PROPIEDADES QUE PERMANECEN INVARIANTES EN LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO: UN ESTUDIO UTILIZANDO LOS POLIOMINÓS

ÉDGAR ANTONIO GUTIÉRREZ ZAPATA
Licenciado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

PROPIEDADES QUE PERMANECEN INVARIANTES EN LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO: UN ESTUDIO UTILIZANDO LOS POLIOMINÓS

ÉDGAR ANTONIO GUTIÉRREZ ZAPATA
Licenciado en Matemáticas

Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

Directora
DIANA JARAMILLO QUICEÑO
Ph. D. en Educación

Codirector
CRISTIAN COGOLLO GUEVARA
Especialista en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

"El alumno necesita apropiarse del entendimiento del contenido para que la verdadera relación de comunicación entre él, como alumno, y yo, como profesor, se establezca. Es por eso por lo que, repito, enseñar no es transferir contenidos a alguien, así como aprender no es memorizar el perfil del contenido transferido en el discurso vertical del profesor. Enseñar y aprender tienen que ver con el esfuerzo metódicamente crítico del profesor por desvelar la comprensión de algo y con el empeño igualmente crítico del alumno de ir entrando como sujeto en aprendizaje, en el proceso de desvelamiento que el profesor o profesora debe desatar".

Freire

AGRADECIMIENTOS

A Diana, Jessica, Mariana del Carmen, Carlos, Diego y Nicolás quienes colaboraron y ayudaron a que esta experiencia se realizara.

Al Colegio Nieves Cortés Picón, por haberme abierto las puertas para que realizar este proyecto de investigación.

A Diana Jaramillo, por su orientación y dirección; y, a Cristian Cogollo por ayuda.

A mis padres y hermanos quienes me motivaron y dieron una voz de apoyo.

A Andreita, por su apoyo incondicional y quien estuvo hombro a hombro en el desarrollo de toda la experiencia.

A Irene que con su aporte ayudó a fundamentarme teóricamente para sacar avante el desarrollo del trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

TÍTULO: "PROPIEDADES QUE PERMANECEN INVARIANTES EN LAS TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO: UN ESTUDIO UTILIZANDO LOS POLIOMINÓS"*.

AUTOR: GUTIÉRREZ ZAPATA, Edgar Antonio**.

Palabras Claves: Poliominós, geometría, transformaciones rígidas, isometrías, manipulación

DESCRIPCIÓN:

La experiencia de aula que presento traduce una estrategia didáctica, basada fundamentalmente en la aplicación de los Poliominós. Esta didáctica, desarrollada mediante talleres, ha tenido en cuenta la manipulación de distintos elementos como el juego de poliominós, espejos, entre otros, que favorecieron el desarrollo de los conceptos relacionados con el tema.

La presente investigación responde a la pregunta: ¿Cómo el juego de Poliominós posibilita la comprensión de las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el cartesiano?, cuyo objetivo se centra en diseñar una estrategia metodológica para el aprendizaje de las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el plano utilizando los Poliominós.

En esta experiencia de aula participaron 48 estudiantes de séptimo grado del Colegio Nieves Cortés Picón del Municipio de Girón constituido por 20 hombres y 28 mujeres. El análisis de los procesos didácticos se fundamentó en las respuestas de seis estudiantes con el objeto de profundizar en las categorías básicas a través de tres estrategias de análisis: "Manipulando material concreto"; "Poliominós: juego y acercamiento a la geometría", y "Propiedades invariantes en rotaciones, traslaciones y simetrías". Los resultados tienen en cuenta la voz de los estudiantes, así como los soportes teóricos que validan este trabajo y la voz del docente como orientador de esta experiencia pedagógica. Para la comprensión de esta propuesta presento cuatro capítulos, en los cuales se documenta la progresión del análisis y los grados de complejidad alcanzados.

---

* Proyecto de Grado

** Universidad Industrial de Santander, Especialización en Educación Matemática, JARAMILLO QUICEÑO, Diana

SUMMARY

TITLE: "PROPERTIES THAT INVARIANT REMAINS IN THE RIGID TRANSFORMATIONS IN THE CARTESIAN PLANE: A STUDY WITH THE POLIOMINOS"*.

AUTHOR: GUTIERREZ HALF-BOOT, Edgar Antonio**.

Key words: Poliominos, geometry, rigid transformations, isometric, manipulation

DESCRIPTION:

The classroom experience that I present translates a didactic strategy, based fundamentally on the application of the Poliominos. This didactics, developed by means of shops, he/she has kept in mind the manipulation of different elements like the poliominos game, mirrors, among other that favored the development of the concepts related with the topic.

The present investigation responds to the question: How does the game of Poliominos facilitate the understanding of the properties that invariant remains in the rigid transformations in the Cartesian one? whose objective is centered in designing a methodological strategy for the learning of the properties that invariant remains in the rigid transformations in the plane using the Poliominos.

In this classroom experience 48 students of seventh grade of the School participated Nieves Cortes Picon of the Municipality of Giron constituted by 20 men and 28 women. The analysis of the didactic processes was based in the answers of six students in order to deepening in the basic categories through three analysis strategies: "Manipulating concrete material"; "Poliominos: I play and approach to the geometry", and "Properties invariant in rotations, adjournments and symmetries". The results keep in mind the voice of the students, as well as the theoretical supports that validate this work and the voice of the educational one as oriented of this pedagogic experience. For the understanding of this proposal I present four chapters, in which it is documented the progression of the analysis and the reached grades of complexity.

---

* Project of Grade

** Industrial university of Santander, Specialization in Mathematical Education, JARAMILLO QUICEÑO, Diana

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la Geometría no solo como un referente espacial sino como un ámbito de interacción de los estudiantes con el mundo físico, es una de las grandes preocupaciones de la Educación Básica porque es en las consideraciones espaciales donde se hace posible la existencia real de las hipótesis y las intuiciones matemáticas.

La presente investigación pretende dar respuesta a esta necesidad y proponer el juego del poliominós como una didáctica para superar la dificultad observada en los estudiantes en apreciar de una manera significativa las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el plano cartesiano. Así pues lo que pretendo es responder a la pregunta: **¿Cómo el juego de Poliominós posibilita la comprensión de las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el plano cartesiano?**

Jugar con Poliominós es como jugar con rompecabezas componiendo diversas figuras que todos los entendidos en la materia consideran una fuente de problemas de inteligencia "con gran sabor matemático". Además, ofrecen un recurso didáctico y lúdico que enriquece los procesos de razonamiento, la comunicación, así como los de comparación y ejercitación de procedimientos relacionados con el tema y cuya realización se resuelven colectivamente.

La propuesta didáctica fue desarrollada con 48 estudiantes de séptimo grado del Colegio Nieves Cortés Picón del Municipio de Girón; y, el análisis se centró en las realizaciones de seis estudiantes cuya edad promedio es 14 años. Ellos son: Diana Marcela Torralba, Nicolás Andrés Ávila, Jessica Prada, Diego Villamizar, Mariana del Carmen Torres y Carlos Alberto Sanabria. El criterio de selección de estos estudiantes se basó en los resultados alcanzados en el taller diagnóstico, así como el interés de participar en la experiencia. La información recogida es resultado de entrevistas directas, propuestas de trabajo, trabajo de campo, entre otros, que fueron evidenciando su acercamiento al objetivo.

Los estudiantes involucrados en el desarrollo de la investigación tienen diversos estados de maduración cognitiva y diferente posición actitudinal frente a la Matemática. No obstante, lograron resolver con buen rendimiento las actividades propuestas que se pueden verificar en el contenido de este documento.

A continuación hago una breve presentación de los seis estudiantes involucrados en la experiencia:

Nicolás Vera (14 años). Estudiante muy interesado en la Matemática, gusta de ella y la disfruta; participó activamente en todas la actividades propuestas. Desde un comienzo se mostró interesado en ser miembro de la investigación, manifestando interés y agrado.

Diego Villamizar (14 años). Le gusta la Matemática; participó de algunas actividades desarrolladas en clase.

Mariana del Carmen Torres (13 años). Muy interesada y entregada al estudio de la materia y siempre dispuesta a participar de todas las actividades programadas en el aula de clase.

Jessica Prada (14 años). Participó de las actividades de clase en el desarrollo de la Matemática misma, cuando se le exigía y encaminaba.

Diana M. Torralba (15 años). Dispuesta a trabajar cuando se motivaba, participando activamente de las actividades de clase.

Finalmente, en cuanto a la estructura del trabajo, este está dividido en cuatro capítulos así:

En el primer capítulo, “De la Antigüedad a la Modernidad”, la investigación recorre el camino de la Geometría como una de las ciencias básicas para la comprensión del mundo, del arte, de la naturaleza y su presencia en todas las formas de manifestación cultural. Asimismo, constituye una etapa de trabajo exploratorio con los estudiantes para alcanzar la compresión de esta ciencia a partir de su representación simbólica y las categorías necesarias para la actividad didáctica propuesta, teniendo en cuenta en el análisis de las reflexiones, inquietudes y curiosidad de los estudiantes, los aportes teóricos fundamentales para la explicación de las propiedades invariantes en las transformaciones con los poliominós.

En el segundo capítulo, “La puesta en marcha de la didáctica”, se presenta la metodología propuesta para realizar la investigación, donde en cada uno de ellos se resalta la intencionalidad pedagógica en forma individual y grupal, posibilitando la comunicación, favoreciendo procesos como la percepción y la visualización, entre otros, a través del material manipulativo. Esta labor condensa procesos que van de lo simple a lo complejo en el juego de los poliominós y aporta los datos y motivaciones fundamentales a investigar.

En el tercer capítulo, “Análisis de Categorías”, se han propuesto tres categorías de análisis que recogen toda la experiencia de aula. En la primera, analizo el material concreto puesto que la manipulación de objetos “concretos” constituye la base del conocimiento humano en general y de la Matemática en particular. Esta actividad cuenta con el diario de campo donde se registraron las voces e inquietudes de los estudiantes. La segunda categoría propuesta es el juego de poliominós como actividad lúdica y la asimilación de este juego para la compresión de la Matemática y del espacio. Por último, en la tercera se posibilita la comprensión de las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el plano cartesiano.

Para finalizar, en el capítulo cuarto, "Balance de la experiencia", registro los avances que con esta didáctica permitió que estudiantes y profesor, actuaran y argumentaran sobre los objetos del espacio, apoyándose en modelos, figuras y otras representaciones concretas del mundo real para construir conceptos espaciales de manera significativa.

Fue así como el juego de poliominós significó un cambio de percepción de los estudiantes en relación con la asignatura; el enriquecimiento de experiencias colectivas e individuales; el desarrollo de procesos cognitivos como el inferencial y el crítico intertextual que les permitió reconocer los diferentes contextos y los espacios que los conforman. El aspecto lúdico que fue realizado con la totalidad de los estudiantes (48) mostró la viabilidad del juego para resolver problemas cognitivos de urgente solución en el aula con relación a la geometría permitiendo, además, un alto grado de interlocución.

A modo de paréntesis quiero mencionar que la investigación apropia un material fílmico en el que se registraron los avances en el proceso

1. DE LA ANTIGÜEDAD A LA MODERNIDAD

> "La geometría es aprehender el espacio… ese espacio en el que vive, respira, y se mueve el niño. El espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar y conquistar, para poder vivir, respirar, y moverse en él".
> Freudenthal (1973)

El estudio de la geometría contribuye en el aula de clase a dar sentido al mundo físico que rodea al estudiante. Los modelos geométricos, desde este punto de vista, permiten analizar y resolver problemas de la vida cotidiana y, por ende, las representaciones geométricas contribuyen a mejorar las representaciones abstractas –es decir, simbólicas– mediante las cuales el mundo físico adquiere significado.

Esta perspectiva permite que los estudiantes descubran relaciones y adquieran un sentido espacial al construir, dibujar, medir, visualizar, comparar, transformar y clasificar figuras geométricas.

De otro lado, la simetría en dos y tres dimensiones proporciona oportunidades para que los estudiantes aprecien la geometría del mundo, del arte, la naturaleza, la construcción, etc. El concepto de simetría está presente en mariposas, caras, flores, disposición de ventanas, reflejos en el agua, en dibujos sobre cerámicas; se ilustra en el piñón de una bicicleta, en patrones encontrados en las tablas de multiplicar, en números ordenados, en cuadros y en el Triángulo de Pascal, entre otros.

Antes de su estudio por los antiguos griegos, entre ellos Thales y Pitágoras, las ideas geométricas estaban directamente conectadas con la resolución de problemas del mundo real. Por ello, la subsiguiente abstracción y formalización de dichas ideas, que dieron lugar a la geometría tal y como la conocemos, siempre ha tenido multitud de aplicaciones en el mundo real.

Es así como en la exploración del espacio se incorpora toda la geometría activa. De esta manera, se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas y los ángulos destacando relaciones de paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, transformaciones como rotaciones, traslaciones y reflexiones. Esta últimas pueden basarse en acciones fáciles de realizar como giros u otros movimientos, que pueden servir para inducir descubrimientos sobre las transformaciones así como para comprobar las predicciones e inferencias que realizan los niños en el estudio del mundo físico. Por ejemplo, cuando una figura en el plano se lleva de una posición a otra mediante la rotación se generan simetrías con respecto a un eje, o traslaciones, dejando invariantes la forma, el tamaño, las relaciones de los lados y de los ángulos.

Lo anterior me permite corroborar los dinamismos de la geometría a través de las transformaciones. Por tal razón, la propuesta del Ministerio de Educación Nacional en la enseñanza de los sistemas geométricos, es la de volver a esos sistemas con sus operadores o transformaciones en forma de esquemas activos que se internalizan con esquemas activos de movimientos, acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente.

Según Osorio (2002, p. 10), el valor principal de la geometría de los movimientos consiste en alcanzar el objetivo de una apreciación informal e intuitiva de la geometría, aunque también contribuye a resaltar ciertos aspectos de la geometría euclidiana como: la congruencia y la semejanza. Por lo tanto, la geometría no sólo es un referente espacial sino un ámbito de interacción con el mundo físico que hace posible la existencia real de las hipótesis y las intuiciones matemáticas.

Por ende, la propuesta de la comprensión del significado de las propiedades que permanecen invariantes en las transformaciones rígidas en el plano cartesiano debe comenzar desde los primeros años de escolaridad, ya que se evidencian dificultades en estos razonamientos geométricos básicos en el aula de clase y que necesitan respuesta.

En aras de hallar esa respuesta, esta investigación propone una experiencia de aula a través de actividades específicas del juego de Poliominós. Hacia el año de 1994 aparece publicada "La historia de los Poliominós" por los autores Bozal, González, et al. (1994, p. 12), quienes documentan el trabajo del matemático norteamericano Solomon W. Golom y su artículo titulado *Checker Borrad and Poliominoes* (Tableros de Damas y Poliominós), definen los Poliominós como configuraciones que recubren cuadros adyacentes de un tablero de ajedrez, registrando así una primera propuesta de acción didáctica, describiendo además, actividades principalmente manipulativas y uso del material para los efectos, pero sin realizar formulaciones que le pongan trabas al juego, con el objeto de animar siempre los aspectos lúdicos. Es así como se da inicio a la historia de los poliominós en la enseñanza-aprendizaje de la geometría en la época moderna.

La "Geometría a través de las transformaciones", de Dienes y Holding (1969), referencia el tema de los ángulos como parte integrante del estudio de las transformaciones rígidas y, por otro lado, involucra conceptos como dirección, línea recta, cambio de dirección, giro, ángulo, etc. Aporta, asimismo, ejercicios de introducción a las transformaciones y al lenguaje geométrico que aparece en las fichas de la sección de geometría euclidiana. Además de experiencias personales y concretas de alumnos, como elementos importantes para la comprensión de las estructuras matemáticas descritas en este libro.

En cuanto a actividades lúdicas, Roa (2004, p. 59) plantea algunas con transformaciones rígidas en el plano cartesiano que sirven de antecedente a esta investigación por su aporte, en ese aspecto, para la enseñanza de la geometría.

Otros autores como Siñeris y Santinelli (2003, p. 4), plantean una serie de actividades para llegar a comprender las propiedades invariantes, características y composición de transformaciones por medio de la calculadora Cabri Geómètre. Para efectos de los términos de esta investigación, esta propuesta resulta muy enriquecedora en relación con la aplicación de la tecnología al estudio de la geometría.

Los anteriores antecedentes teóricos y prácticos me permitieron organizar con los estudiantes unas fases de trabajo que corresponden al diseño de los siguientes talleres:

- Fundamentos de transformaciones rígidas en el plano
- Encontrando Poliominós
- Recubriendo y Encontrando
- Estudio de Giros particulares y su relación con grados y ángulos
- Manipulando, Encontrando, y Descubriendo Simetrías
- Manipulando, Encontrando y Descubriendo Rotaciones
- Manipulando, Encontrando y Descubriendo Traslaciones

Además, teniendo como base el juego de poliominós y los referentes teóricos diseñé tres categorías para el análisis posterior de las actividades según su momento.

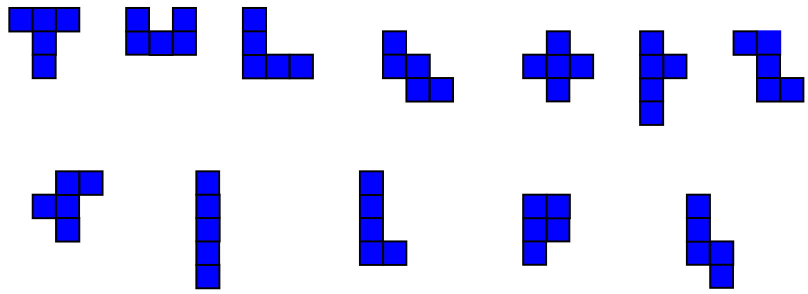
2. PUESTA EN MARCHA DE LA DIDÁCTICA

El material manipulativo que se usó para este proyecto, como bien ya se entredijo, fue el Juego de Poliominós.

Los poliominós, o Juego de Poliominós, fueron presentados al mundo en 1954 por un matemático del sur de California, Solomon W. Golom. En 1957, la revista *Scientific American* publicó un primer artículo al respecto. Desde entonces se han convertido en un pasatiempo popular, además de propiciar diversas investigaciones y resultados muy atrayentes para la pedagogía de la geometría y de las matemáticas.

Los poliominós son polígonos construidos a base de unir cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. Desde el punto de vista geométrico, un solo cuadrado lo llamamos "monominó"; el resultante de la unión de dos cuadros se denomina "dominó"; podemos llamar "triminós" a la unión de tres cuadrados; "tetraminós" a la de cuatro y así sucesivamente. Pero, formalmente, se pueden definir como un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados, de tal modo, que no queden espacios en el interior de la estructura resultante.

Existen en total doce configuraciones de este tipo, disponiéndolas como se muestra en la figura siguiente y se asemejan a algunas letras del abecedario, que sirven para nombrarlas cómodamente. Para retenerlas fácilmente en la memoria se dispone de esta sencilla regla mnemotécnica: basta recordar las últimas letras del abecedario (T,U,V,W,X,Y,Z) y la palabra FILIPINO (Bozal, 1994, p.12).



Piezas del Juego de Pentominós

Con las doce piezas del juego se pueden plantear y resolver un gran número de problemas; precisamente, eso es lo que los ha convertido en un interesante enigma lúdico.

La actividad didáctica con la que se inició esta investigación corresponde a la fase de diagnóstico titulada "Fundamentos de Transformaciones Rígidas en el Plano Cartesiano" (Anexo 1)[1] cuya finalidad es establecer conocimientos previos que me permitan reconocer la competencia espacial, cognitiva, entre otras, de cada estudiante. Así como favorecer procesos de percepción y visualización a través del uso de material manipulativo.

Además, en esta primera parte del trabajo, se tuvieron en cuenta las actividades de los talleres uno y dos ("Encontrando Poliominós" y "Recubriendo y Encontrando") como actividades preliminares que condujeron de manera deductiva al tema se pretendía trabajar, despertando, consecuentemente, la motivación de los 48 estudiantes del curso en el que se realizó la experiencia.

[1] Dado que los talleres son de cuatro hojas, o más, cada uno, para comodidad del lector, preferí organizar las plantillas de los mismos como anexos. Los talleres que encontrará el lector dentro del cuerpo del trabajo de investigación son talleres resueltos por los estudiantes.

En el diseño diagnóstico muestro seguidamente los ítems contemplados para el análisis del trabajo de los estudiantes y que, libremente, pueden ser mejorados con los soportes que otros maestros hagan al tema.

Para el desarrollo de este taller los estudiantes debían observar los distintos dibujos, y a partir de estos responder unas preguntas que incluían aspectos sobre rotaciones, traslaciones, simetrías, plano cartesiano, así como las propiedades[2].

Observando los talleres resueltos, noté que en una de las preguntas que involucra dirección y ángulos, los estudiantes dibujaron figuras indicando los ángulos y la abertura que tenían, pero las figuras aparecían abiertas por un lado y explicaban que “esa era la abertura que debían tener”.

En general, se acercaron a los conceptos y lograron mostrar relaciones entre ángulos y grados lo cual fue muy importante para el avance de la acción didáctica. A continuación presento la actividad diagnóstica desarrollada por Mariana del Carmen Torres (13 años).

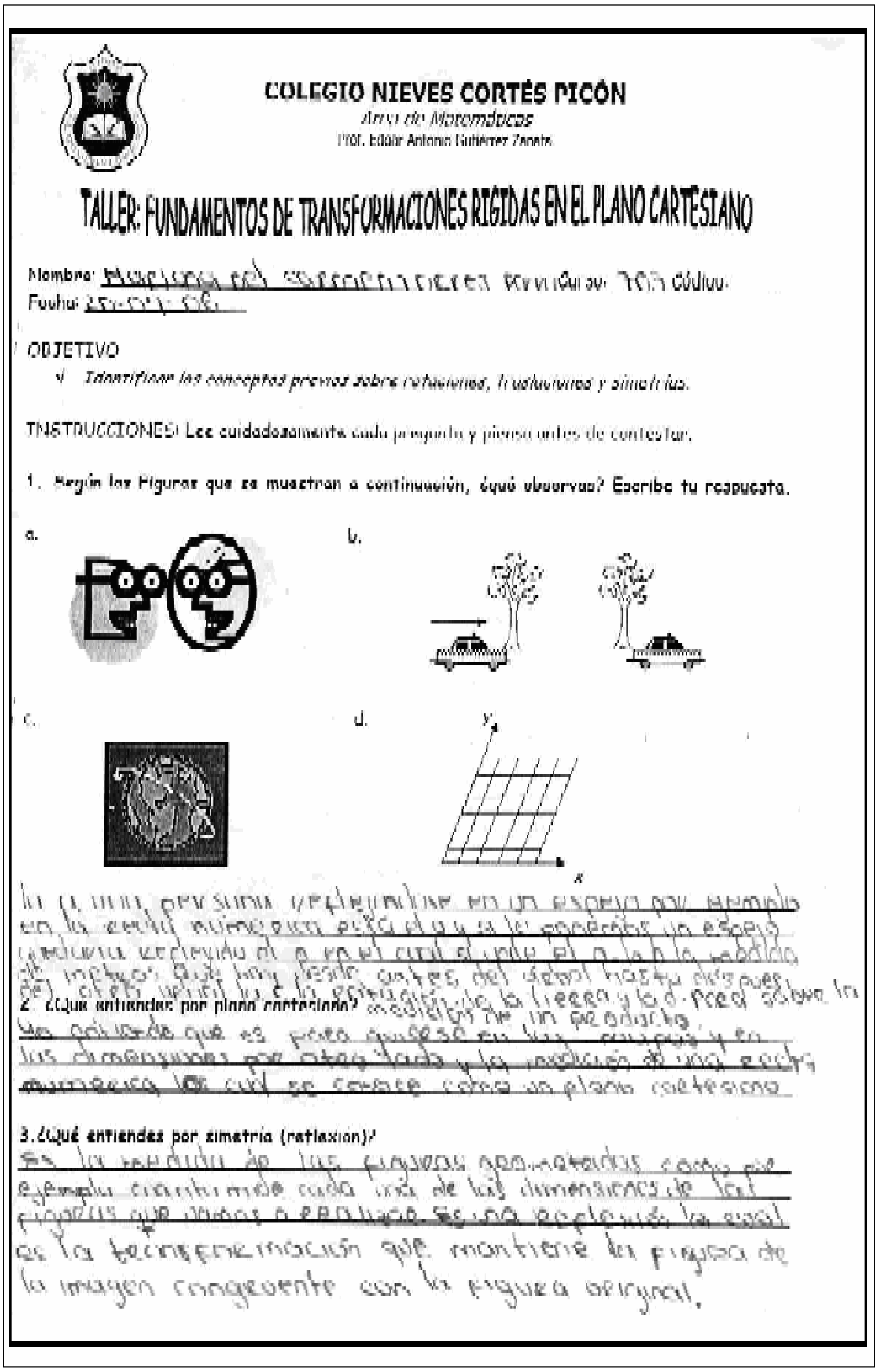
Con este taller diagnóstico quise saber qué tanto conocían los estudiantes sobre los temas propuestos para poder diseñar los talleres siguientes posteriormente. Con ellos, pude notar, por otro lado, que los estudiantes manejaban conceptos como línea recta, dirección, cambio de dirección, giro, ángulo, etc.

Además, con el taller los estudiantes descubrieron como se relacionaban aquellos conceptos unos con otros en situaciones acerca de las cuales podrían hablar y pensar. Por ejemplo, si estamos viajando a lo largo de una carretera recta y miramos hacia delante, generalmente fijamos la mirada en algo que está muy lejos en el horizonte.

---

[2] Esta actividad fue aplicada y desarrollada con los estudiantes los días 20 y 21 de septiembre de 2006.

Figura 1.a. Puntos 1, 2, y 3 de la actividad diagnóstica desarrollada por Mariana del Carmen Torres


COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas

TALLER: FUNDAMENTOS DE TRANSFORMACIONES RIGIDAS EN EL PLANO CARTESIANO

Nombre: Código:

Fecha:

OBJETIVO

√ Identificar los conceptos previos sobre rotaciones, traslaciones y simetrías.

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada pregunta y piensa antes de contestar.

1. Según las figuras que se muestran a continuación, ¿qué observas? Escribe tu respuesta.

a. b.

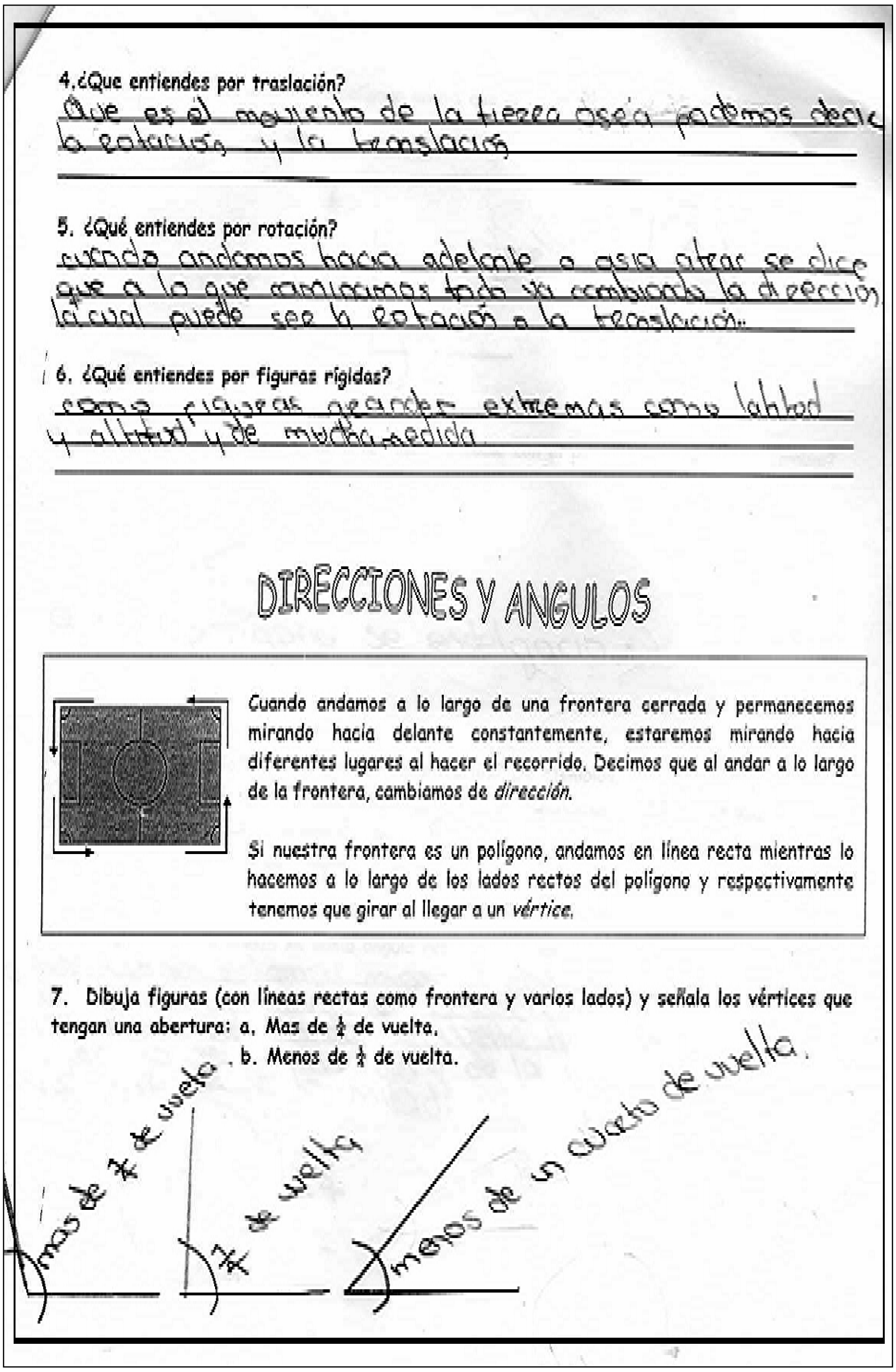
c. d.

2. ¿Qué entiendes por plano cartesiano?

3. ¿Qué entiendes por simetría (reflexión)?

es la transformación que mantiene la figura de la imagen congruente con la figura original.

Figura 1.b. Puntos 4, 5, 6, y 7 de la actividad diagnóstica desarrollada por Mariana del Carmen Torres



4. ¿Que entiendes por traslación?

Que es el movimiento de la tierra osea podemos decir la rotacion y la traslacion

5. ¿Qué entiendes por rotación?

cuando andamos hacia adelante o asia atras se dice que a lo que caminamos todo va cambiando la direccion la cual puede ser la rotación o la traslación.

6. ¿Qué entiendes por figuras rigidas?

como figuras grandes extremas como latitud y altitud y de mucha medida.

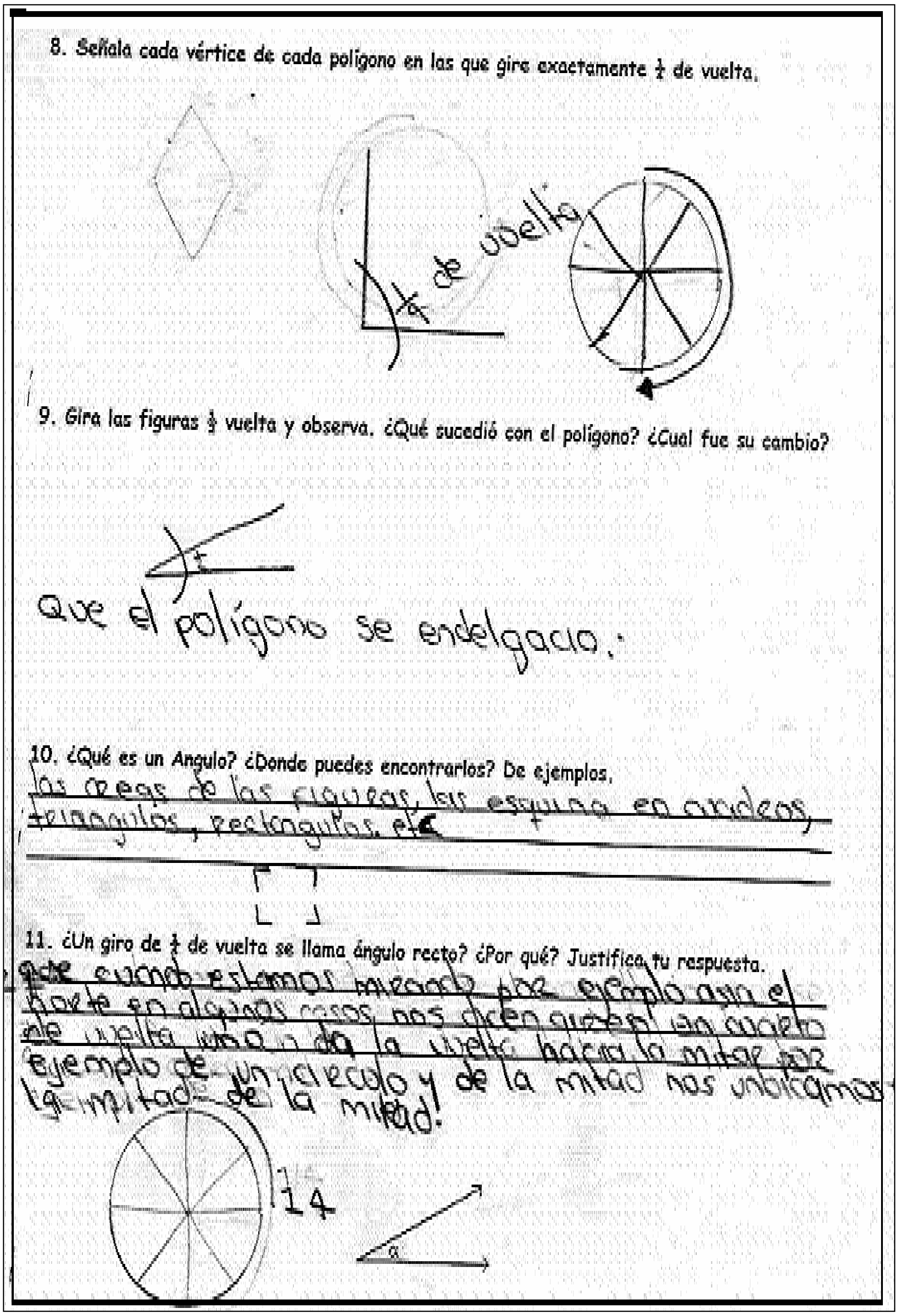
DIRECCIONES Y ANGULOS

Cuando andamos a lo largo de una frontera cerrada y permanecemos mirando hacia delante constantemente, estaremos mirando hacia diferentes lugares al hacer el recorrido. Decimos que al andar a lo largo de la frontera, cambiamos de *dirección*.

Si nuestra frontera es un polígono, andamos en línea recta mientras lo hacemos a lo largo de los lados rectos del polígono y respectivamente tenemos que girar al llegar a un *vértice*.

7. Dibuja figuras (con líneas rectas como frontera y varios lados) y señala los vértices que tengan una abertura: a. Mas de ¼ de vuelta.
b. Menos de ¼ de vuelta.

Figura 1.c. Puntos 8, 9, 10 y 11 de la actividad diagnóstica desarrollada por Mariana del Carmen Torres



El Taller No. 1, “Encontrando Poliominós” (Anexo 2) tenía por objetivo identificar y construir las características principales de los poliominós y se desarrolló a partir de la construcción y el trabajo con estos.

Este es un juego, tomado del tablero de ajedrez, constituido por cuadrados unidos al menos por una de sus caras. Con dos cuadrados lo llamamos “dominó”, con tres cuadros “triminó”, con cuatro cuadros “tetraminó”, de cinco cuadros “pentaminó”; según la posición de los cuadrados se pueden obtener diferentes formas.

Así, de un cuadrado existe sólo una forma; de dos, encontramos una forma; de tres, dos formas diferentes; de cuatro, cinco; de cinco, doce formas que al unirse se podrían hacer grandes figuras geométricas como animales, edificios, entre otros.

La actividad dirigida a los estudiantes, en la primera parte de este mismo taller corresponde a la construcción de los poliominós a partir de diferentes materiales como cartulina, cartón paja, acrílico, madera, y otros materiales. La segunda parte corresponde a la utilización de los poliominós en el recubrimiento de diferentes figuras mismo permitiendo a los estudiantes girar, trasladar al igual que establecer comparaciones en el tamaño, la posición y su forma[3].

La propuesta didáctica del Taller No. 1 se realizó por los 48 estudiantes, el 12 de octubre de 2006, con mucho interés; incluso llamó la atención de los docentes de diferentes áreas por la discusión generada por las actividades entre los estudiantes, pues querían seguir produciendo figuras o explicarse entre sí su propio trabajo.

---

[3] Esta actividad se registró en el diario de campo y en un video en los que se consignan no sólo las actividades realizadas sino la motivación e inquietudes de los estudiantes.

Inicialmente los estudiantes debían identificar los poliominós (véase la Figura 2.b); luego, llenar la tabla correspondiente con el número de cuadrados adosados y dar su respectivo nombre (véase la Figura 2.b). Ellos cumplieron con la primera fase, pero cuando fueron a llenar la tabla confundieron los nombres con el número de diferentes formas que se podían construir. Esto muy seguramente por la falta de habilidad y habituación al manejo de materiales y la falta de asociación entre el número y su nomenclatura.

Posteriormente, los estudiantes debían dibujar los poliominós (véase la Figura 2.c), tarea que se realizó de manera fácil y muy acertada; colorearon por propia iniciativa mostrando el número de cuadros unidos y dedujeron los nombres con más precisión y mucho interés.

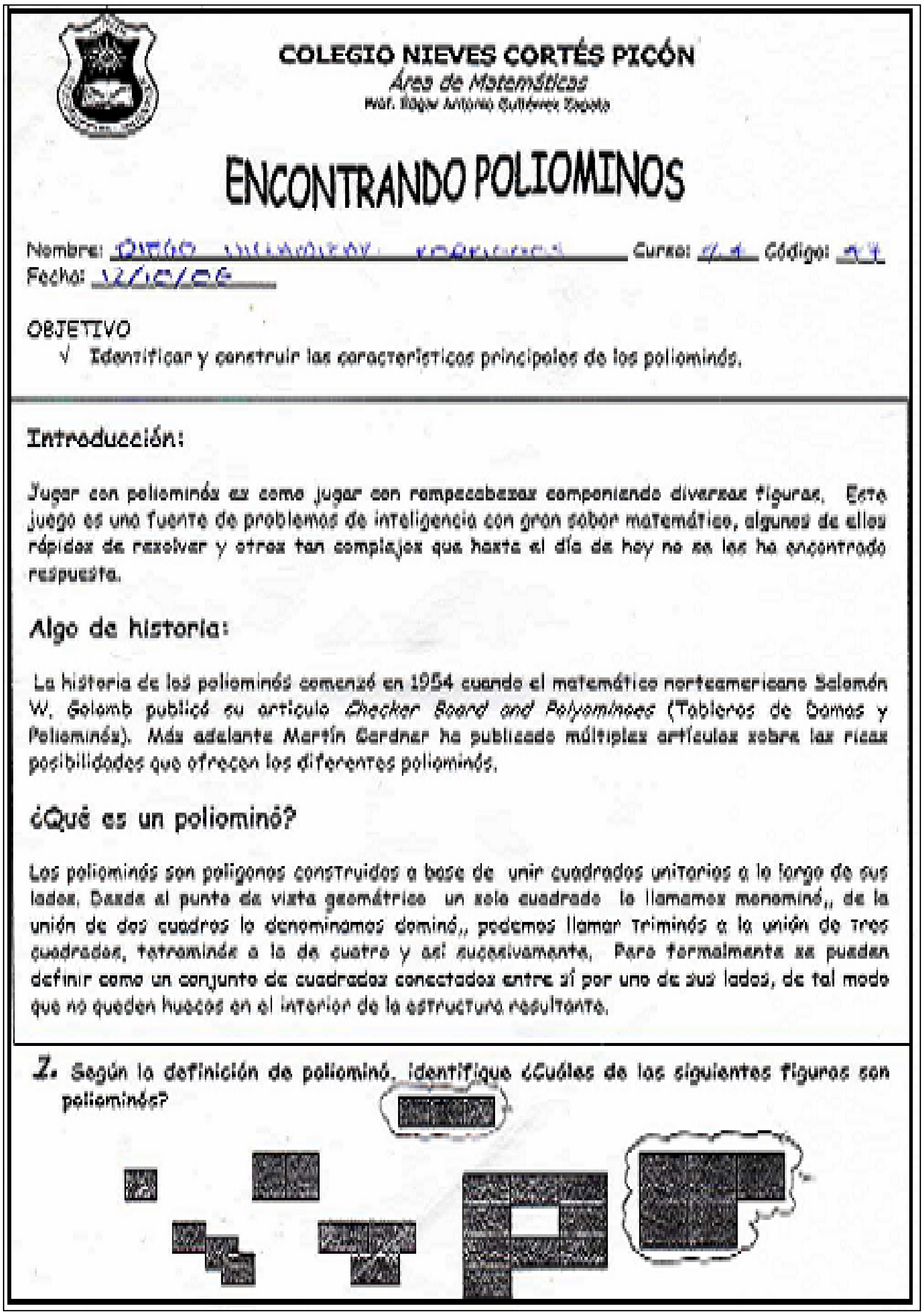
La siguiente pregunta del Taller estaba relacionada con el recubrimiento de diferentes rectángulos pero que cada uno tenían igual área. Debían "recubrir solamente con los doce pentominós", los estudiantes acá se divirtieron, además de que compartieron sus recubrimientos y, a su vez, demostraron grandes habilidades en el manejo de las figuras.

Otras preguntas relacionadas con el recubrimiento de otras figuras como una pirámide, la figura de un animal y una cruz (véase la Figura 2.d), a los estudiantes se les dificultó recubrir las figuras demorándose en esta parte con el proceso del juego porque la grafica tenía cierta dificultad.

"Un juego para dos personas", fue el titulo dado a la parte final de la actividad cuya realización despertó gran interés y colaboración entre los estudiantes, en un ambiente de mucha motivación y expectativa para los próximos talleres.

Para el interés de esta investigación se presenta el taller de Diego Villamizar (14 años), donde se registran las actividades mencionadas (Figuras 2.a, 2.b, 2.c, 2.d y 2.e).

Figura 2.a. Taller No.1 de Diego Villamizar; introducción y pregunta 1



COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas

ENCONTRANDO POLIOMINOS

Nombre: Diego Villamizar _____ Curso: _____ Código: _____
Fecha: _____

OBJETIVO
√ Identificar y construir las características principales de los poliominós.

Introducción:

Jugar con poliominós es como jugar con rompecabezas componiendo diversas figuras. Este juego es una fuente de problemas de inteligencia con gran sabor matemático, algunos de ellos rápidos de resolver y otros tan complejos que hasta el día de hoy no se les ha encontrado respuesta.

Algo de historia:

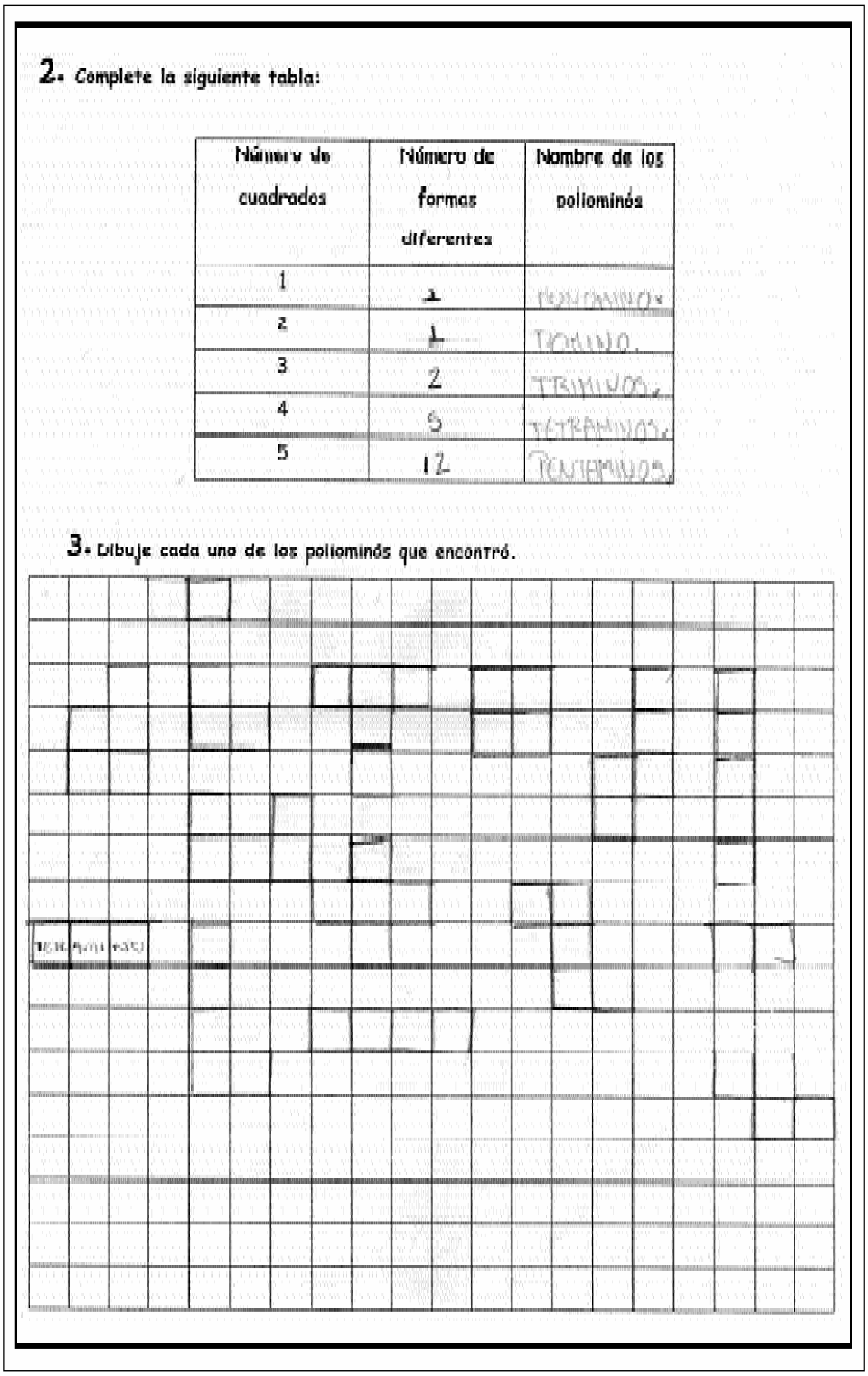
La historia de los poliominós comenzó en 1954 cuando el matemático norteamericano Salomón W. Golomb publicó su artículo *Checker Board and Polyominoes* (Tableros de Damas y Poliominós). Más adelante Martín Gardner ha publicado múltiples artículos sobre las ricas posibilidades que ofrecen los diferentes poliominós.

¿Qué es un poliominó?

Los poliominós son polígonos construidos a base de unir cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. Desde el punto de vista geométrico un solo cuadrado lo llamamos monominó,, de la unión de dos cuadros lo denominamos dominó,, podemos llamar triminós a la unión de tres cuadrados, tetraminós a la de cuatro y así sucesivamente. Para formalmente se pueden definir como un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados, de tal modo que no queden huecos en el interior de la estructura resultante.

1. Según la definición de poliominó, identifique ¿Cuáles de las siguientes figuras son poliominós?

Figura 2.b. Taller No.1 de Diego Villamizar; preguntas 2 y 3



2. *Complete la siguiente tabla:*

Número de cuadrados	Número de formas diferentes	Nombre de los poliominós
1	1	MONOMINOS.
2	1	DOMINO.
3	2	TRIMINOS.
4	5	TETRAMINOS.
5	12	PENTAMINOS.

3. Dibuje cada uno de los poliominós que encontró.

Figura 2.c. Taller No. 1 de Diego Villamizar; preguntas 4 y 5

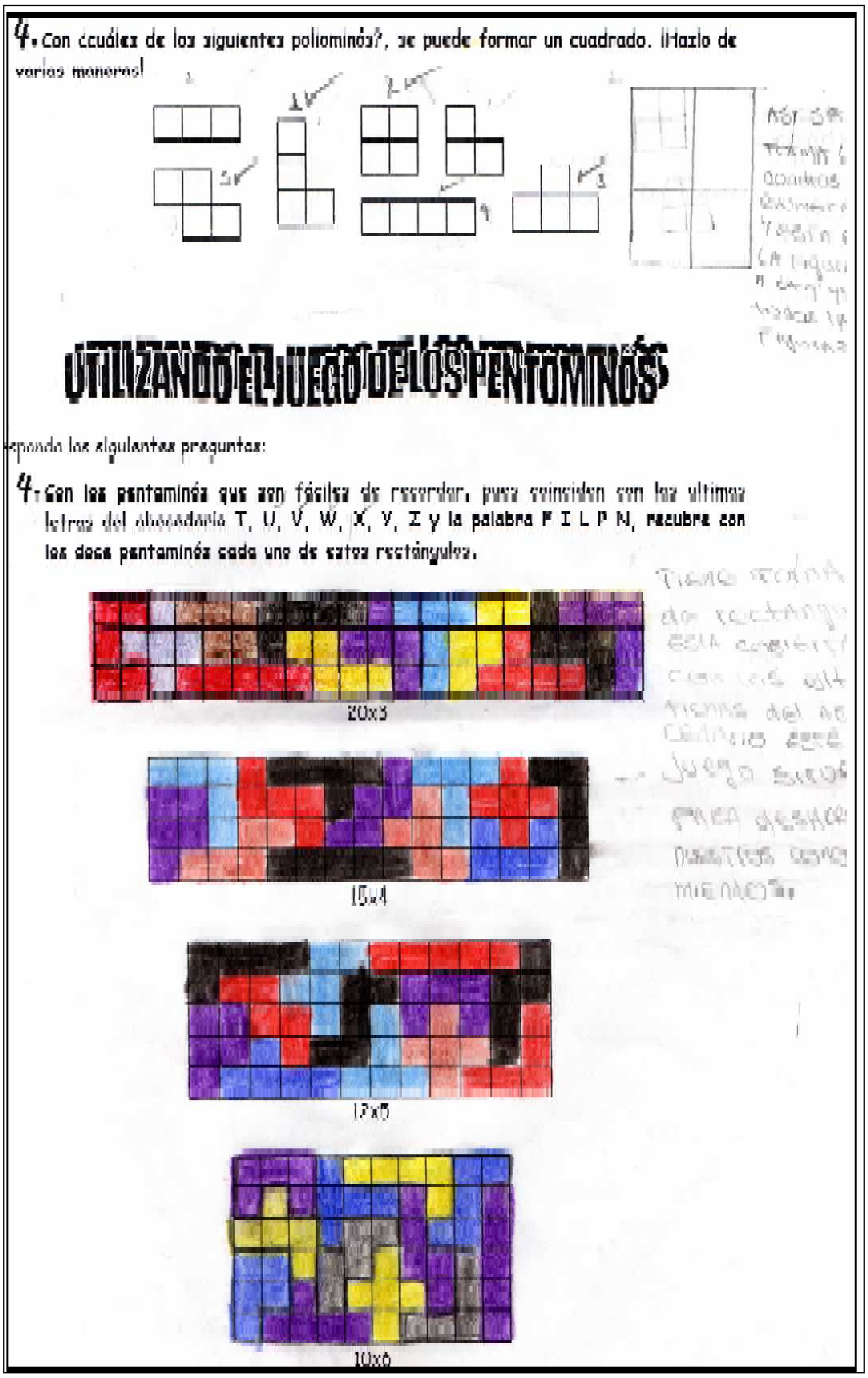
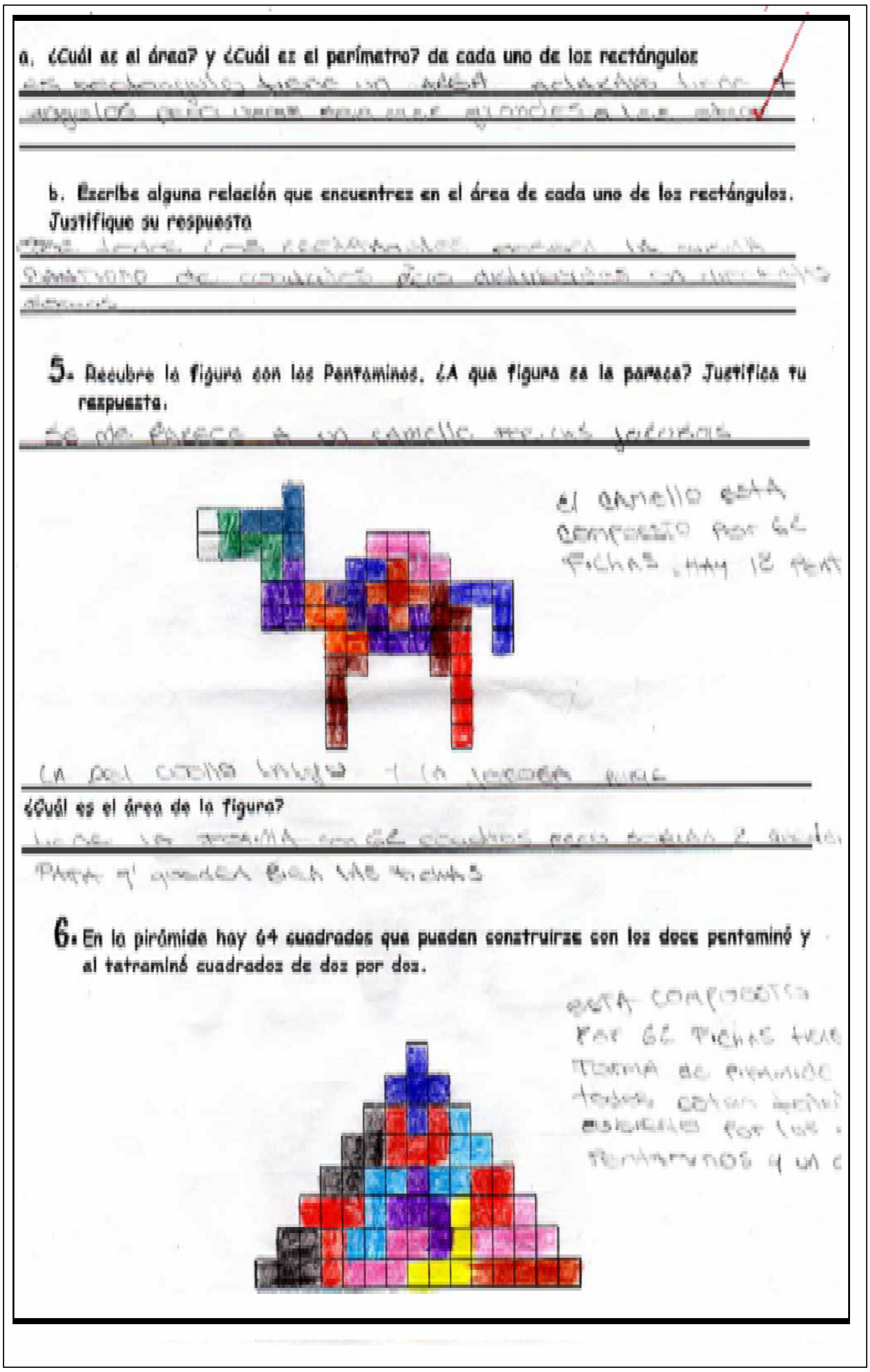


Figura 2.d. Taller No. 1 de Diego Villamizar, preguntas 6 y 7


a. ¿Cuál es el área? y ¿Cuál es el perímetro? de cada uno de los rectángulos

b. Escribe alguna relación que encuentres en el área de cada uno de los rectángulos. Justifique su respuesta

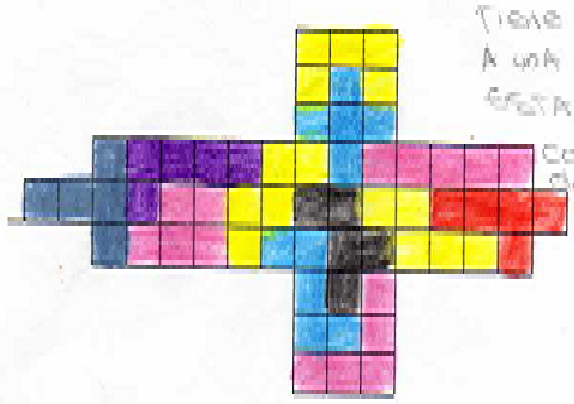
5. Recubre la figura con los Pentaminos. ¿A que figura se la parece? Justifica tu respuesta.

¿Cuál es el área de la figura?

6. En la pirámide hay 64 cuadrados que pueden construirse con los doce pentaminó y el tetraminó cuadrados de dos por dos.

Figura 2.e. Taller No. 1 de Diego Villamizar, pregunta 8

7. Recubrir la cruz con los doce pentaminós.



Tiene parecido a una cruz este esta totalment cubierto con doce pentam y [illegible]

JUEGO PARA DOS JUGADORES

En este juego utiliza un tablero similar al tablero de ajedrez y dos colecciones de pentominó (uno para cada jugador), de distinto color cada uno. Los cuadrados del tablero deben ser iguales que los cuadrados de los pentominós.

El juego consiste en ir colocando por turnos, un pentominó en el tablero de modo que no se superponga ninguna pieza ya colocada. La pieza colocada en el tablero no se puede retirar ni cambiar de lugar. Gana el jugador que impide a su oponente colocar una de sus piezas.

Variantes del juego:

a. Con el mismo tablero y solo una colección de los doce pentominós, que se dejan sobre la mesa, cada jugador en su turno toma un pentominó para colocar sobre el tablero. Gana el jugador que impida a su oponente colocar una pieza. Si se han colocado las doce piezas sobre el tablero, el juego quedaría "en tablas", es decir, empate.

b. Con el mismo planteamiento que en el apartado a. pero distribuyendo aleatoriamente 6 pentominós a cada jugador.

Ahora, en cuanto al Taller No. 2, "Recubriendo y Encontrando" (Anexo 3), que tenía como objetivo adquirir habilidades y destrezas en el manejo de poliominós que se presenta como reto a la imaginación y los procesos cognitivos de los estudiantes.

Cada pregunta de este taller se diseñó como una actividad lúdica para que los estudiantes pudieran enfrentar situaciones y darle solución a una cantidad de ejercicios de armar rompecabezas, llevándolos a explorar y encontrar soluciones de figuras (cuadrados, rectángulos) u otras muchas figuras, moviéndolas y rotándolas.

El trabajo con el Taller No. 2 se realizó, el 1 de noviembre de 2005, utilizando el juego de los poliominós y se dio lugar a la manipulación de material para armar el rompecabezas. La ejecución mostró a los estudiantes que el cubrimiento con todas las piezas era fácil; la dificultad se encontró cuando debían utilizar las doce piezas del pentominó.

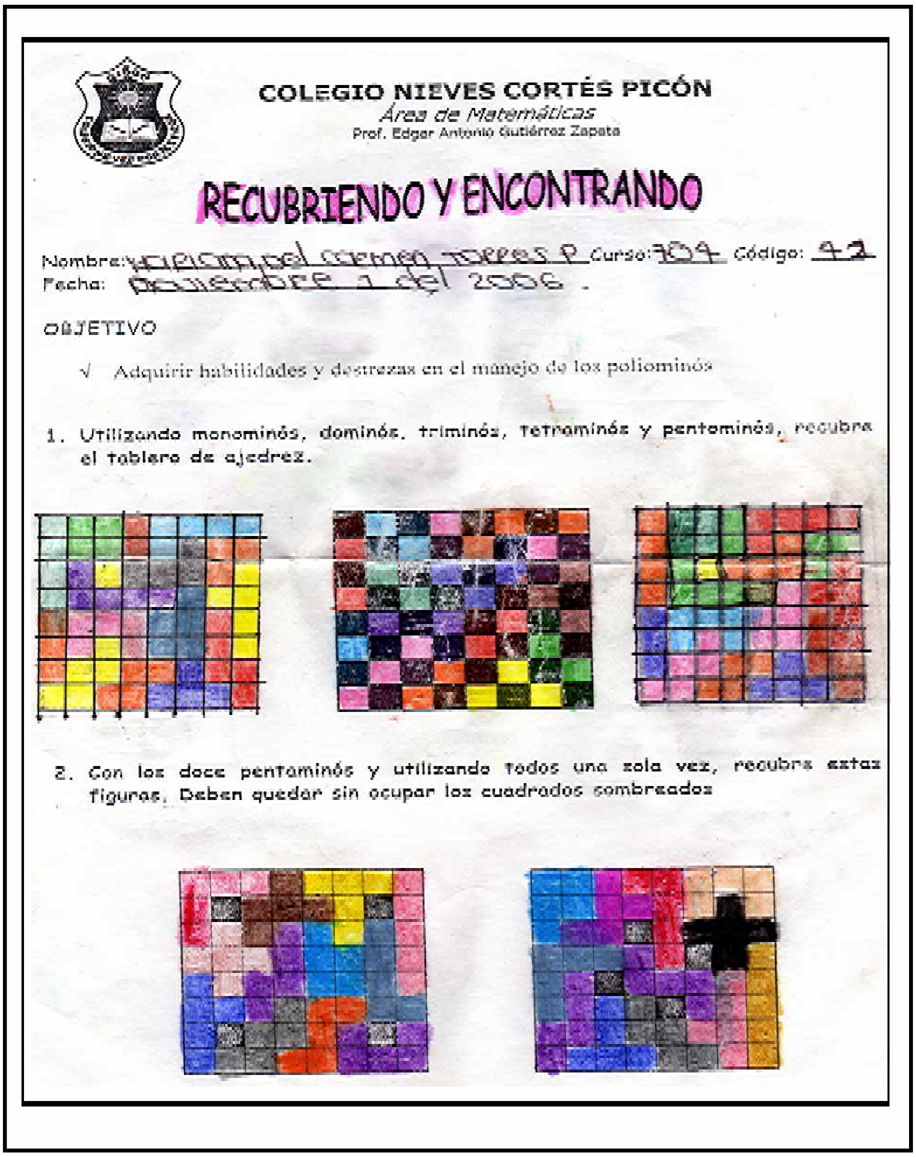
Pero aún así, la actividad permitió a los estudiantes comprender que, aunque su forma cambiaba el tamaño seguía siendo el mismo, asociando los conceptos de área, perímetro, semejanza, entre otros (véase Figuras 3.a, 3.b y 3.c que corresponden al taller realizado por Mariana del Carmen Torres).

En la pregunta: ¿Qué otros recubrimientos puedes hacer utilizando los doce pentominós? (punto 3, Figura 3.b), los estudiantes mostraron grandes dotes de razonamiento, lógica, raciocinio e inteligencia para resolver los rompecabezas.

Situaciones de aprendizaje como la anterior motivan al docente por lo que en el paso de lo simple a lo complejo, la motivación hizo que el trámite se diera con estos buenos resultados.

La pregunta cinco (Figura 3.c), que corresponde al diagrama que se presenta a continuación, generó discusiones porque presentó dificultad a los estudiantes para resolverla por el grado de resolución que presenta.

Figura 3.a. Taller No. 2 de Mariana del Carmen Torres;


COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

RECUBRIENDO Y ENCONTRANDO

Nombre: Mariana del carmen Torres P Curso: 704 Código: 42
Fecha: Noviembre 1 del 2006.

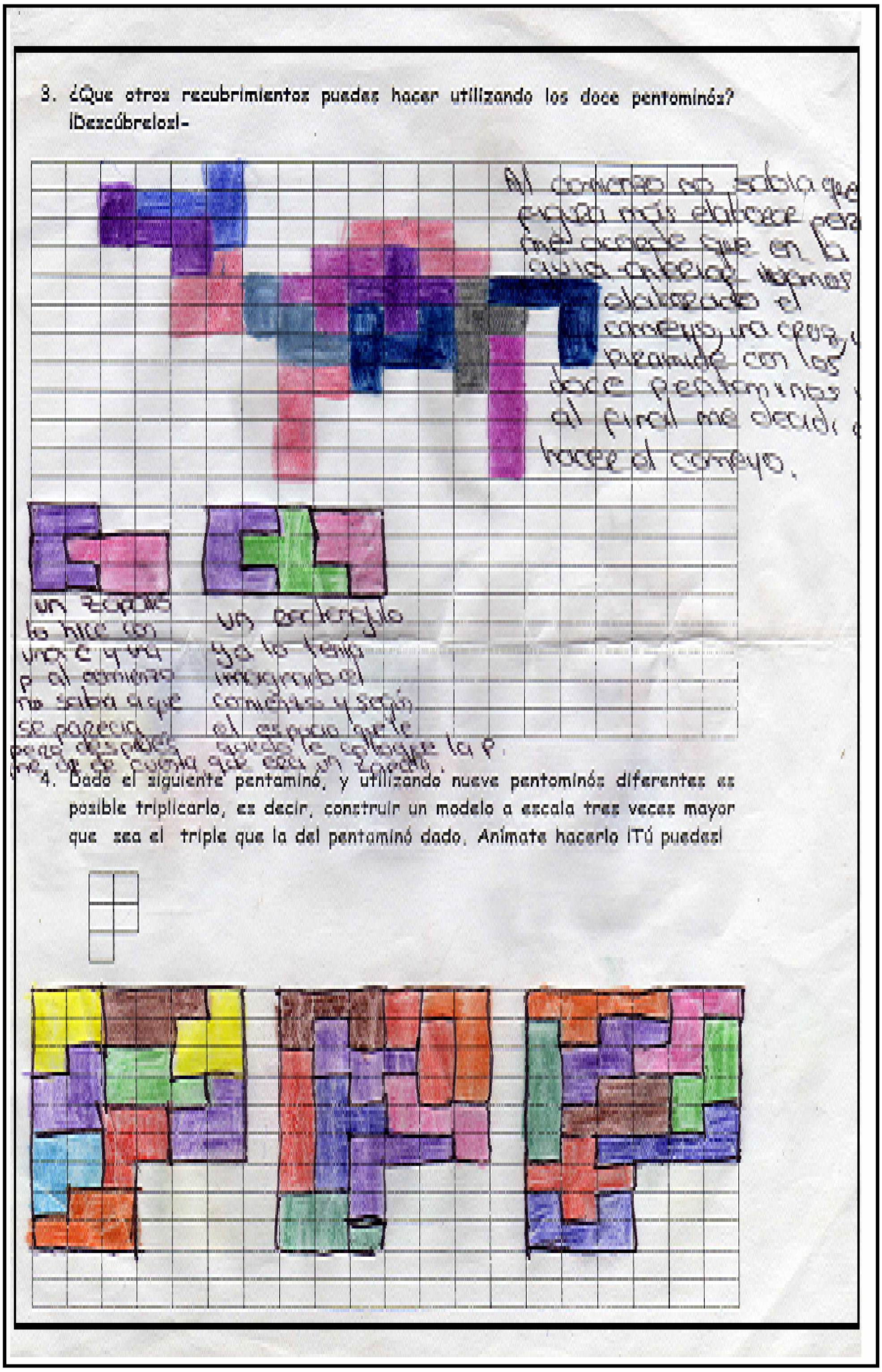
OBJETIVO

√ Adquirir habilidades y destrezas en el manejo de los poliominós

1. Utilizando monominós, dominós, triminós, tetraminós y pentominós, recubra el tablero de ajedrez.

2. Con los doce pentominós y utilizando todos una sola vez, recubra estas figuras. Deben quedar sin ocupar los cuadrados sombreados

Figura 3.b. Taller No.2 de Mariana del Carmen Torres; preguntas 3 y 4



3. ¿Que otros recubrimientos puedes hacer utilizando los doce pentominós? ¡Descúbrelos!-

Al comienzo no sabía que figura más elaborar pero me acordé que en la guía anterior habíamos elaborado el conejo, una cruz, y pirámide con los doce pentominós y al final me decidí a hacer el conejo.

un zapato lo hice con una C y una P al comienzo no sabía a que se parecía pero después me di de cuenta que era un zapato.

un rectángulo ya lo tenía imaginado al comienzo y según el espacio que le quedaba le coloqué la P.

4. Dado el siguiente pentominó, y utilizando nueve pentominós diferentes es posible triplicarlo, es decir, construir un modelo a escala tres veces mayor que sea el triple que la del pentominó dado. Anímate hacerlo ¡Tú puedes!

Figura 3.c. Taller No.2 de Mariana del Carmen Torres; preguntas 5 - 7

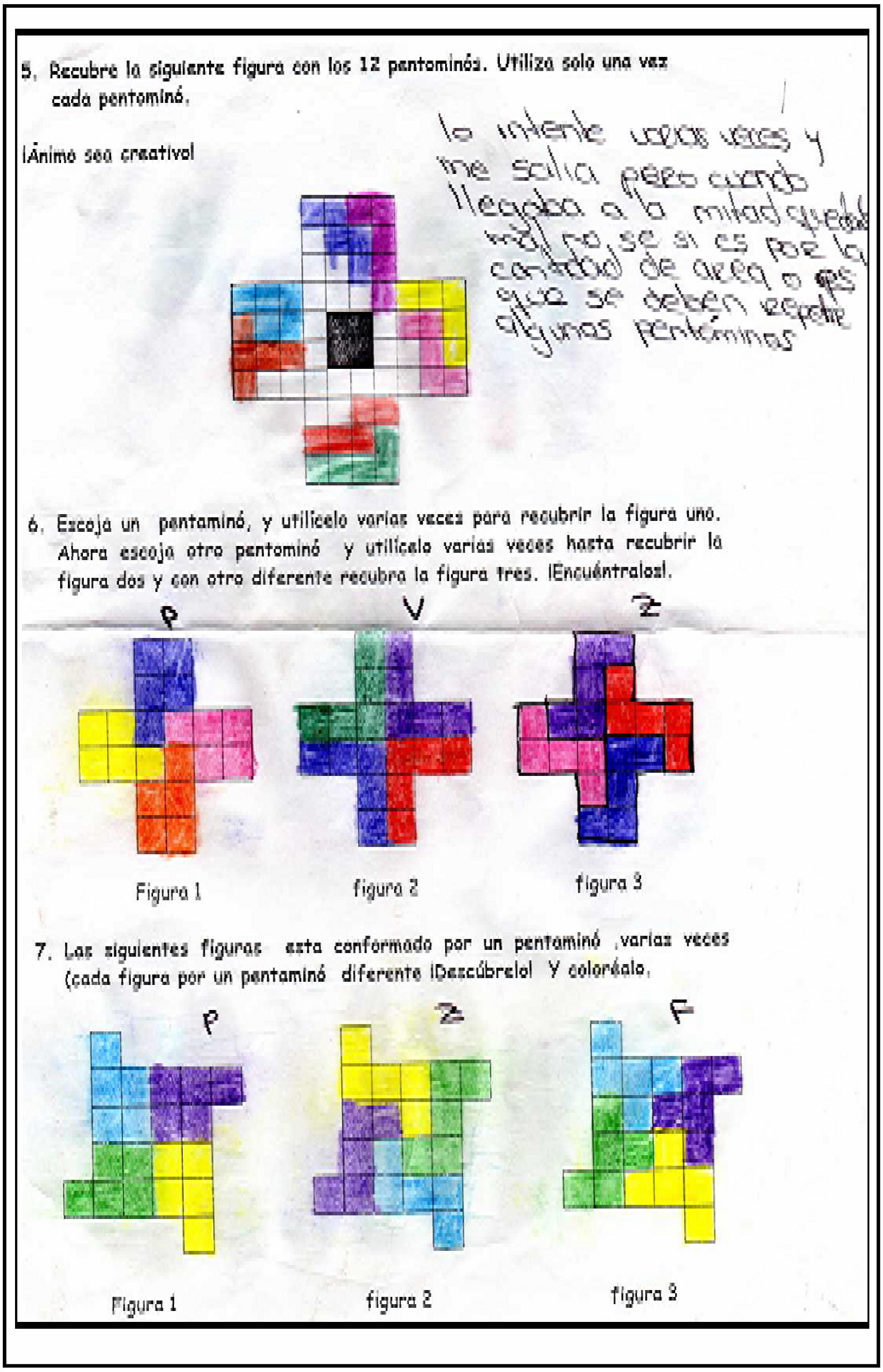
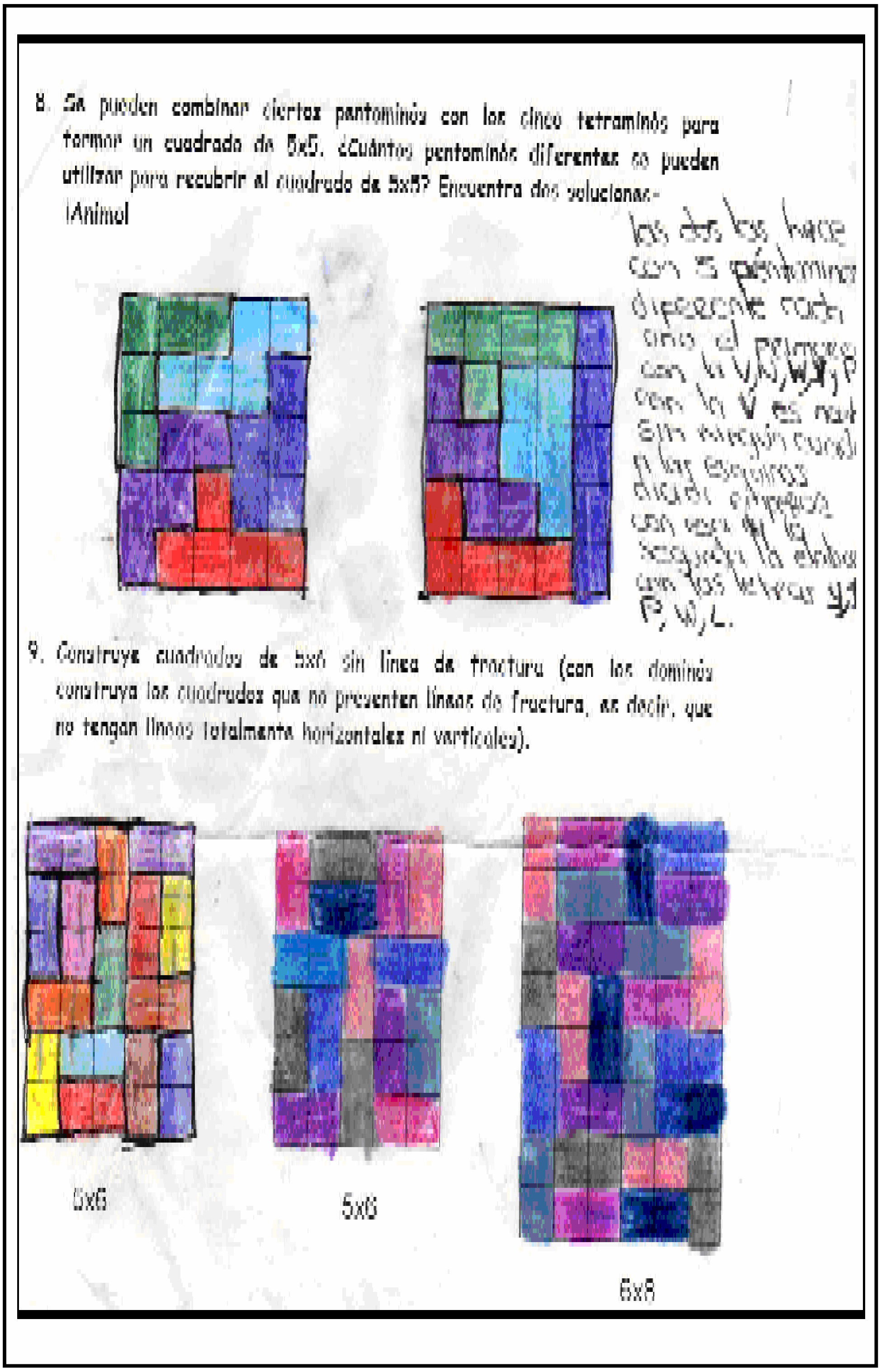


Figura 3.d. Taller No.2 de Mariana del Carmen Torres; preguntas 8 - 9


8. Se pueden combinar ciertos pentominós con los cinco tetraminós para formar un cuadrado de 5x5. ¿Cuántos pentominós diferentes se pueden utilizar para recubrir el cuadrado de 5x5? Encuentra dos soluciones.- ¡Animo!

9. Construye cuadrados de 5x6 sin línea de fractura (con los dominós construya los cuadrados que no presenten líneas de fractura, es decir, que no tengan líneas totalmente horizontales ni verticales).

5x6

5x8

6x8

Con el Taller No. 3, “Estudio de Giros Particulares y su Relación con Grados y Ángulos” (Anexo 4), tenía como propósito que los estudiantes realizaran giros a través de grados y ángulos; además, con él se introdujeron los temas necesarios para que los estudiantes se fueran familiarizando con algunos diagramas del tipo “estado-operador-estado” y algunos movimientos de giros y su equivalencia con los ángulos de acuerdo al sentido de las manecillas del reloj, o lo contrario a las manecillas del reloj, relacionándolo con el signo.

Como los estudiantes ya habían explorado y jugado con el material, con este taller se pretendía tener un acercamiento a las propiedades en las transformaciones rígidas, girando los pentominós, poniendo espejos en las figuras para que observaran y dibujaran los resultados e hicieran su equivalencia en grados de acuerdo al giro, pero dando relevancia al signo de acuerdo a como giraban las fichas.

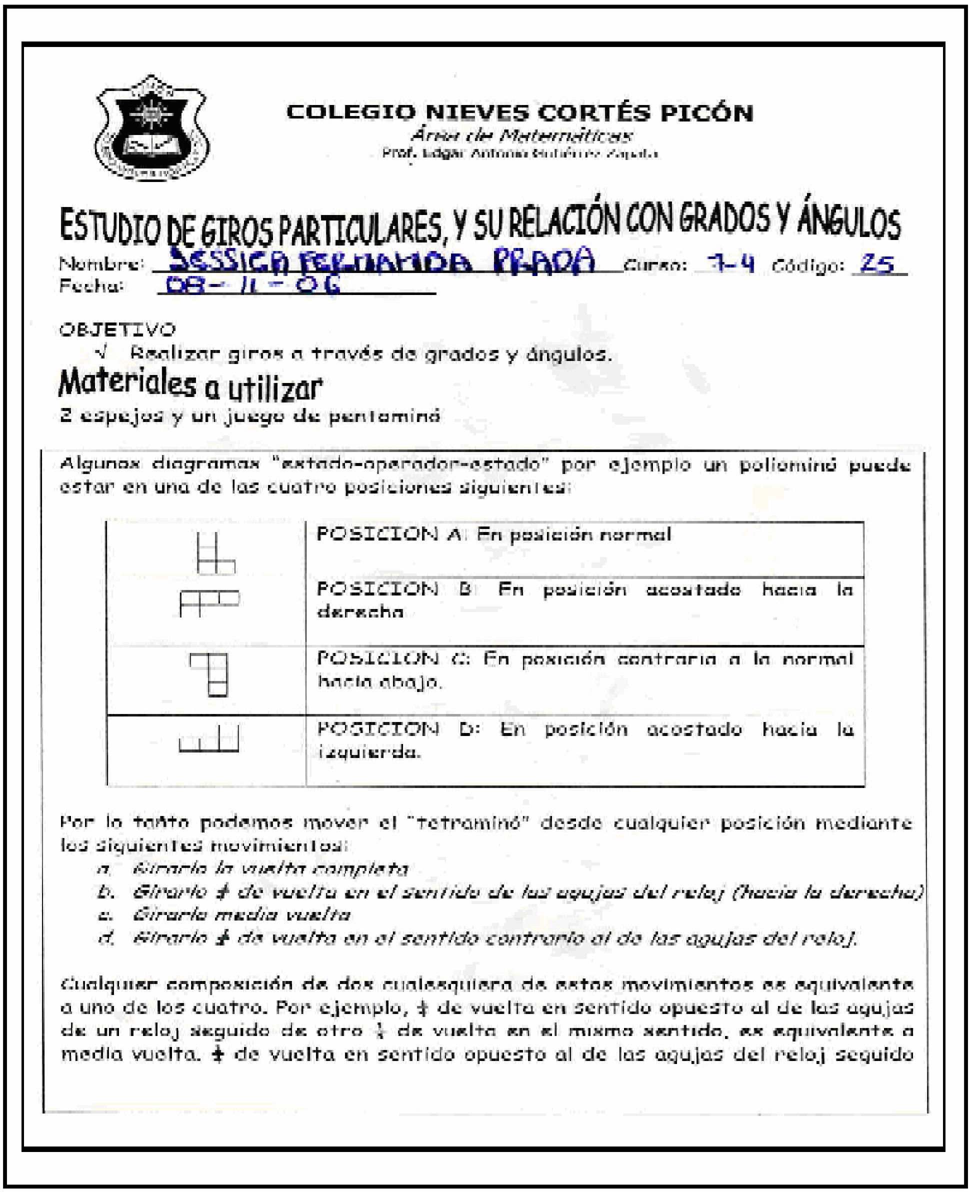
En cuanto a su realización, las actividades desarrolladas por parte de los estudiantes fueron acertadas y ágiles ya que el uso de materiales como espejos y pentominós fue la clave para que se metieran de lleno en el trabajo que estaban realizando puesto que se posibilitó un acercamiento y desarrollo del tema en forma comprensible para su posterior generalización. Hubieron, además, discusiones sobre el giro y los grados de mucho interés y contenido lógico.

En la pregunta ocho (Figura 4.d) sobre los giros que debían dar a los pentaminós y su equivalencia en grados, los estudiantes lo pudieron resolver cuando se trataba de cantidades como un cuarto, media vuelta, tres cuartos de vuelta, vuelta completo, lo hicieron bien con su equivalencia en grados.

Pero cuando trataron de trabajar giros más pequeños como un octavo de vuelta, lo resolvieron con dificultad: tomaron una hoja de papel, la partieron en pedazos de acuerdo al giro que se pedía; y cuando se trataba de tres octavos de vuelta, adicionaron los pedazos y lo resolvieron.

Finalmente, respecto a este taller, las figuras que a continuación aparecen corresponden al taller realizado por Jessica Prada el 11 de noviembre de 2006.

Figura 4.a. Taller No. 3 de Jessica Prada; introducción



COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

ESTUDIO DE GIROS PARTICULARES, Y SU RELACIÓN CON GRADOS Y ÁNGULOS

Nombre: JESSICA FERNANDA PRADA Curso: 7-4 Código: 25
Fecha: 08-11-06

OBJETIVO

√ Realizar giros a través de grados y ángulos.

Materiales a utilizar

2 espejos y un juego de pentominó

Algunos diagramas "estado-operador-estado" por ejemplo un poliominó puede estar en una de las cuatro posiciones siguientes:

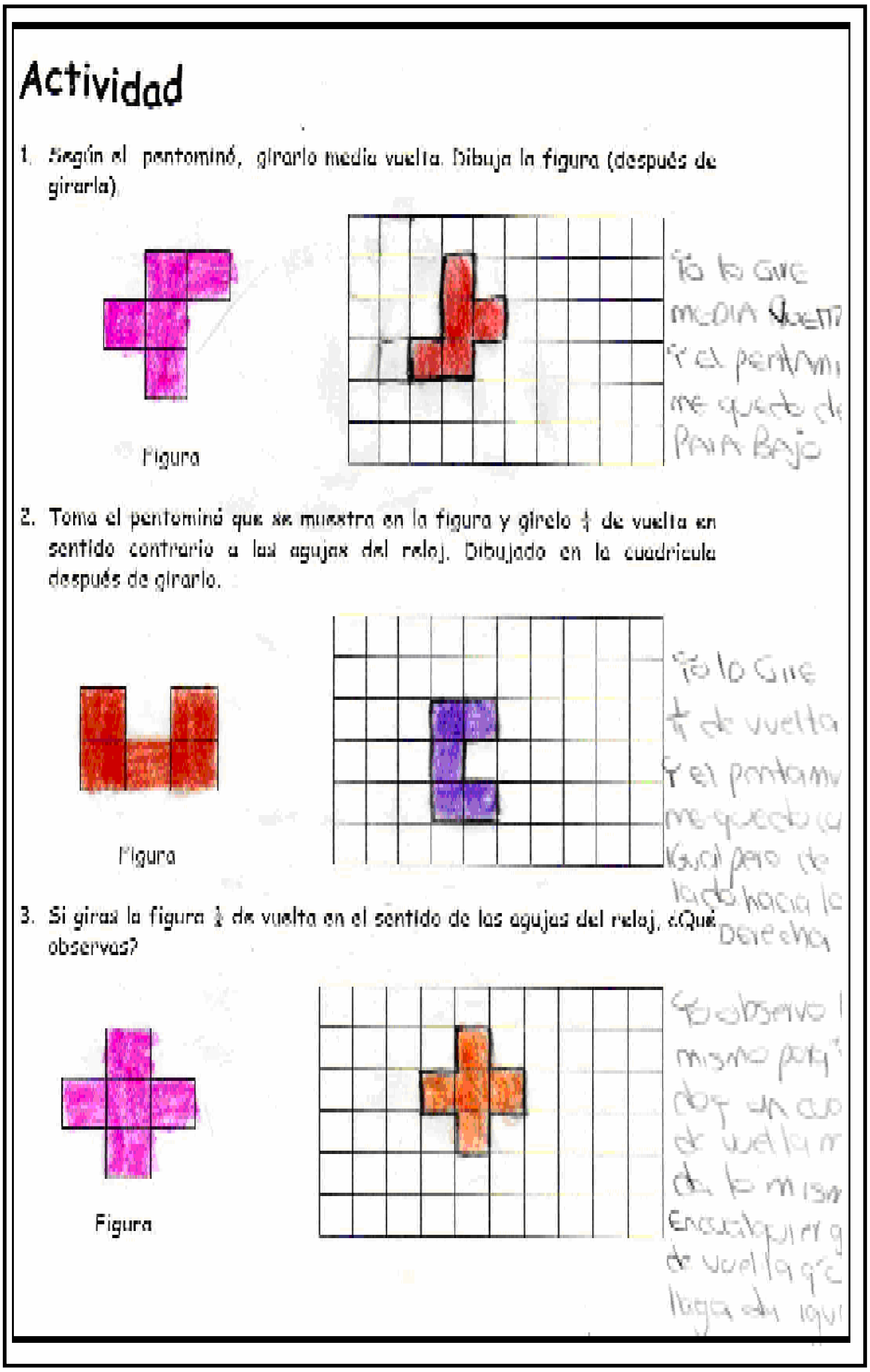
	POSICION A: En posición normal
	POSICION B: En posición acostado hacia la derecha
	POSICION C: En posición contraria a la normal hacia abajo.
	POSICION D: En posición acostado hacia la izquierda.

Por lo tanto podemos mover el "tetraminó" desde cualquier posición mediante los siguientes movimientos:

a. Girarlo la vuelta completa
b. Girarlo ¼ de vuelta en el sentido de las agujas del reloj (hacia la derecha)
c. Girarlo media vuelta
d. Girarlo ¼ de vuelta en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Cualquier composición de dos cualesquiera de estos movimientos es equivalente a uno de los cuatro. Por ejemplo, ¼ de vuelta en sentido opuesto al de las agujas de un reloj seguido de otro ¼ de vuelta en el mismo sentido, es equivalente a media vuelta. ¼ de vuelta en sentido opuesto al de las agujas del reloj seguido

Figura 4.b. Taller No. 3 de Jessica Prada, puntos 1 - 3



Actividad

1. Según el pentominó, girarlo media vuelta. Dibuja la figura (después de girarla).

Yo lo Gire media Vuelta y el pentamino me quedo de Para Bajo

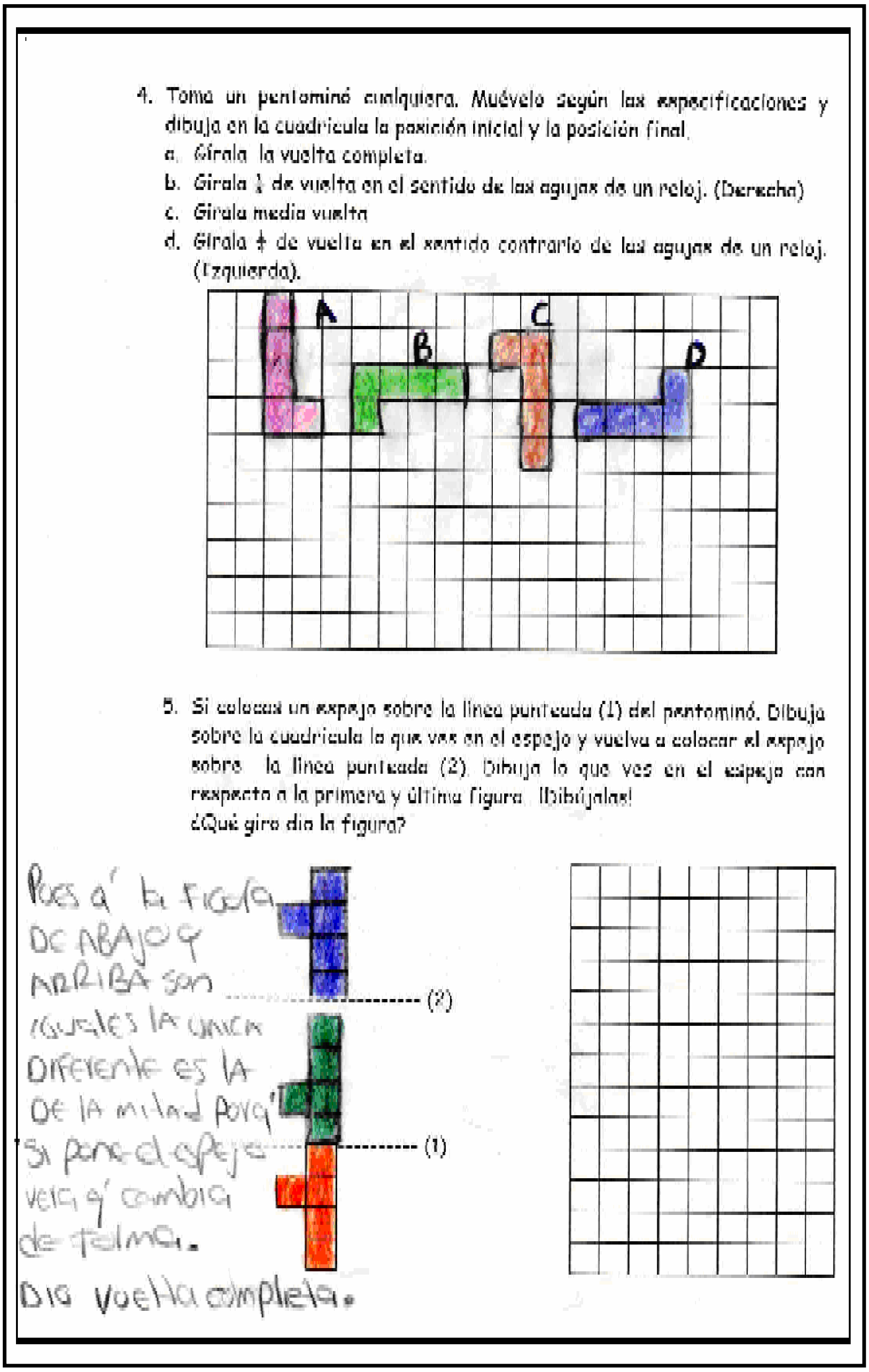
2. Toma el pentominó que se muestra en la figura y gírelo ¼ de vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj. Dibujado en la cuadrícula después de girarlo.

Yo lo Gire ¼ de vuelta y el pentamino me quedo ca Igual pero de lado hacia la Derecha

3. Si giras la figura ¼ de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, ¿Qué observas?

Yo observo lo mismo porque doy un cuarto de vuelta me da lo mismo En cualquier g de vuelta que llega a la igu [illegible]

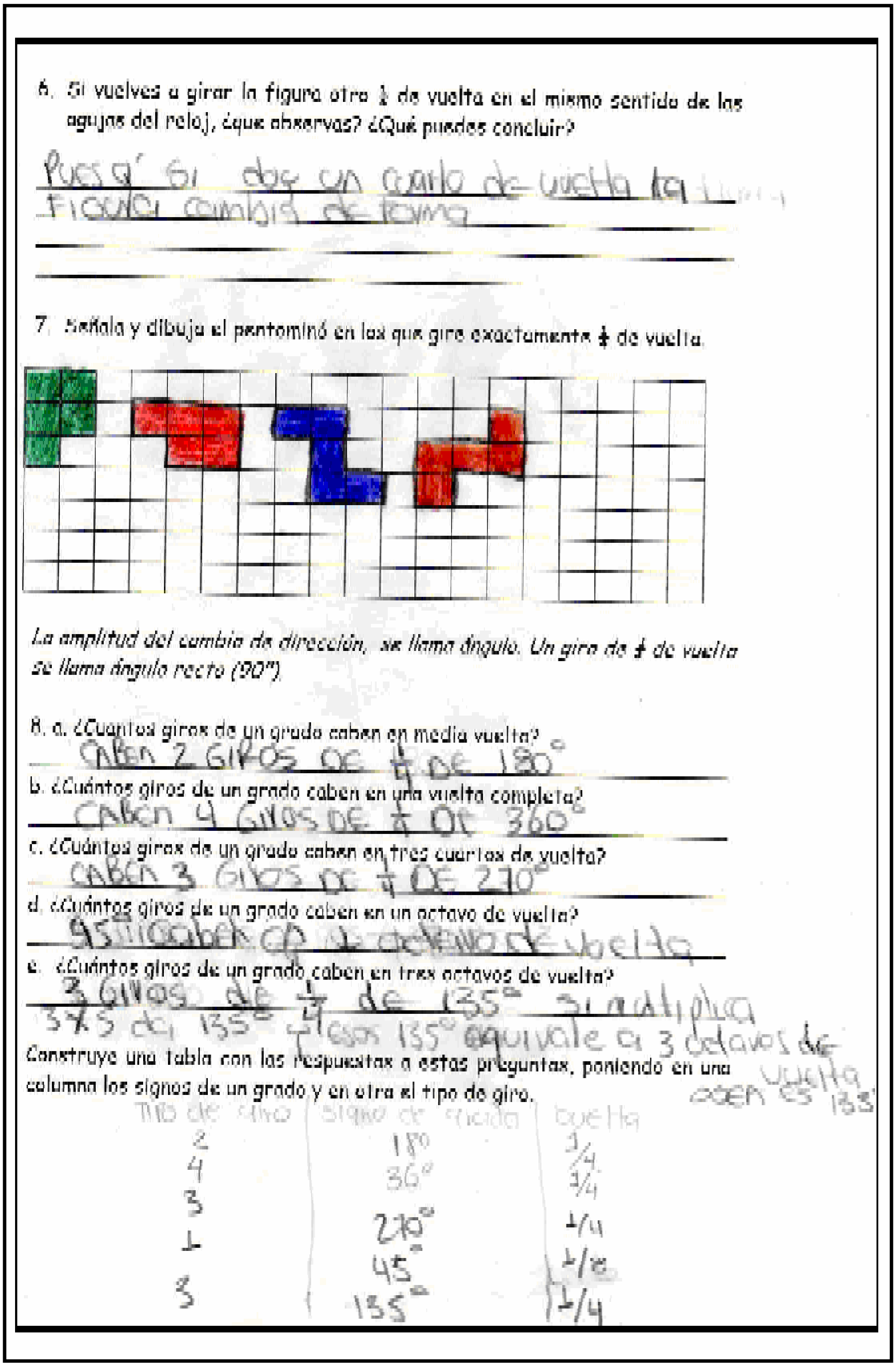
Figura 4.c. Taller No. 3 de Jessica Prada, puntos 4 y 5


4. Toma un pentominó cualquiera. Muévelo según las especificaciones y dibuja en la cuadrícula la posición inicial y la posición final.
   a. Gírala la vuelta completa.
   b. Gírala ¼ de vuelta en el sentido de las agujas de un reloj. (Derecha)
   c. Gírala media vuelta
   d. Gírala ¾ de vuelta en el sentido contrario de las agujas de un reloj. (Izquierda).

5. Si colocas un espejo sobre la línea punteada (1) del pentominó. Dibuja sobre la cuadrícula lo que ves en el espejo y vuelve a colocar el espejo sobre la línea punteada (2). Dibuja lo que ves en el espejo con respecto a la primera y última figura. ¡Dibújalas!
   ¿Qué giro dio la figura?

Pues q' la figura DE ABAJO q ARRIBA son iguales la unica Diferente es la DE la mitad porq' si pone el espejo vera q' cambia de forma.
Dio vuelta completa.

Figura 4.d. Taller 3 de Jessica Prada, puntos 6 y 7



6. Si vuelves a girar la figura otra ¼ de vuelta en el mismo sentido de las agujas del reloj, ¿qué observas? ¿Qué puedes concluir?

Pues q' si doy un cuarto de vuelta la figura cambia de forma

7. Señala y dibuja el pentominó en los que gire exactamente ¼ de vuelta.

La amplitud del cambio de dirección, se llama ángulo. Un giro de ¼ de vuelta se llama ángulo recto (90°)

8. a. ¿Cuántos giros de un grado caben en media vuelta?

CABEN 2 GIROS DE ¼ DE 180°

b. ¿Cuántos giros de un grado caben en una vuelta completa?

Caben 4 Giros DE ¼ DE 360°

c. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres cuartos de vuelta?

CABEN 3 GIROS DE ¼ DE 270°

d. ¿Cuántos giros de un grado caben en un octavo de vuelta?

45 caben en un octavo de vuelta

e. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres octavos de vuelta?

3 Giros de ¼ de 135° si multiplica 3×5 da 135 esos 135° equivale a 3 octavos de vuelta caben es 135

Construye una tabla con las respuestas a estas preguntas, poniendo en una columna los signos de un grado y en otra el tipo de giro.

Tipo de giro	signo de grado	vuelta
2	18°	1/4
4	36°	1/4
3	270°	1/4
1	45°	1/8
3	135°	1/4

En el cuarto taller, “Manipulando, Encontrando y Descubriendo Simetrías” (Anexo 5), el objetivo era identificar, encontrar, construir y clasificar simetrías; esta actividad era la llave que abría la puerta del tema de investigación y se desarrolló en dos partes: la primera, introdujo el tema sobre simetría axial, utilizando las doce piezas del pentominó. Los estudiantes colocaban espejos en diferentes posiciones de cada ficha para luego dibujar su imagen. La segunda parte la actividad se centró en simetría puntual y en el número de simetrías de cada pentominó, esto utilizando las figuras hechas en papel y haciendo los dobleces necesarios para conseguir el objetivo propuesto como otra de las formas para complementar el trabajo desarrollado sobre el tema de simetrías.

Otro aspecto importante del taller era el trabajo a realizar con el plano cartesiano que requería que el estudiante aprendiera a ubicar los puntos de cada pareja en el plano para luego dibujar la figura. Además, a través de la actividad los estudiantes vivenciarían las diferencias entre las simetrías, permitiéndoles estas conceptualizar posteriormente las propiedades invariantes definiendo claramente simetría axial, simetría puntual y figura simétrica.

Precisando los eventos de este taller, es importante señalar la secuencia de lo simple a lo complejo del trabajo al punto que los mismos estudiantes conceptualizaron sobre el tema. Consecuentemente, hubo mucha expectativa con el manejo de los espejos porque a la vez que analizaban, conjeturaban y comunicaban sus experiencias, socializaron cada punto desarrollado.

Además, cuando trabajaron el plano cartesiano (punto 11, Figura 5.e), pude ver claramente las dificultades de los estudiantes al ubicar los puntos en cualquier parte del cuadrante del plano pues no tenían en cuenta el signo de la coordenada ni el eje al cual pertenecía.

Por otro lado, el trabajo manual de dibujar, recortar y hacer los dobleces para encontrar los ejes de simetría creó cierto goce colectivo, puesto que estaban manipulando material, esto les permitió captar fácilmente los conceptos propuestos.

Además, las actividades con los espejos (véase los puntos de la Figura 5.a) permitió un acercamiento a la simetría axial, haciendo activa la propuesta de los Lineamientos Curriculares (1998, p. 61) de devolver la dinámica a los sistemas geométricos, con sus operadores y transformaciones, que resultan de interiorizar en forma de esquemas activos en la imaginación, los movimientos acciones y transformaciones que se ejecutan físicamente.

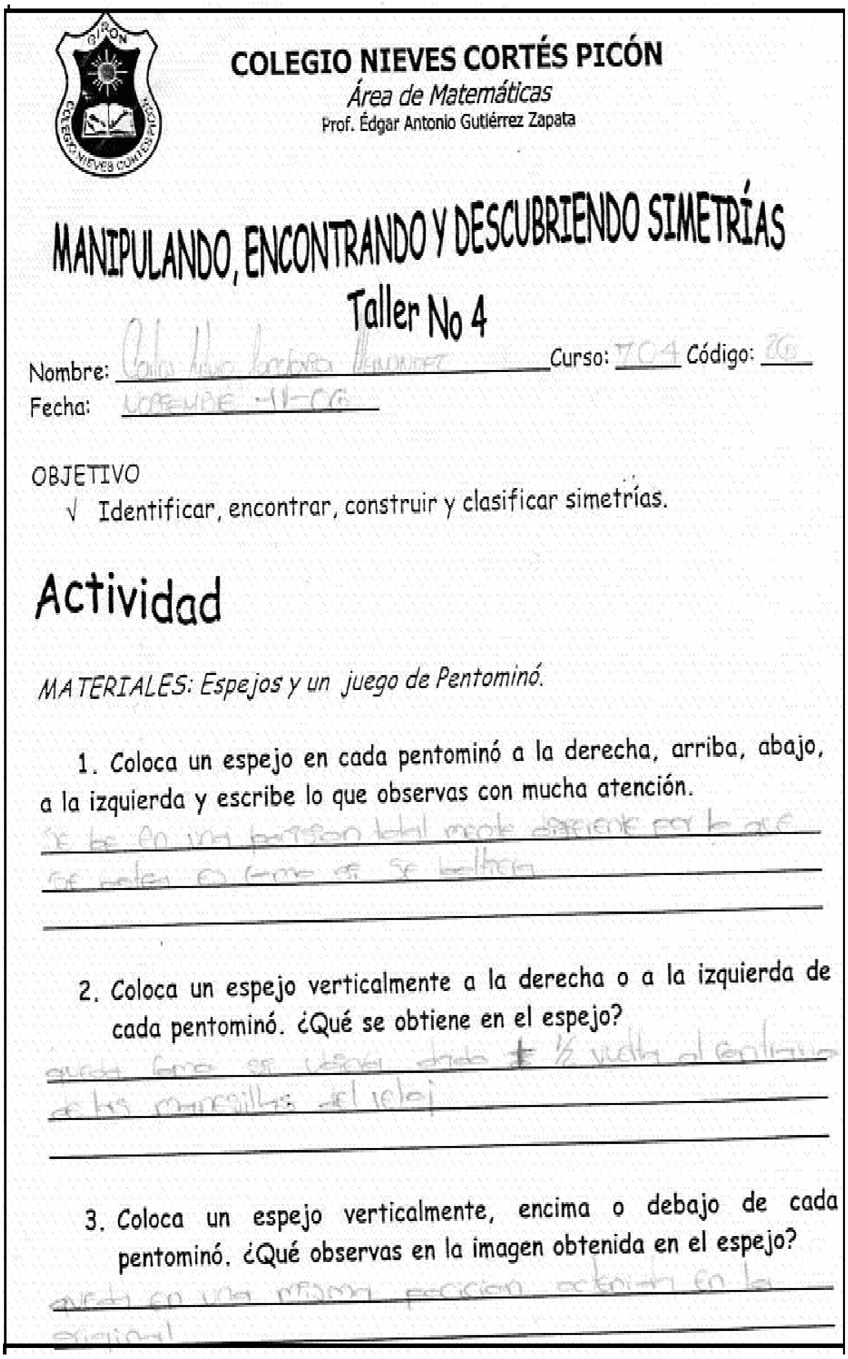
La pregunta, de este mismo taller, que pedía ubicar los puntos en el plano cartesiano, se resolvió luego que unieran cada punto y encontraran un pentominó del tipo "T" y otro pentominó del tipo "P" que reflejaban las figuras a través del punto de origen (0) permitiéndoles concluir que con las simetrías dadas habían girado 180º o media vuelta siendo los estudiantes mismos lo que registraron las equivalencias.

Otra de las preguntas que orientaba a clasificar las gráficas en simetría axial y puntual se pudo resolver acertadamente como lo muestra el siguiente taller. En clase, Carlos manifestó estar muy contento, veamos:

"Aprendí ahora sí, estoy contento, ojala que el año entrante vuelva a trabajar así".
(Entrevista, 18/11/2006)

Al final lo expresa diciendo que la simetría respecto a una recta conserva las distancias, los ángulos y las áreas de las figuras así como la simetría respecto a un punto conserva las longitudes, direcciones y las áreas. Conclusiones que concordaron con la mayoría de los estudiantes y que se reflejaron en las actividades desarrolladas referentes al taller sobre simetrías y que los estudiantes lo resolvieron después de haber conjeturado y socializado.

Figura 5.a. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 1 - 3



COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Édgar Antonio Gutiérrez Zapata

MANIPULANDO, ENCONTRANDO Y DESCUBRIENDO SIMETRÍAS
Taller No 4

Nombre: [illegible] Curso: 704 Código: 26
Fecha: [illegible]

OBJETIVO
√ Identificar, encontrar, construir y clasificar simetrías.

Actividad

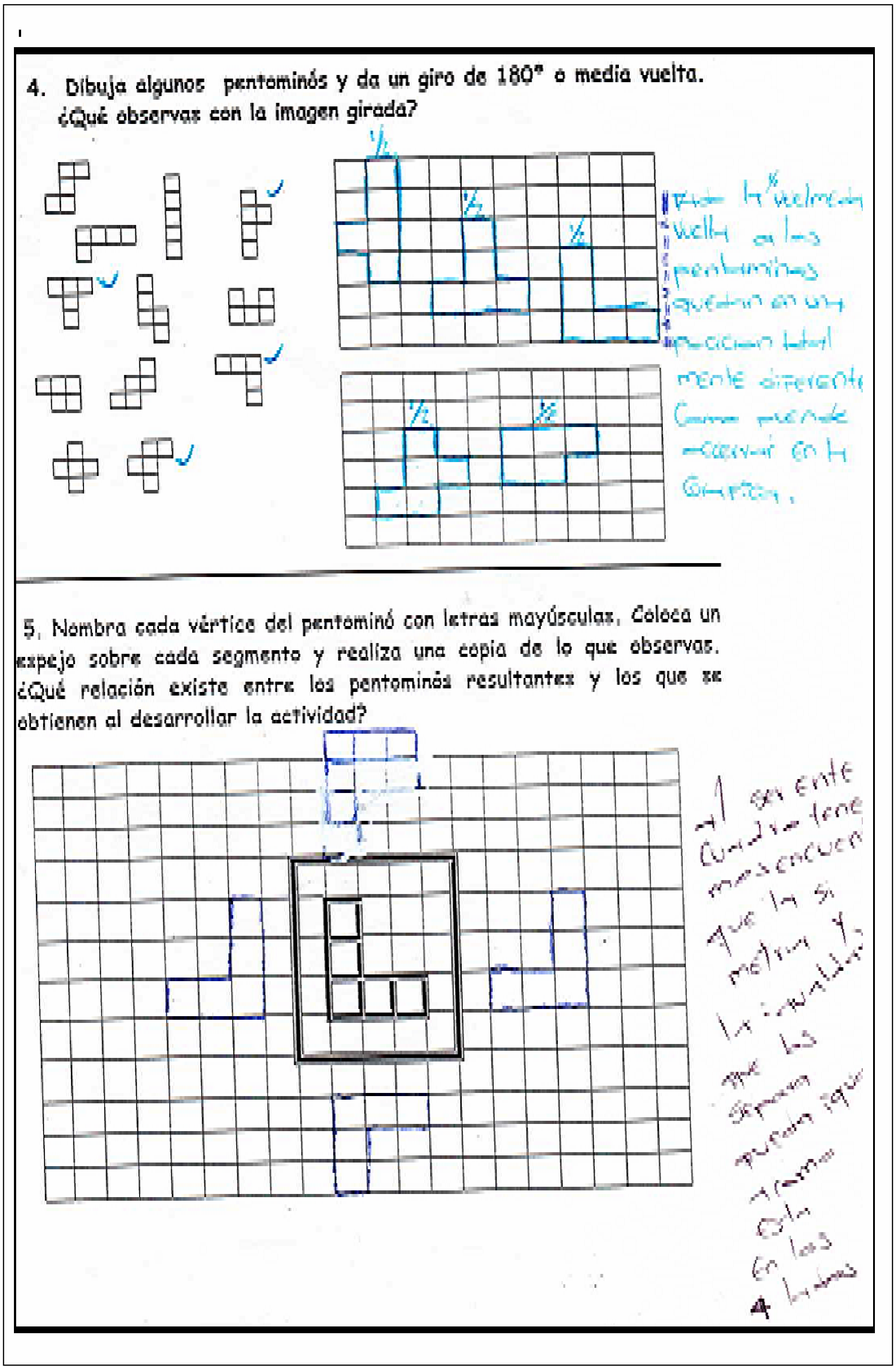
MATERIALES: Espejos y un juego de Pentominó.

1. Coloca un espejo en cada pentominó a la derecha, arriba, abajo, a la izquierda y escribe lo que observas con mucha atención.
[illegible]

2. Coloca un espejo verticalmente a la derecha o a la izquierda de cada pentominó. ¿Qué se obtiene en el espejo?
[illegible] ½ vuelta al contrario de las manecillas del reloj

3. Coloca un espejo verticalmente, encima o debajo de cada pentominó. ¿Qué observas en la imagen obtenida en el espejo?
[illegible] original

Figura 5.b. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 4 y 5



4. Dibuja algunos pentominós y da un giro de 180° o media vuelta. ¿Qué observas con la imagen girada?

5. Nombra cada vértice del pentominó con letras mayúsculas. Coloca un espejo sobre cada segmento y realiza una copia de lo que observas. ¿Qué relación existe entre los pentominós resultantes y los que se obtienen al desarrollar la actividad?

Figura 5.c. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 6 y 7

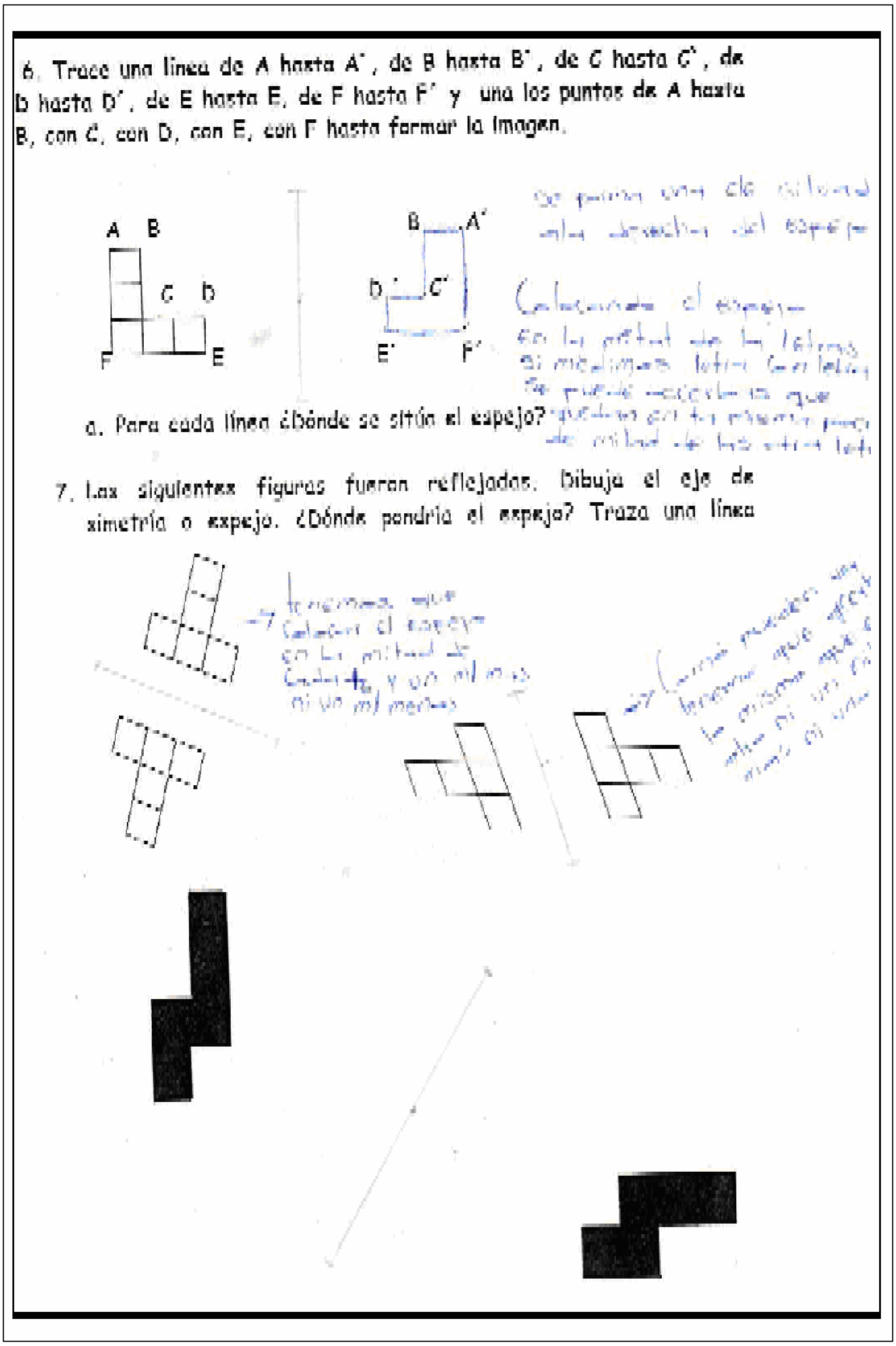
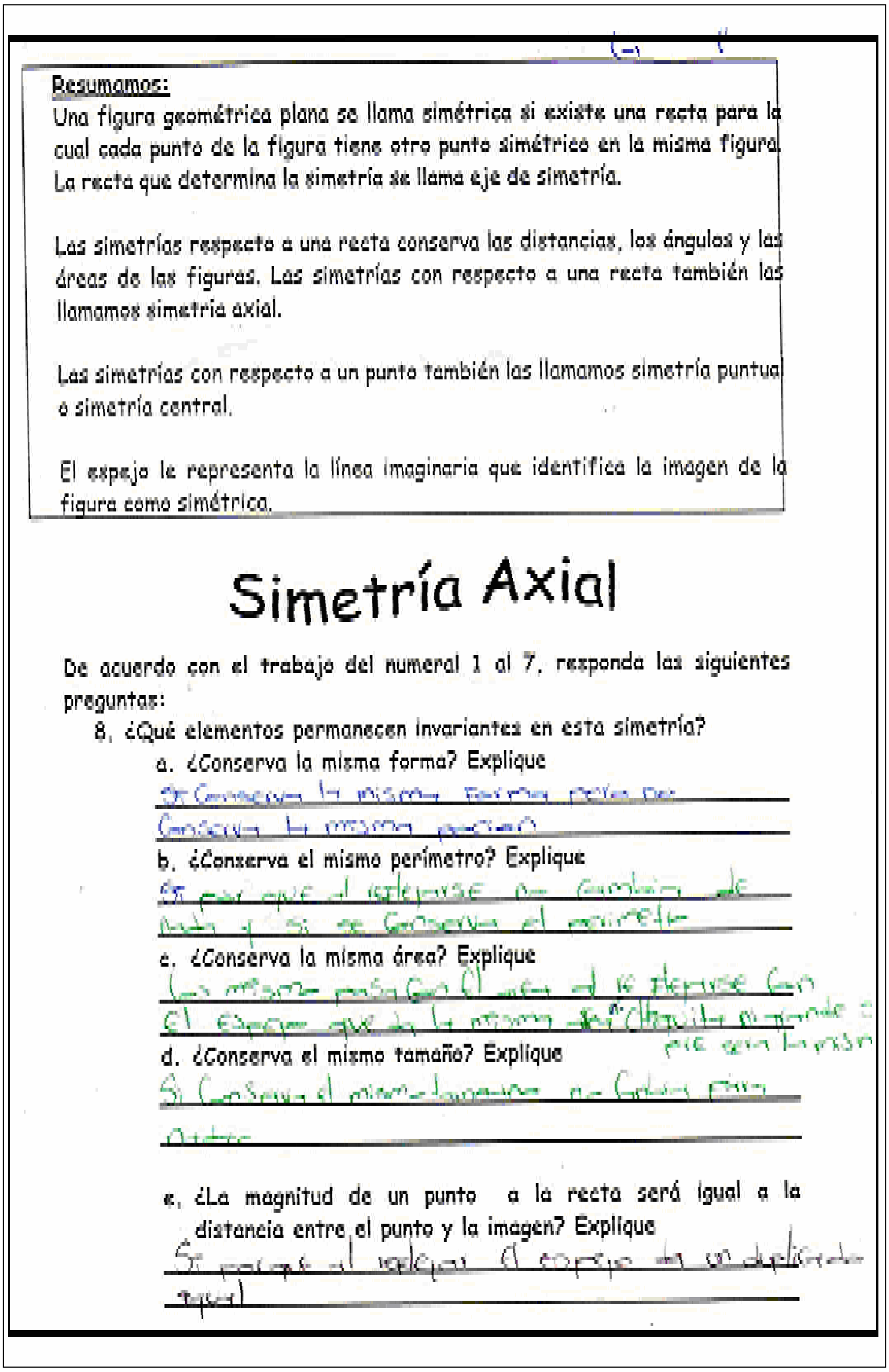


Figura 5.d. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; resumen y punto 8



Resumamos:

Una figura geométrica plana se llama simétrica si existe una recta para la cual cada punto de la figura tiene otro punto simétrico en la misma figura. La recta que determina la simetría se llama eje de simetría.

Las simetrías respecto a una recta conserva las distancias, los ángulos y las áreas de las figuras. Las simetrías con respecto a una recta también las llamamos simetría axial.

Las simetrías con respecto a un punto también las llamamos simetría puntual o simetría central.

El espejo le representa la línea imaginaria que identifica la imagen de la figura como simétrica.

Simetría Axial

De acuerdo con el trabajo del numeral 1 al 7, responda las siguientes preguntas:

8. ¿Qué elementos permanecen invariantes en esta simetría?
   a. ¿Conserva la misma forma? Explique
   Si conserva la misma forma porque conserva la misma posición
   b. ¿Conserva el mismo perímetro? Explique
   Si porque al reflejarse no cambia de lado y si se conserva el perímetro
   c. ¿Conserva la misma área? Explique
   La misma porque con el área al reflejarse con el espejo que da la misma área
   d. ¿Conserva el mismo tamaño? Explique
   Si conserva el mismo tamaño no cambia para nada
   e. ¿La magnitud de un punto a la recta será igual a la distancia entre el punto y la imagen? Explique
   Si porque al reflejar el espejo da un duplicado igual

Figura 5.e. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 9 - 11

9. ¿Cuáles de los pentominós tienen simetrías a la derecha?

el cruz,

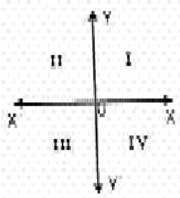
10. ¿Cuáles de los pentominós tienen simetrías de abajo hacia arriba?

La ✱, la cruz la T la U

11. ¿Cuáles de las piezas tienen simetría de rotación es decir, cuales de los pentominós permanecen como estaban al ser rotados medio giro (180°)?

La cruz por lo que se gira y queda como en la misma posición

Plano Cartesiano



Dos líneas rectas perpendiculares se cortan constituyendo un sistema de ejes coordenados.

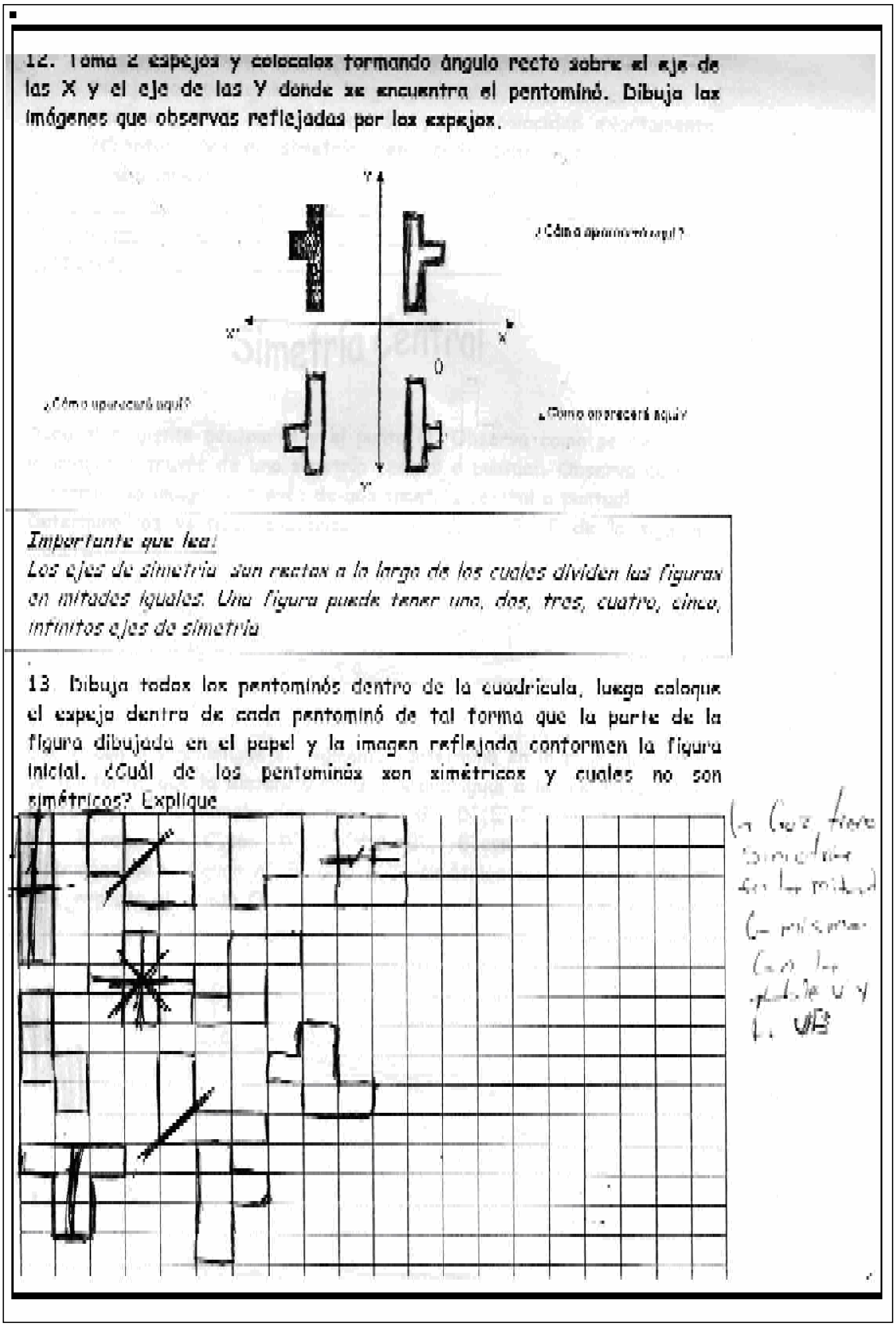
La línea X' 0 X se llama eje de las X o eje de las abscisas. La línea Y 0 Y' se llama eje de las Y o eje de las coordenadas.

Los ejes dividen al plano en 4 partes llamados cuadrantes:

X 0 Y es el primer cuadrante.
X' 0 Y es el segundo cuadrante.
X' 0 Y' es el tercer cuadrante.
X 0 Y' es el cuarto cuadrante.

El origen 0 divide a cada eje en 2 semiejes, uno positivo y otro negativo.
0 X semieje positivo.
0 X' semieje negativo.
0 Y semieje positivo.
0 Y' semieje negativo.

Figura 5.f. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 12 - 13


12. Toma 2 espejos y colócalos formando ángulo recto sobre el eje de las X y el eje de las Y donde se encuentra el pentominó. Dibuja las imágenes que observas reflejadas por los espejos.

Importante que lea!
Los ejes de simetría son rectas a lo largo de los cuales dividen las figuras en mitades iguales. Una figura puede tener uno, dos, tres, cuatro, cinco, infinitos ejes de simetría

13. Dibuja todos los pentominós dentro de la cuadrícula, luego coloque el espejo dentro de cada pentominó de tal forma que la parte de la figura dibujada en el papel y la imagen reflejada conformen la figura inicial. ¿Cuál de los pentominós son simétricos y cuales no son simétricos? Explique

La Cruz tiene simetría por la mitad lo mismo con la [illegible] U y la VB

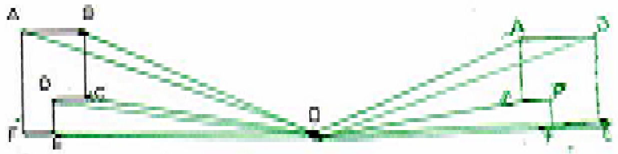
Figura 5.g. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; punto 14

14. Dibuja los pentominós y luego recórtalos, has dobleces de tal manera que al doblarlos las dos partes coincidan exactamente. ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada pentominó? Escribe tus conclusiones.

tiene 5 ejes cada pentomino la simetria entre el duplicado del pentomino queda totalmente iguales

Simetría Central

Dado el siguiente pentominó y el punto O. Observa como se determina la imagen a través de una simetría central o puntual. Observa como se determina la imagen a través de una simetría central o puntual.
Determina los vértices simétricos A, B, C, D, E, F de la siguiente manera:



Une A con O y prolongue el segmento, determina en la prolongación A´, se tal forma que la distancia de O a A sea igual a la distancia de O a A´. De la misma manera determine B´, C´, D´, E´, F´. Luego una A´con B´, B´con C´, C´con D´, D´con E´, E´con F´, y F´con A´. Obteniéndose la figura A´ B´ C´D´E´F´ simétrica con la figura ABCDEF con respecto al punto O.

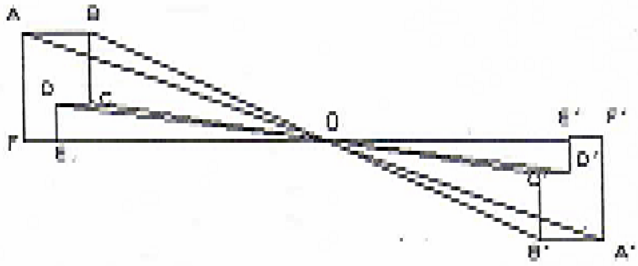
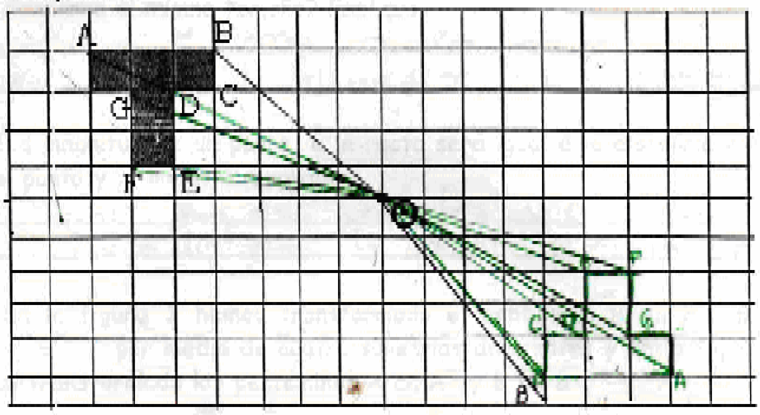


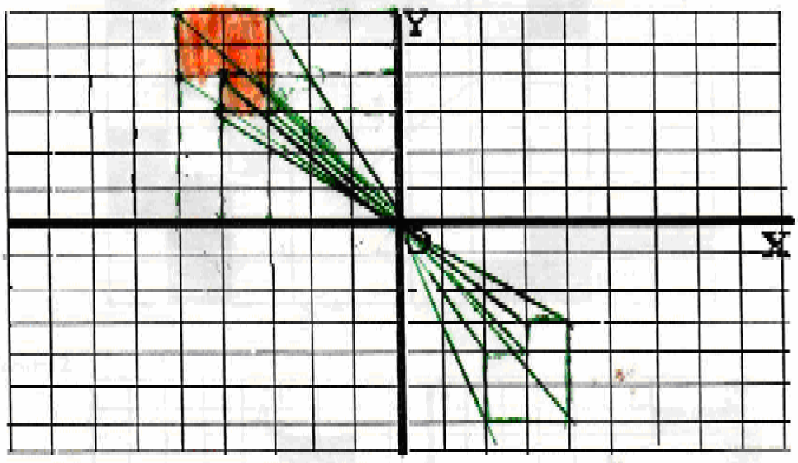
Figura 5.h. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; puntos 15 – 17

15. Determine el pentominó simétrico T con respecto al punto O
¡Tú puedes!



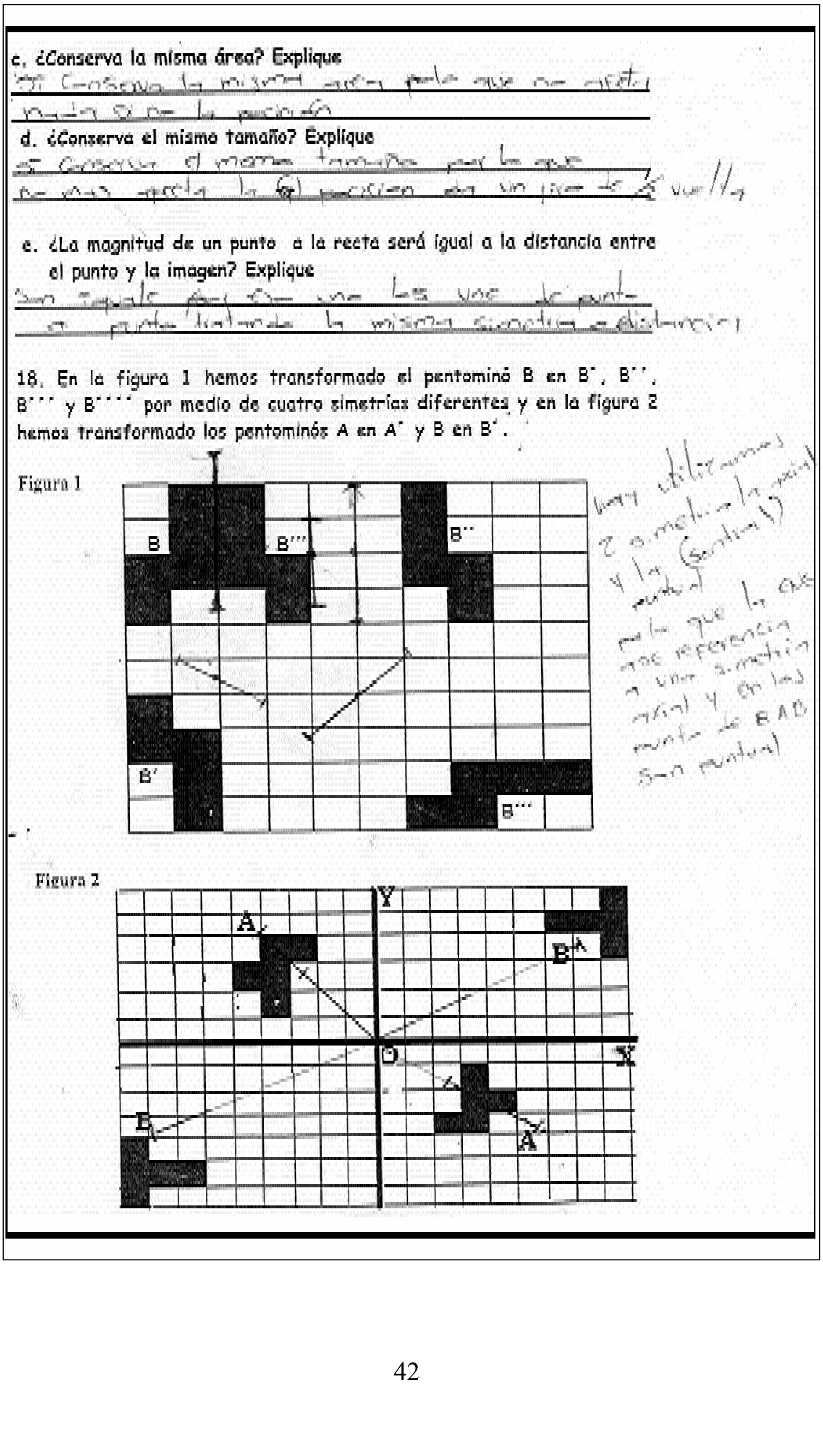
El duplicado [illegible] en la forma [illegible] igual de [illegible] área

16. Ubique los puntos (-3,3), (-3,6), (-4,3), (-4,4), (-5,4). (-5,6)
a. Determina P' simétrico de P respecto al punto O



17. ¿Qué elementos permanecen invariantes en esta simetría?
a. ¿Conserva la misma forma? Explique
No conservan la misma forma porque al reflejarla [illegible] con el espejo queda volteada como puede recorrer la distancia [illegible]
b. ¿Conserva el mismo perímetro? Explique
Si por lo que el reflejo [illegible] mismas [illegible] de la posición del [illegible] no cambia nada

Figura 5.i. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; punto 18



c. ¿Conserva la misma área? Explique

Si conserva la misma área por lo que no afecta nada sino la posición

d. ¿Conserva el mismo tamaño? Explique

Si conserva el mismo tamaño por lo que no más afecta la posición da un giro de ½ vuelta

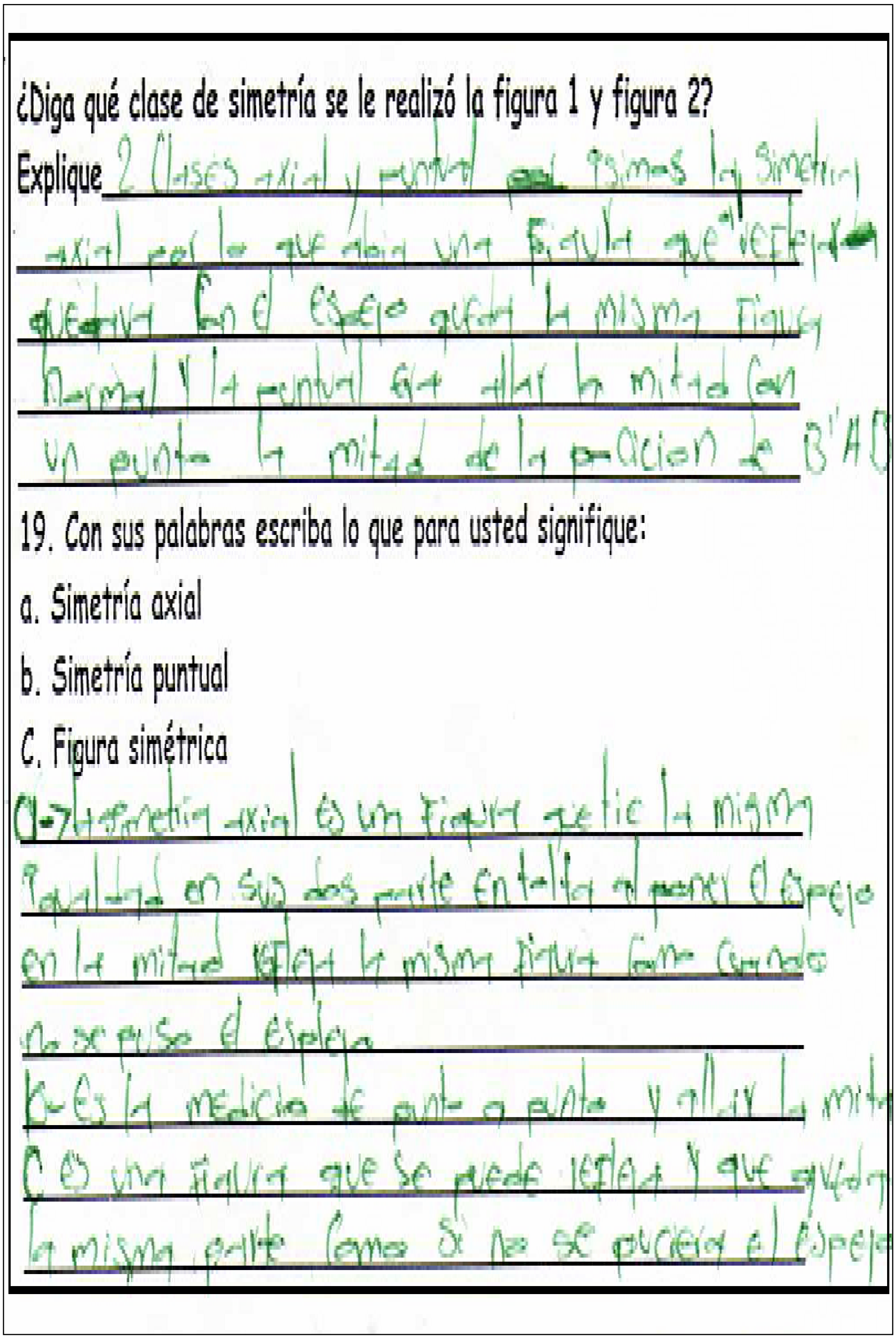
e. ¿La magnitud de un punto a la recta será igual a la distancia entre el punto y la imagen? Explique

Son iguales porque una los une de punto a punto teniendo la misma simetría o distancia

18. En la figura 1 hemos transformado el pentominó B en B', B'', B''' y B'''' por medio de cuatro simetrías diferentes y en la figura 2 hemos transformado los pentominós A en A' y B en B'.

hemos utilizamos 2 simetrías la axial y la (central) puntual por lo que la que hace referencia a una simetría axial y en las punto de B A B son puntual

Figura 5.j. Taller No. 4 de Carlos A. Sanabria; punto 19



¿Diga qué clase de simetría se le realizó la figura 1 y figura 2?

Explique 2 Clases axial y puntual asimos la simetría axial por lo que abia una figura que reflejaba quedaria en el espejo queda la misma figura normal y la puntual era allar la mitad con un punto la mitad de la posicion de B'A B

19. Con sus palabras escriba lo que para usted signifique:

a. Simetría axial

b. Simetría puntual

C. Figura simétrica

a-> La simetria axial es una figura que tie la misma igualdad en sus dos parte en tal al poner el espejo en la mitad refleja la misma figura como cuando no se puso el espejo

b- Es la medicion de punto a punto y allar la mit

C es una figura que se puede refleja y que queda la misma parte como si no se puciera el espejo

El Taller No. 5, “Manipulando, Descubriendo y Construyendo Rotaciones” (Anexo 6), tuvo como objetivo identificar y construir rotaciones. Esta constituyó una actividad manual e intelectual en la que se recortó papel, cartón y se graficó los pentaminós para hacerlos coincidir con los recortados. Los estudiantes tomaron alfileres ubicando la figura en un punto fijo haciéndola girar y fijándose muy bien en lo sucedido con respecto a la figura dibujada, además de registrar el ángulo cada vez que la rotación se efectuaba, así hasta hacerla coincidir totalmente con el pentominó dibujado. El resultado fue sorprendente ya que hicieron gráficos, como estrellas, marcando el ángulo de la figura rotada cada vez que la giraban.

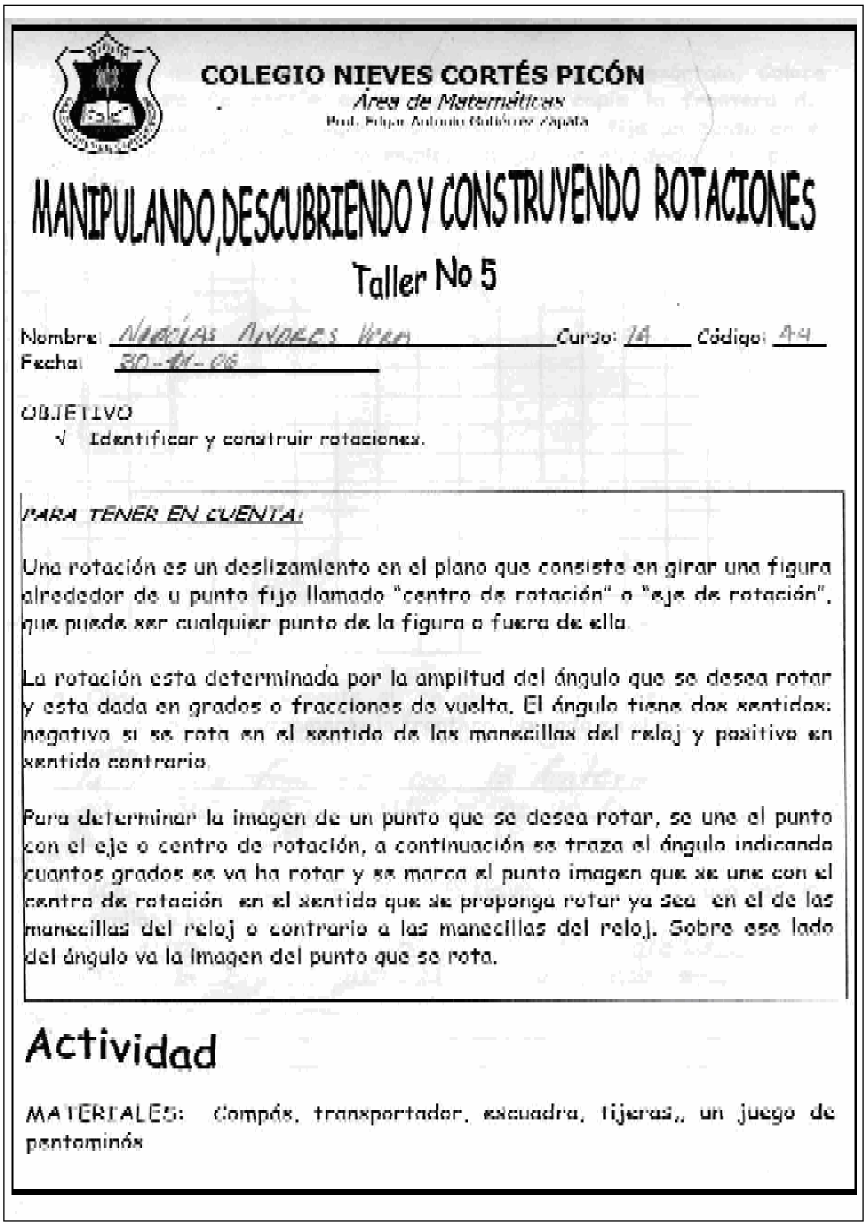
Posteriormente, luego los estudiantes ubicaron las figuras en el plano cartesiano, teniendo en cuenta un punto fijo externo al pentominó (punto de corte del eje vertical con el eje horizontal), y luego lo rotaban alrededor de ese punto, cada vez que lo giraban debían dibujarlo y registrar el ángulo de orientación.

Otra de las actividades contempladas en este mismo ítem pedía rotar la figura 180º alrededor de un punto fijo (Origen). Los estudiantes hicieron la rotación de las figuras muy bien, pero cuando fueron a dibujarlas se equivocaron al graficar y marcaron el ángulo del punto de origen a cualquier vértice de la figura, sin tener en cuenta la distancia. Es decir que los estudiantes debían describir una rotación según el modelo, caracterizando la transformación. Para tal efecto debían tener en cuenta el ángulo de rotación, el punto o centro, además que los vértices, entre otros.

De igual forma, se trabajó composición de rotaciones: los estudiantes debían rotar el mismo pentominó tantos grados; y, sobre ese mismo ángulo, rotarlo nuevamente otros grados (debían dibujar la figura girada) y luego hacer el giro de una sola vez; es decir, si giraban 60º y luego 210º, después debían girar 270º.

Además, debían rotar la figura en el mismo sentido de las manecillas del reloj y en forma contraria. Fue así como los estudiantes terminaron desarrollando las rotaciones como adiciones, que era lo esperado. El siguiente taller es el resultado del trabajo de Carlos Andrés Vera (14 años).

Figura 6.a. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; introducción



COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

MANIPULANDO,DESCUBRIENDO Y CONSTRUYENDO ROTACIONES

Taller No 5

Nombre: [illegible] Andres Vera Curso: 14 Código: 44
Fecha: 30-11-06

OBJETIVO

√ Identificar y construir rotaciones.

PARA TENER EN CUENTA:

Una rotación es un deslizamiento en el plano que consiste en girar una figura alrededor de u punto fijo llamado "centro de rotación" o "eje de rotación", que puede ser cualquier punto de la figura o fuera de ella.

La rotación esta determinada por la amplitud del ángulo que se desea rotar y esta dada en grados o fracciones de vuelta. El ángulo tiene dos sentidos: negativo si se rota en el sentido de las manecillas del reloj y positivo en sentido contrario.

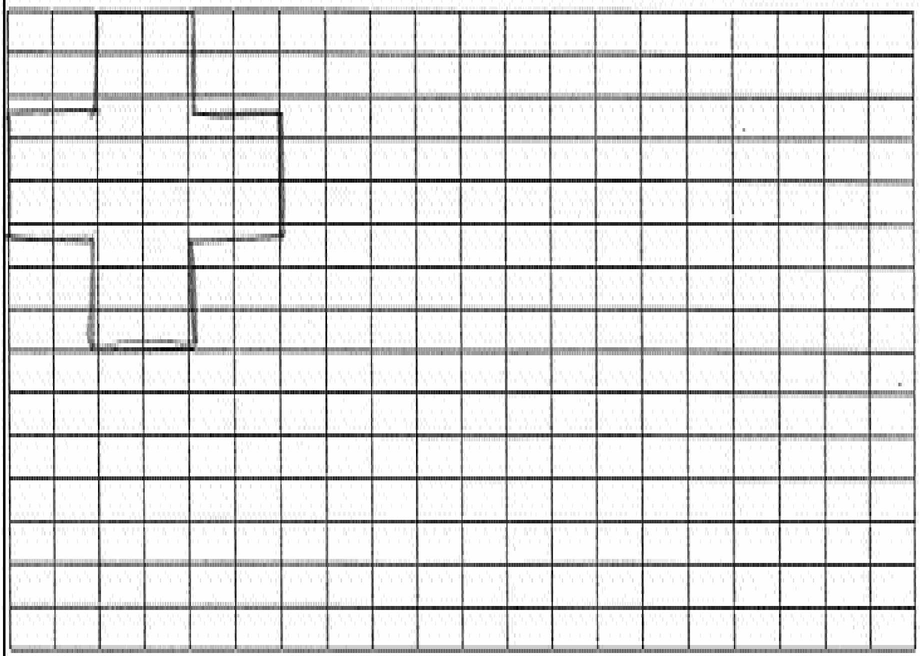
Para determinar la imagen de un punto que se desea rotar, se une el punto con el eje o centro de rotación, a continuación se traza el ángulo indicando cuantos grados se va ha rotar y se marca el punto imagen que se une con el centro de rotación en el sentido que se proponga rotar ya sea en el de las manecillas del reloj o contrario a las manecillas del reloj. Sobre ese lado del ángulo va la imagen del punto que se rota.

Actividad

MATERIALES: Compás, transportador, escuadra, tijeras,, un juego de pentominós

Figura 6.b. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; punto 1

1. Dibuja un pentominó cualquiera en un cartón y recórtalo. Coloca la figura de cartón en la cuadricula y copia la frontera del pentominó sobre el papel. Toma un alfiler y fija un punto en el interior del pentominó y empieza a girarlo alrededor del punto fijo.



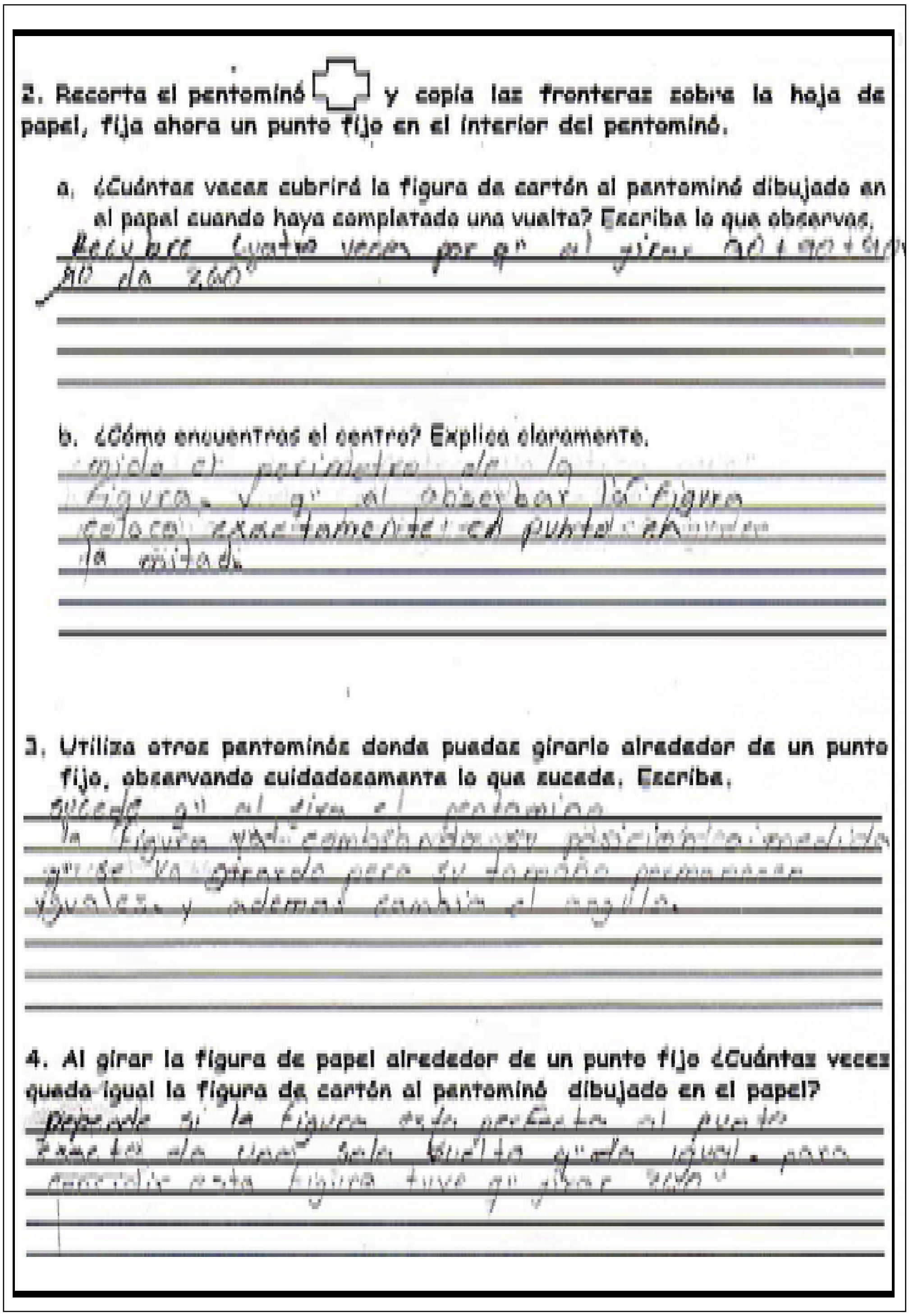
a, Observa cuidadosamente si, en algún momento, el pentominó de cartón cubre exactamente la frontera dibujada en el papel. Escribe lo visto.

la figura concide con la frontera cuando giro 360°, no son 360° si no un cuarto de vuelta la figura conside.

b. ¿Qué giro has tenido que dar a la figura para alcanzar una posición similar a la inicial? Explica.

el giro q' ha tenido es de rotación porq' la figura gira 360°, y queda en ~~el~~ mismo lado.

Figura 6.c. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; puntos 2 - 4



2. Recorta el pentominó y copia las fronteras sobre la hoja de papel, fija ahora un punto fijo en el interior del pentominó.

a. ¿Cuántas veces cubrirá la figura de cartón al pentominó dibujado en el papel cuando haya completado una vuelta? Escriba lo que observas.

Recubre cuatro veces por q' al girar 90 + 90 + 90 + 90 da 360°

b. ¿Cómo encuentras el centro? Explica claramente.

mido el perímetro de la figura. y q' al observar la figura coloco exactamente el punto en la mitad.

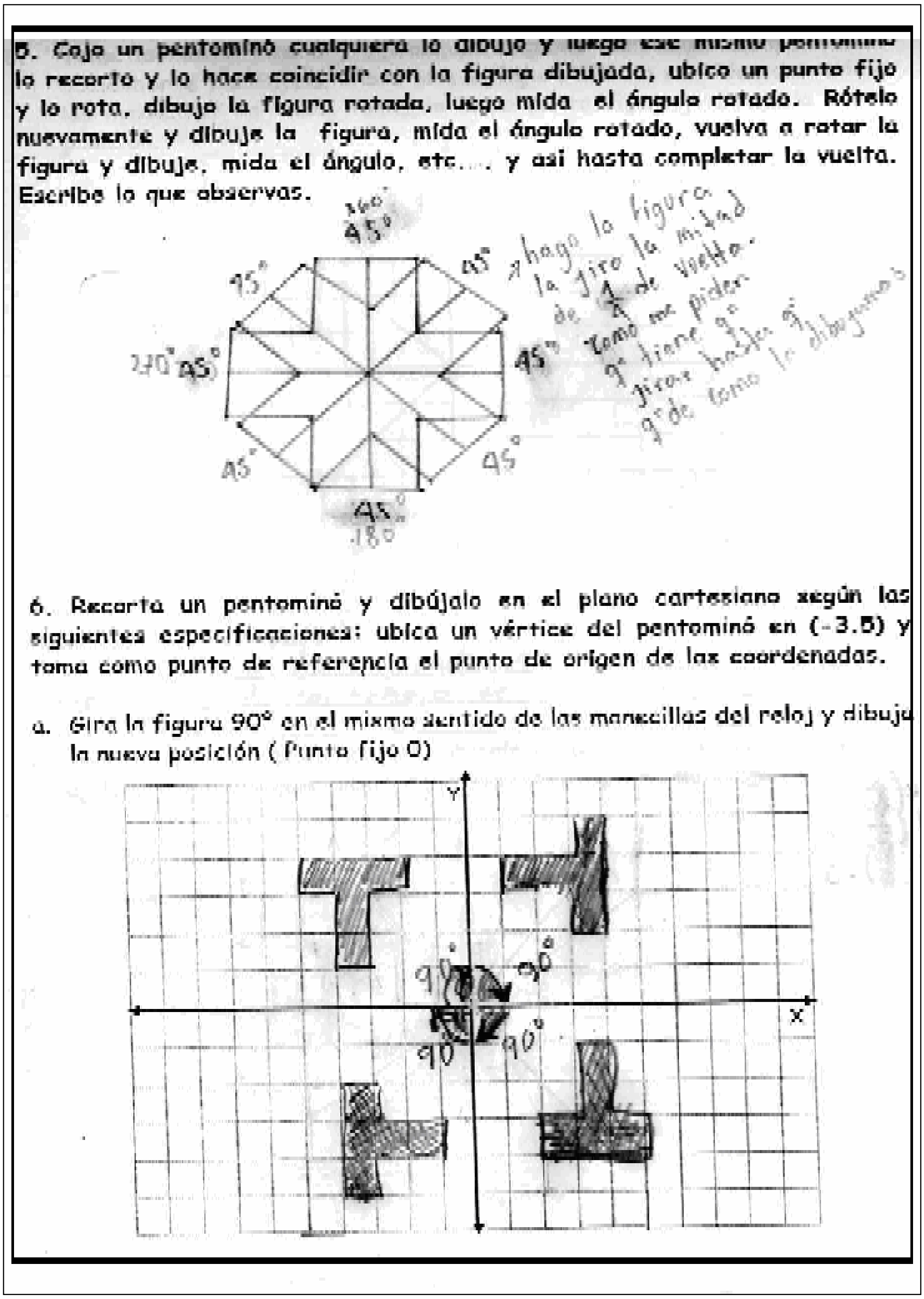
3. Utiliza otros pentominós donde puedas girarlo alrededor de un punto fijo, observando cuidadosamente lo que sucede. Escriba.

sucede q' al girar el pentomino la figura va cambiando su posición a medida que se va girando pero su tamaño permanece igual. y además cambia el angulo.

4. Al girar la figura de papel alrededor de un punto fijo ¿Cuántas veces queda igual la figura de cartón al pentominó dibujado en el papel?

Depende si la figura esta perfecta al punto exacto de una sola vuelta queda igual. para encontrar esta figura tuve q' girar 360°

Figura 6.d. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; puntos 5 – 6.a



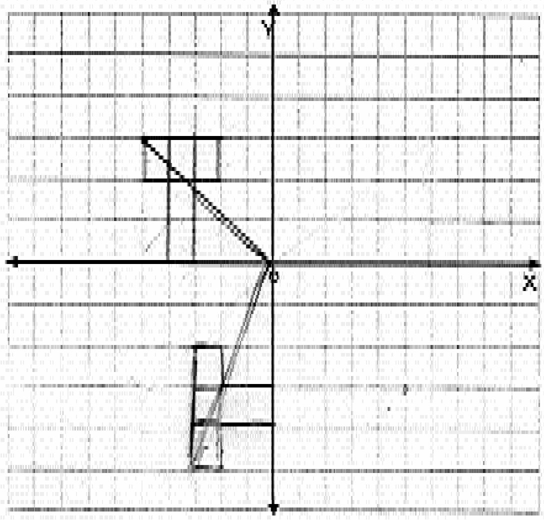
5. Cojo un pentominó cualquiera lo dibujo y luego ese mismo pentominó lo recorto y lo hace coincidir con la figura dibujada, ubico un punto fijo y lo rota, dibujo la figura rotada, luego mida el ángulo rotado. Rótelo nuevamente y dibuje la figura, mida el ángulo rotado, vuelva a rotar la figura y dibuje, mida el ángulo, etc.... y así hasta completar la vuelta. Escribe lo que observas.

6. Recorta un pentominó y dibújalo en el plano cartesiano según las siguientes especificaciones: ubica un vértice del pentominó en (-3.5) y toma como punto de referencia el punto de origen de las coordenadas.

a. Gira la figura 90° en el mismo sentido de las manecillas del reloj y dibuja la nueva posición (Punto fijo O)

Figura 6.e. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; puntos 6.b - 7

b. Tome la misma figura y ubícala en el plano cartesiano como lo hizo inicialmente y dibújala, ahora gire la figura 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj tomando como punto fijo o y dibuja la nueva posición.

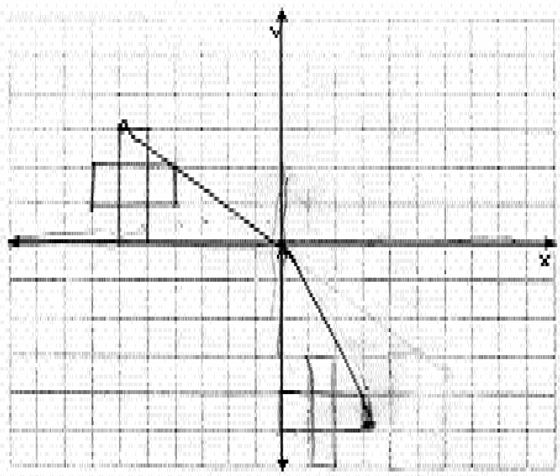


→ la figura esta girada en el lado positivo de la manecillas del r

¿Qué observas? Concluye

Q' la figura ha girado 90° pero al lado contrario de las manecillas del reloj.

7. Tome un pentominó cualquiera, ubícalo en un sitio del plano cartesiano, dibújalo y rota la figura 180° con respecto al punto de origen O.



→ la figura está girada en 180° grados y además es positivo y al girarla queda igual.

Figura 6.f. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; puntos 7.a - 8

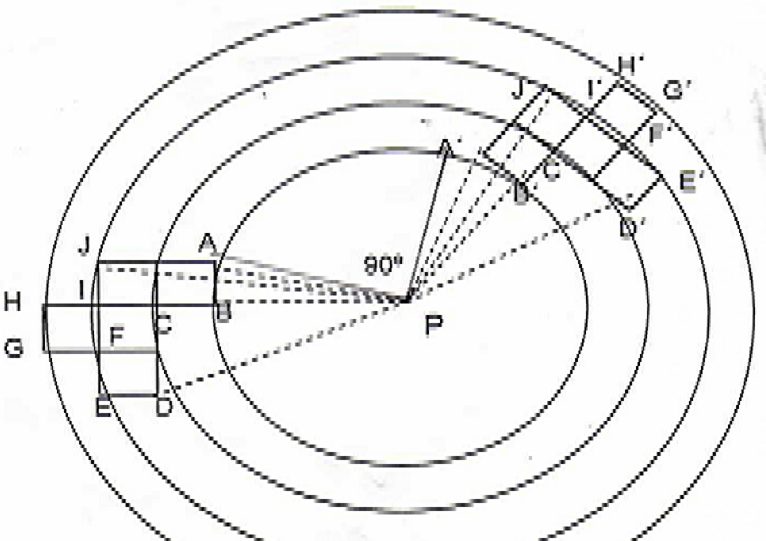
a. Dibuje la nueva figura y escriba que sucedió

sucedio q" quedo en la misma posición porq" es simetrica, forma es totalmente diferente

b, ¿Encuentra alguna similitud con otra transformación? Explique

si por ejemplo lo p el por, al girarlo me quedo simetria transformación por q" todos sus lados son iguales.

8. El siguiente pentominó ha sido rotado respecto al punto P. Identifique la manera como se realizo esta rotación y mencione cada uno de los elemento que la componen.



el pentomino ha girado 90° grado. por q" lo he girado de un punto fijo. los puntos no cambian!

Figura 6.g. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; punto 9

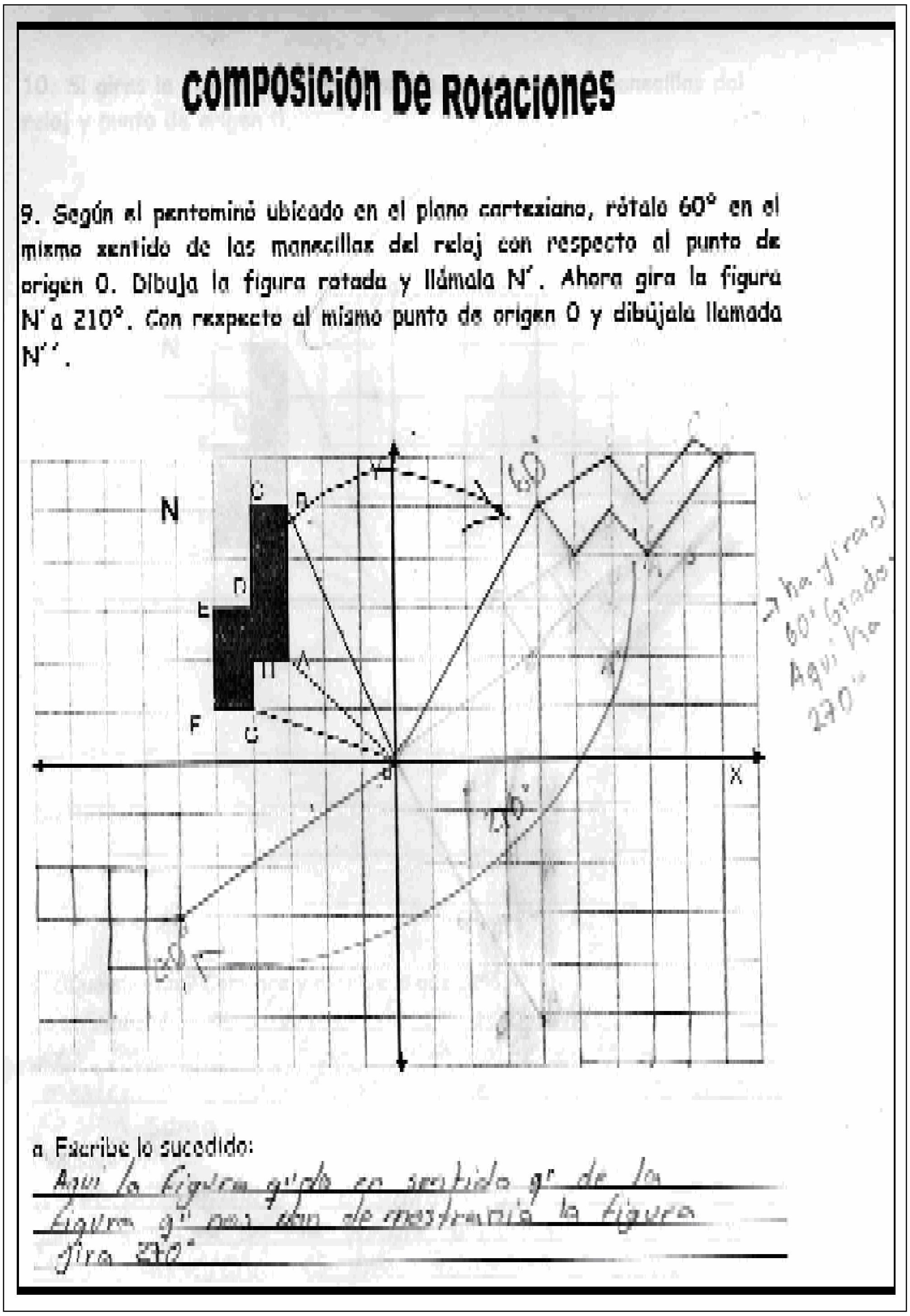
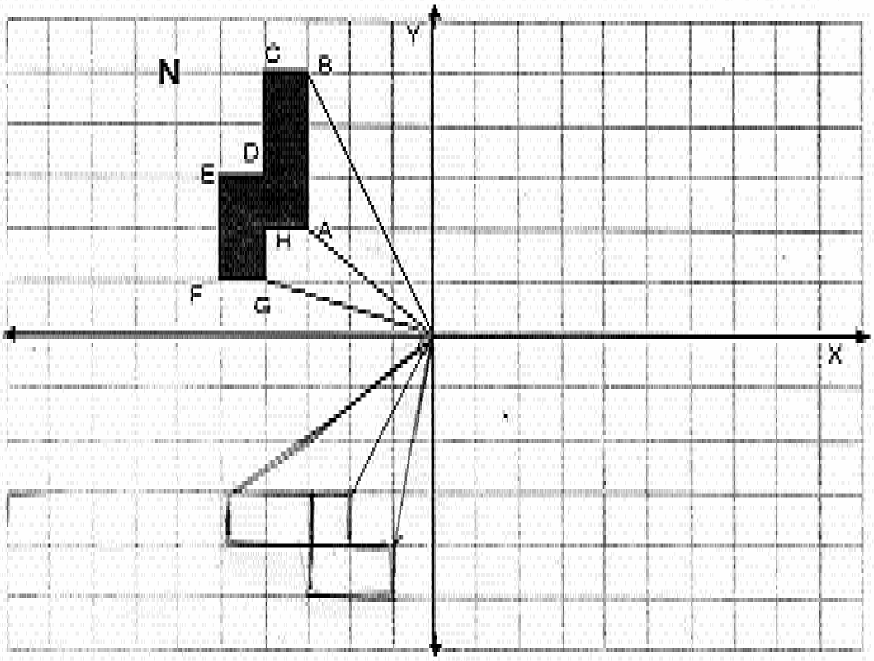


Figura 6.h. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; punto 10

10. Si giras la figura 270° en el mismo sentido de las manecillas del reloj y punto de origen O.



a. ¿Qué sucedió? Compare y escribe lo que pasó.

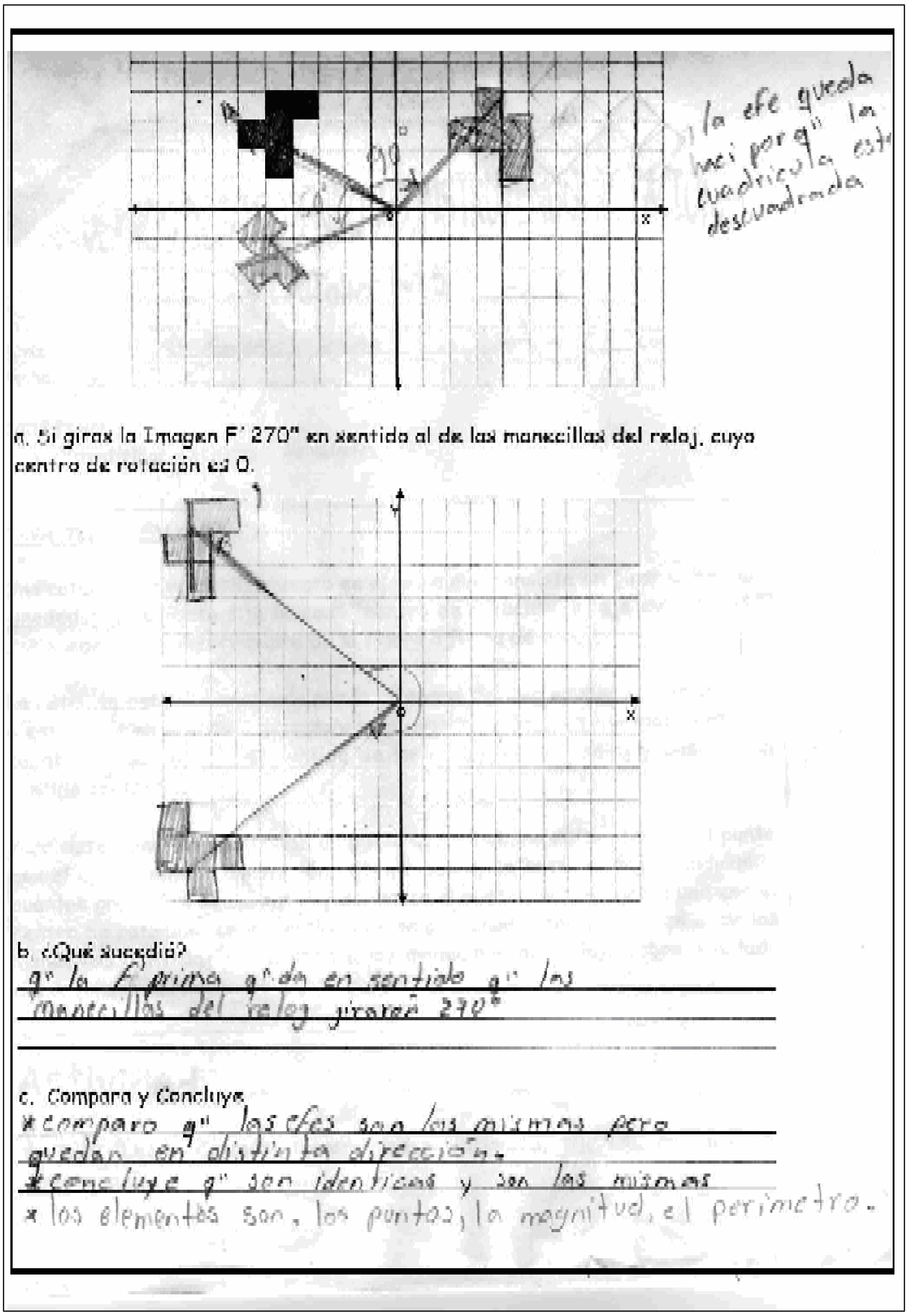
Ocurrio q" la figura da un giro de
270°, paso q" la figura q"da diferente al
mostrarla y además al girarlo por partes la composic
es Una suma.

Concluye

Q" el pentomino es el mismo
pero no q"da en la misma posición.
Una composición es Una suma, por q" 60+210 = 270

11. Observa el pentominó y giralo 60° en sentido contrario a las agujas del reloj. Dibuja el giro. Llámalo F' (punto de origen O).

Figura 6.i. Taller No. 5 de Carlos A. Vera; punto 11



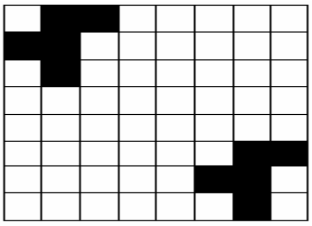
El Taller No. 6 “Manipulando, Descubriendo, Construyendo y Trasladando Pentominós” (Anexo 7) muestra, paso a paso, la construcción de traslaciones, así: tomar un pentominó, dibujarlo para luego deslizarlo sobre una superficie y dibujara su nueva posición.

En clase (actividad realizada el 30 de noviembre de 2006), los estudiantes hicieron el trabajo en forma sencilla, diciendo que no se habían presentado cambios y observando que la forma y el tamaño habían permanecido iguales lo que era correcto –los seis estudiantes de la muestra– resolvieron satisfactoriamente la propuesta.

En el punto 2 (ver Figura 8.b) se planteaba colocar un espejo verticalmente dos veces según el modelo y dibujarlo al otro lado de la vertical que representaba el espejo. Los estudiantes observaron acertadamente que en la primera imagen, la figura había girado 180º y en la segunda posición había permanecido igual que la inicial, solamente había cambiado la imagen de posición unos centímetros, o sea, el movimiento había configurado una traslación –esta conclusión se puede observar en el taller de Diana Torralba (Figuras 8.a, …, 8.h).

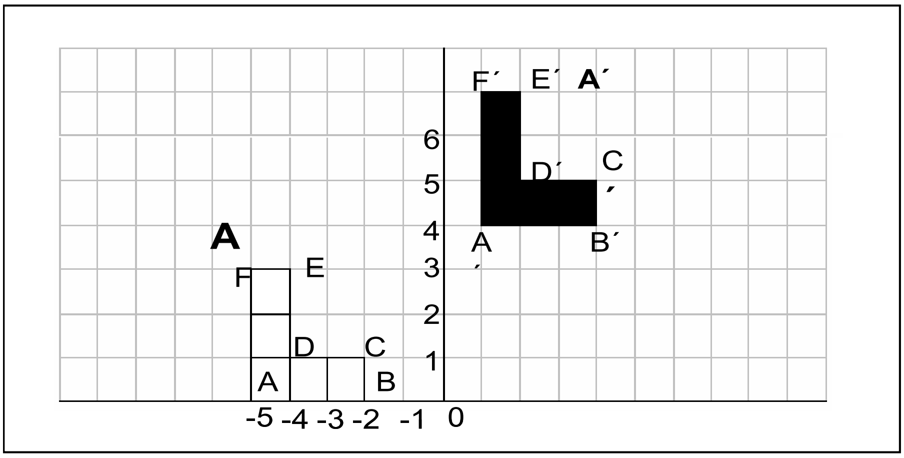
En relación con el gráfico que tiene dos pentominós (ver abajo), los estudiantes debían escribir las características principales de la transformación. Al realizar la actividad, los estudiantes inmediatamente registraron que se trataba de una traslación y que uno de los puntos principales para realizar la transformación eran las líneas que direccionaban la traslación, mostrando que permanecían igual el tamaño y la forma.

Figura 7. Figura de referencia del punto 3 del Taller No. 6



Por otro lado, la operación propuesta para resolver el problema de traslación (punto 4 asociado con la figura de abajo) consistía en tomar el punto P de coordenadas (X, Y) en el plano cartesiano; se le asocia el vector “V” que indica la dirección hacia donde se trasladaría la figura.

Figura 8. Figura de referencia del punto 8 del Taller No. 6



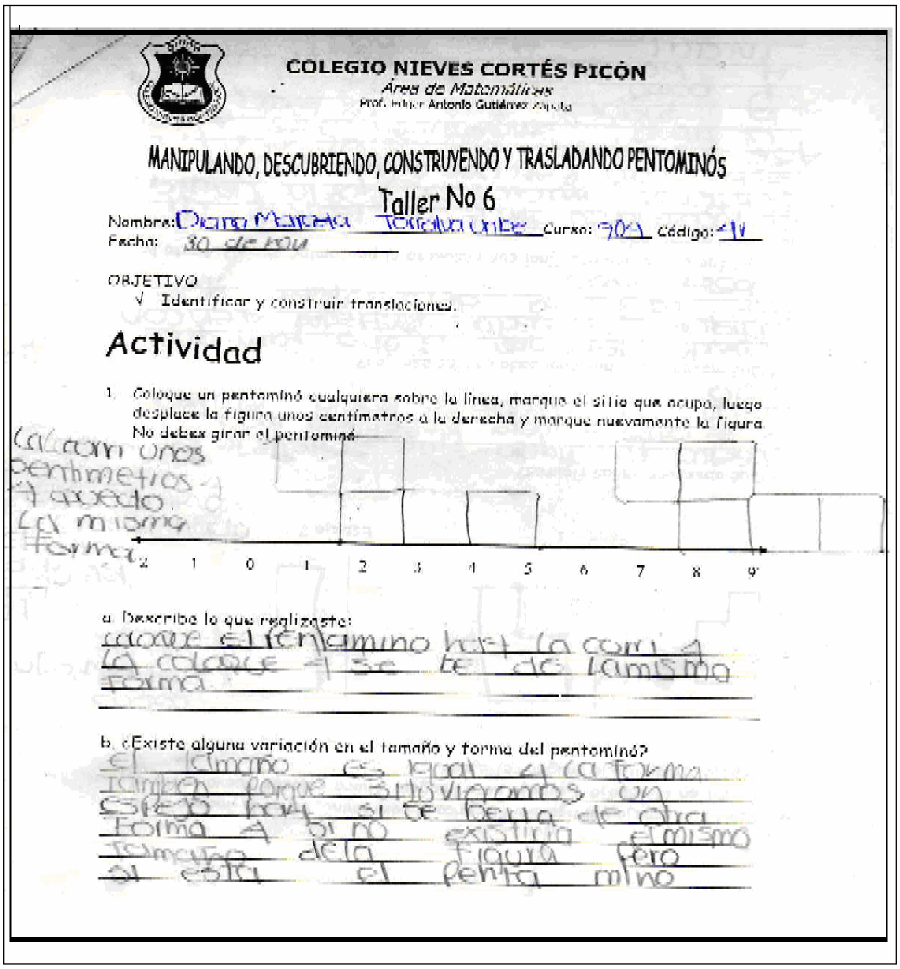
De manera que, una traslación se podía matematizar como una adición, así:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} V1 \\ V2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} X + V1 \\ Y + V2 \end{vmatrix}$$

Es así como el trasladar un pentominó según “V”, dirección de la traslación, resulta ser una operación cognitiva de adición que los estudiantes resolvieron con gran dificultad debido a que trabajaron con números enteros, además de que no tenían en cuenta el signo de la coordenada en el plano cartesiano.

Para finalizar, debían conceptualizar matemáticamente la transformación diciendo los puntos invariantes de la traslación lo cual se ejecutó sin problemas, como se muestra en el taller de Diana Marcela Torralba.

Figura 9.a. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; punto 1



COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas

MANIPULANDO, DESCUBRIENDO, CONSTRUYENDO Y TRASLADANDO PENTOMINÓS

Taller No 6

Nombre: Diana Marcela Torralba Uribe Curso: 904 Código: 41

Fecha: 30 de nov

OBJETIVO

√ Identificar y construir translaciones.

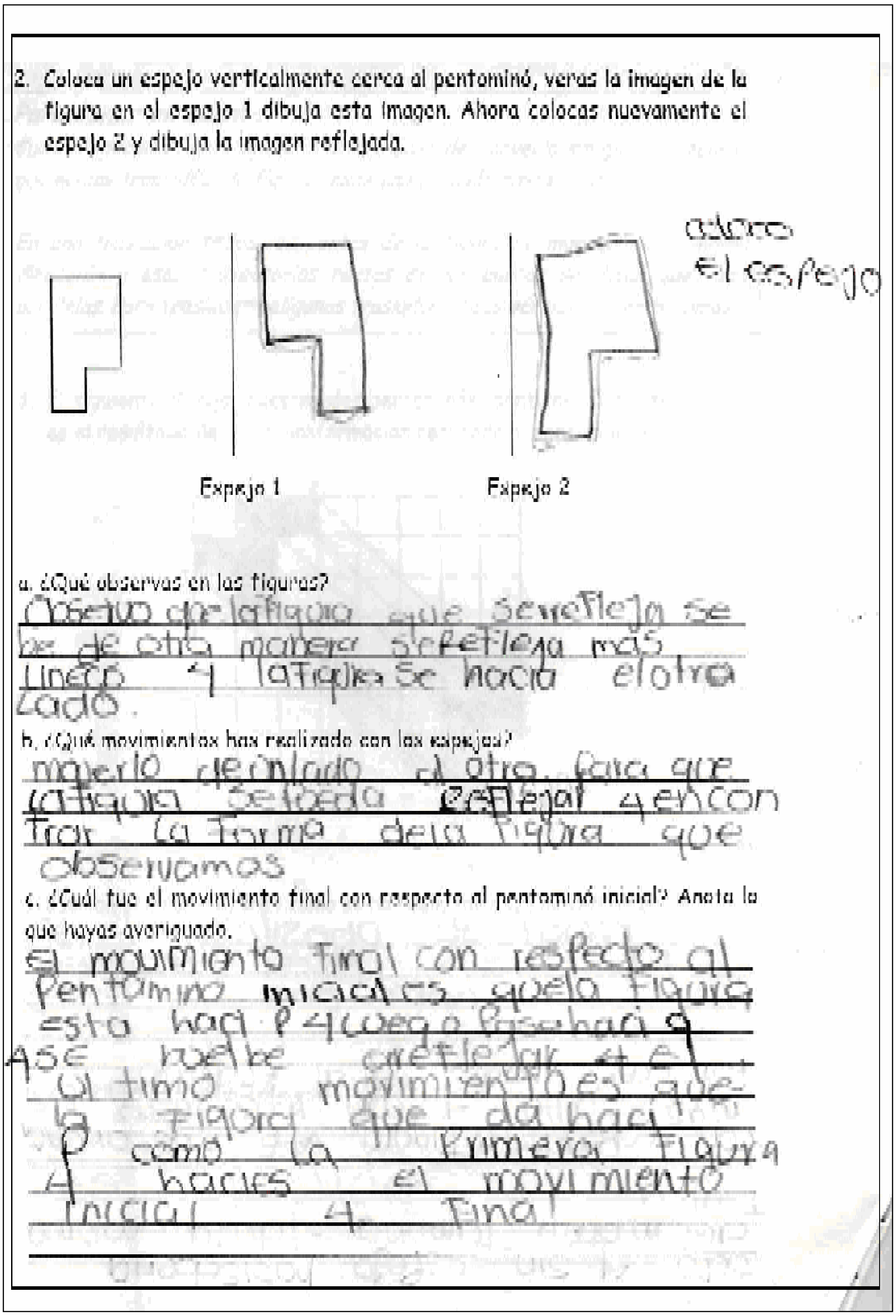
Actividad

1. Coloque un pentominó cualquiera sobre la línea, marque el sitio que ocupa, luego desplace la figura unos centímetros a la derecha y marque nuevamente la figura. No debes girar el pentominó.

a. Describe lo que realizaste:

b. ¿Existe alguna variación en el tamaño y forma del pentominó?

Figura 9.b. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; punto 2


2. Coloca un espejo verticalmente cerca al pentominó, verás la imagen de la figura en el espejo 1 dibuja esta imagen. Ahora colocas nuevamente el espejo 2 y dibuja la imagen reflejada.

adoro el espejo

a. ¿Qué observas en las figuras?

Observo que la figura que se refleja se ve de otra manera se refleja mas lineas y la figura se hacia el otro lado.

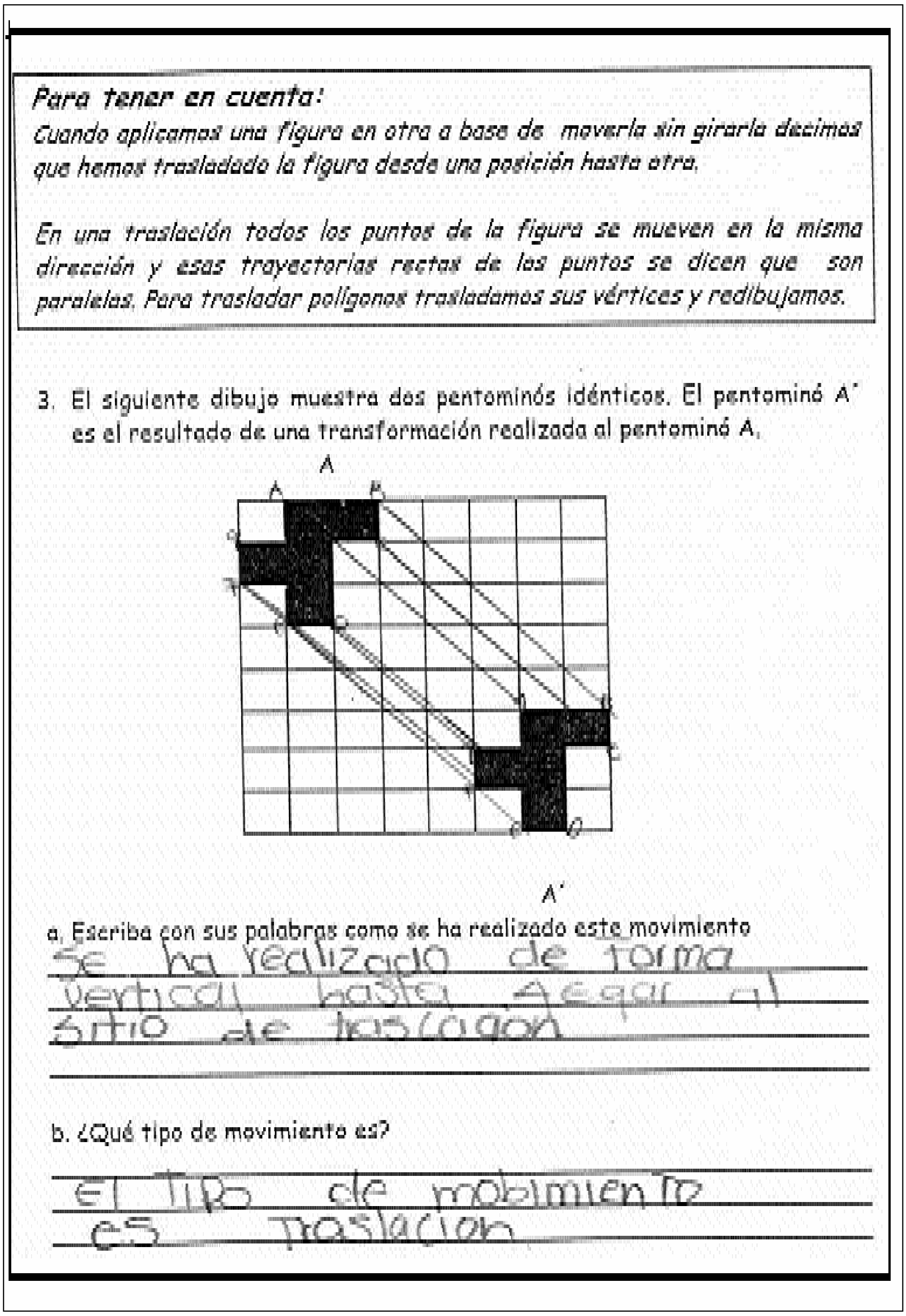
b. ¿Qué movimientos has realizado con los espejos?

moverlo de un lado al otro para que la figura se pueda reflejar y encontrar la forma de la figura que observamos

c. ¿Cuál fue el movimiento final con respecto al pentominó inicial? Anota lo que hayas averiguado.

el movimiento final con respecto al pentomino inicial es que la figura esta haci p y luego pasa haci q ase vuelbe a reflejar y el ultimo movimiento es que la figura que da haci p como la primera figura y hacies el movimiento inicial y final

Figura 9.c. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; punto 3



Para tener en cuenta:

Cuando aplicamos una figura en otra a base de moverla sin girarla decimos que hemos trasladado la figura desde una posición hasta otra.

En una traslación todos los puntos de la figura se mueven en la misma dirección y esas trayectorias rectas de los puntos se dicen que son paralelas. Para trasladar polígonos trasladamos sus vértices y redibujamos.

3. El siguiente dibujo muestra dos pentominós idénticos. El pentominó A´ es el resultado de una transformación realizada al pentominó A.

a. Escriba con sus palabras como se ha realizado este movimiento

se ha realizado de forma vertical hasta llegar al sitio de traslacion

b. ¿Qué tipo de movimiento es?

el tipo de mobimiento es traslacion

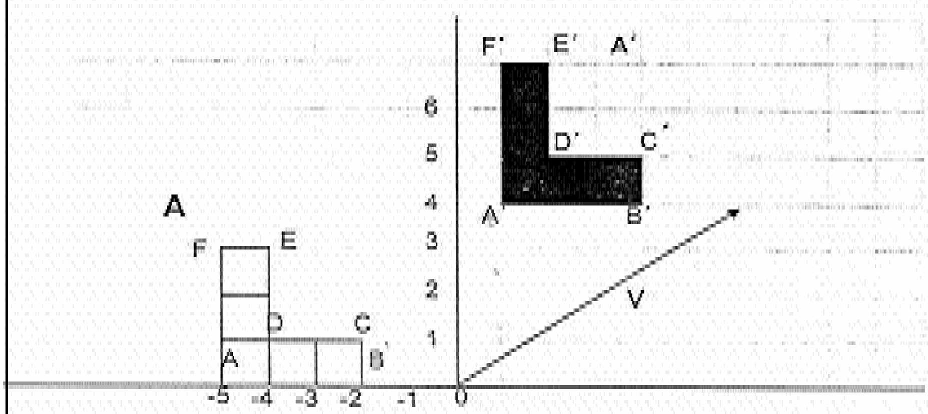
Figura 9.d. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; teoría

Para tener en cuenta:

Tenemos el punto P de coordenadas (X, Y) en el plano cartesiano, se le asocia V que es la dirección hacia donde se va ha trasladar la figura, de manera que una traslación se puede identificar como una adición así:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} V1 \\ V2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} X + V1 \\ Y + V2 \end{vmatrix}$$

Al trasladar el pentominó A según V = (6.4) resulta el pentominó A'



$$\begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix} +$$

$$A' = \begin{vmatrix} -5 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$B' = \begin{vmatrix} -2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

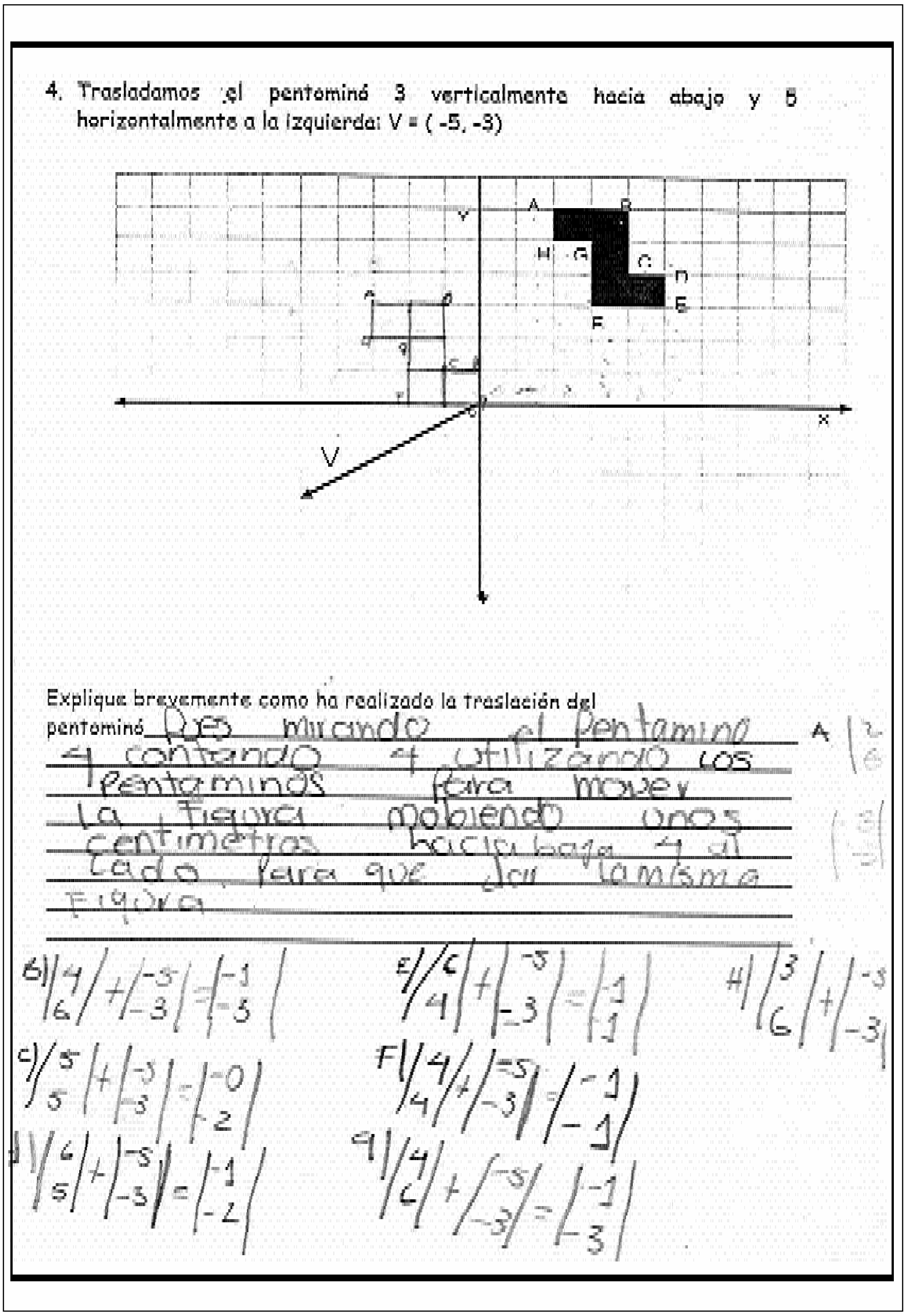
$$C' = \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$E' = \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

$$F' = \begin{vmatrix} -5 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix}$$

Figura 9.e. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; punto 4



4. Trasladamos el pentominó 3 verticalmente hacia abajo y 5 horizontalmente a la izquierda: V = (-5, -3)

Explique brevemente como ha realizado la traslación del pentominó pues mirando el pentamino y contando y utilizando los pentaminos para mover la figura moviendo unos centimetros hacia bajo y al lado para que dar la misma figura

b) $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0\\-2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

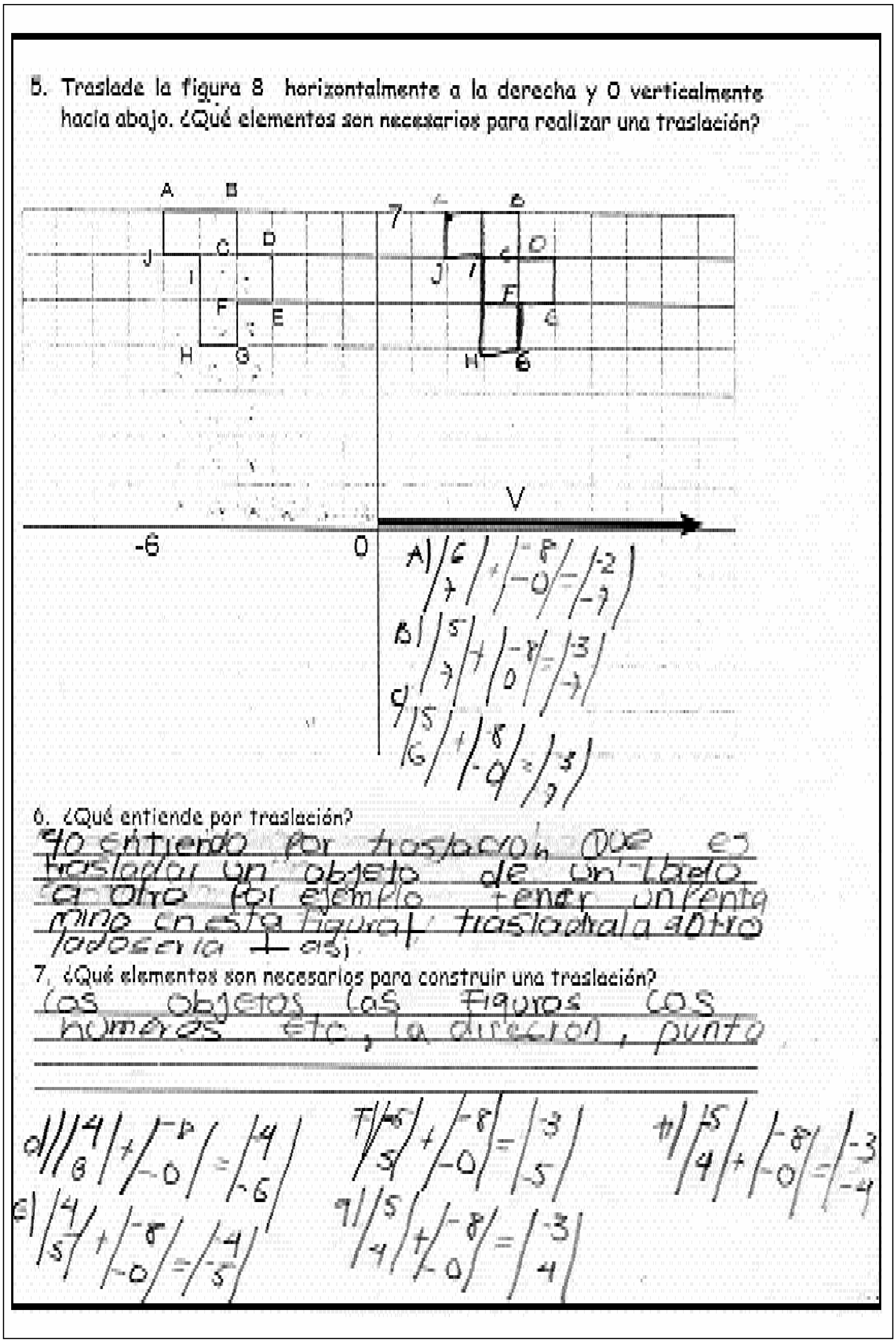
e) $\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}$

Figura 9.f. Taller No. 6 de Diana M. Torralba; puntos 5 - 7



3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

3.1. FAMILIARIZÁNDONOS CON EL MATERIAL CONCRETO

“”A través del material concreto el estudiante puede avanzar en el roceso de abstracción del pensamiento matemático”.

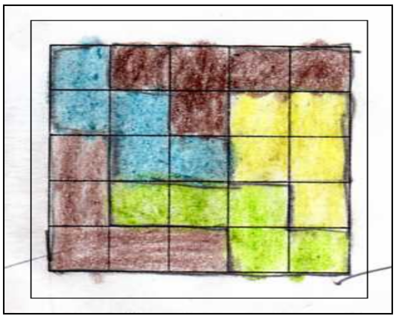
La manipulación de objetos ”concretos” constituye la base del conocimiento humano en general y de las matemáticas en particular (Dienes, 1969, p. 17), ya que ayuda en el proceso cognitivo de conceptualización y contribuye a la asimilación de nuevos conceptos y propiedades del mundo físico, fuente de referencia del conocimiento.

La observación de la ejecución de los estudiantes en esta actividad mostró la gran dificultad que existe para operar el material porque el aula todavía no aporta esta posibilidad de manipulación desde temprana edad. Los estudiantes demoraron en la construcción de los rompecabezas o *puzzles* con las diferentes fichas del poliominós, y la mayor dificultad se presentó al momento de recubrir el juego.

Por ejemplo, en el Taller No. 2 las estudiantes Jessica Prada (14 años) y Diana M. Torralba (15 años) no encontraron la solución inmediatamente porque no se centraron en la operación geométrica aunque a medida que trabajaban realizaron verbalizaciones importantes con el movimiento de las fichas. Los demás estudiantes de la muestra ejecutaron la tarea acertadamente.

Si observamos la Figura 10 arriba, notamos que la estudiante hubiera resuelto el rompecabezas, utilizando los pentominós después de haber girado y colocado cada figura en forma correcta.

Figura 10. Recubrimiento de Jessica Prada (Taller No. 2)



De la manipulación de los pentominós noté que, como bien lo afirma Rodríguez (2004), los materiales educativos son objetos que generan un interés especial en el aula, pues trascienden la autoridad y en cierto sentido, la rigidez del docente y paralelamente catalizan la necesidad incansable del niño de explorar, expresar, encontrar preguntas.

Como testimonio de ese dinamismo que aporta la manipulación de objetos dentro de la actividad matemática en el salón de clase esta el beneplácito de Diana:

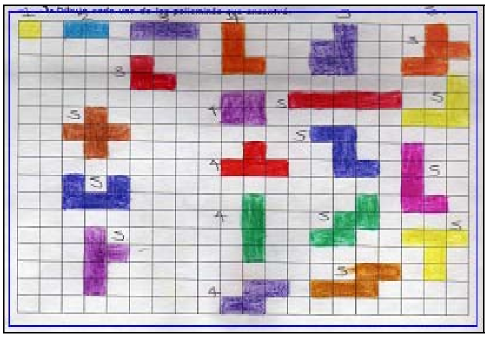
> "Me aburro a veces porque no las entiendo y no pregunto porque me da pena preguntar, pero con usted puedo aprender porque entiendo y no me da miedo preguntar" (Diana M. Torralba; entrevista realizada el 13/12/2006).

Por tal razón es que los materiales utilizados en las actividades de aula son de especial importancia porque ayudan a que el estudiante se motive y despierte su interés por cada tema a tratar. Lo anterior implica que los esquemas de enseñanza deben cambiar para darle cabida a una nueva didáctica que incluya la utilización del material, para hacer los procesos cognitivos dinámicos e interesantes.

Consecuentemente, la geometría activa resulta ser una alternativa para establecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio (Lineamientos Curriculares 1998, p. 57).

Al respecto, Báez y Hernández (2002, p.1) afirman que los alumnos que alcanzan un nivel sofisticado de manipulación de las piezas, pueden dar la imagen que entienden bien los conceptos matemáticos, pero no olvidar que las piezas sólo son un pretexto para llegar a la etapa simbólica.

Figura 11**.** Dibujos de los poliominós hechos por Mariana



Una profesora, colega de la Institución, expresó su apreciación del interés que esta etapa de manipulación había provocado en los estudiantes uno de los días en el que se realizaba el Taller No. 1 (17 de octubre de 2005):

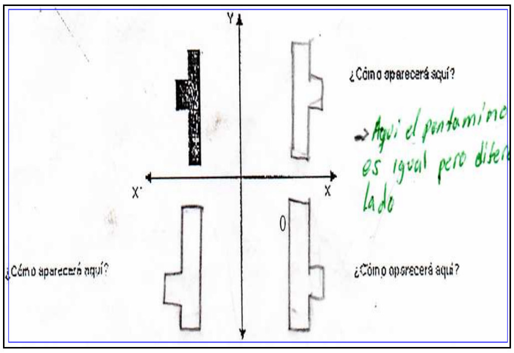
"Me di cuenta que el aprendizaje es significativo, los estudiantes ahora no quieren si no trabajar matemáticas y se la pasan jugando con unas fichitas. ¿Qué les hizo?, ahora se la pasan jugando y armando rompecabezas, me toca regañarlos" (Diario de campo, 17/10/2006).

Por otro lado, se debe destacar, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), la percepción como proceso que establece la relación entre el exterior y nosotros: todo lo que llega a partir de nuestros sentidos para ser procesado y conectado con el resto de la información, y la acción es el ejercicio mismo que el estudiante mantiene durante el desarrollo de las actividades, la forma como se involucra y se hace responsable de su propio aprendizaje.

Al respecto, como docente, reflexiono: ¿Cómo hacer para que los estudiantes mejoren su aprendizaje para hacer los recubrimientos? La respuesta está en la ejecución práctica porque en ella se aplican giros, traslaciones y simetrías cuya conceptualización pasa por la manipulación y la argumentación verbal indispensable para la asimilación del aprendizaje adquiriendo mejor capacidad para definir los objetos, teniendo en cuenta sus características y sus propiedades.

En la Figura 12, abajo, se puede observar cómo Nicolás Andrés Vera (14 años) realizó el ejercicio del seguimiento a las rotaciones, traslaciones y simetrías propuestas en el Taller No. 4, punto 12:

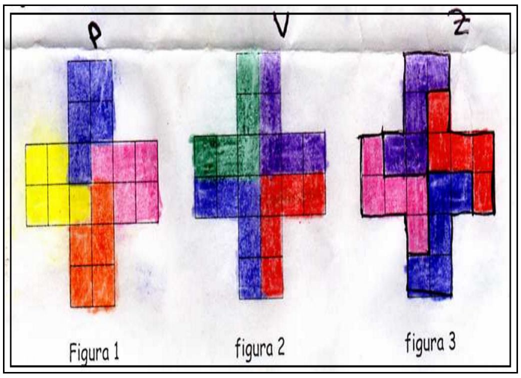
Figura 12**.** Seguimiento de transformaciones en el plano



Van Hiele, citado por Fonseca (2006, diapositiva No. 18), señala que en la enseñanza de la geometría, el razonamiento de los individuos pasa por unos niveles que resultan ser secuenciados y sin ausencia de alguno. En cada nivel los conceptos geométricos se comprenden y utilizan de manera distinta e influye en la manera de clasificarlos, interpretarlos, definirlos y en la realización de demostraciones.

Lo anterior se vio reflejado en el trabajo realizado por Mariana, en relación con el recubrimiento de tres cruces en punto 6 del Taller No.2 (véase la Figura 13), para cada figura de 20 cuadros se debía encontrar una sola ficha para recubrir. Después de varios intentos y sin que ella tuviera una solución, se dio de cuenta que las figuras debían girarse y encontrar el pentominó simétrico que era el correspondiente para lograr con satisfacción el trabajo propuesto.

Figura 13. Recubrimiento de la cruz con diferentes pentominós



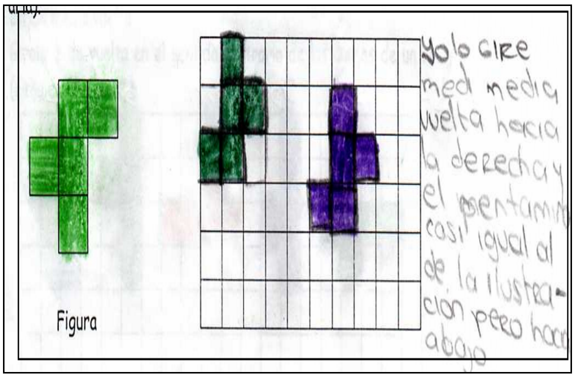
Además, en los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio (Lineamientos Curriculares , 1998, p. 56).

Quiero reiterar que el uso del material concreto fue importante porque a través de él a los estudiantes se les facilitó los procesos de comprensión de las propiedades invariantes en las transformaciones rígidas

Por otro lado, parafraseando a Báez y Hernández (2002, p.1), los resultados de las actividades dejan ver que los estudiantes que realizaron la manipulación de las piezas geométricas hicieron de la matemática una disciplina experimental donde cada quien observaba y estudiaba patrones geométricos.

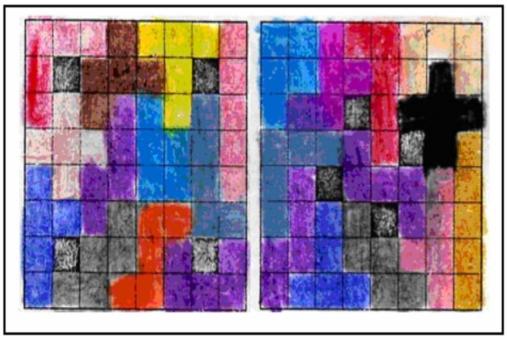
Como ejemplo de lo anterior, el trabajo en el punto 1 del Taller No. 3 de Mariana representa el ejercicio de manipulación de fichas de pentominós en la secuencia siguiente que evidencia los procesos cognitivos y simbólicos realizados durante el proceso. Este es su ejercicio:

Figura 14. Interacción matemática de Mariana con los pentominós



De igual modo, en la siguiente figura, se muestra algunos de los recubrimientos realizados por Mariana en donde se ve claramente cómo la estudiante solucionó algunos ejercicios propuestos, posibilitando la expresión de las propiedades y los procesos de interpretación, llegando a un acercamiento más efectivo a la destreza en el manejo de poliominós.

Figura 15.Recubrimientos del plano con los pentominós hechos por Mariana



La experiencia de esta investigación quiere proponer la puesta en escena en el aula de este pensamiento espacial que siempre se espera enseñar en el último período lectivo cuando ya el tiempo no alcanza. El componente espacial inicia desde temprana edad pero se olvida su asimilación y profundización, haciendo que el estudiante ignore los contextos donde se desenvuelve, determinantes para resolver problemas y la codificación de representaciones geométricas que a su vez son representaciones simbólicas.

Nuevamente, es más fácil para el estudiante percibir una rotación, una traslación o una simetría utilizando el material concreto, que si lo hace con regla y compás, ya que a pesar de que es importante puede confundirse al hacer la transformación, porque hay que señalar procedimientos que pueden confundir al estudiante llevándolo a que no perciba las propiedades que se pretende identifique con la actividad para después de un proceso mediado logre conceptualizar.

Por lo tanto, los pentominós resultan una gran herramienta para la enseñanza significativa de las transformaciones en el plano ya que el estudiante mismo es el que conceptualiza después de toda una experiencia previa para llegar, posteriormente, a un procedimiento.

Es así como el material concreto prepara el camino para los conceptos matemáticos sin quedarnos en un nivel intuitivo. Una de las formas de hacer de las matemáticas un área asequible a los estudiantes es a través de material que les permita visualizar las propiedades, manipular objetos. Actividades que generan curiosidad, entusiasmo, expectativa, cuando se utilizan diferentes metodologías en el aula de clase, favoreciendo el aprendizaje y actitud de los estudiantes hacia la matemática.

3.2. LOS POLIOMINÓS: JUEGO Y ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA

El juego con diversas figuras es considerado por los entendidos en la materia como una fuente de problemas de inteligencia "con gran sabor matemático"; además, ofrecen un recurso didáctico y lúdico que enriquece los procesos de razonamiento, comunicación, modelación y elaboración, así como la comparación y ejercitación de procedimientos relacionados con el tema.

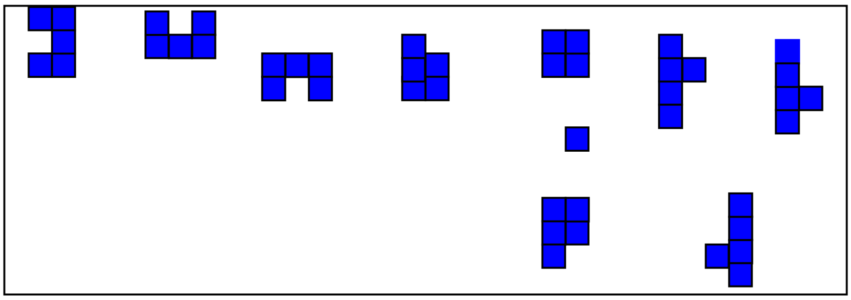
Lo anterior se evidenció, además, en el gusto que los estudiantes encontraron tras la realización de cada taller, ya que su actitud frente a la materia poco a poco iba cambiando y haciéndose más positiva: Veamos la intervención de Nicolás al respecto: "[…] jugar y aprender matemáticas, pues, nunca lo había hecho así" (Nicolás A. Vera; entrevista del 13/12/2006).

La pregunta "¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar juntos, al menos de uno de sus lados, cinco cuadrados del mismo tamaño?" (Taller No. 1) sirvió como apertura de esa etapa investigativa y, al responder a ella, se abrió también la perspectiva lúdica que contribuyó a la motivación necesaria para las etapas posteriores:

“Estas y otras posibles configuraciones se les conoce como Pentominós. En total, son doce maneras diferentes de acomodar juntos, al menos de uno de sus lados, cinco cuadrados”. (Diario de campo, 13/10/2006)

Para descubrir las 12 piezas del juego de pentominós se pueden presentar dificultades, ya que una misma pieza puede ubicarse en diferentes posiciones y aparentar ser distintas. Por lo tanto, hay que descubrir cuándo se está repitiendo una pieza y tener cuidado si alguna está rotada o reflejada porque eso puede hacer creer al estudiante que se trata de otra pieza del juego. Esta situación fue bien recibida por los estudiantes y aumentó su curiosidad e interés por resolverlo correctamente.

Figura 16. Posibles confusiones de los pentaminós generadas por la rotación

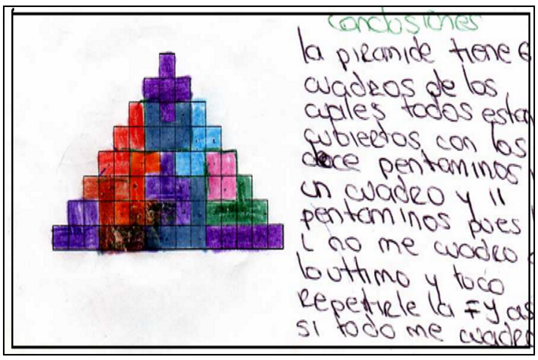


Para evitar la confusión, se propone construir el juego en madera u otros materiales más duros como aluminio y acrílico. Pero se sugiere hacer rectángulos de 20x12 cm. para obtener un juego de pentominó a escala 2:1 en las dimensiones de longitud y tamaño adecuado para manipular las piezas. Frente al material Gardner (1972, p. 56) observa con mucha certeza que su alcance como material didáctico es vasto, como juego es enigmático, sorprendente y muy divertido. Y así lo corrobora la siguiente intervención de Carlos A. Sanabria cuando expresa:

"Se aprende mucho, de algo que no se había visto nunca".
(Entrevista, 11/12/2006)

La tarea de construir los poliominós resultó muy llamativa y emocionante pues los estudiantes empezaron a construirlos por todos los sitios del colegio y armaron los rompecabezas o *puzzles.* Con cada encuentro que tenían con el material se familiarizaban más con él hasta llegar a internalizar y manejar rápidamente las formas de cada pentaminó para resolver los pentaminós propuestos en los talleres. Veamos a continuación la el *puzzle* de la pirámide (punto 7 del Taller No. 2) que resolvió eficazmente Mariana del Carmen Torres y lo registró de su experiencia:

Figura 17. Puzzle de Mariana de la actividad del 31 de octubre de 2005



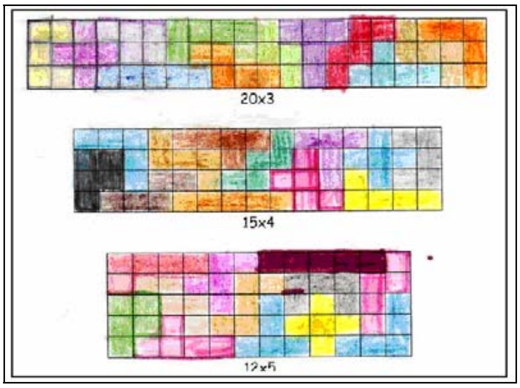
Otra de las bondades del juego es su sorprendente versatilidad ya se pueden acomodar todas las piezas juntas de maneras inesperadas. En uno de los trabajos de acomodación que realizó Diego Villamizar, él concluye:

"El camello del [Taller No. 1, punto 6] lo hice con las doce fichas y sobran dos cuadrados que los dejó en blanco y el área son 60 cuadritos que tiene la figura sin contar los dos que sobran" (Entrevista, 17/10/2006).

El ejercicio realizado por los estudiantes abarca un campo muy amplio de de representaciones matemáticas y geométricas: perímetro, área, ángulo, vértice, grados; operaciones básicas como la adición, sustracción y multiplicación; además, trabajaron ángulos, dirección, magnitud, semejanza, congruencia, relaciones de paralelismo, entre otros.

Entre las cosas que alegran al docente en el salón de clase están los trabajos que hacen ciertos estudiantes por su agilidad y destreza en las actividades planeadas. Además, me entusiasmó el ver a los estudiantes trabajar intuitivamente y poniendo en marcha su capacidad de razonamiento sin que se les estuviera coaccionando pues en cada actividad buscaron autónomamente diferentes formas de trabajar y socializan de manera triunfal con sus compañeros sus hallazgos con mucha naturalidad y coherencia. El trabajo realizado por Jessica Prada fue un buen ejemplo del dominio y la facilidad que tuvo para ella trabajar con los pentominós.

Figura 18. Puzzles de Jessica del Taller No. 1



En la explicación del juego (véase la Figura 19) y su importancia me pude dar cuenta que ayuda a comprender de una manera fácil, congruente y segura las transformaciones rígidas en este caso traslaciones, rotaciones y simetrías.

Referente a esto, Nicolás A. Vera expresó muy alegremente:

> "Profesor, es que a quien no le gusta jugar; además, a nadie nos gusta hacer ejercicios, pero como lo está combinando con juegos es muy diferente y divertido. ¡Estoy aprendiendo!" (Entrevista, 17/10/2006).

Figura 19. Juego del Taller No. 1

JUEGO PARA DOS JUGADORES

En este juego utiliza un tablero similar al tablero de ajedrez y dos colecciones de pentominós (uno para cada jugador), de distinto color cada uno. Los cuadrados del tablero deben ser iguales que los cuadrados de los pentominós.

El juego consiste en ir colocando por turnos, un pentominó en el tablero de modo que no se superponga ninguna pieza ya colocada. La pieza colocada en el tablero no se puede retirar ni cambiar de lugar. Gana el jugador que impide a su oponente colocar una de sus piezas.

Variantes del juego:

a. Con el mismo tablero y solo una colección de los doce pentominós, que se dejan sobre la mesa, cada jugador en su turno toma un pentominó para colocar sobre el tablero. Gana el jugador que impida a su oponente colocar una pieza. Si se han colocado las doce piezas sobre el tablero, el juego quedaría "en tablas", es decir, empate.
b. Con el mismo planteamiento que en el apartado a. pero distribuyendo aleatoriamente 6 pentaminós a cada jugador.

En conclusión, la enseñanza de la geometría no debe pasar por alto los juegos ya que se reflejado en todos los estudiantes de hoy en día que es posible manipular imágenes; esto le proporciona a los profesores de matemáticas la oportunidad de introducir un sin número de conceptos importantes, incluyendo operaciones y los procesos recursivos para dibujar todo tipo de objetos.

Es decir, uno de los recursos para la enseñanza de la geometría es el juego con sistemas concretos surgidos de la experiencia inmediata con el espacio y el movimiento. Esto lleva a la construcción de sistemas conceptuales para la codificación y el dominio del espacio y a la expresión externa, ojala operatoria, de esos sistemas conceptuales a través de múltiples sistemas simbólicos.

3.3. PROPIEDADES INVARIANTES EN ROTACIONES, TRASLACIONES Y SIMETRÍAS

En esta categoría muestro las propiedades invariantes en rotaciones, traslaciones y simetrías que observé y que mis estudiantes pudieron concluir claramente. Como bien se ha mencionado, para efectos de esta investigación tuve en cuenta las transformaciones rígidas en el plano cartesiano y específicamente las propiedades invariantes en traslaciones, rotaciones y simetrías.

Estas transformaciones rígidas fueron analizadas en una actividad diagnóstica por la estudiante Mariana del Carmen Torres al referirse al reflejo de una persona en el espejo:

> “[...] es una persona reflejándose en un espejo. Si, por ejemplo, en la recta numérica está el 0 y le ponemos un espejo quedaría reflejado el 0, por lo cual si vale el 0” (Actividad diagnóstica, 20/09/2006).

Y dijo refiriéndose a reflexión o simetría:

"[...] es la medida de las figuras geométricas como por ejemplo cuanto mide cada una de las dimensiones de las figuras que vamos a realizar. Es una reflexión, por lo cual es la transformación que mantiene la figura de la imagen congruente con la figura original" (Actividad diagnóstica, 20/09/2006).

En relación con las trasformaciones como traslación, rotación, simetría axial y simetría puntual, es procedente preguntar: ¿Se conserva **la forma** (ángulos)? ¿Se conserva **el tamaño** (distancias)? Esto para llamar la atención sobre las propiedades que permanecen invariantes. Este tipo de transformaciones se llaman movimientos **isométricos** y son el objeto central de estudio de esta investigación de aula.

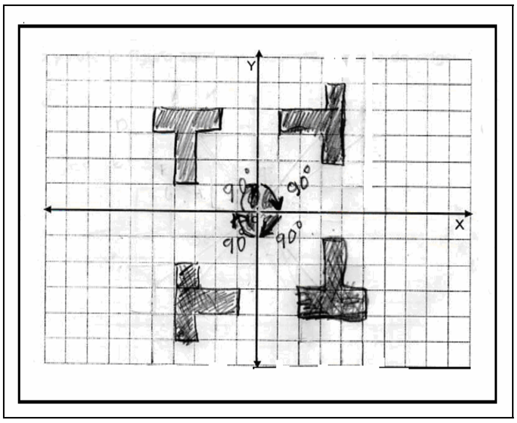
Como bien señala Osorio (2002, p. 46), doblar recortables de papel o usar espejos para investigar líneas de simetrías son otras formas de hacer que los niños observen figuras en diferentes posiciones, y que se den cuenta de sus importantes propiedades y las comparen y contrasten.

Apud Osorio (p. 22) subraya en este aspecto que el sentido espacial es una percepción intuitiva del entorno propio y de los objetos que hay en él. Para desarrollar este sentido espacial los estudiantes deben reflejar sus experiencias en relaciones geométricas, de dirección, orientación, forma y tamaño de objetos. Es decir, utilizar un lenguaje simbólico o verbalizaciones, como la que sigue, que permiten llegar al concepto que se desea.

"Yo la gire media vuelta y el pentaminó me quedó de para bajo" (Jessica Prada, Taller No. 3, 11/11/2006).

Por ende, los conceptos de ángulos, cambio de dirección, amplitud, giros, conversión, y que son básicos para comprender las transformaciones, se pueden construir mediante acciones fáciles de realizar para los estudiantes como giros y movimientos que pueden servir, tanto para generar descubrimientos relativos a las transformaciones como para comprobar las inferencias o predicciones de los niños.

Figura 20**.** Figura del Taller No. 5 realizado el 30 de noviembre de 2006



En figura de arriba, del taller de Nicolás A. Vera, se registra puntualmente los procesos antes mencionados y que Osorio (2002, p. 10) nos explica: “El valor principal de la geometría de los movimientos consiste en alcanzar el objetivo de una aproximación informal e intuitiva de la geometría, aunque también contribuye a resaltar ciertos aspectos de la geometría euclidiana como la congruencia y la semejanza”.

Diana M. Torralba (15 años) caracteriza así los ángulos:

> “Angulo es un puntiagudo que se encuentra en las esquinas de los rectángulos y los ángulos” (Taller diagnóstico, 20/09/2006).

A la pregunta de por qué el “ángulo es un puntiagudo” respondió: “porque puntiagudo es la unión de dos semirrectas formando un ángulo y es puntiagudo porque la punta se une a las dos semirrectas”.

Ahora contrastemos con la conceptualización de Mariana del Carmen Torres:

> “Angulo son las áreas de las figuras, las esquinas de los cuadernos, triángulos, rectángulos, etc., y giro es cuando estamos mirando por ejemplo al norte en algunos casos nos dicen giren ¼ de vuelta, uno da la vuelta hacia la mitad. Y la mitad de un círculo cuando nos ubicamos en la mitad de la mitad”.
> (Taller diagnóstico, 20/09/2006).

Otra de las definiciones sobre ángulo y giro fue dada por Carlos A. Sanabria en los siguientes términos:

> “Un ángulo es como el mismo nombre lo dice, es un lado y lo podemos encontrar en cuadros, casas, salones, hasta en los juegos como parqués y dominó y un giro de ¼ de vuelta es porque contiene líneas rectas formando un ángulo recto por eso es un ángulo recto” (Taller diagnóstico, 20/09/2006).

Respecto a los ángulos de las figuras, se presentó un evento que me llamó la atención: cuando los estudiantes y tenían que traducir los giros en grados, se generó una gran polémica. Esto dejo ver que no estaban preparados para esta conceptualización pues debían realizar precisiones para los giros de poca amplitud y dejar de lado las fracciones que estaban usando para expresar dicha amplitud (1/4 de vuelta, 1/8, etc.).

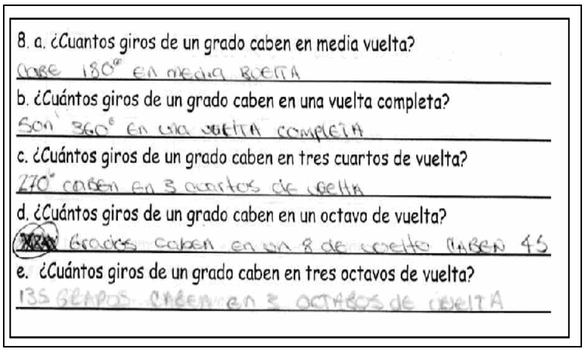
Por ejemplo, Carlos A. Sanabria pensaba que cuando el denominador de una fracción es más grande, la cantidad es mayor. Además, decía que un octavo era mayor que un medio, y que un octavo se hacia igual a tres cuartos de vuelta.

Nicolás A. Vera, atento a lo que decía su compañero, tomó una hoja de papel, la partió en pedazos y le explicó:

> “Un giro de ¼ de vuelta más la mitad de otro ¼ de vuelta es igual a 135º”. (Taller No. 3 08/10/2006).

Luego de la corrección, el primer estudiante nombrado resolvió los giros en grados como se muestra en la siguiente figura:

Figura 21. Respuestas de Carlos al punto 8 del Taller No. 3



8. a. ¿Cuantos giros de un grado caben en media vuelta?
CABE 180º EN MEDIA BOELTA

b. ¿Cuántos giros de un grado caben en una vuelta completa?
Son 360º En una vUELTA COMPLETA

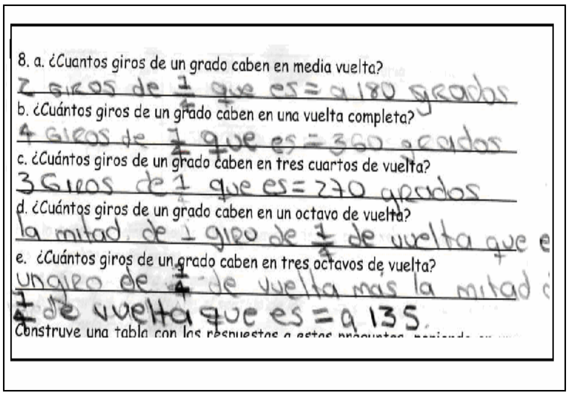
c. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres cuartos de vuelta?
270º caben en 3 cuartos de vuelta

d. ¿Cuántos giros de un grado caben en un octavo de vuelta?
Grados caben en un 8 de vuelta CABEN 45

e. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres octavos de vuelta?
135 GRADOS CABEN EN 3 OCTABOS DE VUELTA

Por su parte, Mariana del Carmen Torres presentó sus relaciones como se ven en la siguiente figura:

Figura 22. Respuestas de Mariana al mismo punto



8. a. ¿Cuantos giros de un grado caben en media vuelta?

2 giros de $\frac{1}{4}$ que es = a 180 grados

b. ¿Cuántos giros de un grado caben en una vuelta completa?

4 giros de $\frac{1}{4}$ que es = 360 grados

c. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres cuartos de vuelta?

3 giros de $\frac{1}{4}$ que es = 270 grados

d. ¿Cuántos giros de un grado caben en un octavo de vuelta?

la mitad de 1 giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta que e

e. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres octavos de vuelta?

un giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta mas la mitad

$\frac{1}{4}$ de vuelta que es = a 135.

Construye una tabla con las respuestas a estas preguntas ...

Con los anteriores ejemplos intento resaltar la importancia que tiene la Geometría Euclidiana para la conceptualización en lo relativo a tamaños, distancias, direcciones que conducen a la medición de longitudes, ángulos, áreas y que son bien recibidas por los estudiantes cuyos procesos de socialización resuelven las dudas.

Osorio (2002, p. 12) a este respecto señala: “Se pueden distinguir, por ejemplo, dos figuras, un trapecio y un rectángulo, basándose en los ángulos y en las longitudes de los lados (desde el punto de vista proyectivo, ambas figuras son equivalentes, ya que el tablero de una mesa rectangular ofrece un aspecto de trapecio visto desde ciertos ángulos). Los niños pueden reproducir la posición exacta desde un punto en una página, o una figura geométrica y decidir qué líneas y ángulos han de medir para ello”.

La cuarta actividad didáctica de esta investigación estaba relacionada con la simetría. El ejercicio consistía en que los estudiantes tomaran los pentominós y los espejos para promover actividades cognitivas de asociación y diferenciación para hallar las simetrías de las figuras propuestas; además de que desarrollaran el “pensamiento visual”.

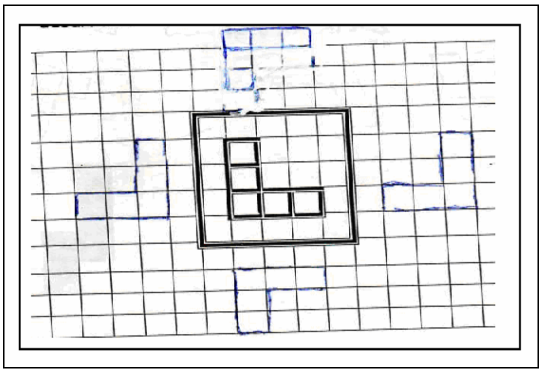
La mayoría de las cosas que se consideran intuitivas son, de hecho, conocimiento no verbal, “la visualización en geometría requiere la manipulación de imágenes mentales visuales”, lo afirma Gorgorio, (1991, p.5).

Por ejemplo, la experiencia constata que el dibujo de un poliominó, el diagrama de árbol, trazar un histograma a partir de una tabla de valores, etc., son capacidades que forman parte de la visualización como tal.

Veamos los conceptos emitidos por los estudiantes a este aspecto:

> “Tenemos en cuenta que la simetría y la igualdad que los separa queda igual a como está en los cuatro lados” (Nicolás A. Vera; Taller No. 5; 11/11/2006).

Figura 23. Representación a la que hace referencia Nicolás A. Vera

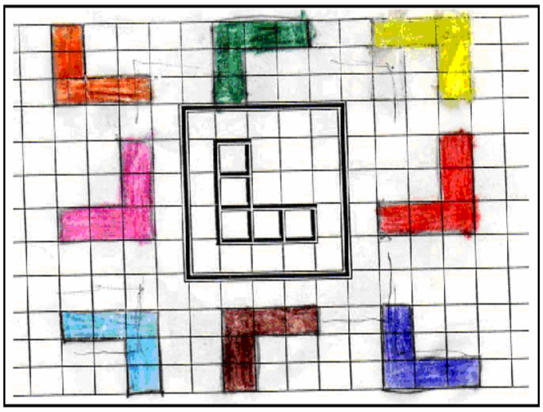


Al preguntarle, ¿por qué esa imagen (la que está arriba) quedó pegada al espejo y no como las demás? Respondió:

“hace falta una cuadrícula, por eso la hice pegada pero yo se que la distancia es igual como lo hice con los demás dibujos - y agrega: entonces la voy a borrar y la dibujo por encima”
(Entrevista, 11/11/2006).

Otra de las soluciones es la de Mariana del Carmen Torres; ella refirió al respecto: “las imágenes que quedaron en las esquinas giraron 180º” (Entrevista, 12/11/2006).

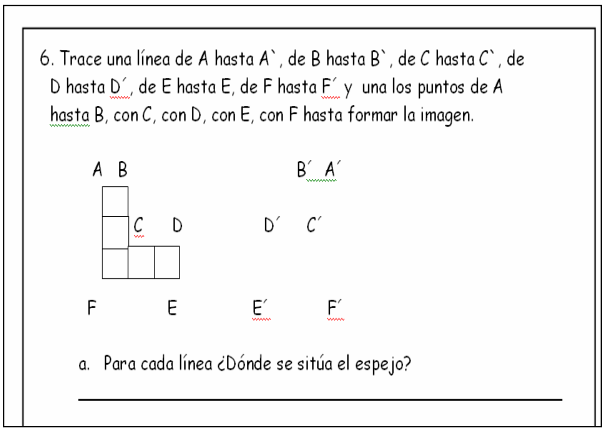
Figura 24. Otra respuesta al punto 5 del Taller No. 4



Cuando se trabajó simetrías en las figuras (véase la Figura 24) Mariana refirió:

“Colocamos el espejo en la mitad de las letras. Si medimos letra con letra se puede hacer mas que queden en la misma posición de la mitad de las otras letras”. Además dice “tenemos que colocar el espejo en la mitad ni un milímetro más ni un milímetro menos” (Taller No. 4, 11/11/2006).

Figura 25. Punto 6 del Taller No. 4



Por su parte, Diana M. Torralba concordó con sus compañeros así:

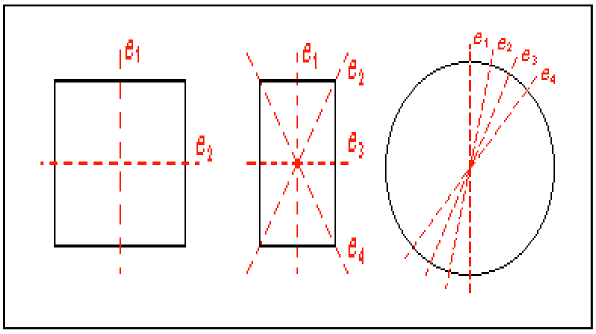
> "Se pone en la mitad para tener la figura del espejo. En el medio de la figura de abajo para obtener el resultado de arriba" (Taller No. 4, 11/11/2006).

Se puede concluir que cuando encontramos objetos simétricos, como por ejemplo el pentominó X, se confirma la importancia de lo intra-figural que permite que las transformaciones que hace nuestro cerebro a las imágenes permitan determinar si hay simetría.

Según Osorio (2002), se parte de la concepción infra-figural de la palabra "simetría", para dirigir la atención a los modelos simplificados del objeto que se hace en nuestro cerebro, y a la agilidad con que la transforma para empezar a llamar "simetrías activas" a esas transformaciones que se aplican a una figura tridimensional a una simplificación bidimensional y produce otra figura congruente con la inicial que cae exactamente sobre la primera. Además, hay que decir "otra figura” para referirse al resultado, y hay que decir “cae exactamente sobre la primera” para referirse a la nueva posición de la figura ya transformada, de lo contrario, como toda la figura es congruente consigo misma y las simetrías son isométricas, todas las figuras serían simétricas.

Volviendo al análisis del taller, al preguntar sobre las simetrías que tiene cada figura (punto 7, Taller No. 4), los estudiantes dibujaron las figuras y colocaron espejos en diferentes posiciones para mirar cuáles figuras tenían simetrías. Simultáneamente, recortaron los pentominós e hicieron igualar las partes para verificar que la inicial con la final coincidían concluyendo que tenían n-ejes de simetría. Por ejemplo, un rectángulo tiene dos, un cuadrado cuatro y un círculo infinitos (cualquier recta que pasa por su centro es eje de simetría). Veamos la siguiente figura:

Figura 26. Simetrías del cuadrado, rectángulo y el círculo



Respecto al punto 13 del Taller, en el que debía tomar los pentaminós y usar el espejo para dibujar sus simetrías, Carlos A. Sanabria hizo el siguiente aporte al respecto:

“La cruz tiene simetrías en la mitad, lo mismo con T, V, U, W. Las demás no tienen simetrías porque al doblarlas no coinciden” (Taller IV, 22/11/2006).

Respecto a este ejercicio, noté que algunos estudiantes no se bastaron con el espejo sino que recortaron para luego doblar las figuras y hallar el número de simetrías de cada poliominó.

Osorio (2002, p. 45) subraya que la meta es que vayan pasando así a lo inter-figural, y que se empiecen a fijar en las transformaciones mismas, así sea todavía reducidas a la única figura que acapara la atención.

A continuación profundizo en tema de la simetría axial tomando como referencia a Fonseca (2006, memoria 11):

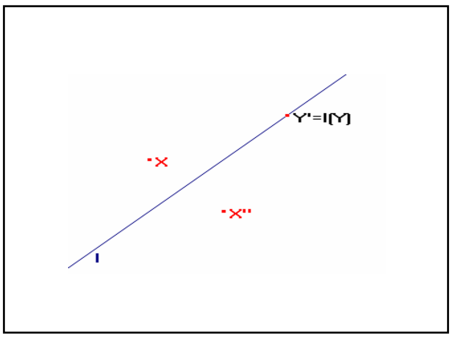
Sea *l* una recta fija en Π, la reflexión axial [*l*] sobre la recta *l* (eje de la reflexión axial) es una función:

$$[l] : \Pi \rightarrow \Pi$$

$$X \rightarrow [l]\,(X)$$

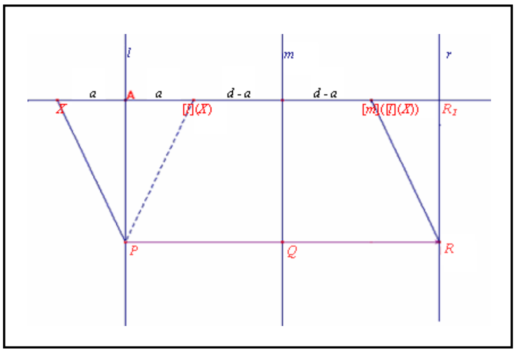
donde, Si $X \in l$, entonces $[l](X) = X$.

Si $X \notin l$, entonces *l* es la bisectriz perpendicular de [l](X)(X)

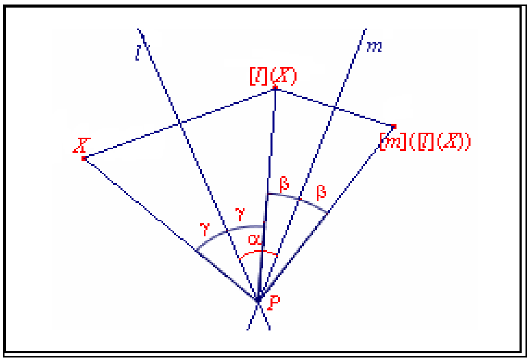


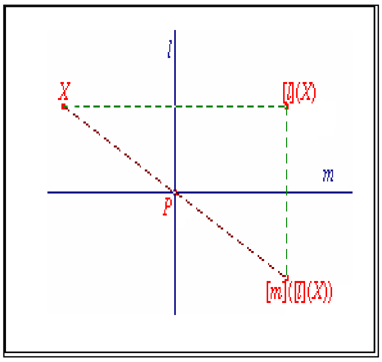
En cuanto a la composición de reflexiones axiales, Fonseca (2006) dice que no es una operación binaria en el conjunto, pero el comportamiento de esta relación es muy especial, ya que las isometrías definidas hasta el momento pueden expresarse como composición de dos reflexiones axiales.

Si el eje de simetría *l* y *m* de dos reflexiones axiales son rectas paralelas, entonces [*m*] ○ [*l*] = PR , donde la dirección de *P* a *R* es la dirección de *l* a *m* sobre la perpendicular y a través de una distancia igual a 2*d*(*l*,*m*).



Cuando los ejes de simetría de las reflexiones axiales forman ángulos α y β, la composición de las dos reflexiones [*m*] y [*l*] es una rotación con centro en punto de intersección de las dos rectas y ángulo dirigido igual a γ = 2Min., es decir que [*m*] ○ [*l*] = [*P*(γ)] donde *P* = *l* $\cap$ *m*. En el caso en que 2Min. sea mayor que 180º, entonces γ = 360º - 2Min.





En relación con las reflexiones centrales, si los ejes de simetría de las reflexiones axiales son perpendiculares, su composición es una reflexión central con centro en el punto de intersección entre *m* y *l.*

En geometría conviene distinguir simetría como transformación geométrica y simetría como propiedad de una figura. Una simetría central de centro *O* es una transformación que hace corresponder a cada punto *P* otro punto *P'* tal que *O* es el punto medio del segmento *PP*'. Una simetría de este tipo coincide con un giro del mismo centro y ángulo 180º. Es, por tanto, un movimiento directo. Una simetría axial de eje *e* es una transformación que hace corresponder a cada punto *P* otro punto *P*' tal que la recta *e* es mediatriz del segmento *PP*'.

Una figura se llama "simétrica" si cuando se aplican movimientos a ella, la dejan **invariante**. Esto quiere decir que una vez finalizado el movimiento queda en la misma posición que antes de iniciarse, aparentemente es como si la figura no se hubiera movido.

Por tanto se trata de un iso (igual) morfismo (forma) ---> **isomorfismo**

Una vez definidas las nociones de espacio afín, afinidad, espacio vectorial métrico y espacio euclídeo, podemos estudiar las transformaciones de espacios vectoriales y afines que ``dejan invariante'' una métrica. Tales isometrías consisten en una traslación + una isometría de punto fijo. Por eso comenzamos con las isometrías de punto fijo, antes de entrar propiamente en los grupos de movimientos. Como hemos visto, todos los espacios métricos de dimensión *n* son isométricos. Por tanto, a la hora de estudiar el grupo de isometrías, podemos trabajar siempre en $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual. En lo que se refiere al plano $\mathbb{R}^2$, pero el estudio sirve para cualquier espacio de dimensión 2.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tales que su inversa es su traspuesta, es decir, tales que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o sea, $a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ y $a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$.

Además tenemos $a_{ij} \in \{-1,0,1\}$

Tomando como referencia el cuadrado, tenemos las isometrías de punto fijo dan exactamente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Identidad   Reflexión Y   Reflexión X   giro de 180º
I   Ry   Rx   Ro

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal   Diagonal   giro 90º   giro -90º
X = Y   X = -Y

SUBGRUPO DE ISOMETRÍAS: EN CUADRADO Y PENTAMINÓS

8

4   4 (Klein)

2   Idenpotentes

1   Identidad

El grupo de las figuras que quedan invariantes corresponden al subgrupo Identidad no tienen isometrías y son: **L, N, Y, F, P.**

Las idenpotentes son aquellas que elevadas al cuadrado dan la idéntica. Estas corresponden a dos tipos de movimientos: la reflexión sobre la recta y la reflexión sobre el origen (giro de 180º). Cada una de ellas con la identidad forman un subgrupo de dos elementos idenpotentes. Los pentaminós **V, W, T, U, Z**, tienen alguno de éstos como subgrupo de isometrías.

	e	**a**	**b**	c
e	**e**	**b**	**b**	c
a	**a**	**e**	**c**	b
b	**b**	**c**	**e**	a
c	**c**	**b**	**a**	e

Tabla del grupo de Kein de orden 4

El grupo de Klein (K_4) se forma con cuatro movimientos: la simetría horizontal, la simetría vertical, la simetría de punto (giro de 180º) y la idéntica. Correspondiendo a este subgrupo la **I.** La tabla correspondiente es:

1. Los giros se forman con 4 movimientos que dejan invariante la figura. Son ellos los giros de ángulos de 90º, -90º y 180º y la identidad. Se forma el grupo C_4. El único pentaminó que queda invariante con ellos es **+**., sin embargo, hay otras isometrías que también lo dejan invariante.

	e	**a**	**b**	**c**
E	**e**	**a**	**b**	**c**
A	**a**	**b**	**c**	**e**
B	**b**	**c**	**e**	**a**
C	**c**	**e**	**a**	**b**

Tabla del grupo de orden 4

El grupo total de 8 elementos, comprende los giros de 90º, 180º, 270º, además las reflexiones sobre los ejes y las diagonales. La figura que tiene isometría de este tipo es el cuadrado y el pentaminó **+.**

Al mirar las letras del abecedario a que hacen referencia los 12 pentaminós, me doy cuenta que la N y la Y tienen simetría horizontal, pero en la construcción de los pentaminós son asimétricas.

El grupo de pentaminós que cumplen solamente con la identidad son asimétricas, pues no tienen simetrías de giro, ni ninguna otra.

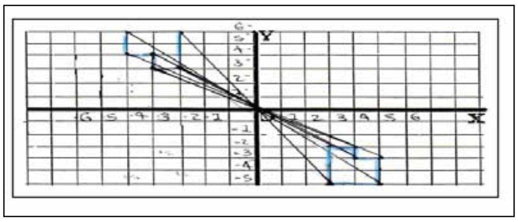
Las anteriores anotaciones matemáticas fueron inferidas por los estudiantes a medida que trabajan el material. Veamos el siguiente razonamiento de Mariana del Carmen:

> “La simetría puntual se realiza de acuerdo a un punto y es la misma central, se da cuando la figura da un giro de 180º o queda al revés” (Taller No. 5, 17/11/2006).

Con lo anterior, se evidencia que Mariana llegó a mostrar que una simetría puntual es igual a una rotación de 180º.

En la simetría central es pertinente preguntar a los estudiantes si ubicando en el plano cartesiano los puntos (-3,3), (-4,3), (-4,4), (-5,4), (-5,6) y (-3,6) al unirlos se puede encontrar una figura. Esto a modo de reto para incentivar los hallazgos que producen mucha alegría y satisfacción.

Figura 27. Trabajo de Mariana con la simetría puntual



Sobre la simetría central Fonseca (2006, diapositivas 7 y 8) afirma que si *P* es un punto fijo, la reflexión central [*P*] sobre *P* (llamado el centro de la reflexión central) es una función:

$$\begin{aligned} [P] : \Pi &\to \Pi \\ X &\to [P](X) \end{aligned}$$

Si $P \neq X$, $[P](X)$ es el extremo del segmento cuyo punto medio es *P* y uno de sus extremos es *X*. Pero si *P* y *X* son el mismo punto, la función $[P](P)$ corresponderá al punto *P*, es decir $[P](P) = P$.

Contrario a las traslaciones, la composición en el conjunto de las reflexiones centrales no es una operación binaria pues al componer dos reflexiones centrales, se obtiene una translación, es decir, $[Q] \circ [P] =$ donde $R = [Q](P)$.

De lo anterior se puede deducir que si se une el conjunto de las traslaciones al conjunto de las reflexiones centrales, la composición es operación binaria en este nuevo conjunto, ya que al componer una reflexión central y una traslación, o viceversa, se obtiene una reflexión central. Por lo tanto, este nuevo conjunto con la operación de composición tienen estructura de grupo.

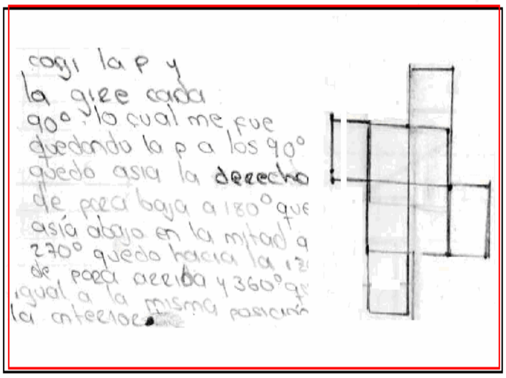
El Taller No. 5, “Manipulando, Encontrando y Descubriendo Rotaciones”, inicia el estudio e investigación de este proceso geométrico que, según Dienes (1969, p. 11) nos indica que las reflexiones son rotaciones en el espacio y que los estudiantes reconocieron en el ejercicio lúdico así:

> “Además que pude conocer muchas cosas, que nunca en mi vida había aprendido, me dio la oportunidad de preguntar porque me daba pena, y aprendí a pensar” (Diana M. Torralba; entrevista, 13/12/2006).

Siguiendo con la conceptualización del autor, en la construcción progresiva de la dinámica de los temas geométricos, una transformación no se puede definir ni formalizar antes de que los estudiantes hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos; deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse estos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo y de las manos (Osorio, 2002).

En el ejercicio de este taller, Carlos A. Sanabria observó que al rotar sobre sí mismos y alrededor de un punto fijo se encontraba la "rotación", según sus propias palabras (actividad del 30/11/2006). Otra estudiante, Mariana del Carmen, en su hoja mostró hacia dónde giró la figura, sumando el ángulo cada vez que lo rotaba, así:

Figura 28. Actividad de Mariana del Carmen Torralba, Taller No. 5



Los estudiantes del curso en general, y los de la muestra, realizaron los giros correctamente e identificaron el ángulo después de haber girado la figura. La expresión escrita fue bien argumentada pero tuvieron dificultad para dibujar las figuras porque no precisaron muy bien la distancia que hay del punto de rotación a los vértices de la figura, cambiando el vértice.

“Conocemos el ángulo después de haber girado la figura, conocemos la distancia que debe ser igual siempre desde el punto al vértice, y todo lo demás, pero al dibujar lo hacemos con dificultad, de pronto por el tiempo, queremos salir ya a vacaciones y lo hacemos rápidamente” (Nicolás A. Vera; entrevista 30/11/2006).

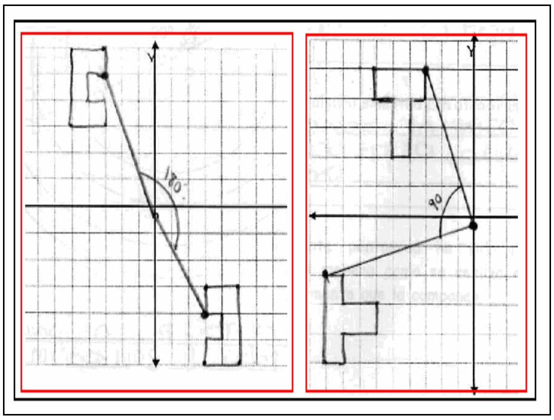
Por otro lado, una pregunta de mucho interés para los estudiantes fue la siguiente: “¿si una figura gira 90º en el sentido contrario a las manecillas del reloj, ¿cuál es su nueva posición?, ¿qué observas?” (punto 6 del Taller No. 5). Estas fueron algunas de las conclusiones de algunos estudiantes:

“La figura esta girada en el lado positivo de las manecillas del reloj. Observé que la figura ha girado 90º para el lado contrario de las manecillas del reloj” (Nicolás A. Vera, Taller No. 5, 30/11/2006).

“Giro 90º la figura y queda acostada, además observo que las figuras están de una manera y quedan de otra” (Diana M. Torralba, 30/11/2006).

Según Diana, la figura la rota 90º y que al girarla queda acostada, pero al compararla con su representación gráfica (véase la figura de abajo) hay un error pues si miramos el ángulo que muestra el gráfico no tiene 90º, y la distancia que debe ser igual desde el punto de origen al vértice de la imagen no es igual a la distancia que hay del vértice de la figura al punto de origen, pero su construcción sí está bien.

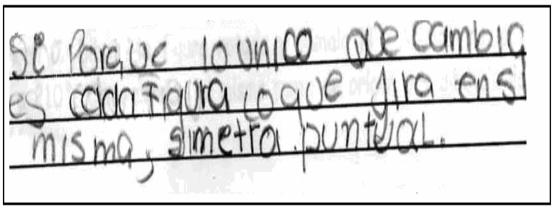
Figura 29. Punto 6 desarrollado por Diana M. Torralba



La pregunta 7 del Taller No. 5 se relacionó con el hallazgo de similitudes con otras transformaciones realizadas. Los estudiantes en general respondieron, muy acertadamente, que: "prácticamente en determinado momento todas las similitudes vienen ha ser una sola transformación. Por ejemplo, después de poner el espejo dos veces, ésa simetría se vuelve una traslación y, ésta al girarla 180º, daría una simetría central".

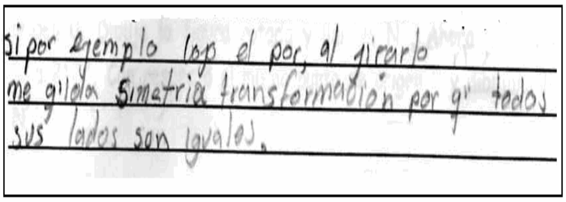
Osorio (2002, p. 46) explica las implicaciones pedagógicas de esta actividad entre los estudiantes así: "solo cuando empiezan a ver que a veces cuando se hacen dos o tres transformaciones la figura vuelve a quedar como cuando estaba antes, empiezan a sentir la necesidad de considerar como equivalentes todas las transformaciones que produzcan el mismo efecto".

Los siguientes son comentarios de los estudiantes que participaron en la investigación:



Si porque lo unico que cambio es cada figura lo que jira en si misma, simetra puntual.

Diana M. Torralba, Taller No. 5, 30/11/12



si por ejemplo lop el por, al girarlo me gilola simetria transformación por q' todos sus lados son igualos.

Nicolás A. Vera, Taller No. 5; 30/11/12

En la parte correspondiente a la composición de rotaciones (puntos 9, 10, 11 y 12) las siguientes fueron las argumentaciones y gráficas realizadas por dos de los estudiantes de la muestra investigativa:

> “Ha girado 60º y aquí ha girado 270º y concluye diciendo que una composición es una suma porque 60+210=270, pero que no queda en la misma posición” (Nicolás A. Vera; Taller No. 5, 30/11/2006).

> “En este punto podemos observar que la rotación de los ángulos o transformaciones es una suma”. (Mariana del Carmen Torres; Taller No. 5, 30/11/2006).

Figura 30. Punto 10 del Taller No. 5 realizado por Mariana

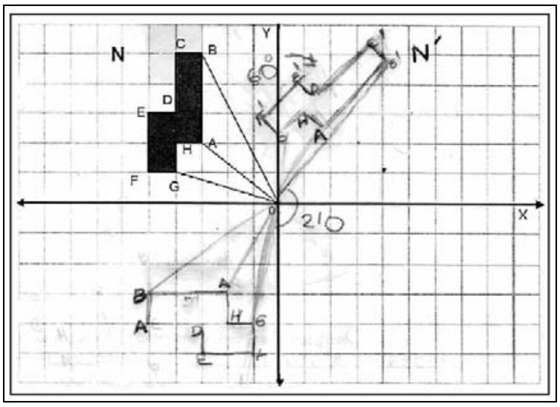
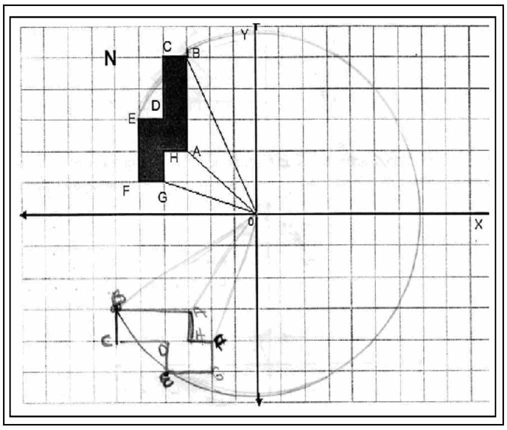


Figura 35. Punto 10 del Taller No. 5 realizado por Nicolás A. Vera



En conclusión, se puede observar que los estudiantes pudieron rotar las figuras posibilitando una mayor comprensión en las propiedades invariantes (ángulo orientado y centro de rotación). A su vez, el ejercicio generó polémica respecto a la construcción de las gráficas; manipularon los pentominós de una manera fácil y se ayudaron con los giros que ellos mismos daban. Cuando se habló de composición de rotaciones los estudiantes resolvieron que ésta es una adición. Es decir que al hacer un giro y luego el otro, resultaba otro general; por lo tanto, realizaron una sola rotación.

Fonseca (2006, memorias 9 y 10) ofrece, a este respecto, unas consideraciones muy importantes de índole matemática:

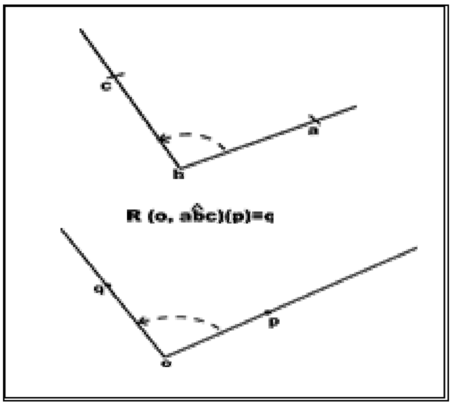
Sea *P* un punto fijo y un ángulo dirigido α tal que $\alpha \in$ (-180º, 180º]. Se define la función $[P(\alpha)]$ sobre el punto *P* (centro de la rotación) a través de α como:

$$\begin{aligned} [P(\alpha)] : \Pi &\to \Pi \\ X &\to [P(\alpha)](X) \end{aligned}$$

Donde $[P(\alpha)](X) = X$, si $X = P$.

$[P(\alpha)](X)$ es un punto X' tal que $d(P, [P(\alpha)](X)) = d(P, X)$ y $\angle XP[P(\alpha)](X) = \alpha$, si $X \neq P$.

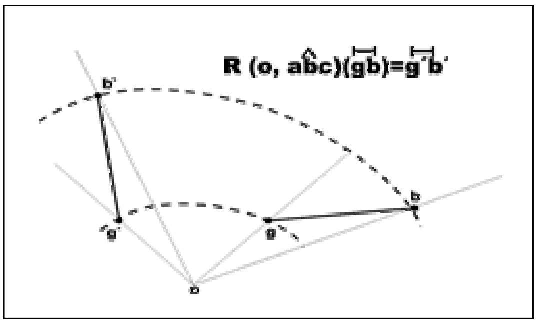
Si $[P(\alpha)](X) = Y$, deberá entenderse que $\angle XPY$ es diferente a $\angle YPX$, pues la dirección de uno es contraria a la del otro y $m(\angle XPY) = -m(\angle YPX)$.



Respecto a la composición de rotaciones, si dos de ellas tienen el mismo centro *P*, entonces la función compuesta es una rotación con centro *P* y ángulo dirigido igual a la suma de las medidas de los ángulos dirigidos de las dos rotaciones que se componen, es decir $[P(\beta)] \circ [P(\alpha)] = [P(\beta+\alpha)]$.

El conjunto de las rotaciones contiene al conjunto de las reflexiones centrales, ya que una reflexión central [*P*] puede verse como una rotación de centro en *P* y ángulo dirigido de 180º, es decir [*P*(180º)] = [*P*]. Se puede probar que:

- El centro de una rotación está en la mediatriz del segmento definido por un punto cualquiera y su transformado.
- El ángulo de dos semirrectas homólogas (que se corresponden en un movimiento) cualesquiera en un giro o rotación es congruente al ángulo de giro.
- Dos rectas homólogas en un giro equidistan del centro, el cual está por consiguiente en una de las bisectrices de los ángulos formados por dos rectas homólogas.



En cuanto a la simetría central, esta es una rotación, cuyo centro es el mismo de la simetría y cuyo ángulo de giro es un llano.

En su teoría sobre las inteligencias múltiples, Howard Gardner considera [importante] la inteligencia espacial y plantea que el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 56).

Una de las dificultades en el aula es que, en muchas ocasiones, los maestros tenemos dificultad para saber cuál de los movimientos conserva la dirección, cuáles la orientación en el plano y en el espacio. Pero aún así teorizamos con ayuda del texto sin que los conceptos geométricos sean ejecutados por los estudiantes pues ellos deben primero interiorizar esas ideas en su imaginación para, posteriormente, moverse con seguridad y buena orientación en el espacio externo para así dibujar y modelar con precisión.

Por lo tanto, cuando se estudien esos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos o figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero (Lineamientos Curriculares, 1998, p. 41).

En el proceso de conceptualizar y encontrar las propiedades invariantes que se realizó en el Taller VI, "Manipulando, Encontrando y Descubriendo Traslaciones", Jessica expresó:

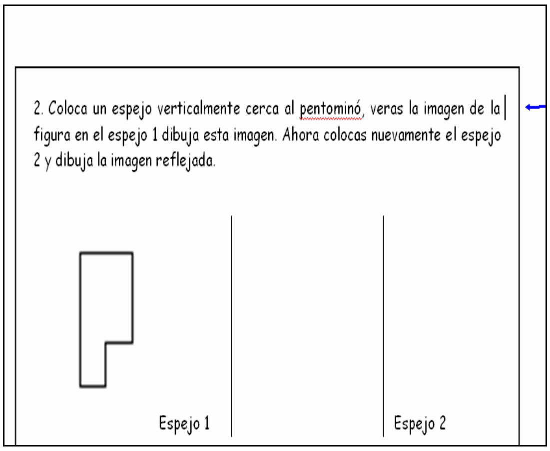
> "Al desplazar el pentominó unos centímetros y redibujar, no cambia la forma y el tamaño" (Jessica Prada; Taller VI, 30/11/2006).

Es de resaltar que con el sólo hecho de mover los pentominós, los estudiantes estaban conceptualizando sobre las propiedades en las transformaciones, en este caso traslaciones.

“Al promover el pentominó unos centímetros mas delante de manera que la figura no se girara, no cambia de tamaño porque siempre va a tener la misma cantidad de cuadritos (área), ni la forma ya que en ningún momento giramos la figura” (Mariana del Carmen Torres; Taller VI; 30/11/2006).

Otro de los ejercicios ejecutados por los estudiantes fue deslizar los diferentes pentominós en diferentes direcciones sin rotar las figuras. Se les pidió identificar en cada caso los elementos invariantes y las características principales de la transformación. Luego el ejercicio debía utilizar un espejo dos veces para que dibujaran las imágenes para observar y concluir:

Figura 31. Punto 2 del Taller No. 6



“En el espejo uno cambia la figura de posición y con el espejo dos vuelve a quedar igual la figura inicial. El movimiento es una traslación porque queda en la misma posición y no cambia de tamaño solamente es trasladarla sin que los puntos de la figura cambien y trayectoria” (Mariana del Carmen Torres; Taller No. 5, 30/11/2006).

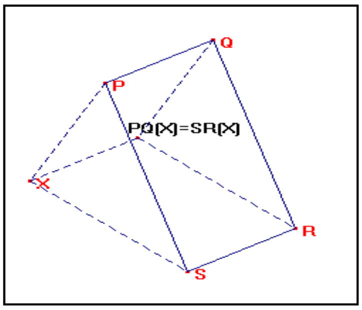
A este respecto Dienes, et al. (1969 p. 2), indica que una traslación de una figura en su propio plano cartesiano consiste en empujar simplemente la figura desde una posición a otra sin girarla al mismo tiempo. Esto fue observado por Nicolás en la realización de su taller:

> "La figura se traslada de un lugar a otro" (Nicolás A. Vera; Taller No. 5, 30/11/2006).

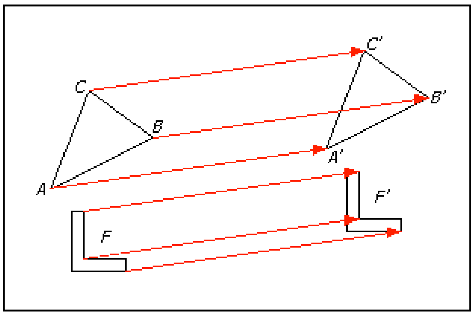
En el taller observé que cuando se ejecutaban los movimientos los estudiantes analizaban e inmediatamente expresaban el tipo de movimiento, así como hacia dónde va dirigido éste. Pero la dificultad radicaba en el momento de adicionar números enteros, y la aplicación correcta de los signos.

Para resolver el punto 4 del taller (hallar la traslación) ellos debían trasladar una figura, teniendo en cuenta el punto P de coordenadas (x, y) en el plano cartesiano, y asociar "V" que era la dirección hacia donde se debía trasladar la figura. De manera que podía, identificar, con la ayuda de la teoría anexada en el taller, una traslación como una adición de matrices y columnas asociadas a cada vértice, con la matriz asociada al vector de traslación.

Respecto a este tópico matemático, Fonseca (2006, memorias 4, 5 y 6) menciona las siguientes propiedades de las traslaciones: cuatro puntos *P*, *Q*, *S y R* forman el paralelogramo □*PQRS* si y sólo si traslaciones SR y PQ son iguales.

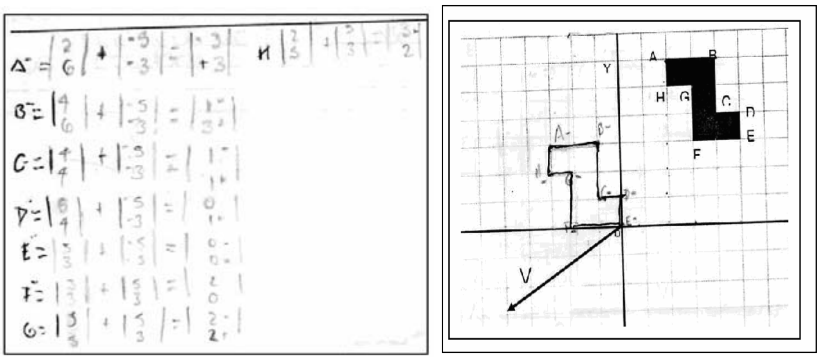


La composición es una operación binaria en el conjunto de las translaciones; la composición de traslaciones es asociativa, conmutativa e inyectiva.



En las ejecuciones de las actividades de este taller se hicieron unas propuestas matemáticas así: dado V= (-5,-3) para trasladar el pentominó “Z”. Los estudiantes tenían que localizar cada vértice del pentominó, y de acuerdo a ese vértice debían adicionar la matriz asociada a V de traslación, obteniéndose los resultados de la siguiente figura:

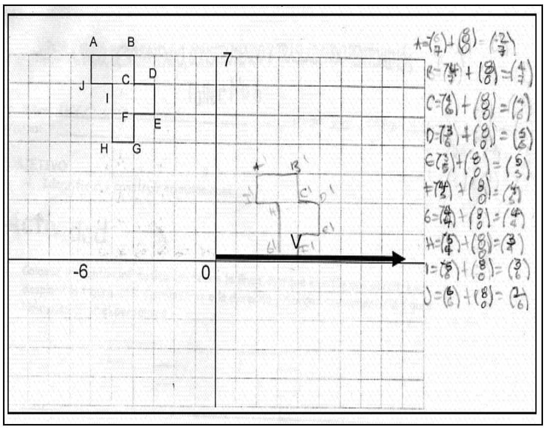
Figura 32. Ejercicio de Carlos A. Sanabria sobre traslaciones



En el ejercicio anterior se observa claramente cómo el estudiante busca las coordenadas correspondientes a cada vértice, adicionándole la matriz a trasladar (V), y el resultado fue el gráfico derecho de la Figura 40, en donde se ve que todos los puntos quedaron paralelos al vector.

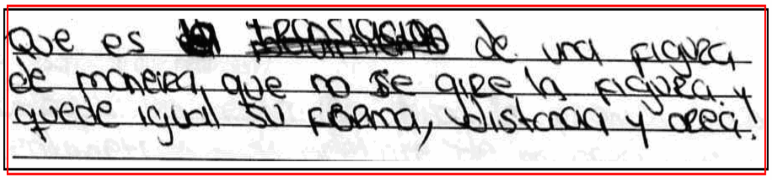
Ahora, mirando el ejercicio desarrollado por Diego Villamizar, observé que las operaciones fueron bien ejecutadas, pero no tuvo en cuenta el signo y al graficar la hizo al lado de la magnitud a trasladar, es decir, el estudiante no tuvo en cuenta el resultado de la matriz.

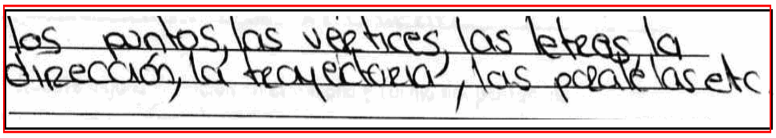
Figura 33. Ejercicio de traslación de Diego Villamizar



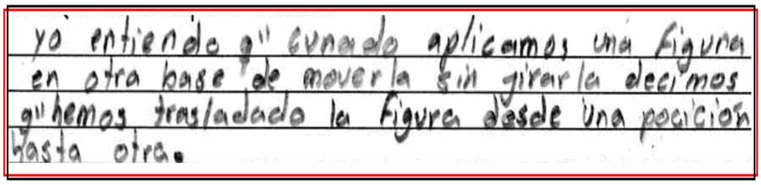
Otra de las grandes dificultades que presentaron de los estudiantes fue es la ubicación de las coordenadas en el plano cartesiano. La aplicación de los signos, si es a la derecha o a la izquierda, es la gran dificultad que es posible superar mediante la ejercitación continua y la maduración cognitiva.

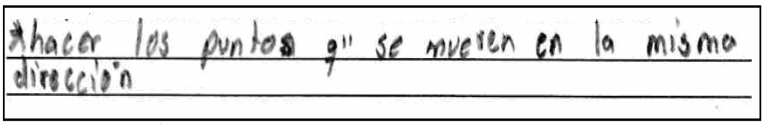
La parte final de este Taller VI recogió las conclusiones de los estudiantes sobre las nociones estudiadas y que se introdujeron como preguntas así: ¿Qué es traslación? ¿Cuáles propiedades permanecen invariantes? Y estas fueron sus respuestas:


Que es ~~TRASLACION~~ de una figura de manera que no se gire la figura y quede igual su forma, distancia y área.


los puntos, las vertices, las letras, la dirección, la trayectoria, las paralelas etc

Mariana del Carmen Torres; Taller No. 6, 30/11/2006


yo entiendo q'' cuando aplicamos una figura en otra base de mover la sin girarla decimos q'' hemos trasladado la figura desde una posición hasta otra.


hacer los puntos q'' se mueven en la misma dirección

Nicolás A. Vera; Taller No. 6, 30/11/2006

Finalmente, satisfactoriamente tras todo un largo proceso didáctico dirigido, los estudiantes, como se puede notar en la lectura de sus conclusiones, pudieron concluir claramente las propiedades invariantes en traslaciones visualizándolas y conceptualizándolas que era el objetivo de esta investigación.

CONCLUSIONES

La anterior experiencia investigativa de aula realizada en el Colegio Nieves Cortés Picón del Municipio de Girón pretendió dar respuesta a una de las grandes inquietudes sobre la necesidad de diseñar procesos pedagógicos geométricos y matemáticos que contribuyan al desarrollo de la inteligencia espacial y del pensamiento matemático.

La propuesta metodológica corrobora la importancia del juego en el aula para potenciar habilidades y destrezas que, en el caso del poliominós, motiva una acción didáctica creativa y eficaz para el desarrollo del pensamiento espacial. Los aportes teóricos sobre esta didáctica potenciaron la perspectiva de la investigación, no solo como una guía para navegar sino también para despertar la iniciativa creadora del investigador y de los estudiantes como quedó registrado en sus ejecuciones y que, sin lugar a dudas, servirán para elevar la percepción de los estudiantes sobre el mundo físico, la naturaleza, el arte y la cultura.

Además, el Juego de Poliominós significó un cambio de percepción de los estudiantes en relación con la asignatura; el enriquecimiento de experiencias colectivas e individuales; el desarrollo de procesos cognitivos como el inferencial y el crítico intertextual que les permitió reconocer los diferentes contextos y los espacios que los conforman.

En cuanto al aspecto lúdico, que fue realizado con la totalidad de los estudiantes (48), mostró la viabilidad del juego para resolver problemas cognitivos de urgente solución en el aula con relación a la geometría permitiendo, además, un alto grado de interlocución.

Por otro lado, el diseño de los talleres cumplió una secuencia muy puntual atendiendo al movimiento de lo simple a lo complejo para que la didáctica fuera concluyente en los resultados. El juego de poliominós permitió a los estudiantes y al docente investigador interactuar en un ambiente fraterno y dialógico.

En relación con las argumentaciones de los estudiantes así como los procesos de verbalización, la investigación muestra no sólo el enriquecimiento del vocabulario, puesto que los estudiantes utilizaban los términos técnicos, sino además los correctos procesos de pensamiento que se esperan en los estudiantes del grado séptimo de la Educación Básica.

No obstante, dado que algunos de los estudiantes que participaron en la muestra investigativa superaran los 13 años, edad para el grado, se puede decir que todos los 48 estudiantes pasaron por un proceso de maduración intelectual.

En cuanto a la investigación, centrarla específicamente en las transformaciones rígidas en el plano cartesiano, entre ellas, traslaciones, rotaciones y simetrías al igual que sus propiedades invariantes, permitió recorrer en una dinámica muy rica de manipulaciones, ejecuciones, diagramas, polémicas, aportes, controversias en las que el mundo físico entró al aula con sus propiedades y características esenciales y se fueron encontrando sus secretos.

En los procesos de trasladar y reflejar figuras, las percepciones de los estudiantes se enriquecieron porque comprendieron que las transformaciones se parecen, que son equivalentes o que pueden producir el mismo efecto. Tal vez veían que darle dos o tres vueltas dejaba al objeto como si no se le hubiera hecho nada. Pero comprendieron que lo que ocurría era una rotación y, que a su vez, al poner los espejos dos veces paralelamente era igual a una traslación.

Hay que resaltar que para la interiorización de los procesos en los que se enmarca la investigación fue necesario realizar una serie de movimientos corporales y la manipulación de los poliominós para, poco a poco, llegar a un plano más formal en el que se pudieran desarrollar situaciones y problemas inherentes al tema.

Enmarco la intención de lograr un trabajo que apunte a que los estudiantes comprueben y utilicen la presencia de las simetrías en el mundo que nos rodea. Por ejemplo, si los estudiantes observan paneles de azulejos en diferentes sitios, esa visualización les permitirá ver cómo las simetrías pueden organizar la vida

Finalmente, de la investigación sale una propuesta didáctica que pretende interesar a todos los docentes del área que tengan inquietudes y quieran responsablemente asumir la enseñanza de las matemáticas y la geometría. La manipulación de materiales concretos y la observación investigativa del mundo físico y la naturaleza contribuye a mejorar el ambiente de aula y la relación maestro –estudiante mediante una acción dialógica y lúdica.

BIBLIOGRAFÍA

BÁEZ, Mª & HERNÁNDEZ, S. (2002). *El uso del material concreto para la enseñanza de la matemática*. Recuperado el 20 de diciembre de 2006 de http://www.redexperimental.gob.mx/descargar.php?id=229.

BOZAL, J., GONZÁLEZ, F., González, et al. (1994). Taller de Matemáticas. Madrid: Centro de Publicaciones MEC.

Brandreth, G. (1990). *Acertijos Fantásticos*. México: Selector.

Cattaneo, A. (2001). *Transformaciones Rígidas*. Hinrinschen: Instituto Politécnico Rosario. Recuperado el 16 de diciembre de 2006, de http://www.educavirtual.com.ar/aulazmat.htm.

DEL OLMO, M., et al. (1993). *Superficie y Volumen: ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Editorial Síntesis

DIENES, Z. & Holding, E. (1969). *La geometría a través de las transformaciones*. Barcelona: Editorial Teide S.A.

FONSECA, J. (2006). Taller Post Foro: transformaciones Geométricas en el Plano. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

FREIRE, P. (2002). *Pedagogía de la Autonomía*. México: Siglo XXI editores. Sao Pablo.

GARDNER, M. (1972). *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*. Madrid: Alianza.

GORGORIO, N. (1994). *Elección de Estrategias Visuales en los problemas de rotaciones.* Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de

Matemáticas. Recuperado el 24 de enero de 2007 de http://www.adabyron.org/estatica/boletin20_4.htm.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá: Panamericana Formas e Impresas S.A.

OSORIO, R. (2002). *Hacia una Didáctica de la Geometría*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

ROA, S. (2004). "Didáctica de la Geometría – Explorando y Descubriendo". Tesis de Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

RODRÍGUEZ, C. (2004). "Figuras Geométricas: relación entre sus medidas y su dimensión". Tesis de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

SIÑERIS, L. & Santinelli, R. (2003) "Transformaciones rígidas con Cabri Geómètre II: Una aproximación a La Teoría Axiomática. Argentina: Universidad Nacional de Comahue. Recuperado el 16 de diciembre de 2006, de http://www.union-atematica.org.ar/reunio_anual/anteriores/cursos_pro04/cabri.pdf.

ANEXOS

ANEXO 1. TALLER 0: FUNDAMENTOS DE TRANSFORMACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO CARTESIANO

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas

Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

TALLER: FUNDAMENTOS DE TRANSFORMACIONES RIGIDAS EN EL PLANO CARTESIANO

TALLER No 0

Nombre____Curso:__________

Código:_______________________Fecha: ____________________________

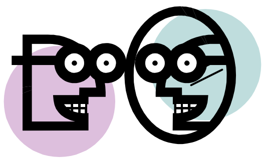
OBJETIVO

Identificar conceptos previos sobre rotaciones, traslaciones y simetrías.

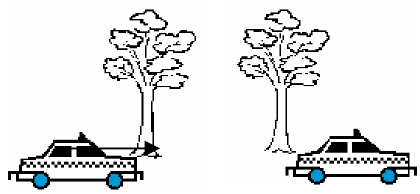
INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada pregunta y piense antes de contestar.

1. Según las Figuras que se muestran a continuación, ¿qué observa? Escribe tu respuesta.

a.

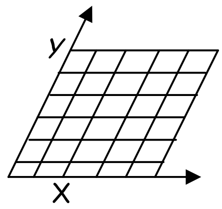


b.



c.

d.



2. ¿Qué entiendes por plano cartesiano?

____

3. ¿Qué entiendes por simetría?

____

4. ¿Qué entiendes por traslación?

____

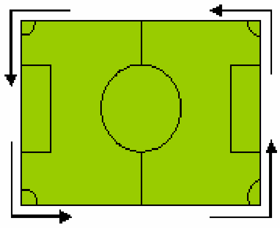
5. ¿Qué entiendes por rotación?

____

6. ¿Qué entiendes por figuras rígidas?

____

DIRECCIONES Y ANGULOS



Cuando andamos a lo largo de una frontera cerrada y permanecemos mirando hacia adelante constantemente, estaremos mirando hacia diferentes lugares al hacer el recorrido. Decimos que al andar a lo largo de la frontera, cambiamos de *dirección.*

Si nuestra frontera es un polígono, andamos en línea recta mientras lo hacemos a lo largo de los lados rectos del polígono y respectivamente tenemos que girar al llegar a un *vértice.*

7. Dibuje figuras (con líneas rectas como frontera y varios lados) y señala los vértices que tengan una abertura:
a. Más de $\frac{1}{4}$ de vuelta.
b. Menos de $\frac{1}{4}$ de vuelta.

8. Señala cada vértice de cada polígono en las que gire exactamente $\frac{1}{4}$ de vuelta.

9. Gira las figuras $\frac{1}{2}$ vuelta y observa. ¿Qué sucedió con el polígono? ¿Cuál fue su cambio?
____
____

10. ¿Qué es un ángulo? ¿Dónde puedes encontrarlos? Da ejemplos.
____
____
____

11. ¿Un giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta se llama ángulo recto? ¿Por qué? Justifique tu respuesta.
____
____
____

ANEXO 2. TALLER No. 1: ENCONTRANDO POLIOMINÓS

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Édgar Antonio Gutiérrez Zapata

ENCONTRANDO POLIOMINÓS
Taller No 1

Nombre: ______________________________ Curso: ________________
Código: ___________________Fecha: ______________________________

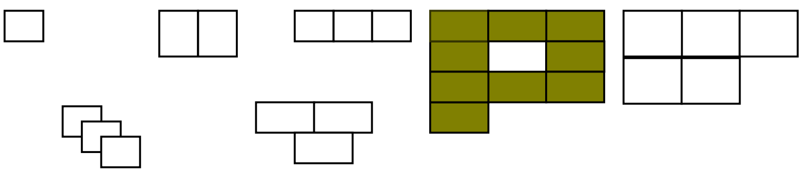
OBJETIVO
Identificar y construir las características principales de los poliominós.

Introducción: Jugar con poliominós es como jugar con rompecabezas componiendo diversas Anexos. Este juego es una fuente de problemas de inteligencia con gran sabor matemático, algunos de ellos rápidos de resolver y otros tan complejos que hasta el día de hoy no se les ha encontrado respuesta.

Algo de historia: La historia de los poliominós comenzó en 1954 cuando el matemático norteamericano Salomón W. Golomb publicó su artículo *Checker Board and Polyominoes* (Tableros de Damas y Poliominós). Más adelante Martín Gardner ha publicado múltiples artículos sobre las ricas posibilidades que ofrecen los diferentes poliominós.

¿Qué es un poliominó? Los poliominós son polígonos construidos a base de unir cuadrados unitarios a lo largo de sus lados. Desde el punto de vista geométrico, un solo cuadrado, lo llamamos monominó de la unión de dos cuadros lo denominamos dominó podemos llamar triminós a la unión de tres cuadrados, tetraminós a la de cuatro y así sucesivamente, pero formalmente se pueden definir como un conjunto de cuadrados conectados entre sí por uno de sus lados, de tal modo que no queden huecos en el interior de la estructura resultante.

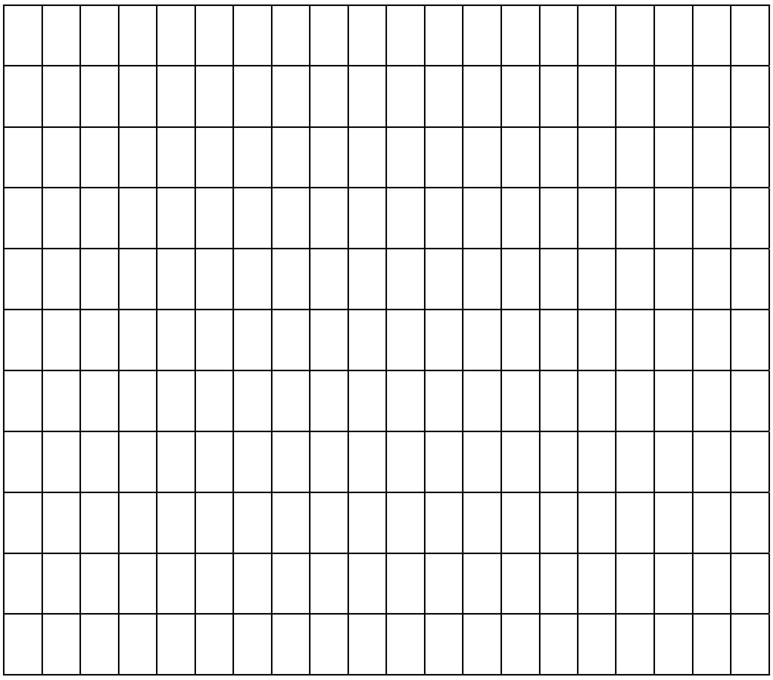
1. Según la definición de poliominó, identifique ¿Cuáles de las siguientes Anexos son poliominós?



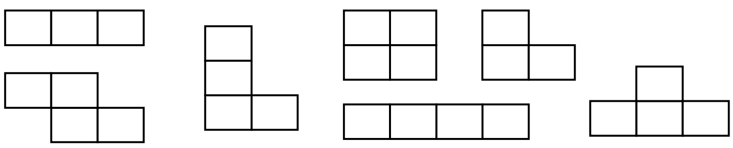
2. Complete la siguiente tabla:

Número de cuadrados 1	No. de formas diferentes de unir los cuadros	Nombre de los poliominós
2		
3		
4		
5		

3. Dibuje cada uno de los poliominó que encontró en el cuadro anterior.

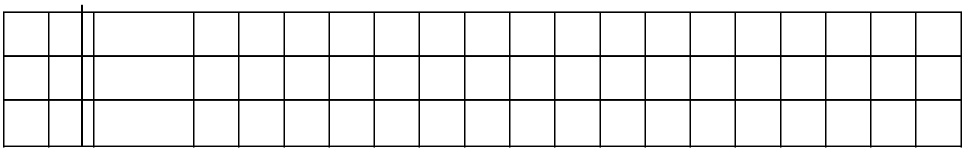


4. ¿Con cuáles de los siguientes poliominós, se puede formar un cuadrado? ¡Hazlo de varias maneras!

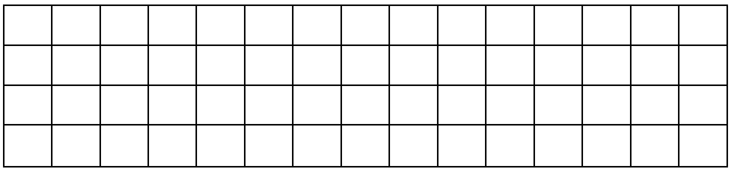


UTILIZANDO EL JUEGO DE LOS PENTOMINÓS

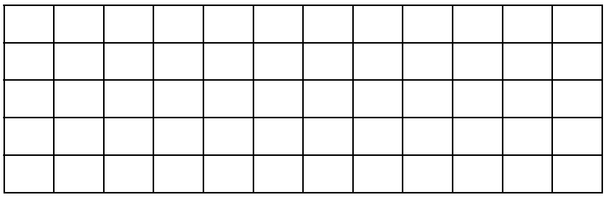
5. Con los pentaminós que son fáciles de recordar, pues coinciden, sus formas con las últimas letras del abecedario T, U, V, W, X, Y, Z y la palabra FILIPNO; intenta descubrir con los doce pentaminós cada uno de estos rectángulos.



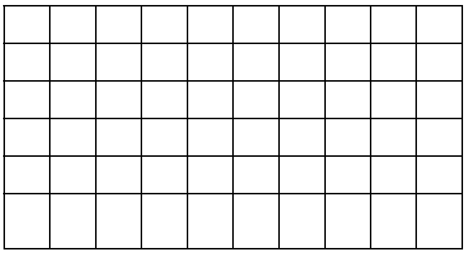
20x3



15x4



12x5

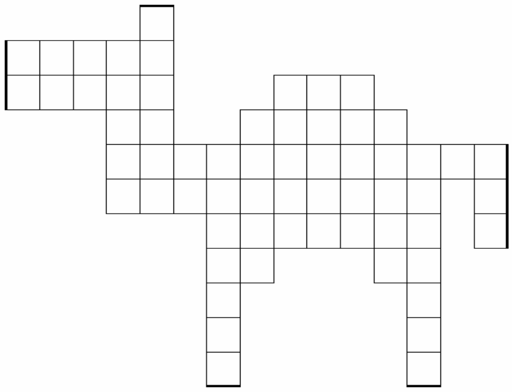


10x6

a. ¿Qué observas en cada uno de los rectángulos?

b. ¿Cuál es su semejanza?

6. Recubre la figura con los Pentaminós. ¿A qué figura se te parece?

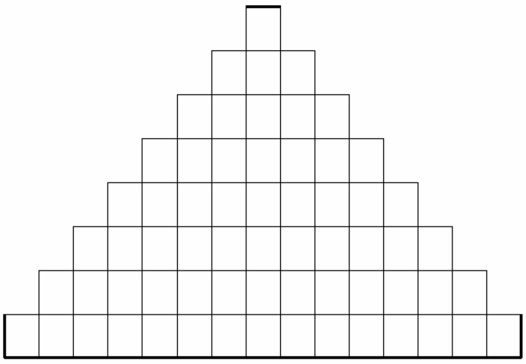


Justifica tu respuesta

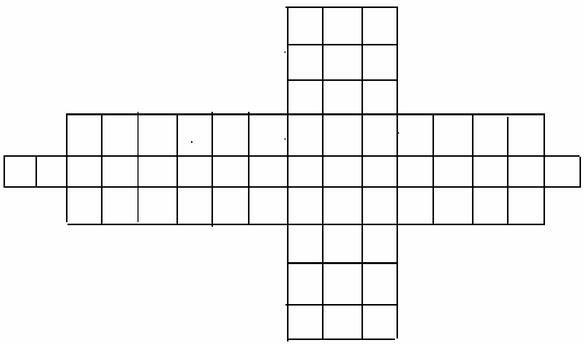
____

____

7. En la pirámide hay 64 cuadrados que pueden construirse con los doce Pentominós y el tetraminós cuadrados de dos por dos.



8. Recubrir la cruz con los doce pentaminós.



JUEGO PARA DOS JUGADORES

En este juego utiliza un tablero similar al tablero de ajedrez y dos colecciones de pentominós (uno para cada jugador), de distinto color cada uno. Los cuadrados del tablero deben ser iguales que los cuadrados de los pentominós.

El juego consiste en ir colocando por turnos, un pentominó en el tablero de modo que no se superponga ninguna pieza ya colocada. La pieza colocada en el tablero no se puede retirar ni cambiar de lugar. Gana el jugador que impide a su oponente colocar una de sus piezas.

Variantes del juego:

a. Con el mismo tablero y solo una colección de los doce pentominós, que se dejan sobre la mesa, cada jugador en su turno toma un pentominó para colocar sobre el tablero. Gana el jugador que impida a su oponente colocar una pieza. Si se han colocado las doce piezas sobre el tablero, el juego quedaría "en tablas", es decir, empate.
b. Con el mismo planteamiento que en el apartado a. pero distribuyendo aleatoriamente 6 pentaminós a cada jugador.

ANEXO 3. TALLER No. 2: RECUBRIENDO Y ENCONTRANDO

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

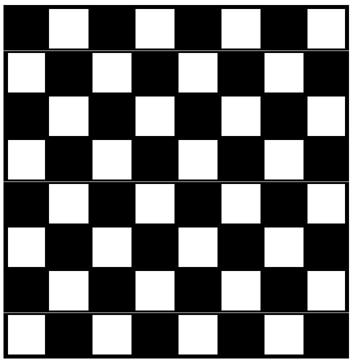
RECUBRIENDO Y ENCONTRANDO
Taller No 2

Nombre: ______________________________________Curso: _____________
Código: _______________________Fecha: ___________________________

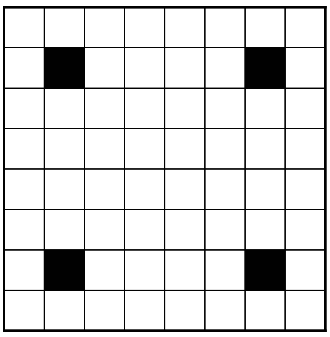
OBJETIVO

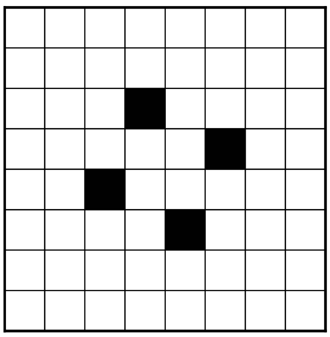
√ Adquirir habilidades y destrezas en el manejo de los poliominós

1. Utilizando monominós, dominós, triminós, tetraminós y pentominós, recubre el tablero de ajedrez.

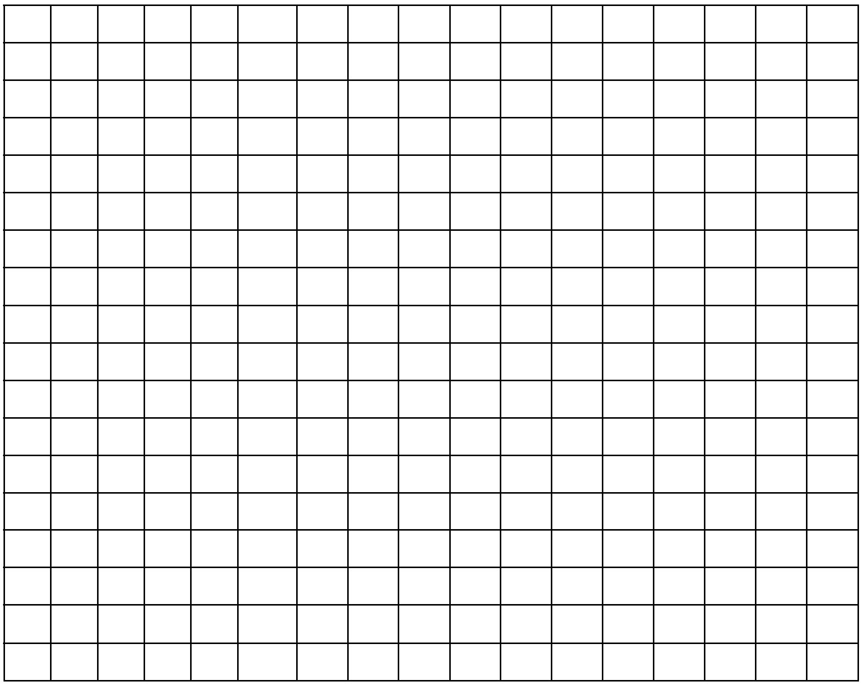


2. Con los doce pentaminós y utilizando todos una sola vez, recubre estas figuras. Deben quedar sin ocupar los cuadrados sombreados

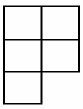


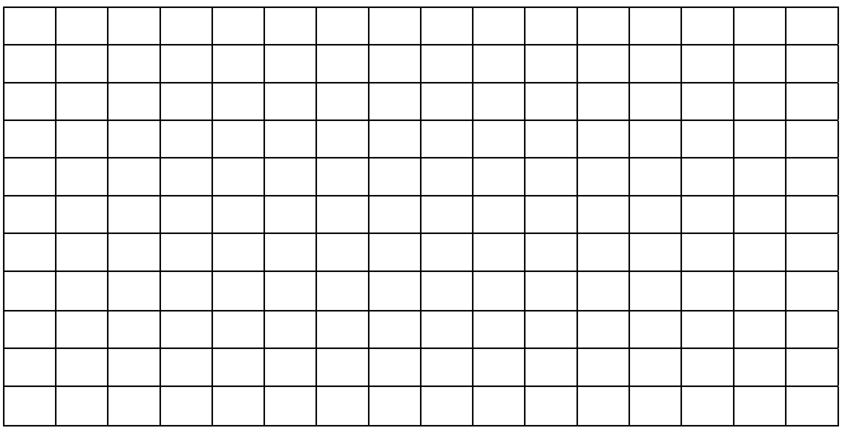


3.¿Que otros recubrimientos puedes hacer utilizando los doce pentominós? ¡Descúbrelos!!

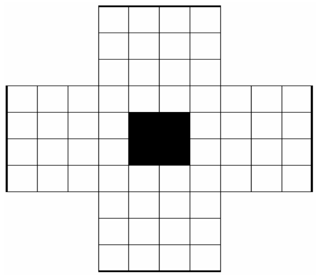


4. Dado el siguiente pentaminó, y utilizando nueve pentominós diferentes es posible triplicarlo, es decir, construir un modelo a escala tres veces mayor que sea el triple que la del pentaminó dado. Anímate hacerlo ¡Tú puedes!





5. Recubra la siguiente figura con los 12 pentominós. Utiliza solo una vez cada pentominó. ¡Ánimo, sea creativo!



6. Escoja un pentaminó, y utilízalo varias veces para recubrir la figura uno. Ahora escoja otro pentominó y utilízalo varias veces hasta recubrir la figura dos y con otro diferente recubra la figura tres. ¡Encuéntralos!

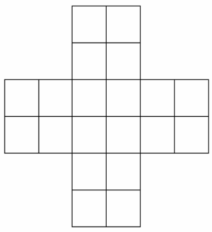


Figura 1

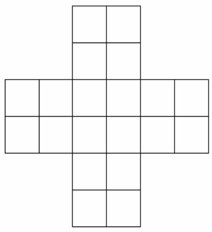


Figura 2

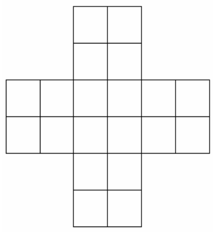


Figura 3

7. Las siguientes figuras están conformadas por un pentaminó varias veces (cada figura por un pentaminó diferente) ¡Descúbrelo! Y coloréalo.

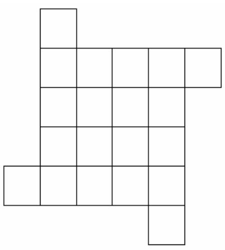


Figura 1

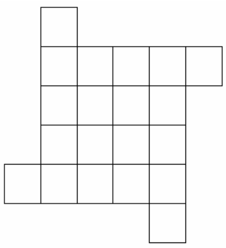


Figura 2

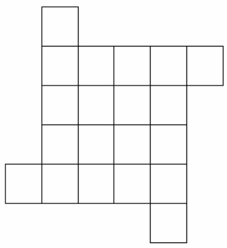
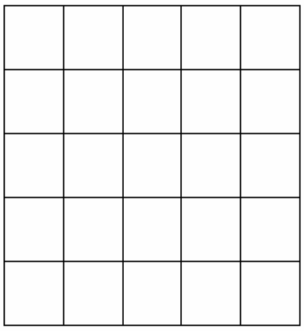
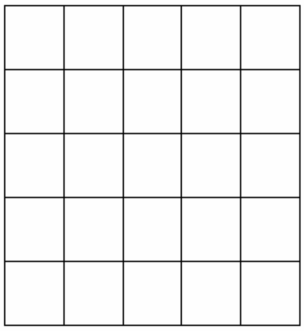


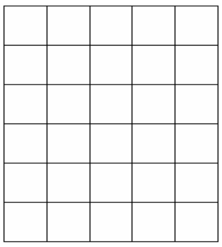
Figura 3

8. Se pueden combinar ciertos pentominós con los cinco tetraminós para formar un cuadrado de 5x5. ¿Cuántos pentominós diferentes se pueden utilizar para recubrir el cuadrado de 5x5? Encuentra dos soluciones- ¡ánimo!

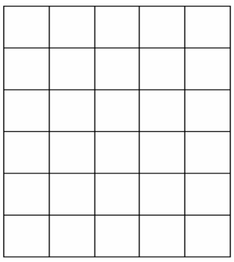




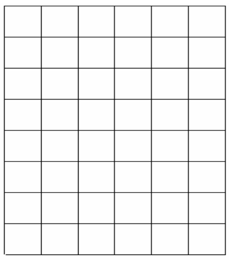
9. Construye cuadrados de 5x6 sin línea de fractura (con los dominós construya los cuadrados que no presenten líneas de fractura, es decir, que no tengan líneas totalmente horizontales ni verticales).



5X8



5X6



6X8

ANEXO 4. TALLER No. 3: ESTUDIO DE GIROS PARTICULARES Y SU RELACIÓN CON GRADOS Y ÁNGULOS

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

ESTUDIO DE GIROS PARTICULARES, Y SU RELACIÓN CON GRADOS Y ÁNGULOS

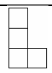
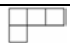
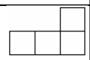
Taller No 3

Nombre:____Curso:________
Código: _________________Fecha: _________________________________

OBJETIVO
Realizar giros a través de grados y ángulos.

Materiales a utilizar

Dos espejos y un juego de pentominó
Algunos diagramas "estado-operador-estado" por ejemplo un poliominó puede estar en una de las cuatro posiciones siguientes:

	POSICION A: En posición normal
	POSICION B: En posición acostado hacia la derecha.
	POSICION C: En posición contraria a la normal hacia abajo.
	POSICION D: En posición acostado hacia la izquierda.

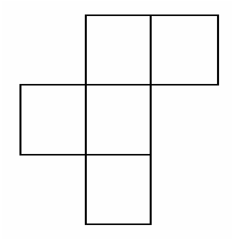
Por lo tanto podemos mover el "tetraminó" desde cualquier posición mediante los siguientes movimientos:

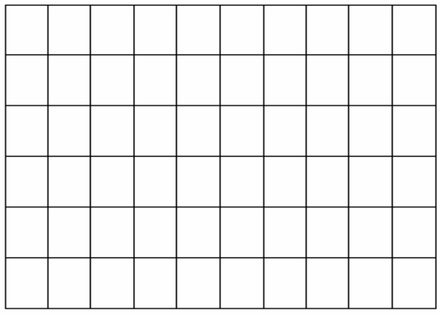
a. Girarlo la vuelta completa.
b. Girarlo $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido de las agujas del reloj.
c. Girarlo media vuelta.
d. Girarlo $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Cualquier composición de dos cualesquiera de estos movimientos es equivalente a uno de los cuatro. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido opuesto al de las agujas de un reloj seguido de otro $\frac{1}{4}$ de vuelta en el mismo sentido, es equivalente a media vuelta. $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido opuesto al de las agujas del reloj seguido de media vuelta es equivalente a $\frac{1}{4}$ de de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, etc.…

Actividad

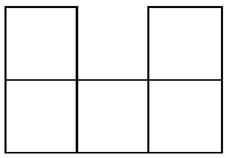
1. Según el pentominó, girarlo media vuelta. Dibuja la figura (después de girarla).



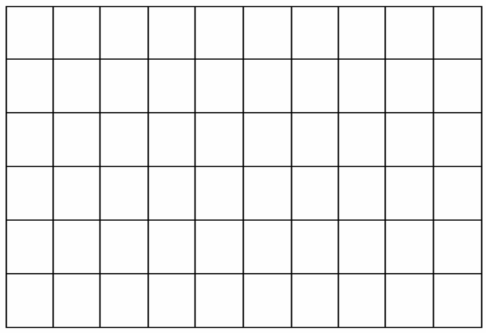


Figura

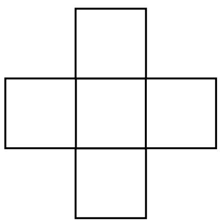
2. Toma el pentominó que se muestra en la figura y gírelo $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj. Dibujado en la cuadrícula después de girarlo.

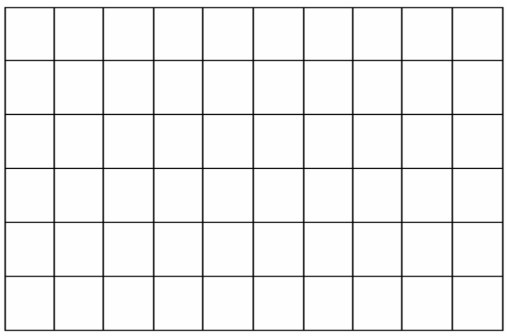


Figura



3. Si giras la figura $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, ¿Qué observas?

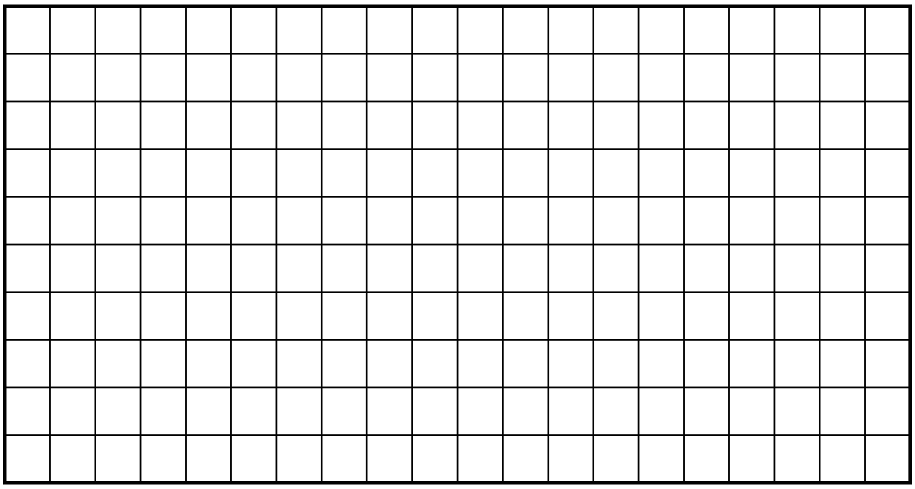




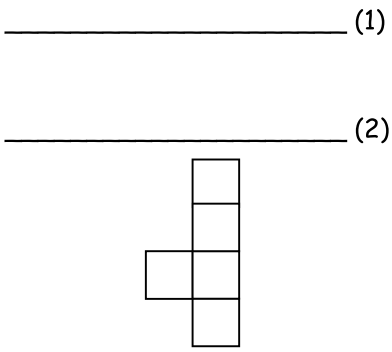
Figura

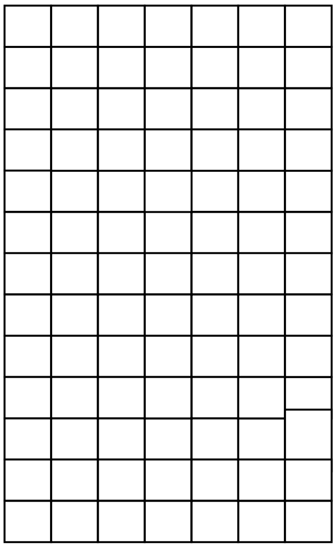
4. Toma un pentominó cualquiera. Muévelo según las especificaciones y dibuja en la cuadrícula la posición inicial y la posición final.

a. Gírala la vuelta completa.
b. Gírala $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido de las agujas de un reloj.
c. Gírala media vuelta
d. Gírala $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido contrario de las agujas de un reloj.



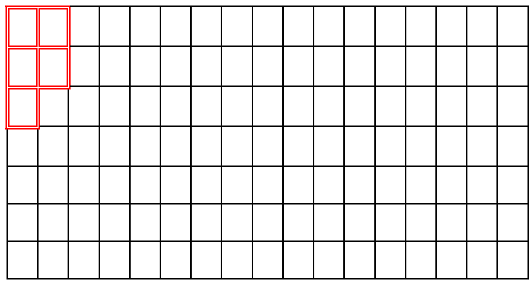
5. Sí colocas un espejo sobre la línea punteada (1) del pentominó. Dibuja sobre la cuadrícula lo que ves en el espejo y vuelva a colocar el espejo sobre la línea punteada (2). Dibuja lo que ves en el espejo con respecto a la primera y última figura. ¡Dibújalas! ¿Qué giro dio la figura?





6. Si vuelves a girar la figura otro $\frac{1}{4}$ de vuelta en el mismo sentido de las agujas del reloj, ¿que observas? ¿Qué puedes concluir?

7. Señala y dibuja el pentominó en los que gire exactamente $\frac{1}{4}$ de vuelta.



8. La amplitud del cambio de dirección, se llama ángulo. Un giro de $\frac{1}{4}$ de vuelta se llama ángulo recto (90º).

a. ¿Cuantos giros de un grado caben en media vuelta?

b. ¿Cuántos giros de un grado caben en una vuelta completa?

c. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres cuartos de vuelta?

d. ¿Cuántos giros de un grado caben en un octavo de vuelta?

e. ¿Cuántos giros de un grado caben en tres octavos de vuelta?

Construye una tabla con las respuestas a estas preguntas, poniendo en una columna los signos de un grado y en otra el tipo de giro.

ANEXO 5. TALLER NO. 4: MANIPULANDO, ENCONTRANDO Y DESCUBRIENDO SIMETRÍAS

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas

Prof. Édgar Antonio Gutiérrez Zapata

MANIPULANDO, ENCONTRANDO Y DESCUBRIENDO SIMETRÍAS

Taller No 4

Nombre:___________________________Curso: ______________

Código:_________________________Fecha: ________________

OBJETIVO

Identificar, encontrar, construir y clasificar simetrías.

Actividad

MATERIALES: Espejos y un juego de Pentominó.

1. Coloca un espejo en cada pentominó a la derecha, arriba, abajo, a la izquierda y escribe lo que observas con mucha atención.

____

____

____

2. Coloca un espejo verticalmente a la derecha o a la izquierda de cada pentominó. ¿Qué se obtiene en el espejo?

____

____

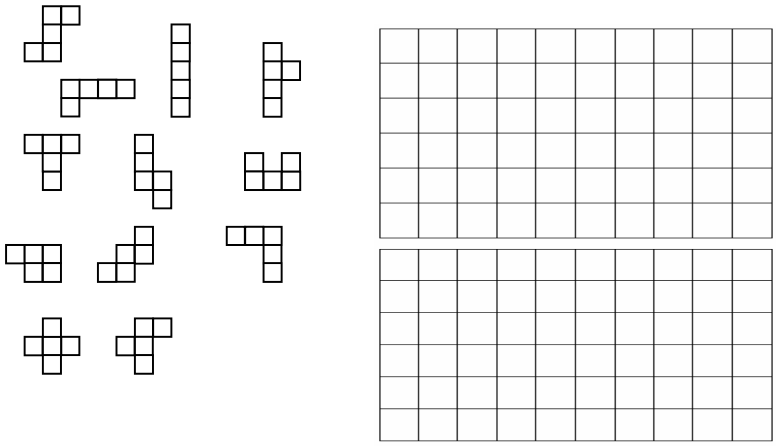
____

3. Coloca un espejo horizontalmente, encima o debajo de cada pentominó. ¿Qué observas en la imagen obtenida en el espejo?

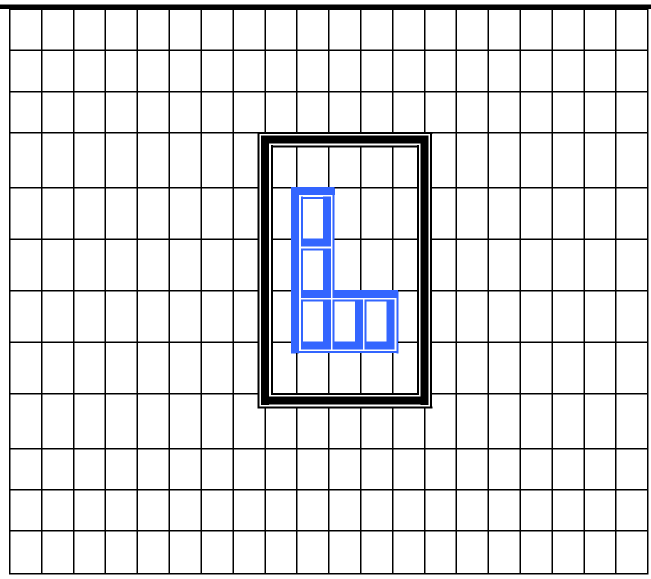
____

____

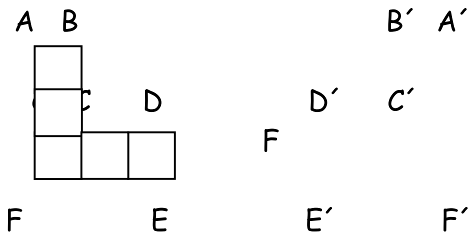
4. Dibuja algunos pentominós y da un giro de 180° o media vuelta. ¿Qué observas con la imagen girada?



5. Nombra cada vértice del pentominó con letras mayúsculas. Coloca un espejo sobre cada segmento y realiza una copia de lo que observas. ¿Qué relación existe entre los pentominós resultantes y los que se obtienen al desarrollar la actividad.



6. Trace una línea de A hasta A\` , de B hasta B\` , de C hasta C\` , de D hasta D´ , de E hasta E, de F hasta F´ y una los puntos de A hasta B, con C, con D, con E, con F hasta formar la imagen.



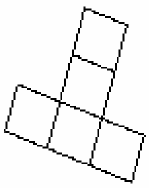
a. Para cada línea ¿Dónde se sitúa el espejo?

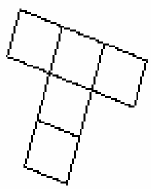
____

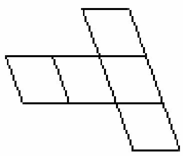
____

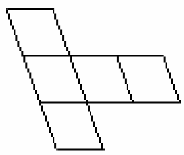
____

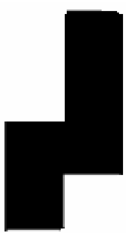
7. Las siguientes figuras fueron reflejadas. Dibuja el eje de simetría o espejo. ¿Dónde pondría el espejo? Traza una línea











RESUMAMOS:
Una figura geométrica plana se llama simétrica si existe una recta para la cual cada punto de la figura tiene otro punto simétrico en la misma figura. La recta que determina la simetría se llama eje de simetría.
Las simetrías respecto a una recta conserva las distancias, los ángulos y las áreas de las figuras. Las simetrías con respecto a una recta también las llamamos simetría axial.

Las simetrías con respecto a un punto también las llamamos simetría puntual o simetría central.
El espejo le representa la línea imaginaria que identifica la imagen de la figura como simétrica.

Simetría Axial

De acuerdo con el trabajo del numeral 1 al 7, responda las siguientes preguntas:

8. ¿Qué elementos permanecen invariantes en esta simetría?
   a. ¿Conserva la misma forma? Explique
   ____
   ____
   b. ¿Conserva el mismo perímetro? Explique
   ____
   ____
   c. ¿Conserva la misma área? Explique
   ____
   ____
   d. ¿Conserva el mismo tamaño? Explique
   ____
   ____
   e. ¿La magnitud de un punto a la recta será igual a la distancia entre el punto y la imagen? Explique
   ____
   ____

9. ¿Cuáles de los pentominós tienen simetrías a la derecha?

____

____

10. ¿Cuáles de los pentominós tienen simetrías de abajo hacia arriba?

____

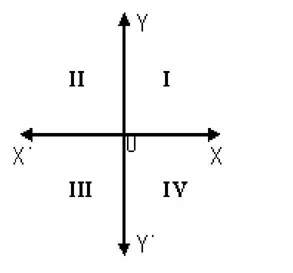
____

11. ¿Cuáles de las piezas tienen simetría de rotación es decir, cuáles de los pentominós permanecen como estaban al ser rotados medio giro (180°)?

____

____

Plano Cartesiano

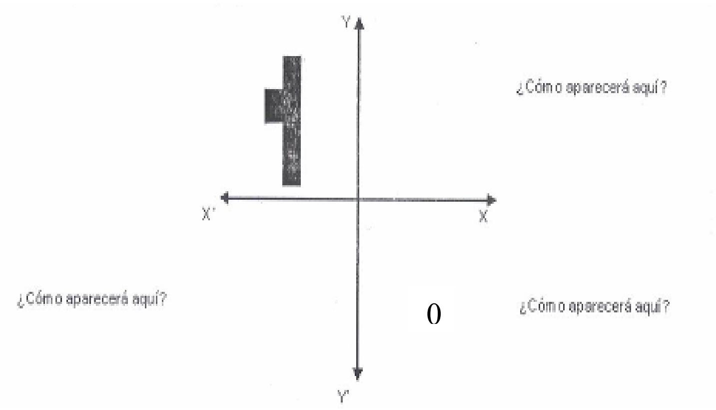


Dos líneas rectas perpendiculares se cortan constituyendo un sistema
de ejes coordenados.
La línea X´0 X se llama eje de las X eje de las abscisas. La línea Y 0 Y´ se llama eje de las Y o eje de las coordenadas.

Los ejes dividen al plano en 4 partes llamados cuadrantes:
X 0 Y es el primer cuadrante.
X´0 Y es el segundo cuadrante.
X´0 Y´es el tercer cuadrante.
X 0 Y´es el cuarto cuadrante.

El origen 0 divide a cada eje en 2 semiejes, uno positivo y otro negativo.
0 X semieje positivo.
0 X´ semieje negativo.
0 Y semieje positivo.
0 Y´semieje negativo.

12. Toma 2 espejos y colócalos formando ángulo recto y coloca el pentominó entre los dos espejos. Dibuja las imágenes que observas reflejadas por los espejos.



Importante que lea:
Los ejes de simetría son rectos a lo largo de los cuales dividen las figuras en mitades iguales. Una figura puede tener uno, dos, tres, cuatro, cinco,… infinitos ejes de simetría.

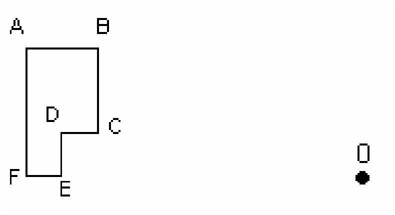
13. Coloque el espejo dentro del pentaminó de tal forma que la parte de la figura dibujada en el papel y la imagen reflejada conformen la figura inicial. Utiliza varios pentominós que usted escoja. ¿Cuál es simétrico y cuál no es simétrico?

14. Dibuja los pentominós y luego recórtalos, has dobleces que al juntarlos coincidan exactamente ¿Cuántos ejes de simetría tiene cada pentominó? Escribe tus conclusiones.

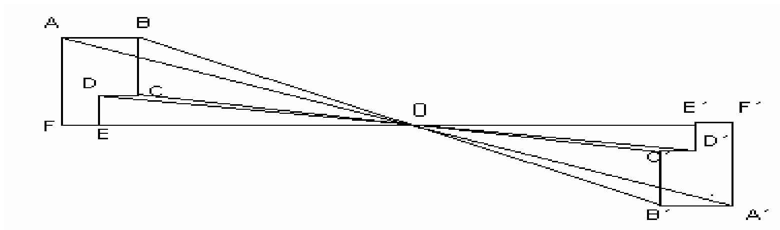
____
____
____

Simetría Central

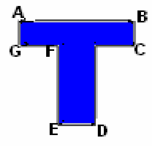
15. Dado el siguiente pentominó y el punto O. Observa como se determina la imagen a través de una simetría central o puntual.



Determina los vértices simétricos A, B, C, D, E, F de la siguiente manera: une A con 0 y prolongue el segmento, determina en la prolongación A´, se tal forma que la distancia de 0 a A sea igual a la distancia de 0 a A´. De la misma manera determine B´, C´, D´,E´,F´. Luego una A´con B´, B´con C´, C´con D´, D´con E´, E´con F´, y F´con A´. Obteniéndose la figura A´ B´ C´D´E´F´ simétrica con la figura ABCDEF con respecto al punto O



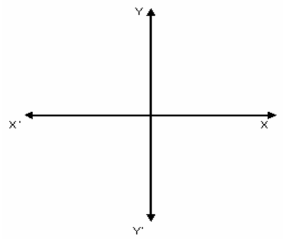
a. Determine el pentominó simétrico T con respecto al punto O
¡Tú puedes!



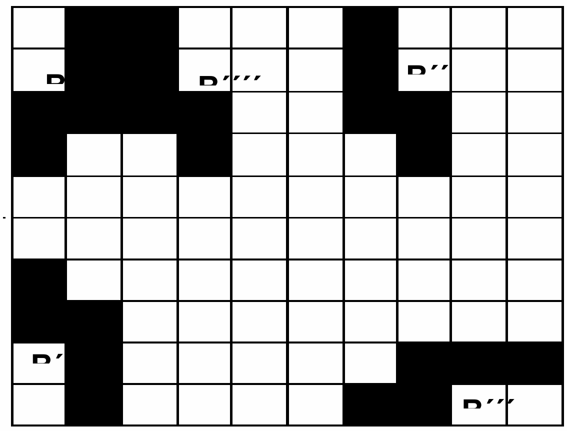
O

16. Ubique los puntos (-3,4), (-3,6), (-4,3), (-4,4), (-5,4). (-5,6)

a. Determina P´ simétrico de P respecto al punto O



17. En el siguiente dibujo hemos transformado el pentominó B en B´, B´´, B´´´ y B´´´´ por medio de cuatro simetrías diferentes



¿Diga qué clase de simetría se le realizó a la figura?

____

____

____

¡BUENA SUERTE!

ANEXO 6. TALLER No. 5: MANIPULANDO, DESCUBRIENDO Y CONSTRUYENDO ROTACIONES

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN
Área de Matemáticas
Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

MANIPULANDO, DESCUBRIENDO Y CONSTRUYENDO ROTACIONES, Taller No 5

Nombre:______________________________Curso:_________
Código:___________Fecha: ____________________________

OBJETIVO
Identificar y construir rotaciones.

PARA TENER EN CUENTA:

Una rotación en el plano consiste en girar una figura alrededor de un punto fijo llamado "centro de rotación" o "eje de rotación", que puede ser cualquier punto de la figura o fuera de ella.

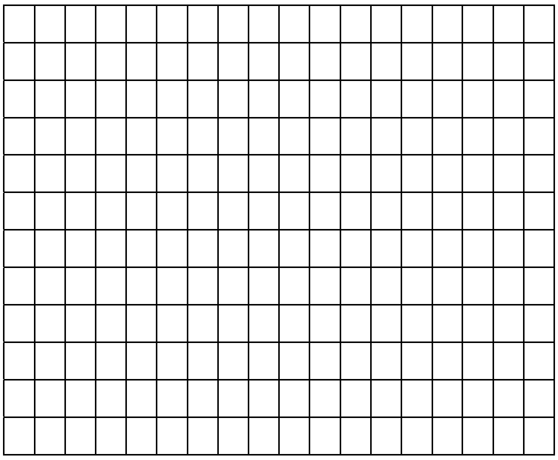
La rotación esta determinada por la amplitud del ángulo que se desea rotar y esta dada en grados o fracciones de vuelta. El ángulo tiene dos sentidos: negativo si se rota en el sentido de las manecillas del reloj y positivo en sentido contrario.

Para determinar la imagen de un punto que se desea rotar, se una el punto con el eje o centro de rotación, a continuación se traza el ángulo indicando cuantos grados se va a rotar y se marca el punto imagen que se une con el centro de rotación, ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o contrario a las manecillas del reloj. Sobre ese lado del ángulo va la imagen del punto que se rota.

Actividad

MATERIALES: Compás, transportador, escuadra, tijeras, un juego de pentominó.

1. Dibuja un pentominó cualquiera en un cartón y recórtalo. Coloca la figura de cartón en la cuadricula y copia la frontera del pentominó sobre el papel. Toma un alfiler y fija un punto en el interior del pentominó y empieza a girarlo alrededor del punto fijo.



a. Observa cuidadosamente si, en algún momento, el pentominó de cartón cubre exactamente la frontera dibujada en el papel. Escribe lo visto.

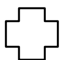
____

____

b. ¿Qué giro has tenido que dar a la figura para alcanzar una posición similar a la inicial? Explica.

____

____

2. Recorta el pentominó  y copia las fronteras sobre la hoja de papel, fija ahora un punto fijo en el interior del pentominó.
   a. ¿Cuántas veces cubrirá la figura de cartón al pentominó dibujado en el papel cuando haya completado una vuelta? Escribe lo que observas.

   ____

   b. ¿Cómo encuentras el centro? Explica claramente.

   ____

   ____

3. Utiliza otros pentominós donde puedas girarlo alrededor de un punto fijo, observando cuidadosamente lo que sucede. Escribe.

____

____

4. Al girar la figura de papel alrededor de un punto fijo ¿Cuántas veces queda igual la figura de cartón al pentominó? Dibújalo en el papel

____

____

5. Coja un pentominó cualquiera, lo dibuja y luego ese mismo pentominó lo recorta y lo hace coincidir con la figura dibujada, ubico un punto fijo y lo roto, dibuja la figura rotada; luego mida el ángulo hecho por la figura rotada. Rótelo nuevamente y dibuje la figura, mida el ángulo, vuelva a rotar la figura, dibújela y mida el ángulo, y así hasta completar la vuelta. Escribe lo que observas.

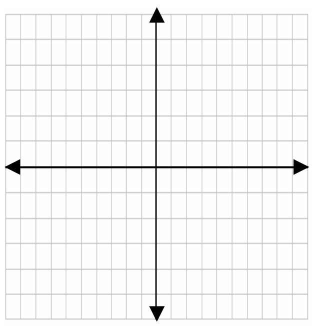
____

____

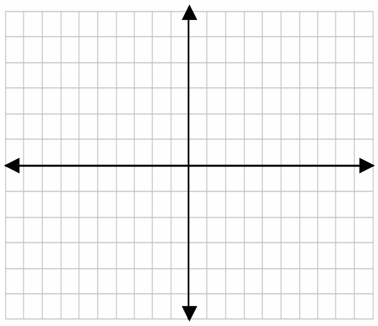
____

6. Recorta un pentominó y ubícalo en el plano cartesiano y dibújalo según las siguientes condiciones.

a. Gira la figura 90° en el mismo sentido de las manecillas del reloj y dibuja la nueva posición (El Punto fijo 0)



b. Tome la misma figura y ubícala en el plano cartesiano como lo hizo inicialmente y dibújala, ahora gire la figura 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj tomando como punto fijo o y dibuja la nueva posición.



¿Qué observas? Explique.

____
____
____

7. Tome un pentominó cualquiera, ubícalo en un sitio del plano cartesiano, dibújalo y rota la figura 180° con respecto al punto de origen 0.

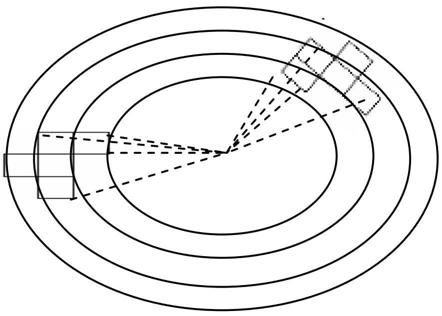
a. Dibuje la nueva figura y escribe que sucedió.

____
____
____

b. Encuentre alguna similitud con otra transformación. Explique.

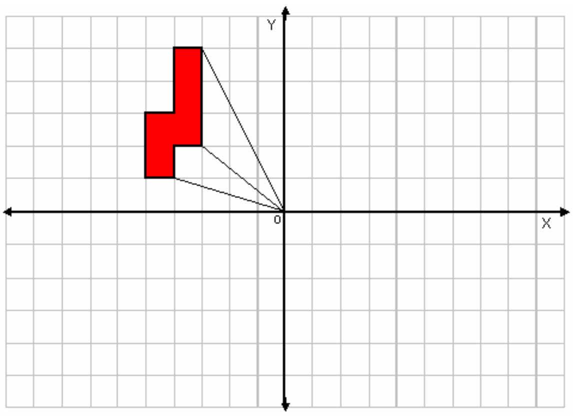
____
____
____

8. El siguiente pentominó ha sido rotado respecto al punto P. Identifique la manera como se realizo esta rotación y mencione cada uno de los elemento que la componen.



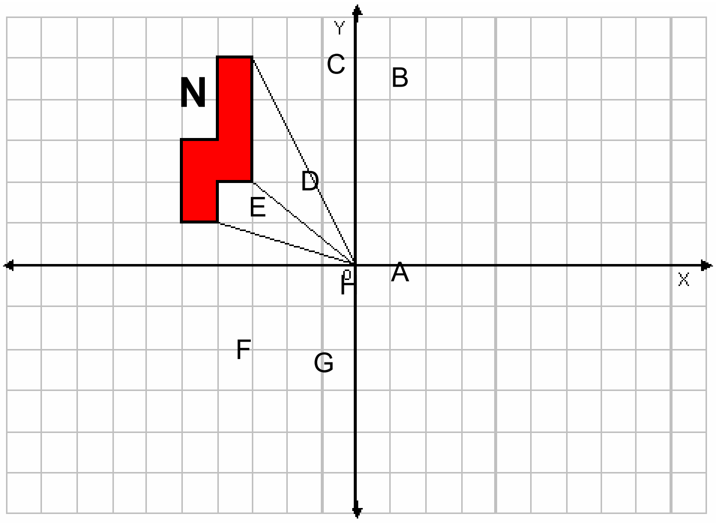
Composición De Rotaciones

9. Según el pentominó ubicado en el plano cartesiano, rótalo 60° en el mismo sentido de las manecillas del reloj con respecto al punto de origen 0. Dibuja la figura rotada y llámala N´. Ahora gira la Fig.ra N´a 210°. Con respecto al mismo punto de origen 0 y dibújala llámala N´´.



Escribe lo sucedido:

10. Si giras la figura 270° en el mismo sentido de las manecillas del reloj y punto de origen 0.



¿Qué sucedió? Compara y escribe lo sucedido.

____

____

____

Concluye

____

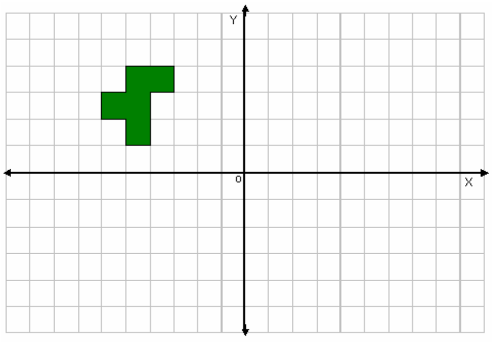
____

____

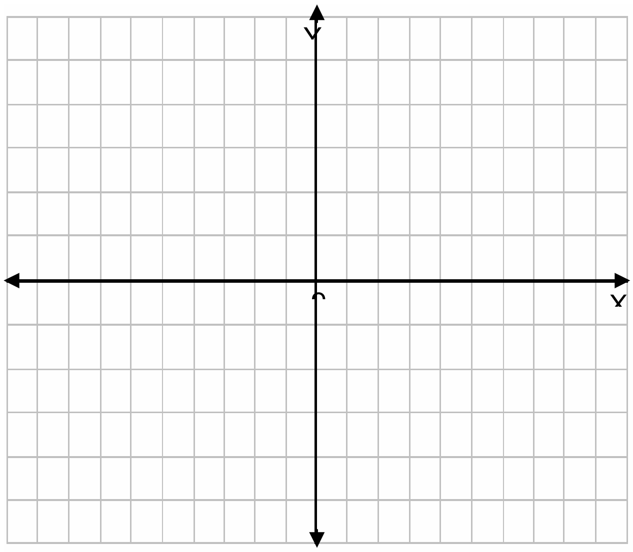
____

____

11. Observa el pentominó y gíralo 60° en sentido contrario a las agujas del reloj. Dibuja el giro. Llámalo F´ (punto de origen 0).



12. Si giras la Imagen F´ 270° en sentido al de las manecillas del reloj, cuyo centro de rotación es 0.



¿Qué sucedió? ____
____

Compara y concluye____
____
____

ANEXO 7. TALLER No. 6: MANIPULANDO, DESCUBRIENDO, CONSTRUYENDO Y TRASLADANDO PENTOMINÓS

COLEGIO NIEVES CORTÉS PICÓN

Área de Matemáticas

Prof. Edgar Antonio Gutiérrez Zapata

MANIPULANDO, DESCUBRIENDO, CONSTRUYENDO Y TRASLADANDO PENTOMINÓS.

Taller No 6

Nombre:____________________________________Curso:__________

Código:______________Fecha:_________________________________

OBJETIVO

√ Identificar y construir translaciones.

Actividad

1. Coloque un pentominó cualquiera sobre la línea, marque el sitio que ocupa, luego desplace la figura unos centímetros a la derecha y marque nuevamente la figura. No debes girar el pentominó.

2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

a. Describe lo que realizaste:

____

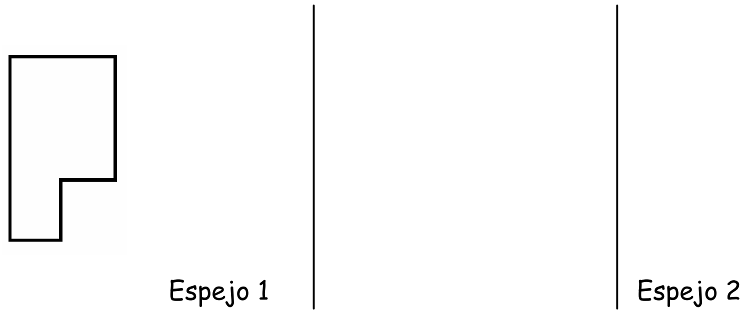
____

b. ¿Existe alguna variación en el tamaño y forma del pentominó?

____

____

2. Coloca un espejo verticalmente cerca al pentominó, veras la imagen de la figura en el espejo 1 dibuja esta imagen. Ahora colocas nuevamente el espejo 2 y dibuja la imagen reflejada.



a. ¿Qué observas en las figuras?

____

____

b. ¿Qué movimientos has realizado con los espejos?

____

____

c. ¿Cuál fue el movimiento final con respecto al pentominó inicial? Anota lo que hayas averiguado.

____

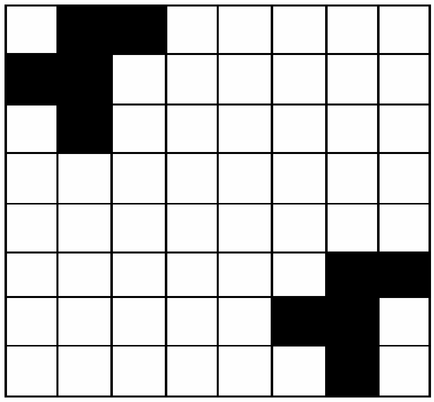
____

Para tener en cuenta:
Cuando aplicamos una figura en otra a base de moverla sin girarla decimos que hemos trasladado la figura desde una posición hasta otra.

En una traslación los vértices de la figura se mueven en la misma dirección y esas trayectorias rectas de los puntos se dicen que son paralelas. Para trasladar polígonos trasladamos sus vértices y redibujamos.

3. El siguiente dibujo muestra dos pentominós idénticos. El pentominó A´ es el resultado de una transformación realizada al pentominó A.

A



A'

Describa con sus palabras como se ha realizado este movimiento.

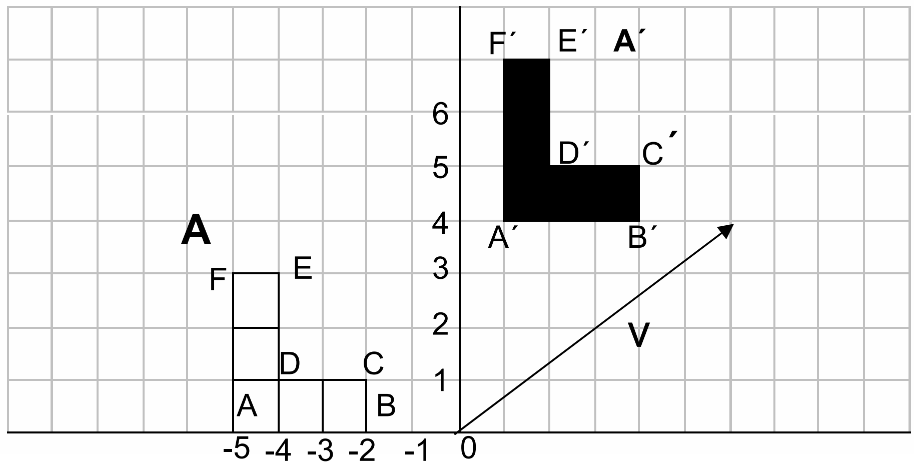
¿Qué tipo de movimiento es?

Para tener en cuenta:

Tenemos el punto P de coordenadas (X, Y) en el plano cartesiano, se le asocia V que es la dirección hacia donde se va ha trasladar la figura, de manera que una traslación se puede identificar como una adición así:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} + \\ + \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V1 \\ V2 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} X + V1 \\ Y + V2 \end{vmatrix}$$

Al trasladar el pentominó A según V = (6.4) resulta el pentominó A´.

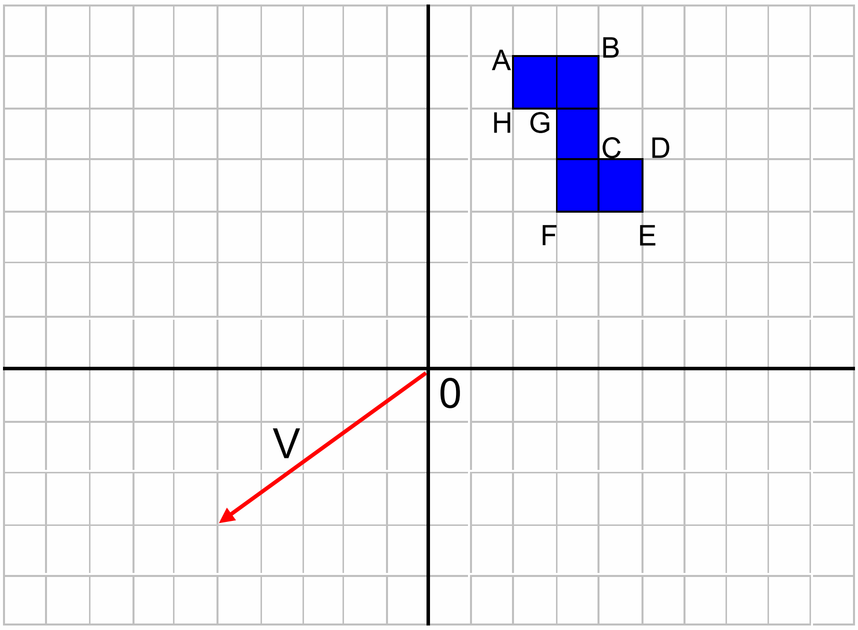


$$D' = \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$E' = \begin{vmatrix} -4 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \end{vmatrix}$$

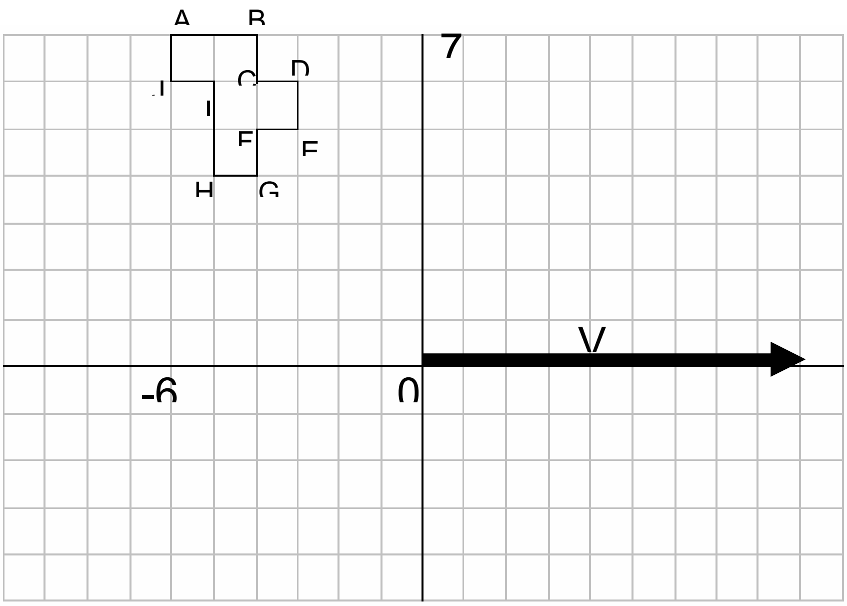
$$F' = \begin{vmatrix} -5 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 7 \end{vmatrix}$$

4. Trasladamos el pentominó 3 verticalmente hacia abajo y 5 horizontalmente a la izquierda: V = (-5, -3)



Explique____
____

5. Traslade la figura 8 horizontalmente a la derecha y 0 verticalmente hacia abajo. ¿Qué elementos son necesarios para realizar una traslación?



6. ¿Qué entiende por traslación?

7. ¿Qué elementos son necesarios para construir una traslación?