha\min_{[\gamma,\delta]}x(t)\geq\alpha m\|x\|=m\|\alpha x\|$,
   con lo cual $\alpha x\in K$.

4. Sean $x, -x \in K$, entonces $x \geq 0$ y $-x \geq 0$, con lo cual $x = 0$.
   Por lo tanto K es un cono.

I. Sea $x \in K$. Si $t \leq s$, $e^{-kt} \leq e^{kt}$ con lo cual $e^{kt} - e^{-kt} \geq 0$, de la misma forma si $s \leq t$ entonces $e^{ks} - e^{-ks} \geq 0$, por lo tanto $G(t,s) \geq 0$, y por hipótesis $f(s, x(s)) \geq 0$, entonces

$$(Fx)(t) \geq 0 \quad x \in K,$$

de la Proposición 2.4.5 se tiene que $\min_{[\gamma,\delta]}(Fx)(t) \geq m\|Fx\|$, con lo cual $F(K) \subset K$, es decir, F mapea a K en sí mismo.

Para $r = M_1(2k - M_2)^{-1}$ y $R = \alpha$, sean los siguientes conjuntos abiertos y acotados

$$\Omega_1 = \{x \in E : \|x\| < r\} \text{ y } \Omega_2 = \{x \in E : \|x\| < R\}.$$

Sin pérdida de generalidad, se supone que $r < R$ y que $x \in K \cap \overline{\Omega}_2$.
Dado que M_1 y M_2 son convergentes, la integral

$$\int_0^\infty \left(e^{-ks}a(s) + \sup_I\{|x(s)|e^{-ks}\} e^{(\lambda-k)s} b(s) \right) ds,$$

converge a $M_1 + M_0 M_2$, donde $M_0 = \sup_I\{|x(s)|e^{-ks}\}$. Este valor está bien definido gracias a la construcción del espacio de Banach E.
A continuación, se consideran $t_1 > 0$ y $\epsilon > 0$. Las funciones $h(x) = e^{kx}(e^{kx} - e^{-kx})$ y $g(x) = e^{kx} - e^{-kx}$ son continuas en $t_1 \in I$. Por lo tanto, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

$$|h(x) - h(t_1)| < \frac{k\epsilon}{M_1 + M_0 M_2},$$

y

$$|g(x) - g(t_1)| < \frac{k\epsilon}{M_1 + M_0 M_2},$$

si se cumple que $|x - t_1| < \delta_1$ y $|x - t_1| < \delta_2$, respectivamente.
Finalmente, se considera un $t_2 > 0$ tal que $|t_1 - t_2| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $x \in \overline{\Omega}_2$. Sin pérdida de

generalidad, se supone que $t_1 \leq t_2$.

$$
\begin{aligned}
&|(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\
&= \left| \int_0^\infty G(t_1,s) f\big(s, x(s)\big)\, ds - \int_0^\infty G(t_2,s) f\big(s, x(s)\big)\, ds \right| \\
&\leq \int_0^\infty \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\leq \int_0^\infty \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\leq \int_0^\infty \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&= \int_0^{t_1} \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_2}^\infty \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&= \int_0^{t_1} \left| \frac{e^{-kt_1}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} \right| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{e^{-ks}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} \right| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_2}^\infty \left| \frac{e^{-ks}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} - \frac{e^{-ks}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} \right| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds,
\end{aligned}
$$

para la primera integral se tiene que $s \leq t_1 \leq t_2$ y para la tercera $t_1 \leq t_2 \leq s$, entonces

$$
\begin{aligned}
&|(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\
&= \int_0^{t_1} \left(\frac{e^{-kt_1}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} \right) \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{e^{-ks}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{ks} - e^{-ks})}{2k} \right| \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_{t_2}^\infty - \left(\frac{e^{-ks}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} - \frac{e^{-ks}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} \right) \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds,
\end{aligned}
$$

como $t_1 \leq s \leq t_2$ para la segunda integral entonces $e^{-kt_2} \leq e^{-ks}$ y $e^{kt_1} - e^{-kt_1} \leq e^{ks} - e^{-ks}$ con lo cual no se puede afirmar el signo del valor absoluto, entonces

Caso 1.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right| &= \frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-kt_1}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}.
\end{aligned}$$

Caso 2.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right| &= -\left(\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right)\\
&= \frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}-\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-kt_2}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\\
&\leq \frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}.
\end{aligned}$$

Con lo cual,

$$\left|\frac{e^{-ks}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right| \leq \frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&|(Fx)(t_1)-(Fx)(t_2)|\\
&\leq \int_0^{t_1}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{ks}-e^{-ks})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_2}^{\infty}-e^{-ks}\left(\frac{e^{kt_1}-e^{-kt_1}}{2k}-\frac{e^{kt_2}-e^{-kt_2}}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\leq \int_0^{t_1}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_2}^{\infty}e^{-ks}\left(\frac{e^{kt_2}-e^{-kt_2}}{2k}-\frac{e^{kt_1}-e^{-kt_1}}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\leq \int_0^{t_1}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\int_{t_2}^{\infty}e^{-ks}\left(\frac{e^{kt_2}-e^{-kt_2}}{2k}-\frac{e^{kt_1}-e^{-kt_1}}{2k}\right)\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&=\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\int_0^{t_1}\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2}-e^{-kt_2})}{2k}-\frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1}-e^{-kt_1})}{2k}\right)\int_{t_1}^{t_2}\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds\\
&\quad+\left(\frac{e^{kt_2}-e^{-kt_2}}{2k}-\frac{e^{kt_1}-e^{-kt_1}}{2k}\right)\int_{t_2}^{\infty}e^{-ks}\big(a(s)+b(s)x(s)\big)\,ds,
\end{aligned}
$$

como $-kt_1 \leq -ks$ para la primera integral y $-kt_2 \leq -ks$ para la segunda, entonces

$$
\begin{aligned}
&|(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\
\leq &\left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} \right) \int_0^{t_1} \frac{e^{-ks}}{e^{-kt_1 - kt_2}} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&+ \left(\frac{e^{-kt_1}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} - \frac{e^{-kt_2}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} \right) \int_{t_1}^{t_2} \frac{e^{-ks}}{e^{-kt_1 - kt_2}} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&+ \left(\frac{e^{kt_2} - e^{-kt_2}}{2k} - \frac{e^{kt_1} - e^{-kt_1}}{2k} \right) \int_{t_2}^{\infty} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
= &\left(\frac{e^{kt_2}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} - \frac{e^{kt_1}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} \right) \int_0^{t_1} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&+ \left(\frac{e^{kt_2}(e^{kt_2} - e^{-kt_2})}{2k} - \frac{e^{kt_1}(e^{kt_1} - e^{-kt_1})}{2k} \right) \int_{t_1}^{t_2} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&+ \left(\frac{e^{kt_2} - e^{-kt_2}}{2k} - \frac{e^{kt_1} - e^{-kt_1}}{2k} \right) \int_{t_2}^{\infty} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= &\left(\frac{h(t_2) - h(t_1)}{2k} \right) \int_0^{t_2} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
&+ \left(\frac{g(t_2) - g(t_1)}{2k} \right) \int_{t_2}^{\infty} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
\leq &\left(\frac{h(t_2) - h(t_1)}{2k} + \frac{g(t_2) - g(t_1)}{2k} \right) \int_0^{\infty} e^{-ks} \big(a(s) + b(s)x(s)\big)\, ds \\
\leq &\left(\frac{h(t_2) - h(t_1)}{2k} + \frac{g(t_2) - g(t_1)}{2k} \right) \int_0^{\infty} \big(e^{-ks}a(s) + e^{(\lambda - k)s} b(s) e^{-ks} x(s)\big)\, ds \\
\leq &\left(\frac{h(t_2) - h(t_1)}{2k} + \frac{g(t_2) - g(t_1)}{2k} \right) \int_0^{\infty} \big(e^{-ks}a(s) + \sup_I \left\{ |x(s)| e^{-ks} \right\} e^{(\lambda - k)s} b(s)\big)\, ds \\
= &\left(\frac{h(t_2) - h(t_1)}{2k} + \frac{g(t_2) - g(t_1)}{2k} \right) \int_0^{\infty} \big(e^{-ks}a(s) + M_0 e^{(\lambda - k)s} b(s)\big)\, ds \\
= &\left(\frac{|h(t_2) - h(t_1)|}{2k} + \frac{|g(t_2) - g(t_1)|}{2k} \right) (M_1 + M_0 M_2) \\
\leq &\left(\frac{k\epsilon}{(M_1 + M_0 M_2)2k} + \frac{k\epsilon}{(M_1 + M_0 M_2)2k} \right) (M_1 + M_0 M_2) = \epsilon,
\end{aligned}
$$

entonces las funciones $F\left(\overline{\Omega}_2\right)$ son casi equicontinuas en I. Análogamente $F\left(\overline{\Omega}_2\right)'$ son casi equicontinuas en I, obteniendo

$$\begin{aligned}|(Fx)'(t_1)-(Fx)'(t_2)| \le &\left[\frac{|h(t_2)-h(t_1)|}{2}+\frac{|g(t_2)-g(t_1)|}{2}\right](M_1+M_0M_2)\\ &+e^{kt_2}\int_{t_1}^{t_2}\left(e^{-ks}a(s)+M_0e^{(\lambda-k)s}b(s)\right)\,ds,\end{aligned}$$

Con las funciones $h(x)=e^{kx}(e^{kx}-e^{-kx})$ y $g(x)=e^{kx}+e^{-kx}$, se obtiene un resultado que es análogo al presentado en [7].
Además,

$$|(Fx)(t)|e^{-\lambda t} \le e^{-\lambda t}\int_0^\infty G(t,s)f(s,x(s))\,ds$$

$$\le e^{-\lambda t}\left(\underbrace{\int_0^\infty G(t,s)a(s)\,ds}_{I_1}+\underbrace{\int_0^\infty G(t,s)b(s)x(s)\,ds}_{I_2}\right).$$

Como $t>0$

- $I_1=\int_0^t G(t,s)a(s)\,ds+\int_t^\infty G(t,s)a(s)\,ds$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2k}\int_0^t e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})a(s)\,ds+\frac{1}{2k}\int_t^\infty e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})a(s)\,ds\\ &\le\frac{1}{2k}\left(\int_0^t e^{-kt}e^{ks}a(s)\,ds+\int_t^\infty e^{-ks}e^{kt}a(s)\,ds\right)\\ &\le\frac{1}{2k}\left(\int_0^t e^{-ks}e^{kt}a(s)\,ds+\int_t^\infty e^{-ks}e^{kt}a(s)\,ds\right)\\ &=\frac{e^{kt}}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}a(s)\,ds=\frac{e^{kt}}{2k}M_1.\end{aligned}$$

- $I_2 = \int_0^t G(t,s)b(s)x\,ds + \int_t^\infty G(t,s)b(s)x(s)\,ds$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2k}\int_0^t e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})b(s)x(s)\,ds + \frac{1}{2k}\int_t^\infty e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})b(s)x(s)\,ds \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^t e^{-kt}(e^{ks}-e^{-ks})e^{\lambda s}b(s)x(s)e^{-\lambda s}\,ds + \frac{1}{2k}\int_t^\infty e^{-ks}(e^{kt}-e^{-kt})e^{\lambda s}b(s)x(s)e^{-\lambda s}\,ds \\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^t e^{-kt}e^{ks}e^{\lambda s}b(s)x(s)e^{-\lambda s}\,ds + \frac{1}{2k}\int_t^\infty e^{-ks}e^{kt}e^{\lambda s}b(s)x(s)e^{-\lambda s}\,ds \\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^t e^{-ks}e^{kt}e^{\lambda s}b(s)|x(s)|e^{-\lambda s}\,ds + \frac{1}{2k}\int_t^\infty e^{-ks}e^{kt}b(s)e^{\lambda s}|x(s)|e^{-\lambda s}\,ds \\
&= \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{kt}e^{(\lambda-k)s}b(s)|x(s)|e^{-\lambda s}\,ds \\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{kt}e^{(\lambda-k)s}b(s)\|x\|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{kt}e^{(\lambda-k)s}b(s)\|x\|\,ds = \frac{e^{kt}\|x\|}{2k}M_2.
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
\|(Fx)\| = \sup_I\left\{|(Fx)(t)|e^{-\lambda t}\right\} &\leq \sup_I\left\{e^{-\lambda t}\left(\frac{e^{kt}}{2k}M_1 + \frac{e^{kt}\|x\|}{2k}M_2\right)\right\} \\
&\leq \sup_I\left\{\left(\frac{M_1}{2k} + \frac{\|x\|M_2}{2k}\right)\right\} \\
&= \frac{M_1}{2k} + \frac{M_2}{2k}\|x\|.
\end{aligned}$$

Como M_1 y M_2 son constantes, entonces se tiene que el operador (Fx) está acotado con respecto a la norma $\|x\|_p = \sup_I\{|x(t)|p(t)\}$. Por lo tanto por la Proposición 2.3.28, $F(K)$ es relativamente compacto en E, entonces el operador $F : K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \to K$ es completamente continuo.

II. Sea $x \in K \cap \partial\Omega_1$ de la Proposición 2.4.5

$$\begin{aligned}
|(fx)(t)|e^{-\lambda t} &\leq \frac{1}{2k}\int_0^\infty e^{-ks}a(s)\,ds + \frac{1}{2k}\|x\|\int_0^\infty e^{(\lambda-k)}b(s)\,ds = \frac{1}{2k}(M_1 + rM_2) \\
&= \frac{1}{2k}\big(M_1 + M_1(2k-M_2)^{-1}M_2\big) = \frac{1}{2k}\left(\frac{M_1(2k-M_2)+M_1M_2}{2k-M_2}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{2kM_1}{2k-M_2}\right) = M_1(2k-M_2)^{-1} = r,
\end{aligned}$$

con lo cual $\|Fx\| \leq \|x\|$.

Sea $x \in K \cap \partial\Omega_2$, entonces

$$\min_{[\gamma,\delta]} x(t) \geq m\|x\| = m\alpha,$$

por lo tanto, para $t \in [\gamma, \delta]$ se tiene que $m\alpha \leq x(t) \leq \alpha e^{\lambda\delta}$, y por hipótesis

$$\begin{aligned}(Fx)(t_0) &= \int_0^\infty G(t_0, s) f\big(s, x(s)\big)\, ds \geq \int_\gamma^\delta G(t_0, s) f\big(s, x(s)\big)\, ds \\ &\geq \int_\gamma^\delta \left(\int_\gamma^\delta G(t_0, \tau)\, d\tau\right)^{-1} \alpha e^{\lambda t_0}\, ds = \alpha e^{\lambda t_0},\end{aligned}$$

en consecuencia $e^{-\lambda t_0}(Fx)(t_0) \geq \alpha$, implicando que $\|Fx\| \geq \|x\|$.

Todo esto demuestra que el operador F tiene al menos un punto fijo en $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$ gracias al Teorema 2.3.18, lo cual implica que el problema 2.1 tiene una solución positiva x no trivial tal que $r \leq \|x\| \leq R$. $\square$

En esta parte del trabajo se probará la existencia de soluciones positivas para el problema 2.2 es un espacio E' con $g(t) = e^{-\lambda t}$. Considerando primero $k \geq 1$.

Teorema 2. *Sea $G(t, s)$ la función de Green dada en* (2.19)*, tal que*

1. $f : I \times I \times \mathbb{R} \longrightarrow I$ *es continua, y*

$$f(t, x, y) \leq a(t) + b(t)(x + |y|),$$

para $(t, x, y) \in I \times I \times \mathbb{R}$, donde $a, b : I \longrightarrow I$ son funciones continuas que satisfacen la hipótesis 2 del Teorema 1*, con $M_2 < \frac{1}{2}$.*

2. *Existen $\alpha > 0$, $\alpha \neq M_1(1 - 2M_2)^{-1}$, $0 < \gamma < \delta$, y $t_0 \in I$ tal que*

$$f(t, x, y) \geq 2k\alpha e^{\lambda t_0} \left[\int_\gamma^\delta (2kG(t_0, s) + G_t(t_0, s))\, ds\right]^{-1},$$

para todo $t \in [\gamma, \delta]$ y $(x, y) \in D$, donde

$$D = \left\{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : 2kx + y \geq \frac{m_1}{2}\alpha \text{ y } x + |y| \leq \alpha e^{\lambda\delta}\right\}.$$

Entonces el problema planteado en 2.2 *tiene al menos una solución positiva.*

Demostración. En el espacio E consideremos en siguiente conjunto

$$K' = \left\{ x \in E' : x(t) \geq 0 \text{ en } I \text{ y } \min_{[\gamma,\delta]} [2kx(t) + x'(t)] \geq \frac{m_1}{2}\|x\| \right\}. \tag{3.2}$$

Análogamente como en el teorema anterior K' es un cono.

I. Sea el operador integral

$$(F'x)(t) = \int_0^\infty G(t,s) f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds, \tag{3.3}$$

de nuevo por hipótesis es claro que $(Fx)(t) \geq 0$. Sean $t \in [\gamma, \delta]$ y $s, \tau \in I$, por la Proposición 2.4.6,

$$\begin{aligned}
\Big[2k(F'x)(t) + (F'x)'(t)\Big] &= \int_0^\infty \big(2kG(t,s) + G_t(t,s)\big) f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \\
&\geq m_1 \Big[\int_0^t \big(G(s,s) + |G_t^+(s,s)|\big) e^{-ks} f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_t^\infty \big(G(s,s) + |G_t^-(s,s)|\big) e^{-ks} f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \Big] \\
&\geq \frac{m_1}{2} e^{-\lambda\tau} \Big[\int_0^t \big(G(\tau,s) + |G_t(\tau,s)|\big) f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \\
&\quad + \int_t^\infty \big(G(\tau,s) + |G_t(\tau,s)|\big) f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \Big] \\
&= \frac{m_1}{2} e^{-\lambda\tau} \Big[\, |(F'x)(\tau)| + |(F'x)'(\tau)| \, \Big],
\end{aligned}$$

entonces

$$\min_{[\gamma,\delta]} \Big[2k(F'x)(t) + (F'x)'(t)\Big] \geq \frac{m_1}{2} \|(F'x)\|,$$

con lo cual $\big(F'(K')\big) \subset K'$, es decir F' mapea a K' es si mismo.

Sea $r = 2M_1(1 - 2M_2)^{-1}$, y $R = \alpha$, ahora se definen los conjuntos abiertos y acotados

$$\Omega_1 = \{x \in E' : \|x\| < r\} \text{ y } \Omega_2 = \{x \in E' : \|x\| < R\}.$$

Sin pérdida de generalidad suponga que $r < R$, sea $x \in K \cap \overline{\Omega}_2$

Análogamente al teorema anterior, las funciones $\left(F'\left(\overline{\Omega}_2\right)\right)$ y $\left(F'\left(\overline{\Omega}_2\right)\right)'$ son equicontinuas en I, teniendo en cuenta $\sup_I \left\{|x(t)| + |x'(t)|\right\} < \infty$ y el operador $(F'x)$ definido en (3.3) es acotado con respecto a la norma $\|x\|_p = \sup_I \left\{\left[|x(t)| + |x'(t)|\right]p(t)\right\}$, con lo cual el operador $F' : K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right) \to K$ es completamente continuo.

II. Sea $x \in K' \cap \partial\Omega_2$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|F'x\| &\leq \frac{1}{2k}(M_1 + rM_2) \leq 2(M_1 + rM_2) \\
&= 2(M_1 + 2M_1(1-2M_2)^{-1}M_2) = 2\left(\frac{M_1(1-2M_2) + 2M_1M_2}{1-2M_2}\right) \\
&= 2\left(\frac{M_1}{1-2M_2}\right) = 2M_1(1-2M_2)^{-1} = r,
\end{aligned}
$$

entonces $\|F'x\| \leq \|x\|$.
Sea $x \in K' \cap \partial\Omega_2$, se tiene que

$$
\min_{[\gamma,\delta]} \left[2kx(t) + x'(t)\right] \geq \frac{m_1}{2}\|x\| = \frac{m_1}{2}\alpha,
$$

si $t \in [\gamma, \delta]$ implica que $2kx(t) + x'(t) \geq \frac{1}{2}m_1\alpha$ y por hipótesis $x(t) + |x'| \leq \alpha e^{\lambda\delta}$ con $t \in [\gamma, \delta]$, con lo cual

$$
\begin{aligned}
2k\|F'x\| =& 2k \sup_I \left\{\left[|(F'x)(t)| + |(F'x)'(t)|e^{-\lambda t}\right]\right\} \\
&\geq 2ke^{-\lambda t_0}\left[|(F'x)(t_0)| + |(F'x)'(t_0)|\right] \\
&\geq e^{-\lambda t_0}\left[2k(F'x)(t_0) + |(F'x)'(t_0)|\right] \\
&= e^{-\lambda t_0}\int_0^\infty \big(2kG(t_0,s) + G_t(t_0,s)\big)f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \\
&\geq e^{-\lambda t_0}\int_\gamma^\delta \big(2kG(t_0,s) + G_t(t_0,s)\big)f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds \\
\geq e^{-\lambda t_0}\int_\gamma^\delta \big(2kG(t_0,s) + G_t(t_0,s)\big)&\left[\int_{\gamma,\delta} \big(2kG(t_0,\tau) + G_t(t_0,\tau)\big)\, d\tau\right]^{-1} 2k\alpha e^{\lambda t_0}\, ds \\
=& 2k\alpha = 2k\|x\|.
\end{aligned}
$$

con lo cual $\|F'x\| \geq \|x\|$. De nuevo gracias al Teorema 2.3.18 el operador F' tiene al menos un punto fijo en $K' \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$. $\square$

Ahora sea $0 < k < 1$.

Teorema 3. *Supongamos la hipótesis (1) del Teorema* 2*, y* $M_2 < 1$*, además*

1. *Existe* $\alpha > 0$*,* $\alpha \neq M_1/(1 - M_2)$*,* $0 < \gamma < \delta$*, y* $t_0 \in I$ *tal que*

$$f(t, x, y) \geq \alpha e^{\lambda t_0} \left[\int_\gamma^\delta (G(t_0, s) + G_t(t_0, s))\, ds\right]^{-1},$$

para $t \in [\gamma, \delta]$ *y* $(x, y) \in D$*, donde*

$$D = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : x + y \geq m_2\alpha \ \text{ y } \ x + |y| \leq \alpha e^{\lambda\delta}\}.$$

Entonces el problema planteado en 2.2 *tiene al menos una solución positiva.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 2, considerando la Proposición 2.4.7 y el cono

$$K' = \left\{x \in E' : x(t) \geq 0 \text{ en } I \text{ y } \min_{[\gamma,\delta]} [x(t) + x'(t)] \geq m_2\|x\|\right\}.$$

$\square$

Recapitulando los Teoremas 2 y 3, implica que el operador F' definido en (3.3) tiene al menos un punto fijo en $K' \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$ para $k < \lambda$, generando que el problema 2.2 tiene una solución positiva x no trivial tal que $r \leq \|x\| \leq R$.

Observación 3. *Utilizar las normas asociadas a los espacios* E *y* E' *en lugar de la norma* (2.3) *permiten garantizar condiciones de crecimiento más débiles para la función* f*.*

Ejemplo 4.0.1. *Consideremos el siguiente problema de valores en la frontera (BVP):*

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) + t + \frac{1}{3}e^{-2t}\big[x(t) + |x'(t)|\big] = 0, \\ x(0) = 0, \quad \lím_{t\to\infty} x(t) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $t \in I$. Fijamos $k = 1$, $\lambda = 2$, $\gamma = t_0 = 1$ y $\delta = 2$. Entonces $m_1 = \frac{k}{1+k}e^{-k\delta} = \frac{1}{2}e^{-2}$, $f(t,x,y) = t + \frac{1}{3}e^{-2t}(x + |y|)$ con lo cual $a(s) = s$ y $b(s)(x+|y|) = \frac{1}{3}e^{-2s}(x+|y|)$, por lo que

$$M_1 = \int_0^\infty e^{-ks}a(s)\,ds = \int_0^\infty e^{-s}s\,ds = 1 \text{ y } M_2 = \int_0^\infty e^{(\lambda-k)s}b(s)\,ds = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-s}\,ds = \frac{1}{3},$$

$2M_1(1-2M_2)^{-1} = 6$ y

$$\begin{aligned}\int_1^2 \big(2G(1,s) + G_t(1,s)\big)\,ds &= \int_1^2 \left(e^{-s}(e-e^{-1}) + \frac{e^{-s}(e+e^{-1})}{2}\right)\,ds = \frac{3e-e^{-1}}{2}\int_1^2 e^{-s}\,ds \\ &= \frac{3e-e^{-1}}{2}(-e^{-2}+e^{-1}) = \frac{(3e^2-1)(e-1)}{2e^3}.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = \dfrac{24e^6(3e^2-1)(e-1)}{96e^{11}-(3e^2-1)(e-1)}$ entonces

$$f(t,x,y) = t + \frac{1}{3}e^{-2t}(x+|y|) \geq 1 \geq \frac{96e^{11}}{96e^{11}-(3e^2-1)(e-1)} = 2\alpha e^2\left(\frac{(3e^2-1)(e-1)}{2e^3}\right)^{-1},$$

para $t \in [1,2]$ y $(x,y) \in D$. Es claro que $\alpha \neq 6$, por lo tanto por el Teorema 2 el problema 4.1 tiene una solución positiva x tal que $\alpha \leq \|x\| \leq 6$.

Aunque el enfoque principal de esta tesis se centra en demostrar la existencia de soluciones para ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales, es importante también considerar las aplicaciones prácticas de estas ecuaciones en diferentes contextos. Las ecuaciones diferenciales son herramientas fundamentales en la modelación de fenómenos físicos y naturales, y su estudio no solo se limita a aspectos teóricos.

Ejemplo 4.0.2 (Ecuación generalizada de p-Gardner)**.** *La ecuación de p-Gardner es una generalización de la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), que se utiliza para describir* *la dinámica de ondas no lineales en diversos contextos físicos, como la propagación de ondas en líquidos, gases y plasmas. La KdV clásica, formulada en 1895, es una ecuación diferencial parcial que modela ondas solitarias en canales de agua, donde se combinan efectos de no linealidad y dispersión.*

La ecuación de p-Gardner, desarrollada en la década de 1960, amplía esta idea al introducir un término de no linealidad de orden p, lo que permite capturar una variedad más amplia de fenómenos no lineales. Esta característica la hace especialmente útil para investigar la propagación de ondas en medios complejos, donde los efectos de la no linealidad pueden ser significativos.

Los solitones son soluciones especiales de ecuaciones diferenciales no lineales que representan ondas solitarias, es decir, ondas que mantienen su forma y velocidad a medida que viajan a través del medio. Estas ondas son estables y pueden interactuar entre sí sin perder su forma original, lo que las hace importantes en diversas aplicaciones en física y matemáticas. Las siguientes cuentas son guiadas de [2].

La forma general de la ecuación de p-Gardner se expresa como:

$$u_t + \beta u_{xxx} + bu^p u_x + au^{2p} u_x = 0, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

si se asume decaimiento en el infinito, la solución de onda viajera $u(x,t) = u(x - ct)$ satisface la ecuación

$$-cu + \beta u'' + \frac{b}{p+1} u^{p+1} + \frac{a}{2p+1} u^{2p+1} = 0,$$

con $\beta > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ y $p > 0$, con lo cual

$$u'' - \frac{c}{\beta} u + \frac{b}{\beta(p+1)} u^{p+1} + \frac{a}{\beta(2p+1)} u^{2p+1} = 0. \tag{4.2}$$

S. Hamdi, B. Morse, B. Halpen y B. Schiesser [7] utilizaron computación simbólica para resolver una ecuación elíptica de Riccati, obteniendo una solución exacta $u(x)$ para la ecuación p-Gardner generalizada (4.2) *en la forma siguiente*

$$u(x) = \left(\frac{(p+1)(p+2)c}{b} \right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{ac(p+1)(p+2)^2}{(2p+1)b^2}} \cosh\left(p \sqrt{\frac{c}{\beta}} x \right) \right)^{-\frac{1}{p}},$$

con lo cual $k = \sqrt{\frac{c}{\beta}}$ *y*

$$f\big(x, u(x)\big) = \frac{b}{\beta(p+1)}u^{p+1} + \frac{a}{\beta(2p+1)}u^{2p+1},$$

entonces $a(x) = \frac{b}{\beta(p+1)}u^{p+1}$ *y* $b(x) = \frac{a}{\beta(2p+1)}u^{2p}$.
Como se mencionó en la solución generalizada el grado de $u(x)$ *depende del término* e^{pkx} *el cual al aplicarle el exponente* $-\frac{1}{p}$ *quedaría* e^{-kx}*, con lo cual se tiene que*

$$u(x) \sim e^{-kx}, \quad a(x) \sim e^{-(p+1)kx}, \quad b(x) \sim e^{-2pkx}.$$

Entonces, M_1 *converge dado que*

$$e^{-ks}a(s) \sim e^{-(p+2)ks} \to 0, \quad s \to \infty,$$

y M_2 *converge fijando* $\lambda = 2k$ *y* $p = 2$ *dado que*

$$e^{(\lambda-k)s}b(s) = e^{ks}b(s) \sim e^{-3ks} \to 0, \quad s \to \infty.$$

Sean $a = b = c = 1$*,* $\lambda = 2k$ *y* $p = 2$ *entonces* $k = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$*, por lo cual se tiene*

$$u(x) = (12)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{48}{5}\cosh(2kx)}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a(x) = \frac{1}{3}(u(x))^3 = 8\sqrt{3}k^2\left(1 + \sqrt{\frac{53}{5}}\cosh(2kx)\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$b(x) = \frac{1}{5}(u(x))^4 = \frac{144k^2}{5}\left(1 + \sqrt{\frac{53}{5}}\cosh(2kx)\right)^{-2}.$$

Concluyendo

$$M_1 = \int_0^\infty e^{-ks}a(s)\,ds = k^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{12}k}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{53}{5}} - \sqrt{1 + \sqrt{\frac{53}{5}}}\right) \approx 0.70555\text{k},$$

$$M_2 = \int_0^\infty e^{(\lambda-k)s}b(s)\,ds = \int_0^\infty e^{ks}b(s) \approx k^2\frac{0,048}{k} = 0.048\text{k}.$$

Sean $\gamma = x_0 = 1$ *y* $\delta = 2$*, entonces* $m = \text{mín}\{e^{-2k}, e^k - e^{-k}\}$ *y*

$$\int_1^2 G(1,s)\,ds = \int_1^2 \frac{1}{2k} e^{-ks}(e^k - e^{-k})\,ds = \frac{e^k - e^{-ks}}{2k}\int_1^2 e^{-ks}\,ds = \frac{e^k - e^{-k}}{2k}\cdot\frac{1}{k} = \frac{e^k - e^{-k}}{2k^2},$$

por lo tanto, si $x \in [\gamma, \delta]$ *como las funciones* $a(x), b(x)$ *y* $u(x)$ *son decrecientes, entonces*

$$f(x,u) = a(x) + b(x)u(x) \geq a(\gamma) + b(\gamma)u(\gamma),$$

luego sea α *tal que*

$$\frac{(e^k - e^{-k})e^{-2}}{2k^2}\big(a(\gamma) + b(\gamma)u(\gamma)\big) \geq \alpha,$$

con lo cual

$$f(x,u) \geq \alpha e^2 \left(\frac{(e^k - e^{-k})}{2k^2}\right)^{-1},$$

para $x \in [1,2]$*,* $u \in [m\alpha, \alpha e^2]$ *y*

$$\alpha \leq \frac{(e^k - e^{-k})e^{-2}}{2k^2}\big(a(1) + b(1)u(1)\big).$$

Es claro que $\alpha \neq M_1(2k - M_2)^{-1} \approx$ 0.36145 (*exceptuando en un solo valor*)*, por lo tanto por el Teorema* 1 *el problema* 4.2 *tiene una solución positiva tal que* $\|x\|$ *esté entre* α *y* 0.36145*.*

5. Conclusión

En esta tesis, el objetivo principal fue demostrar la existencia de soluciones positivas para los problemas de la forma

$$\begin{cases} x''(t) - k^2 x(t) + f\big(t, x(t)\big) = 0, \\ x(0) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} x''(t) - k^2 x(t) + f(t, x(t), x') = 0, \\ x(0) = 0 \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \end{cases}$$

los cuales resaltan la relevancia de diversos temas fundamentales como la modelación de ondas no lineales en distintos contextos físicos, tales como la propagación de ondas en líquidos, gases y plasmas. La pertinencia de utilizar espacios de Banach radica en que en dichos conjuntos se logran hallar soluciones de la forma

$$x(t) = (Fx)(t) = \int_0^\infty G(t,s) f\big(s, x(s)\big)\, ds,$$

y

$$x(t) = (F'x)(t) = \int_0^\infty G(t,s) f\big(s, x(s), x'(s)\big)\, ds,$$

donde estas funciones representan soluciones a los problemas planteados y permiten imponer condiciones de crecimiento moderadas gracias al uso de normas de tipo Bielecki, formuladas en términos de la función de Green. Además, el uso del teorema de Krasnosel'skii asegura que la solución esté acotada dentro de un intervalo.

El desarrollo de esta tesis se basó principalmente en el trabajo de Zima Mirosława[1], junto con referencias importantes a las investigaciones de Amaya Zulueta[8] y Arenas Gilberto[2], quienes proporcionan información esencial sobre la función de Green y métodos para establecer las desigualdades requeridas.

Bibliografía

Amaya, Z. «La función de Green: Propiedades y aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales». Trabajo de fin de grado. Universidad de Cantabria, 2023 (vid. págs. 27, 63).

Arenas, G. «Ondas viajeras para algunos modelos dispersivos no lineales». Tesis de doctorado. Universidad del Valle, 2019 (vid. págs. 9, 60, 63).

Arrieta, F. y M. Scazzola. *Teoremas del Punto Fijo*. Monografía, Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas. 2021 (vid. pág. 12).

Galaz-García, F. *Clase 22: Análisis II (Enero 2021)*. Notas de clase, Centro de Investigación en Matemáticas. 2021 (vid. pág. 12).

Hamdi, S. et al. «Analytical solutions of long nonlinear internal waves: Part I». En: *Natural Hazards* 5.7 (2011), págs. 597-607 (vid. págs. 24, 53, 60).

Martins, M. *Resúmenes de análisis funcional 2016*. Disponible en: `https://www.ugr.es/~mmartins/material/Resumenes_analisis_funcional.pdf`. 2016 (vid. pág. 10).

Rudin, W. *Principles of mathematical analysis (3rd ed.)* McGraw-Hill, 1976 (vid. pág. 14).

Zima, M. «On positive solutions of boundary value problems on the half-line». En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 259 (2001), págs. 127-136 (vid. págs. 9, 63).