

**ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO MATEMÁTICO
DE LA QUIMIOTAXIS ATRACTIVO-REPULSIVA, CON
CRECIMIENTO LOGÍSTICO, EN FLUIDOS**

ABELARDO DUARTE RODRÍGUEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2018

**ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO MATEMÁTICO
DE LA QUIMIOTAXIS ATRACTIVO-REPULSIVA, CON
CRECIMIENTO LOGÍSTICO, EN FLUIDOS**

ABELARDO DUARTE RODRÍGUEZ

**Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Matemáticas**

**Director:
ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA
Doctor en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018**

Agradecimientos

- ◇ Agradezco al profesor Élder Jesús Villamizar Roa por aceptarme como su alumno, por toda su colaboración y excelente orientación a lo largo de toda la maestría.
- ◇ Agradezco al profesor Lucas C.F. Ferreira por sus fructíferas discusiones y aportes para el desarrollo de este trabajo.
- ◇ Agradezco a todos mis profesores, compañeros y amigos, de quienes he aprendido y compartido valiosas experiencias.
- ◇ Agradezco a la Universidad Industrial de Santander, en especial a la dirección de posgrados por el apoyo financiero.

Índice general

INTRODUCCIÓN	12
1 SOBRE EL MODELO	15
1.1 ACERCA DE LA QUIMIOTAXIS	15
1.2 TRANSDUCCIÓN DE LA SEÑAL QUIMIOTÁCTICA	16
1.3 DERIVACIÓN DE UN MODELO TIPO KELLER-SEGEL	19
1.4 MODELOS KELLER-SEGEL-NAVIER-STOKES	21
1.5 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA	22
2 PRELIMINARES	26
2.1 SOBRE LOS ESPACIOS L^p	26
2.2 INTEGRAL DE BOCHNER	28
2.3 TEORÍA DE SEMIGRUPOS	29
2.3.1 Semigrupos	29
2.3.2 Semigrupos analíticos	31
2.4 FUNCIÓN BETA	32
3 RESULTADOS DE EXISTENCIA	34
3.1 FORMULACIÓN INTEGRAL	34
3.1.1 Formulación integral en $\mathbb{R}^N$	34
3.1.2 Formulación integral en dominios acotados	35
3.2 UN ESPACIO COCIENTE	36
3.3 ESPACIOS SOLUCIÓN	38
3.4 ESTIMATIVAS LINEALES	40
3.4.1 Nuevas estimativas lineales	41
3.5 RESULTADOS PRINCIPALES	45
3.5.1 Existencia de solución en $[0, T]$	47
3.5.2 Existencia de solución en $[0, \infty)$	55
3.6 EL CASO $\mathbb{R}^N$	59
4 ANÁLISIS NUMÉRICO	63
4.1 MODELO	63
4.2 CONCEPTOS BÁSICOS	64

4.3	DISEÑO DEL ESQUEMA NUMÉRICO	67
4.3.1	Notaciones	67
4.3.2	Formulación variacional	68
4.3.3	Conservación de masa para la ecuación de la densidad	70
4.4	APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS	73
4.4.1	Hipótesis	73
4.4.2	Principales resultados numéricos	74
4.5	ANÁLISIS DE CONVERGENCIA	80
4.6	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS	87
	CONCLUSIONES	96
	TRABAJOS FUTUROS	97

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO MATEMÁTICO DE LA QUIMIOTAXIS ATRACTIVO-REPULSIVA, CON CRECIMIENTO LOGÍSTICO, EN FLUIDOS *

AUTOR: Abelardo Duarte Rodríguez **

PALABRAS CLAVE: Quimiotaxis; Keller-Segel; Navier-Stokes; existencia de soluciones; elementos finitos.

DESCRIPCIÓN:

Quimiotaxis es el fenómeno sensorial que describe la influencia de sustancias químicas presentes en el ambiente, sobre el movimiento de organismos. En este trabajo estudiamos un modelo que consiste de tres extensiones naturales del célebre modelo de quimiotaxis propuesto por Keller y Segel. La primera es considerar los efectos sobre la dinámica quimiotáctica cuando se considera que hay interacción con un fluido; la segunda extensión es la de incluir dos señales químicas, una de atracción y otra de repulsión; y finalmente, la tercera extensión corresponde a modelar la proliferación de los organismos.

El contenido de este trabajo está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, realizamos una descripción sobre el origen biofísico de sistemas tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, incluyendo la derivación del modelo clásico de la quimiotaxis y la presentación de nuestro problema de estudio. En el segundo capítulo, recordamos algunos resultados del análisis funcional y realizamos una breve presentación de la teoría de semigrupos, en donde mencionamos algunas propiedades y resultados de interés para el desarrollo del presente trabajo. En el tercer capítulo, demostramos la existencia de soluciones globales blandas para un modelo matemático de la quimiotaxis atractivo-repulsiva, con crecimiento logístico, en fluidos, para dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ o todo el espacio $\mathbb{R}^N$, con datos iniciales pequeños en espacios de funciones tipo L^p . Finalmente, en el cuarto capítulo, presentamos resultados numéricos para un modelo de quimiotaxis en fluidos, en dominios acotados de $\mathbb{R}^2$; en particular, construimos un esquema adecuado de elementos finitos que nos permite aproximar la solución de un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, llevamos a cabo un análisis de convergencia para el esquema propuesto y mostramos algunos experimentos numéricos, que validan el análisis teórico.

*Proyecto de Grado

**FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL OF ATTRACTION-REPULSION-CHEMOTAXIS-FLUID SYSTEM WITH LOGISTIC GROWTH *

AUTHOR: Abelardo Duarte Rodríguez **

KEY WORDS: Chemotaxis; Keller-Segel; Navier-Stokes; existence of solutions; finite elements.

DESCRIPTION:

Chemotaxis is the oriented movement of cells toward the concentration gradient of certain chemicals in their environment. One of the most interesting phenomena in chemotaxis is the aggregation of chemotactic cells and pattern formation. Chemotactic attraction refers to the movement of cells toward the increasing concentration of a signal, whereas chemotactic repulsion means that cells move along the decreasing concentration of a cue. In this thesis we consider a chemotaxis fluid model which consider three extensions of the classical Keller-Segel model. The first one is the chemotaxis fluid model, which is known as a challenging model; the second extension corresponds to the attractive-repulsive chemotaxis framework, and the third one corresponds to the chemotaxis models with logistic source.

This thesis has been organized as follows. In the first chapter, we made a description about the biophysical origin of Keller-Segel-Navier-Stokes systems, including the derivation of the classical model of chemotaxis and the presentation of our research problem. In the second chapter, we recall some results of functional analysis, as well as a brief presentation of the theory of semigroups, where we recall some interesting properties and results for the development of this work. In the third chapter, we prove the existence of global mild solutions for the chemotaxis-fluid model, in the framework of L^p spaces, in bounded domains of $\mathbb{R}^N$ or whole space $\mathbb{R}^N$, with small initial data in function spaces kind L^p . Finally, in the fourth chapter, we give some numerical results for a chemotaxis-fluid submodel; in particular, we construct an adequate finite element scheme which allows us to approximate the solution of a Keller-Segel-Navier-Stokes model. We include a convergence analysis for the proposed scheme and give some numerical experiments to confirm our theoretical analysis.

*Degree Project

**FACULTY OF SCIENCES, SCHOOL OF MATHEMATICS.
DIRECTOR Ph. D. Élder Jesús Villamizar Roa

Notaciones

- N denota la dimensión del espacio $\mathbb{R}^N$.
- Usualmente escribiremos w_{x_i} para denotar la derivada parcial $\frac{\partial w}{\partial x_i}$.
- $\nabla w := (w_{x_1}, \dots, w_{x_N})$ denota el gradiente de w .
- $\nabla \cdot u := (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}) \cdot (u_1, \dots, u_N)$ denota el divergente de u .
- $\Delta w := \sum_{i=1}^N w_{x_i x_i}$ denota el laplaciano de w .
- Ω denota un subconjunto abierto y conexo (dominio) de $\mathbb{R}^N$.
- $\partial\Omega$ denota la frontera del conjunto Ω .
- ν es el vector unitario exterior en $\partial\Omega$.
- $\frac{\partial w}{\partial \nu} := \nabla w \cdot \nu$ denota la derivada normal de w .
- $L^p := L^p(\Omega)$ denota el espacio de funciones Lebesgue para $1 \leq p \leq \infty$.
- $W^{m,q} := W^{m,q}(\Omega)$ denota el espacio de Sobolev, en particular, $H^s := W^{s,2}$.
- $L_0^2(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0\}$.
- $V := \{v \in (H_0^1(\Omega))^2 : \nabla \cdot v = 0 \in \Omega\}$.
- $H(\text{div}) := \{v \in (L^2(\Omega))^2 : v \cdot \nu = 0, \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}$.
- $\hat{H}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) = \{w \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} w = 0\}$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .
- $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ denota un semigrupo de operadores lineales de E en E .
- Usualmente escribiremos A por $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un operador lineal.
- $e^{t\Delta}$ denota el semigrupo del calor con condición de Neumann.
- e^{tA} denota el semigrupo de Stokes.
- $G(x, t) := (4\pi t)^{-N/2} \exp(-|x|^2/4t)$ es la solución fundamental del calor en $\mathbb{R}^N$.

- $G(x, t; \xi, \tau)$ representa la función de Green asociada a la ecuación de calor con condición de frontera tipo Neumann.
- $\rho(A)$ denota el conjunto resolvente asociado al operador A .
- $\sigma(A)$ denota el espectro asociado al operador A .
- $B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ es la función Beta.
- $\mathbb{P}$ denota el proyector de Leray.
- $L^p / \sim$ para $1 \leq p \leq \infty$ es el espacio cociente formado por todas las clases

$$[f] = \{g \in L^p(\Omega) : f - g \text{ es una constante}\}.$$

- $\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)dx$ la media de f sobre Ω .
- $\mathcal{X}$ denota el espacio de funciones para los datos iniciales.
- $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{\text{exp}}$ denotan los espacios de solución.
- $(K, \mathcal{V}_h, \mathcal{N})$ denota un elemento finito.
- $\mathcal{T}_h$ es una familia de particiones cuasiregulares de elementos finitos sobre Ω .
- $n_h, c_h, \sigma_h, u_h, \pi_h$ detonan las soluciones aproximadas.
- $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_5$ denotan espacios de dimensión finita donde se aproxima la solución numérica.
- $h_n, h_c, h_\sigma, h_u, h_\pi$ representan los parámetros de malla.
- Δt denota el paso en el tiempo.
- $n_h^m := n_h(x, t^m)$ donde $x \in \Omega$ y $t^m = m\Delta t$ para algún $m \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_5$ denotan los operadores proyección sobre los espacios $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_5$.
- X denota la trayectoria asociada al método de las características.
- $X_1^{m-1}(x)$ denota la aproximación de primer grado a la trayectoria X .
- Y_1^{m-1} denota el Jacobiano de la transformación de x a $X_1^{m-1}(x)$.
- C es una constante positiva general.

INTRODUCCIÓN

Quimiotaxis es el fenómeno sensorial que describe la influencia de sustancias químicas presentes en el ambiente sobre el movimiento de organismos. Cuando el movimiento de los organismos se da hacia mayores niveles de concentración (en el mismo sentido del gradiente concentración) se dice que la quimiotaxis es positiva; en este caso, al químico se le denomina *atractor*. Por otra parte, se dice que la quimiotaxis es negativa cuando los organismos se mueven hacia regiones con menores niveles de concentración, y en ese caso a la sustancia química se le denomina *repelente*. Uno de los fenómenos más interesantes en la quimiotaxis es la formación de patrones que ocurre bajo la presencia de dos señales químicas, una de atracción y la otra de repulsión [57, 80, 82, 96]. En segundo lugar, es importante considerar la interacción entre un fluido y los organismos, esta consideración está basada en recientes observaciones de organismos nadando en busca de alimentos y generando dinámicas particulares, (ver por ejemplo [27, 32, 53, 114]). Una tercera situación de importante interés biológico es considerar la proliferación y muerte de los organismos, la cual puede ser modelada mediante la adición de un término logístico [9, 54, 55, 115, 127, 109, 132]); en efecto la quimiotaxis tiene un rol importante en el movimiento de células endoteliales relacionadas con la invasión de células cancerígenas a tejidos cercanos [25, 26, 85], situación que puede ser estudiada mediante un modelo de quimiotaxis con crecimiento logístico [55]. Las anteriores consideraciones nos llevan a plantear el siguiente modelo de quimiotaxis, atractivo-repulsiva con crecimiento logístico, en fluidos:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_2 \nabla \cdot (n \nabla v) + \varsigma n - \mu n^2, \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c + \kappa_1 (\alpha_1 n - \beta_1 c) - \kappa_2 \gamma c n, \\ v_t + u \cdot \nabla v = \Delta v + \alpha_2 n - \beta_2 v, \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u - \nabla \pi - n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

en $\Omega \times (0, T)$, denotaremos Ω un dominio acotado suficientemente suave de $\mathbb{R}^3$ u $\Omega = \mathbb{R}^3$, consideraremos $0 < T \leq \infty$. En el sistema (1) las incógnitas son $n = n(x, t)$, $c = c(x, t)$, $v = v(x, t)$, $\pi(x, t)$ y $u(x, t)$ las cuales denotan respectivamente la densidad celular, la concentración del químico atractor, la concentración del químico repelente, la presión, y el campo de velocidades del fluido en la posición $x \in \Omega$ y el tiempo $t \in (0, T)$. La evolución del campo de velocidades $u(x, t) = [u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)]$ está gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. En $(1)_4$ el término $-n \nabla \phi$ se debe a la fuerza de flotación causada por la diferencia de densidades entre los organismos y el fluido. Dicho término se obtiene por medio de la aproximación de

Boussinesq [24], la cual establece que el efecto debido a la diferencia de densidad solo afecta al potencial gravitacional. El término $-\nabla \cdot (\chi_1 n \nabla c)$ representa la quimiotaxis positiva, mientras que el término $\nabla \cdot (\chi_2 n \nabla v)$ refleja la quimiotaxis negativa. En la segunda ecuación de (1), $\kappa_1, \kappa_2 \in \{0, 1\}$ permiten dos clases de interacciones: 1) Si $\kappa_1 = 1$ la señal es producida por las propias células y se degrada a una tasa constante. 2) Si $\kappa_2 = 1$ el químico es consumido con una tasa proporcional a la cantidad de organismos. Los parámetros $\chi_1, \chi_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ y γ son constantes no negativas y representan el comportamiento quimiotáctico; con más detalle, χ_1 y χ_2 denotan los coeficientes de sensibilidad quimiotáctico, α_1 y α_2 representa la tasa de producción de las señales químicas, γ representa la tasa de adsorción del químico por parte de los organismos, β_1 y β_2 denotan las tasas de degradación de las señales; finalmente, ς , y μ describen la tasa de proliferación de los organismos y la capacidad de carga (i.e. la máxima población sostenible), respectivamente.

El sistema (1) se complementa con los siguientes datos iniciales y condiciones de frontera en el caso de dominios acotados:

$$\begin{aligned} [n(x, 0), c(x, 0), v(x, 0), u(x, 0)] &= [n_0(x), c_0(x), v_0(x), u_0(x)], \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} &= \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2)$$

Podemos resaltar que el Sistema (1) consiste de tres extensiones naturales del célebre modelo de quimiotaxis propuesto por Keller-Segel [66, 67]. La primera es que considera los efectos de un fluido, el cual por si solo es un problema desafiante. La segunda extensión corresponde al modelo de atracción-repulsión considerando dos señales químicas, y la tercera, pero no por ello de menor importancia, es que el sistema también modela la proliferación de los organismos. En relación con estos tres extensiones del modelo clásico de la quimiotaxis, podemos decir que la literatura ha estado creciendo de manera vertiginosa; notamos que muchos autores se han interesado en el tema en especial durante los últimos años, incluyendo trabajos que abarcan no sólo aspectos teóricos de existencia, unicidad, regularidad y comportamiento asintótico de las soluciones, sino también resultados numéricos y de aplicaciones (por ejemplo ver [6, 15, 61, 70, 77, 117, 133, 28, 129] y las referencias citadas en ellos). Sin embargo, el sistema (1) no ha sido estudiado, por ello, tanto el modelo, como los resultados obtenidos y presentados en este trabajo son originales, y se espera que sean un aporte al estudio de problemas asociados con la quimiotaxis.

El presente trabajo se compone de dos partes principales. Una primera parte en la que abordaremos la existencia global de soluciones para el sistema (1)-(2), siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ o todo el espacio, con $N \in \{2, 3\}$, y una segunda parte en la que presentaremos un análisis numérico de las soluciones aproximadas de un submodelo de (1), vía los métodos de elementos finitos.

El documento está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo, realizamos una descripción sobre el origen biofísico de sistemas tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, iniciando con una pequeña descripción del fenómeno y una motivación de su estudio; posteriormente realizaremos una breve presentación de mecanismos que permiten a los organismos reorientar su movimiento bajo la presencia de una señal química. Luego realizamos la derivación del modelo clásico de la quimiotaxis y finalizamos este capítulo con la presentación de nuestro problema de estudio, junto con un breve análisis de los resultados recientes sobre el tema.

En el segundo capítulo, se recuerdan los resultados clásicos del análisis que fundamentan este trabajo, iniciando con los espacios de Lebesgue, las desigualdades de Young, Hölder, Minkowski, y la definición de los espacios de Sobolev. Posteriormente, recordamos el concepto de integral de Bochner, seguido de una breve presentación de la teoría de semigrupos donde mencionamos algunas propiedades y resultados de interés para el desarrollo del presente trabajo. Finalizamos el capítulo recordando la función Beta.

En el tercer capítulo, se enuncian y se demuestran dos teoremas de existencia de soluciones globales *blandas* para el modelo (1)-(2) para dominios acotados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con datos iniciales pequeños en espacios de funciones tipo L^p . Para ello, en primer lugar, presentamos la formulación integral asociada al sistema (1) usando el principio de Duhamel; luego introduciremos un espacio cociente de funciones $L^p / \sim$, donde las clases de equivalencia corresponden a las funciones en el espacio L^p que difieren en una constante; posteriormente presentamos una sección donde recordaremos algunas estimativas lineales para el semigrupo del calor en $\mathbb{R}^N$ y el semigrupo de Stokes. En esta sección también desarrollaremos nuevas estimativas para el semigrupo del calor con condición de Neumann, y extenderemos dichas estimativas a los espacios cocientes $L^p / \sim$. Para finalizar presentamos nuestros resultados de existencia para el modelo (1). La importancia de estos resultados radica, no solamente en la generalidad del modelo, sino también en que es el primer trabajo en el área que lidia con datos singulares en dominios acotados. Estos resultados son novedosos y se encuentran plasmados en el preprint [36]. Adicionalmente, en la última sección de este capítulo presentaremos un resultado de existencia en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$.

En el cuarto capítulo, mostramos algunos resultados numéricos para un submodelo de (1), en particular, en este capítulo construiremos un esquema adecuado de elementos finitos que nos permita aproximar la solución de un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes. Para ello, primero introduciremos algunos conceptos básicos sobre los métodos de elementos finitos, luego diseñaremos nuestro esquema de elementos finitos, seguido del análisis de convergencia, y terminaremos presentando algunos experimentos numéricos, los cuales nos permiten validar el análisis teórico.

1 SOBRE EL MODELO

En este capítulo presentamos una breve introducción biofísica a los sistemas tipo Keller-Segel-Navier-Stokes. Iniciamos con una pequeña motivación, luego describiremos el fenómeno de la quimiotaxis al interior de una bacteria, y posteriormente abordaremos la derivación de las ecuaciones para una especie y una señal. Después presentamos algunas generalizaciones al modelo original, incluyendo un breve análisis de los resultados recientes sobre el tema, y finalizamos este capítulo, con la presentación del problema principal de esta tesis.

1.1. Acerca de la quimiotaxis

A finales del siglo XIX, el trabajo pionero del biólogo Theodor W. ENGELMANN (1843-1909) describió cómo bacterias cambiaban la dirección en la que nadaban cuando pasaban de una zona iluminada a una oscura [38], y Wilhelm PFEFFER (1845-1920) observó en algunos experimentos que las bacterias se movían hacia lugares donde había oxígeno, minerales y otros nutrientes [119]. Estas primeras observaciones dieron paso a definir la *quimiotaxis*, un fenómeno sensorial que describe la influencia de sustancias químicas presentes en el ambiente sobre el movimiento de especies móviles. Bacterias, células somáticas y otros organismos uni o pluricelulares dirigen su movimiento de acuerdo a la concentración de ciertas sustancias químicas en su entorno.

La habilidad de los organismos de percibir y redirigir su movimiento acercándose o alejándose de una sustancia química es una propiedad esencial. Ejemplificamos esta afirmación con tres fenómenos donde la quimiotaxis juega un papel importante. El primer fenómeno corresponde a las etapas de desarrollo temprano en especies superiores, como los mamíferos, donde la quimiotaxis permite la movilización y organización de las células madres que eventualmente conduce a la diferenciación de las diferentes células, por ejemplo, células óseas, neuronales o sanguíneas [29, 46, 86]. El segundo ejemplo corresponde al movimiento de bacterias, mohos o nematodos en presencia de un químico en su ambiente; en particular, al inicio de la fase unicelular del moho *Dictyostelium discoideum*, los organismos segregan una sustancia que actúa como repulsora y permite que estos se dispersen en su entorno [1, 69, 134]. El tercer fenómeno, corresponde al sistema inmunológico humano dado que la quimiotaxis permite que los organismos reaccionen ante una posible amenaza. En particular, una vez que una inflamación surge, puede ser por invasión de sustancias tóxicas o la destrucción de tejido por un objeto cortopunzante, nuestro sistema inmunológico responde mediante la liberación de leucocitos. La

ruta que toman los leucocitos para localizar el sitio de la infección está determinada por los rastros de quimiocinas que han sido liberadas por las células residentes en el tejido afectado. Estas quimiocinas actúan como señal química atractiva, guiando a los leucocitos al origen de la inflamación [84, 88].

El modelado matemático para la quimiotaxis tiene origen en los trabajos de Clifford S. PATLAK en los años cincuenta [92]. Luego, a mediados de los años sesenta, Julius ADLER presentó un estudio detallado para la quimiotaxis en la bacteria *Escherichia coli*, y descubrió algunas de las características más fundamentales sobre la quimiotaxis, como la existencia de quimiorreceptores específicos en la superficie celular de las bacterias, los cuales influyen en el movimiento de las células, y por otra parte, la identificación de aminoácidos, azúcares y otros nutrientes como sustancias atractoras [1, 2]. Estos descubrimientos atrajeron a brillantes científicos, entre ellos, el laureado profesor de Harvard, Howard BERRG y el Nobel en física Edward PURCELL; el primero presentó un compendio sobre la transducción en baterías [10] y el segundo, escribió sobre movimiento de bacterias en un fluido, cuando el número de Reynold es pequeño [95].

El primer sistema de ecuaciones diferenciales parciales que describe el fenómeno de la quimiotaxis fue presentado por Evelyn F. KELLER y Lee A. SEGEL, quienes motivados por los trabajos de John T. BONNER [14], propusieron un modelo para describir la agregación del *Dictyostelium discoideum* [66]. El modelo original Keller-Segel de la quimiotaxis, consta de cuatro ecuaciones de reacción-advección-difusión acopladas, el cual puede ser reducido en un modelo de dos ecuaciones (ver (1.8)). Luego, motivados por los trabajos de Adler, Keller y Segel extendieron sus resultados a bacterias en general [67]. El sistema Keller-Segel ha sido estudiado ampliamente durante las últimas décadas. Existe una considerable gama de resultados sobre el modelo, por lo cual, recomendamos al lector interesado consultar los excelentes trabajos recopilatorios sobre el tema [9, 54, 58].

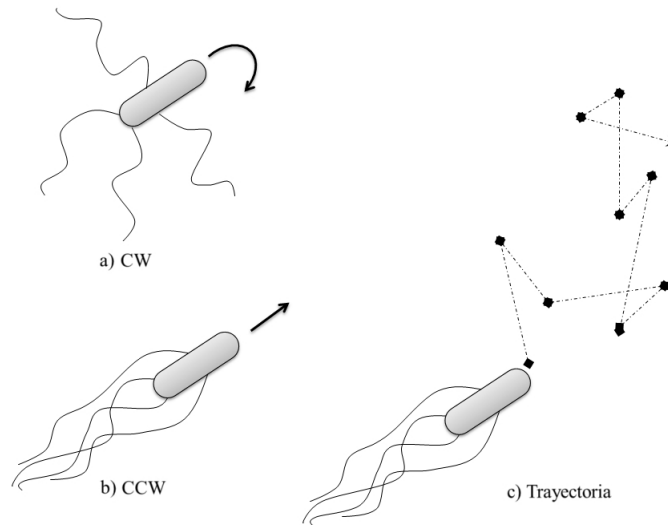
1.2. Transducción de la señal quimiotáctica

La manera en la cual los organismos transforman una señal percibida por los quimiorreceptores en un estímulo motor que les permite a los organismos alejarse o acercarse de una sustancia química, es un proceso que involucra una compleja red de señales intermoleculares (para una descripción detallada ver [4], capítulo 8). En esta sección vamos a dar un vistazo a esta red de señales dentro de una bacteria de *E. Coli*, dado que este organismo presenta una de las estructuras más simples para explorar los mecanismos de la quimiotaxis a nivel celular, además de que, el circuito de transducción de la *E. Coli* ha sido bien estudiado [16, 11, 105].

La *E. Coli* es un bacilo que se encuentra en el sistema digestivo humano y de otros mamíferos, y que cuenta con flagelos que le permiten desplazarse. El movimiento de este organismo se puede dividir en dos etapas: 1) (CCW) que se realiza cuando los flagelos

giran en el sentido contrario de las manecillas del reloj y la célula es propulsada hacia adelante, 2) (CW) que tiene lugar cuando los flagelos giran en el sentido de las manecillas del reloj y el organismo rota de una manera aleatoria. Cuando la bacteria se encuentra en un ambiente isotrópico la frecuencia entre las etapas CCW y CW se mantiene constante, produciendo un movimiento aleatorio (ver Figura 1.1).

Figura 1.1 – Ilustración de los movimientos de una bacteria.



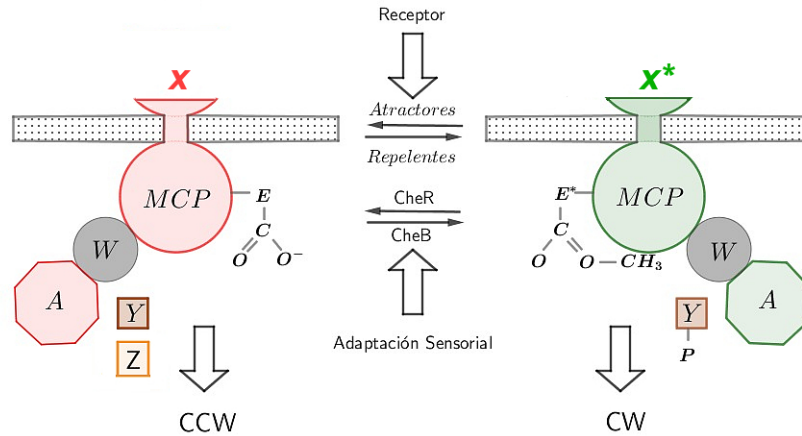
En la Figura 1.1, a) Estado CW que provoca un giro, b) Estado CCW que permite a la célula avanzar, c) Representación de una trayectoria donde el organismo alterna los estados CW y CCW. Por otra parte, en presencia de un gradiente químico, los quimio-receptores y un circuito de proteínas conmutan los estados CCW y CW, lo cual permite que la célula se desplace en la dirección del gradiente si la señal es de atracción, o se aleje en el caso de una amenaza.

Se han identificado cinco clases de quimio-receptores distintos para la *E. Coli*, cada uno de los cuales puede detectar diferentes sustancias [5]. Hay un total de varios miles de receptores en cada célula. Cada quimio-receptor tiene una parte en el exterior de la membrana, una parte que atraviesa la membrana, y una parte en el interior de la célula, esta última llamada MCP (por sus siglas en inglés *Methyl-accepting Chemotaxis Proteins*). Los MCP's registran el pasado químico reciente de la célula en forma de metilación, detectando y comparando las concentraciones actuales con las encontradas durante los últimos segundos de viaje. Cuando el estado actual de concentración no coincide con el registro de metilación, el MCP inicia una respuesta de control en los flagelos y un circuito de retroalimentación actualiza el registro de metilación para lograr la adaptación del sistema. Adicionalmente, la *E. Coli* cuenta con un grupo de proteínas citoplasmáticas, a saber, CheW y CheA que generan señales receptoras, CheY y CheZ

que controlan las respuestas motrices, y CheR y CheB que regulan el estado de metilación de MCP (ver Figura 1.2).

Cada receptor está unido a una proteína CheA, la cual modifica a otras moléculas mediante fosforilación. Consideraremos el conjunto receptor-CheA una entidad, que llamaremos X . X cambia rápidamente entre dos estados, uno activo, que notaremos X^* , y uno inactivo. La transición de estados toma microsegundos. En el estado activo, X^* modifica la proteína de respuesta CheY adicionándole un grupo fosforilo (PO_4) para obtener P-CheY. Como en otros sistemas de señalización biológica, el estímulo se realiza por fosforilación de una proteína. P-CheY aumenta la probabilidad de alternar los flagelos del estado CCW al estado CW; de este modo, una alta concentración de P-CheY aumenta la frecuencia de giros. Las formas P-CheY tienen periodos de duración cortos porque la proteína CheY pierde rápidamente su grupo fosforilo a través de la autohidrólisis espontánea. Sin embargo, la proteína CheZ incrementa aún más la tasa de desfosforilación de P-CheY, lo cual asegura respuestas locomotoras más rápidas. En presencia de señales atractoras o repulsoras, los efectos contrarios de X^* y CheZ alcanzan un equilibrio para la cantidad P-CheY presentes, y la frecuencia de intercambio entre los estados CCW y CW.

Figura 1.2 – Estados inactivo y activo de X .



Las señales atractoras disminuyen la actividad de X^* , mientras que las señales repulsoras aumentan la actividad de X^* . Las proteínas CheR y CheB modifican X y permiten la adaptación del sistema a pequeños cambios en el gradiente de la concentración. Cada MCP posee cuatro o cinco lugares donde puede agregar un grupo metilo (CH_3); entre más grupos son agregados, más alta es la actividad de X . La proteína CheR cataliza la agregación de grupos metilos, mientras que CheB juega un papel antagónico al removerlos. La adaptación de X se lleva a cabo a través de una retroalimentación de la proteína CheB. Cuando una señal activa X , entonces X^* fosforila CheB transformándola en P-CheB, haciendo a esta más activa. Por otra parte, una reducción en la actividad

de X , significa una disminución en la producción de CheB, lo cual tiene como consecuencia una menor remoción de grupos metilos. Este proceso es independiente de la tasa de producción de CheR. Por lo tanto, los grupos metilos se acumulan e incrementa la actividad de X , aumentando de esta forma la frecuencia de los giros. La metilación es una reacción mucho más lenta que la fosforilación. La proteína CheR está presente en la célula en menores cantidades, apenas unas 100 unidades, y su función es evitar la saturación de las MCP's.

En la Figura 1.2, la información del ambiente es percibida por los receptores los cuales aumentan o disminuyen la actividad de X ; la cinasa CheA modifica otras moléculas, mediante fosforilación, y la proteína CheW permite una adaptación sensorial. Por otra parte, las moléculas P-CheY aumentan la frecuencia de los giros. Las enzimas CheZ facilitan la desfosforilación de las proteínas CheY, ocasionando una disminución en la frecuencia de los giros. CheB y CheR retiran y agregan grupos metilos a X , respectivamente, disminuyendo e incrementando la actividad de la unidad.

1.3. Derivación de un modelo tipo Keller-Segel

La siguiente derivación del modelo clásico Keller-Segel se basa principalmente en las ideas presentadas en [67, 89]. Comencemos definiendo $n(x, t)$ como la densidad de los organismos en un punto x del dominio Ω y en un tiempo $t \in [0, T]$; de manera similar notaremos la concentración de la señal química como $c(x, t)$. Asumiremos que las funciones n y c son funciones suficientemente suaves e integrables sobre Ω . Consideraremos también que la función n está gobernada por la ley de conservación de masa, y que las tasas de natalidad y de mortalidad son iguales. Para un subdominio acotado arbitrario $\Omega' \subset \Omega$, con frontera $\partial\Omega'$, la ley de conservación de masa establece que:

$$\partial_t \int_{\Omega'} n(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega'} \mathbf{F}(x, t) \cdot \nu ds, \quad \text{para } t \in [0, T], \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{F}(x, t)$ es el flujo de $n(x, t)$ y ν es el vector normal exterior y unitario en $\partial\Omega'$; el signo menos en el lado derecho de (1.1) es necesario, debido a que el producto $\mathbf{F}(x, t) \cdot \nu$ es positivo para flujos que salen de Ω' , y $\mathbf{F}(x, t) \cdot \nu$ es negativo para flujos que entran. La ecuación (1.1) nos dice que la tasa de cambio en el tiempo de la densidad es igual a la cantidad de flujo a través de la frontera del dominio considerado. Si ahora aplicamos el teorema de la divergencia, y recordando la hipótesis de suavidad sobre n ($\partial_t n$ es continua e integrable), entonces la expresión (1.1) puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega'} \partial_t n(x, t) dx + \nabla \cdot \mathbf{F}(x, t) dx = 0, \quad \text{para } t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Dado que Ω' se escogió de manera arbitraria, de (1.2) obtenemos que

$$\partial_t n(x, t) + \nabla \cdot \mathbf{F}(x, t) = 0, \quad \text{para todo } (x, t) \in [0, T] \times \Omega. \quad (1.3)$$

Para completar el modelo nos resta elegir un término de flujo adecuado $\mathbf{F}(x, t)$. Para esto asumiremos dos mecanismos de flujo por parte de los organismos; el primero un

flujo de naturaleza puramente difusiva $\mathbf{F}_d(x, t)$, y otro gobernado por el fenómeno de la quimiotaxis $\mathbf{F}_c(x, t)$. El flujo difusivo puede ser definido por la Ley de Fick,

$$\mathbf{F}_d(x, t) = -D_n \nabla n(x, t),$$

donde D_n es el coeficiente de difusión para la densidad de los organismos. El flujo de quimiotaxis $\mathbf{F}_c$ permite capturar diferentes características de fenómeno biofísico, en particular, dicho flujo mide la fuerza que el gradiente de concentración de la señal ejerce sobre el movimiento de los organismos. Es razonable asumir que este flujo sea proporcional a un producto entre el ∇c y una función de sensibilidad, digamos $\chi = \chi(n, c)$, donde dicha función sensibilidad pueda depender de la cantidad de los organismos e incluso de la propia concentración química. Teniendo en cuenta estas consideraciones, definimos el flujo de quimiotaxis como

$$\mathbf{F}_c(x, t) = \chi(n, c) \nabla c(x, t),$$

y en consecuencia, obtenemos que el flujo total es dado por

$$\mathbf{F}(x, t) = \mathbf{F}_d(x, t) + \mathbf{F}_c(x, t). \quad (1.4)$$

Notemos que los flujos pueden tener un carácter antagónico si sus signos son contrarios, en efecto, si el signo de $\chi(\cdot)$ es positivo, el flujo quimiotáctico será antagónico al flujo difusivo y diremos que la quimiotaxis es de atracción; por otra parte, si $\chi(\cdot)$ es negativo, diremos que la quimiotaxis es de repulsión. Para nuestro caso particular tomaremos $\chi(\cdot) > 0$ y el flujo $\mathbf{F}_c$ cumplirá un papel antagónico con el del flujo $\mathbf{F}_d$.

Si sustituimos el flujo (1.4) en (1.3), tenemos que

$$\partial_t n = \nabla \cdot (D_n \nabla n - \chi(n, c) \nabla c), \quad \text{para } (x, t) \in [0, T] \times \Omega. \quad (1.5)$$

De manera similar, para la señal química, pero esta vez considerando un término de reacción que nos permitirá modelar la producción, degradación y consumo de c , obtenemos

$$\partial_t \int_{\Omega'} c(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega'} \mathbf{G}(x, t) \cdot \nu ds + \int_{\Omega} K(n, c) dx, \quad \text{para } t \in [0, T], \quad (1.6)$$

donde $K(n, c)$ es una función que modela la degradación, producción o consumo de la señal y $\mathbf{G}(x, t)$ es el flujo de la concentración química el cual asumiremos que es puramente difusivo. Repitiendo un procedimiento similar al realizado para n y juntando el resultado con la ecuación (1.5), obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t n = \nabla \cdot (D_n \nabla n - \chi(n, c) \nabla c), & (x, t) \in [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t c = \nabla \cdot (D_c \nabla c) + K(n, c), & (x, t) \in [0, T] \times \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

donde D_c es el coeficiente de difusión para la señal química. En particular asumiendo el término $K(n, c) = -\beta c + \alpha n$, lo cual describe una degradación del químico en proporción a su concentración, y producción del mismo en proporción a la densidad de los

organismos, y además considerando $\chi(n, c) = n(x, t)\chi$ lo cual implica que el flujo quimiotático es proporcional a la densidad celular, obtenemos el siguiente sistema clásico Keller-Segel:

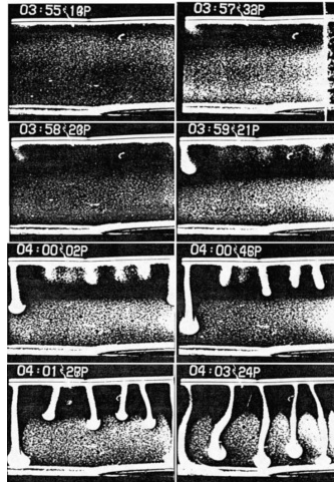
$$\begin{cases} \partial_t n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), & \text{para } (x, t) \in [0, T] \times \Omega, \\ \partial_t c = D_c \Delta c + \alpha n - \beta c, & \text{para } (x, t) \in [0, T] \times \Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

En (1.8) α, β y χ son constantes positivas que representan la tasa de producción de la señal química, la tasa de degradación de la sustancia y la quimiosensibilidad de las bacterias, respectivamente.

1.4. Modelos Keller-Segel-Navier-Stokes

En los últimos años, el modelo (1.7) se ha modificado con el objetivo de mejorar su coherencia con la realidad biológica, y permitir dinámicas más complejas; una de las modificaciones más interesantes en el modelo de la quimiotaxis es la de permitir la influencia que tiene una perturbación del ambiente sobre el movimiento de las células [113, 114]. Consideremos que los organismos se encuentran suspendidos en un fluido viscoso e incompresible, y que el efecto gravitacional, debido a la densidad de los organismos, es apreciable; además, asumamos que tanto las sustancias químicas como los organismos son arrastrados por el fluido. El primer modelo en considerar esta situación fue presentado en 1995 por A.J. HILLEDON, *et al.* [56] para describir el comportamiento de las bacterias *Bacillus subtilis* suspendidas en una delgada cámara de agua (ver figura 1.3).

Figura 1.3 – Capturas de una suspensión de bacterias *Bacillus subtilis* *.



*Tomada y reproducida, con permiso de los autores Hillesdon, A.J., Pedley, T.J. and Kessler, J.O., Bulletin of Mathematical Biology, 1995. **57**, 299-344 doi:10.1007/BF02460620.

En la Figura 1.3, se observa una colonia de bacterias suspendidas en agua; éstas, primero nadan en dirección al gradiente del oxígeno (capa superior), después se acumulan y generan inestabilidades provocando la aparición de plumas hidrodinámicas en forma de dedo, las cuales cambian a forma de hongo en las zonas donde las concentraciones del químico son bajas y el flujo difusivo predomina sobre el flujo asociado a la quimiotaxis.

Más recientemente, Idan TUVAL *et al.* [114] presentan un interesante trabajo, donde por medio de experimentos numéricos validan la relación entre la difusión de organismos, el consumo de oxígeno, la quimiotaxis y la dinámica de fluidos viscosos con el siguiente sistema de EDP's (ver también [27, 32, 53]):

$$\left\{ \begin{array}{l} n_t + \underbrace{u \cdot \nabla n}_{\text{transporte}} = \nabla \cdot \left(\underbrace{D_n \nabla n}_{\text{difusión}} - \underbrace{\chi n \nabla c}_{\text{quimiotaxis}} \right), \\ c_t + \underbrace{u \cdot \nabla c}_{\text{transporte}} = \nabla \cdot \left(\underbrace{D_c \nabla c}_{\text{difusión}} \right) - \underbrace{\alpha n K(c)}_{\text{fuente señal}}, \\ u_t + \underbrace{(u \cdot \nabla) u}_{\text{convección}} = \underbrace{\Delta u}_{\text{difusión}} - \underbrace{\nabla \pi}_{\text{efecto presión}} - \underbrace{n \nabla \phi}_{\text{flotación}}, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

donde u representa el campo de velocidad del fluido y como antes n, c denotan la densidad de organismos y la concentración de la señal química, respectivamente. El término $n \nabla \phi$ representa los efectos de flotación debido a una diferencia de la densidad del fluido con o sin bacterias; el término $(u \cdot \nabla) u$ se llama término convectivo (despreciar dicho término conduce a las llamadas ecuaciones de Stokes) y el término $\nabla \cdot u = 0$ denota la incompresibilidad del fluido; $K(c)$ y $r(c)$ son funciones que dependen de c , y D_n, χ, D_c, α son constantes positivas que representan la difusión para el densidad, la sensibilidad quimiotáctica, la difusión de la señal química y la tasa de consumo de la señal química, respectivamente. El fenómeno descrito por (1.9) es también conocido como bioconvección.

1.5. Presentación del problema

El presente trabajo tiene como objetivo central el estudio de un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes para una especie y dos señales químicas, una de atracción y la otra de repulsión, cuya dinámica se desarrolla en un fluido viscoso incompresible; además, se desea considerar una fuente logística para describir la proliferación y muerte de los organismos. Las ecuaciones que gobiernan este modelo son:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_2 \nabla \cdot (n \nabla v) + \varsigma n - \mu n^2, \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c + \kappa_1 (\alpha_1 n - \beta_1 c) - \kappa_2 \gamma c n, \\ v_t + u \cdot \nabla v = \Delta v + \alpha_2 n - \beta_2 v, \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = \Delta u - \nabla \pi - n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

en $\Omega \times (0, T)$, denotaremos Ω un dominio acotado suficientemente suave de $\mathbb{R}^N$ u $\Omega = \mathbb{R}^N$ para $N \in \{2, 3\}$, consideraremos $0 < T \leq \infty$. En el sistema (1.10) $n = n(x, t)$, $c = c(x, t)$, $v = v(x, t)$, $\pi(x, t)$ y $u(x, t)$ denotan respectivamente la densidad celular, la concentración del químico atractor, la concentración del químico repelente, la presión, y el campo de velocidades del fluido en la posición $x \in \Omega$ y el tiempo $t \in (0, T)$. La evolución del campo de velocidades $u(x, t) = [u_1(x, t), \dots, u_N(x, t)]$ está gobernada por las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. En (1.10)₄ el término $-n\nabla\phi$ se debe a la fuerza de flotación causada por la diferencia de densidades entre los organismos y el fluido. Dicho término se obtiene por medio de la aproximación de Boussinesq [24], la cual establece que el efecto debido a la diferencia de densidad solo afecta al potencial gravitacional. El término $-\nabla \cdot (\chi_1 n \nabla c)$ representa la quimiotaxis positiva, mientras que el término $\nabla \cdot (\chi_2 n \nabla v)$ refleja la quimiotaxis negativa. En la segunda ecuación de (1.10), $\kappa_1, \kappa_2 \in \{0, 1\}$ permiten dos clases de interacciones: 1) Si $\kappa_1 = 1$, la señal es producida por las propias células y se degrada a una tasa constante. 2) Si $\kappa_2 = 1$, el químico es consumido con una tasa proporcional a la cantidad de organismos. Los parámetros $\chi_1, \chi_2, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ y γ son constantes no negativas y representan el comportamiento quimiotáctico; con más detalle, χ_1 y χ_2 denotan los coeficientes de sensibilidad quimiotáctico, α_1 y α_2 representa la tasa de producción de las señales químicas, γ representa la tasa de adsorción del químico por parte de los organismos, β_1 y β_2 denotan las tasas de degradación de las señales; finalmente, ς , y μ describen la tasa de proliferación de los organismos y la capacidad de carga (esto es, la máxima población sostenible), respectivamente.

El sistema anterior es completado con los siguientes datos iniciales y condiciones de frontera (en el caso donde Ω es un dominio acotado):

$$\begin{cases} [n(x, 0), c(x, 0), v(x, 0), u(x, 0)] = [n_0(x), c_0(x), v_0(x), u_0(x)], & x \in \Omega \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, & u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \end{cases} \quad (1.11)$$

El modelo (1.10)-(1.11) pertenece a la clase de sistemas tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, pero además contiene otras dos variaciones al modelo clásico (1.8); una de ellas, es que considera dos señales quimiotácticas, una de atracción y la otra de repulsión, pues la migración de los organismos se puede ver afectada por el efecto de varias señales químicas [91], y la otra consideración es la de permitir la reproducción y muerte de los organismos con una fuente logística; en efecto, algunos modelos de invasión de cáncer convergen a modelos de quimiotaxis con crecimiento logístico [55]. Resaltamos aquí que el modelo (1.10)-(1.11) no había sido considerado previamente, por lo cual, considerarlo constituye el primer aporte de esta tesis al estudio del fenómeno de la quimiotaxis en fluidos. Submodelos de (1.10) han llamado la atención de muchos investigadores, especialmente en los últimos cinco años. Por ejemplo, mencionamos los trabajos [15, 23, 35, 42, 59, 60, 70, 71, 72, 74, 75, 77, 79, 107, 108, 110, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 130, 131, 133]. A continuación presentaremos una breve revisión de los principales resultados de los trabajos anteriormente citados.

– *Modelos de quimiotaxis con fluido*

Si $v = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, $\varsigma = 0$ y $\mu = 0$, la existencia de solución clásica global en dominios convexos de $\mathbb{R}^2$ fue demostrada en [122]. En el mismo artículo para el caso $\mathbb{R}^3$, considerando para el flujo las ecuaciones de Stokes, la existencia de soluciones globales débiles también fueron obtenidas. Los resultados de [122] fueron extendidos a dominios más generales en [60]. En dominios acotados convexos 3D, la existencia de soluciones débiles, incluyendo las ecuaciones de Navier-Stokes, fueron obtenidas más recientemente en [126]. Variantes de este modelo aparecen cuando se considera una difusión celular no lineal y χ se asume como un tensor de sensibilidad quimiotáctico, esto es, Δn es remplazado por $\Delta^m n$, y $\chi \nabla \cdot (n \nabla c)$ por $\nabla \cdot (n S(n, c, x) \nabla c)$, donde $S(n, c, x) = (s_{i,j})_{N \times N}$ es una función de valor matricial. En estos casos, se asumen condiciones de frontera adecuadas. Bajo estas condiciones, resultados sobre existencia global, acotación y comportamiento asintótico de las soluciones han sido obtenidos en [23, 35, 59, 107, 124, 131] y algunas referencias citadas en ellos. El caso $v = 0$, $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$, y incluyendo una fuente logística ($\varsigma \geq 0$ y $\mu > 0$), ha sido analizado en [72]. Considerando dominios acotados de $\mathbb{R}^3$, en [72], el autor construye soluciones débiles y demuestra que las soluciones se vuelven suaves después de algún tiempo; la convergencia hacia estados estables $(\varsigma/\mu, 0, 0)$ también es establecida. En [15], se considera un intercambio de oxígeno entre el fluido y el ambiente, lo cual conduce a condiciones de frontera diferentes a (1.11); entonces, para datos iniciales suficientemente suaves, se probó la existencia de solución global clásica para $N = 2$, así como también la existencia de soluciones globales débiles para $N = 3$. En los trabajos mencionados anteriormente, se asume que los datos iniciales sean al menos funciones continuas.

En el caso de modelo Keller-Segel-Navier-Stokes sin fuente logística (esto es $v = 0$, $\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 0$), el análisis matemático es un poco fragmentario y existen menos resultados de solubilidad global que en el caso $\kappa_1 = 0$ y $\kappa_2 = 1$ (ver [42, 78, 79, 108, 110, 118]). De hecho, en [108] se demostró que la versión Stokes-tridimensional posee una solución global acotada y clásica bajo un apropiado efecto de amortiguamiento logístico ($\varsigma \geq 0$ y $\mu \geq 23$). En [110], unos resultados análogos son derivados para el caso bidimensional Navier-Stokes bajo la hipótesis $\varsigma \geq 0$ y $\mu > 0$ (ver también los resultados de [42] sobre la existencia global de ciertas soluciones débiles para una versión particular 2-D obtenida al tomar $\varsigma = 0$). Recientes resultados de solubilidad global para modelos Keller-Segel-Navier-Stokes involucrando funciones de sensibilidad generales son obtenidos en [79, 118] y referencias en ellos. Como antes, los trabajos mencionados anteriormente consideran, al menos, funciones continuas como datos iniciales. A parte de esta clase de datos iniciales, citamos el trabajo [70] donde los autores consideran un modelo Keller-Segel acoplado con las ecuaciones Navier-Stokes en $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) y prueban la existencia de soluciones blandas con datos iniciales pequeños en espacios L^p débiles.

– *Modelos de quimiotaxis con fuente logística pero sin fluido*

Si el efecto con el fluido es despreciado y la señal repulsiva desaparece, considerando

$\kappa_1 = 1$ y $\kappa_2 = 0$, el sistema (1.10) se convierte en el modelo clásico Keller-Segel con crecimiento logístico. Para este submodelo y variantes, existe una abundante literatura matemática (ver [3, 71, 111, 121, 123] y referencias citadas en ellos). En [111], la existencia de solución global acotada y clásica fue demostrada bajo la suposición que la dimensión del espacio es menor o igual a 2, o bien el efecto logístico es suficientemente fuerte. También, la existencia de soluciones globales débiles se obtuvo bajo condiciones más blandas. Asumiendo que la fuente logística satisface $f(n) \leq a - \mu n^2$, el autor de [121] probó la existencia y unicidad de una solución global y suave para un valores de μ suficientemente grandes en dominios acotados y convexos de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$. Para $f(n) = n - \mu n^2$, resultados de estabilidad asintótica global para el equilibrio homogéneo $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$ fueron obtenidas en [123]. Para $f(n) = \varsigma n - \mu n^2$ con valores de $\mu > 0$, arbitrariamente pequeños, en [71] el autor demostró la existencia de soluciones globales débiles en dominios acotados y suficientemente suaves de $\mathbb{R}^N$, los cuales se convierten en soluciones suaves después de algún tiempo. Considerando ciertos tipos de sensibilidad singular, resultados sobre existencia global, unicidad y comportamiento asintótico de la solución en dominios acotados de $\mathbb{R}^2$ fueron obtenidos en [3]. Adicionalmente, más recientemente, los subsistemas de quimiotaxis atractivo-repulsiva relacionados con (1.10), en particular $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 0$ y $u = 0$ fueron estudiados en [74, 75, 77, 117, 133] y algunas referencias en ellos. Existe una importante diferencia entre el clásico modelo Keller-Segel y el sistema de quimiotaxis atractivo-repulsiva, en el sentido que generalmente el último sistema no posee un funcional de Lyapunov, a diferencia del modelo clásico. En dominios acotados de $\mathbb{R}^N$, los autores de [75, 77] demostraron la existencia y unicidad de una solución global acotada para $N = 1$ y $\eta \geq 1$ o $N = 2$ y $\eta \geq 2$. En [74], considerando dominios acotados convexos y suficientemente suaves $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la existencia y unicidad de soluciones globales clásicas y acotadas fue demostrada bajo las condiciones $\beta_i \geq \frac{1}{2}$, μ suficientemente grande, y f satisfaciendo la condición $f(n) = n - \mu n^{\gamma+1}$, $n \geq 0$, $\mu > 0$ y $\gamma \geq 1$. Comportamiento asintótico para tiempos grandes hacia un específico estado estable también fue analizado. En [117], se obtiene la existencia de soluciones globales clásicas 3D donde el término Δn es remplazado por $\nabla \cdot ((n+1)^{m-1} \nabla n)$ donde $m > 4/3$ y el término de crecimiento es dado por $\varsigma n - \mu n^\theta$ for $\theta \in (1, 2)$ o $m \geq 1$ y el término de crecimiento es $\varsigma n - \mu n^2$ pero asumiendo condiciones específicas sobre el valor de μ . Recientemente, la existencia y unicidad de una solución global acotada y clásica fue obtenida en [133] para $N \geq 3$, $\beta_1 = \beta_2$, $\frac{\chi\alpha_1 + \xi\alpha_2}{\mu} < \theta_0$, $\theta_0 > 0$ y $f(n) \leq \varsigma n - \mu n^2$.

En el Capítulo 3, presentaremos nuevos resultados de existencia de soluciones blandas globales para el sistema (1.10)-(1.11) con datos en espacios de tipo $L^p(\Omega)$, lo cual constituye un aporte original de este trabajo a los modelos tipo Keller-Segel-Navier-Stokes. Por soluciones blandas se entienden aquellas funciones que satisfacen la correspondiente formulación integral (3.3) o (3.6) (ver Capítulo 2, subsección 3.1.1). En el Capítulo 4 introduciremos una esquema numérico conveniente para aproximar las solución de un submodelo de (1.10) y presentaremos estimativas de error para dicho esquema, siendo esto, otro aporte original del presente trabajo.

2 PRELIMINARES

En este capítulo se hará una revisión general de las herramientas matemáticas necesarias para sustentar los resultados de esta investigación. Comenzaremos el capítulo con una revisión de conceptos y resultados del análisis clásico que serán utilizados en el desarrollo del trabajo, entre ellos, la definición de los espacios de Lebesgue L^p y de Sobolev $W^{k,p}$, y algunas desigualdades de uso frecuente en esta tesis; después, presentaremos una corta introducción a la teoría de semigrupos, incluyendo algunas las propiedades de los semigrupos analíticos, y finalizaremos este capítulo con la presentación de la función Beta. De esta manera completamos los preliminares necesarios para el desarrollo de los posteriores capítulos.

2.1. Sobre los espacios L^p

Trataremos rápidamente algunos preliminares de los espacios Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Definición 2.1.1. *Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(\Omega)$ como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, donde*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.1)$$

El funcional (2.1) define una norma en $L^p(\Omega)$, con la cual $(L^p, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ es un espacio de Banach. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$(f, g) := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Definición 2.1.2. *El espacio $L^\infty(\Omega)$ es definido como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$, donde*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup \text{ess}\{|f(x)| : x \in \Omega\}. \quad (2.2)$$

Por su parte, el funcional (2.2) define una norma en $L^\infty(\Omega)$, con la cual $(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ es un espacio de Banach. Adicionalmente, notaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$ el conjunto de las funciones medibles, tales que $f \in L^p(\Omega')$, para todo $\Omega' \subset \Omega$ abierto y acotado.

Algunas desigualdades importantes que se cumplen en los espacios $L^p(\Omega)$ son las desigualdades de Minkowski, Hölder y Young.

– *Desigualdad de Minkowski*: Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $f, g \in L^p(\Omega)$, entonces

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

– *Desigualdad de Hölder*: Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y se tiene que

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

– *Desigualdad de Young*: Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$, y vale que

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

donde $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy$ es la función convolución.

Ahora introduciremos los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, (ver por ejemplo [43]). Para ello, consideremos el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ de las funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω . Dada $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ un multiíndice, diremos que la función f tiene α -ésima derivada débil, si existe una función $g \in L_{loc}^1(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde el operador D^α es el operador diferencial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

En este caso, denotaremos $D^\alpha f = g$. Si la una función f tiene α -ésima derivada débil, está es únicamente definida a menos de un conjunto de medida nula.

Definición 2.1.3. Sean k un entero no negativo y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se define como el espacio vectorial de todas las funciones $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tales que para cada multiíndice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha f$ existe en el sentido débil y pertenece a $L^p(\Omega)$.

Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach con norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Los espacios $W^{k,2}(\Omega)$, usualmente denotados por $H^k(\Omega)$, son espacios de Hilbert con el producto interno

$$(f, g)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f D^\alpha g \, dx.$$

2.2. Integral de Bochner

La integral de Bochner es una generalización a la integral de Lebesgue para funciones con valores en un espacio de Banach. Sea E es un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$ y (X, Σ, μ) un espacio con medida σ -finita.

Definición 2.2.1. Una función $g : X \rightarrow E$ es μ -simple integrable si

$$g := \sum_{i=1}^k u_i \mathbf{1}_{X_i},$$

donde $u_i \in E$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ tal que $X_i \in \Sigma$ y los X_i son disjuntos dos a dos.

Si g es una función μ -simple integrable su integral Bochner se define como

$$\int_X g d\mu := \sum_{i=1}^k \mu(X_i) u_i \in E.$$

Definición 2.2.2. Una función $f : X \rightarrow E$ es μ -Bochner integrable si $\int_X \|f\|_E d\mu < \infty$, y existe una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones μ -simples tales que

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \mu\text{-c.t.p.},$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \|f_n - f\|_E d\mu = 0.$$

En tal caso la integral Bochner de f está determinada por

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

El valor de la integral de Bochner es independiente de la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y además

$$\left\| \int_X f d\mu \right\|_E \leq \int_X \|f\|_E d\mu.$$

Si consideramos $X = [0, T]$ un intervalo de tiempo, podemos definir espacios de funciones vectoriales que involucran el tiempo y que usaremos en el desarrollo de este trabajo.

Definición 2.2.3. El espacio $L^p(0, T; E)$ consiste en todas las funciones $f : [0, T] \rightarrow E$, con

$$\|f\|_{L^p(0, T; E)} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_E^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; E)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess } \|f(t)\|_E < \infty.$$

También podemos considerar los espacios $C(0, T; E)$, $W^{k,p}(0, T; E)$, $BC(0, T; E)$, entre otros (ver [43]); aquí BC denota las funciones continuas y acotadas.

2.3. Teoría de semigrupos

En esta sección presentaremos algunos de los conceptos básicos de Teoría de semigrupos, incluyendo definiciones y algunas proposiciones con los resultados más relevantes para el desarrollo de esta tesis. Para mayores detalles recomendamos al lector los libros [83, 93]. A lo largo de esta sección E denotará un espacio de Banach.

2.3.1. Semigrupos

Definición 2.3.1. Una familia $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineales de E en E y acotados, es un semigrupo si

- (i) $S(0) = I$, (I es el operador identidad sobre E),
- (ii) $S(t + \tau) = S(t)S(\tau)$ para todo $t, \tau \in [0, \infty)$.

Definición 2.3.2. Un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se denomina un semigrupo de clase C_0 , si verifica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)x = x, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Definición 2.3.3. Un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo si

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

Note que de las Definiciones 2.3.3 y 2.3.2, un semigrupo uniformemente continuo es un semigrupo de clase C_0 .

Definición 2.3.4. El operador lineal $A : D(A) \subset E \rightarrow E$, es llamado el generador infinitesimal del semigrupo $S(t)$, si satisface que

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{para } x \in D(A),$$

donde $D(A)$ es el conjunto de todas las $x \in E$ tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}$ existe.

Proposición 2.3.5 ([93], Teorema 1.2). Un operador lineal A es un generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo, si y solo si A es un operador acotado.

Si A es un operador lineal y acotado de E en E , entonces el semigrupo uniformemente continuo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generado por A , es dado por $S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$, para $t \geq 0$.

Observación 2.3.6 ([93], Corolario 1.4). Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. Entonces se tiene que

- Existe una constante $w \geq 0$ tal que $\|S(t)\| \leq e^{wt}$.

- Existe un único operador lineal y acotado A , tal que $S(t) = e^{tA}$.
- $AS(t)u = S(t)Au$ para todo $u \in D(A)$.
- $t \rightarrow S(t)$ es diferenciable en norma y $\frac{dS(t)}{dt} = AS(t)$.

A continuación presentaremos algunos resultados importantes para semigrupos de clase C_0 , empezando con algunas propiedades de los generadores.

Proposición 2.3.7 ([93], Corolario 2.5). *Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo de clase C_0 , se cumple que:*

- (i) $\overline{D(A)} = E$, (el dominio A es denso en E).
- (ii) A es un operador cerrado.

Decir que A es cerrado significa que, si $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset D(A)$, con $u_k \rightarrow u$ y $Au_k \rightarrow v$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $u \in D(A)$ y $v = Au$.

Proposición 2.3.8 ([93], Teorema 2.2). *Sea $S(t)$ un semigrupo de clase C_0 . Entonces existen constantes $w \geq 0$ y $M \geq 1$, tales que*

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \quad \text{para } 0 \leq t < \infty.$$

Si $M = 1$, esto es $\|S(t)\| \leq e^{wt}$, entonces $S(t)$ es llamado un *semigrupo w -contractivo*.

Definición 2.3.9. *Notaremos el conjunto resolvente de A por*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \text{ es invertible}\}.$$

Para cada $\lambda \in \rho(A)$, podemos asociar el operador resolvente $R_\lambda : E \rightarrow E$, definido por

$$R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1}u.$$

El espectro de A se define como

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

El siguiente teorema caracteriza los generadores de semigrupos w -contractivos.

Proposición 2.3.10 (Teorema de Hille-Yosida). *Un operador lineal A es el generador infinitesimal de un semigrupo w -contractivo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si y solo si*

- (i) $\overline{D(A)} = E$ y A es un operador cerrado.
- (ii) $(w, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda - w}$ para todo $\lambda > w$.

Ahora presentaremos un importante resultado que permite relacionar un semigrupo, con los operadores resolventes asociados a su generador infinitesimal A por medio de una integral de Dunford.

Proposición 2.3.11 ([93], Teorema 7.7). *Sea A operador sobre X satisfaciendo las siguientes condiciones*

- (i) $\overline{D(A)} = E$.
- (ii) Para algún $0 < \delta < \pi/2$, $\rho(A) \supset T_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\}$.
- (iii) Existe un constante M tal que

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{para } \lambda \in T_\delta, \quad \lambda \neq 0.$$

Entonces, A es el generador infinitesimal de $S(t)$, un semigrupo de clase C_0 , tal que $\|S(t)\| \leq C$ para alguna constante C y además,

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda,$$

donde Γ es una curva suave contenida en T_δ que se recorre desde ∞e^{-iv} hasta ∞e^{iv} para $\pi/2 < v < \pi/2 + \delta$.

El resultado anterior establece condiciones suficientes (pero no necesarias), sobre los generadores infinitesimales de semigrupos de clase C_0 y es a menudo más sencillo de chequear en los ejemplos concretos.

2.3.2. Semigrupos analíticos

En esta subsección presentaremos una clase de semigrupos generados por operadores cuyos dominios no son necesariamente densos en E ; para un estudio más amplio y detallado (ver [83]).

Definición 2.3.12. $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ es un operador sectorial si existe una constante $w \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \pi/2)$ y $M > 0$ tal que

- (i) $\rho(A) \supset T_{\delta,w} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq w, |\arg(\lambda - w)| < \pi/2 + \delta\}$,
- (ii) $\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{|\lambda - w|}$ para todo $\lambda \in T_{\delta,w}$.

Definición 2.3.13. Sea A un operador sectorial. Si la familia $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es definida por

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_\lambda d\lambda, \quad t > 0,$$

donde Γ es una curva suave contenida en $T_{\delta,w}$ que se recorre desde ∞e^{-iv} hasta ∞e^{iv} para $\pi/2 < v < \pi/2 + \delta$ y para $t = 0$

$$S(0) = I,$$

entonces $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es llamado un semigrupo analítico generado por A en E .

Es usual notar $S(t)$ por e^{tA} . Ahora, para terminar esta sección presentaremos algunas propiedades de los semigrupos analíticos.

Observación 2.3.14 ([83], Proposición 2.1.1). *Si e^{tA} un semigrupo analítico, se cumple que*

(i) $e^{tA}x \in D(A^k)$ para cada $t > 0$, $x \in E$, $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in D(A^k)$, entonces

$$A^k e^{tA}x = e^{tA}A^kx, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) $e^{tA}e^{\tau A} = e^{(t+\tau)A}$, para todo $t \geq 0$.

(iii) Existe una constante M tal que

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{wt}, \quad \text{para } t > 0,$$

donde w es la constante en la Definición 2.3.12.

(iv) La aplicación $t \rightarrow e^{tA}$ de $(0, \infty)$ al conjunto de los operadores lineales de E es de clase C^∞ y

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{tA} = A^k e^{tA}, \quad \text{para } t > 0;$$

además tiene una extensión analítica en el sector

$$T := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg(\lambda)| < \delta\}.$$

2.4. Función Beta

En esta sección recordaremos la definición de la función Beta; luego, presentaremos un lema relativo a dicha función y que usaremos en el Capítulo 3.

Definición 2.4.1. *Dados $x, y > 0$, la función Beta $B(x, y)$ está definida por*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Notemos que para todo $x, y > 0$,

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &\leq \max(1, 2^{1-y}) \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}dt + \max(1, 2^{1-x}) \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{y-1}dt \\ &< 2\frac{1}{x}2^{-x} + 2\frac{1}{y}2^{-y} < \infty. \end{aligned}$$

Note además que la función Beta es simétrica, esto es, $B(x, y) = B(y, x)$. En la demostración del Teorema 3.5.6 necesitaremos el siguiente lema

Lema 2.4.2. Sean $x < 1$, $y < 1$ $a > 0$ y $b > 0$. Entonces

$$\int_0^t (t - \tau)^{-x} \tau^{-y} e^{-a(t-\tau)} e^{-b\tau} d\tau \leq e^{-\min\{a,b\}} t^{1-x-y} B(1-x, 1-y). \quad (2.3)$$

Demostración. Primero asuma que $b \geq a$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{-x} \tau^{-y} e^{-a(t-\tau)} e^{-b\tau} d\tau &= e^{-at} \int_0^t (t - \tau)^{-x} \tau^{-y} e^{-(b-a)\tau} d\tau \\ &\leq e^{-at} \int_0^t (t - \tau)^{-x} \tau^{-y} d\tau \\ &\leq e^{-at} t^{1-x-y} B(1-x, 1-y). \end{aligned}$$

Por otra parte si $b < a$, haciendo el cambio de variable $\tau = t - \check{\tau}$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t (t - \tau)^{-x} \tau^{-y} e^{-a(t-\tau)} e^{-b\tau} d\tau &= \int_0^t (\check{\tau})^{-x} (t - \check{\tau})^{-y} e^{-a(\check{\tau})} e^{-b(t-\check{\tau})} d\check{\tau} \\ &\leq e^{-bt} t^{1-x-y} B(1-y, 1-x). \end{aligned}$$

Como la función beta es simétrica, obtenemos (2.3). □

3 RESULTADOS DE EXISTENCIA

En este capítulo presentamos nuevos resultados de existencia para un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes dado por (1.10)-(1.11), lo cual constituye un aporte original de este trabajo. Iniciaremos el capítulo con la formulación integral para nuestro problema, seguido de la definición de un espacio cociente de funciones L^p , así como de los espacios solución. Posteriormente presentaremos algunas estimativas para el semigrupos del calor y el semigrupo de Stokes, y finalizaremos el capítulo enunciando y probando dos teoremas de existencias para el sistema (1.10)-(1.11), para ello obtendremos una estimativa global para la formulación integral del sistema y después presentaremos un esquema de aproximaciones adecuado. Finalmente, probaremos que si los datos iniciales son suficientemente pequeños existe una sucesión tipo Cauchy, la cual converge a la solución blanda del modelo.

3.1. Formulación integral

A continuación se definen algunos operadores importantes en el desarrollo de este trabajo y presentamos la formulación integral para nuestro modelo quimiotáctico, primero cuando el dominio es todo el espacio $\mathbb{R}^N$ y luego, para el caso de dominios acotados.

3.1.1. Formulación integral en $\mathbb{R}^N$

Para analizar el sistema (1.10)-(1.11), usamos la estrategia clásica de eliminar la presión de la ecuación del momento, para trabajar solamente con las cuatro incógnitas $[n, c, v, n]$. Para ello, debemos tener en cuenta la descomposición de Helmholtz-Hodge y del proyector de Leray. Dado un campo vectorial diferenciable $w : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, la descomposición Helmholtz-Hodge establece que existe una única descomposición de w como $w = w_1 + w_2$, donde w_1 es un campo de divergencia nula y $w_2 = \nabla \psi$ para alguna función $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ (ver por ejemplo [13]). Como la descomposición es única, se puede definir el operador proyector de Leray como $\mathbb{P}w = w - \nabla \psi$. Dado que $\nabla \cdot (w - \nabla \psi) = 0$, entonces $\nabla \cdot w = \Delta \psi$ y así, aplicando el laplaciano inverso, se tiene que

$$\mathbb{P}w = w - \nabla(\Delta^{-1}(\nabla \cdot w)). \quad (3.1)$$

Si aplicamos formalmente la transformada de Fourier en (3.1), obtenemos la expresión

$$(\mathbb{P}w)^\wedge(\xi) = \hat{w} - \frac{\xi}{|\xi|^2}(\xi \hat{w}(\xi)),$$

cuyo símbolo es dado por $(\hat{\mathbb{P}}(\xi))_{i,j} = \delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2}$, $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Aplicando el operador proyección $\mathbb{P}$ a la ecuación (1.10)₄, obtenemos el siguiente problema parabólico en $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \chi_2 \nabla \cdot (n \nabla v) + \varsigma n - \mu n^2, \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c + \kappa_1 (\alpha_1 n - \beta_1 c) - \kappa_2 \gamma c n, \\ v_t + u \cdot \nabla v = \Delta v + \alpha_2 n - \beta_2 v, \\ u_t + \mathbb{P}(u \cdot \nabla) u = \Delta u - \mathbb{P}(n \nabla \phi), \end{cases} \quad (3.2)$$

Como es usual, usamos el principio de Duhamel para introducir la formulación integral asociada con el sistema (3.2):

$$\begin{cases} n(x, t) = e^{\varsigma t} e^{t\Delta} n_0 - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla n + \mu n^2)(\tau) d\tau \\ \quad - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (\chi_1 n \nabla c - \chi_2 n \nabla v))(\tau) d\tau, \\ c(x, t) = e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta} c_0 - \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla c - \kappa_1 \alpha_1 n + \kappa_2 \gamma c n)(\tau) d\tau, \\ v(x, t) = e^{-\beta_2 t} e^{t\Delta} v_0 - \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla v - \alpha_2 n)(\tau) d\tau, \\ u(x, t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta} \mathbb{P}(\nabla \cdot (u \otimes u) + n \nabla \phi)(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.3)$$

donde $e^{t\Delta}$ denota el semigrupo del calor definido por $(e^{t\Delta} g) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x - y, t) g(y) dy$, con $G(x, t) = (4\pi t)^{-3/2} \exp(-|x|^2/4t)$. Observemos que el vector

$$[n, c, v, u] = [e^{\varsigma t} e^{t\Delta} n_0, e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta} c_0, e^{-\beta_2 t} e^{t\Delta} v_0, e^{t\Delta} u_0], \quad (3.4)$$

corresponde a la solución de la parte lineal de (3.2), esto es, el vector (3.4) es la solución del sistema de ecuaciones

$$n_t = \Delta n + \varsigma n, \quad c_t = \Delta c - \kappa_1 \beta_1 c, \quad v_t = \Delta v - \beta_2 v, \quad u_t = \Delta u,$$

con datos iniciales $[n_0, c_0, v_0, u_0]$.

3.1.2. Formulación integral en dominios acotados

Antes de presentar la formulación integral para el modelo, introduciremos algunos espacios de funciones. Denotamos por $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones vectoriales $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ de valor real, de clase C^∞ con soporte compacto en Ω , tales que $\operatorname{div} \varphi = 0$. La clausura de $C_{0,\sigma}^\infty$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ del espacio L^p , $1 < p < \infty$, es denotada por $L_\sigma^p(\Omega)^N$. Por simplicidad en la notación, no distinguiremos entre funciones vectoriales y escalares; por tanto, notaremos $L_\sigma^p(\Omega)^N$ simplemente por $L_\sigma^p(\Omega)$ y así en adelante. Recordemos la descomposición de Helmholtz-Hodge la cual establece que $L^p(\Omega) = L_\sigma^p(\Omega) \oplus G^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, donde $G^p(\Omega) = \{\nabla f \in L^p(\Omega) : f \in L_{loc}^p(\overline{\Omega})\}$ (ver

[48]). Sea $\mathbb{P}_p$ el operador proyección de $L^p(\Omega)$ sobre $L_\sigma^p(\Omega)$. El operador de Stokes A_p en L_σ^p es definido por $A_p = -\mathbb{P}_p \Delta$ con dominio $D(A_p) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \cap L_\sigma^p$. Recordemos que $-A_p$ genera un semigrupo analítico uniformemente acotado $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ en L_σ^p (ver [49]).

También consideraremos el semigrupo de calor con condición de frontera tipo Neumann. El operador Δ_p con dominio $D(\Delta_p) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0\}$ también genera un semigrupo analítico uniformemente acotado $\{e^{t\Delta_p}\}_{t \geq 0}$ en L^p (ver [83, Capítulo 3]).

Aplicando el operador proyección $\mathbb{P}$ a la ecuación (1.10)₄, podemos tratar el problema (1.10) como el siguiente problema de tipo parabólico en $\Omega \times (0, T)$:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta_p n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c) + \xi \nabla \cdot (n \nabla v) + \varsigma n - \mu n^2, \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta_p c + \kappa_1(\alpha_1 n - \beta_1 c) - \kappa_2 \gamma c n, \\ v_t + u \cdot \nabla v = \Delta_p v + \alpha_2 n - \beta_2 v, \\ u_t + \mathbb{P}(u \cdot \nabla) u = -A_p u - \mathbb{P}(n \nabla \phi). \end{cases} \quad (3.5)$$

Como es usual, introducimos la formulación integral asociada al sistema (3.5)-(1.11), vía el principio de Duhamel

$$\begin{cases} n(x, t) = e^{\varsigma t} e^{t\Delta_p} n_0 - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta_p} (u \cdot \nabla n + \mu n^2)(\tau) d\tau \\ \quad - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta_p} (\nabla \cdot (\chi n \nabla c - \xi n \nabla v))(\tau) d\tau, \\ c(x, t) = e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta_p} c_0 - \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta_p} (u \cdot \nabla c - \kappa_1 \alpha_1 n + \kappa_2 \gamma c n)(\tau) d\tau, \\ v(x, t) = e^{-\beta_2 t} e^{t\Delta_p} v_0 - \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta_p} (u \cdot \nabla v - \alpha_2 n)(\tau) d\tau, \\ u(x, t) = e^{-tA_p} u_0 - \int_0^t e^{-(t-\tau)A_p} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u + n \nabla \phi)(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

Vale la pena mencionar que el vector formado por los primeros términos del lado derecho en cada ecuación de (3.6), está asociado a la solución de la parte lineal del sistema (3.5)-(1.11), es decir, $[n, c, v, u] = [e^{\varsigma t} e^{t\Delta_p} n_0, e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta_p} c_0, e^{-\beta_2 t} e^{t\Delta_p} v_0, e^{-tA_p} u_0]$, es la solución de

$$n_t = \Delta_p n + \varsigma n, \quad c_t = \Delta_p c - \kappa_1 \beta_1 c, \quad v_t = \Delta_p v - \beta_2 v, \quad u_t = -A_p u,$$

con los datos iniciales $[n_0, c_0, v_0, u_0]$ y las condiciones de frontera

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T).$$

3.2. Un espacio cociente

En esta sección introduciremos un espacio cociente de funciones en L^p sobre dominios acotados. Las clases de equivalencia están formadas por las funciones en el espacio L^p

que difieren en una constante. Para esto, recordemos que si M es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X , entonces el espacio cociente $X/M = \{f + M : f \in X\}$, es un espacio de Banach, dotado de la norma

$$\|f + M\|_{X/M} = \inf_{m \in M} \|f - m\|_X.$$

En este trabajo, consideramos el espacio cociente $L^p/\sim$ para $1 \leq p \leq \infty$ de todas las clases de equivalencia de funciones en $L^p(\Omega)$ cuya diferencia es una constante, esto es, si $f \in L^p(\Omega)$, la clase de equivalencia asociada a f es dada por:

$$[f] = \{g \in L^p(\Omega) : f - g \text{ es una constante}\}.$$

El uso de este espacio cociente nos permitirá superar dificultades técnicas relacionadas con la naturaleza del semigrupo del calor con condición de Neumann (ver Subsección 3.4.1), y encontrar soluciones blandas para nuestro modelo quimiotáctico.

El espacio $L^p/\sim$ es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto escalar definidos por $[f] + [g] = [f + g]$ y $a[f] = [af]$, $a \in \mathbb{R}$, respectivamente. Se tiene que, $L^p/\sim$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|[f]\|_{p/\sim} := \inf\{\|f + c\|_{L^p} : c \text{ es una constante}\}. \quad (3.7)$$

Notemos que la aplicación $c \rightarrow c + f$ es continua de $\mathbb{R}$ a L^p y que la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ es una función continua en L^p ; luego, para cada $f \in L^p$ existe $f^* \in [f]$, tal que $\|f^*\|_{L^q} = \|[f]\|_{q/\sim}$. Además, definimos el producto en $L^p/\sim$ por $[f][g] = [(f - \bar{f})(g - \bar{g})]$, donde

$$\bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx \quad \text{y} \quad \bar{g} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) dx.$$

Claramente, este producto está bien definido, esto es, la operación es independiente de los representantes de cada clase. Con el objetivo de extender la desigualdad de Hölder en $L^p/\sim$ notemos que

$$\|w - \bar{w}\|_{L^p} \leq C\|[w]\|_{p/\sim}. \quad (3.8)$$

En efecto, sea c una constante

$$\begin{aligned} \|w - \bar{w}\|_{L^p} &\leq \|w + c\|_{L^p} + \|\bar{w} + c\|_{L^p} \\ &\leq \|w + c\|_{L^p} + |\Omega|^{\frac{1}{p}-1} \|w + c\|_{L^1} \\ &\leq C\|w + c\|_{L^p} \end{aligned}$$

Como c se tomo de manera arbitraria, obtenemos (3.8). Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y $[f] \in L^p/\sim$ y $[g] \in L^q/\sim$. De la Definición (3.7), se sigue que

$[f][g] \in L^1/\sim$. Ahora, de la desigualdad de Hölder en espacios L^p , la Definición (3.7) y la desigualdad (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned} \|[f][g]\|_{1/\sim} &= \|[(f - \bar{f})(g - \bar{g})]\|_{1/\sim} \\ &= \inf\{\|(f - \bar{f})(g - \bar{g}) + c\|_{L^1} : c \text{ es una constante}\} \\ &\leq \|(f - \bar{f})(g - \bar{g})\|_{L^1} \\ &\leq \|f - \bar{f}\|_{L^p} \|g - \bar{g}\|_{L^q} \leq C\|[f]\|_{L^p/\sim} \|[g]\|_{q/\sim}. \end{aligned}$$

Ahora introduciremos espacios de funciones adecuados para estudiar el problema de valor inicial (1.10)-(1.11). Para $N < r \leq \infty$, y $T > 0$, definimos el siguiente espacio de Banach $\mathcal{X}$ de datos iniciales

$$\mathcal{X} := \left\{ [[n_0], [c_0], [v_0], u_0] \in (L^{\frac{N}{2}}/\sim) \times (L^\infty/\sim) \times (L^\infty/\sim) \times (L_\sigma^N) : \right. \\ \left. \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta_p} c_0\|_{L^r} < \infty, \quad \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta_p} v_0\|_{L^r} < \infty \right\}, \quad (3.9)$$

con la norma $\|[[n_0], [c_0], [v_0], u_0]\|_{\mathcal{X}} := \|[n_0]\|_{\mathcal{X}_1} + \|[c_0]\|_{\mathcal{X}_2} + \|[v_0]\|_{\mathcal{X}_3} + \|u_0\|_{\mathcal{X}_4}$, donde

$$\begin{cases} \|[n_0]\|_{\mathcal{X}_1} := \|[n_0]\|_{\frac{N}{2}/\sim}, & \|[c_0]\|_{\mathcal{X}_2} := \|[c_0]\|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta_p} c_0\|_{L^r}, \\ \|[v_0]\|_{\mathcal{X}_3} := \|[v_0]\|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta_p} v_0\|_{L^r}, & \|u_0\|_{\mathcal{X}_4} := \|u_0\|_{L^N}. \end{cases}$$

El espacio $\mathcal{X}$ es definido teniendo en cuenta las estimativas de decaimiento del semigrupo del calor con condición de Neumann en el espacio $L^p(\Omega)$ y del semigrupo de Stokes en el espacio $L_\sigma^p(\Omega)$, las cuales serán presentada en la Sección 3.4.

3.3. Espacios solución

Los espacios aquí utilizados están inspirados en los usados para el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes a través de la teoría de semigrupos y técnicas de punto fijo (ver por ejemplo, Kato [64]). Sobre estos espacios podremos obtener la existencia de una única solución blanda global, bajo ciertas consideraciones de pequeñez sobre los datos iniciales. Para $N < p, r \leq \infty$, $N/2 < q \leq \infty$, consideramos el espacio de Banach $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{p,r,q}$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} := \Big\{ & [[n], [c], [v], u] : t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N} - \frac{1}{q})} n \in BC([0, T]; L^q), \quad c \in L^\infty([0, T]; L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, T]; L^r), \quad v \in L^\infty([0, T]; L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, T]; L^r), \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N} - \frac{1}{p})} u \in BC([0, T]; L_\sigma^p) \Big\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

dotado con la norma

$$\|[[n], [c], [v], u]\|_{\mathcal{Y}} := \|[n]\|_{\mathcal{Y}_1} + \|[c]\|_{\mathcal{Y}_2} + \|[v]\|_{\mathcal{Y}_3} + \|u\|_{\mathcal{Y}_4},$$

donde

$$\begin{cases} \| [n] \|_{\mathcal{Y}_1} := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \| [n(t)] \|_{q/\sim}, \\ \| [c] \|_{\mathcal{Y}_2} := \sup_{0 < t < T} \| [c(t)] \|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \| \nabla c(t) \|_{L^r}, \\ \| [v] \|_{\mathcal{Y}_3} := \sup_{0 < t < T} \| [v(t)] \|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \| \nabla v(t) \|_{L^r}, \\ \| u \|_{\mathcal{Y}_4} := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \| u(t) \|_{L^p}. \end{cases}$$

El espacio $\mathcal{Y}$ es un espacio de existencia global en el sentido de que T es arbitrariamente grande. Como veremos, la presencia del término ςn en (1.10) con $\varsigma > 0$ impide considerar $T = \infty$. Sin embargo, si en (1.10) consideramos el termino $-\varsigma n$ en lugar de $\varsigma n - \mu n^2$, podemos establecer un resultado de existencia globales $[0, \infty)$. Para ello consideremos el siguiente espacio de Banach $\mathcal{Y}^{\text{exp}} = \mathcal{Y}_{p,r,q}^{\text{exp}}$ dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{\text{exp}} := \Big\{ & [[n], [c], [v], u] : e^{\tilde{\varsigma} t} t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} n \in BC([0, \infty); L^q), \ e^{\min\{\kappa_1 \beta_1, \tilde{\varsigma}\} t} c \in L^\infty([0, \infty); L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, \infty); L^r), \ e^{\min\{\beta_2, \tilde{\varsigma}\} t} v \in L^\infty([0, \infty); L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, \infty); L^r), \ e^{\min\{\rho_2, \tilde{\varsigma}\} t} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC([0, \infty); L_\sigma^p) \Big\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

provisto con la norma

$$\| [[n], [c], [v], u] \|_{\mathcal{Y}^{\text{exp}}} := \| [n] \|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} + \| [c] \|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} + \| [v] \|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} + \| u \|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}},$$

donde

$$\begin{cases} \| [n] \|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} := \sup_{0 < t < \infty} e^{\tilde{\varsigma} t} t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \| [n(t)] \|_{q/\sim}, \\ \| [c] \|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} := \sup_{0 < t < \infty} e^{\min\{\kappa_1 \beta_1, \tilde{\varsigma}\} t} \| [c(t)] \|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \| \nabla c(t) \|_{L^r}, \\ \| [v] \|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} := \sup_{0 < t < \infty} e^{\min\{\beta_2, \tilde{\varsigma}\} t} \| [v(t)] \|_{\infty/\sim} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \| \nabla v(t) \|_{L^r}, \\ \| u \|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} := \sup_{0 < t < \infty} e^{\min\{\rho_2, \tilde{\varsigma}\} t} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \| u(t) \|_{L^p}. \end{cases}$$

De ahora en adelante, abusando de la notación para las funciones densidad n y concentraciones c, v , denotaremos de la misma manera funciones en L^p y sus clases de equivalencia $L^p / \sim$. Por ejemplo, escribimos $[n, c, v, u] \in \mathcal{Y}$ en lugar de $[[n], [c], [v], u] \in \mathcal{Y}$. Con esta convección, estamos listos para establecer la noción de solución blanda.

Definición 3.3.1. Sea $[n_0, c_0, v_0, u_0] \in \mathcal{X}$. Una solución blanda para el problema de valor inicial (1.10)-(1.11) es un vector $[n, c, v, u] \in \mathcal{Y}$ satisfaciendo el sistema integral (3.6).

Notemos que las tres primeras ecuaciones integrales en (3.6) deben ser entendidas en clases de equivalencia. Adicionalmente, en la cuarta ecuación integral de (3.6), n puede ser

tomado como cualquier representante de $[n]$, por lo tanto, el término $\int_0^t e^{-(t-\tau)A_p} n \nabla \phi d\tau$ es invariante en el conjunto $\{\tilde{n}; [\tilde{n}] = [n]\}$. Adicionalmente, con el objetivo de simplificar la notación de ahora en adelante, siempre y cuando no se presente ambigüedad o confusión para el lector, escribiremos Δ en vez de Δ_p y A en lugar de A_p .

3.4. Estimativas lineales

En esta sección recopilaremos algunas estimativas lineales, primero para el semigrupo de calor sobre $L^p(\mathbb{R}^N)$ y para el semigrupo de Stokes sobre $L_\sigma^p(\Omega)$; luego, presentaremos nuevas estimativas para el semigrupo del calor con condición de frontera tipo Neumann sobre $L^p(\Omega)$. Iniciaremos con las estimativas conocidas L^p - L^q para el semigrupo del calor $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Recordemos que $e^{t\Delta}f(x)$ es dado por la convolución $g(t, x) * f(x)$, donde $g(t, x) = \exp(-4t\pi^2|\xi|^2)^\vee(x)$; así, las propiedades de homogeneidad de $g(t, x)$ dadas por $g(t, x) = t^{-\frac{N}{2}}g(1, xt^{-\frac{1}{2}})$ y $\nabla^k g(t, x) = t^{-\frac{N+k}{2}}\nabla^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, permiten obtener la siguiente estimativa de decaimiento (ver por ejemplo [83]).

Lema 3.4.1. *Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo del calor en $L^p(\mathbb{R}^N)$, dado $k \geq 0$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, existe una constante $C > 0$, tal que*

$$\|\nabla^k e^{t\Delta}f\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{k}{2}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (3.12)$$

Ahora, consideremos Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ y el operador de Stokes A_p , con condición de frontera tipo Dirichlet sobre los espacios $L_\sigma^p(\Omega)$. Yoshikazu GIGA [49] demostro que A_p genera un semigrupo analítico $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$. Es conocido que $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ cumple las siguientes estimativas (ver por ejemplo [23]).

Lema 3.4.2. *Sea $\{e^{-tA_p}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo Stokes en $L_\sigma^p(\Omega)$ y $\rho_2 \in (0, \nu_2)$, donde $\nu_2 = \inf \operatorname{Re} \sigma(A_p) > 0$. Entonces:*

(i) *Para $1 < q \leq p < \infty$, existe $C_4 = C_4(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$\|e^{tA_p}w\|_{L^p} \leq C_4 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-\rho_2 t} \|w\|_{L^q},$$

para todo $t > 0$ y $w \in L_\sigma^q(\Omega)$.

(ii) *Para $1 < q \leq p < \infty$, existe $C_5 = C_5(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$\|\nabla e^{tA_p}w\|_{L^p} \leq C_5 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_2 t} \|w\|_{L^q},$$

para todo $t > 0$ y $w \in L_\sigma^q(\Omega)$.

(iii) *Para $1 < q \leq p < \infty$, existe $C_6 = C_6(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$\|e^{tA_p} \nabla \cdot w\|_{L^p} \leq C_6 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_2 t} \|w\|_{L^q},$$

para todo $t > 0$ y $w \in (L_\sigma^q(\Omega))^N$.

3.4.1. Nuevas estimativas lineales

Como recordamos anteriormente, propiedades de decaimiento en el tiempo para el semigrupo del calor en $\mathbb{R}^N$ son bien conocidas. Sin embargo, en el caso del semigrupo de calor con condición de frontera tipo Neumann, hasta dónde sabemos, no existe una referencia que incluya todas las estimativas necesarias para nuestro estudio; entonces, en esta subsección desarrollaremos nuestras propias estimativas, las cuales son ligeramente más finas que las usadas en [23, 120] y constituyen uno de los aportes originales de esta investigación.

Se sabe que si Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, la función de Green $G(x, t; \xi, \tau)$ asociada a la ecuación de calor con condición de frontera tipo Neumann puede expresarse por medio de la expansión en autofunciones [106]. Considere el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta \Psi &= \lambda \Psi \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} &= 0 \text{ on } \partial \Omega. \end{cases}$$

Los autovalores asociados a este problema son no negativos; de hecho, el cero es el autovalor que corresponde a la autofunción constante. Denotemos por $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ la sucesión creciente de autovalores y por $\{\Psi_i\}_{i=0}^{\infty}$ a la sucesión de autofunciones ortonormales. Entonces tenemos que

$$G(x, t; y, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i(x) \Psi_i(y) e^{-\lambda_i(t-\tau)}.$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación de calor con condición de no flujo en la frontera y dato inicial w puede ser expresada como

$$u(x, t) = \langle w, \Psi_0 \rangle \Psi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \langle w, \Psi_i \rangle \Psi_i e^{-\lambda_i t}. \quad (3.13)$$

En particular, si $\int_{\Omega} w = 0$, el primer término del lado derecho de (3.13) se anula.

Lema 3.4.3. *Sea $1 \leq q \leq p \leq \infty$ y ρ_1 el primer autovalor positivo asociado al operador $-\Delta$ con condición de Neumann. Existe $C_0 = C_0(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$\left\| \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) w(y) dy \right\|_{L^p} \leq C_0 (t - \tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1(t-\tau)} \|w\|_{L^q},$$

para todo $0 \leq \tau < t$ y $w \in L^q(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} w = 0$.

Demostración. Para empezar, traigamos a cuenta la siguiente estimativa puntual (ver [87, Teorema 2.2])

$$G(x, t; y, \tau) \leq \frac{(t - \tau)^{-\frac{N}{2}}}{2^N \pi^{\frac{N}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}, \quad \forall t > \tau, \quad x, y \in \Omega. \quad (3.14)$$

Sea $1 \leq l \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{l} + \frac{1}{q} - 1$. Usando (3.14) y la desigualdad de Young, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Omega} G(x, t; y, \tau) w(y) dy \right\|_{L^p} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}^N} (t - \tau)^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}} |\mathbf{1}_{\Omega}(y) w(y)| dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq e^{-\rho_1(t-\tau)} \left\| (t - \tau)^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4(t-\tau)}} \right\|_{L^l(\mathbb{R}^N)} \left\| \mathbf{1}_{\Omega} w \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
&= C_0 (t - \tau)^{-\frac{N}{2} + \frac{N}{2l}} e^{-\rho_1(t-\tau)} \|w\|_{L^q} \\
&= C_0 (t - \tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1(t-\tau)} \|w\|_{L^q}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

□

Observación 3.4.4. Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo de calor con condición de Neumann y $1 \leq q \leq p \leq \infty$. En la notación de semigrupos, $e^{t\Delta} w = \int_{\Omega} G(x, t; y, 0) w(y) dy$; por lo tanto, el Lema 3.4.3 implica que

$$\|e^{t\Delta} w\|_{L^p} \leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}, \tag{3.16}$$

para todo $t > 0$ y $w \in L^q(\Omega)$ tal que $\int_{\Omega} w = 0$.

Lema 3.4.5. Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo del calor con condición de Neumann en Ω y ρ_1 el primer autovalor positivo asociado al operador $-\Delta$ con condición de Neumann. Entonces, existen constantes positivas C_1 , C_2 y C_3 tales que:

(i) Para $1 \leq p \leq \infty$ se tiene

$$\|\nabla e^{t\Delta} w\|_{L^p} \leq C_1 t^{-\frac{1}{2}} \|w\|_{L^p}, \tag{3.17}$$

para todo $t > 0$ y $w \in L^p(\Omega)$.

(ii) Para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ se tiene

$$\|\nabla e^{t\Delta} w\|_{L^p} \leq C_2 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) - \frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}, \tag{3.18}$$

para todo $t > 0$ y $w \in L^q(\Omega)$.

(iii) Para $1 < q \leq p < \infty$ o $1 < q < p \leq \infty$ se tiene

$$\|e^{t\Delta} \nabla \cdot w\|_{L^p} \leq C_3 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) - \frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}, \tag{3.19}$$

para todo $t > 0$ y $w \in (L^q(\Omega))^N$.

Demostración. (i) Sea $L = -\Delta$ con $D(L) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. Entonces, para $1 \leq p \leq \infty$ y $\omega \in (0, \pi/2)$, el operador $(\lambda + L)^{-1}$ es acotado en L^p para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ con $|\arg \lambda| \leq \pi - \omega$, y las siguientes estimativas se tienen (ver [8, 83]):

$$\|(\lambda + L)^{-1}u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p}/|\lambda| \quad \text{y} \quad \|\nabla^2(\lambda + L)^{-1}u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p}, \quad (3.20)$$

para todo $u \in L^p(\Omega)$. Por interpolación y (3.20), obtenemos

$$\|\nabla(\lambda + L)^{-1}u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p}/|\lambda|^{1/2}, \quad (3.21)$$

para todo $u \in L^p(\Omega)$. Con el fin de obtener la estimativa (3.17), calculamos el gradiente de la integral de Dunford como sigue

$$\nabla e^{-tL}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \nabla e^{\lambda t}(\lambda + L)^{-1}w, \quad (3.22)$$

donde el camino $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_{\pm}$, con $\Gamma_{\pm} : |\lambda|e^{\pm i\varphi}, \frac{1}{t} \leq |\lambda|$, y $\Gamma_0 : (\frac{1}{t})e^{i\arg \lambda}, -\varphi \leq \arg \lambda \leq \varphi$. Ahora, usando (3.21), llegamos a

$$\begin{aligned} \|\nabla e^{-tL}w\|_{L^p} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \nabla e^{\lambda t}(\lambda + L)^{-1}w \right\|_{L^p} \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t}|\lambda|^{-1/2}\|w\|_{L^p} \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_+} e^{\lambda t}|\lambda|^{-1/2}\|w\|_{L^p} + \int_{\Gamma_0} e^{\lambda t}|\lambda|^{-1/2}\|w\|_{L^p} + \int_{\Gamma_-} e^{\lambda t}|\lambda|^{-1/2}\|w\|_{L^p} \right) \\ &:= \frac{C}{2\pi} (J_1 + J_2 + J_3). \end{aligned}$$

Podemos acotar las integrales J_1 , J_2 y J_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq C \int_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{\lambda t \cos \varphi} |\lambda|^{-1/2} \|w\|_{L^p} d\lambda \leq C \int_1^{\infty} e^{-s} t^{-1/2} s^{-1/2} \|w\|_{L^p} ds \leq C t^{-1/2} \|w\|_{L^p}, \\ J_2 &\leq C \int_{-\varphi}^{\varphi} e^{\cos \varphi} t^{-1/2} \|w\|_{L^p} d\varphi \leq C t^{-1/2} \|w\|_{L^p}. \end{aligned}$$

La integral J_3 se estima de manera similar que J_1 ; de este modo obtenemos que

$$\|\nabla e^{-tL}w\|_{L^p} \leq C_1 t^{-1/2} \|w\|_{L^p}.$$

(ii) Escribimos $\bar{w} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w$ y así $\int_{\Omega} (w - \bar{w}) = 0$. Entonces, de (3.16) y (3.17) se sigue que

$$\begin{aligned} \|\nabla e^{t\Delta}w\|_{L^p} &= \left\| \nabla e^{\frac{t}{2}\Delta} e^{\frac{t}{2}\Delta} (w - \bar{w}) \right\|_{L^p} \leq C_1 t^{-\frac{1}{2}} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} (w - \bar{w})\|_{L^p} \\ &\leq C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|(w - \bar{w})\|_{L^q} \\ &\leq C_2 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|w\|_{L^q}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

(iii) Primero consideraremos el caso $1 < q \leq p < \infty$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Recordando que $e^{t\Delta}$ es autoadjunto en L^2 , integrando por partes y usando (3.18), obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} e^{t\Delta} \nabla \cdot w \varphi \right| &= \left| - \int_{\Omega} w \cdot \nabla e^{t\Delta} \varphi \right| \\ &\leq \|w\|_{L^q} \|\nabla e^{t\Delta} \varphi\|_{L^{q'}} \\ &\leq C_3 \|w\|_{L^q} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'}) - \frac{1}{2}} e^{-\rho_1 t} \|\varphi\|_{L^{p'}}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Dado que $\frac{1}{p'} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, podemos completar la primera parte de la prueba tomando el supremo sobre todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, tal que $\|\varphi\|_{p'} \leq 1$. Para el caso $1 < q < p = \infty$, asuma que $w \in (C_0^\infty(\Omega))^N$. Entonces $\int_{\Omega} e^{\frac{t}{2}\Delta} \nabla \cdot w = \int_{\Omega} \nabla \cdot w = 0$. Así, de (3.16) y la primera parte, podemos estimar

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta} \nabla \cdot w\|_{L^\infty} &= \left\| e^{\frac{t}{2}\Delta} (e^{\frac{t}{2}\Delta} \nabla \cdot w) \right\|_{L^\infty} \\ &\leq C_0 t^{-\frac{n}{2q}} e^{-\rho_1 t} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} \nabla \cdot w\|_{L^q} \\ &\leq C_3 t^{-\frac{n}{2q}} t^{-\frac{1}{2}} e^{-2\rho_1 t} \|w\|_{L^q}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Finalmente, por (3.24) y un argumento de densidad, obtenemos (3.19). $\square$

Notemos que para $w \in L^p(\Omega)$, se tiene que $e^{t\Delta}[w] = [e^{t\Delta}w]$. En efecto, podemos extender de manera natural $e^{t\Delta}$ a $L^p/\sim$ haciendo $e^{t\Delta}[w] = [e^{t\Delta}w]$ para $w \in L^p(\Omega)$. El siguiente lema establece estimativas de decaimiento para $e^{t\Delta}$ de $L^p/\sim$ a $L^q/\sim$.

Lema 3.4.6. *Sea $\{e^{t\Delta}\}_{t \geq 0}$ el semigrupo del calor con condición de Neumann en Ω . Entonces para $1 \leq q \leq p \leq \infty$ existe $C_0 = C_0(\Omega, p, q) > 0$ tal que*

$$\|e^{t\Delta}[w]\|_{p/\sim} \leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|[w]\|_{q/\sim}, \quad (3.25)$$

para toda $[w] \in L^q/\sim$.

Demostración. Para cada $w \in L^q(\Omega)$, escribimos $\bar{w} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} w$. Entonces tenemos que $w - \bar{w} \in [w]$ y $\int_{\Omega} (w - \bar{w}) = 0$. Así, de (3.7) y (3.16) tenemos

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}[w]\|_{p/\sim} &= \inf\{\|e^{t\Delta}(w + c)\|_{L^p} : c \text{ es constante}\} \\ &\leq \|e^{t\Delta}(w - \bar{w})\|_{L^p} \\ &\leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|w - \bar{w}\|_{L^q} \\ &\leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} (\|w + c\|_{L^q} + \|\bar{w} + c\|_{L^q}) \\ &\leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} (\|w + c\|_{L^q} + |\Omega|^{\frac{1}{q}-1} \|\bar{w} + c\|_{L^1}) \\ &\leq C_7 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \|w + c\|_{L^q}. \end{aligned}$$

Entonces, tomando el ínfimo sobre el conjunto de las constantes, obtenemos

$$\|e^{t\Delta}[w]\|_{p/\sim} \leq C_0 t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} e^{-\rho_1 t} \| [w] \|_{q/\sim}.$$

□

Observación 3.4.7. *La razón de considerar la estimativa (3.25), se debe a que la estimativa (3.16) sólo es válida para funciones con media igual cero; esta condición imposibilita su uso en la formulación integral (3.6), ya que en el modelo de la quimiotaxis, la función densidad es positiva y su media es distinta de cero; en consecuencia no podríamos estimar términos de (3.6), como por ejemplo, $\int_{\Omega} e^{t\Delta} n^2 dx$.*

3.5. Resultados principales

Ahora enunciaremos los principales resultados de este capítulo, los cuales constituyen un aporte original del presente trabajo, y hacen parte del preprint [36].

Teorema 3.5.1. *Asumiendo*

$$(i) \ N = 3, \ N \leq s \leq \infty, \ \frac{N}{2} < q < N, \ N < p < \frac{Nqs}{Ns+Nq-2sq} \text{ y } N < r < \frac{Nq}{N-q},$$

o

$$(ii) \ N = 2, \ N < s < \infty, \ \frac{s}{s-1} \leq q < N, \ \frac{q}{q-1} \leq p < \infty \text{ y } N < r < \frac{Nq}{N-q},$$

o

$$(iii) \ N = 2, \ s = \infty, \ \frac{N}{2} < q < N, \ \frac{q}{q-1} \leq p < \infty \text{ y } N < r < \frac{Nq}{N-q}.$$

Sea $T > 0$ arbitrario, $[n_0, c_0, v_0, u_0] \in \mathcal{X}$ y $\nabla \phi$ tal que $t^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2s}} \nabla \phi \in BC([0, T]; L^s)$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\|[n_0, c_0, v_0, u_0]\|_{\mathcal{X}} < \delta$, entonces el problema (1.10)-(1.11) tiene una solución blanda $[n, c, v, u] \in \mathcal{Y}$ en el sentido de la Definición 3.3.1. Dicha solución blanda es única en una bola cerrada en $\mathcal{Y}$.

Observación 3.5.2. *La clase de funciones donde encontramos la solución blanda es determinada por los exponentes p , q y r . En particular, los rangos para p y r son simultáneamente determinados en términos de q , lo cual sugiere que la densidad de los organismos tiene un papel dominante en relación con las señales y el fluido (ver Observación 3.5.10).*

Observación 3.5.3. *El Teorema 3.5.1 continua siendo válido en el caso límite $\mu = 0$, de este modo, el Teorema 3.5.1 es el primer resultado en dominios acotados de $\mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3$) para un modelo quimiotáctico en fluidos, con un término de la forma $n - c$ en la ecuación de la concentración química. Adicionalmente los rangos de exponentes p , q y r pueden ser tomados como en el Teorema 3.5.6.*

Observación 3.5.4. *Notese que la solución blanda $[n, c, v, u] \in \mathcal{Y}$ para (1.10)-(1.11) obtenida en el Teorema 3.5.1 es global en el sentido que $T > 0$ puede ser tomado arbitrariamente grande. Un modelo interesante relacionado con (1.10) surge cuando asumimos $\varsigma = 0$. Este modelo describe varios comportamientos biológicos, por ejemplo, el desove de corales (ver [42]); en este caso, el termino $-\mu n^2$ describe una reacción (fertilización). Si $\varsigma = 0$, la solución $[n, c, v, u]$ está definida en $[0, \infty)$.*

Observación 3.5.5. *Note que si $\rho_1 \geq \varsigma$, entonces, con menores modificaciones, la solución dada en el Teorema 3.5.1 está definida en $[0, \infty)$; además, la solución tiene un decaimiento exponencial. Para obtener este resultado debemos usar las estimativas con decaimiento exponencial de los Lemas 3.4.5, 3.4.2 y 3.4.6, junto con la ideas de la prueba del Teorema 3.5.6 abajo. En efecto, en este caso tenemos que $[n], [c], [v], u$ decaen exponencialmente a cero lo cual significa que n, c, v convergen hacia una constante y u converge a cero.*

Una situación interesante, no solo desde el punto de vista matemático, sino también en el contexto bio-físico (por ejemplo, en procesos de fertilización [68]), ocurre cuando consideramos que las células no nacen sino que simplemente mueren a una tasa constante. En este caso tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.5.6. *Consideremos en el modelo (1.10) el término $-\zeta n$ en el lugar de $\varsigma n - \mu n^2$. Asuma que $[n_0, c_0, v_0, u_0] \in \mathcal{X}$ y $\nabla \phi \in L^\infty([0, T]; L^N)$. Si $N = 3$ considere que los exponentes p, q y r satisfacen alguna de las condiciones (i), (ii) o (iii):*

- (i) $\frac{N}{2} < q < N, \quad N < p < \frac{Nq}{N-q}, \quad N < r < \frac{Nq}{N-q},$
- (ii) $q = N, \quad N < p < \infty, \quad N < r < \infty,$
- (iii) $N < q < 2N, \quad N < p < \frac{Nq}{q-N}, \quad q \leq r < \frac{Nq}{q-N}.$

En el caso $N = 2$, asuma que los exponentes p, q y r satisfacen alguna de las condiciones (ii) o (iii) arriba. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que el problema (1.10)-(1.11) tiene una solución blanda global $[n, c, v, u] \in \mathcal{Y}^{exp}$ desde que $\|[n_0, c_0, v_0, u_0]\|_{\mathcal{X}} < \delta$. Esta solución es única en una bola cerrada en $\mathcal{Y}^{exp}$.

Observación 3.5.7. *Con ligeras modificaciones en la prueba y rango de los exponentes p, q y r , el Teorema 3.5.6 continua siendo válido si consideramos $\nabla \phi$ en la clase $t^{\frac{1}{2} - \frac{N}{2s}} \nabla \phi \in BC([0, T]; L^s)$, para $s \geq N$.*

Observación 3.5.8. *Los Teoremas 3.5.1 y 3.5.6 continúan siendo válidos si consideramos funciones de sensibilidad generales, remplazando los términos $\chi \nabla \cdot (n \nabla c)$ y $\xi \nabla \cdot (n \nabla v)$ en (1.10) por $\nabla \cdot (n \mathcal{S}(x, n, c) \nabla c)$ y $\nabla \cdot (n \mathcal{R}(x, n, c) \nabla v)$, respectivamente, con $\mathcal{S}(x, n, c)$ y $\mathcal{R}(x, n, c)$ funciones acotadas con valores en $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, como se consideró en [23, 59, 78, 79, 107, 118, 124, 131] y algunas referencias citadas en ellos. En este caso, estimamos*

$$\left\| \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (n \mathcal{S}(x, n, c) \nabla c) - \nabla \cdot (n \mathcal{R}(x, n, c) \nabla v))(\tau) d\tau \right\|_q$$

por

$$Ce^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_q (\|\mathcal{S}\|_\infty + \|\mathcal{R}\|_\infty) (\|\nabla c(\tau)\|_r + \|\nabla v(\tau)\|_r) d\tau,$$

y así sucesivamente (ver desigualdades (3.28), (3.49) a continuación).

Observación 3.5.9. Incluso cuando los datos iniciales son singulares, las soluciones obtenidas en nuestros teoremas y comentarios se suavizan instantáneamente (es decir, son suaves para $t > 0$), debido a la estructura parabólica del sistema. De hecho, usando los Lemas 3.4.5, 3.4.2 y 3.4.6, se puede adaptar la teoría de regularización parabólica en el marco de espacios L^p y demostrar que las soluciones pertenecen a $C^\infty(\Omega \times (0, \infty))$ (para más detalles, ver, por ejemplo, [44, 65]).

3.5.1. Existencia de solución en $[0, T]$

Demostración del Teorema 3.5.1. Primero estimaremos cada término en el sistema integral (3.6) en la norma del espacio de funciones $\mathcal{Y}$.

Estimativas para n

Del Lema 3.4.6 obtenemos

$$\|e^{\varsigma t} e^{t\Delta} n_0\|_{L^q} \leq Ce^{\varsigma t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n_0\|_{L^{\frac{N}{2}}}. \quad (3.26)$$

Por otra parte, de las condiciones sobre p y q , se tiene que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, $\frac{N}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{2} > 0$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0$, $1 - \frac{N}{2q} > 0$ y $\frac{N}{q} - 1 > 0$. Así, se sigue de los Lemas 3.4.5 y 3.4.6 que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla n + \mu n^2)(\tau) d\tau \right\|_{L^q} \\ & \leq \int_0^t \|e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (nu) + \mu n^2)(\tau)\|_{L^q} d\tau \\ & \leq Ce^{\varsigma T} \left(\int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (nu)\|_{L^q} d\tau + \int_0^t \|e^{(t-\tau)\Delta} \mu n^2\|_{L^q} d\tau \right) \\ & \leq Ce^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} \|u(\tau)\|_{L^p} d\tau \\ & \quad + Ce^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}} \|n(\tau)\|_{L^q} \|n(\tau)\|_{L^q} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C e^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}+\frac{N}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{L^p} d\tau \\
&\quad + C e^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}} \tau^{\frac{N}{q}-2} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} d\tau \\
&\leq C e^{\varsigma T} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \\
&\quad \times B\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}, \frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}\right) \\
&\quad + C e^{\varsigma T} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right)^2 \times B\left(1-\frac{N}{2q}, \frac{N}{q}-1\right), \quad (3.27)
\end{aligned}$$

donde $C = C(N, p, q) > 0$ y $B(\cdot, \cdot)$ denota la función Beta. Además, ya que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2r} > 0$ y $\frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{N}) > 0$, del Lema 3.4.5 obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (\chi n \nabla c - \xi n \nabla v))(\tau) d\tau \right\|_{L^q} \\
&\leq C e^{\varsigma T} \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} (\|\nabla c(\tau)\|_{L^r} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^r}) d\tau \\
&\leq C e^{\varsigma T} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \\
&\quad \times \left(\sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c(\tau)\|_{L^r} + \sup_{0<\tau<T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla v(\tau)\|_{L^r} \right) \\
&\quad \times B\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2r}, \frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{N}\right)\right). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Usando (3.26), (3.27) y (3.28), concluimos que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} n \in BC([0, T]; L^q)$$

y

$$\|n\|_{\mathcal{Y}_1} \leq C e^{\varsigma T} (\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|n\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|c\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|v\|_{\mathcal{Y}_3}). \quad (3.29)$$

Estimativas para c

Del Lema 3.4.6, se sigue que

$$\|e^{-\kappa_1\beta_1 t} e^{t\Delta} c_0\|_{L^\infty} \leq C \|c_0\|_{L^\infty}. \quad (3.30)$$

De las hipótesis sobre p, q, r , se tiene que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0$ y $\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) > 0$. Así, podemos estimar

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-\kappa_1\beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla c - \kappa_1\alpha_1 n + \kappa_2\gamma cn) d\tau \right\|_{L^\infty} \\ & \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^p} \|c(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}} \|n(\tau)\|_{L^q} (1 + \|c(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau \\ & \leq C \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \left(\sup_{0 < \tau < T} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{1}{2} + \frac{N}{2p}\right) \\ & \quad + C \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \left(1 + \sup_{0 < \tau < T} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(1 - \frac{N}{2q}, \frac{N}{2q}\right), \end{aligned} \quad (3.31)$$

y

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \int_0^t e^{-\kappa_1\beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla c - \kappa_1\alpha_1 n + \kappa_2\gamma cn)(\tau) d\tau \right\|_{L^r} \\ & \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^p} \|\nabla c(\tau)\|_{L^r} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} (1 + \|c(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau \\ & \leq C \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \\ & \quad \times \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c(\tau)\|_{L^q} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{N}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{r})\right) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \\ & \quad + C \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \left(1 + \sup_{0 < \tau < T} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) \\ & \quad \times B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}), \frac{N}{2q}\right) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Usando (3.30), (3.31), (3.32) y teniendo en cuenta que $\sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta} c_0\|_{L^r} < \infty$, obtenemos

$$c \in L^\infty([0, T]; L^\infty) \quad \text{y} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, T]; L^r),$$

y

$$\|c\|_{\mathcal{Y}_2} \leq C (\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|c\|_{\mathcal{Y}_2} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|c\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}). \quad (3.33)$$

Estimativas para v

Procediendo como en la prueba de las estimativas para c , podemos concluir que

$$v \in L^\infty([0, T]; L^\infty) \quad \text{y} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, T]; L^r),$$

y

$$\|v\|_{\mathcal{Y}_3} \leq C (\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|v\|_{\mathcal{Y}_3} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}). \quad (3.34)$$

Estimativas para u

Vamos a probar que $t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC([0, T]; L^p)$. Para empezar, del Lema 3.4.2 llegamos a

$$\|e^{-tA} u_0\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^N}. \quad (3.35)$$

Nótese que tenemos $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} \leq 1$, $1 - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p}) > 0$ y $\frac{N}{2q} + \frac{N}{2s} - \frac{1}{2} > 0$. Así, podemos estimar

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u + n \nabla \phi)(\tau) d\tau \right\|_{L^p} \\ & \leq \int_0^t \left\| \mathbb{P} e^{-(t-\tau)A} \nabla \cdot (u \otimes u)(\tau) \right\|_{L^p} d\tau + \int_0^t \left\| \mathbb{P} e^{-(t-\tau)A} (n \nabla \phi)(\tau) \right\|_{L^p} d\tau \\ & \leq C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \|(u \otimes u)(\tau)\|_{L^{\frac{p}{2}}} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}+\frac{1}{s}-\frac{1}{p})} \|n(\tau)\|_{L^q} \|\nabla \phi(\tau)\|_{L^s} d\tau \\ & \leq C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(\tau)\|_{L^p} \right)^2 \times B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{N}{p}\right) \\ & \quad + C t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2s}} \|\nabla \phi(\tau)\|_{L^s} \right) \left(\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \\ & \quad \times B\left(1 - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p}), \frac{N}{2q} + \frac{N}{2s} - \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Recordando que en (3.36) podemos escoger un representante arbitrario de $[n(\tau)]$ (ver Definición 3.3.1), para cada $\tau \in [0, T]$, $n(\tau)$ puede ser tomado como el representante canónico $n^*(\tau)$ que satisface $\|n^*(\tau)\|_{L^q} = \|[n(\tau)]\|_{q/\sim}$. Por lo tanto,

$$\sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n^*(\tau)\|_{L^q} = \sup_{0 < \tau < T} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|[n(\tau)]\|_{q/\sim}. \quad (3.37)$$

Así pues, de (3.35), (3.36) y (3.37), se sigue que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC([0, T]; L^p)$$

y

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_4} \leq C (\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|u\|_{\mathcal{Y}_4} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}). \quad (3.38)$$

Usando (3.29), (3.33), (3.34) y (3.38), obtenemos la siguiente estimativa global para el vector $[n, c, v, u]$:

$$\begin{aligned} \|n\|_{\mathcal{Y}_1} &\leq C e^{\varsigma T} (\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|n\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|c\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|v\|_{\mathcal{Y}_3}), \\ \|c\|_{\mathcal{Y}_2} &\leq C (\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|c\|_{\mathcal{Y}_2} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1} \|c\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}), \\ \|v\|_{\mathcal{Y}_3} &\leq C (\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|v\|_{\mathcal{Y}_3} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}), \\ \|u\|_{\mathcal{Y}_4} &\leq C (\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|u\|_{\mathcal{Y}_4} \|u\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ahora, motivados por [28], construiremos un esquema de aproximaciones apropiado cuyo límite será la solución blanda requerida:

$$\left\{ \begin{aligned} n^{(1)} &= e^{\varsigma t} e^{t\Delta} n_0, \quad c^{(1)} = e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta} c_0, \quad v^{(1)} = e^{-\beta_2 t} e^{t\Delta} v_0, \quad u^{(1)} = e^{-tA} u_0, \\ n^{(k+1)} &= n^{(1)} - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u^{(k)} \cdot \nabla n^{(k)} + \mu n^{(k)} n^{(k)})(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (\chi n^{(k)} \nabla c^{(k)} - \xi n^{(k)} \nabla v^{(k)}))(\tau) d\tau, \\ c^{(k+1)} &= c^{(1)} - \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u^{(k)} \cdot \nabla c^{(k)} - \kappa_1 \alpha_1 n^{(k+1)} + \kappa_2 \gamma c^{(k)} n^{(k)})(\tau) d\tau, \\ v^{(k+1)} &= v^{(1)} - \int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u^{(k)} \cdot \nabla v^{(k)} - \alpha_2 n^{(k+1)})(\tau) d\tau, \\ u^{(k+1)} &= u^{(1)} - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbb{P}(u^{(k)} \cdot \nabla u^{(k)} + n^{(k+1)} \nabla \phi)(\tau) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (3.40)$$

Como en (3.36), en la última ecuación de (3.40) el término $n^{(k+1)}$ es en verdad el representante $(n^{(k+1)})^*$ de $[n^{(k+1)}]$. Así, aplicando las estimativas (3.39) en (3.40), obtenemos las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned}
\|n^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_1} &\leq Ce^{\varsigma T} (\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \\
&\quad + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}), \\
\|c^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_2} &\leq C (\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_1}) \\
&\leq C (\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\
&\quad + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}), \\
\|v^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_3} &\leq C (\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_1}) \\
&\leq C (\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} \\
&\quad + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}), \\
\|u^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_4} &\leq C (\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k+1)}\|_{\mathcal{Y}_1}) \\
&\leq C (\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} \\
&\quad + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1}\|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3}). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

Para datos iniciales pequeños, la sucesión $[n^{(k)}, c^{(k)}, v^{(k)}, u^{(k)}]$ es uniformemente acotada en el espacio $\mathcal{Y}$. De hecho, supongamos que

$$\|[n^{(k)}, c^{(k)}, v^{(k)}, u^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}} \leq R. \tag{3.42}$$

Entonces de (3.41), tenemos que

$$\|[n^{(k+1)}, c^{(k+1)}, v^{(k+1)}, u^{(k+1)}]\|_{\mathcal{Y}} \leq C(X_0 + 20R^2),$$

donde $X_0 = 4\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|u_0\|_{\mathcal{X}_4}$ y C es una constante positiva. Entonces, para X_0 suficientemente pequeño, podemos considerar R como la menor raíz positiva de la expresión:

$$C(X_0 + 20R^2) = R,$$

es decir,

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - 80X_0C^2}}{40C} > 0.$$

De ese modo, la sucesión $[n^{(k)}, c^{(k)}, v^{(k)}, u^{(k)}]$, $k \in \mathbb{N}$, es uniformemente acotada en $\mathcal{Y}$. Seguidamente, consideremos la diferencia

$$[n^{(k+1)} - n^{(k)}, c^{(k+1)} - c^{(k)}, v^{(k+1)} - v^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}].$$

Para la primera componente $n^{(k+1)} - n^{(k)}$, tenemos

$$\begin{aligned}
n^{(k+1)} - n^{(k)} &= \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(u^{(k-1)} \cdot \nabla n^{(k-1)} - u^{(k)} \cdot \nabla n^{(k)} \right) (\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(\mu n^{(k-1)} n^{(k-1)} - \mu n^{(k)} n^{(k)} \right) (\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(\nabla \cdot (\chi n^{(k-1)} \nabla c^{(k-1)} - \chi n^{(k)} \nabla c^{(k)}) \right) (\tau) d\tau \\
&- \int_0^t e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (\xi n^{(k-1)} \nabla v^{(k-1)} - \xi n^{(k)} \nabla v^{(k)}) (\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Usando (3.27) y (3.28), conseguimos

$$\begin{aligned}
\|n^{(k+1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} &\leq C \left(\|n^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|u^{(k-1)} - u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} \right. \\
&\quad + \|n^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} + \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \\
&\quad + \|n^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|c^{(k-1)} - c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\
&\quad \left. + \|n^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|v^{(k-1)} - v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3} + \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3} \right) \\
&\leq CR \| [n^{(k-1)} - n^{(k)}, c^{(k)} - c^{(k-1)}, v^{(k-1)} - v^{(k)}, u^{(k-1)} - u^{(k)}] \|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Para la componente $c^{(k+1)} - c^{(k)}$, tenemos

$$\begin{aligned}
c^{(k+1)} - c^{(k)} &= \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \left(u^{(k-1)} \cdot \nabla c^{(k-1)} - u^{(k)} \cdot \nabla c^{(k)} \right) (\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \kappa_2 \gamma \left(c^{(k-1)} n^{(k-1)} - c^{(k)} n^{(k)} \right) (\tau) d\tau \\
&+ \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \kappa_1 \alpha_1 \left(n^{(k+1)} - n^{(k)} \right) (\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Usando (3.31), (3.32) y (3.43), encontramos

$$\begin{aligned}
\|c^{(k+1)} - c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} &\leq C \left(\|c^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_2} \|u^{(k-1)} - u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} + \|c^{(k-1)} - c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \|u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} \right. \\
&\quad + \|n^{(k-1)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|c^{(k-1)} - c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} + \|n^{(k-1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \|c^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_2} \\
&\quad \left. + \|n^{(k+1)} - n^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_1} \right) \\
&\leq CR \| [n^{(k-1)} - n^{(k)}, c^{(k-1)} - c^{(k)}, v^{(k-1)} - v^{(k)}, u^{(k-1)} - u^{(k)}] \|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Similarmente, podemos obtener:

$$\begin{aligned}
\|v^{(k+1)} - v^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_3} &\leq CR \|[n^{(k-1)} - n^{(k)}, c^{(k-1)} - c^{(k)}, v^{(k-1)} - v^{(k)}, u^{(k-1)} - u^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}}, \\
\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_{\mathcal{Y}_4} &\leq CR \|[n^{(k-1)} - n^{(k)}, c^{(k-1)} - c^{(k)}, v^{(k-1)} - v^{(k)}, u^{(k-1)} - u^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Combinando las estimativas (3.43), (3.44) y (3.45), encontramos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
&\|[n^{(k+1)} - n^{(k)}, c^{(k+1)} - c^{(k)}, v^{(k+1)} - v^{(k)}, u^{(k+1)} - u^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}} \\
&\leq 4CR \|[n^{(k-1)} - n^{(k)}, c^{(k-1)} - c^{(k)}, v^{(k-1)} - v^{(k)}, u^{(k-1)} - u^{(k)}]\|_{\mathcal{Y}}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Reduciendo X_0 (si es necesario), podemos tomar R tal que $R < \frac{1}{4C}$, y entonces el esquema $[n^{(k)}, c^{(k)}, v^{(k)}, u^{(k)}]$, $k \in \mathbb{N}$, es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{Y}$. Ahora como es usual podemos concluir que el límite $[n, c, v, u]$ es solución de las ecuaciones (3.6) en $\mathcal{Y}$ (ver por ejemplo [28]). Finalmente, consideremos dos posibles soluciones $[n, c, v, u]$ y $[\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{u}]$ en una bola del espacio $\mathcal{Y}$ de radio R , observamos que con ligeras modificaciones obtenemos una estimativa similar a (3.46), lo cual asegura la unicidad de la solución en la bola cerrada $\{[n, c, v, u] \in \mathcal{Y} : \|[n, c, v, u]\|_{\mathcal{Y}} \leq R\}$. $\square$

Observación 3.5.10. *El rango de q determina las condiciones sobre los exponentes p y r . La diferencia para el caso $N = 2$ y $N = 3$ en la prueba del Teorema 3.5.1 son clarificadas con los siguientes comentarios:*

1. Note que si $s = N$, la condición $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} \leq 1$ para obtener (3.36) implica que $N \neq 2$. En efecto, si $N = 2$, entonces $q \geq 2$ lo cual es incompatible con la condición $\frac{N}{q} - 1 > 0$ dada en (3.27).
2. Para obtener (3.27) y (3.36) necesitamos $q > \frac{N}{2}$ y $q \geq \frac{s}{s-1}$, respectivamente. Si $N = 3$, entonces $\frac{s}{s-1} \leq \frac{N}{2}$, y por lo tanto asumimos $q > \frac{N}{2}$ en la condición (i) en el Teorema 3.5.1. Por otra parte, si $N = 2$, entonces $\frac{N}{2} < \frac{s}{s-1}$, y por lo tanto asumimos $q \geq \frac{s}{s-1}$ en la condición (ii) en el Teorema 3.5.1.
3. Si $N = 3$, la condición $1 > \frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} - \frac{1}{p})$ (equivalentemente, $p < \frac{Nqs}{Ns + Nq - 2sq}$) es necesaria para obtener (3.36). En el caso $N = 2$, se satisface trivialmente para $p < \infty$ dado que $\frac{1}{s} + \frac{1}{q} \leq 1$.
4. Para (3.27) y (3.31) necesitamos asumir $p > N$. Por otra parte para (3.27) necesitamos $\frac{q}{q-1} \leq p$. Tomando en cuenta el rango para q , si $N = 3$ tenemos $\frac{q}{q-1} < N$. Por lo tanto, tenemos que asumir $N < p$ en la condición (i) del Teorema 3.5.1. En el caso $N = 2$ tenemos $N < \frac{q}{q-1}$ y, de este modo, en la condiciones (ii) y (iii) del Teorema 3.5.1 tenemos que asumir $\frac{q}{q-1} \leq p$.

3.5.2. Existencia de solución en $[0, \infty)$

Demostración del Teorema 3.5.6. Si en (1.10) cambiamos $\varsigma n - \mu n^2$ por $-\tilde{\varsigma}n$, entonces el término $e^{\varsigma t}$ en (3.6) es remplazado por $e^{-\tilde{\varsigma}t}$. Así, argumentando en modo similar a la prueba del Teorema 3.5.1 y usando el Lema 2.4.2, podemos obtener las siguientes estimativas para n , c , v y u .

Estimativas para n

Del Lema 3.4.6, obtenemos

$$\|e^{-\tilde{\varsigma}t}e^{t\Delta}n_0\|_{L^q} \leq Ce^{-\tilde{\varsigma}t}t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})}\|n_0\|_{L^{\frac{N}{2}}}. \quad (3.47)$$

Puesto que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0$ y $\frac{N}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{2} > 0$, podemos emplear los Lemas 3.4.5 y 2.4.2 para estimar

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-\tilde{\varsigma}(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla n)(\tau) d\tau \right\|_{L^q} = \left\| \int_0^t e^{-\tilde{\varsigma}(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (nu))(\tau) d\tau \right\|_{L^q} \\ & \leq C \int_0^t e^{-\tilde{\varsigma}(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} \|u(\tau)\|_{L^p} d\tau \\ & \leq Ce^{-\tilde{\varsigma}t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\varsigma}\tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} e^{\rho_2\tau} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \\ & \quad \times B \left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{N}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

donde $C = C(\Omega, p, q) > 0$.

Teniendo en cuenta la relación entre r y q , tenemos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2r} > 0$ y $\frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{N}) > 0$. Así, de los Lemas 3.4.5 y 2.4.2, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-\tilde{\varsigma}(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (\chi n \nabla c - \xi n \nabla v))(\tau) d\tau \right\|_{L^q} \\ & \leq C \int_0^t e^{-\tilde{\varsigma}(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2r}-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} (\|\nabla c(\tau)\|_{L^r} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^r}) d\tau \\ & \leq Ce^{-\tilde{\varsigma}t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\varsigma}\tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \\ & \quad \times \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c(\tau)\|_{L^r} + \sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla v(\tau)\|_{L^r} \right) \\ & \quad \times B \left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2r}, \frac{N}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{N} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Poniendo juntas las estimativas desde (3.47) a (3.49), conseguimos

$$e^{-\tilde{\epsilon}t} t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} n \in BC([0, \infty); L^q(\Omega)),$$

y

$$\|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \leq \left(\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} \right). \quad (3.50)$$

Estimativas para c

Inicialmente, el Lema 3.4.6 nos permite obtener

$$\|e^{-\kappa_1 \beta_1 t} e^{t\Delta} c_0\|_{L^\infty} \leq C e^{-\kappa_1 \beta_1 t} \|c_0\|_{L^\infty}. \quad (3.51)$$

Las hipótesis sobre p, q, r implican que $1 - \frac{N}{2q}, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0$ y $\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) > 0$. Entonces, usando los Lemas 3.4.5, 3.4.6 y 2.4.2, podemos estimar

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla c - \kappa_1 \alpha_1 n + \kappa_2 \gamma c n)(\tau) d\tau \right\|_{L^\infty} \\ & \leq C \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^p} \|c(\tau)\|_{L^\infty} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2q}} \|n(\tau)\|_{L^q} (1 + \|c(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau \\ & \leq C e^{-\kappa_1 \beta_1 t} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} e^{\rho_2 \tau} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \\ & \quad \times \left(\sup_{0 < \tau < \infty} e^{\kappa_1 \beta_1 \tau} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{1}{2} + \frac{N}{2p}\right) \\ & \quad + C e^{-\min\{\kappa_1 \beta_1, \tilde{\epsilon}\}t} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\epsilon} \tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) B\left(1 - \frac{N}{2q}, \frac{N}{2q}\right) \\ & \quad + C e^{-\kappa_1 \beta_1 t} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\epsilon} \tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \left(\sup_{0 < \tau < \infty} e^{\kappa_1 \beta_1 \tau} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(1 - \frac{N}{2q}, \frac{N}{2q}\right), \end{aligned} \quad (3.52)$$

y

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (u \cdot \nabla c - \kappa_1 \alpha_1 n + \kappa_2 \gamma c n)(\tau) d\tau \right\|_{L^r} \\ & \leq C \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^p} \|\nabla c(\tau)\|_{L^r} d\tau \\ & \quad + C \int_0^t e^{-\kappa_1 \beta_1(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} (1 + \|c(\tau)\|_{L^\infty}) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C e^{-\min\{\kappa_1\beta_1, \rho_2\}t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \left(\sup_{0<\tau<\infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} e^{\rho_2\tau} \|u(\tau)\|_{L^p} \right) \\
&\quad \times \left(\sup_{0<\tau<\infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c(\tau)\|_{L^q} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{N}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{r})\right) \\
&\quad + C e^{-\min\{\kappa_1\beta_1, \tilde{\kappa}\}t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \left(\sup_{0<\tau<\infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\kappa}\tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \\
&\quad \times B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}), \frac{N}{2q}\right) + C e^{-\kappa_1\beta_1 t} \left(\sup_{0<\tau<\infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\kappa}\tau} \|n(\tau)\|_q \right) \\
&\quad \times \left(\sup_{0<\tau<\infty} e^{\kappa_1\beta_1\tau} \|c(\tau)\|_{L^\infty} \right) B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}), \frac{N}{2q}\right) t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})}. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

En vista de (3.51), (3.52) y (3.53), y recordando que $\sup_{0<t<\infty} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla e^{t\Delta} c_0\|_{L^r} < \infty$, obtenemos

$$e^{\min\{\kappa_1\beta_1, \tilde{\kappa}\}t} c \in L^\infty([0, \infty); L^\infty) \quad \text{and} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, \infty); L^r),$$

y entonces

$$\|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} \leq C \left(\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right). \quad (3.54)$$

Estimativas para v

De manera similar a las estimativas para c , podemos obtener las estimativas para la concentración química v y concluir que

$$e^{\min\{\beta_2, \tilde{\kappa}\}t} v \in L^\infty([0, \infty); L^\infty) \quad \text{and} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, \infty); L^r),$$

y

$$\|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} \leq C \left(\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right). \quad (3.55)$$

Estimativas para u

Vamos a probar que $t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC((0, T); L^p)$. Primero, del Lema 3.4.2 obtenemos

$$\|e^{-tA} u_0\|_{L^p} \leq C e^{-\rho_2 t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^N}. \quad (3.56)$$

De las hipótesis sobre p y q , tenemos $\frac{1}{N} + \frac{1}{q} \leq 1$, $\frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0$ y $\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}) > 0$; por lo

tanto, podemos estimar

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)A} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u + n \nabla \phi)(\tau) d\tau \right\|_{L^p} \\
& \leq C \int_0^t e^{-\rho_2(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2p}-\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|_{L^p} \|u(\tau)\|_{L^p} d\tau \\
& \quad + C \int_0^t e^{-\rho_2(t-\tau)} (t-\tau)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}} \|n(\tau)\|_{L^q} \|\nabla \phi(\tau)\|_{L^N} d\tau \\
& \leq C e^{-\rho_2 t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} e^{\rho_2 \tau} \|u(\tau)\|_{L^p} \right)^2 \times B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2p}, \frac{N}{p}\right) \\
& \quad + C e^{-\min\{\rho_2, \tilde{\varsigma}\}t} t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \|\nabla \phi(\tau)\|_{L^N} \right) \left(\sup_{0 < \tau < \infty} \tau^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} e^{\tilde{\varsigma} \tau} \|n(\tau)\|_{L^q} \right) \\
& \quad \times B\left(\frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}), \frac{N}{2q}\right). \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Las estimativas (3.56) y (3.57) juntas permiten

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC([0, \infty); L^p)$$

y

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} \leq C e^{-\min\{\rho_2, \tilde{\varsigma}\}t} \left(\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right). \tag{3.58}$$

Por consiguiente, de (3.50), (3.54), (3.55) y (3.58), obtenemos las siguientes estimativas globales

$$\begin{aligned}
\|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} & \leq C \left(\|n_0\|_{\mathcal{X}_1} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} \right), \\
\|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} & \leq C \left(\|c_0\|_{\mathcal{X}_2} + \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \|c\|_{\mathcal{Y}_2^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right), \\
\|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} & \leq C \left(\|v_0\|_{\mathcal{X}_3} + \|v\|_{\mathcal{Y}_3^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right), \\
\|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} & \leq C \left(\|u_0\|_{\mathcal{X}_4} + \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} \|u\|_{\mathcal{Y}_4^{\text{exp}}} + \|n\|_{\mathcal{Y}_1^{\text{exp}}} \right). \tag{3.59}
\end{aligned}$$

El resto de la prueba se sigue como en el Teorema 3.5.1. $\square$

Las condiciones usadas para obtener (3.48) hasta (3.57) pueden ser resumidas de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, & \frac{1}{2} > \frac{N}{2p}, \quad \frac{N}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) > \frac{1}{2}, & \text{para (3.48),} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1, & \frac{1}{2} - \frac{N}{2r} > 0, \quad \frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{N}) > 0, & \text{para (3.49),} \\ 1 - \frac{N}{2q} > 0, & \frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0, & \text{para (3.52),} \\ \frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0, & \frac{1}{2} - \frac{N}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) > 0, \quad q \leq r, & \text{para (3.53),} \\ \frac{1}{N} + \frac{1}{q} \leq 1, & \frac{1}{2} - \frac{N}{2p} > 0, \quad 1 - \frac{N}{2}(\frac{1}{N} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}) > 0, & \text{para (3.57).} \end{array} \right. \tag{3.60}$$

Así, los exponentes p , q y r deben satisfacer una de las condiciones establecidas en el Teorema 3.5.6.

Observación 3.5.11. *Las condiciones (3.60) determinan las correspondientes restricciones en el Teorema 3.5.6.*

1. *La condición $q \leq r$ es necesaria para usar el Lema 3.4.6 y obtener (3.53). Esta condición junto con $\frac{N}{2}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{N}) > 0$ implica que $q < 2N$.*
2. *Para (3.52), necesitamos $q > \frac{N}{2}$. Entonces, el rango para q es ajustado en $\frac{N}{2} < q < 2N$; esto permite que el término $N - q$ pueda ser negativo, positivo o cero, lo cual nos conduce a las tres alternativas en el Teorema 3.5.6.*
3. *Note que si $N = 2$, la condición $\frac{1}{N} + \frac{1}{q} \leq 1$ implica que $q \geq 2$. Así, q , p y r debe ser tomado verificando (ii) o (iii).*

3.6. El caso $\mathbb{R}^N$

En esta sección presentamos un resultado de existencia global de solución blanda para el modelo (1.10), considerando Ω como todo el espacio $\mathbb{R}^N$, con $N = 2, 3$. Este análisis se simplifica considerablemente en comparación con el caso de dominios acotados, ya que en este caso no hay condiciones de frontera, lo que nos permite trabajar con la formulación integral (3.3) en lugar de (3.6). Notemos que el semigrupo de Stokes en $\mathbb{R}^N$ coincide con el semigrupo del Calor en $\mathbb{R}^N$, el cual posee estimativas lineales L^p - L^q bien establecidas (ver Lema 3.4.1).

Para estudiar el problema (3.3) consideremos el siguiente espacio de Banach $\tilde{\mathcal{X}}$ de datos iniciales:

$$\tilde{\mathcal{X}} := \left\{ [n_0, c_0, v_0, u_0] \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N) \times L^\infty(\mathbb{R}^N) \times L^\infty(\mathbb{R}^N) \times L^\infty_\sigma(\mathbb{R}^N) : \right. \\ \left. \nabla c_0 \in L^N, \quad \nabla v_0 \in L^N \right\}, \quad (3.61)$$

con la norma

$$\|[n_0, c_0, v_0, u_0]\|_{\tilde{\mathcal{X}}} := \|n_0\|_{L^{\frac{N}{2}}} + \|c_0\|_{L^\infty} + \|\nabla c_0\|_{L^N} + \|v_0\|_{L^\infty} + \|\nabla v_0\|_{L^N} + \|u_0\|_{L^N},$$

Note que esta vez no es necesario trabajar en los espacios cocientes $L^p / \sim$, sino que podemos considerar los datos en los espacios $L^p(\mathbb{R}^N)$ usuales. Adicionalmente, las condiciones sobre c_0 y v_0 son más débiles (compare con (3.9)).

Para $N < p, r \leq \infty$, $N/2 < q \leq \infty$, consideramos el espacio de Banach $\tilde{\mathcal{Y}} = \tilde{\mathcal{Y}}_{p,r,q}$ definido por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}} := \Big\{ [n, c, v, u] : & t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} n \in BC([0, T]; L^q), \quad c \in L^\infty([0, T]; L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, T]; L^r), \quad v \in L^\infty([0, T]; L^\infty), \\ & t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, T]; L^r), \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} u \in BC([0, T]; L^p_\sigma) \Big\}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

dotado con la norma

$$\|[n, c, v, u]\|_{\tilde{\mathcal{Y}}} := \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} + \|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} + \|v\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_3} + \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4},$$

donde

$$\begin{cases} \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} \|n(t)\|_{L^q}, \\ \|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} := \sup_{0 < t < T} \|c(t)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c(t)\|_{L^r}, \\ \|v\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_3} := \sup_{0 < t < T} \|v(t)\|_{L^\infty} + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla v(t)\|_{L^r}, \\ \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|u(t)\|_{L^p}. \end{cases}$$

Ahora presentaremos la noción de solución blanda.

Definición 3.6.1. Sea $[n_0, c_0, v_0, u_0] \in \tilde{\mathcal{X}}$. Una solución blanda para el problema de valor inicial (1.10) es un vector $[n, c, v, u] \in \tilde{\mathcal{Y}}$ satisfaciendo el sistema integral (3.3).

De manera análoga al caso de dominios acotados, presentamos el siguiente resultado:

Teorema 3.6.2. Asumiendo

$$(i) \quad N = 3, \quad N \leq s \leq \infty, \quad \frac{N}{2} < q < N, \quad N < p < \frac{Nqs}{Ns+Nq-2sq} \quad y \quad N < r < \frac{Nq}{N-q},$$

o

$$(ii) \quad N = 2, \quad N < s < \infty, \quad \frac{s}{s-1} \leq q < N, \quad \frac{q}{q-1} \leq p < \infty \quad y \quad N < r < \frac{Nq}{N-q},$$

o

$$(iii) \quad N = 2, \quad s = \infty, \quad \frac{N}{2} < q < N, \quad \frac{q}{q-1} \leq p < \infty \quad y \quad N < r < \frac{Nq}{N-q}.$$

Sea $T > 0$ arbitrario, $[n_0, c_0, v_0, u_0] \in \tilde{\mathcal{X}}$ y $\nabla \phi$ tal que $t^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2s}} \nabla \phi \in BC([0, T]; L^s)$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\|[n_0, c_0, v_0, u_0]\|_{\tilde{\mathcal{X}}} < \delta$, entonces el problema (1.10) tiene una solución blanda $[n, c, v, u] \in \tilde{\mathcal{Y}}$ en el sentido de la Definición 3.6.1. Dicha solución blanda es única en una adecuada bola cerrada en $\tilde{\mathcal{Y}}$.

Demostración del Teorema 3.6.2. La demostración de este resultado, sigue las mismas ideas de la prueba para el Teorema 3.5.1, por lo tanto, solo resaltaremos las diferencias. Primero necesitamos obtener una estimativa global para la formulación integral (3.3) en el espacio de funciones $\tilde{\mathcal{Y}}$.

Estimativas para n

Recordando que el semigrupo del calor en $\mathbb{R}^N$ conmuta con el operador divergencia, tenemos que

$$e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} \nabla \cdot (nu)(\tau) = e^{\varsigma(t-\tau)} \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (nu)(\tau)$$

y

$$e^{\varsigma(t-\tau)} e^{(t-\tau)\Delta} (\nabla \cdot (\chi n \nabla c - \xi n \nabla v)) = e^{\varsigma(t-\tau)} \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} (\chi n \nabla c - \xi n \nabla v).$$

Con esta reescritura, siguiendo las ideas de las Subsección 3.5.1 y usando el Lema 3.4.1, concluimos que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{2}{N}-\frac{1}{q})} n \in BC([0, T]; L^q)$$

y

$$\|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \leq C e^{\varsigma T} \left(\|n_0\|_{\frac{N}{2}} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \|v\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_3} \right). \quad (3.63)$$

Estimativas para c

Teniendo en cuenta que

$$\|\nabla e^{t\Delta} c_0\|_{L^r} \leq t^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \|\nabla c_0\|_{L^N}, \quad (3.64)$$

de manera análoga a las acotaciones para n , obtenemos que

$$c \in L^\infty([0, T]; L^\infty) \quad \text{y} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla c \in BC([0, T]; L^r),$$

y

$$\|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} \leq C (\|\nabla c_0\|_{L^N} + \|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1} \|c\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_2} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1}). \quad (3.65)$$

Observemos que la estimativa (3.64) se sigue directamente del Lema 3.4.1. En el caso de dominios acotados, esta estimativa no se tiene debido a que el semigrupo del calor con condición de Neumann no conmuta con las derivadas; de hecho, si conmutaran, podríamos usar el Lema 3.4.5 ítem *ii* y obtener un decaimiento análogo a 3.64 flexibilizando la condiciones sobre los datos iniciales.

Estimativas para v

Procediendo con antes en las estimativas para c , podemos concluir que

$$v \in L^\infty([0, T]; L^\infty) \quad \text{y} \quad t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{r})} \nabla v \in BC([0, T]; L^r),$$

y

$$\|v\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_3} \leq C (\|\nabla v_0\|_{L^N} + \|v\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_3} \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1}). \quad (3.66)$$

Estimativas para u

Recordando que el semigrupo de Stokes en $\mathbb{R}^N$ coincide con el semigrupo del calor en $\mathbb{R}^N$, entonces tenemos que

$$t^{\frac{N}{2}(\frac{1}{N}-\frac{1}{p})}u \in BC([0, T]; L^p),$$

y

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} \leq C (\|u_0\|_{L^N} + \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} \|u\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_4} + \|n\|_{\tilde{\mathcal{Y}}_1}). \quad (3.67)$$

El resto de la demostración se sigue de las ideas anteriormente presentadas en la demostración del Teorema 3.5.1, esto es, necesitamos considerar un esquema de aproximaciones adecuado, similar al esquema (3.40). Así, concluimos que si los datos iniciales son suficientemente pequeños en la norma del espacio $\tilde{\mathcal{X}}$, existe una sucesión de Cauchy en $\tilde{\mathcal{Y}}$, la cual converge a la solución de (3.3). $\square$

4 ANÁLISIS NUMÉRICO

En este capítulo, presentaremos algunos resultados desde el punto de vista del análisis numérico obtenidos para un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, los cuales son otro aporte original del presente trabajo. Hasta donde sabemos, no existe trabajos de análisis de convergencia para esquemas numéricos de este tipo. Trabajaremos con un esquema numérico adecuado para aproximar la solución de un submodelo del sistema (1.10), a saber el sistema (4.1) descrito a continuación. Para ello, iniciaremos el capítulo con algunos conceptos básicos sobre los métodos de elementos finitos, luego desarrollaremos nuestro esquema numérico, después realizaremos un análisis de error del esquema en la norma L^2 y terminaremos este capítulo presentando algunos experimentos numéricos con el objetivo de ilustrar los resultados teóricos y experimentar con la formación de algunos patrones, las simulaciones fueron realizadas usando el software Freefem++.

4.1. Modelo

Centraremos nuestra atención para el caso bidimensional del siguiente modelo Keller-Segel-Navier-Stokes, el cual corresponde a un submodelo del sistema (1.10):

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = D_c \Delta c - nc, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla)u) = \eta \Delta u - \nabla \pi + n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Como antes $n = n(x, t)$, $c = c(x, t)$, $\pi(x, t)$ y $u(x, t)$ denotan la densidad celular, la concentración de una señal química, la presión, y el campo de velocidades del fluido para $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $t \in (0, T]$, respectivamente. En este capítulo al igual que en el anterior, por simplicidad en la notación, no distinguiremos entre funciones vectoriales y escalares, sin embargo cuando sea necesario evitar alguna ambigüedad, usaremos la notación $(H^1(\Omega))^2$, $(L^2(\Omega))^2$, etc.

El sistema (4.1) es completado con los siguientes datos iniciales y condiciones de frontera:

$$\begin{cases} [n(x, 0), c(x, 0), u(x, 0)] = [n_0(x), c_0(x), u_0(x)], & x \in \Omega, \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = 0, & u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \end{cases} \quad (4.2)$$

Como mencionamos en el Capítulo 1, existe un número considerable de resultados analíticos relacionados con el modelo (4.1), entre ellos, resultados de existencia, unicidad, regularidad y propiedades asintóticas de soluciones (ver por ejemplo [72, 108, 122,

125] y las referencias en ellos); sin embargo, no conocemos de trabajos sobre estimativas de error o análisis de convergencia en el contexto de los métodos numéricos para resolver (4.1)-(4.2), hasta donde sabemos, solamente existen algunos resultados experimentales donde se investiga la formación de patrones y se simula la dinámica no lineal del modelos tipo Keller-Segel-Navier-Stokes (ver, por ejemplo [27, 31, 63, 73, 114]). No obstante, existen resultados relacionados con la convergencia y análisis numérico para el modelo clásico Keller-Segel [7, 12, 45, 39, 40, 41, 99, 104, 116, 129]. La amplia gama de métodos numéricos para abordar el modelo clásico Keller-Segel incluyen: métodos de volúmenes finitos [7, 12, 45]; diferencias finitas y elementos finitos que conservan masa [104]; métodos *upwind* de diferencias potenciales [40]; métodos Galerkin discontinuo [39, 41]; métodos de *splitting* [99, 116]; métodos de las características [129], entre otros.

En este capítulo nos enfocamos en el análisis de un método numérico para aproximar la solución del (4.1)-(4.2), lo cual constituye el segundo aporte original de este trabajo. Presentaremos un nuevo esquema constituido por una combinación de elementos finitos mixtos, métodos de las características y *splitting*. Las principales características de nuestro esquema se pueden sintetizar así: Usamos una función característica adecuada para aproximar la derivada material de la densidad celular y garantizar que nuestro esquema conserve masa para la densidad, como en [47, 76, 103, 129]: tratamos con la concentración química usando técnicas de método de elementos mixtos y *splitting*, como en [81, 100, 101, 128]; aproximamos la velocidad y la presión usando técnicas de elementos finitos desarrolladas para tratar con fluidos incompresibles, a saber, los elementos finitos mixtos (ver [51]) y el truco de Teman para tratar con el término convectivo ([62], Capítulo 7).

4.2. Conceptos básicos

Los métodos de elementos finitos proporcionan una formalización de un algoritmo para aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales y tienen su fundamento teórico en la aproximación de Ritz-Galerkin (ver por ejemplo [43]), que consiste en dada una formulación débil de un sistema de ecuaciones en un espacio $\mathcal{V}$ de dimensión infinita encontrar una solución para este sistema en un subespacio $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ de funciones de dimensión finita, de esta forma transforma un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta sección presentaremos algunos conceptos básicos de los métodos de elementos finitos. Para una presentación más detallada recomendamos consultar [17, 30].

Definición 4.2.1. Sean:

- (i) $K \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto cerrado y acotado, con interior no vacío y frontera suficientemente suave (elementos del dominio).
- (ii) $\mathcal{V}_h$ un espacio de funciones sobre K de dimensión finita (el espacio de funciones de forma)

(iii) $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k\}$ una base para $\mathcal{V}'$ (base del dual de $\mathcal{V}$).

La tripla $(K, \mathcal{V}_h, \mathcal{N})$ es llamada un elemento finito.

La base de funciones $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ de $\mathcal{V}_h$ tal que $\mathcal{N}_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ es llamada la base nodal de $\mathcal{V}_h$. Presentada la definición de elemento finito, continuamos con la definición de interpolante local.

Definición 4.2.2. Dado un elemento finito $(K, \mathcal{V}_h, \mathcal{N})$, sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ la base nodal de $\mathcal{V}$. Si $v \in \mathcal{V}$ es una función para la cual los $\mathcal{N}_i \in \mathcal{N}$ con $i = 1, \dots, k$, están definidos, entonces definimos el interpolante local por

$$\mathbb{P}_K v := \sum_{i=1}^k \mathcal{N}_i(v) \varphi_i.$$

Ahora juntaremos los elementos para formar un grupo usualmente llamado malla o partición

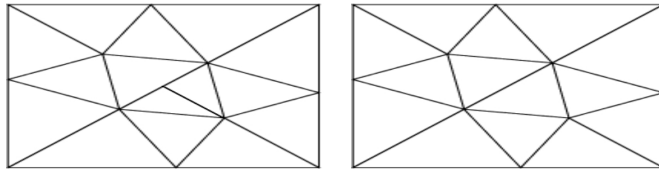
Definición 4.2.3. Una partición $\mathcal{T}$ de un dominio Ω es un conjunto finito de elementos $\{K_i\}$ con $i = 1, \dots, k$, tal que

(i) $\text{int } K_i \cap \text{int } K_j = \emptyset$ si $i \neq j$,

(ii) $\bigcup_{i=1}^k K_i = \overline{\Omega}$.

Una partición $\mathcal{T}$ de un dominio poligonal, donde cada elemento K_i es un triángulo, es llamada una triangulación si cumple la siguiente propiedad: cualquier vertice de un elemento no pertenece al interior de cualquier arista de la partición (ver Figura 4.1).

Figura 4.1 – Dos particiones.



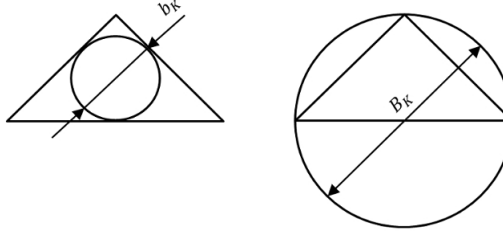
La Figura 4.1 muestra dos particiones de un dominio rectangular; la figura de la izquierda no es una triangulación, pues un vértice de un elemento pertenece al interior de la arista de otro elemento, mientras que la figura de la derecha si corresponde a una triangulación.

Definición 4.2.4. Sea $0 < h \leq 1$. Diremos que una triangulación $\mathcal{T}$ de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es cuasiregular, si existen constantes positivas C_1, C_2 , tales que para cada $K \in \mathcal{T}$

$$C_1 h \leq b_K \quad \text{y} \quad B_K \leq C_2 h,$$

donde b_K es el diámetro del mayor círculo inscrito en K y B_K es el diámetro del menor círculo que contiene a K .

Figura 4.2 – Diámetros b_K y B_K para un elemento K .



Definición 4.2.5. Suponga que $\mathcal{T}_h$ es una partición de Ω y asuma que cada elemento en la partición K_i está equipado de una espacio de funciones forma $\mathcal{V}_h$, y una base dual $\mathcal{N}$, tal que cada $(K_i, \mathcal{V}_h, \mathcal{N})$ forman un elemento finito. Para cada $v \in \mathcal{V}$, el operador proyector sobre $\mathcal{V}_h$ es definido como

$$\mathbb{P}_{\mathcal{T}_h} v \Big|_{K_i} = \mathbb{P}_{K_i} v \quad \forall K_i \in \mathcal{T}_h.$$

Además se cumple que $\mathbb{P}_{\mathcal{T}_h}$ es lineal e idempotente, en particular, $\mathbb{P}_{\mathcal{T}_h} v = v$ para todo $v \in \mathcal{V}_h$, y $N_j(\mathbb{P}_{K_i} f) = N_j(f)$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ y toda $f \in \mathcal{V}$.

Métodos de elementos finitos en los cuales dos espacios son usados para aproximar dos variables diferentes reciben el nombre de métodos mixtos. En algunos casos la segunda variable es introducida en la formulación del problema de manera auxiliar y usualmente está relacionada con alguna propiedad física de la variable original; a este método se le conoce como *splitting*. En otros casos las dos variables aparecen en el sistema de forma natural y son independientes, por ejemplo la velocidad y la presión en las ecuaciones de Stokes. El análisis matemático para los métodos de elementos finitos mixtos ha sido desarrollado ampliamente desde los años setenta (ver por ejemplo [21, 50, 98]); estos estudios permitieron el desarrollo de diferentes métodos de elementos mixtos, entre ellos, elementos Brezzi-Douglas- Marini (BDM) [20], elementos Raviart-Thomas (RT) [97], elementos Brezzi-Douglas-Fortin-Marini (BDFM) [22], elementos Brezzi-Douglas-Durán-Marini (BDDM) [19], elementos Nedelec [90], entre otros.

Finalizaremos esta sección recordando dos lemas, el primero conocido como lemma de Céa, el cual nos dice que el error de la aproximación en la norma H^1 depende de qué tan bien puede ser aproximación la solución en el espacio $\mathcal{V}_h$, y el segundo resultado que ofrece estimativas de decaimiento de $\mathcal{V}_h$ en las normas $W^{k,p}(\Omega)$.

Lema 4.2.6 ([18], Teorema 2.8.1). Sea u la solución débil de un problema parabólico sobre $H^1(\Omega)$ y sea u_h la solución del mismo problema sobre un espacio de dimensión finita $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega)$, entonces existe una constante positiva C tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in \mathcal{V}_h} \|u - v\|_{H^1(\Omega)}.$$

El segundo lema, nos permite acotar por arriba normas de un espacio de Sobolev por normas en espacios de Sobolev más fuertes; tales acotaciones se conocen como estimativas inversas.

Lema 4.2.7 ([18], Lema 4.5.3). *Sean K un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$; $\gamma h \leq \text{diam } K \leq h$, donde $\gamma > 0$ y $0 < h \leq 1$; y $\mathcal{V}_h$ es un subespacio de dimensión finita de $W_p^l(K) \cap W_q^m(K)$, donde $1 \leq p, q \leq \infty$ y $0 \leq m \leq l$. Entonces existe una constante positiva C tal que para $v \in \mathcal{V}_h$ se tiene que*

$$\|v\|_{W^{l,p}(K)} \leq Ch^{m-l+\frac{N}{p}-\frac{N}{q}} \|v\|_{W^{m,q}(K)}.$$

4.3. Diseño del esquema numérico

En esta sección, estableceremos la formulación variacional de (4.1)-(4.2), la cual usaremos para construir la aproximación por elementos finitos mixtos. Usaremos el método de *splitting* para la señal quimiotáctica y una modificación del método de las características para la densidad celular, lo que nos garantizará la conservación de masa para la densidad.

4.3.1. Notaciones

Usaremos los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ y espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, con sus respectivas normas $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$, introducidos en el Capítulo 2. Notaremos por $W_0^{1,p}(\Omega)$, al subespacio formado por los elementos de $W^{1,p}(\Omega)$ con traza igual cero en la frontera de Ω . Consideraremos también los siguientes espacios de funciones

$$\begin{aligned} L_0^2(\Omega) &:= \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p = 0 \right\}, \\ V &:= \{ v \in (H_0^1(\Omega))^2 : \nabla \cdot v = 0 \in \Omega \}, \\ H(\text{div}) &:= \{ v \in (L^2(\Omega))^2 : v \cdot \nu = 0, \quad \nabla \cdot v \in L^2(\Omega) \}, \\ \hat{H}^1(\Omega) &:= H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) = \left\{ w \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} w = 0 \right\}. \end{aligned}$$

En $L_0^2(\Omega)$, V , H_0^1 , $H(\text{div})$, $\hat{H}^1(\Omega)$, consideraremos los siguientes productos internos

$$\begin{aligned} (f, g)_{L_0^2} &= (f, g), & (f, g)_V &= (f, g)_{H_0^1} = (\nabla f, \nabla g), \\ (f, g)_{H(\text{div})} &= (f, g) + (\nabla \cdot f, \nabla \cdot g), & (f, g)_{\hat{H}^1} &= (\nabla f, \nabla g), \end{aligned}$$

y normas

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_0^2} &= \|f\|_{L^2}, & \|f\|_V &= \|f\|_{H_0^1} = \|\nabla f\|_{L^2}, \\ \|f\|_{H(\text{div})} &= \|f\|_{L^2} + \|\nabla \cdot f\|_{L^2}, & \|f\|_{\hat{H}^1} &= \|\nabla f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Recordemos también las siguientes desigualdades de Poincaré

$$\begin{cases} \|v\|_{H^1} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2}, & \forall v \in (H_0^1(\Omega))^2, \\ \|w\|_{H^1} \leq C_P \|\nabla w\|_{L^2}, & \forall w \in \hat{H}^1(\Omega), \end{cases} \quad (4.3)$$

para alguna constante C_P independiente de v y w . Finalmente, considere las siguientes formas trilineares, las cuales serán usadas en la formulación del esquema numérico.

$$B(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2} \left[\left((v_1 \cdot \nabla) v_2, v_3 \right) - \left((v_1 \cdot \nabla) v_3, v_2 \right) \right], \quad (4.4)$$

para todo $v_1, v_2, v_3 \in (H^1(\Omega))^2$, y

$$A(v, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \left[\left((v \cdot \nabla) w_1, w_2 \right) - \left((v \cdot \nabla) w_2, w_1 \right) \right], \quad (4.5)$$

para todo $v \in (H^1(\Omega))^2$, $w_1, w_2 \in H^1(\Omega)$.

Se tiene que existen constantes positivas C_B, C_A , tales que

$$B(v_1, v_2, v_3) \leq C_B \|v_1\|_{H^1} \|v_2\|_{H^1} \|v_3\|_{H^1}, \quad (4.6)$$

$$A(v, w_1, w_2) \leq C_A \|v\|_{H^1} \|w_1\|_{H^1} \|w_2\|_{H^1}, \quad (4.7)$$

y se verifican las siguientes igualdades

$$B(u, v, w) = \left((w \cdot \nabla) u, v \right), \quad \forall u \in V, \quad v, w \in (H^1(\Omega))^2, \quad (4.8)$$

$$A(u, w_1, w_2) = \left((u \cdot \nabla) w_1, w_2 \right), \quad \forall u \in V, \quad w_1, w_2 \in H^1(\Omega). \quad (4.9)$$

Además, se cumplen las siguientes propiedades

$$B(v_1, v_2, v_2) = 0, \quad \forall v_1, v_2 \in (H^1(\Omega))^2, \quad (4.10)$$

$$A(v, w, w) = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \quad v \in (H^1(\Omega))^2. \quad (4.11)$$

4.3.2. Formulación variacional

Por razones técnicas asumiremos que los datos iniciales satisfacen las siguientes condiciones de regularidad:

$$\begin{cases} n_0 \in C^0(\bar{\Omega}), \quad n_0 > 0 \text{ en } \bar{\Omega}, \\ c_0 \in W^{1,q}(\Omega) \text{ para algún } q > 2, \quad c_0 > 0 \text{ in } \bar{\Omega}, \\ u_0 \in D(A^\alpha) \text{ para algún } \alpha \in (\frac{1}{2}, 1), \quad \nabla \phi \in C^1(\bar{\Omega}), \end{cases} \quad (4.12)$$

donde A^α denota el operador fraccional de Stokes con dominio $D(A^\alpha)$. Asumimos Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera suficientemente suave $\partial\Omega$. En efecto, para datos iniciales satisfaciendo (4.12), entonces podemos establecer las siguientes estimativas *a priori* para el sistema (4.1)-(4.2) (ver [122])

$$\begin{aligned} \|n\|_{L^1} &\leq K, \quad \|n\|_{L^\infty} \leq K, \quad \left\| \frac{\nabla n}{n^{1/2}} \right\|_{L^2(L^2)} \leq K, \quad \|c\|_{L^\infty} \leq K, \\ \|\nabla c\|_{L^4(L^4)} &\leq K, \quad \|u\|_{L^2} \leq K, \quad \|u\|_{L^2(H^1)} \leq K, \quad \|u\|_{L^4(L^4)} \leq K. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Del Teorema 1.1 en [122], tenemos la existencia de la solución clásica para (4.1)-(4.2). Note que si $[n, c, u, \pi]$ es una solución clásica del sistema (4.1)-(4.2), entonces tenemos la siguiente propiedad básica:

$$\int_{\Omega} n(\cdot, t) dx = \int_{\Omega} n_0 dx. \quad (4.14)$$

La igualdad (4.14) es obtenida de integrar la ecuación $(4.1)_1$, y significa que la masa total de bacterias se conserva en el tiempo y es igual a la masa inicial. Definamos la densidad de células auxiliar $\tilde{n} = n - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} n_0 dx$, la cual satisface que $\int_{\Omega} \tilde{n} dx = 0$. Entonces, obtenemos el siguiente sistema equivalente a (4.1) (escribimos $n = \tilde{n}$ con el fin de simplificar la notación):

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c) - \chi \alpha \Delta c, \\ c_t + u \cdot \nabla c = D_c \Delta c - (n + \alpha) c, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla) u) = \eta \Delta u - \nabla \pi + (n + \alpha) \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

donde $\alpha = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} n_0 dx$ la media de n_0 .

Primero introduciremos la formulación débil para la segunda ecuación del sistema Keller-Segel-Navier-Stokes (4.15). Por esta razón, consideramos una variable auxiliar $\sigma = \nabla c$. Así, obtenemos la siguiente formulación variacional para $(4.15)_2$:

$$\begin{cases} a) \quad (\sigma, \bar{\sigma}) + (c, \nabla \cdot \bar{\sigma}) = 0 \quad \forall \bar{\sigma} \in H(\text{div}), \\ b) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \bar{c} \right) - D_c (\nabla \cdot \sigma, \bar{c}) + (u \cdot \nabla c, \bar{c}) = -((n + \alpha), \bar{c}) \quad \forall \bar{c} \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.16)$$

Tomando la derivada en el tiempo en la ecuación $a)$ de (4.16), tenemos

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \bar{\sigma} \right) + \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \nabla \cdot \bar{\sigma} \right) = 0 \quad \forall \bar{\sigma} \in H(\text{div}). \quad (4.17)$$

Escogiendo $\bar{c} = \nabla \cdot \bar{\sigma}$ en $b)$ (4.16) y sustituyendo en (4.17), obtenemos la siguiente formulación variacional de (4.16):

$$\begin{cases} a) \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \bar{\sigma} \right) + D_c (\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}) = (u \cdot \nabla c + c(n + \alpha), \nabla \cdot \bar{\sigma}) \quad \forall \bar{\sigma} \in H(\text{div}), \\ b) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial t}, \bar{c} \right) = (D_c \nabla \cdot \sigma - u \cdot \nabla c - (n + \alpha) c, \bar{c}) \quad \forall \bar{c} \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (4.18)$$

También, para la densidad y la velocidad del fluido. (ecuaciones 1 y 4 en (4.15)), tenemos

la siguiente formulación variacional:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}, \bar{n}\right) + (u \cdot \nabla n, \bar{n}) = -D_n(\nabla n, \nabla \bar{n}) - \chi(\nabla \cdot (n\sigma), \bar{n}) - \chi\alpha(\sigma, \nabla \bar{n}), \quad \forall \bar{n} \in \hat{H}^1(\Omega), \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \bar{u}\right) + ((u \cdot \nabla)u, \bar{u}) = -\frac{\eta}{\rho}(\nabla u, \nabla \bar{u}) + \left(\frac{\pi}{\rho}, \nabla \cdot \bar{u}\right) + \left(\frac{n+\alpha}{\rho}\nabla \phi, \bar{u}\right), \quad \forall \bar{u} \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad (4.20)$$

$$(\bar{\pi}, \nabla \cdot u) = 0, \quad \forall \bar{\pi} \in L_0^2(\Omega). \quad (4.21)$$

Las ecuaciones integrales (4.18)-(4.21) definen una forma variacional para el modelo (4.15).

4.3.3. Conservación de masa para la ecuación de la densidad

Ahora estableceremos un esquema semidiscreto adecuado para la densidad de los organismos. Con el propósito de tratar el término quimiotáctico $\nabla \cdot (\chi n \sigma)$, siguiendo las ideas de [103], dada la función vectorial σ , consideramos la función trayectoria X y entonces, aproximamos adecuadamente la derivada material de n a lo largo de la trayectoria X para garantizar el balance de masa. A pesar de que el método de las características es más o menos conocido, presentaremos las ideas principales de la modificación de este método con el fin de obtener un esquema de elementos finitos que preserve el balance de masa.

Asumamos que el flujo σ satisface la siguiente condición de regularidad

$$\sigma \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega)). \quad (4.22)$$

Notemos que $\sigma = \nabla c$ y $\frac{\partial c(x,t)}{\partial \nu} = 0$, entonces $\sigma \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$. Sea $X : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la solución de ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dX}{dt} = \chi\sigma(X, t).$$

La derivada material de n con respecto a σ es dada por:

$$(\mathcal{D}_0 n)(X(t), t) := \frac{\partial n}{\partial t} + \chi\sigma \cdot \nabla n = \frac{d}{dt}n(X(t), t). \quad (4.23)$$

Teniendo en cuenta (4.23), la ecuación (4.15)₁ puede ser expresada como

$$(\mathcal{D}_0 n)(X(t), t) + \chi n \nabla \cdot \sigma + u \cdot \nabla n - D_n \Delta n + \chi \alpha \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (4.24)$$

Denotemos $t^m = m\Delta t$ para $m \in \mathbb{N}$ y $\Delta t > 0$. Asumiendo la condición inicial $X(t^m) = x$, usando el Método Euler, obtenemos la siguiente aproximación al valor de X en t^{m-1} :

$$X_1^{m-1}(x) = x - \chi\sigma^m(x)\Delta t, \quad (4.25)$$

donde $\sigma^m(x) := \sigma(x, t^m)$. Así, si consideramos el método clásico de la característica (ver [94, 102]) para aproximar $(\mathcal{D}_0 n)$ por

$$(\mathcal{D}_0 n)^m = \frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t),$$

donde $n^{m-1} \circ X_1^{m-1}$ es la composición definida por

$$(n^{m-1} \circ X_1^{m-1})(x) = n^{m-1}(X_1^{m-1}(x)),$$

obtenemos la siguiente formulación semidiscreta de (4.24):

$$\frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1}}{\Delta t} + \chi n \nabla \cdot \sigma + u \cdot \nabla n - D_n \Delta n + \chi \alpha \nabla \cdot \sigma = 0. \quad (4.26)$$

Sin embargo, la ecuación (4.26) no satisface el balance de masa porque la integral sobre Ω de $n \nabla \cdot \sigma$, no necesariamente es cero. Por lo tanto, ahora aplicaremos directamente la aproximación por el método de la característica al término

$$(\mathcal{D}_1 n) := \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi \sigma n) = \frac{\partial n}{\partial t} + \chi \sigma \cdot \nabla n + \chi n \nabla \cdot \sigma.$$

Denotamos como Y_1^{m-1} al Jacobiano de la transformación de x a $X_1^{m-1}(x)$, esto es,

$$Y_1^{m-1} = \det \left(\frac{\partial X_1^{m-1}}{\partial x} \right) = \det \left(\delta_{ij} - \chi \Delta t \frac{\partial \sigma_i^m}{\partial x} \right) = 1 - \chi \nabla \cdot \sigma^m \Delta t + \mathcal{O}((\Delta t)^2). \quad (4.27)$$

Usando (4.27) obtenemos la siguiente aproximación de primer orden del término $(\mathcal{D}_1 n)$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_1 n)^m &= \frac{\partial n^m}{\partial t} + \chi \sigma^m \cdot \nabla n^m + \chi (n^{m-1} \circ X_1^{m-1}) \nabla \cdot \sigma^m + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &= \frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1}}{\Delta t} + \frac{n^{m-1} \circ X_1^{m-1} - n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &\approx \frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Ahora, podemos reescribir la ecuación (4.15)₁ en la siguiente forma semidiscreta

$$\frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}}{\Delta t} + u \cdot \nabla n = D_n \Delta n + \chi \alpha \nabla \cdot \sigma. \quad (4.28)$$

En la siguiente proposición, mostramos que la solución de (4.28) conserva masa.

Proposición 4.3.1. *Bajo la hipótesis $\sigma \in C^0([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega))$ con $\sigma = 0$ en $\partial\Omega$, y considerando $\chi \Delta t \|\sigma\|_{C^0(W^{1, \infty})} < 1$, la forma semidiscreta (4.28) satisface el balance de masa.*

Demostración. Multiplicando la ecuación (4.28) por Δt , integrando sobre Ω y notando que $\int_{\Omega} u \cdot \nabla n = \int_{\Omega} D_n \Delta n = \int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \sigma = 0$, tenemos que

$$\int_{\Omega} n^m = \int_{\Omega} n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}. \quad (4.29)$$

Así, basta ver que el lado derecho de (4.29) es $\int_{\Omega} n^{m-1}$. Dado que $X_1^{m-1}(\Omega) = \Omega$ (ver [102], Proposición 1), por el teorema del cambio de variables obtenemos

$$\int_{\Omega} n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1} = \int_{X_1^{m-1}(\Omega)} n^{m-1} = \int_{\Omega} n^{m-1}, \quad (4.30)$$

lo cual concluye la prueba. $\square$

En la prueba de la Proposición 4.3.1 usamos que $X_1^{m-1}(\Omega) = \Omega$; de hecho, es suficiente ver que $X_1^{m-1}(\Omega) = \Omega$ c.t.p.; además, como $\sigma = \nabla c$, la hipótesis $\sigma = 0$ sobre $\partial\Omega$ en la Proposición 4.3.1 implica que no hay variación de la concentración química en la frontera. Sin embargo, si Ω es un rectángulo, la hipótesis $\sigma = 0$ sobre $\partial\Omega$ en la Proposición 4.3.1 puede ser relajada para asumir solamente que $\sigma \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$. Esta condición es equivalente a $\frac{\partial c(x,t)}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$ como se asume en (4.2). Este es el contenido del siguiente lema.

Lema 4.3.2. *Sea $\Omega = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Asuma que $\sigma \in C^0([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ con $\sigma \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$. Si $\chi \Delta t \|\sigma\|_{C^0(W^{1,\infty})} < 1/2$, entonces*

$$X_1^{m-1}(\Omega) = \Omega \text{ c.t.p.} \quad (4.31)$$

Demostración. Sea $\Gamma_1 = \{a, b\} \times [c, d]$ y $\Gamma_2 = \{c, d\} \times [a, b]$, $d_1(x) = \text{dist}(x, \Gamma_1)$ y $d_2(x) = \text{dist}(x, \Gamma_2)$ para $x \in \Omega$. Sea $x_1 \in \Gamma_1$ tal que $d_1(x) = |x - x_1|$, y $x_2 \in \Gamma_2$ tal que $d_2(x) = |x - x_2|$. Como $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ y $\sigma \cdot \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$, de (4.25) se tiene que

$$\begin{aligned} X_1^{m-1}(x) - x &= \chi \sigma^m(x) \Delta t \\ &= \chi (\sigma^m(x) \cdot \hat{\mathbf{i}}, \sigma^m(x) \cdot \hat{\mathbf{j}}) \Delta t \\ &= \chi ((\sigma^m(x) - \sigma^m(x_1)) \cdot \hat{\mathbf{i}}, (\sigma^m(x) - \sigma^m(x_2)) \cdot \hat{\mathbf{j}}) \Delta t. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |\chi ((\sigma^m(x) - \sigma^m(x_1)) \cdot \hat{\mathbf{i}}) \Delta t| &\leq d_1(x) \chi \|\sigma\|_{C^0(W^{1,\infty})} \Delta t \leq d_1(x), \\ |\chi ((\sigma^m(x) - \sigma^m(x_2)) \cdot \hat{\mathbf{j}}) \Delta t| &\leq d_2(x) \chi \|\sigma\|_{C^0(W^{1,\infty})} \Delta t \leq d_2(x). \end{aligned}$$

Entonces, $X_1^{m-1}(x) \in \Omega$. Además, dado que $X_1^{m-1}(\partial\Omega) = \partial\Omega$ (con excepción de los puntos en las esquinas) y teniendo en cuenta que σ^m es continua, concluimos (4.31). $\square$

4.4. Aproximación por elementos finitos

En esta sección, construiremos y analizaremos una aproximación por elementos finitos mixtos para la solución débil del sistema Keller-Segel-Navier-Stokes (4.1) con datos iniciales y condiciones de frontera (4.2). Consideraremos una formulación variacional tipo *splitting* para la concentración de la sustancia atractora dada en (4.18) y una modificación del método de las características que conserva masa para la densidad como lo establecimos en (4.28). Con el fin de tratar con las formas trilineales, usamos una forma *skew-symmetric* para los términos convectivos.

4.4.1. Hipótesis

Sean $\mathcal{T}_{h_n}, \mathcal{T}_{h_\sigma}, \mathcal{T}_{h_c}, \mathcal{T}_{h_u}$ y $\mathcal{T}_{h_\pi}$ familias de particiones cuasiregulares de elementos finitos de Ω tales que sus diámetros son acotados por h_n, h_σ, h_c, h_u y h_π , respectivamente. Sean $\mathcal{X}_1 \subset \hat{H}^1, \mathcal{X}_2 \subset H(\text{div}), \mathcal{X}_3 \subset H^1(\Omega), \mathcal{X}_4 \subset H_0^1(\Omega)$ y $\mathcal{X}_5 \subset L_0^2(\Omega)$ espacios funciones continuas, tales que su restricción a cada elemento de la partición son polinomios. Sean $r_1, \dots, r_5$ a lo sumo el grado de cada polinomio para cada partición $\mathcal{T}_{h_n}, \mathcal{T}_{h_\sigma}, \mathcal{T}_{h_c}, \mathcal{T}_{h_u}$ y $\mathcal{T}_{h_\pi}$, respectivamente. También, asumamos que $\mathcal{X}_4$ y $\mathcal{X}_5$ satisfacen la siguiente condición inf-sup discreta:

Hipótesis 4.4.1.

$$\sup_{v \in \mathcal{X}_4 \setminus \{0\}} \frac{-(q, \nabla \cdot v)}{\|v\|_{\mathcal{X}_4}} \geq \beta \|q\|_{\mathcal{X}_5}, \quad \forall q \in \mathcal{X}_5, \quad (4.32)$$

donde $\beta > 0$ es una constante, independiente de h_u y h_π . Además, suponemos que $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_5$ satisfacen la siguientes propiedades de aproximación para $1 \leq q \leq \infty$ y algunos enteros $r_1, r_2 > 0$ and $r_4, r_3, r_5 \geq 0$:

Hipótesis 4.4.2.

$$\begin{aligned} \inf_{s_h \in \mathcal{X}_1} \|s - s_h\|_{L^2} &\leq K h_n^{r_1+1} \|s\|_{H^{r_1+1}}, & \forall s \in H^{r_1+1}(\Omega), \\ \inf_{w_h \in \mathcal{X}_2} \|w - w_h\|_{L^q} &\leq K h_\sigma^{r_2+1} \|w\|_{W^{r_2+1,q}}, & \forall w \in W^{r_2+1,q}(\Omega), \\ \inf_{w_h \in \mathcal{X}_2} \|\nabla \cdot (w - w_h)\|_{L^2} &\leq K h_\sigma^{r^*} \|\nabla \cdot w\|_{H^{r_2}}, & \forall w \in H^{r_2+1}(\Omega), \\ \inf_{z_h \in \mathcal{X}_3} \|z - z_h\|_{L^q} &\leq K h_c^{r_3+1} \|z\|_{W^{r_3+1,q}}, & \forall z \in W^{r_3+1,q}(\Omega), \\ \inf_{v_h \in \mathcal{X}_4} \|v - v_h\|_{L^2} &\leq K h_u^{r_4+1} \|v\|_{H^{r_4+1}}, & \forall v \in H^{r_4+1}(\Omega), \\ \inf_{p_h \in \mathcal{X}_5} \|p - p_h\|_{L^2} &\leq K h_\pi^{r_5+1} \|p\|_{H^{r_5+1}}, & \forall p \in H^{r_5+1}(\Omega), \end{aligned} \quad (4.33)$$

donde $r^* = r_2$ en caso de elementos BDDM, BDM, y BDFM, o $r^* = r_2 + 1$ en caso de elementos RT y Nedelec. Para construcciones de espacios que satisfacen (4.33) ver por ejemplo [17, 20, 30, 97, 128]. A continuación presentamos los operadores de proyección $\mathbb{P}_1 : \hat{H}^1 \rightarrow \mathcal{X}_1, \mathbb{P}_2 : H^1(\text{div}) \rightarrow \mathcal{X}_2, \mathbb{P}_3 : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_3, \mathbb{P}_4 : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_4$ y $\mathbb{P}_5 : L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_5$, tales que verifican las siguientes propiedades de aproximación para algún $s > 0$ (ver [20, 30, 97, 112, 128]):

Hipótesis 4.4.3.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|n^m - \mathbb{P}_1 n^m\|_{L^2} + h_n \|\nabla(n^m - \mathbb{P}_1 n^m)\|_{L^2} \leq K h_n^{s+1} \|n\|_{H^{s+1}}, & \forall n \in H^{s+1}(\Omega), \\ \|\sigma^m - \mathbb{P}_2 \sigma^m\|_{L^q} \leq K h_\sigma^{s+1} \|\sigma\|_{H^{s+1}}, & \forall \sigma \in H^{s+1}(\Omega), \\ \|\nabla \cdot (\sigma^m - \mathbb{P}_2 \sigma^m)\|_{L^q} \leq K h_\sigma^{s^*} \|\sigma\|_{H^{s+1}}, & \forall \sigma \in H^{s+1}(\Omega), \\ \|c^m - \mathbb{P}_3 c^m\|_{L^2} + \|\frac{\partial}{\partial t}(c^m - \mathbb{P}_3 c^m)\|_{L^2} \leq K h_c^{s+1} (\|c\|_{H^{s+1}} + \|c_t\|_{H^{s+1}}), & \forall c \in H^{s+1}(\Omega), \\ \|u^m - \mathbb{P}_4 u^m\|_{L^2} \leq K h_u^{s+1} \|u\|_{H^{s+1}}, & \forall u \in H^{s+1}(\Omega), \\ \|\pi^m - \mathbb{P}_5 \pi^m\|_{L^2} \leq K h_\pi^{s+1} \|\pi\|_{H^{s+1}}, & \forall \pi \in H^{s+1}(\Omega), \end{array} \right. \quad (4.34)$$

donde $s^* = s$ en caso de elementos BDDM, BDM, y BDFM, o $s^* = s + 1$ en caso de elementos RT y Nedelec.

Hipótesis 4.4.4.

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot (w - \mathbb{P}_2 w), \nabla \cdot \bar{w}) &= 0, \quad \forall \bar{w} \in \mathcal{X}_2, \quad \forall w \in H(\text{div}), \\ (z - \mathbb{P}_3 z, \bar{z}) &= 0, \quad \forall \bar{z} \in \mathcal{X}_3, \quad \forall z \in L^2(\Omega), \\ \|\mathbb{P}_1 \bar{n}\|_{H^1} &\leq C \|\bar{n}\|_{H^1}, \quad \forall \bar{n} \in \hat{H}^1(\Omega), \\ \|\mathbb{P}_3 \bar{c}\|_{L^2} &\leq C \|\bar{c}\|_{L^2}, \quad \forall \bar{c} \in L^2(\Omega), \\ \|\mathbb{P}_4 \bar{u}\|_{H^1} &\leq C \|\bar{u}\|_{H^1}, \quad \forall \bar{u} \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.4.2. Principales resultados numéricos

Teniendo en cuenta las formulaciones (4.18) y (4.28), consideramos el siguiente esquema de elementos finitos mixtos con método de las características modificado y *splitting*, que nos permitirá tratar convenientemente el término de la quimiotaxis; adicionalmente, este esquema iterativo 4.4.5 garantiza la conservación de masa para la densidad. Por otra parte las formas *skew-symmetric* A y B verifican las propiedades (4.6)-(4.11), las cuales son importantes en el análisis de convergencia.

Esquema 4.4.5. Sea $[n_h^0, \sigma_h^0, c_h^0, u_h^0] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4$ tal que

- i) $(n_h^0, \bar{n}) = (n_0, \bar{n}), \quad \forall \bar{n} \in \mathcal{X}_1,$
- ii) $(\sigma_h^0, \bar{\sigma}) = (\nabla c_0, \bar{\sigma}), \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathcal{X}_2,$
- iii) $(c_h^0, \bar{c}) = (c_0, \bar{c}), \quad \forall \bar{c} \in \mathcal{X}_3,$
- iv) $(u_h^0, \bar{u}) = (u_0, \bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{X}_4.$

Hallar $[n_h^m, \sigma_h^m, c_h^m, u_h^m, \pi^m] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_5$ tal que para todo

$$[\bar{n}, \bar{\sigma}, \bar{c}, \bar{u}, \bar{\pi}] \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_5,$$

se tiene que:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \left(\frac{\sigma_h^m - \sigma_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{\sigma} \right) + D_c(\nabla \cdot \sigma_h^m - c_h^{m-1}(n_h^{m-1} + \alpha), \nabla \cdot \bar{\sigma}) = (u_h^{m-1} \sigma_h^m, \nabla \cdot \bar{\sigma}), \\
b) \quad & \left(\frac{n_h^m - n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) + A(u_h^{m-1}, n_h^m, \bar{n}) = -D_n(\nabla n_h^m - \chi \alpha \sigma_h^m, \nabla \bar{n}), \\
c) \quad & \left(\frac{c_h^m - c_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{c} \right) = -A(u_h^{m-1}, c_h^m, \bar{c}) + (D_c \nabla \cdot \sigma_h^m - (n_h^m + \alpha) c_h^{m-1}, \bar{c}), \\
d) \quad & \rho \left(\frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{u} \right) + \rho B(u_h^m, u_h^m, \bar{u}) = -\eta(\nabla u_h^m, \nabla \bar{u}) + (\pi_h^m + (n_h^{m-1} + \alpha) \nabla \phi, \bar{u}), \\
e) \quad & (\bar{\pi}, \nabla \cdot u_h^m) = 0,
\end{aligned}$$

donde X_2^{n-1} y Y_2^{m-1} son las modificaciones de X_1^{m-1} y Y_1^{m-1} al remplazar σ^m por σ_h^m .

Para cada entero fijo $m \geq 1$, existe una solución $(n_h^m, \sigma_h^m, c_h^m, u_h^m, \pi_h^m)$ del esquema (4.4.5). La prueba se sigue del siguiente lema.

Lema 4.4.6. *Sea E un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar $[\cdot, \cdot]$ y norma $\|\cdot\|_E$, y sea P una función continua desde E en E tal que*

$$[P(\xi), \xi] > 0 \quad \text{para } \|\xi\|_E = k \geq 0.$$

Entonces existe $\xi \in E$, $\|\xi\|_E \leq k$ tal que $P(\xi) = 0$.

Con el fin de aplicar el Lema 4.4.6, consideremos $E = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \mathcal{X}_3 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_5$, con el producto escalar y norma naturales, esto es, si $\xi_1, \xi_2 \in E$ con $\xi_1 := (n_1, \sigma_1, c_1, u_1, \pi_1)$, $\xi_2 := (n_2, \sigma_2, c_2, u_2, \pi_2)$, entonces

$$[\xi_1, \xi_2] = (n_1, n_2)_{H^1} + (\sigma_1, \sigma_2)_{H(\text{div})} + (c_1, c_2) + (u_1, u_2)_{H_0^1} + (\pi_1, \pi_2)_{L_0^2},$$

y

$$\|\xi_1\|_X = \|n_1\|_{H^1} + \|\sigma_1\|_{L^2} + \|\nabla \cdot \sigma_1\|_{L^2} + \|c_1\|_{L^2} + \|\nabla u_1\|_{L^2} + \|\pi_1\|_{L^2}.$$

Definimos $P = Pm : E \rightarrow E$ tal que dado $(n_h^{m-1}, \sigma_h^{m-1}, c_h^{m-1}, u_h^{m-1}, \pi_h^{m-1}) \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned}
[P_m(\xi), \bar{\xi}] = & \left(\frac{n - n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) + A(u_h^{m-1}, n, \bar{n}) + D_n(\nabla n, \nabla \bar{n}) + \chi \alpha (\sigma, \nabla \bar{n}) \\
& + \left(\frac{\sigma - \sigma_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{\sigma} \right) + D_c(\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}) - (u_h^{m-1} \nabla c, \nabla \cdot \bar{\sigma}) - (c_h^{m-1} n_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}) \\
& - (\alpha c_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + \left(\frac{c - c_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{c} \right) + A(u_h^{m-1}, c, \bar{c}) - (D_c \nabla \cdot \sigma - c_h^{m-1} n, \bar{c}) \\
& + (\alpha c_h^{m-1}, \bar{c}) + \rho \left(\frac{u - u_h^{m-1}}{\Delta t}, \bar{u} \right) + \rho B(u, u, \bar{u}) + \eta(\nabla u, \nabla \bar{u}) - (\pi, \nabla \cdot \bar{u}) \\
& - ((n_h^{m-1} + \alpha) \nabla \phi, \bar{u}) + (\bar{\pi}, \nabla \cdot u),
\end{aligned}$$

para todo $\xi = (n, \sigma, c, u, \pi)$, $\bar{\xi} = (\bar{n}, \bar{\sigma}, \bar{c}, \bar{u}, \bar{\pi}) \in E$. Es sencillo ver que P_m es continuo. Además, recordando las propiedades (4.10), (4.11) y $\sigma = \nabla c$, tenemos que

$$\begin{aligned} [P_m(\xi), \xi] = & \left(\frac{n - n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, n \right) + D_n(\nabla n, \nabla n) + \chi \alpha(\sigma, \nabla n) + \left(\frac{\sigma - \sigma_h^{m-1}}{\Delta t}, \sigma \right) \\ & + D_c(\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \sigma) - (c_h^{m-1}(n_h^{m-1} + \alpha), \nabla \cdot \sigma) - (D_c \nabla \cdot \sigma - (n + \alpha)c_h^{m-1}, c) \\ & + \left(\frac{c - c_h^{m-1}}{\Delta t}, c \right) + \rho \left(\frac{u - u_h^{m-1}}{\Delta t}, u \right) + \eta(\nabla u, \nabla u) - ((n_h^{m-1} + \alpha) \nabla \phi, u). \end{aligned}$$

Después de algunas estimativas, tenemos

$$[P_m(\xi), (\xi)] \geq \|\xi\|_E (C_1 \|\xi\|_E - \|F\|_{L^2}),$$

donde $C_1(D_n, D_c, \eta, \rho, \Delta t)$ es una constante positiva y

$$F := \frac{n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma_h^{m-1}}{\Delta t} + \frac{c_h^{m-1}}{\Delta t} + \frac{u_h^{m-1}}{\Delta t} + c_h^{m-1}(n_h^{m-1} + \alpha) + (n_h^{m-1} + \alpha) \nabla \phi.$$

Se sigue que $[P_m(\xi), (\xi)] > 0$ para $\|\xi\|_E = k$, y k lo suficientemente grande tal que $k > 1/C_1 \|F\|_{L^2}$. Así, del Lema 4.4.6, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una solución del esquema numérico 4.4.5.

El esquema iterativo (4.4.5) garantiza la conservación de masa para la densidad; en efecto, note que como $1 \in \mathcal{X}_1$, podemos tomar $\bar{n} = 1$ en la ecuación *b*) de (4.4.5), de donde se obtiene que

$$\int_{\Omega} \frac{n_h^m - n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t} = 0. \quad (4.36)$$

Note que $\sigma_h^m \in W^{1,\infty}(\Omega)$; por lo tanto, aplicando el Lema 4.3.2 (ver también la Proposición 4.3.1), de (4.36) se concluye que

$$\int_{\Omega} n_h^m = \int_{\Omega} n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1} = \int_{\Omega} n_h^{m-1}.$$

Antes de enunciar el teorema de convergencia, establecemos algunas estimativas *a priori* del esquema 4.4.5, las cuales serán usadas en el análisis de convergencia. Tomando $\bar{u} = 2\Delta t u_h^m$, $\bar{\pi} = \frac{2\Delta}{\rho} \pi_h^m$ en las ecuaciones *d*) y *e*) del esquema 4.4.5, respectivamente, usando la igualdad $(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$ y la propiedad (4.10), obtenemos que:

$$\|u_h^m\|_{L^2}^2 - \|u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|u_h^m - u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \frac{2\eta\Delta t}{\rho} \|\nabla u_h^m\|_{L^2}^2 = \left(\frac{n_h^{m-1} + \alpha}{\rho} \nabla \phi, 2\Delta t u_h^m \right).$$

Aplicando las desigualdades de Hölder y Young tenemos que

$$\begin{aligned} & \|u_h^m\|_{L^2}^2 - \|u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|u_h^m - u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \frac{2\eta\Delta t}{\rho} \|\nabla u_h^m\|_{L^2}^2 \\ & \leq \epsilon \|u_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{(2\Delta t)^2}{4\epsilon\rho^2} (\|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2 + \alpha^2 \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Usando la desigualdad de Poincaré (4.3), tomando $\epsilon = \frac{\eta\Delta t}{2\rho C_P^2}$, de (4.37) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \|u_h^m\|_{L^2}^2 - \|u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|u_h^m - u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \frac{\eta\Delta t}{\rho} \|\nabla u_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{\eta\Delta t}{2\rho C_P^2} \|u_h^m\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{2\Delta t C_P^2}{\rho\eta} (\|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 + \alpha^2 \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aplicando la desigualdad discreta de Gronwall [37], obtenemos que

$$\|u_h^m\|_{L^2}^2 \leq \left(1 + \frac{\eta\Delta t}{2\rho C_P^2}\right)^{-m} \left\{ \|u_h^0\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{\eta\Delta t}{2\rho C_P^2}\right)^j g_{j+1}^I \right\}, \quad (4.39)$$

donde

$$g_j^I = \frac{2C_P^2}{\rho\eta} (\|n_h^{j-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2 + \alpha^2 \|\nabla\phi\|_{L^\infty}^2), \quad j = 1, 2, \dots$$

Notemos que

$$(n_h^m - n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}, 2n_h^m) \geq \|n_h^m\|_{L^2}^2 - \|n_h^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}\|_{L^2}^2,$$

por otra parte, $Y_2^{m-1} \leq K\Delta t + 1$ y teniendo en cuenta el Lema 4.3.2, obtenemos la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} \|n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}\|_{L^2}^2 & \leq (1 + K\Delta t) \int_{\Omega} (n^{m-1} \circ X_2^{m-1})^2 Y_2^{m-1} dx \\ & = (1 + K\Delta t) \|n^{m-1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Tomando $\bar{n} = 2\Delta t n_h^m$ en la ecuación b) del esquema 4.4.5 y usando (4.40), tenemos que

$$\begin{aligned} & \|n_h^m\|_{L^2}^2 - \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2D_n\Delta t \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 \leq \epsilon \|n_h^m\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{(2\Delta t)^2 \alpha^2 \chi^2}{4\epsilon} \|\sigma_h^m\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Usando la desigualdad de Poincaré (4.3), y tomando $\epsilon = \frac{D_n\Delta t}{2C_P^2}$ en (4.41) obtenemos que

$$\begin{aligned} & \|n_h^m\|_{L^2}^2 - \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + D_n\Delta t \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_n\Delta t}{2C_P^2} \|n_h^m\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{2\alpha^2 \chi^2 C_P^2 \Delta t}{D_n} \|\sigma_h^m\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Aplicando la desigualdad discreta de Gronwall, de (4.42) obtenemos que

$$\|n_h^m\|_{L^2}^2 \leq \left(1 + \frac{D_n\Delta t}{2C_P^2}\right)^{-m} \left\{ \|n_h^0\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{D_n\Delta t}{2\rho C_P^2}\right)^j g_{j+1}^{II} \right\}, \quad (4.43)$$

donde

$$g_j^{II} = \frac{2\alpha^2 \chi^2 C_P^2}{D_n} \|\sigma_h^j\|_{L^2}^2, \quad j = 1, 2, \dots$$

Tomando $\bar{\sigma} = 2\Delta t \sigma_h^m$ en las ecuación a) del esquema 4.4.5, usando la igualdad $(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$, y aplicando las desigualdades de Hölder y Young tenemos que

$$\begin{aligned} & \|\sigma_h^m\|_{L^2}^2 - \|\sigma_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\sigma_h^m - \sigma_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\Delta t D_c \|\nabla \cdot \sigma_h^m\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{3\epsilon}{2} \|\nabla \cdot \sigma_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{(2\Delta t)^2}{2\epsilon} (\|u_h^{m-1}\|_{L^4}^2 \|\sigma_h^{m-1}\|_{L^4}^2 + \|c_h^{m-1}\|_{L^4}^2 \|n_h^{m-1}\|_{L^4}^2 \\ & \quad + \alpha^2 \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Tomando $\epsilon = \frac{2}{3} D_c \Delta t$ en (4.44) y usando el Lemma 4.2.7, llegamos a

$$\begin{aligned} & \|\sigma_h^m\|_{L^2}^2 - \|\sigma_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\sigma_h^m - \sigma_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \Delta t D_c \|\nabla \cdot \sigma_h^m\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{3\Delta t}{D_c} \left(\frac{1}{h_u h_\sigma} \|u_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\sigma_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{h_c h_n} \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) \\ & \quad + \frac{3\Delta t \alpha^2}{D_c} \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Aplicando la desigualdad discreta de Gronwall, obtenemos que

$$\|\sigma_h^m\|_{L^2}^2 \leq \left(1 + \frac{3\Delta t}{D_c h_u h_\sigma} \right)^{-m} \left\{ \|\sigma_h^0\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + \frac{3\Delta t}{D_c h_u h_\sigma} \right)^j g_{j+1}^{III} \right\}, \quad (4.46)$$

donde

$$g_j^{III} = \frac{2D_c}{h_c h_n} \|c_h^{j-1}\|_{L^2}^2 \|n_h^{j-1}\|_{L^2}^2 + \frac{3\alpha^2}{D_c} \|c_h^{j-1}\|_{L^2}^2, \quad j = 1, 2, \dots$$

Tomando $\bar{c} = 2\Delta t c_h^m$, en las ecuación c) del esquema 4.4.5, respectivamente, usando la igualdad $(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$, la propiedad (4.10) y las desigualdades de Hölder y Young, el Lemma 4.2.7, obtenemos que

$$\begin{aligned} & \|c_h^m\|_{L^2}^2 - \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|c_h^m - c_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\Delta t D_c \|\nabla c_h^m\|_{L^2}^2 = ((n_h^m + \alpha) c_h^{m-1}, 2\Delta t c_h^m) \\ & \leq 2\Delta t \|n_h^m\|_{L^2} \|c_h^{m-1}\|_{L^4} \|c_h^m\|_{L^4} + 2\Delta t \alpha (\|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|c_h^m\|_{L^2}^2) \\ & \leq 2\Delta t \|c_h^m\|_{L^2}^2 + 2\Delta t \frac{1}{h_c h_n} \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 \\ & \quad + 2\Delta t \alpha (\|c_h^m\|_{L^2}^2 + \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\|c_h^m\|_{L^2}^2 - \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2}{\Delta t} \leq 2(\alpha + 1) \|c_h^m\|_{L^2}^2 + \left(\frac{2}{h_c h_n} \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\alpha \right) \|c_h^{m-1}\|_{L^2}^2.$$

Aplicando la desigualdad discreta (mixta) de Gronwall ([37]), concluimos que

$$\|c_h^m\|_{L^2}^2 \leq \|c_h^0\|_{L^2}^2 \prod_{j=1}^m \omega_j, \quad (4.48)$$

donde

$$\omega_j = \frac{1 + \left(\frac{2}{h_c h_n} \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\alpha \right) \Delta t}{1 - 2(\alpha + 1)\Delta t}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Recolectando las estimativas desde (4.37) hasta (4.48), y teniendo en consideración que $\frac{\Delta t}{h_c h_n}, \frac{\Delta t}{h_u h_\sigma} \leq 1$, podemos concluir que

$$\max_{0 \leq m \leq n} (\|u^m\|_{L^2}^2 + \|n^m\|_{L^2}^2 + \|\sigma^m\|_{L^2}^2 + \|c^m\|_{L^2}^2) \leq C, \quad (4.49)$$

donde C depende de las normas L^2 de u^0, n^0, σ^0, c^0 . Adicionalmente, tenemos que

$$\sum_{m=0}^n \Delta t (\|\nabla u^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla n^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla c^m\|_{L^2}^2) \leq C, \quad (4.50)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} (\|u^{m+1} - u^m\|_{L^2}^2 + \|n^{m+1} - n^m\|_{L^2}^2 + \|\sigma^{m+1} - \sigma^m\|_{L^2}^2 + \|c^{m+1} - c^m\|_{L^2}^2) \leq C, \quad (4.51)$$

donde C depende de las normas L^2 de u^0, n^0, σ^0, c^0 .

Teorema 4.4.7. *Considere las Hipótesis desde (4.4.1) hasta (4.4.4) y las consideraciones del Lema 4.3.2. Asumiendo que*

$$\frac{\eta}{C_p^2} - \rho C_B C_1 > 0, \quad (4.52)$$

y que los parametros de malla h_n, h_σ, h_c, h_u satisfacen las relaciones

$$h_c = \mathcal{O}(h_n) \quad \text{y} \quad h_u = \mathcal{O}(h_\sigma),$$

entonces las siguientes estimativas de error a priori para el esquema 4.4.5 tenemos

$$\begin{aligned} & \|n - n_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\sigma - \sigma_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|c - c_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|u - u_h\|_{L^\infty(L^2)} + \|\pi - \pi_h\|_{L^\infty(L^2)} \\ & \leq K \left\{ (\Delta t) + h_n^{r_1+1} + h_\sigma^{r_2+1} + h_\sigma^{r_2+1} + h_c^{r_3+1} + h_u^{r_4+1} + h_\pi^{r_5+1} \right\}, \\ & \|\pi - \pi_h\|_{L^2} \leq K \left\{ \|u_h^m - u^m\|_{H^1} + \|\theta_\pi^m\|_{L^2} + \|n_h^{m-1} - n^m\|_{L^2} \right\}. \end{aligned}$$

Observación 4.4.8. *Para dominios acotados generales, el Teorema 4.4.7 continua siendo válido, ahora bajo las suposiciones de la Proposición 4.3.1 en lugar de las suposiciones del Lema 4.3.2.*

4.5. Análisis de convergencia

En esta sección demostraremos el Teorema 4.4.7. Primero, dividiremos el error en dos partes, e introduciremos algunas notaciones para facilitar la lectura.

$$\begin{cases} n_h^m - n^m = (n_h^m - \mathbb{P}_1 n^m) - (n^m - \mathbb{P}_1 n^m) & := \xi_n^m - \theta_n^m, \\ \sigma_h^m - \sigma^m = (\sigma_h^m - \mathbb{P}_2 \sigma^m) - (\sigma^m - \mathbb{P}_2 \sigma^m) & := \xi_\sigma^m - \theta_\sigma^m, \\ c_h^m - c^m = (c_h^m - \mathbb{P}_3 c^m) - (c^m - \mathbb{P}_3 c^m) & := \xi_c^m - \theta_c^m, \\ u_h^m - u^m = (u_h^m - \mathbb{P}_4 u^m) - (u^m - \mathbb{P}_4 u^m) & := \xi_u^m - \theta_u^m, \\ \pi_h^m - \pi^m = (\pi_h^m - \mathbb{P}_5 \pi^m) - (\pi^m - \mathbb{P}_5 \pi^m) & := \xi_\pi^m - \theta_\pi^m. \end{cases}$$

Estimativas de error para la densidad n

Tomando la diferencia entre la ecuación $b)$ del esquema 4.4.5 y la forma variacional de (4.28), obtenemos la siguiente ecuación de error residual

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\xi_n^m - \xi_n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) + D_c(\nabla \xi_n^m, \nabla \bar{n}) = \\ & \quad \left(\frac{\partial n^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi \sigma^m u^m) - \frac{n^m - n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) \\ & \quad + \left(\frac{n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1} - n^{m-1} \circ X_1^{m-1} Y_1^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\theta_n^m - \theta_n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, \bar{n} \right) + D_c(\nabla \theta_n^m, \nabla \bar{n}) \\ & \quad + \alpha(\sigma_h^m - \sigma^m, \nabla \bar{n}) + A(u^{m-1}, n^m, \bar{n}) - A(u_h^{m-1}, n_h^m, \bar{n}) \\ & = I_1 + \dots + I_7. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Escogiendo $\bar{n} = \xi_n^m$ en la ecuación anterior, siguiendo las técnicas usadas en [129], Sección 3 (ver también Lema 1 en [103] y Lema 1 en [34]), podemos obtener las siguientes estimativas para I_1, I_2 y I_3 , para $\epsilon, \delta > 0$ arbitrario

$$I_1 \leq K(\Delta t)^2 \|n\|_{C^2(L^2) \cap C^1(H^1) \cap C^0(H^2)}^2 + \epsilon \|\xi_n^m\|_{L^2}^2, \tag{4.54}$$

$$I_2 \leq K \left\{ \|\sigma_h^m - \sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot (\sigma_h^m - \sigma^m)\|_{L^2}^2 \right\} + \epsilon \|\xi_n^m\|_{L^2}^2, \tag{4.55}$$

$$I_3 \leq K \left\{ \left\| \frac{\theta_n^m - \theta_n^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \right\} + \epsilon \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \delta \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2. \tag{4.56}$$

Por otra parte, las desigualdades de Hölder y Young implican que

$$I_4 \leq K \|\nabla \theta_n^m\|_2^2 + \delta \|\nabla \xi_n^m\|_2^2 \tag{4.57}$$

y

$$I_5 \leq K \|\sigma_h^m - \sigma^m\|_{L^2}^2 + \delta \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2. \tag{4.58}$$

Ahora usando (4.11), $I_6 + I_7 = A(u^{m-1}, n^m, \xi_n^m) - A(u_h^{m-1}, n_h^m, \xi_n^m)$ puede ser reescrita como

$$I_6 + I_7 = -A(\xi_u^{m-1}, n_h^m, \xi_n^m) + A(\mathbb{P}_4 u^{m-1}, \theta_n^m, \xi_n^m) + A(\xi_u^{m-1}, n^m, \xi_n^m).$$

Así, de (4.7)-(4.3) obtenemos

$$I_6 + I_7 \leq K \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2} \left\{ \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1} \|\nabla n_h^m\|_{L^2} + \|\mathbb{P}_4 u^{m-1}\|_{H^1} \|\nabla \theta_n^m\|_{L^2} + \|\theta_u^{m-1}\|_{H^1} \|\nabla n^m\|_{L^2} \right\}.$$

Usando las estimativas *a priori* (4.49)-(4.50), obtenemos

$$I_6 + I_7 \leq K \left\{ \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_n^m\|_{H^1}^2 + \|\theta_u^{m-1}\|_{H^1}^2 \right\} + \delta \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}. \quad (4.59)$$

De (4.54)-(4.59) tenemos una cota superior para el lado derecho de (4.53). Ahora acotaremos por abajo el lado izquierdo. Para esto, note que

$$\left(\frac{\xi_n^m - \xi_n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}}{\Delta t}, \xi_n^m \right) \geq \frac{1}{2\Delta t} (\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}\|_{L^2}^2). \quad (4.60)$$

Además, ya que $Y_2^{m-1} \leq K\Delta t + 1$, teniendo en cuenta el Lema 4.3.2, obtenemos la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} \|\xi_n^{m-1} \circ X_2^{m-1} Y_2^{m-1}\|_{L^2}^2 &\leq (1 + K\Delta t) \int_{\Omega} (\xi_n^{m-1} \circ X_2^{m-1})^2 Y_2^{m-1} dx \\ &= (1 + K\Delta t) \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Así, para (4.54)-(4.61), concluimos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\Delta t} (\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2) &\leq K \left\{ (\Delta t)^2 + \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\theta_n^m - \theta_n^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad + \|\sigma_h^m - \sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot (\sigma_h^m - \sigma^m)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_n^m\|_{H^1}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \left. \right\} \\ &\quad + 3\epsilon \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + 4\delta \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Estimativas de error para el flujo σ

Restando la ecuación *a*) en el esquema 4.4.5 y la versión semidiscreta de la ecuación *a*) en (4.18), recordando que $(\nabla \cdot (w_1 - \mathbb{P}_2 w_1), \nabla \cdot \bar{\sigma}) = 0$ para todo $\bar{\sigma} \in \mathcal{X}_2 \subset H(\text{div})$ y tomando $\bar{\sigma} = \xi_\sigma^m$ tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_\sigma^m - \xi_\sigma^{m-1}}{\Delta t}, \xi_\sigma^m \right) + (\xi_\sigma^m, \xi_\sigma^m) &= -D_c(\nabla \cdot \xi_\sigma^m, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) + \left(\frac{\theta_\sigma^m - \theta_\sigma^{m-1}}{\Delta t}, \xi_\sigma^m \right) + (\theta_\sigma^m, \xi_\sigma^m) \\ &\quad + (c_h^{m-1}(n_h^{m-1} + \alpha), \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (c^m(n^m + \alpha), \nabla \cdot \xi_\sigma^m) \\ &\quad + (u^{m-1} \nabla c_h^m, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (u \nabla c, \nabla \cdot \xi_\sigma^m). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Reescribimos los siguientes términos de una manera conveniente

$$\begin{aligned}
(c_h^{m-1}(n_h^{m-1} + \alpha), \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (c^m(n^m + \alpha), \nabla \cdot \xi_\sigma^m) = \\
(c^m(n^m - n^{m-1}), \nabla \cdot \xi_\sigma^m) + ((c^{m-1} - c^m)n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) \\
+ \alpha(c_h^{m-1} - c^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) + \alpha(c^{m-1} - c^m, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) \\
+ (c_h^{m-1}n_h^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (c^{m-1}n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Notemos que podemos estimar los dos últimos sumandos del lado derecho de (4.64) como

$$\begin{aligned}
|(c_h^{m-1}n_h^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (c^{m-1}n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \leq \\
|((c_h^{m-1} - c^{m-1})\mathbb{P}_1 n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| + |(c^{m-1}\theta_n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
+ |(\xi_c^{m-1}\xi_n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| + |(\theta_c^{m-1}\xi_n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
+ |(c^{m-1}\xi_n^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
\leq K \left\{ \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 \right. \\
\left. + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d})\|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \right\} \\
+ \delta \|\nabla \cdot \xi_\sigma^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Ahora, procediendo de manera similar tenemos que

$$\begin{aligned}
|(u^{m-1}\nabla c_h^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m) - (u^{m-1}\nabla c^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \leq \\
|((u_h^{m-1} - u^{m-1})\mathbb{P}_2 \sigma^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| + |(u^{m-1}\theta_\sigma^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
+ |(\xi_u^{m-1}\xi_\sigma^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| + |(\theta_u^{m-1}\xi_\sigma^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
+ |(u^{m-1}\xi_\sigma^{m-1}, \nabla \cdot \xi_\sigma^m)| \\
\leq K \left\{ \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 \right. \\
\left. + [1 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_u^{-d}, h_\sigma^{-d})\|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 \right\} \\
+ \delta \|\nabla \cdot \xi_\sigma^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Usando las desigualdades de Hölder y Young acotamos los términos restantes del lado derecho de (4.64) y junto con las anteriores acotaciones (4.65)-(4.66), obtenemos las siguientes estimativas para los terminos de error asociados al flujo σ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) + \|\xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 \leq \\
& K \left\{ \left\| \frac{\theta_\sigma^m - \theta_\sigma^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \|\theta_\sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 \right. \\
& + \|c^m - c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + \|n^m - n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + [1 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_u^{-d}, h_\sigma^{-d}) \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& \left. + (\Delta t)^2 + \|\theta_c^m\|_{H^1}^2 + \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1}^2 \right\} \\
& + \epsilon \|\xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 + 2\delta \|\nabla \cdot \xi_\sigma^m\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

Estimativa de error para el campo de velocidades u

Sustrayendo (4.20) de d) en el esquema 4.4.5, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\xi_u^m - \xi_u^{m-1}}{\Delta t}, \bar{u} \right) + \eta(\nabla \xi_u^m, \nabla \bar{u}) &= \rho \left(\frac{\xi_u^m - \xi_u^{m-1}}{\Delta t}, \bar{u} \right) + \eta(\nabla \xi_u^m, \nabla \bar{u}) \\
&+ \rho B(\xi_u^m, u_h, \bar{u}) - \rho B(\mathbb{P}_4 u^m, \xi_u^m, \bar{u}) \\
&- \rho B(\xi_u^m, u_h, \bar{u}) - (\theta_\pi^m, \nabla \cdot \bar{u}) \\
&+ ((n_h^{m-1} - n^m) \nabla \phi, \bar{u}).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Tomando $\bar{u} = \xi_u^m$, usando las estimativas *a priori* (4.49)-(4.50), aplicando (4.6) y (4.12), obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\xi_u^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) + \frac{\eta}{\rho} \|\xi_u^m\|_{H^1}^2 \leq \\
& \left\| \frac{\theta_u^m - \theta_u^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2} \|\xi_u^m\|_{L^2} + C_B \|\xi_u^m\|_{H^1} \|u_h^m\|_{H^1} \|\xi_u^m\|_{H^1} \\
& + C_B \|\xi_u^m\|_{H^1} \left(\|\mathbb{P}_4 u^m\|_{H^1} \|\xi_u^m\|_{H^1} + \|u^m\|_{H^1} \|\xi_u^m\|_{H^1} \right) \\
& + \frac{\eta}{\rho} \|\xi_u^m\|_{H^1} \|\xi_u^m\|_{H^1} + \frac{1}{\rho} \|\theta_\pi^m\|_{L^2} \|\xi_u^m\|_{H^1} \\
& + \frac{1}{\rho} \|n_h^{m-1} - n^m\|_{L^2} \|\nabla \phi\|_{L^\infty} \|\xi_u^m\|_{H^1}.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Teniendo en cuenta la hipótesis ($\frac{\eta}{C_p^2} - \rho C_B C_1 > 0$) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\xi_u^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) + \|\xi_u^m\|_{H^1}^2 \leq K \left\{ \left\| \frac{\theta_u^m - \theta_u^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \right. \\
& + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|n^m - n^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& \left. + \|\xi_u^m\|_{H^1}^2 + \|\theta_\pi^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \right\} + \delta \|\xi_u^m\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Estimativa de error para la señal química c

Tomando la diferencia entre las ecuación b) en (4.18) y la ecuación c) del esquema 4.4.5, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_c^m - \xi_c^{m-1}}{\Delta t}, \bar{c} \right) &= \left(\frac{\theta_c^m - \theta_c^{m-1}}{\Delta t}, \bar{c} \right) + ((n_h^m + \alpha)c_h^{m-1} - (n^m + \alpha)c^m \\ &\quad + D_c \nabla \cdot (\sigma_h^m - \sigma^m), \bar{c}) - A(u_h^{m-1}, c_h^m, \bar{c}) + A(u^{m-1}, c^m, \bar{c}). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Tomando $\bar{c} = \xi_c^m$ en 4.71

$$\begin{aligned} \left(\frac{\xi_c^m - \xi_c^{m-1}}{\Delta t}, \xi_c^m \right) &= \left(\frac{\theta_c^m - \theta_c^{m-1}}{\Delta t}, \xi_c^m \right) + ((n_h^m + \alpha)c_h^{m-1} - (n^m + \alpha)c^m, \xi_c^m) \\ &\quad + (D_c \nabla \cdot (\sigma_h^m - \sigma^m), \xi_c^m) - A(u_h^{m-1}, c_h^m, \xi_c^m) + A(u^{m-1}, c^m, \xi_c^m). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |(n_h^m c_h^{m-1}, \xi_c^m) - (n^m c^{m-1}, \xi_c^m)| &\leq |((c_h^{m-1} - c^{m-1})\mathbb{P}_1 n^m, \xi_c^m)| + |(c^{m-1} \theta_n^m, \xi_c^m)| \\ &\quad + |(\xi_c^{m-1} \xi_n^m, \xi_c^m)| + |(\theta_c^{m-1} \xi_n^m, \xi_c^m)| \\ &\quad + |(c^{m-1} \xi_n^m, \xi_c^m)| \\ &\leq K \left\{ \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^m\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 \right. \\ &\quad \left. + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 \right\} \\ &\quad + \epsilon \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Procediendo como en las anteriores estimativas podemos acotar los términos restantes del lado derecho de (4.72), obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\xi_c^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) &\leq K \left\{ \left\| \frac{\theta_c^m - \theta_c^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad + \|c^m - c^{m-1}\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 \\ &\quad + \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^m\|_{L^2}^2 \\ &\quad + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 \\ &\quad \left. + \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_c^m\|_{H^1}^2 \right\} + \epsilon \|\xi_c^m\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Tomando ϵ y δ suficientemente pequeños y combinando (4.62), (4.67), (4.70), (4.74), obtenemos que:

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\Delta t} \left(\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_u^m\|_{L^2}^2 - \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2 \right) \\
& \leq K \left\{ \left\| \frac{\theta_n^m - \theta_n^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\theta_\sigma^m - \theta_\sigma^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\theta_u^m - \theta_u^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 \right. \\
& \quad + \left\| \frac{\theta_c^m - \theta_c^{m-1}}{\Delta t} \right\|_{L^2}^2 + (\Delta t)^2 + \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \theta_\sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_\sigma^m\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_c^{m-1}\|_{H^1}^2 \\
& \quad + [1 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_u^{-d}, h_\sigma^{-d}) \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_\sigma^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_u^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& \quad + [1 + \|\theta_c^{m-1}\|_{L^\infty}^2 + \min(h_c^{-d}, h_n^{-d}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2] \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 \\
& \quad \left. + \|\xi_u^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_\pi^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^m\|_{H^1}^2 + \|\theta_c^m\|_{H^1}^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

Ahora introduciremos la siguiente hipótesis inductiva:

$$\min(h_u^{-1}, h_\sigma^{-1}) \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0, \tag{4.76}$$

$$\min(h_c^{-1}, h_n^{-1}) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0. \tag{4.77}$$

Bajo (4.76)-(4.77) y multiplicando (4.75) por $2\Delta t$, luego tomando la suma sobre m , obtenemos

$$\begin{aligned}
& \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_\sigma^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_u^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{i=1}^n \left(\|\nabla \xi_n^i\|_{L^2}^2 \right) \\
& \leq K_1 \Delta t \sum_{i=1}^m \left\{ \|\xi_n^{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_n^i\|_{L^2}^2 + \|\xi_c^{i-1}\|_{L^2}^2 \right. \\
& \quad + \|\xi_\sigma^{i-1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_u^{i-1}\|_{H^1}^2 \left. \right\} + K_2 \left\{ h_n^{2r_1+2} + h_\sigma^{2r_2+2} \right. \\
& \quad \left. + h_c^{2r_3+2} + h_u^{2r_4+2} + h_\pi^{2r_5+2} + (\Delta t)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.78}$$

donde K_1, K_2 son constantes positivas independientes de h y Δt . Aplicando la versión discreta del lema de Gronwall, concluimos que

$$\begin{aligned}
& \|\xi_n^m\|_{L^\infty(L^2)} + \|\xi_c^m\|_{L^\infty(L^2)} + \|\xi_\sigma^m\|_{L^\infty(L^2)} + \|\xi_u^m\|_{L^\infty(L^2)} \leq \\
& K \left\{ (\Delta t) + h_n^{r_1+1} + h_\sigma^{r_2+1} + h_c^{r_3+1} + h_u^{r_4+1} + h_\pi^{r_5+1} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Con el fin de completar la demostración de (4.78), debemos verificar que la hipótesis inductiva (4.76)-(4.77) se cumple. En este punto usaremos ideas presentadas en [128, 33]. Primero asumamos que

$$\|\xi_u^{m-1}\|_{L^2} = \mathcal{O}(h_u^{r_4+1} + h_\sigma^{r_2+1}), \tag{4.80}$$

$$\|\xi_c^{m-1}\|_{L^2} = \mathcal{O}(h_c^{r_3+1} + h_n^{r_1+1}). \tag{4.81}$$

Notemos que si (4.80)-(4.81) se cumplen, entonces la hipótesis (4.76)-(4.77) se tienen. De hecho, vamos a mostrar que (4.80) implica (4.76). Si $h_u \leq h_\sigma$, tenemos

$$\min(h_u^{-1}, h_\sigma^{-1}) \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2} \leq K(h_u^{r_4+1} h_\sigma^{-1} + h_\sigma^{r_2}), \quad (4.82)$$

para $r_4 \geq 1$, el lado derecho de (4.82) va para cero cuando $h \rightarrow 0$. Para $r_4 = 0$, entonces debemos imponer la condición $h_u < h_\sigma$ y la relación $h_u^{r_4+1} h_\sigma^{-1} = \mathcal{O}(h_u^{1/2}) = \mathcal{O}(h_\sigma)$, lo cual nos permite obtener (4.76). Por otra lado si $h_u > h_\sigma$, tenemos

$$\min(h_u^{-1}, h_\sigma^{-1}) \|\xi_u^{m-1}\|_{L^2} \leq K(h_u^{r_4} + h_\sigma^{r_2+1} h_u^{-1}) \leq K(h_u^{r_4} + h_\sigma^{r_2}),$$

como $r_4 \geq 1$, obtenemos la verificación de (4.76). Trabajando de manera similar, podemos mostrar que (4.81) implica (4.77). Ahora, justificaremos la hipótesis (4.80)-(4.81), de (4.78), para $t = 0$, se cumple que

$$\|\xi(0)_u\|_{L^2} + \|\xi(0)_u\|_{L^2} \leq K \{h_n^{r_1+1} + h_\sigma^{r_2+1} + h_c^{r_3+1} + h_u^{r_4+1} + h_\pi^{r_5+1}\}.$$

Note que si escogemos una relación particular entre h_n , h_σ , h_c , h_u y h_π , a saber $h_n^{r_1+1} = h_\sigma^{r_2+1}$, $h_c^{r_3+1} = h_u^{r_4+1}$ y $h_\pi^{r_5} \leq \min(h_c^{r_3+1}, h_n^{r_1+1})$, entonces (4.80)-(4.81) se cumple en $t = 0$. Para fijos h_n , h_σ , h_c , h_u y h_π , tenemos (4.80)-(4.81) para $0 \leq t \leq T_h$ para algún $T_h > 0$. Procediendo de manera recursiva de (4.79) obtenemos que $T = T_h$, es decir la hipótesis inductiva (4.80)-(4.81) se cumple, para un tamaño de malla suficientemente pequeño.

Para finalizar la prueba nos resta estimar $\|\pi_h - \mathbb{P}_5 \pi\|_{L^2}$. Restando la ecuación d) del esquema 4.4.5 de la ecuación (4.20), tenemos

$$\begin{aligned} -(\xi_\pi^m, \nabla \cdot \bar{u}) = & -\rho B(u_h^m, u_h^m, \bar{u}) + \rho B(u^m, u^m, \bar{u}) - \eta(\nabla(u_h^m - u^m), \nabla \bar{u}) \\ & - (\theta_\pi^m, \nabla \cdot \bar{u}) + ((n_h^{m-1} - n^m) \nabla \phi, \bar{u}). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Por la Hipótesis (4.32) y del resultado (4.83), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\xi_\pi^m\|_{L^2} & \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\bar{u} \in \mathcal{X}_4} \frac{1}{\|\bar{u}\|_{H^1}} \left\{ -\rho B(u_h^m, u_h^m - u^m, \bar{u}) + \rho B(u^m - u_h^m, u^m, \bar{u}) \right. \\ & \quad \left. - \eta(\nabla(u_h^m - u^m), \nabla \bar{u}) - (\theta_\pi^m, \nabla \cdot \bar{u}) + ((n_h^{m-1} - n^m) \nabla \phi, \bar{u}) \right\} \\ & \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\bar{u} \in \mathcal{X}_4} \frac{1}{\|\bar{u}\|_{H^1}} \left\{ K \|u_h^m - u^m\|_{H^1} \|\bar{u}\|_{H^1} + \|\theta_\pi^m\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{H^1} \right. \\ & \quad \left. + C_4 \|n_h^{m-1} - n^m\|_{L^2} \|\bar{u}\|_{L^2} \right\} \\ & \leq K \left\{ \|u_h^m - u^m\|_{H^1} + \|\theta_\pi^m\|_{L^2} + \|n_h^{m-1} - n^m\|_{L^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

De esta manera completamos la prueba del Teorema 4.4.7.

4.6. Experimentos numéricos

En esta sección presentaremos cuatro diferentes experimentos numéricos que muestran que nuestro esquema proporciona buenas aproximaciones al fenómeno de la quimiotaxis. En efecto, nuestro primer experimento se realiza usando el Esquema 4.4.5 para aproximar las soluciones del sistema (4.1)-(4.2); en segundo lugar, motivados por las observaciones de [53, 56, 114], presentamos resultados numéricos para el modelo (4.1) bajo unas condiciones de frontera de tipo mixto; posteriormente, en nuestro tercer experimento, desacoplando las ecuaciones para el fluido, aproximaremos la solución para un modelo Keller-Segel, con señal de producción y degradación de la sustancia química de la forma $c - n$, y para finalizar, en un cuarto experimento, consideramos el modelo Keller-segel del Experimento 3 acoplado con las ecuaciones de Navier-Stokes. Todos los resultados numéricos fueron computados usando el software Freefem++.

En los cuatro experimentos establecemos los parámetros basados en los experimentos y valores aproximados presentado por [114]; trabajaremos en un dominio rectangular $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ usando un método de la característica modificada para tratar con el término quimiotáctico, y los espacios de aproximación usados son $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_4 = P_2$, (funciones continuas cuya restricción a cada elemento de la malla es un polinomio de grado 2) y $\mathcal{X}_5 = P_1$.

Experimento I

En esta validación de nuestros resultados, primero obtenemos un sistema adimensional equivalente a (4.1) reescalando las variables como en [114]:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n - M \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = D_a \Delta c - H n c, \\ u_t + u \cdot \nabla u = S_c \Delta u - S_c \nabla \pi - S_c B n \hat{\mathbf{j}}, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (4.85)$$

donde M , D_a , H , B y S_c , son constantes adimensionales, a saber, $M = \frac{\chi c_{air}}{D_n}$, $D_a = \frac{D_c}{D_n}$, $H \approx 10$ es la relación entre el tiempo de difusión de los organismos y el consumo de la señal química, $B \approx 10^3$ es el análogo al numero de Rayleigh en la convección térmica y $S_c \approx 10^3$ es el número de Schmidt.

En este experimentos usaremos las condiciones de frontera

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T). \quad (4.86)$$

Utilizamos el Esquema 4.4.5 para aproximar la solución de (4.85)-(4.86) en un dominio rectangular $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$, para los siguientes datos iniciales:

$$n_0 = 120 \exp(-6(x - 0.3)^2 - 10(y - 1)^2) + 80 \exp(-8(x - 1.2)^2 - 10(y - 0.5)^2),$$

$$c_0 = 100 \exp(-5(x-1)^2 - 5(y-0,5)^2) \quad u_0 = [0, 0],$$

con un parámetro de malla $h = 1/120$. El paso de tiempo es $\Delta t = 1e - 5$. En el sistema (4.85) consideramos las constantes $M = 10$, $D_a = 5$, $H = 10$, $B = 500$, y $S_c = 200$, y mostramos los resultados computacionales para los tiempos $t = 0$, $t = 5e - 005$, $t = 8e - 005$, $t = 10e - 005$, $t = 12e - 005$, $t = 14e - 005$, $t = 16e - 005$. Los resultados se representan en la Figura 4.3 y 4.4, donde podemos observar inicialmente que los organismos se encuentran en dos cúmulos en la parte superior de nuestro dominio, y al pasar el tiempo el efecto de atracción es predominante en el sistema y los organismos comienzan a orientar su movimiento en la dirección de mayor concentración de la señal química; podemos apreciar como los cúmulos de organismos generan un especie de puente entre ellos y al cabo de un tiempo vemos como los organismos tienden a aglomerarse en el centro del rectángulo.

Figura 4.3 – Experimento numérico I, densidad de los organismos

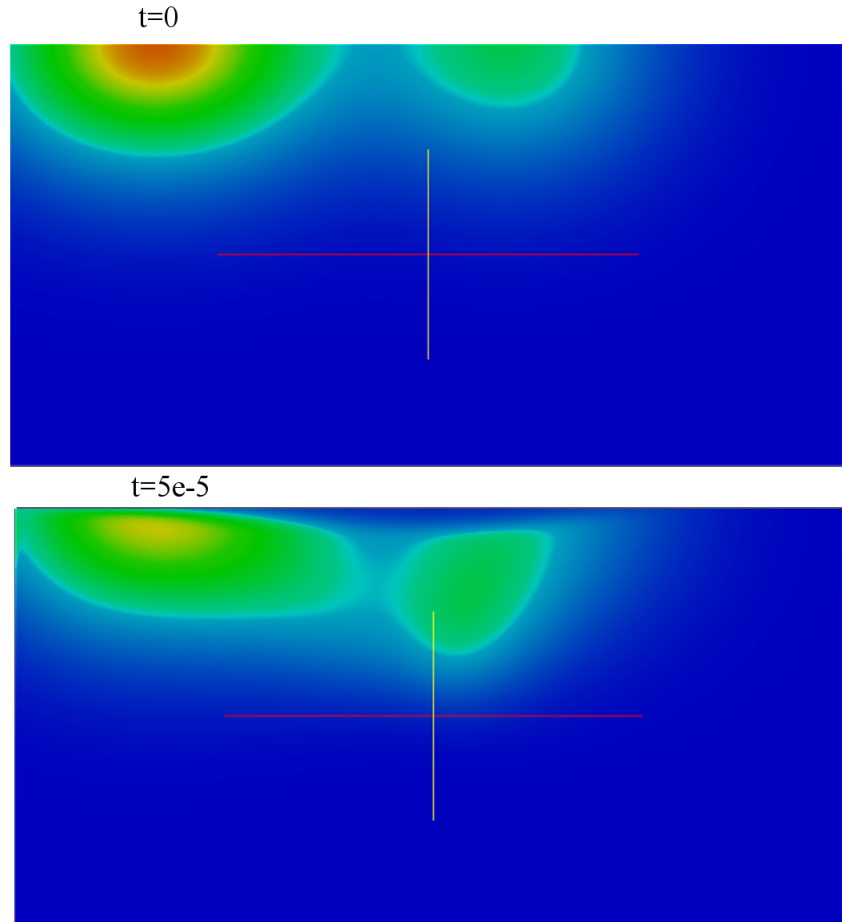
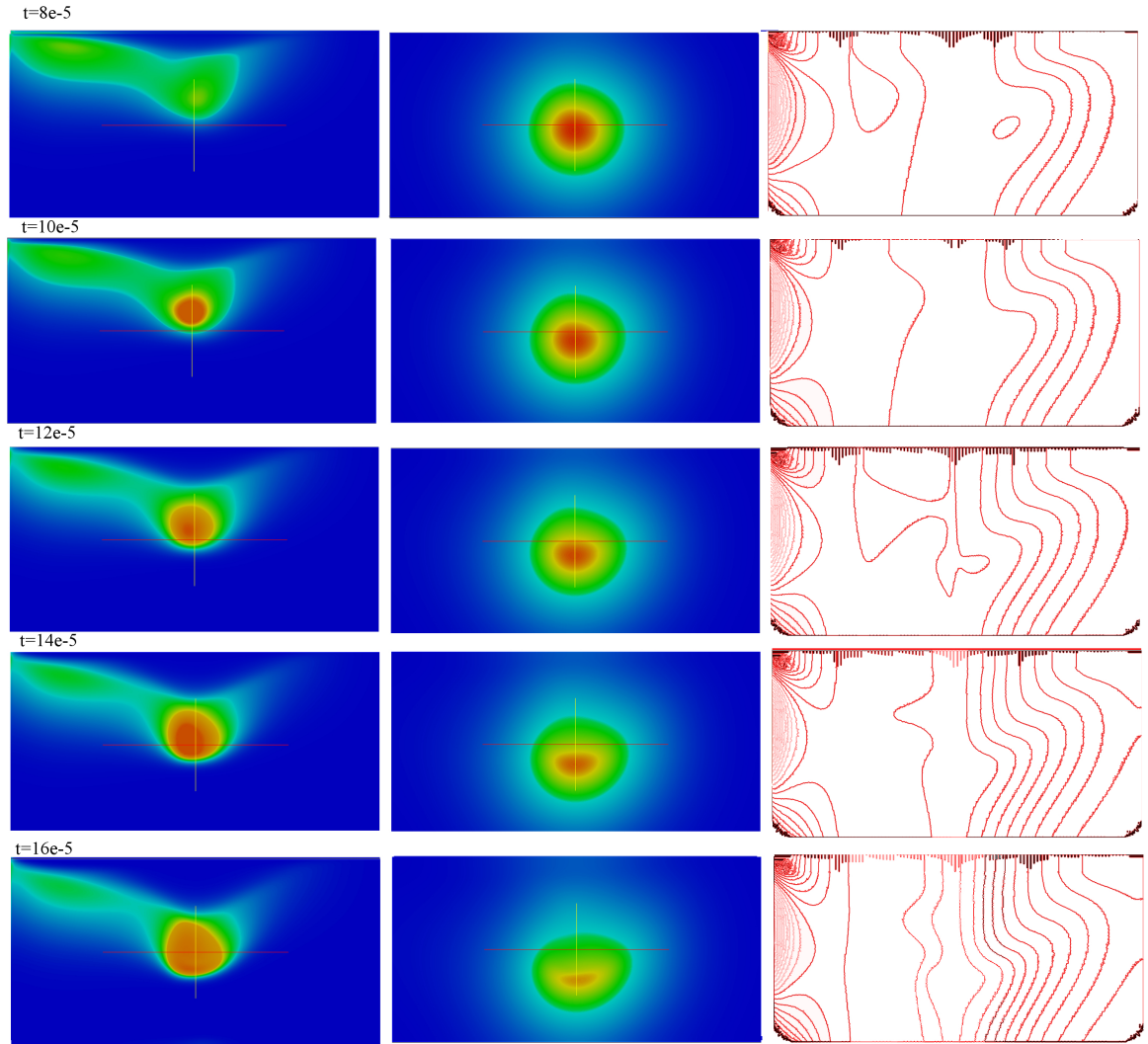


Figura 4.4 – Experimento numérico I, densidad de los organismos, concentración química y velocidad del fluido.



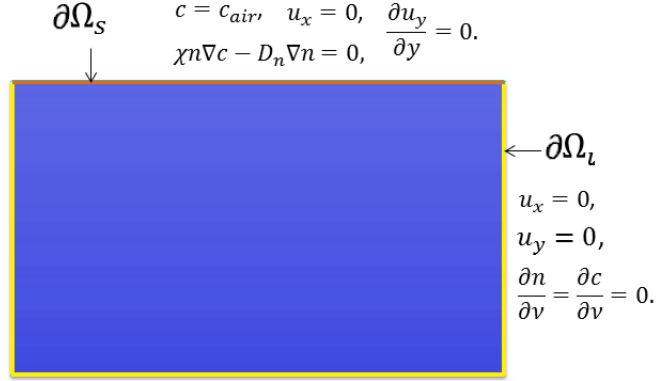
La Figura 4.4 muestra los resultados del experimento I, en la columna a la izquierda tenemos la densidad de los organismos, en la columna central observamos la concentración química y en la columna derecha tenemos la velocidad del fluido. La señal de atracción c_h ubicada inicialmente en el centro del dominio es consumida por los organismos como apreciamos en la columna central de la Figura 4.4. En la columna de la derecha, observamos la evolución del campo de velocidades, influenciado por el movimiento de los organismos.

Experimento II

En este experimento aproximaremos la solución de (4.85) con las siguientes condiciones de frontera mixtas: las condiciones en la capa superior Ω_s describen una superficie libre

en contacto con el aire donde el flujo de organismos se considera nulo, la señal química se satura a la concentración c_{air} , la velocidad vertical y el esfuerzo tangencial del fluido son cero. Por otra parte en el resto del dominio Ω_l el flujo de organismos, el flujo de la señal química y la velocidad del fluido son cero.

Figura 4.5 – Condiciones de frontera mixtas.



Las condiciones de frontera ilustradas en la Figura 4.5, son resumidas así:

$$\begin{cases} c(x, t) = 1, & \chi n \nabla c - \nabla n = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x_2} = u_1(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega_s, & t \in (0, T), \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial \nu} = 0, & u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega_l, & t \in (0, T). \end{cases} \quad (4.87)$$

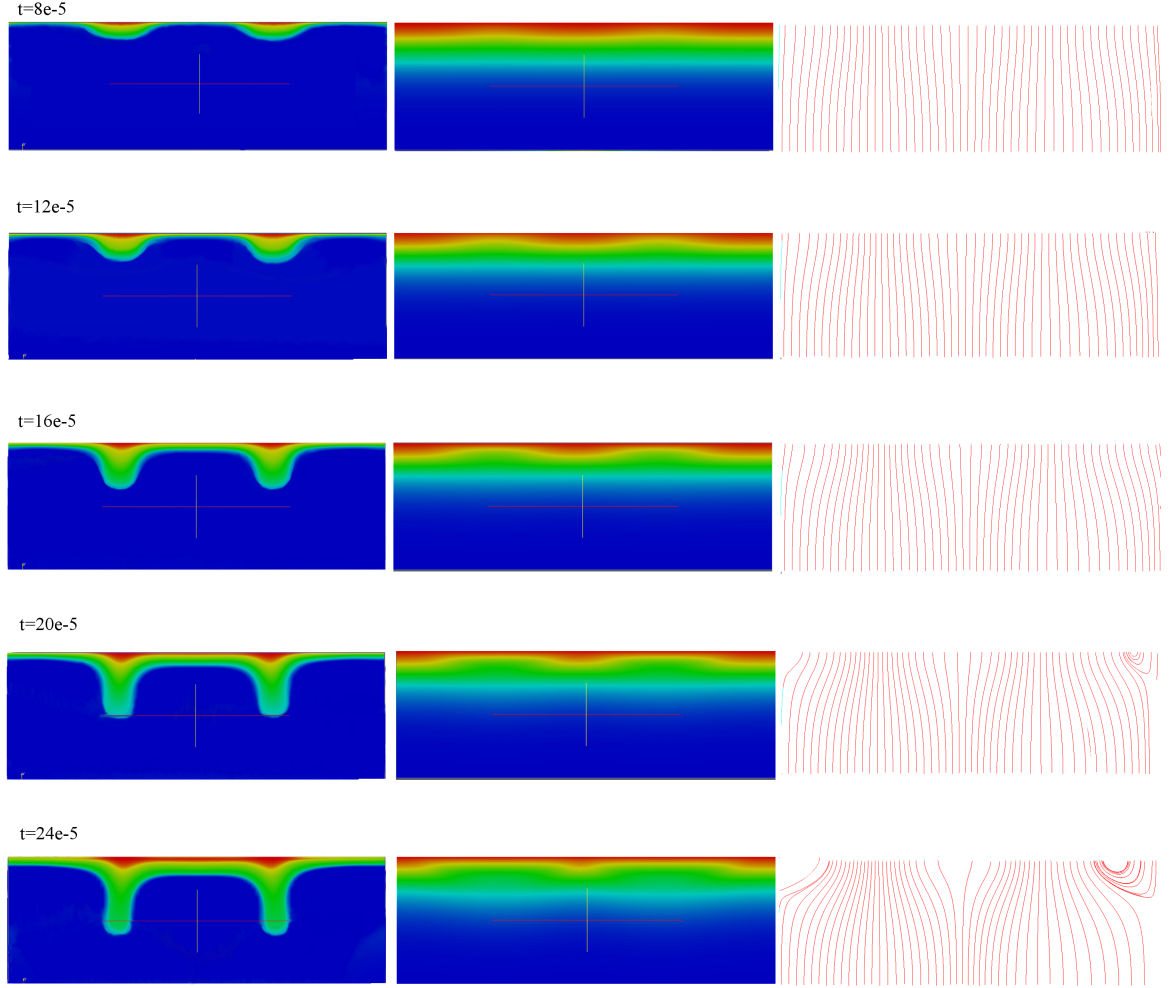
Ahora, adaptaremos el Esquema 4.4.5 para aproximar la solución de (4.85)-(4.87) en un dominio rectangular $\Omega = [0, 3] \times [0, 1]$, para los siguientes datos iniciales:

$$n_0 = 30[(-10(x - 0,8)^2 - 60(y - 1)^2) + \exp(-10(x - 2,1)^2 - 60(y - 1)^2)]$$

$$c_0 = 1/(1 + (4y - 4)^2)^4, \quad u_0 = [0, 0].$$

Vale la pena resaltar que después de realizar diferentes experimentos, podemos concluir que la evolución del modelo está fuertemente determina por los valores dados a los parámetros M , D_a , H , B , y S_c .

Figura 4.6 – Experimento numérico II, densidad de los organismos vs concentración vs velocidad del fluido



La solución numérica el Experimento II fue calculada para un parámetro de malla $h = 1/120$. El paso de tiempo es $\Delta t = 1e - 5$. La densidad celular n_h es calculada para las constantes $M = 20$, $D_a = 5$, $H = 10$, $B = 2000$, y $S_c = 500$, para diferentes tiempos $t = 8e - 5$, $t = 12e - 5$, $t = 16e - 5$, $t = 20e - 5$, $t = 24e - 5$ y los resultados se representan en la Figura 4.6. Podemos notar la aparición de plumas hidrostáticas en forma de dedos, coincidiendo con las observaciones experimentales registradas en [53, 56, 114]. Los resultados para la concentración de la señal química columna central y las líneas de corriente para velocidad a la derecha en diferentes tiempos $t = 8e - 5$, $t = 12e - 5$, $t = 16e - 5$, $t = 20e - 5$, $t = 24e - 5$, se presentan en la Figura 4.6.

Experimento III

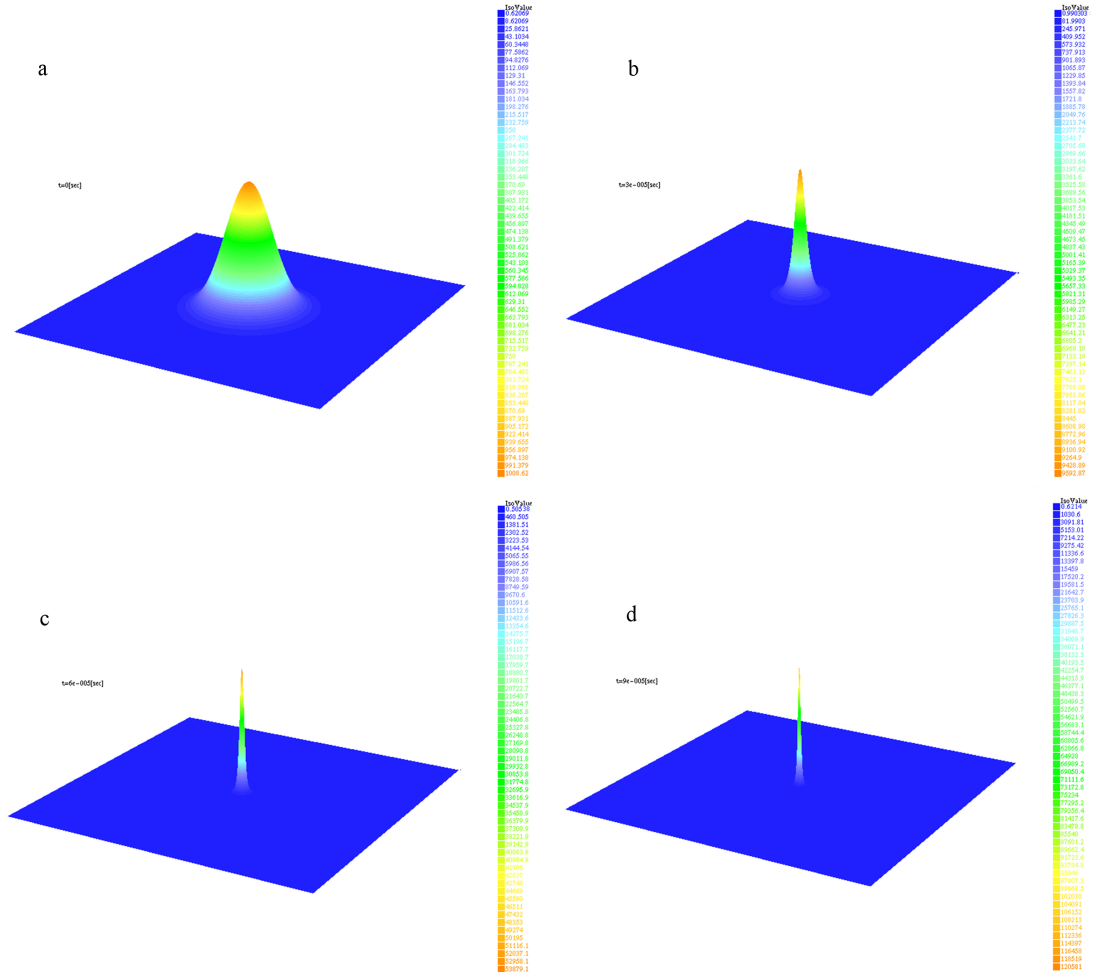
Presentamos los resultados de la evolución de la solución aproximada de la densidad celular bajo la influencia de una señal atractora descrita por el siguiente sistema de EDP's:

$$\begin{cases} n_t = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t = D_c \Delta c + n - c, \end{cases} \quad (4.88)$$

para un dominio rectangular $\Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ y datos iniciales escogidos de la siguiente manera:

$$n_0 = 1000 \exp(-100x^2 - 100y^2), \quad c_0 = 500 \exp(-50x^2 - 50y^2)$$

Figura 4.7 – Experimento numérico III, densidad de los organismos



De acuerdo con los resultados en [52], se espera que tanto los componentes n y c de la solución exploten en el origen en un tiempo finito. Esta situación es especialmente desafiante ya que capturar el blow-up de las soluciones es extremadamente difícil. La

solución numérica de este problema es calculada con el parámetro de malla $h = 1/120$. El paso de tiempo es $\Delta t = 1e - 5$. Las densidades celulares calculadas, n_h , en diferentes tiempos $t = 0$, $t = 3e - 005$, $t = 6e - 005$, $t = 9e - 005$ se representan en la Figura 4.7. Como se muestra en la figura, la solución se acumula en el centro del dominio como se esperaba; esta vez utilizamos una representación 3-D para que el lector pueda apreciar de una mejor manera la evolución de la densidad.

Experimento IV

Para nuestro cuarto experimento, incluiremos los efectos de un fluido al Experimento III. Consideraremos un modelo tipo Keller-Segel-Navier-Stokes descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = D_c \Delta c + n - c, \\ \rho (u_t + (u \cdot \nabla) u) = \eta \Delta u - \nabla \pi + n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (4.89)$$

Con el objetivo de comparar estos resultados con los obtenidos en el experimento III, consideramos el mismo dominio y datos iniciales anteriores, esto es, un dominio rectangular $\Omega = [-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ y datos iniciales:

$$n_0 = 1000 \exp(-100x^2 - 100y^2), \quad c_0 = 500 \exp(-50x^2 - 50y^2), \quad u_0 = [0, 0].$$

Podemos observar cómo el sistema evoluciona de una manera diferente en presencia del fluido, en efecto, la densidad celular se desplaza del centro del dominio hacia el borde inferior; esto se debe a la diferencia de densidad entre el cúmulo de organismo y el fluido, también podemos notar como en este experimento la densidad celular se desplaza y no se acumula de manera apresurada en los primeros instantes de tiempo a diferencia del experimento anterior. La solución numérica de este problema es calculada con el parámetro de malla $h = 1/120$. El paso de tiempo es $\Delta t = 1e - 5$. Las densidades celulares calculadas, n_h , en diferentes tiempos $t = 0$, $t = 3e - 5$, $t = 6e - 5$, $t = 9e - 5$ se representan en la Figura 4.8. La concentración de la señal química que es arrastrada (izquierda) y el campo de velocidad (derecha) en diferentes tiempos $t = 1e - 5$, $t = 3e - 5$, $t = 5e - 5$, $t = 9e - 5$ se presentan en la Figura 4.9. Podemos apreciar como la señal atractor también es arrastrada por el fluido y como el arrastre de los organismos genera perturbaciones en el campo de velocidades.

Figura 4.8 – Experimento numérico IV, densidad de los organismos.

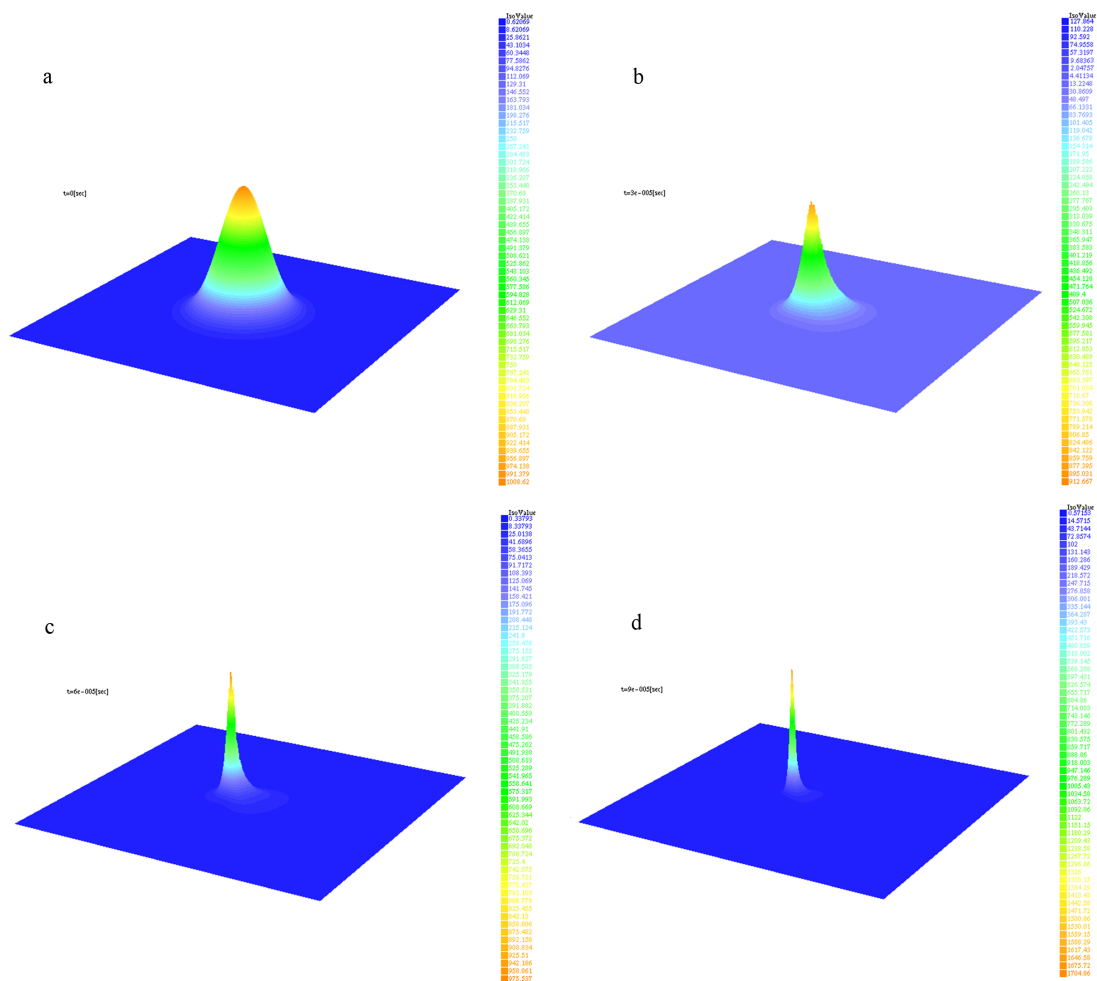
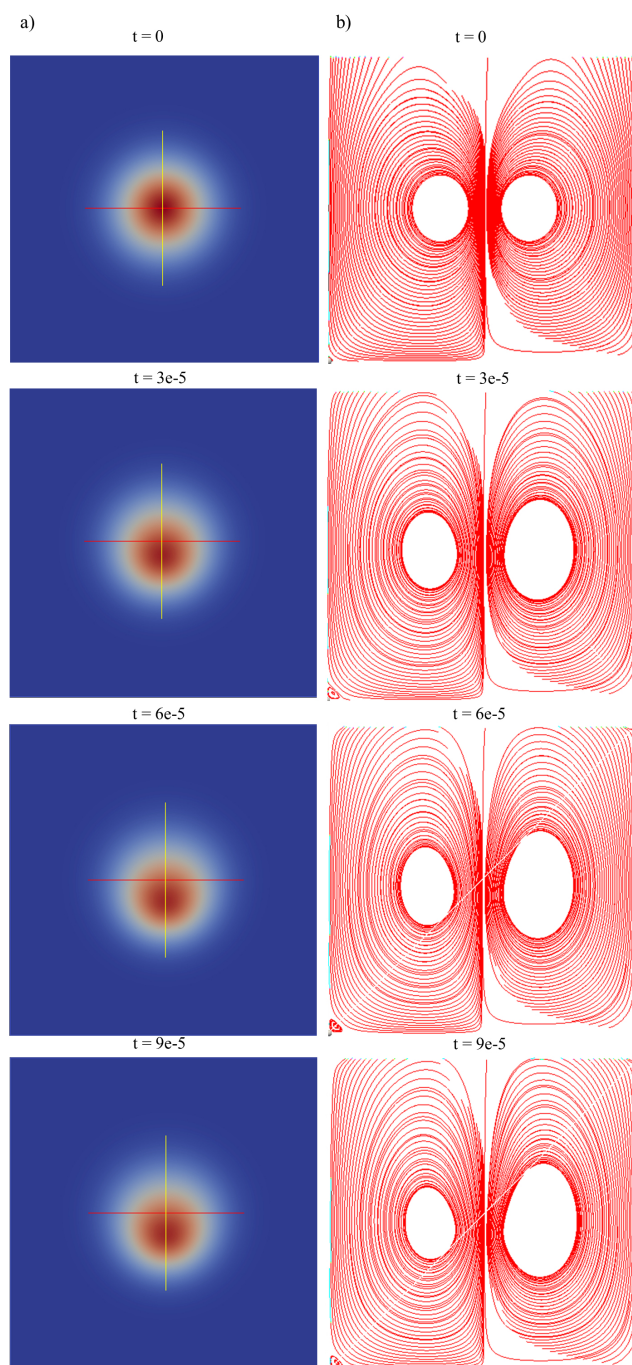


Figura 4.9 – Experimento numérico IV, señal química vs velocidad del fluido



Conclusiones

- ◇ Se realizó un estudio introductorio sobre el origen biofísico de modelos tipo KellerSegel-Navier-Stokes, incluyendo la deducción de las ecuaciones clásicas para el fenómeno de la quimiotaxis.
- ◇ Se planteó un modelo matemático que describe el proceso biofísico de la quimiotaxis, para una especie y dos señales químicas, una de atracción y la otra de repulsión, que desarrollan su dinámica dentro de un fluido viscoso e incompresible; además, permitiendo un crecimiento logístico de los organismos.
- ◇ Se probó la existencia de solución blanda global para el sistema (1.10)-(1.11), en dominios acotados de $\mathbb{R}^N$ o todo el espacio, con $N = 2, 3$, para datos iniciales pequeños en espacios tipo L^p .
- ◇ Como complemento de los resultados de existencia de solución obtenidos sobre el sistema (1.10)-(1.11), se desarrolló un análisis de convergencia para un esquema de elementos finitos que aproxima la solución del modelo (4.1), el cual preserva la masa para la función densidad. Adicionalmente, se realizaron experimentos numéricos para validar el análisis del esquema.

Trabajos futuros

A lo largo del desarrollo de este trabajo de maestría fueron quedando algunas preguntas de investigación, las cuales pueden ser analizadas en trabajos futuros, a saber:

- ◇ Analizar otras extensiones naturales del modelo como son la consideración de funciones de sensibilidad más complejas que dependan de las señales químicas y la concentración de los organismos, difusión no lineal, el efecto de otro tipo de funciones que describan la producción o degradación de las señales químicas, la interacción de múltiples especies, entre otros.
- ◇ Extender los resultados obtenidos a espacios de funciones más generales, como por ejemplo espacios tipo Besov.
- ◇ Explorar otros métodos numéricos para la solución de modelos tipo Keller-Segel-Navier-Stokes, como pueden ser el uso de métodos de volúmenes finitos o métodos espectrales.
- ◇ Ahondar en el análisis numérico para garantizar la conservación de otras propiedades del modelo continuo, como por ejemplo la positividad o la capacidad del medio, esta última propiedad en el caso en el cual el modelo incluya un término logístico.
- ◇ Extender los resultados numéricos obtenidos para el caso de dominios tridimensionales.

Bibliografía

- [1] J. Adler. Chemotaxis in bacteria. *Science*, 153(3737):708–716, 1966.
- [2] J. Adler. Chemoreceptors in bacteria. *Science*, 166(3913):1588–1597, 1969.
- [3] M. Aida, K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi, and M. Mimura. Chemotaxis and growth system with singular sensitivity function. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 6(2):323–336, 2005.
- [4] U. Alon. *An introduction to systems biology: design principles of biological circuits*. CRC press, 2006.
- [5] P. Ames, C. A. Studdert, R. H. Reiser, and J. S. Parkinson. Collaborative signaling by mixed chemoreceptor teams in escherichia coli. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(10):7060–7065, 2002.
- [6] N. Amirsom, M. Uddin, and A. Ismail. Three dimensional stagnation point flow of bionanofluid with variable transport properties. *Alexandria Engineering Journal*, 55(3):1983–1993, 2016.
- [7] B. Andreianov, M. Bendahmane, and M. Saad. Finite volume methods for degenerate chemotaxis model. *Journal of computational and applied mathematics*, 235(14):4015–4031, 2011.
- [8] L. Angiuli, D. Pallara, and F. Paronetto. Analytic semigroups generated in L_1 by second order elliptic operators via duality methods. *Semigroup Forum, Springer*, 80(2):255–271, 2010.
- [9] N. Bellomo, A. Bellouquid, Y. Tao, and M. Winkler. Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(09):1663–1763, 2015.
- [10] H. C. Berg. Chemotaxis in bacteria. *Annual review of biophysics and bioengineering*, 4(1):119–136, 1975.
- [11] H. C. Berg, D. A. Brown, et al. Chemotaxis in escherichia coli analysed by three-dimensional tracking. *Nature*, 239(5374):500–504, 1972.

- [12] M. Bessemoulin-Chatard and A. Jüngel. A finite volume scheme for a keller-segel model with additional cross-diffusion. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 34(1):96–122, 2013.
- [13] H. Bhatia, G. Norgard, V. Pascucci, and P.-T. Bremer. The helmholtz-hodge decomposition-a survey. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*, 19(8):1386–1404, 2013.
- [14] J. Bonner. The cellular slime molds (investigations in the biological sciences), 1959.
- [15] M. Braukhoff. Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier-Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic growth. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*. Available online 9 September, 2016.
- [16] D. Bray. Bacterial chemotaxis and the question of gain. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(1):7–9, 2002.
- [17] S. Brenner and R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [18] S. C. Brenner and C. Carstensen. Finite element methods. *Encyclopedia of computational mechanics*, 2004.
- [19] F. Brezzi, J. Douglas, R. Durán, and M. Fortin. Mixed finite elements for second order elliptic problems in three variables. *Numerische Mathematik*, 51(2):237–250, 1987.
- [20] F. Brezzi, J. Douglas, and L. D. Marini. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 47(2):217–235, 1985.
- [21] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15. Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] F. Brezzi, M. Fortin, L. D. Marini, et al. Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 21(4):581–604, 1987.
- [23] X. Cao and J. Lankeit. Global classical small-data solutions for a three-dimensional chemotaxis Navier-Stokes system involving matrix-valued sensitivities. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 55(4):107, 2016.
- [24] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Corporation, 2013.

- [25] M. A. Chaplain and G. Lolas. Mathematical modelling of cancer cell invasion of tissue: The role of the urokinase plasminogen activation system. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15(11):1685–1734, 2005.
- [26] M. A. Chaplain and A. Stuart. A model mechanism for the chemotactic response of endothelial cells to tumour angiogenesis factor. *Mathematical Medicine and Biology*, 10(3):149–168, 1993.
- [27] A. Chertock, K. Fellner, A. Kurganov, A. Lorz, and P. Markowich. Sinking, merging and stationary plumes in a coupled chemotaxis-fluid model: a high-resolution numerical approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 694:155–190, 2012.
- [28] H. J. Choe and B. Lkhagvasuren. Global existence result for chemotaxis Navier–Stokes equations in the critical Besov spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 446(2):1415–1426, 2017.
- [29] J. L. Christensen, D. E. Wright, A. J. Wagers, and I. L. Weissman. Circulation and chemotaxis of fetal hematopoietic stem cells. *PLoS biology*, 2(3):e75, 2004.
- [30] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- [31] Y. Deleuze, C.-Y. Chiang, M. Thiriet, and T. W. Sheu. Numerical study of plume patterns in a chemotaxis–diffusion–convection coupling system. *Computers & Fluids*, 126:58–70, 2016.
- [32] C. Dombrowski, L. Cisneros, S. Chatkaew, R. E. Goldstein, and J. O. Kessler. Self-concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. *Physical Review Letters*, 93(9):098103, 2004.
- [33] J. Douglas and J. E. Roberts. Numerical methods for a model for compressible miscible displacement in porous media. *Mathematics of Computation*, 41(164):441–459, 1983.
- [34] J. Douglas, Jr and T. F. Russell. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(5):871–885, 1982.
- [35] R. Duan and Z. Xiang. A note on global existence for the chemotaxis–stokes model with nonlinear diffusion. *International Mathematics Research Notices*, 2014(7):1833–1852, 2012.
- [36] A. Duarte-Rodríguez, L. C. F. Ferreira, and E. J. Villamizar-Roa. Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis-fluid model with logistic source. *arXiv preprint arXiv:1709.04032*, 2017.

- [37] E. Emmrich. *Discrete Versions of Gronwall's Lemma and Their Application to the Numerical Analysis of Parabolic Problems*. Reihe Mathematik. Techn. Univ., 1999.
- [38] T. Engelmann. Bacterium photometricum: Ein beitrag zur vergleichenden physiologie des lichtaund fara bensinnes. *Pflegers Archiv fur die Gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, 30, 1883.
- [39] Y. Epshteyn. Discontinuous galerkin methods for the chemotaxis and haptotaxis models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 224(1):168–181, 2009.
- [40] Y. Epshteyn. Upwind-difference potentials method for patlak-keller-segel chemotaxis model. *Journal of Scientific Computing*, 53(3):689–713, 2012.
- [41] Y. Epshteyn and A. Kurganov. New interior penalty discontinuous galerkin methods for the keller–segel chemotaxis model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(1):386–408, 2008.
- [42] E. Espejo and T. Suzuki. Reaction terms avoiding aggregation in slow fluids. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 21:110–126, 2015.
- [43] L. C. Evans. Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer. *Current developments in mathematics*, 1997(1):65–126, 1997.
- [44] L. Ferreira and E. Villamizar-Roa. Well-posedness and asymptotic behaviour for the convection problem. *Nonlinearity*, 19(9):2169, 2006.
- [45] F. Filbet. A finite volume scheme for the patlak–keller–segel chemotaxis model. *Numerische Mathematik*, 104(4):457–488, 2006.
- [46] K. Forsberg-Nilsson, T. N. Behar, M. Afrakhte, J. L. Barker, and R. D. McKay. Platelet-derived growth factor induces chemotaxis of neuroepithelial stem cells. *Journal of neuroscience research*, 53(5):521–530, 1998.
- [47] H. Fu and H. Rui. A mass-conservative characteristic fe scheme for optimal control problems governed by convection–diffusion equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241:82–92, 2012.
- [48] D. Fujiwara and H. Morimoto. An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. *IA Math*, 24:685–700, 1977.
- [49] Y. Giga. Analyticity of the semigroup generated by the stokes operator in L_r spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 178(3):297–329, 1981.
- [50] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.

- [51] H. Han and M. Yan. A mixed finite element method on a staggered mesh for navier-stokes equations. *Journal of Computational Mathematics*, pages 816–824, 2008.
- [52] M. A. Herrero and J. J. Velázquez. A blow-up mechanism for a chemotaxis model. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 24(4):633–683, 1997.
- [53] N. Hill and T. Pedley. Bioconvection. *Fluid Dynamics Research*, 37(1):1–20, 2005.
- [54] T. Hillen and K. J. Painter. A user’s guide to PDE models for chemotaxis. *Journal of Mathematical Biology*, 58(1-2):183–217, 2009.
- [55] T. Hillen, K. J. Painter, and M. Winkler. Convergence of a cancer invasion model to a logistic chemotaxis model. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 23(01):165–198, 2013.
- [56] A. Hillesdon, T. Pedley, and J. Kessler. The development of concentration gradients in a suspension of chemotactic bacteria. *Bulletin of Mathematical Biology*, 57(2):299–344, 1995.
- [57] D. Horstmann. Generalizing the Keller–Segel model: Lyapunov functionals, steady state analysis, and blow-up results for multi-species chemotaxis models in the presence of attraction and repulsion between competitive interacting species. *Journal of Nonlinear Science*, 21(2):231–270, 2011.
- [58] D. Horstmann et al. From 1970 until present: the Keller–Segel model in chemotaxis and its consequences. *Jahresberichte Deutsch. Math.-Verein*, 105:103–165, 2003.
- [59] S. Ishida. Global existence and boundedness for chemotaxis-navier-stokes systems with position-dependent sensitivity in 2d bounded domains. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 35(8):3463–3482, 2015.
- [60] J. Jiang, H. Wu, and S. Zheng. Global existence and asymptotic behavior of solutions to a chemotaxis–fluid system on general bounded domains. *Asymptotic Analysis*, 92(3-4):249–258, 2015.
- [61] H. Y. Jin and Z. A. Wang. Boundedness, blowup and critical mass phenomenon in competing chemotaxis. *Journal of Differential Equations*, 260(1):162–196, 2016.
- [62] V. John. *Finite element methods for incompressible flow problems*. Springer, 2016.
- [63] A. Karimi and M. Paul. Bioconvection in spatially extended domains. *Physical Review E*, 87(5):053016, 2013.
- [64] T. Kato. Strong L_p -solutions of the Navier–Stokes equation in R^m with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4):471–480, 1984.

- [65] T. Kato. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 22(2):127–155, 1992.
- [66] E. F. Keller and L. A. Segel. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26(3):399–415, 1970.
- [67] E. F. Keller and L. A. Segel. Model for chemotaxis. *Journal of Theoretical Biology*, 30(2):225–234, 1971.
- [68] A. Kiselev and L. Ryzhik. Biomixing by chemotaxis and enhancement of biological reactions. *Communications in Partial Differential Equations*, 37(2):298–318, 2012.
- [69] T. M. Konijn. Effect of bacteria on chemotaxis in the cellular slime molds. *Journal of bacteriology*, 99(2):503–509, 1969.
- [70] H. Kozono, M. Miura, and Y. Sugiyama. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller–Segel system coupled with the Navier–Stokes fluid. *Journal of Functional Analysis*, 270(5):1663–1683, 2016.
- [71] J. Lankeit. Eventual smoothness and asymptotics in a three-dimensional chemotaxis system with logistic source. *Journal of Differential Equations*, 258(4):1158–1191, 2015.
- [72] J. Lankeit. Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(11):2071–2109, 2016.
- [73] H. G. Lee and J. Kim. Numerical investigation of falling bacterial plumes caused by bioconvection in a three-dimensional chamber. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 52:120–130, 2015.
- [74] D. Li, C. Mu, K. Lin, and L. Wang. Large time behavior of solution to an attraction–repulsion chemotaxis system with logistic source in three dimensions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 448(2):914–936, 2016.
- [75] X. Li. Boundedness in a two-dimensional attraction–repulsion system with non-linear diffusion. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(2):289–301, 2016.
- [76] X. Li, H. Rui, and W. Xu. A new MCC–MFE method for compressible miscible displacement in porous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 302:139–156, 2016.
- [77] X. Li and Z. Xiang. On an attraction–repulsion chemotaxis system with a logistic source. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 81(1):165–198, 2016.

- [78] J. Liu and Y. Wang. Global existence and boundedness in a keller–segel–(navier–) stokes system with signal-dependent sensitivity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 447(1):499–528, 2017.
- [79] J. Liu and Y. Wang. Global weak solutions in a three-dimensional keller–segel–navier–stokes system involving a tensor-valued sensitivity with saturation. *Journal of Differential Equations*, 262(10):5271–5305, 2017.
- [80] P. Liu, J. Shi, and Z. A. Wang. Pattern formation of the attraction-repulsion Keller-Segel system. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 18(10):2597–2625, 2013.
- [81] Y. Liu, H. Li, W. Gao, S. He, and J. Wang. Splitting positive definite mixed element method for viscoelasticity wave equation. *Frontiers of Mathematics in China*, pages 1–18, 2012.
- [82] M. Luca, A. Chavez-Ross, L. Edelstein-Keshet, and A. Mogilner. Chemotactic signaling, microglia, and Alzheimer’s disease senile plaques: Is there a connection? *Bulletin of Mathematical Biology*, 65(4):693–730, 2003.
- [83] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [84] A. D. Luster. Chemotaxis: role in immune response. *eLS*, 2001.
- [85] N. V. Mantzaris, S. Webb, and H. G. Othmer. Mathematical modeling of tumor-induced angiogenesis. *Journal of Mathematical Biology*, 49(2):111–187, 2004.
- [86] L. J. Metheny-Barlow, S. Tian, A. J. Hayes, and L.-Y. Li. Direct chemotactic action of angiopoietin-1 on mesenchymal cells in the presence of vegf. *Microvascular research*, 68(3):221–230, 2004.
- [87] X. Mora. Semilinear parabolic problems define semiflows on C^k spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 278(1):21–55, 1983.
- [88] B. Moser and K. Willmann. Chemokines: role in inflammation and immune surveillance. *Annals of the rheumatic diseases*, 63(suppl 2):ii84–ii89, 2004.
- [89] J. Murray. *Mathematical biology. i: An introduction*, springer, 2002.
- [90] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$. *Numerische Mathematik*, 35(3):315–341, 1980.
- [91] K. Painter, P. Maini, and H. Othmer. Development and applications of a model for cellular response to multiple chemotactic cues. *Journal of mathematical biology*, 41(4):285–314, 2000.
- [92] C. S. Patlak. Random walk with persistence and external bias. *Bulletin of Mathematical Biology*, 15(3):311–338, 1953.

- [93] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [94] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-galerkin and galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1):117–141, 1992.
- [95] E. M. Purcell. Life at low reynolds number. *American journal of physics*, 45(1):3–11, 1977.
- [96] A. Quinlan and B. Straughan. Decay bounds in a model for aggregation of microglia: application to Alzheimer’s disease senile plaques. *Proceedings of the Royal Society A*, 461:2887–2897, 2005.
- [97] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods*, pages 292–315. Springer, 1977.
- [98] J. E. Roberts and J.-M. Thomas. Mixed and hybrid methods. *Handbook of numerical analysis*, 2:523–639, 1991.
- [99] D. L. Ropp and J. N. Shadid. Stability of operator splitting methods for systems with indefinite operators: Advection–diffusion–reaction systems. *Journal of Computational Physics*, 228(9):3508–3516, 2009.
- [100] H. Rui, S. Kim, and S. D. Kim. A remark on least-squares mixed element methods for reaction–diffusion problems. *Journal of computational and applied mathematics*, 202(2):230–236, 2007.
- [101] H. Rui, S. D. Kim, and S. Kim. Split least-squares finite element methods for linear and nonlinear parabolic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 223(2):938–952, 2009.
- [102] H. Rui and M. Tabata. A second order characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Numerische Mathematik*, 92(1):161–177, 2002.
- [103] H. Rui and M. Tabata. A mass-conservative characteristic finite element scheme for convection-diffusion problems. *Journal of Scientific Computing*, 43(3):416–432, 2010.
- [104] N. Saito. Conservative numerical schemes for the keller-segel system and numerical results (mathematical analysis on the self-organization and self-similarity). *RIMS K ôky ûroku Bessatsu*, 2009.
- [105] V. Sourjik and H. C. Berg. Functional interactions between receptors in bacterial chemotaxis. *Nature*, 428(6981):437, 2004.

- [106] I. Stakgold. *Boundary value problems of mathematical physics. Vol. II.* The Macmillan Co., Collier-Macmillan Ltd., 1968.
- [107] Y. Tao and M. Winkler. Locally bounded global solutions in a three-dimensional chemotaxis-stokes system with nonlinear diffusion. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 30(1):157–178, 2013.
- [108] Y. Tao and M. Winkler. Boundedness and decay enforced by quadratic degradation in a three-dimensional chemotaxis–fluid system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 66(5):2555–2573, 2015.
- [109] Y. Tao and M. Winkler. Blow-up prevention by quadratic degradation in a two-dimensional keller–segel–navier–stokes system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67(6):138, 2016.
- [110] Y. Tao and M. Winkler. Blow-up prevention by quadratic degradation in a two-dimensional keller-segel-navier-stokes system. *Z. Angew. Math. Phys.*, 67, 2016.
- [111] J. I. Tello and M. Winkler. A chemotaxis system with logistic source. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(6):849–877, 2007.
- [112] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, volume 1054. Springer, 1984.
- [113] M. J. Tindall, P. K. Maini, S. L. Porter, and J. P. Armitage. Overview of mathematical approaches used to model bacterial chemotaxis II: bacterial populations. *Bulletin of mathematical biology*, 70(6):1570–1607, 2008.
- [114] I. Tuval, L. Cisneros, C. Dombrowski, C. W. Wolgemuth, J. O. Kessler, and R. E. Goldstein. Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102(7):2277–2282, 2005.
- [115] R. Tyson, S. Lubkin, and J. D. Murray. Model and analysis of chemotactic bacterial patterns in a liquid medium. *Journal of Mathematical Biology*, 38(4):359–375, 1999.
- [116] R. Tyson, L. Stern, and R. J. LeVeque. Fractional step methods applied to a chemotaxis model. *Journal of mathematical biology*, 41(5):455–475, 2000.
- [117] Y. Wang. Boundedness in a three-dimensional attraction-repulsion chemotaxis system with nonlinear diffusion and logistic source. *Electronic Journal of Differential Equations*, 176:1–21, 2016.
- [118] Y. Wang and Z. Xiang. Global existence and boundedness in a keller–segel–stokes system involving a tensor-valued sensitivity with saturation: the 3d case. *Journal of Differential Equations*, 261(9):4944–4973, 2016.

- [119] C. Weibull. Movement. *The bacteria*, 1(153-205):3, 1960.
- [120] M. Winkler. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller–Segel model. *Journal of Differential Equations*, 248(12):2889–2905, 2010.
- [121] M. Winkler. Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source. *Communications in Partial Differential Equations*, 35(8):1516–1537, 2010.
- [122] M. Winkler. Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier–) Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. *Communications in Partial Differential Equations*, 37(2):319–351, 2012.
- [123] M. Winkler. Global asymptotic stability of constant equilibria in a fully parabolic chemotaxis system with strong logistic dampening. *Journal of Differential Equations*, 257(4):1056–1077, 2014.
- [124] M. Winkler. Boundedness and large time behavior in a three-dimensional chemotaxis-stokes system with nonlinear diffusion and general sensitivity. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 54(4):3789–3828, 2015.
- [125] M. Winkler. Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis–Navier–Stokes system. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 33(05):1329–1352, 2015.
- [126] M. Winkler. Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis–navier–stokes system. *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 33(5):1329–1352, 2016.
- [127] D. Woodward, R. Tyson, M. Myerscough, J. Murray, E. Budrene, and H. Berg. Spatio-temporal patterns generated by salmonella typhimurium. *Biophysical Journal*, 68(5):2181, 1995.
- [128] D. Yang. A splitting positive definite mixed element method for miscible displacement of compressible flow in porous media. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 17(3):229–249, 2001.
- [129] J. Zhang, J. Zhu, and R. Zhang. Characteristic splitting mixed finite element analysis of keller–segel chemotaxis models. *Applied Mathematics and Computation*, 278:33–44, 2016.
- [130] Q. Zhang and Y. Li. An attraction-repulsion chemotaxis system with logistic source. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 96:570–584, 2015.
- [131] Q. Zhang and Y. Li. Global weak solutions for the three-dimensional chemotaxis–navier–stokes system with nonlinear diffusion. *Journal of Differential Equations*, 259(8):3730–3754, 2015.

- [132] Q. Zhang and Y. Li. An attraction-repulsion chemotaxis system with logistic source. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 96(5):570–584, 2016.
- [133] P. Zheng, C. Mu, and X. Hu. Boundedness in the higher dimensional attraction–repulsion chemotaxis-growth system. *Computers & Mathematics with Applications*, 72(9):2194–2202, 2016.
- [134] B. M. Zuckerman and H. Jansson. Nematode chemotaxis and possible mechanisms of host/prey recognition. *Annual review of phytopathology*, 22(1):95–113, 1984.