Desarrollo de Pensamiento Funcional: Una Experiencia en un Programa de Enriquecimiento Extracurricular

Mónica Adriana Pineda Ballesteros

Trabajo de Grado para optar el título de

Mágister en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes
Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga

2017

DEDICATORIA Y AGRADECIMIENTOS

Principalmente agradezco a Dios, por poner en mi camino la posibilidad de realizar la maestría, además de brindarme la fortaleza mental y espiritual necesaria para afrontar cada reto.

A mi asesora, la doctora Solange Roa Fuentes, quien desde antes de iniciar este proceso estuvo generando en mí ese impulso necesario, por todo su tiempo y dedicación, por la confianza y las múltiples enseñanzas que me han dejado el haber trabajado a su lado, de corazón, ¡gracias profe!

A mi esposo quien ha sido mi motor, mi paño de lágrimas en esos momentos de desespero, quien me ha impulsado a alcanzar metas que ni yo misma creí alcanzar, por su inagotable fe en mi y mis capacidades, por nunca desfallecer a mi lado aún en momentos difíciles, Diego Mantilla has sido mi mejor elección.

A mis familiares, que de una u otra manera han estado apoyándome, brindándome esa voz de aliento que en ocasiones es suficiente para tomar el impulso necesario, a mis 7 hermanos especialmente a Bibiana y mis adorados papás, Margarita y Benjamín, sé lo orgullosos que se sienten por este logro, de su hija la menor.

A mis compañeros de lucha, 4 excelentes personas que también fueron soporte en momentos difíciles y buenos acompañantes de aventuras y momentos de felicidad.

A mis evaluadoras, en especial a la doctora Avenilde Romo por todos los aportes que sin duda contribuyeron significativamente en la evolución de este trabajo.

A mi alma máter, la Universidad Industrial de Santander, por permitirme acceder a un nuevo título, gracias por tanto apoyo.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

LISTA DE APÉNDICES

RESUMEN

TÍTULO: DESARROLLO DE PENSAMIENTO FUNCIONAL: UNA EXPERIENCIA EN UN PROGRAMA DE ENRIQUECIMIENTO EXTRACURRICULAR

AUTOR: MÓNICA ADRIANA PINEDA BALLESTEROS

PALABRAS CLAVE: PENSAMIENTO FUNCIONAL, TALENTO MATEMÁTICO POTENCIAL Y PROGRAMAS EXTRACURRICULARES.

DESCRIPCIÓN:

En este documento se presentan los resultados de una investigación cualitativa, que surgió a partir de la conformación de un grupo extracurricular que busca atender a estudiantes de colegios públicos con edades comprendidas entre los 9 y 14 años, considerados potencialmente talentosos en matemáticas. Este programa recibe el nombre de Grupo Talento Matemático UIS (GTM-UIS), de acuerdo a las características de sus integrantes.

La dinámica de trabajo establecida en dicho grupo está normada por un Marco Institucional, que parte de la posibilidad de potenciar el pensamiento funcional a partir de las relaciones funcionales de Recurrencia, Correspondencia y Covariación, entendidas como categorías de análisis. Como se muestra en el desarrollo de este documento, esta investigación tiene una perspectiva incluyente del talento matemático que contempla la posibilidad de su desarrollo y seguimiento gracias a las condiciones establecidas, en este caso, por el GTM-UIS.

El trabajo de diseño y experimentación se desarrolló durante dos semestres en los que se video-grabaron y se recogieron las producciones escritas. A partir de la primera aplicación surgen unas Categorías emergentes (cuatro momentos) que guían la actividad generada por cada Tarea: 1. Participar de una situación funcional; 2. Centrar la atención en la relación entre las variables identificadas en el primer momento; 3. Registrar los valores correspondientes a las cantidades que varían y 4. Construcción de una expresión.

A partir de los resultados encontrados en esta investigación se espera contribuir al desarrollo teórico y práctico de la Educación Matemática, contribuyendo a la caracterización de grupos extracurriculares, como es el caso del GTM-UIS en el cual fue desarrollada la investigación.

Trabajo de grado
Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa.

ABSTRACT

TITLE: DEVELOPMENT OF FUNCTIONAL THINKING: AN EXPERIENCE IN AN EXTRACURRICULAR ENRICHMENT PROGRAM

AUTHOR: MÓNICA ADRIANA PINEDA BALLESTEROS

KEY WORDS: FUNCTIONAL THINKING, POTENTIAL MATHEMATICAL TALENT AND EXTRACURRICULAR PROGRAMS.

DESCRIPTION:

This document presents the results of a qualitative research, which arose from the creation of an extracurricular group that seeks to serve students of public schools aged between 9 and 14, considered potentially talented in mathematics. This program is called Mathematical Talent Group UIS (GTM-UIS), according to the characteristics of its members.

The work dynamics established in this group is governed by an Institutional Framework, which starts from the possibility of enhancing functional thinking based on the functional relations of Recurrence, Correspondence and Covariation, understood as analysis categories. As shown in the development of this document, this research has an inclusive perspective of mathematical talent that considers the possibility of its development and follow-up thanks to the designated conditions, in this case, by the GTM-UIS.

The design and experiment work was developed during two semesters in which the written productions were videotaped and collected. From the first implementation a number of emerging categories (four moments) arose which guided the activity generated by each Task: 1. Participate in a functional situation; 2. Focus on the relationship between the variables identified in the first moment; 3. Record the values corresponding to the quantities that vary and 4. Construction of an expression.

From the results found in this research it is expected to contribute to the theoretical and practical development of Mathematics Education, contributing to the characterization of extracurricular groups, as it is the case of the GTM-UIS in which the research was developed.

Trabajo de grado
Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa.

Introducción

Iniciar con el desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas es una misión que desde 1998 se ha impulsado, cada vez con más empeño. Esto en parte, gracias a los trabajos realizados por Kaput quien da inicio a una nueva corriente llamada *Early Algebra*. El principal objetivo de esta corriente es insertar procesos que motiven y promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de básica primaria. Cabe aclarar que esta propuesta no busca que los estudiantes en los primeros años escolares construyan y manipulen expresiones alfanuméricas, sino que participen en actividades que contribuyan al desarrollo de estrategias como: comparar, representar, comunicar, entre otras; y además, que su participación en dichas actividades contribuya al desarrollo de razonamiento deductivo (Rusell, Schifter y Bastable, 2011). Específicamente, Kaput (2000) propone esta inserción como una vía para evitar que el álgebra se constituya en un factor de exclusión escolar.

Esta nueva corriente ha motivado el interés de investigadores que han impulsado el desarrollo curricular en algunos países. Por ejemplo Lannin (2005) hace referencia a los documentos internacionales diseñados para guiar el desarrollo curricular de matemáticas en Australia, Estados Unidos y Gran Bretaña (*Australian Education Council*, 1994; *National Council of Teachers of Mathematics,* 2000; *Department for Education and Skills*, 2001) donde se sugiere que los estudiantes de la escuela básica y media deben desarrollar el proceso de generalización a partir del estudio de patrones para dar el paso al álgebra formal. Esta propuesta no sólo ha sido planteada en el currículo internacional, los Lineamientos y Estándares que actualmente rigen la educación colombiana (MEN, 1998; 2006), estipulan la introducción del pensamiento variacional en primaria, desafortunadamente aún existe una gran brecha entre la teoría y la práctica.

La investigación que aquí se reporta, se ubica dentro del desarrollo del pensamiento variacional. Cabe aclarar que en algunos países se hace referencia a dicho pensamiento como pensamiento algebraico. En este caso entendemos que el pensamiento algebraico está contenido dentro del pensamiento variacional, además, específicamente en lo relacionado con el estudio de las funciones, este tipo de pensamiento a sido denominado pensamiento funcional. Desde la perspectiva de Cañadas y Molina (2016) que se toma para esta investigación, dicho pensamiento se define como "un proceso cognitivo clave, entendido como un componente del pensamiento algebraico, basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 3). En particular Smith (2008) establece tres relaciones funcionales que pueden determinar el desarrollo del pensamiento funcional, estas son: la Recurrencia, la Correspondencia y la Covariación.

En esta investigación estas relaciones se definen como Categorías de Análisis para establecer cómo un grupo de estudiantes que participan en un programa extracurricular denominado Grupo Talento Matemático – UIS (GTM-UIS), pueden desarrollar pensamiento funcional. La dinámica de trabajo establecida en dicho grupo está normada por un Marco Institucional, que parte de la posiblidad de potenciar el Talento Matemático. Como se muestra en el desarrollo de este documento, esta investigación tiene una perspectiva incluyente del talento matemático que contempla la posibilidad de su desarrollo y seguimiento gracias a las condiciones establecidas, en este caso, por el GTM-UIS.

Entonces tomando como ejes conductores principales el pensamiento funcional y el talento matemático, se propone la siguiente pregunta que guía el desarrollo de esta investigación: ¿Qué caracteriza el pensamiento funcional que desarrolla un grupo de individuos que participa en el GTM–UIS?

En este documento se presenta el reporte final de la investigación, conformado por seis capítulos. El primero presenta los principales antecedentes, por un lado en lo referente al pensamiento funcional y por el otro sobre el talento, el talento matemático y el talento potencial. El capítlo 2 presenta con detalle la problemática de la investigación, la pregunta y los objetivos. El capítulo 3 muestra los elementos teóricos que conforman el marco conceptual empleado para la interpretación y análisis de datos que se constituye como un Marco Institucional. Los aspectos metodológicos son presentados y explicados en el capítulo 4. En el capítulo 5 se presenta el analisis de tres tareas, que muestran la actividad desarrollada por los estudiantes; aquí se presenta una selección de episodios estudiados tomando las categorías de análisis a través del desarrollo de cuatro momentos: 1. Participar de una situación funcional; 2. Centrar la atención en la relación entre variables; 3. Registrar los valores correspondientes a las cantidades que varían y 4. Construcción de una expresión.

Finalmente el capítulo 6 muestra las principales cunclusiones que surgen de esta investigación.

1 Antecedentes

En este capítulo se analizan diferentes investigaciones sobre el pensamiento funcional (Blanton y Kaput, 2011; Cañadas y Molina 2016; Brizuela y Alvarado 2010; Cañadas y Fuentes 2015; Blanton 2008; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Pinto, 2016; Smith 2008; Molina 2006; Schliemann et al. 2007; Schliemann, Carraher y Brizuela 2012); que permiten evidenciar la forma en que éste ha sido estudiado y caracterizado. Esto con el objetivo de reconocer cómo el pensamiento funcional puede ser desarrollado en un grupo de estudiantes con edades comprendidas entre los 9 y los 14 años, que participan en un programa de enriquecimiento extracurricular.

Dicho programa busca generar un espacio que motive el desarrollo del talento matemático potencial (UNESCO, 2004); por tanto también se analiza la evolución de los estudios sobre la definición de talento y sobre el talento matemático (Mason 2008; Passow 1993; Villarraga, Martínez y Benavides 2004 y Oktaç, Roa-Fuentes y Rodríguez 2011).

1.1 Pensamiento Funcional

El pensamiento funcional se asocia generalmente con el estudio de las funciones en los últimos grados de secundaria o en el primer año de universidad. Sin embargo, desde la perspectiva de *Early Algebra* expuesta ampliamente por Blanton y Kaput (2011), se considera que el pensamiento funcional puede potenciarse con buenos resultados desde los primeros años escolares. Al respecto Cañadas y Molina (2016) afirman:

> El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. Esto permite que fomente el razonamiento inductivo y, como consecuencia, proporcione a los estudiantes herramientas para la adquisición de conocimiento matemático (p. 3).

Cañadas y Molina (2016) rescatan los beneficios de introducir el pensamiento funcional desde edades tempranas, ya que esto contribuye de manera significativa en la construcción de conceptos más avanzados. En dicha investigación se reportó que los estudiantes en los primeros años escolares pueden:

> Establecer relaciones de covariación entre cantidades variables a partir de una relación aditiva. Además, son capaces de descubrir el patrón de la paridad entre esas cantidades. Los estudiantes de primero de primaria identifican y utilizan patrones basados en las relaciones aditivas y multiplicativas para predecir cantidades. También emplean estrategias como conteos sobre dibujos y utilizan diversos sistemas de representación predominando el pictórico y el simbólico (números) para dar respuesta a preguntas sobre cantidades variables, y estrategias verbales para expresar generalizaciones lejanas (p. 9).

La investigación reportada por Cañadas y Molina (2016), muestra una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades; en este escrito se analizan trabajos recientes realizados en España y otros lugares del mundo. Las autoras reportan un estudio hecho en México por Brizuela y Alvarado (2010), donde sugieren que el uso de diferentes representaciones puede servir como mediador y apoyo para el desarrollo del pensamiento funcional. Por ejemplo, cuando los estudiantes de primaria usan una tabla de datos, que les permite establecer relaciones de correspondencia entre la cantidad y el numeral. Las autoras constatan que estos estudiantes pueden crear tablas de valores como herramientas para organizar la covariación de datos. Para ilustrarlo, se muestra el siguiente ejemplo:

> Bruno juega dos rondas de canicas. Él juega la primera ronda, y después de la segunda ronda pierde 7 canicas. Después de las dos rondas, ha ganado 3 canicas en total. ¿Qué pasó durante la primera ronda del juego?

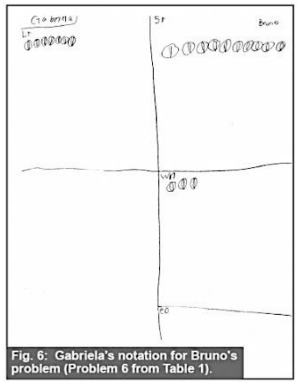


Figura 1. Ejemplo implementación de tablas (Brizuela y Alvarado, 2010, p. 43).

Otros investigadores han dado definiciones específicas de pensamiento funcional. Por ejemplo Blanton y Kaput (2004) plantean que el pensamiento funcional es:

> El pensamiento representativo que se centra en la relación entre dos (o más) cantidades variables y para las cuales las funciones denotan los "sistemas de representación inventados o apropiados" por los niños para representar una generalización de una relación entre cantidades (p. 135).

Con base en esta definición Blanton y Kaput (2004) desarrollan un trabajo experimental con grupos de estudiantes desde prekinder hasta quinto grado de primaria. Para esto plantean la tarea llamada "*Ojos y Colas*".

> Supongamos que estabas en un refugio de perros y querías contar todos los ojos de los perros que viste. Si hubiera un perro, ¿cuántos ojos habría? ¿Y si hubiera dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Ves una relación entre el número de perros y el número total de ojos? ¿Cómo describirías dicha relación? ¿Cómo sabes que esto funciona?
>
> Supongamos que quieres averiguar cuántos ojos y colas habían. ¿Cuántos ojos y colas hay para un perro? ¿Dos perros? ¿Tres perros? ¿100 perros? ¿Cómo describirías la relación entre el número de perros y el número total de ojos y colas? ¿Cómo sabes que esto funciona? (p. 136).

Con esta investigación, los autores sustentan que los estudiantes de básica primaria tienen la capacidad de desarrollar habilidades propias del pensamiento funcional; también se plantea la inclusión de situaciones que potencien este tipo de pensamiento desde edades tempranas. Blanton y Kaput (2004) sugieren que los planes de estudio para los grados de preescolar hasta quinto deben plantear situaciones donde se evidencie cómo dos o más cantidades varían simultáneamente, posibilitando la adquisición de procesos como la identificación de patrones recursivos, la correlación y la covariación, procesos propios del pensamiento funcional.

La lectura de los trabajos descritos resulta pertinente en esta investigación, en primer lugar porque abordan estudios con individuos de básica primaria que evidencian el uso de relaciones funcionales en el desarrollo de las tareas propuestas. Y en segundo lugar, se abordan situaciones cuyo principal objetivo es potenciar relaciones funcionales. Este tipo de situaciones no solo pueden ser abordadas en primaria, basta con darles un ajuste adecuado, para implementarlas en grados más avanzados. Se pone de manifiesto que es posible desarrollar el pensamiento funcional en estudiantes de básica primaria, por tanto se convierten en argumentos que respaldan este trabajo; es decir, si es posible que estudiantes en edades tempranas manifiesten características del pensamiento funcional, con mayor razón y quizá con un grado mayor de profundización, puede lograrse con estudiantes que cursan los primeros años de secundaria.

1.1.1 Las formas de representación y la caracterización del pensamiento funcional

Al trabajar en el desarrollo de situaciones que involucran el pensamiento funcional, surgen formas de representación de los elementos involucrados. Cañadas y Fuentes (2015) por ejemplo, evidencian la presencia de diferentes sistemas de representación: Pictórico, simbólico y verbal; y comentan que el sistema pictórico fue el más destacado en el trabajo de los estudiantes. Cañadas y Fuentes (2015) analizan las estrategias que usan los estudiantes al resolver el siguiente problema: “Juanita quiere celebrar su cumpleaños, para esta actividad ella desea regalarle 5 globos a cada niño asistente" (p. 214). La situación en este caso consiste en establecer la relación entre el número de niños y el número de globos que se deben comprar para la fiesta.

La profesora encargada de la actividad da a los niños la relación escrita "1 niño - 5 globos" y frente al grupo explica la relación "2 niños - 10 globos". Se pregunta a los participantes por los siguientes apartados: 3 niños, 4 niños, 5 niños y 20 niños; también se pide explicar cuántos globos deben comprar, si asisten 100 invitados a la fiesta.

La siguiente figura ilustra la relación 1 a 5, al plantear la pregunta: ¿Cuántos globos debemos comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?

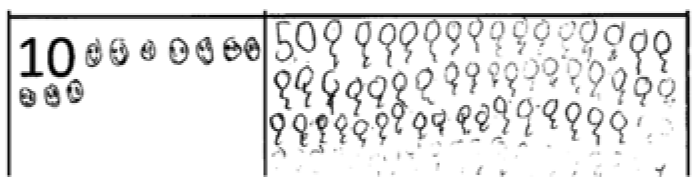


Figura 2. Conteo de dibujos en relación 1 a 5. Alumno 15. Tarea 3 (Cañadas y Fuentes, 2015, p. 64).

Las autoras muestran que los estudiantes utilizan una relación 1-1, $n + 5$ para dar soluciones a la situación. Este error se asocia con el concepto de adición, que en ese momento trabajaban los estudiantes en clase. Cañadas y Fuentes (2015) concluyen su trabajo afirmando que los estudiantes son capaces de desarrollar estrategias e identificar patrones de forma general, más allá de lo que se esperaba teniendo en cuenta sus conocimientos previos.

Con base en el análisis de datos Cañadas y Fuentes (2015), proponen una forma de caracterizar el pensamiento funcional:

> Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla

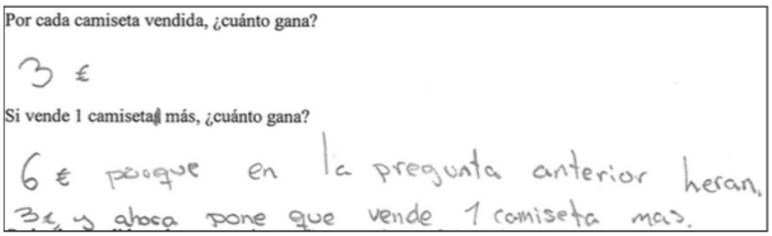
> general o generalización. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo donde, a través de la recursividad, se llega a la generalización. Para llegar a la generalización es necesario ir más allá de una relación recurrente entre los valores de una variable (p. 213).

Con esta visión las autoras dejan clara la evidente necesidad de trabajar conscientemente relaciones funcionales, dedicando especial atención a las relaciones entre variables. Esto sin dejar de lado la importancia que tiene el proceso de generalización en la actividad matemática.

Por su parte, Blanton (2008) considera el pensamiento funcional como "un proceso de construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones. Éste involucra el pensamiento algebraico que incluye la construcción de una generalización sobre variables que se encuentran relacionadas" (p. 30). Esta reflexión coincide con los resultados que se han obtenido a partir de investigaciones más recientes; por ejemplo, las hechas por Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016; Cañadas y Molina, 2016; Pinto, 2016, quienes afirman que cuando el foco matemático del pensamiento algebraico está en las funciones, se habla de pensamiento funcional. Este acercamiento evidencia la relación que existe entre el pensamiento algebraico y el pensamiento funcional, además de dar luces sobre la manera en que a partir del álgebra elemental se puede trabajar en el desarrollo del pensamiento funcional.

La cuestión que emerge es ¿Cómo esta relación puede generarse en los estudiantes? Los trabajos de Pinto (2016), Penfold (2016) y Bastías (2016) muestran diferentes Tareas que posibilitan dicha relación ya que solicitan el uso de las capacidades para representar, argumentar, visualizar e identificar elementos que intervienen en una situación funcional.

Así, Bastías (2016) centra su atención en identificar evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de quinto de primaria. La situación que emplea para desarrollar su investigación propone una situación de venta de camisetas para un viaje de estudios, cuya modelización es la función $f(x) = 3x$, esta situación se propone a los estudiantes de la siguiente forma: “Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Por cada camiseta ganaría 3 €. ¿Cuánto dinero podría conseguir Carlos?” (p. 29). Una evidencia de pensamiento funcional se puede visualizar en el siguiente ejemplo, donde se logra identificar la relación de Covariación, descrito por la autora como: “el alumno reconoce que el valor de una cantidad varía en función del valor de otra cantidad. Un ejemplo para esta categoría es la respuesta que se observa en la siguiente figura”.


Por cada camiseta vendida, ¿cuánto gana?

3 €

Si vende 1 camiseta más, ¿cuánto gana?

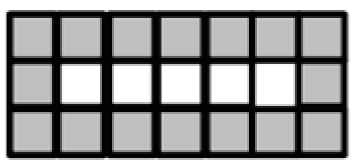
6 € poque en la pregunta anterior heran, 3€ y ahora pone que vende 1 camiseta mas.

Figura 3. Evidencia de Covariación (Bastías, 2016, p.35).

Uno de los resultados de esta investigación es que el desarrollo de esta situación permite a los estudiantes reconocer la relación entre las cantidades variables y el patrón funcional, utilizado para obtener la ganancia total. Estos reconocimientos prueban la existencia de pensamiento funcional en la mayoría de los estudiantes, siendo la relación de correspondencia la que se manifiesta con mayor claridad en el desarrollo de la actividad.

Pinto (2016) analiza el trabajo de estudiantes de tercero de educación primaria que ponen de manifiesto el pensamiento funcional en la resolución de situciones que requieren del proceso de generalización. En su análisis, parte de las tres relaciones funcionales propuestas por Smith (2008): (a) patrones recursivos o recurrencia, que implica encontrar la variación o el patrón dentro de una secuencia de valores; (b) la correspondencia o relación de correspondencia, en la que se hace hincapié en la relación entre los pares correspondientes de la variable; y (c) pensamiento covariacional o covariación, donde el foco está dado por el análisis de cómo dos cantidades varían al mismo tiempo y cómo los cambios que se producen en una afectan a la otra. El autor menciona en su análisis que “consideraremos presencia de pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes cuando al analizar de forma conjunta la totalidad de las respuestas, identificamos, al menos, una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones empleadas” (p. 40). La investigación se llevó a cabo a partir del análisis del problema de las baldosas que se muestra a continuación, este problema involucra la función $f(x) = 2x + 6$.

> Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.



> El colegio contrata a una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo. (Pinto, 2016, p. 38)

En el análisis de esta situación, Pinto muestra la forma en que identificaron la presencia de pensamiento funcional en una de las respuestas de los estudiantes a partir de la relación funcional de Correspondencia. Lo explica de la siguiente manera:

Unos pasillos son más largos que otros. Por eso, los albañiles necesitan diferente número de baldosas para cada pasillo. ¿Cuántas baldosas grises necesitan para el suelo de un pasillo en el que colocan 8 baldosas blancas?

22

¿Cómo lo sabes?

He sumado las baldosas de grises de arriba, las de abajo, las de la derecha y la de la izquierda. Entonces, 8 + 8 + 3 + 3 = 22.

Figura 4. Ejemplo de relación funcional de Correspondencia (Pinto, 2016, p. 40).

El estudiante consideraría la cantidad de baldosas superiores (8) e inferiores (8), la cantidad de baldosas laterales derechas (3) y la cantidad de baldosas laterales izquierdas (3), a continuación, realiza una suma entre los valores de la figura descompuesta, con lo que obtiene la cantidad total de baldosas grises. Utiliza esta misma relación funcional para los casos de 10 baldosas blancas. En estos casos, se observa que relaciona pares de valores $(a, f(a))$ para valores de a correspondientes a los casos particulares (8 y 10), y establece la relación con los números de baldosas grises 22 y 26, respectivamente. Por eso interpretamos que un estudiante con esas respuestas identificaría una relación de correspondencia (Pinto, 2016, p. 41).

Como resultado de esta investigación se evidenció la existencia de pensamiento funcional en los estudiantes, mediante el uso de diversas representaciones que elucidan la relación de correspondencia.

Penfold (2016) cataloga su investigación como un primer acercamiento al pensamiento funcional de alumnos de tercero de educación primaria. Trabaja sobre la capacidad para identificar patrones y hacer uso del patrón identificado. Esta investigación no sólo se interesa en la capacidad de los alumnos para emplear el pensamiento funcional, sino en saber qué tipo de representaciones y estrategias emplean. El autor cita a Blanton y Kaput (2004) para mencionar que el objetivo del pensamiento funcional en la educación primaria es que los alumnos se centren en la observación, análisis, identificación y comprobación de patrones, a partir de los cuales podrán establecer generalizaciones, argumentarlas y defenderlas de manera justificada. Es decir, que los estudiantes sean capaces de establecer una relación de recurrencia.

La situación propuesta en Penfold (2016) es la siguiente: “María y Raúl son dos hermanos que viven en la Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl. ¿Qué edad tiene cada uno?” (p. 25). La función que describe el problema es $f(x) = x + 5$. Dentro de las instrucciones se pide a los alumnos el empleo de diferentes sistemas de representación, como el lenguaje verbal, tanto escrito como oral, tablas para organizar datos y una expresión alfanumérica para poner de manifiesto la relación entre las edades de los dos hermanos. Se busca que los alumnos exploren la relación funcional mediante el estudio de casos concretos, trabajando únicamente con números naturales, en los casos en que Raúl tiene 7, 15 y 80 años; para cada caso se pide hallar la edad de María y la forma en que la determinaron. Los investigadores reportan dos tipos de representaciones, la verbal y la numérica, siendo la numérica la más común; de 25 estudiantes, 20 respondieron de forma numérica y 5 de forma verbal. A continuación, se muestra un ejemplo de cada representación.

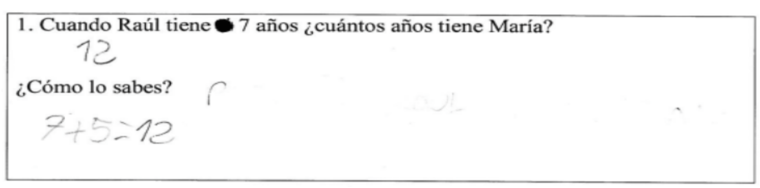

1. Cuando Raúl tiene 7 años ¿cuántos años tiene María?
12
¿Cómo lo sabes?
7+5=12

Figura 5. Representación numérica (Penfold, 2016, p. 29).

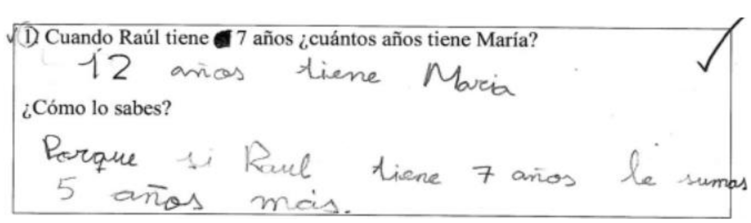

1 Cuando Raúl tiene 7 años ¿cuántos años tiene María?
12 años tiene María
¿Cómo lo sabes?
Porque si Raul tiene 7 años le sumas 5 años más.

Figura 6. Representación verbal (Penfold, 2016, p. 30).

Las representaciones planteadas por los estudiantes, en su gran mayoría los llevaban a respuestas concretas, es decir, fueron pocos los estudiantes que no acudieron a ejemplos al tratar de expresar la función que describía la tarea. Penfold (2016) resalta la importancia de motivar en los estudiantes la habilidad de expresar de manera verbal y escrita la forma en que se está interpretando el problema, y menciona: “para desarrollar el pensamiento funcional dentro de las clases de matemáticas es necesario también dedicar tiempo a fomentar la expresión verbal de los alumnos con el objetivo de facilitarles la tarea de explicar y argumentar los procesos seguidos y resultados obtenidos en las tareas de pensamiento funcional” (p. 57). El reporte de investigación menciona que dentro de las representaciones, la más empleada por los estudiantes es la tabular.

Las anteriores investigaciones muestran la posibilidad de desarrollar habilidades propias del pensamiento funcional desde la primaria, aludiendo a la simplicidad con que éste se puede abordar. Ser recursivos al manipular los temas cotidianos, podría significar la inclusión de este pensamiento en el currículo. Pinto (2016) cita a Carraher y Schliemann (2007, 2014) para ilustrar la manera en que se puede motivar, promover y desarrollar el pensamiento funcional en la primaria.

> […] el enfoque funcional, donde el concepto de función opera como soporte para este tipo de pensamiento, se encuentra más subordinado a temas aritméticos que permitirán abstraer ideas y conceptos. A la luz de esta idea, la noción de adición, sustracción, multiplicación y división pueden ser tratadas como funciones, específicamente por las relaciones entre cantidades que pueden producirse. Por ejemplo, estos autores plantean que la multiplicación por tres puede verse como un subconjunto de la función $3n$. Además, este enfoque se basa en la multiplicidad de representaciones de las funciones, entre las cuales se destaca el lenguaje natural, tablas de

> funciones, gráficos y notaciones simbólicas. Es en este sentido, la función adquiere un rol importante que puede facilitar la integración del álgebra en los planes de estudios vigentes (p. 14).

1.1.2 El pensamiento funcional en la clase de matemáticas

Las diferentes perspectivas de las investigaciones que han estudiado el desarrollo del pensamiento funcional han generado opciones respecto a la manera como este pensamiento puede surgir en el aula. En esta vía Blanton y Kaput (2011) basados en Smit (2008), proponen las siguientes relaciones funcionales:

> 1. Patrón recursivo (Recurreancia), que implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia de valores. 2. Una relación de correspondencia, se basa en la identificación de una correlación entre variables (y es 3 veces x más 2). 3. Pensamiento covariacional, se basa en el análisis sobre cómo dos cantidades varían simultáneamente y cómo los cambios en los valores de una variable producen cambios en la otra (mientras x incrementa por uno, y incrementa por tres) (p. 8).

La siguiente figura muestra la Tarea de "ojos y colas" para ilustrar, a manera de ejemplo, las tres relaciones funcionales antes descritas.

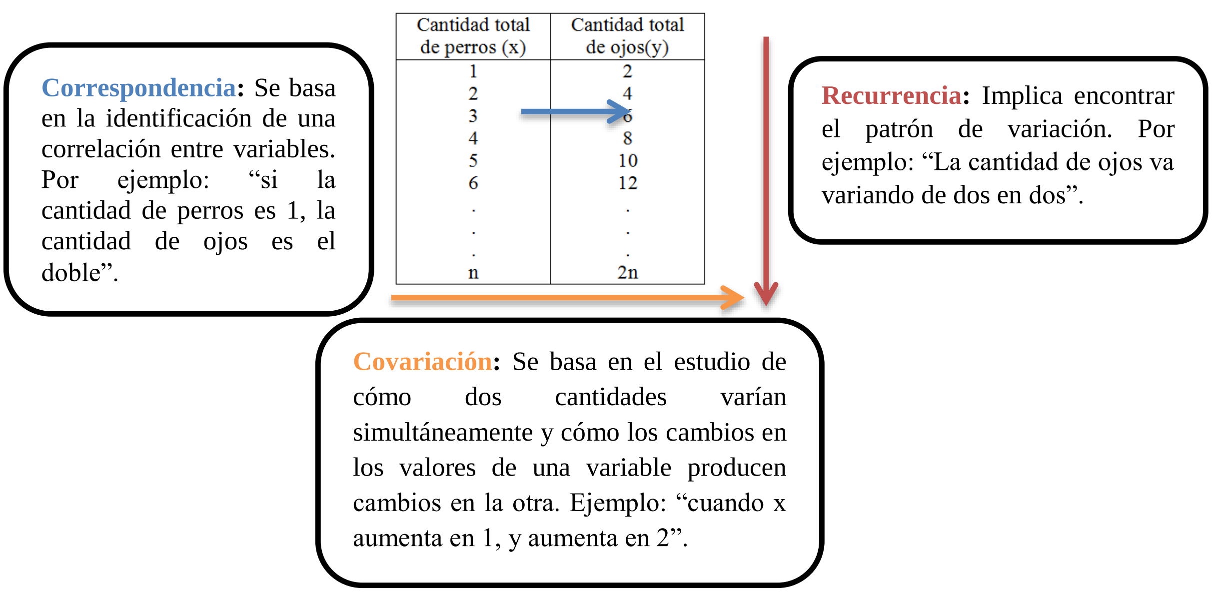


Figura 7. Ejemplo de relaciones funcionales (Adaptado de Pinto (2016)).

En esta investigación se resalta la necesidad de enriquecer la experiencia matemática en primaria, brindando experiencias que vayan más allá de la aritmética y le proporcione a los estudiantes herramientas para fortalecer su razonamiento matemático; partiendo de que en estas experiencias tempranas es posible promover el éxito en la construcción de pensamiento algebraico. Blanton y Kaput (2011) se cuestionan sobre cómo abordar el pensamiento funcional desde edades tempranas con miras a mejorar el rendimiento de los estudiantes en grados posteriores y cómo transformar los recursos y la instrucción de los profesores de primaria, para que el cambio en el currículo se haga realidad.

Blanton y Kaput (2011) analizan durante cinco años cómo piensan los niños sobre relaciones funcionales, sus implicaciones matemáticas para grados posteriores, y cómo los materiales y las actividades cotidianas pueden profundizarse y ampliarse para apoyar el desarrollo del pensamiento funcional en primaria. Estos autores también reportan que investigaciones como: Blanton 2008; Brizuela y Schliemann 2003; Brizuela et al., 2000; Carraher et al., 2008; Kaput y Blanton 2005; Moss et al. 2008; Schliemann y Carraher, 2002; Schliemann et al., 2001, han evidenciado que los niños de la escuela primaria pueden desarrollar y usar una variedad de herramientas de representación para razonar acerca de las funciones. Ellos pueden describir en palabras y símbolos recursivos, identificar variación y relaciones de correspondencia en un conjunto de datos, también pueden usar un lenguaje simbólico para modelar y resolver ecuaciones con cantidades no conocidas.

Blanton y Kaput (2011) afirman que los niños que han tenido la oportunidad de participar activamente en el desarrollo de conjeturas, la construcción de argumentos, el establecimiento de generalizaciones o el uso de notación, el lenguaje y las herramientas para razonar acerca de las funciones, tienen garantizado el éxito en la matemática para los grados posteriores. En dicha investigación se muestra cómo el comentario de una profesora sobre el crecimiento de una serpiente, desata en los estudiantes una serie de discusiones sobre su posible solución y los lleva a representar la información de manera tabular. Al respecto Blanton y Kaput (2011) mencionan:

> Las tablas y gráficos se convierten en configuraciones no sólo visuales, sino en estructuras incrustadas con significado acerca de las relaciones; los símbolos ya no son inscripciones abstractas sin significado, sino instrumentos mediante los cuales las ideas pueden ser mejor mediadas y comunicadas (p.16).

En esta investigación se enfatiza en la importancia de inculcar en los profesores de primaria la necesidad de trabajar la aritmética desde otra perspectiva, buscando desarrollar en los niños habilidades propias de la matemática. Mason (2008) apoya esta idea argumentando que la generalización es un proceso innato que los niños pequeños traen a la clase; entonces contamos con la materia prima, y sólo requerimos del empeño y la disposición para ponerlo en marcha.

Pero, ¿realmente puede un individuo desarrollar habilidades matemáticas a partir de la potencialización de su pensamiento funcional? Es probable que continúen surgiendo preguntas de este tipo cuando pensamos en la construcción del pensamiento funcional en estudiantes de básica primaria. Sin embargo, el verdadero reto está en desarrollar investigaciones que permitan evidenciar la importancia y pertinencia de potenciar dicho pensamiento desde edades tempranas. Además, el pensamiento funcional, favorece el desarrollo de habilidades propias de la matemática y brinda al estudiante la posibilidad de enfrentarse a situaciones que puede encontrar en su entorno, contribuyendo de manera significativa en la ampliación del concepto de variación. Ante este panorama Rojas, Martínez y García (2011) señalan:

> Uno de los contenidos matemáticos importantes del aprendizaje escolar es el pensamiento funcional, no solo por la importancia que tiene como núcleo de contenido de las matemáticas

> escolares, sino porque está asociado a una diversidad de prácticas sociales tanto de los entornos de los estudiantes como de la cultura y el campo científico (p. 273).

Esta concepción surge como argumento para integrar el pensamiento funcional en el aula regular, en esta investigación Rojas et al., (2011) argumentan que gran parte del fracaso escolar matemáticas está relacionado con la forma en como éste es abordado. Los estudiantes no se sienten motivados y esto desencadena actitudes apáticas y desagrado hacia la matemática; principalmente cuando los estudiantes han perdido sus cursos y deben repetirlos. En este sentido Bastías (2016) cita a Smith (2008) para hacer referencia al papel del docente en la construcción del pensamiento funcional, como un agente mediador y potenciador.

> Por tanto, es una actividad de construcción individual, que debe contar con la participación del profesor, quien a través de la creación de actividades, la descripción de cantidades variables, planteamiento de preguntas apropiadas y promoviendo la participar en el aula, proporciona la oportunidad a los estudiantes de participar en instancias de desarrollo del pensamiento funcional (p. 12).

1.1.3 Concidiciones insitucionales propicias y su rol en el desarrollo del pensamiento funcional

Otras investigaciones se han centrado en documentar los avances y destrezas que pueden desarrollar los niños en edades tempranas bajo las condiciones apropiadas. Estos estudios han comprobado que los niños de básica primaria pueden llegar a relacionar, razonar, identificar relaciones entre variables, generalizar, conceptualizar e incluso expresar notación de variables en sus producciones (Cañadas, Brizuela, y Blanton 2016; Cañadas y Fuentes 2014; Molina 2006; Schliemann et al. 2007; Schliemann, Carraher y Brizuela 2012; entre otros). Estos trabajos también destacan la capacidad de los estudiantes para abordar tareas contextualizadas que involucran relaciones funcionales desde las primeras edades, dando argumentos teóricos que justifican el rumbo de esta investigación.

De manera general, se puede señalar que todas estas investigaciones muestran que el desarrollo del pensamiento funcional, visto mediante las relaciones de correspondencia, recurrencia y covariación, es posible en niños desde edades tempranas, en escuelas regulares, pero bajo ciertas condiciones institucionales: diseño e implementación de un cierto tipo de Tareas, el rol autónomo de los estudiantes, el rol del docente como mediador u orientador en el desarrollo de la tarea, posibilidad de verbalización de las técnicas empleadas por los estudiantes, socialización de las producciones realizadas y validación común de las mismas. Ahora bien, esto lleva a cuestionarse si todas estas condiciones institucionales son las que debieran determinar un programa extracurricular diseñado para niños talentosos en matemáticas. Con el objetivo de abordar este cuestionamiento, se analiza a continuación los estudios que se han centrado en caracterizar el talento y el talento matemático.

1.2 Talento

A nivel general las capacidades o talentos excepcionales están directamente relacionados con la noción de inteligencia. Según el documento Orientaciones para la Atención Educativa a Estudiantes con Capacidades o Talentos excepcionales presentado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) a partir del siglo XX se ha incrementado el interés por describir e identificar las características que definen a un individuo con talento, esto a partir de una medición numérica (relacionada con el coeficiente intelectual). Desde Galton (1869) con su publicación “Talento hereditario y carácter” y posteriormente con Catell (1890), Binet y Simón (1904) y Terman (1916) aparece el rótulo de “inteligencia muy superior” y con éste el de “superdotado”. Estos trabajos motivaron un creciente interés por generar técnicas que permitieran una temprana y eficaz forma de identificar el talento excepcional. Esta tarea en principio fue asumida por la psicología, que a partir de la aplicación de pruebas psicométricas, busca identificar características que definan una persona con talento superior al promedio.

En la actualidad hablar de talento requiere de un contexto particular, ya que se cuenta con una gama amplia de posturas, por tal razón se hace necesario retomar algunas de estas concepciones para dar claridad conceptual.

En primer lugar, Mönks y Mason (2000), tratan los siguientes términos como sinónimos: dotado (*gifted*), altamente capaz (*highly able*) y talentoso (*talented*). Estos autores definen superdotación como: "un potencial individual para el logro excepcional en uno o más dominios" (p. 144). Además, admiten que existen más de cien definiciones de superdotación y sus sinónimos.

Según el diccionario de Real Academia Española talento es: "La capacidad de entender, referente a la inteligencia", esto una vez más muestra la realidad mundial, donde el talento se asocia casi de inmediato con la inteligencia y su medición, sin tener en cuenta otros aspectos. Al respecto Clark (1997) menciona que los conceptos más amplios de inteligencia y de talento se pueden expresar a través de: la resolución de problemas, el comportamiento creativo, la aptitud académica, el liderazgo, el desempeño en las artes visuales y escénicas, la invención o innumerables habilidades humanas que pueden pasar desapercibidas con el uso de pruebas psicométricas.

Al analizar la postura de Clark (1997), se pude percibir cierta relación con las inteligencias múltiples propuesta por Gardner (1995), donde se desafía la noción de la inteligencia en la que se basan la mayoría de los test. Gardner (1995) define la inteligencia como una habilidad o un conjunto de habilidades que permiten al individuo resolver problemas o desarrollar productos que son consecuencia de un determinado contexto cultural.

Desde el punto de vista de Gardner y la teoría de las inteligencias múltiples, se considera que:

> La superdotación resulta de habilidades innatas en interacción con un medio ambiente apropiado y favorable. Esto va más allá de la opinión de que la superdotación es inteligencia alta como tal, pues dice que ésta se expresa en los diferentes dominios con ejemplos como los siguientes: lingüístico (T.S. Elliot), lógica y matemática (Albert Einstein), visual y espacial (Pablo Picasso), musical (Igor Strawinsky), corporal y motriz (Martha Graham), intrapersonal (Sigmund Freud) y, finalmente, interpersonal (Mahatma Gandhi) (Villaraga, Martínez y Benavides, 2004. p.30).

Es posible notar que no hay una especificación sobre cierto tipo de talento, sino que éste es innato y se expresará si el sujeto se encuentra en un medio propicio, estas dos condiciones deben por tanto estar presentes.

Al hablar de talento, muchas de las referencias apuntan a Mönks (1992), quien basa su estudio en la teoría de los tres anillos propuesta por Renzulli (1977) (Habilidad muy por encima de la media, Creatividad y Fuerte compromiso con la tarea). En esta investigación Renzulli define el talento como:

> Una interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos, consistentes en capacidades por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea, y fuertes dotes de creatividad. Los niños que manifiestan o son capaces de desarrollar una interacción entre estos tres anillos requieren una gran variedad de oportunidades y servicios educativos, que habitualmente no proporcionan los programas regulares de enseñanza (p. 182).

Lo innovador de la investigación de Mönks (1992) es que define una nueva trilogía social como promotora del talento que incluye la familia, el colegio y los compañeros o amigos, a lo que denomina factores ambientales. Los elementos principales de esta propuesta se presentan en la figura 8, que presenta el Modelo Multifactorial propuesto por Mönks (1992).

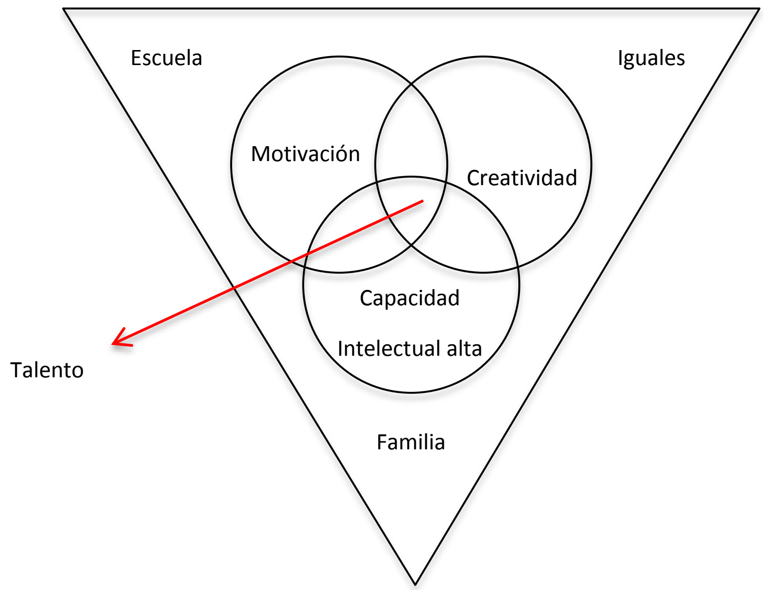


Figura 8. Modelo Multifactorial de Talento (Mönks, 1992).

Con el modelo multifactorial, Mönks incluye como elementos influyentes en el desarrollo del talento a la familia, la escuela y los compañeros de estudio.

Los autores que hasta ahora fueron citados, coinciden al considerar varios campos de acción donde es posible evidenciar sujetos con capacidades excepcionales, pero no es suficiente con identificar a un sujeto talentoso en cierto campo. Por ejemplo, en matemáticas es necesario brindar las condiciones adecuadas que permitan desarrollar dicho talento, de lo contrario, es posible que éste no se exprese, como lo señalan Gadner (1995) y Villaraga, Martínez y Benavides, 2004 citados más arriba. Es común encontrarse con una gran cantidad de términos que pueden estar relacionados con el talento excepcional, pero que en el fondo son muy diferentes; los términos que a continuación se presentan, a menudo son asociados e incluso erróneamente se toman como sinónimos de talento.

Superdotación: esta noción ha sido asociada a una "…visión monolítica, estática y permanente de la inteligencia" (De Zubiría, 1994, p. 8); por su parte, en la literatura internacional prevalece el término Superdotado o gifted. El término gifted, traducido literalmente del inglés como "dotado o talentoso".

Según Winner (2004) "Brillante", es un término que se ha utilizado para denominar un sujeto con alto grado de inteligencia, en comparación con sus pares. También ha sido asociado al superdotado intelectual moderado.

Fernández y Pérez (2011) definen al talento como "la capacidad de rendimiento superior en un área concreta. El alumno o alumna que lo posee muestra habilidades específicas en áreas muy concretas. Hay muchos tipos de talento: académico, matemático, verbal, musical, motriz, creativo, estético, científico, social, mecánico y artístico" (p. 90). Este trabajo, resalta la importancia de favorecer el desarrollo de las capacidades y atender las necesidades tanto de los estudiantes que manifiestan un déficit, como los que demuestran altas capacidades. El estudio fue realizado en colaboración con el proyecto de Estímulo del Talento Matemático (ESTALMAT) en Andalucía España; su principal interés se basó en identificar las principales características de un sujeto con Talento Matemático.

Hallar un consenso respecto a la definición de sujetos con talento excepcional es una tarea aún por resolver, pues son muchas las posturas y definiciones que existen. Al respecto Singer, Sheffield, Freiman y Brandl (2016) comentan que "existe en la actualidad un continuo debate sobre la concepción del talento y su definición" (p.1).

1.2.1 Talento Matemático

Como se mencionó anteriormente, el talento puede evidenciarse en muchas áreas del conocimiento, en particular, en esta investigción se habla de Talento en Matemáticas, abordando algunas definiciones y posturas que han sido analizadas en estudios recientes.

Se da inicio a este apartado con Miller (1990) citado por Benavides y Maz-Machaco (2012), quien considera que “el talento matemático se refiere a una habilidad inusual para entender las ideas matemáticas y razonar matemáticamente, en lugar de saber hacer solo cálculos aritméticos o conseguir calificaciones excelentes en matemáticas” (p. 171). Miller en su definición deja clara la importancia de ir más allá de los resultados que surjen a partir de las evaluaciones en el aula de clase, pues para identificar y desarrollar talento matemático, es pertinente enfrentar a los estudiantes con situaciones que exijan un alto nivel de análisis y logren sacar el mejor de sus esfuerzos. Al respecto Benavides y Maz-Machado (2012) señalan:

> Es importante que tanto los profesores como los propios padres conozcan que el talento matemático no es solamente la habilidad para resolver ejercicios, sino que implica otras habilidades matemáticas tales como comprender, razonar, relacionar, aplicar, abstraer de una forma significativamente mejor que la media de los demás alumnos (p. 177).

Otra visión del talento matemático es la presentada por Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez, (2004) quienes comentan que “una de las formas más sencillas de definir el talento matemático y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media” (p.84).

Respecto a esa capacidad matemática que brinda la posibilidad de hallar evidencias y/o elementos que faciliten la identificación y guíen tanto a docentes como a investigadores hacia la detección del talento, encontramos la postura de Wenderlin (1958) citado por Pasarín et al., (2004), quien menciona los aspectos que caracterizan la capacidad matemática:

> La capacidad matemática de una persona está formada por cuatro aspectos fundamentales: 1) la habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos y reglas matemáticas; 2) aptitud para aprenderlas, retenerlas en la memoria y reproducirlas; 3) facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas, y 4) la competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas (p.84).

Por su parrte Fernández y Pérez (2011) mencionan que:

> El talento matemático dota al alumno que lo posee de una alta capacidad para el manejo de la información cuantitativa y numérica, y también para la representación espacial y la resolución de problemas. El talento matemático es un talento simple que podría ser a su vez uno de los componentes de un talento múltiple o complejo (p. 91).

La postura de Fernández y Pérez (2011) evidencia la constante búsqueda que en los últimos años se ha llevado a cabo para lograr unificar algunas características que faciliten la caracterización del talento. Los avances que en este aspecto se han adelantado no solamente permiten la identificación, sino el tratamiento que debe brindarse a los estudiantes que lo evidencian. Ramírez (2012) presenta un estudio donde busca diseñar buenas prácticas docentes para atender a los alumnos con talento matemático, en su investigación identifica las principales características de esta población, para realizar el estudio de estas habilidades, centra la atención en la visualización.

Como resultado a la búsqueda de antecedentes y definiciones que Ramírez (2012) presenta durante su investigación, crea una tabla donde muestra desde el punto de vista de tres investigadores, las principales características del Talento Matemático, tal como se muestra a continuación.

Tabla 1.

Relación entre las características del talento matemático expuestas por Greenes (1981), Miller (1990) y Freiman (2006).

Características del talento matemático		
Greenes (10981)	Miller (1990)	Freiman (2006)
Formulación espontánea de problemas		Pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean
Flexibilidad en la manipulación de datos	Gran capacidad para pensar y trabajar con problemas matemáticos de una forma flexible y creativa	Cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra
Habilidad para la organización de datos	Rapidez para aprender, entender y aplicar las ideas matemáticas	Localiza la clave de los problemas Busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas Mantiene bajo control los problemas y su resolución Presta atención a los detalles
Agilidad mental para el flujo de ideas (pensamiento divergente)		Produce ideas originales, valiosas y extensas Desarrolla estrategias eficientes
Originalidad de interpretación		Piensa de modo crítico
Habilidad para transferir ideas	Especial destreza para transferir los conocimientos adquiridos a nuevas situaciones matemáticas	

Habilidad para generalizar	Habilidad especial para trabajar de forma abstracta y ver relaciones entre objetos matemáticos	
	Entusiasmo inusual y una gran curiosidad sobre la información numérica	Persiste en la consecución de los objetivos que se propone

Nota: Adaptado de (Ramírez, 2012, p. 24).

Otro investigador que también trabajó sobre las clasificaciones asociadas con el talento matemático es Castro (2008), quien menciona que “los estudios realizados sobre el talento matemático se han centrado en tres grandes focos de investigación: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención” (p.25). En esta investigación el autor señala que en ese entonces eran escasas las investigaciones sobre talento matemático y los estudios emergían principalmente de propuestas curriculares. Lamentablemente más de ocho años después, el panorama, al menos en Colombia no es muy alentador, y sigue siendo una necesidad latente la atención, detección y promoción de los niños con talento excepcional.

Por su parte Banfield (2005), recoge con base en varias fuentes (House, 1987; Thales, 2003; Wieczerkoski y Prado, 1993) un conjunto de características específicas de los niños con talento matemático en los dominios afectivo y cognitivo; entre ellas se pueden citar las siguientes: a) aprenden conceptos y procesos matemáticos más rápido que otros estudiantes, b) son capaces de resolver problemas complejos, c) realizan un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales, d) organizan datos para observar patrones o relaciones, f) analizan conceptos y procesos matemáticos más rápidamente que otros estudiantes y g) son capaces de verbalizar conceptos, procesos y soluciones matemáticas. Estos estudios caracterizan la población con talento excepcional en matemáticas, brindando claridad sobre todo en la detección de las características propias de estos sujetos.

En lo referente a la capacidad de aprender matemática, Espinoza (2011) menciona que los estudios relacionados con el talento matemático se han venido realizando desde el siglo XX, específicamente se hace referencia a esta necesidad educativa en el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM por sus siglas en inglés, 1989) donde aparece que "Los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas. La habilidad matemática resultante es un recurso valioso para la sociedad, tan necesario para mantener el liderazgo en un mundo tecnológico" (p. 18). Este punto de vista resalta la importancia de potenciar este talento, pues no solamente estamos aportando en el desarrollo personal de un grupo de individuos sino, al desarrollo científico y tecnológico de todo un país, siendo los estudiantes talentosos en matemáticas, potenciales contructores de un futuro país mejor preparado.

Las investigaciones y definiciones que sobre le talento matemático se han reportado, evidencian que aún hay mucho trabajo por hacer en lo referente a su etención y tratamiento; también se aprecia que las buenas calificaciones en matemáticas no son un indicativo del talento, se requieren profesores comprometidos que estén dispuestos a brindar el contexto adecuado, que les permita no solo identificar a estudiantes talentosos, sino potenciar y promover actividades que motiven el desarrollo del talento. A continuación, se muestran algunos enfoques y posturas que buscan definir el Talento Potencial, término relevante en esta investigación.

1.2.2 Talento potencial

Abordar un término relativamente nuevo en la Educación Matemática, no es nada fácil, principalmente porque la literatura que se encuentra al respecto es muy escasa y evidencia un obstáculo a la hora de sentar bases que sustenten teóricamente la investigación. En esta investigación se propone trabajar con el talento potencial en matemáticas, pero antes se expone la definición de talento potencial que brinda la Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la cultura (UNESCO, 2004) donde se define como:

> Aquel que aún no se ha desarrollado o evidenciado, es decir que el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su talento o talentos, pero por uno o más factores no lo ha podido afirmar en sus esquemas de acción (p.27).

En esta investigación se toma como fundamento la definición de la UNESCO, pues se considera la familia, la sociedad, la condición económica, el colegio, entre otros, como factores que influyen positiva o negativamente en la evolución o retroceso del talento potencial de un individuo.

En este trabajo se aborda la problemática de atención al Talento Potencial desde una panorámica incluyente, en el siguiente sentido; si al sujeto le gusta la matemática, el entorno le permite ingresar a un programa de formación extracurricular, donde el sujeto va a encontrar elementos como: Espacio, acompañamiento, materiales, ambiente de discusión, entre otros, es muy posible que el talento en matemáticas sea desarrollado, y en la medida de las capacidades de los estudiantes, evolucione. Uno de los elementos más importantes es el agrado, las actitudes de un individuo que surgen a partir de este "estado" se presentan a continuación a la luz de investigaciones como: Ramírez (2012), Fernández y Perez (2011), Mönks (1992), entre otros. Estas caráterísticas son: el entusiasmo inusual ante una nueva situación matemática, el interés por entender y comprender el contexto y la utilidad de los conceptos aprendidos, la participación activa en cada actividad extracurricular que implique un nuevo reto en matemáticas, la socialización y explicación de sus propias conjeturas, con el fin de exponer ideas posiblemente más comprensibles para sus pares, entre otras.

Referente a esas condiciones adecuadas en las que el sujeto puede desarrollar su talento, se muestra la postura de Benavides (2008) quien afirma:

> En la literatura se hace énfasis en que el talento y la superdotación no solamente son innatos, se puede nacer con ellos, sino que también el talento actual de un sujeto puede desarrollarse de acuerdo a las potencialidades del sujeto, y esto último depende de múltiples factores: contextuales, familiares, institucionales. Por lo tanto, el concepto de superdotación o talento, es relativo porque depende de cada sujeto, su potencial de desarrollo y sus circunstancias personales de todo orden. En la educación de los sujetos con talento se deberían tener en cuenta estas consideraciones de orden teórico y pragmático (p. 52).

De otro lado Passow (1993) reconoce los niños dotados y talentosos potencialmente como aquellos que:

> […] en virtud de sus habilidades sobresalientes, son capaces de un alto rendimiento. Los niños capaces de un alto rendimiento incluyen aquellos que han demostrado sus logros y/o habilidades potenciales en cualquiera de las siguientes áreas, sea aisladamente o combinadas: habilidad intelectual general, aptitudes académicas específicas, pensamiento creativo o productivo, habilidad de liderazgo, artes visuales e interpretativas y habilidades psicomotoras. Se supone que la utilización de estos criterios de identificación de los niños dotados y talentosos abarcará un mínimo entre 3% y 5% de la población escolar (p. 30).

Con la investigación que aquí se reporta, se resalta la importancia que tiene el contexto en el que el estudiante construye conocimiento, coincidimos con la postura de investigadores como

Gagné (1993) quien propone un esquema que deja claro que el talento no solamente existe de manera innata, sino que bajo las condiciones adecuadas éste puede llegar a desarrollarse, pasando de ser un talento potencial a un talento actual. La figura 9, muestra cómo esa interacción del sujeto con el medio, la sociedad, y otros elementos puede llevarlo a desarrollar el talento.

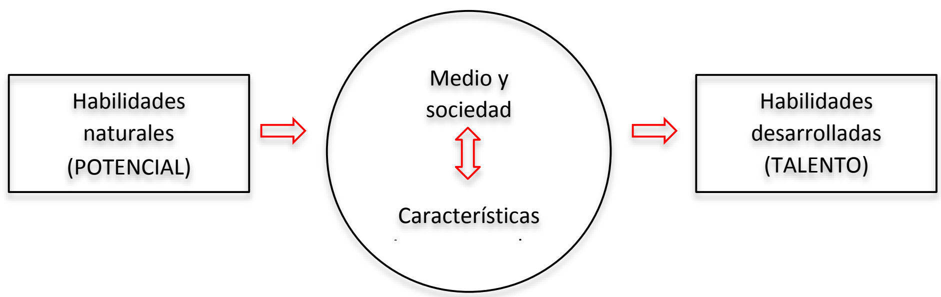


Figura 9. Esquema del paso del potencial de un individuo hacia el talento (Benavides y Mz-Machado, 2012, p. 170).

Otros investigadores que también coinciden con la visión de talento que se asume en esta investigación son Benavides y Mz-Machado (2012) quienes comentan que:

> De forma general, en la literatura científica se hace énfasis en que el talento no solamente puede nacer sino que puede desarrollarse en los sujetos, de ahí la importancia de saber identificarlo así como planificar las intervenciones curriculares más adecuadas en el entorno educativo (p. 170).

Con los trabajos expuestos respecto al desarrollo del talento potencial, se resalta no solamente la identificación de características que evidencien un potencial en los estudiantes, el papel de docente como mediador y facilitador entre el estudiante y el conocimiento es indispensable; el sentido de compromiso para recrear los escenarios adecuados y las actividades pertinentes que promuevan esa evolución del talento potencial al desarrollo de un verdadero talento. Al respecto Benavides y Mz-Machado (2012) comentan:

> El talento tiene un carácter evolutivo en el sentido de que no solamente el talento actual de un individuo es relevante sino que el talento potencial es fundamental, porque a partir de este es posible realizar intervenciones para fomentar y desarrollar el talento (Benavides y Maz-Machado, 2012, p. 170).

Las investigaciones analizadas sobre el talento y el talento matemático consideran como elemento base la identificación del talento, es decir es necesario determinar bajo ciertas “pruebas” que un sujeto es talentoso. Sin embargo, se ha notado que en muchos de los casos la prueba misma es el trabajo producido por los sujetos “talentosos”, Elliot, Einstein, Gandhi, por ejemplo. En otros casos la identificación se hace a partir de evidenciar un alto I.Q. que resulta de una prueba de inteligencia, que es bastante general. Por tanto, estas posturas no permiten analizar cómo el talento matemático puede ser desarrollado en sujetos “cuyo talento no haya sido identificado”. Es por ello, que a continuación vamos a abordar el talento matemático potencial, como una postura alternativa, que permite bajo “ciertas condiciones institucionales propicias” promover en los sujetos una actividad matemática sobresaliente.

1.2.3 Talento Matemático Potencial

En la investigación se propone una postura sobre el Talento Matemático Potencial, cuyo sustento está en el talento potencial definido por la UNESCO citado más arriba, pero precisándose para el caso de las matemáticas, donde uno de sus rasgos es la inclusión. Así, se parte del supuesto que todo estudiante cuenta con un talento potencial y requiere las condiciones adecuadas para desarrollarlo. En particular se busca potenciar el talento matemático en un programa extracurricular, que parte de su conformación teniendo en cuenta tres características:

1. *Ser elegidos por sus profesores*. Ser escogido por el docente de matemáticas como participante del grupo, se considera un elemento importante de partida. Dado que el

maestro, que interacúa continuamente con sus estudiantes, tiene la posibilidad de ver características en ellos que de una u otra manera les permite destacarse sobre sus compañeros.

2. *Gusto por las matemáticas*. Cuando un estudiante ha manifestado que hay cierto agrado o empatía con la matemática, se considera que tiene disposición positiva hacia su estudio. Esta característica se asocia con las preferencias positivas hacia esta materia en la escuela, hacia los maestros y con el desarrollo de actividades extracurriculares relacionadas con el área; y ante todo, una actitud de trabajo para sobresalir en matemáticas. No se considera como requisito que el estudiantes sea el mejor en la asignatura, es más importante el hecho de que disfrute de la interacción con esta ciencia. El gusto por la asignatura, según proponen Mora, Casas y Gonzales (2009) va acompañado de una actitud de trabajo.

3. *Interés para participar en un programa extracurricular*. Hacer parte de un grupo de trabajo extracurricular implica ir más allá de un simple compromiso académico, requiere participación regular y dedicación. Desde el contexto de un estudiante entre 9 y 14 años puede resultar más interesante dedicar la tarde del viernes a otras actividades. Por tanto, se considera un buen punto de partida contar con la asistencia voluntaria de los estudiantes, sin más motivación que la de aprender y enfrentarse a nuevos retos académicos.

Las características descritas fueron los elementos que desde esta investigación se tuvieron en cuenta para la creación del Grupo Talento Matemático (GTM–UIS), que se desarrollo bajo las condiciones de un Marco Institucional que será presentado con detalle más adelante.

La atención y seguimiento al talento matemático potencial, puede formularse como un asusnto de equidad. En donde se centre la mirada en ofrecer a cada quien lo necesario para que pueda desarrollar su potencial al máximo. Al respecto Delors (1996) comenta:

> … El respeto de la diversidad y de la especificidad de los individuos constituye, en efecto, un principio fundamental, que debe llevar a proscribir toda forma de enseñanza normalizada. A menudo se acusa con razón a los sistemas educativos formales de limitar el pleno desarrollo personal al imponer a todos los niños el mismo molde cultural e intelectual, sin tener suficientemente en cuenta la diversidad de los talentos individuales (p. 59).

Entonces, la invitación que surge a partir de esta reflexión, es aplicar estrategias que desde la regularidad del aula, pueda contribuir al desarrollo del potencial con que cada estudiante cuenta. Estas acciones que están al alcance de todo docente, pueden generar un cambio real que podrá traer grandes beneficios no solo a nivel personal en cada individuo, sino al desarrollo y fortalecimiento de la científico.

Como se ha mencionado hasta el momento, hay elementos que intervienen de manera directa o indirecta en el desarrollo del talento y a su vez proporcionan una visión social del talento. A continuación se presentan algunas definiciones y un modelo que integra los principales elementos que intervienen en el desarrollo del talento.

1.3 Una visión social del talento

Desde la perspectiva de esta investigación, el talento matemático está compuesto por una serie de elementos que de manera directa o indirecta influyen en su evolución. Este conjunto de elementos se presenta de manera apropiada en el modelo nacional del talento matemático (ver Figura 10) planteado por Mora, Casas y González (2009) para estudiar el talento en Colombia. El modelo de Mora et al., toma los elementos fundamentales del Modelo multifactorial del talento expuestos por Mönks (1992). Para esta investigación se ha adaptado el modelo de Mora et al., que contempla el desarrollo del talento dentro de un contexto social que incluye la familia, la escuela regular y los programas de enriquecimiento como potenciadores del talento matemático potencial.

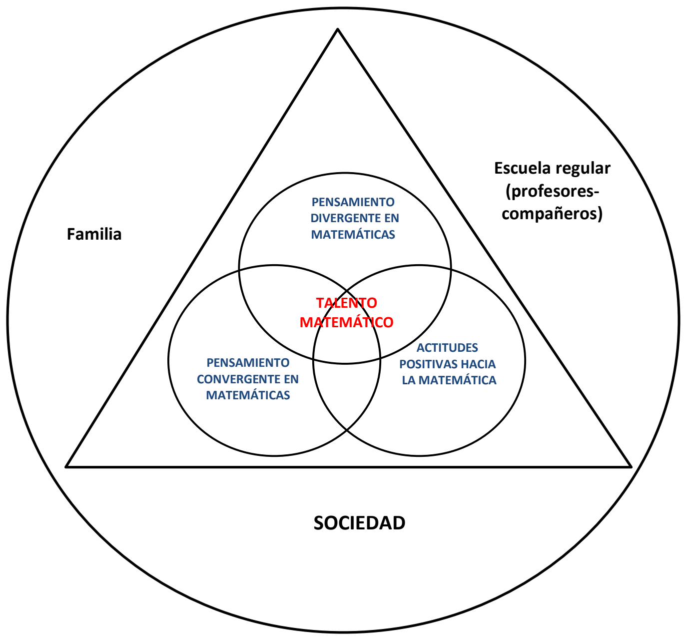


Figura 10. Modelo del talento Matemático (Mora et al., 2009, p.59).

Esta investigación se ubica en la sociedad, específicamente en los programas de enriquecimiento, dado que la propuesta se desarrolla en un ambiente extracurricular, donde se promueve el talento en matemáticas. Al interior del modelo (ver figura 10) se encuentran tres elementos importantes: el pensamiento divergente en matemáticas, el pensamiento convergente en matemáticas y la actitud positiva hacia la matemática.

En este modelo, la intersección de los tres elementos mencionados da origen al talento matemático. Feldhusen (2003) menciona que “la influencia de las personas, los recursos, los ambientes es una parte del desarrollo sistemático del talento” (p. 44). Por tanto todo programa de enriquecimineto extracurricular debe propiciar un espacio adecuado para potenciar el talento. A continuación se describen los elementos que componen el modelo (Mora et al., (2009).

Características asociadas al pensamiento divergente en matemáticas. Estas características se asocian con la variedad de caminos que un individuo talentoso puede tomar al solucionar una situación. Esto implica “ver soluciones desde diferentes ángulos, desde perspectivas propias y ajenas, utilizando o construyendo estratégias múltiples… sin estar sujetos a técnicas de solución y modificándolas cuando estas fallan” (Guilfor, 1983 tomado de Mora et al., 2009). De la misma manera se hace referencia a la desarticulación de esquemas rígidos. Esto se refiere a la modificación de las condiciones iniciales del problema, la búsqueda de múltiples soluciones y la formulación de problemas de manera expontánea (Mora et al., 2009).

Características asociadas a habilidades superiores a la media. Éstas están relacionadas con las capacidades y habilidades superiores a la hora de razonar sobre una situación matemática. Por ejemplo, se plantea la capacidad de organización, visualización y generalización. Así como la habilidad para formular y transmitir ideas; además de la habilidad para captar rápidamente los problemas matemáticos y estructurarlos (Tuorón et al., 1998).

Características asociadas a las actitudes positivas hacia las matemáticas. En esta componente se hace énfasis en el gusto por las matemáticas. Este se asocia con las preferencias positivas hacia esta materia en la escuela, hacia los maestros, con el desarrollo de actividades extracurriculares relacionadas con el área. Y ante todo, una actitud de trabajo para sobresalir en matemáticas. El gusto según proponen Mora y otros (2009) va acompañado de una actitud de trabajo. El individuo es consciente de la necesidad de trabajar sobre situaciones matemáticas para mejorar y potenciar sus habilidades (Mora et al., 2009).

Otros Factores. Dentro de los factores considerados por Mora et al., (2009) se plantean los individuales y sociales. Que implican de manera individual una elevada autoestima, iniciativa y perfeccionamiento en la realización de tareas. Además de factores sociales relacionados con su capacidad de sensibilidad hacia los demás, capacidad para tomar decisiones y para enfrentar tensiones interpersonales (Mora et al., 2009).

Frente a esta realidad y entendiendo el talento matemático como una necesidad educativa especial, la investigación que aquí se reporta, se enfoca en la atención y promoción. Por tanto se da paso a la descripción de algunos programas que desde diferentes pesrpectivas buscan atender el talento matemático.

1.4 Algunos programas que potencian el talento en matemáticas

En diferentes lugares del mundo se desarrollan programas extracurriculares que buscan identificar y atender el talento matemático. A continuación, se describen algunos de ellos, así como algunas características generales sobre sus intereses.

1.4.1 Proyectos en España

Según Carrillo y Jiménez (2015), el programa Estímulo del Talento Matemático (ESTALMAT) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en España, cuenta con varias sedes en este país. Su objetivo es detectar, orientar y estimular de manera continua, a lo largo de dos cursos, el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal, que se efectúa cada semana por tres horas. Los estudiantes que hacen parte de este programa son propuestos por sus profesores y posteriormente son sometidos a una evaluación de resolución de problemas y a una entrevista para seleccionar a los 25 alumnos que pueden recibir el programa en un ciclo escolar. Las clases son desarrolladas considerando el aprendizaje gradual, partiendo de temas muy sencillos hasta llegar a temas un poco más complejos. Carrillo y Jiménez comentan que “Estas actividades facilitan la potencialización del talento matemático ya que los alumnos van construyendo nuevos aprendizajes entorno al tema de manera divertida y diferente a lo que se desarrolla en sus escuelas” (p.139).

También se encuentra el programa de la Asociación Valenciana de Apoyo al Superdotado y Talentoso (AVAST). Este programa se encarga de la asistencia a las personas con altas capacidades, especialmente a los niños y jóvenes que necesiten acciones preventivas asistenciales o rehabilitadoras. Así como la difusión de información referente a las altas capacidades y la formación de profesionales que estén en contacto con las altas capacidades. Su principal objetivo es atender a los niños y jóvenes con altas capacidades y talentosos. Trabajan con alumnos desde los primeros años de primaria y también con alumnos de secundaria. Para hacer parte del programa, hay que comprobar que el alumno sea “superdotado” o poseedor de “alta capacidad”, mediante un informe psicológico, firmado y avalado por profesionales en el tema.

1.4.2 Proyectos en Estados Unidos

Este país, considerado un pionero en la atención a la población con altas capacidades, cuenta con el el programa Proceso Sistemático para Identificar el Talento Matemático, cuya institución a cargo es la National Association for Gifted Children, donde su principal objetivo es la detección de la población con talento excepcional.

También está el programa Center of Talent *Youth*, la institución a cargo es *John Hopkins University*, donde el principal objetivo es la identificación y atención de niños talentosos, con edades comprendidas entre los 7 y 15 años.

De otro lado está el programa *USA Mathematical Talent Search* (USAMTS), la institución a cargo es la *National Security Agency* (NSA), cuyo principal objetivo es la identificación de jóvenes talentosos entre 13 y 17 años.

1.4.3 Proyecto en Chile

En este país se encuentra un importante proyecto llamado Programa de Estudios y Desarrollo de Talentos Académicos (PENTA), dirigido a niños y jóvenes con talento. Este proyecto ha sido liderado por la Universidad Católica de Chile (UC). Se trata de un innovador programa de enriquecimiento extracurricular dirigido a escolares de 6º año básico a 4º año medio, en su mayoría de escasos recursos. Su principal objetivo es identificar, estimular y desarrollar el talento académico en niños y jóvenes cuyo entorno natural no les brinda suficientes oportunidades para cultivar su potencial.

Los exitosos resultados impulsaron la transferencia del modelo PENTA UC a otras universidades para ser implementado en otras regiones. Hoy existen cinco proyectos de desarrollo de talentos creados a partir del modelo de la UC: la Universidad Católica del Norte con DeLTA UCN, la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso con BETA, la Universidad de Concepción con Talentos UdeC, la Universidad de la Frontera con PROENTA-UFRO, y la Universidad Austral de Chile con Alta UACh.

1.4.4 Proyecto en México

En la ciudad de México se encuentra el centro de Alto Rendimiento en Matemáticas (CARMA), la institución a cargo es la Institución privada a cargo de Instructores de la Olimpiada de Matemáticas en San Luis Potosí, cuyo objetivo es la atención a niños y jóvenes talentosos entre los 7 y 17 años.

También encontramos la Fundación Telegenio, su principal objetivo es apoyar y fomentar el pleno desarrollo físico, emocional, intelectual y espiritual de niños y jóvenes con alto potencial, superdotados, con aptitudes sobresalientes o talentos especiales, ya sea de forma presencial, mediante el establecimiento de centros de enriquecimiento educativo o de metahabilitación, o de forma virtual o a distancia, mediante la ayuda de medios de comunicación televisivos, de radio, prensa o internet.

Otro programa relevante en este país es el Centro de Atención al Talento (CEDAT), es una Asociación Civil que reúne lo mejor del talento local y la experiencia internacional inspirando a los jóvenes y sus comunidades en la construcción de paz y prevención de la violencia, cuyo objetivo es brindar una atención de excelencia con un enfoque multidisciplinario a los niños y jóvenes con sobrecapacidad intelectual, encontrar a estos niños que con certeza se encuentran extraviados en el camino educativo e identificarlos para atenderlos a tiempo.

1.4.5 Proyectos en Colombia

A nivel nacional se encuentran el proyecto Semicírculo, liderado por la Universidad Sergio Arboleda de la ciudad de Bogotá. Este proyecto ofrece una metodología basada en el trabajo en un ambiente universitario y con matemáticos profesionales para atender a las personas que deseen, por su propia iniciativa y contando con el apoyo decidido de sus padres y de sus colegios, vincularse al programa.

La educación especial comprende dos grandes ámbitos de trabajo: con estudiantes que tienen dificultades de aprendizaje y con estudiantes cuyo rendimiento académico es más alto que el promedio. Existen en consecuencia dos modalidades de proyectos para trabajar el tema de educación especial. Para el caso del conocimiento matemático existen, a su vez, varias propuestas metodológicas para cada modalidad y dentro del segundo tipo las más conocidas son las Olimpiadas Matemáticas, los Semilleros de Matemáticas y organizaciones educativas de nivel básico que promueven actividades especiales para atender a los estudiantes de alto rendimiento.

Los programas descritos, además de los no mencionados en este documento, evidencian la gestión de algunos países en función de atender la población con talento excepcional. La importancia que para esta investigación implica el reconocer estos programas, radica en resaltar el poco manejo que a nivel nacional se le esta dando a esta población. Incluso algunas de las organizaciones mencionadas sólo se dedican al trabajo con estudiantes que ya han sido diagnosticados como talentosos mediante un test, entrevistas, exámenes, entre otros.

El interés de esta investigación se centra en resaltar la necesidad de brindar apoyo y estimular no solo a los estudiantes talentosos, si no a los que presentan las características descritas asociadas al talento matemático potencial.

2 Problema de Investigación

El talento matemático, como se mostró en el capítulo anterior, ha sido poco estudiado, por tanto no existe un consenso sobre cómo éste puede ser atendido desde la escuela regular ni tampoco desde los programas extracurriculares. Los programas de talento que se presentaron, son pocos y entre ellos no se logran identificar elementos comúnes y sólidos que indiquen cómo cada uno de ellos ha logrado tratar el talento; no hay metodologías didácticas claras, sino propuestas que pretenden poco a poco dar indicios de cómo éste puede ser desarrollado, para potenciar la formación sólida de futuros científicos, particularmente de matemáticos.

Aunque las investigaciones sobre el talento y en particular sobre el talento matemático pueden reunirse en dos granes grupo: unas centradas en la detección y otras en el seguimiento, en esta investigación interesa centrar la mirada en generar condiciones adecuadas en un contexto particular que permita potenciar el talento matemático. Es por ello, que se considera importante realizar una investigación, enmarcada en la postura del talento potencial propuesta por la UNESCO, que dotada de un Marco Institucional propicio, es decir de condiciones que sean reconocidas como necesarias, para desarrollar pensamiento matemático. Dado que no existe aún una definición “universal” de talento matemático, se considera necesario centrar la mirada sobre una forma específica de pensar en matemáticas. Por tanto se elige el pensamiento funcional por la necesidad de desarrollarlo desde edades tempranas y por su importancia en el estudio de conceptos y nociones matemáticas avanzadas.

Por tanto el interés de esta investigación se enfoca en desarrollar el talento matemático potencial de estudiantes con edades conprendidas entre los 9 y los 14 años que participan en un programa extracurricular, que será desarrollado bajo características que se detallan a continuación:

El Grupo extracurricular es llamado Grupo Talento Matemático UIS (GTM-UIS), su nombre lo recibe gracias a que los sujetos que hacen parte del grupo, son considerados talentosos potencialmente en matemáticas, ésto de acuerdo a las siguientes características: 1. Ser elegidos por un docente de matemáticas, 2. Manifestar agrado y empatía con la matemática mostrando predisposición para desarrollar Traeas matemáticas y 3. Estar interesado en participar de un grupo extracurricular enfocado en la matemática.

Así, la hipótesis de trabajo que se sigue en esta investigación plantea que un Marco Institucional adecuado para un programa extracurricular, GTM-UIS, puede propiciar el desarrollo del talento matemático potencial; el cual será visto particularmente a partir del pensamiento funcional. El desarrollo de dicho pensamiento estará definido por la participación de los estudiantes en la actividad generada por Tareas matemáticas rediseñadas, con el propósito de motivar el desarrollo de tres relaciones funcionales (Recurrencia, Correlación y Covariación).

A partir del análisis de las investigaciones y posturas expuestas, surge la siguiente pregunta de investigación:

> ¿Qué caracteriza el pensamiento funcional que desarrolla un grupo de individuos que participa en el GTM–UIS?

A partir de esta pregunta se establecen los objetivos de la investigación.

Objetivo general

Describir las relaciones de Recurrencia, Correspondencia y Covariación que desarrollan individuos en el GTM–UIS.

Objetivos Específicos

- Diseñar Tareas que potencien el pensamiento funcional y fomenten su desarrollo en la solución de diferentes Tareas relacionadas con las relaciones funcionales de Recursividad, Correspondencia y Covariación.
- Analizar las características de creación y desarrollo de un grupo extracurricular de estudiantes que propicie y fomente su talento matemático potencial.

3 Marco Conceptual

A continuación, se presentan los aspectos teóricos que fundamentan la investigación. Los elementos conceptuales definen la perspectiva de esta investigación sobre: el pensamiento funcional y el talento matemático.

La figura 11 reúne los principales componentes que sustentan la investigación que aquí se presenta; se muestra una composición que incluye el talento matemático potencial como foco central. Las tres relaciones funcionales propuestas por Smith (2008): Recurrencia, Correspondencia y Covariación que dan soporte al desarrollo del pensamiento funcional. Como pilares fundamentales la familia, la escuela regular y los programas extracurriculares (GTM-UIS), considerados como elementos significativos a la hora de potenciar o no el talento; estos últimos elementos son tomados en cuenta de acuerdo al Modelo Multifactorial de Talento (Mönks, 1992) y la adaptación de dicho modelo realizada por Mora, et al., (2009) para estudiantes colombianos.

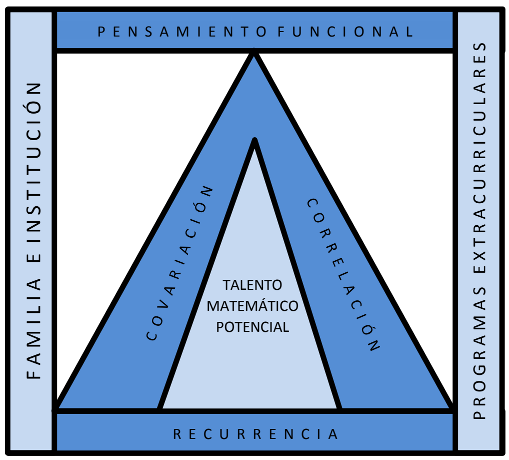


Figura 11. Relación entre los principales elementos que potencian el talento matemático.

A continuación se definen los elementos que conforman este Marco Conceptual y se explica la manera como dicho marco fue empleado para la recolección y análisis de datos.

3.1 Marco Institucional

En este trabajo se ha denominado Marco institucional al contexto que fue creado al interior del GTM-UIS, pensado para desarrollar pensamiento funcional en un grupo de sujetos considerados con Talento Matemático Potencial, de acuerdo a las condiciones expuestas en el capítulo 2. A continuación se presentan de manera explícita los elementos que conforman este Marco Institucional.

1. El rol del docente como mediador u orientador. Aquí se resalta la influencia que ejerce en este contexto, la apropiación de un rol que implica cuestionar, generar en los estudiantes la necesidad de expresar sus ideas y conjeturas de forma clara. Conducir a partir de preguntas (que pueden o no estar formuladas en la Tarea) hacia la manera general de ver lo que se está proponiendo, por ejemplo, la forma en que se construye una secuencia.

2. El rol del estudiante. Lo que al interior del GTM-UIS se busca, es que el estudiante haga parte activa de la actividad que se genera a partir de la Tarea. Esto implica tener una actitud crítica, no sólo de las producciones personales, sino de las produsciones del otro. Que se generen discusiones, que permitan defender el punto de vista propio y a su vez, conocer el de los compañeros; tomando gran importancia aquí la comunicación y la verbalización.

3. Tipos de Tareas. Fueron diseñadas con dos intenciones, la primera tiene que ver con el desarrollo de pensamiento funcional y la segunda con la potencialización de Talento Matemático Potencial. La primera de las intenciones se plantea de acuerdo a investigaciones expuestas en lo antecedentes (Pinto 2016; Cañadas y Molina 2016; Batías 2016, Blanton y Kaput 2011, entre otros), estas Tareas siguen ciertas características, por ejemplo, requieren el trabajar a partir de una secuencia, se presentan los primeros elementos (3 o 4) y se cuestiona sobre los posteriores, guiando estas preguntas hacia una generalización de la manera en que se va construyendo la secuencia. Para responder a la segunda intensión, estas Tareas fueron planteadas con un nivel de dificultad situado por encima del que tenían los participantes del GTM-UIS, la intensión fue exigir al máximo sus capacidades. También se pretendía que estas Tareas fueran retadoras, en el sentido de que generaran en el estudiante la motivación para enfrentarlas.

4. Análisis de Tareas. Cada Tarea fue analizada de acuerdo a las relaciones funcionales que propone Smith (2008) de Recurrencia, Correspondencia y Covariación. Estas relaciones son

entendidas en este documento como las categorías de análisis que permiten evidenciar pensamiento funcional en la actividad que genera la Tarea. Además de las relaciones funcionales, surgen cuatro momentos (Categorías emergentes), que marcan un camino en el desarrollo de las Tareas, a continuación, se muestra la relación que en esta investigación se logró establecer entre las relaciones funcionales y los cuatro momentos (Categorías emergentes).

Momento 1 (Participar de una situación funcional). Este momento puede asociarse con la relación de Recurrencia, aquí el estudiante empieza a ver la forma en que se construye la secuencia, pero a partir de lo que es evidente ante sus ojos, observando esos primeros elementos de la secuencia (los que son dados), viendo la variación e intentando identificar el patrón de variación, que es lo que define la relación de Recurrencia.

Momento 2 (Centrar la atención en la relación entre las variables identificadas en el momento 1). Este momento se ha asociado con la relación de Correspondencia y la relación de Covariación de manera preliminar; dado que la intensión en este primer momento es que el estudiante empiece a identificar las variables y cómo estas se relacionan; esto debe ser guiado por las preguntas que se formulan en la Tarea.

Momento 3 (Registrar los valores correspondientes a las cantidades que varían). Este momento se asocia con la Relación de Covariación, esto de acuerdo a lo planteado por Doorman, Drijvers, Gravemeijer, Boon y Reed (2012), quienes afirman que se destacan como representaciones útiles para el studio de la covariación el uso de tablas y gráficos; ésto coincide con lo que se pretende alcanzar a partir de este tercer momento, que los estudiantes registren los datos de las catidades que varían, de manera tabular, numérica, gráfica, verbal, entre otras; el registro escogido va a depender de las capacidades del estudiante y del mismo contexto que proponga la secuencia.

Momento 4 (Construcción de una expresión). A este momento se le asocia la relación de Correspondencia; esto de acuerdo a lo propuesto por Smith (2008), quien explica que es con la relación de Correspondencia que el elumno logra identificar la notación algebraica convencional. Esta asociación tiene que ver con esa expression algebraica, pero en este caso no se pretende que el sujeto perteneciente al GTM-UIS construya una expression alfanumérica, entendiendo que una espresión algebraica puede darse de manera verbal, o escrita en palabras. Aquí se pretende que el estudiante describa (de acuerdo a sus posibilidades) la forma en que la secuencia se va construyendo, si es possible de manera general.

3.2 Familia e institución

Como se ha estudiado hasta el momento (modelo multifactorial de talento, Mönks (1992), Teoría de los tres anillos Renzulli (1977), modelo de talento matemático, Mora et al. (2009), esquema del paso del potencial de un individuo hacia le talento (Benavides y Mz-Machado (2012), entre otros), son diversos los factores que intervienen en la determinación del talento matemático de un individuo. En particular, se considera fundamental la actitud de los estudiantes hacia la matemática, el interés por entender y comprender el contexto y la utilidad de los conceptos aprendidos, la participación activa en cada actividad extracurricular que implique un nuevo reto en matemáticas, entre otros. El enriquecimiento, tratamiento y potenciación de estas características identificadas en los participantes del GTM–UIS, corre en gran parte por cuenta de sus familias, algunos maestros y la promoción de actividades por parte de los colegios que generen motivación. Aquí se resalta el papel de la familia e institución en la adquisición de habilidades matemáticas que pueden ser desarrolladas y potenciadas para motivar el desarrollo del talento. Al respecto Roa-Fuentes (2012) comenta:

El talento sólo puede desarrollarse mediante las diferentes relaciones individuales y colectivas, de tal

> manera, que el desarrollo del talento de un individuo depende de las condiciones de su contexto y de las oportunidades de enriquecimiento que éste le ofrezca (p.45).

Cabe destacar que el trabajo individual es un aspecto fundamental. Desde la perspectiva que presenta esta investigación, no es posible el desarrollo del talento matemático sin un compromiso personal. El individuo debe garantizar su participación activa en todo aquello que su contexto le ofrezca. Feldhusen (2003) afirma que es imperativo que los alumnos lleguen a conocer y entender su propio talento y tomen parte activa en su desarrollo.

A continuación, se describen las características generales que en este caso particular, ofrece un programa de Enriquecimiento Extracurricular. Donde la participación activa de los estudiantes es fundamental para generar un ambiente propicio para potenciar el talento matemático.

3.3 Características de la Tarea y Actvidad generada

La propuesta que en esta investigación se presenta, busca integrar características que se asemejan a las de una comunidad matemática, por ejemplo: espacios de discusión, reflexión, comunicación y exposición de conjeturas, materiales apropiados y suficientes para el desarrollo de cada Tarea, asesoría personalizada, entre otros. A continuación, se describen dos términos que desde esta investigación tienen mucha relevancia, y que en algunos casos tienden a confundirse o tomarse como sinónimos, por esa razón surge la necesidad de clarificar cómo se entiende la Tarea y la Actividad desde esta investigación.

El término Tarea, toma una connotación desde la perspectiva de la teoría de la Objetivación, entendida como la encargada de generar la Actividad. La Tarea encierra todo el proceso de investigación, análisis, diseño, construcción, planificación, entre otros procesos, que toma como sustrato el profesor.

En el GTM–UIS, el diseño de Tareas busca construir un ambiente desafiante, que promueva la implementación de razonamientos, estrategias y habilidades que no son propias de la edad y formación escolar de los individuos participantes del proyecto. Es precisamente en este punto donde se espera encontrar evidencias de la presencia de habilidades sobresalientes, que han sido promovidas o impulsadas, gracias a las condiciones que el GTM–UIS brinda. En el desarrollo y análisis de este trabajo, dichas habilidades se asocian con las relaciones funcionales antes descritas.

Como muestra Martínez (2016), la Actividad desde la perspectiva de la Objetivación se entiende como un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objeto impregnado desde el primer momento de significados culturales y conceptuales.

El desarrollo de la Actividad motiva una reflexión constante y genera dinámicas de discusión, se busca que cada estudiante como miembro activo, logre alcanzar unas expectativas, que Radford (2013) formula en términos de una ética comunitaria, donde los estudiantes:

a) Participan activamente en el espacio público.

b) Muestran una apertura de espíritu en las discusiones y debates.

c) Se muestran solidarios con los otros alumnos.

d) Laboran hacia la constitución de una conciencia crítica. (p. 8)

El rol del profesor es fundamental para promover esas formas alternativas de interacción y producción de saber que tengan una visión más comunitaria. La intervención del profesor más que contestar preguntas va encaminada a problematizar para que los estudiantes logren reconocer diferentes elementos de los objetos matemáticos por sí mismos. El rol del profesor se puede entender mejor en la interacción entre estudiantes y entre estudiantes y profesores. De acuerdo con Radford (2010), el profesor no puede transmitir saberes, pero si puede crear las condiciones de posibilidad para que los estudiantes transformen el objeto de conocimiento en un objeto de conciencia.

3.4 Pensamiento Funcional

La definición de pensamiento funcional que guía el desarrollo de esta investigación, toma elementos principalmente de Cañadas y Molina (2016) quienes describen al Pensamiento Funcional como: "un proceso cognitivo clave… basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (p. 3). Esta definición reúne elementos que fueron tomados en cuenta para el diseño de las Tareas propuestas a los estudiantes del programa GTM–UIS. En esta investigación se considera al pensamiento Funcional como un proceso de cognitivo, que centra su potencial en las características necesarias para que un estudiante logre enfrentar una situación funcional, evidenciando acciones específicas como: hallar relaciones entre variables, identificar cómo se construye cada variable, analizar las implicaciones de una variable respecto a la otra, recurrir a diferentes representaciones, describir verbalmente la manera en que la función se va construyendo, predecir el comportamiento de la función en casos posteriores, entre otros. Estas características no son consideradas innatas dentro de este estudio, por el contrario, se parte de la posibilidad de impulsar su adquisición a partir de un contexto adecuado que contribuya a su desarrollo y en la medida de las posibilidades de cada individuo, se evidencie una evolución.

Smith (2008) propone tres relaciones funcionales que permiten identificar la presencia de pensamiento funcional, esas relaciones han sido retomadas por Blanton y Kaput (2004), Pinto

(2016), Cañadas y Pinto (2016), Bastías (2016), entre otros. Como resultado de las investigaciones mencionadas, se concluye que es posible evidenciar el desarrollo de Pensamiento Funcional a partir estas Relaciones Funcionales. A continuación, se presenta la definición que surge a partir de las anteriores investigaciones. Esas definiciones son presentadas de acuerdo a lo propuesto por Blanton y Kaput (2004).

3.4.1 Relaciones Funcionales (Recurrencia, Correspondencia y Covariación)

En esta investigación las relaciones funcionales propuestas por Smith (2008) y trabajadas ampliamente por Cañadas y Pinto (2016); Batías (2016); Pinto (2016); entre otros, son las categorías de análisis que permiten evidenciar la existencia de pensamiento funcional en los estudiantes que pertenecen al GTM-UIS. Estas relaciones han sido identificadas al trabajar Tareas que implican el uso de secuencias con estudiantes de básica primaria. Los resultados obtenidos a partir de investigaciones centradas en el desarrollo de pensamiento funcional (Blanton y Kaput 2011; Cañadas y Molina 2016; Pinto 2016, Batías 2016, entre otros) también favorecen la aparición de habilidades matemáticas que posibilitan un mejor desempeño en el área de matemáticas para grados posteriores.

La relación de Recurrencia es entendida desde el punto de vista de Smith (2008) como una relación que implica encontrar la variación o el patrón dentro de una secuencia de valores; es decir que centra su atención en la variación ya sea de la variable dependiente o independiente. De acuerdo a Pinto (2016), esta relación suele trabajarse a través de patrones en educación infantil, en primeros cursos de educación primaria y se considera la más básica.

La relación de correspondencia centra el foco en la relación entre las variables; de acuerdo a Smith (2008) se entiende como la relación entre los pares correspondientes de la variable.

La relación de covariación implica la comprensión de cómo varían los valores de la variable dependiente en función de cómo varían, los valores de la variable independiente. (Smith, 2008 p. 147); Batías (2016) cita a (Confrey y Smith, 1995) para dejar explícita la diferencia entre la relación de Correspondencia y Covariación como se cita a continuación:

> El enfoque covariación difiere del enfoque de la correspondencia, principalmente en su definición abstracta que enfatiza la regla que indica de manera explícita (notación algebraica) y en una direccionalidad de x a f (x). La covariación ofrece una idea en donde la construcción del dominio se establece como una estructura matemática ordenada, el carácter operativo del dominio y del recorrido (ambos valores que ven en escala) se vuelven esenciales, su vínculo se torna relacional y espacial, pues la regla se vuelve una característica provenida de las acciones reiteradas que crea la base para las operaciones. La diferencia radica, en que la relación de correspondencia enfatiza que el alumno logre identificar la notación algebraica convencional, mientras que el enfoque de la covariación sitúa su atención en los cambios correspondientes en las variables individuales (p.18).

Es precisamenete a partir de las relaciones funcionales anteriormente descritas que se pretende hallar evidencias de pensamiento functional en los sujetos que participan del GTM-UIS.

3.5 Talento Matemático Potencial

La concepción de talento matemático potencial en esta investigación busca diseñar Tareas relacionadas con el pensamiento funcional, de tal manera que todos los estudiantes participantes del proyecto tengan la oportunidad de desarrollar al máximo sus habilidades matemáticas. Dadas las condiciones de ingreso al GTM–UIS, Ser elegidos por sus profesores, Manifestar gusto por las matemáticas e Interesarse en participar en el GTM–UIS, se espera generar un ambiente de trabajo que potencie el pensamiento funcional.

Para definir la postura que el Talento asume en esta investigación, se muestra la reconstrucción del modelo planteado por Mora, Casas y González (2009), donde se destacan algunos elementos que hacen parte del entorno del estudiante y que desde esta investigación impactan en la evolución o no del talento, definido como Talento Matemático Potencial.

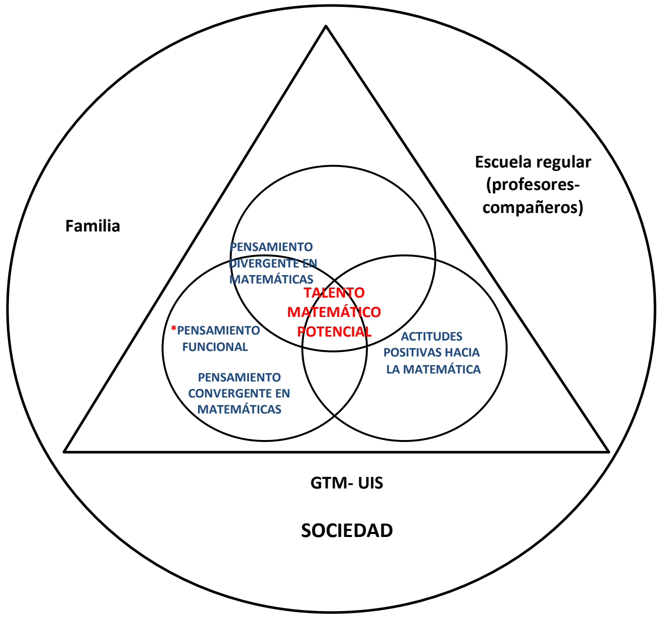


Figura 12. Reconstrucción del modelo del talento Matemático.

Los elementos que constituyen el modelo de Mora et al., (2009) han sido explicados en el capítulo I de esta investigación; lo novedoso de la reconstrucción que aquí se presenta, es la contemplación del Pensamiento Funcional como parte del pensamiento convergente en matemáticas, también el fijar la intersección no solo como Talento, sino como talento matemático potencial y finalmente la inclusión de GTM–UIS como un grupo extracurricular que forma parte de la sociedad.

Como muestra la figura 12, en esta investigación el talento matemático potencial es la intersección de tres características que pueden ser desarrolladas por los estudiantes: una actitud positiva hacia las matemáticas, un pensamiento divergente en matemáticas y el pensamiento convergente en matemáticas que desde esta perspectiva se centra en el desarrollo del

Pensamiento Funcional. Estas características sustentan el criterio de selección de los integrantes del GTM–UIS.

Actitud positiva hacia las matemáticas: Esta característica está propuesta como uno de los requisitos de ingreso al GTM–UIS. A partir de ella, se postula que las otras dos pueden ser desarrolladas dentro de un contexto de enriquecimiento extracurricular.

Pensamiento divergente en matemáticas: El trabajo que puede ser desarrollado en un programa extracurricular, permite una actividad matemática alterna a la propuesta por la escuela regular. En este sentido la actividad matemática de los estudiantes puede ser no esperada en relación con su edad y formación. Por tanto, pueden emerger formas de pensamiento matemático divergentes, es decir, que no están asociadas con una forma matemática "convencional" pero que muestran el desarrollo de habilidades en los estudiantes que pueden coordinarse y encaminarse a formas de pensamiento matemático formal.

Pensamiento convergente en matemáticas: Como objeto que fundamenta la actividad matemática desde el enfoque convergente, se propone el pensamiento funcional. Así el diseño de Tareas y desarrollo de la actividad matemática de los estudiantes se centrará en el análisis de Tareas que implican una situación funcional. Para las edades de los estudiantes que participan en el GTM–UIS esto resulta en matemáticas no convencionales que dan lugar a la construcción de un espacio de trabajo desafiante y retador.

En esta investigación se define un concepto, que a pesar de tenerse en cuenta en otras investigaciones relacionadas con la Educación Matematica, no cuenta con un soporte teórico que lo posicione dentro de la comunidad; este término es el Talento Matemático Potencial, que cuenta con muchas de las caráterísticas típicas del talento matemático, pero se diferencia en que no se trabaja con sujetos que hayan sido diagnosticados como talentosos en matemáticas, sino con sujetos que presentan tres características: Ser elegidos por sus profesores, manifestar gusto por las matemáticas e Interesarse en participar en el GTM–UIS. Estas características son consideradas suficientes como punto de partida, para desarrollar un talento actual. Esta visión del Talento está asociada al esquema del paso del potencial de un individuo hacia el talento, que propone Benavides y Mz-Machado (2012), a partir del modelo de Potencial y Talento que analiza Gagné (1993). Por tanto, en este trabajo se contempla al talento como un proceso inacabado que puede llegar a desarrollarse si se porporionan las condiciones apropiadas.

El siguiente capítulo presenta los elementos referentes a la metodología diseñada para el desarrollo de la propuesta.

4 Metodología

A continuación, se presentan los componentes del marco metodológico que enmarca este trabajo de investigación. Se presenta el tipo de investigación, la población de estudio, el diseño de la recolección de información, la implementación, las categorías para el análisis de datos y la manera como se realiza dicho análisis.

La investigación reportada en este documento es de tipo cualitativo; de acuerdo a Stake, 2010 “el objetivo de la investigación cualitativa es la comprensión, centrando la indagación en los hechos” (p. 32). Partiendo de este enfoque, se pretende analizar la actividad que se genera al desarrollar cada una de las Tareas propuestas, caracterizando el pensamiento funcional asociado, mediante la identificación de relaciones funcionales como la Recurrencia, la Correspondencia y la Covariación.

La siguiente figura muestra de manera general las fases que guiaron el desarrollo de este trabajo.

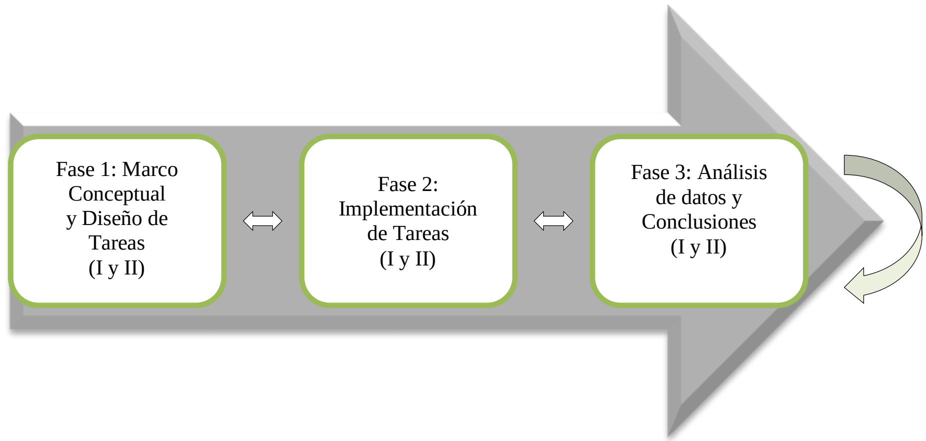


Figura 13. Modelo de la metodología de investigación.

A continuación, se describen cada una de estas fases, incluyendo los elementos principales que fueron constituyendo el método que guió esta investigación.

4.1 Construcción del Marco Conceptual y Diseño de Tareas

Esta fase permitió en primer lugar aclarar el rumbo de la investigación y en segundo lugar, dar peso conceptual y teórico a cada uno de los elementos que sustentan y dan sentido a la investigación.

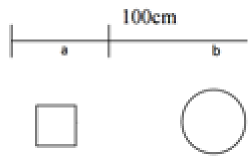
En esta investigación se entiende la Tarea desde el punto de vista de la teoría de la objetivación como la que genera la actividad. Pero no solamente esto constituye una Tarea, se entiende una Tarea como un conjunto de elementos que toma el profesor como base para su enseñanza: características de las Tareas (abiertas, cerradas, ejercicios, retadoras), análisis a priori, la implementación en clase y el análisis a posteriori. Diezmann (2004) señala: “las tareas matemáticas retadoras para estudiantes dotados deben ser auténticas tareas que les ofrezcan oportunidades para emular la práctica de los matemáticos, en un nivel menos sofisticado” (p. 14). La Tarea debe ser suficiente para cada individuo, dependiendo de su necesidad y de su potencial.

Las Tareas que fueron implementadas en el GTM–UIS durante el segundo semestre del 2016 y el primer semestre de 2017, son retadoras, solicitan el desarrollo del pensamiento funcional para su realización, mediante la aparición de al menos una de las tres relaciones, Recurrencia, Correspondencia y Convariación, y posibilitan el uso de diferentes representaciones. Las Tareas se presentan en forma de tabla, precisando la función que describe la Tarea (columna 3), el nombre de la Tarea (columna 4) y una descripción de los cuestionamientos principales.

Tabla 2.

Secuencia de las Tareas implementadas en las dos aplicaciones del GTM-UIS.

Fecha	**Forma de la Función**	**Nombre de Tarea**	**Principales cuestionamientos**
05/08/16	$y = 650x$ $x =$ número de barras de Bubbaloo $y =$ Precio $y = 2x$ $x =$ cantidad de perros $y =$ Cantidad de ojos $y = (x \cdot x) + 1$ $x =$ Cantidad de semanas $y =$ Altura de la planta	Actividad diagnóstica inicial	Si una barra de bubbaloo cuesta 650 ¿Cuánto cuestan 36 barras? ¿Cuántos ojos hay en 100 perros? ¿Cuántos centímetros creció la planta en 2 meses?
12/08/16	$v = x \cdot (28 - 2x) \cdot (22 - 2x)$ para el volumen máximo se busca que mediante una animación en un software de geometría dinámica (geogebra), los estudiantes puedan analizar las características de la caja, cuando alcanza ese volumen máximo.	Construyendo cajas	¿Es posible hallar un volumen máximo para la caja, dadas las condiciones iniciales? ¿por qué?
19/08/16	$v = x \cdot (28 - 2x) \cdot (22 - 2x)$ para el volumen máximo se busca que mediante una animación en un software de geometría dinámica (geogebra), los estudiantes puedan analizar las características de la caja, cuando alcanza ese volumen máximo.	Construyendo cajas	¿Es posible hallar un volumen máximo para la caja, dadas las condiciones iniciales? ¿por qué?
26/08/16	$v = x \cdot (28 - 2x) \cdot (22 - 2x)$ para el volumen máximo se		

	busca que mediante una animación en un software de geometría dinámica (geogebra), los estudiantes puedan analizar las características de la caja, cuando alcanza ese volumen máximo.	Construyendo cajas	¿Es posible hallar un volumen máximo para la caja, dadas las condiciones iniciales? ¿por qué?
02/09/16	$A(cuadrado) = L \times L$ $A(círculo) = \pi r^2$	Optimizando  cuerdas	Hallar la medida de a y b para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
09/09/16	Esta experimentación se dio por ensayo y error tras la manipulación de los objetos llegando a una respuesta aproximada.	Optimizando cuerdas	Hallar la medida de a y b para que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima.
16/09/16	Actividad Extra	Descubriendo la matemática en el arte (video y teselados)	Actividad Extra
23/09/16	$V\ (prisma) = a \cdot b \cdot h$ $V(cuña) = \frac{1}{2}(a \cdot b \cdot h)$	Vamos a la piscina	¿Qué capacidad tiene la piscina?
30/09/16	$V\ (prisma) = a \cdot b \cdot h$ $V(cuña) = \frac{1}{2}(a \cdot b \cdot h)$	Vamos a la piscina	¿Qué capacidad tiene la piscina?
07/10/16	Compresión de lectura y pensamiento espacial.	Es hora de competir	Si tuvieras que representar el movimiento de los tres participantes, ¿cómo lo harías? ¿Quién crees que ganará la carrera? ¿Por qué?
14/10/16	Compresión de lectura y pensamiento espacial.	Es hora de competir	Si tuvieras que representar el movimiento de los tres participantes, ¿cómo lo harías? ¿Quién crees que ganará la carrera? ¿Por qué?
28/10/16	$G = 2x + 2$ $B = x + 4$ G = Baldosas grises B = Baldosas blancas x = posición de la figura $y = 2x + 1$ y = Cantidad de rectángulos	Entrevista Final Baldosas Secuencia de rectángulos	Sara quiere contarle a su mejor amiga por teléfono cómo encontrar el número de baldosas grises y baldosas blancas para la figura 100 de la secuencia. Escribe qué cómo podría hacer esto. La profesora Mónica quiere

	x = Posición de la figura		construir una Figura grande. Explícale a la profe qué debe hacer para construirla.
16/02/17	$y = x^2 + 1$ y = Número de días. x = Número de partes del cuerpo. $y = (x \cdot 3) + 2$ y = Número de partes de la flor. x = Número de la aplicación.	Entrevista Inicial (problema de la serpiente y problema de la flor)	¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100? ¿Cómo se verá la flor tras la aplicación 1000?
17/02/17	$y = x^2 + 1$ y = Número de días x = Número de partes del cuerpo. $y = (x \cdot 3) + 2$ y = Número de partes de la flor. x = Número de la aplicación.	Entrevista Inicial (problema de la serpiente y problema de la flor)	¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100? ¿Cómo se verá la flor tras la aplicación 1000?
24/02/17	$G = 2x + 2$ $b = x + 4$ **g** = Baldosas grises b = Baldosas blancas x = posición de la figura $y = 3x + 6$ y = Número total de baldosas x = Posición de la figura	Secuencia de baldosas	¿Cuántas baldosas grises y blancas tendrá cualquier figura de la secuencia? ¿Cuántas baldosas tendrá en total?
03/03/17	$G = 2x + 2$ $B = x + 4$ **g** = Baldosas grises b = Baldosas blancas x = posición de la figura $y = 3x + 6$ y = Número total de baldosas x = Posición de la figura	Secuencia de baldosas	¿Cuántas baldosas grises y blancas tendrá cualquier figura de la secuencia? ¿Cuántas baldosas tendrá en total?
10/03/17	$Representación\ tabular$	Monitoreando el ritmo cardiaco.	Representa el ritmo cardiaco a medida que avanzaba en el recorrido.
17/03/17	$Representación\ tabular$	Monitoreando el ritmo cardiaco.	Representa el ritmo cardiaco a medida que avanzaba en el recorrido.
24/03/17	$Representación\ tabular$	Analizando diferentes representaciones (vela derritiéndose y algodonero).	Representa de otra forma la situación.
31/03/17	$Representación\ tabular$	Analizando	Representa de otra forma la

		diferentes representaciones (vela derritiéndose y algodonero).	situación.
06/04/17	$y = 2^{x+1}$ y = Número de vagones x = Número de paradas	Entrevista final (tren en movimiento).	Un tren parte con dos vagones y va recogiendo el doble de la anterior en cada parada.
07/04/17	$y = 2^{x+1}$ y = Número de vagones x = Número de paradas	Entrevista final (tren en movimiento).	Un tren parte con dos vagones y va recogiendo el doble de la anterior en cada parada.

4.2 Contexto experimental

Este aparte muestra la forma en que fueron seleccionados los participantes del GTM-UIS, el contexto en el que fueron impementadas las Tareas y la manera como se recogieron y analizaron los datos.

4.2.1 Selección de los participantes del GTM-UIS

Este trabajo inicia con la convocatoria de un grupo de estudiantes pertenecientes a tres instituciones públicas cercanas a la Universidad Industrial de Santander, los criterios de selección fueron tres:

1. Ser elegidos por sus docentes de matemáticas.
2. Manifestación de empatía con la mátemática y predisposición para trabajar Tareas relacionadas con esta asignatura.
3. Interés en participar de un grupo extracurricular enfocado en la matemática.

4.3 Características de la implementación de las Tareas

Las condiciones generadas al interior del GTM-UIS representan para los estudiantes un espacio que no coincide con su experiencia escolar. Estas condiciones, además de exigir en los estudiantes una participación activa, contaba con elementos ajenos a su cotidianiedad. Por ejemplo, la cámara de grabación, que generaba distracciones y coibiciones en los estudiantes, al momento de expresar sus ideas en público.

Se trabajaron dos aplicaciones, la primera fue realizada en el segundo semestre del 2016 y la segunda en el primer semestre de 2017. Se inició con un total de 21 estudiantes con edades comprendidas entre los 9 y 14 años; durante esta aplicación se trabajaron 7 Tareas desarrolladas en 12 sesiones, cada sesión con una duración de tres horas. La intención principal de esa primera aplicación fue que los estudiantes lograran adaptarse al contexto que se ofreció al interior del GTM-UIS, ese contexto tiene que ver con un espacio donde el estudiante tenía la libertad de expresar sus ideas y conjeturas. La actividad generada por la Tarea estaba encaminada a propiciar un ambiente de discusión, reflexión y búsqueda de soluciones autenticas por parte de cada individuo perteneciente al grupo.

Para implementar la segunda aplicación fueron escogidos 7 estudiantes bajo los siguientes criterios de selección:

1. Haber participado en la mayoría de las sesiones de la primera aplicación.
2. Destacarse por una participación activa, curiosidad por la nueva información matemática, disposición para trabajar en grupo, exponiendo y defendiendo sus ideas y conjeturas.
3. Que en sus producciones haya evidenciado al menos una de las relaciones funcionales: Recurrencia, Correspondencia y Covariación.

Durante esta aplicación se trabajaron 6 Tareas desarrolladas en 10 sesiones, cada sesión con una duración de tres horas. La elección de 7 estudiantes se justificó por la necesidad de delimitar aquellas nuevas etapas y categorías, que permitirían caracterizar el pensamiento funcional mediante las relaciones funcionales presentes en el desarrollo de las Tareas, y el rendimiento de los estudiantes a la hora de abordarlas. Además, esta perspectiva metodológica sustenta el ejercicio investigativo propuesto, que busca identificar y describir lo más explícito posible las estrategias que caracterizan el desarrollo y evolución del pensamiento funcional. Particularmente, en situaciones matemáticas que impliquen la participación de los estudiantes en una situación funcional.

Cada sesión se desarrolló en las instalaciones de la Universidad Industrial de Santander, con una duración de tres horas por sesión. La dinámica de clase se caracterizó por impulsar la participación activa de los estudiantes, motivar las disusiones alrededor de un tema, establecer conjeturas que debían exponerse para concluir su veracidad o no, entre otros. Otro elemento a destacar dentro de la dinámica de clase, es el papel del profesor, no como único poseedor de la verdad, sino como una parte activa en la construcción de ideas, conceptos y conjeturas, que se plantean para ser discutidas y analizadas, en la búsqueda constante de una mejor experiencia tanto de enseñanza como de aprendizaje.

4.6 Recolección de datos

Todas las sesiones fueron video-grabadas y fue recogido el material escrito por los estudiantes. De las sesiones Video-grabadas fueron seleccionadas tres para su transcripción, bajo los siguientes criterios:

1. Que impliquen trabajo con secuencias.
2. Que evidencie los dos tipos de desarrollo (entrevistas y sesiones intermedias).
3. Que después de ver todos los videos (2 o 3 veces), se logre evidenciar en la actividad que generaron esas Tareas, la existencia de pensamiento funcional, a partir de la presencia de las relaciones de Recurrencia, Correspondencia y Covariación.

4.6.1 Categorías de análisis

Para realizar el análisis de datos se tuvo en cuenta la Teoría Fundamentada de (Corbin y Strauss, 1990) en lo referente a procedimientos, recogida y análisis de datos; la construcción de las categorías se dio con base a los elementos teóricos presentados en los capítulos previos. También se implementó el uso de "categorías emergentes" que más adelante, en este mismo capítulo son explicados como los cuatro momentos que guian el desarrollo de la Tarea, estos momentos surgieron como resultado del análisis de la primera aplicación de Tareas.

4.6.2 Categorías de análisis emergentes

A partir del estudio del contexto generado al interior del GTM-UIS y la manera en que se implementó la primera aplicación de Tareas, surgen Categorías de Análisis emergentes que se han considerado como los cuatro momentos que se describen a continuación.

1. Participar en una "Situación Funcional": Este primer momento obedece al primer encuentro del estudiante con la Tarea, aquí se busca que los enunciados y la información sean claros y permitan al estudiante comprender la actividad que busca ser generada por la Tarea.
2. Centrar de la atención en las relaciones definidas entre las variables, este segundo momento obedece al tipo de cuestionamentos que fueron pensados para conducir al estudiante al encuentro con las variables que intervienen en la Tarea, y a identificar cómo se van relacionando dichas variables.
3. Registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían; este tercer momento va a depender de las habilidades de cada estudiante, y el contexto en que se desarrolle la Tarea. En este momento pueden aparecer registros tabulares, gráficos, numéricos,

verbales, entre otros.

4. Construir una expresión; este cuarto momento busca conducir al estudiante hacia una expresión que le permita saber la manera en que se va construyendo la secuencia de manera general. Con este momento no se pretende que el estudiante llegue a manipular expresiones alfanuméricas, sino que logre expresar de manera verbal la forma en que está cosntruyéndose la secuencia. A este momento se le ha considerado como un momento de validación, esto porque corresponde a ese momento final en cada Tarea, donde se pide al estudiante explicar a otra persona la manera en que está entendiendo la construcción de la secuencia. Este momento podría pensarse como una validación en un segundo nivel, pues se considera como primer nivel el convencerse a sí mismo, y en éste se trata de convencer a otro de la validez de lo que se está haciendo.

A continuación, se presenta el capítulo de análisis de datos, donde se trabaja sobre tres de las Tareas implementadas y el desarrollo de la Actividad que a partir de esas Tareas se generó. También se presenta un aparte que habla sobre los resultados que surgen a partir del análisis de las Tareas, centrando su atención en la aparición de pensamiento funcional, que para este caso, se evidencia a partir de las relaciones funcionales propuestas por Smith (2008), Recurrencia, Correspondencia y Covariación.

5 Análisis de datos y Resultados

En este capítulo se presentan tres de las tareas que se implementaron durante la segunda aplicación del GTM–UIS. Estas tareas fueron escogidas porque desde su diseño y análisis a priori, se puede ver una alta intencionalidad de desarrollar pensamiento funcional a partir de su aplicación. El principal objetivo con la aplicación y análisis de estas tareas es evidenciar el desarrollo de pensamiento funcional en la producción intelectual de los participantes del GTM–UIS.

5.1 Análisis a priori

Se realizó un análisis a priori sobre las tareas, señalando las posibles formas en que los estudiantes podían desarrollarlas, destacando los tipos de representaciones, así como las tres relaciones funcionales que podrían aparecer.

A continuación, se presentan las tres Tareas, así como su respectivo análisis a priori, en el cual se toman en cuenta los cuatro momentos por los que puede pasar un estudiante al enfrentarse a una situación funcional.

5.1.1 Entrevista Inicial (Tarea de la flor y Tarea de la serpiente)

Esta tarea está conformada por dos problemas, cada uno de ellos involucra como mínimo dos preguntas que fueron pensadas y diseñadas con el fin de contribuir en el desarrollo del pensamiento funcional, a partir de las tres relaciones funcionales propuestas por Smith (2008): Recurrencia, Correspondencia y Covariación.

La primera Tarea es la de la serpiente, la relación funcional que entra en juego es $f(x) = x^2 + 1$. La segunda Tarea es la de la flor, representada por la relación funcional $f(x) = (n \times 3) + 2$. Las dos relaciones funcionales propuestas involucran adición, multiplicación y potenciación, operaciones básicas que fueron planteadas pensando en la capacidad y nivel académico de los participantes del GTM–UIS.

En particular Pinto (2016), hace referencia a un documento propuesto por el Ministerio de Educación de Canadá (Ministry of Education, 2008), donde se presenta una guía para la enseñanza de las matemáticas desde la educación infantil hasta sexto grado de primaria; en esta guía se muestra una serie de tareas con características similares a las Tareas que proponemos en esta aplicación del GTM–UIS. El documento del Ministerio de Educación de Canadá se presenta como un apoyo para los docentes de matemáticas, allí se resalta la necesidad de emplear sistemas de representaciones pictóricos, tabulares y gráficos para dar cuenta de diferentes maneras de expresar la relación entre variables.

A continuación, se presenta el análisis a priori de esta Tarea, donde se plantean algunos de los posibles caminos de solución. En este análisis se muestra la Tarea tal y como se presentó a los estudiantes y el desarrollo que se espera de la misma, momento a momento.

Situación 1: Problema de la serpiente

En el zoológico de reptiles de la Universidad Estatal están estudiando el crecimiento de una serpiente Pitón cada día. Para ayudarlos, debes encontrar el número de partes que tendrá una serpiente en crecimiento cada día. Debes tener en cuenta que cada triángulo equivale a una parte del cuerpo.

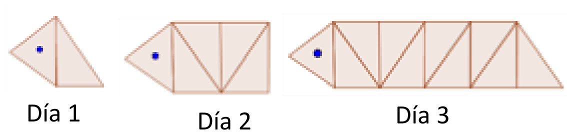


Figura 14. Tarea de la serpiente, adaptación de Blanton y Kaput, 2011, p.11.

a) ¿Cuántas partes tendrá una serpiente en el día 6?

b) ¿Cuántas partes tendrá una serpiente en el día 10?

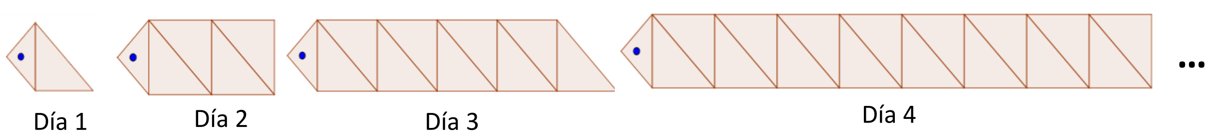
c) ¿Cuántas partes tendrá una serpiente el día 100?

d) Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100.

¿Cómo lo harías?

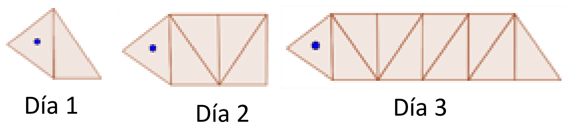
Momento 1 (*Participar de una situación funcional*): se presenta la situación al estudiante buscando brindarle un contexto “familiar”. Se espera que con la lectura del enunciado el estudiante pueda encontrar elementos (lugares, imágenes, personajes, objetos, entre otros), que le permitan iniciar el primer acercamiento hacia la solución de la situación planteada.

En este primer momento, puede evidenciarse la relación de Recurrencia, en el instante en que el estudiante observa las primeras imágenes gráficas, y continúa generando las serpientes correspondientes a los días consecutivos. Este primer momento se podría relacionar con el ítem *a* de la tarea.



Momento 2 (*Centrar la atención en las relaciones entre las variables identificadas en el momento 1*): En este momento los estudiantes pueden dar evidencias sobre la construcción preliminar de la relación funcional de Covariación; estableciendo por ejemplo que “los días aumentan de uno en uno y las partes de las serpientes también aumentan”; esto es, centrar la atención en los cambios de las variables individuales (Bastías, 2016, p.18). Es posible que los estudiantes identifiquen que del día uno al día dos la serpiente aumenta en tres partes; del día dos al día tres en cinco partes. Este razonamiento les podría hacer pensar que los cambios se realizarán de esta manera para los casos cercanos en la secuencia. Esta parte de la tarea se podría relacionar con el ítem *b*.

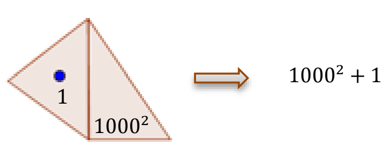
Momento 3 (*Registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían*): Estas representaciones podrán ser tabulares, gráficas o icónicas como se muestra a continuación. Esto dependerá de la representación que mejor entienda el estudiante o que más se adapte a las condiciones del problema.



Es posible que en este momento, a partir de las representaciones que logren evidenciar los estudiantes, se pueda construir la relación funcional de Correspondencia. A este momento se le podría asociar el ítem *c* de la tarea, dado que para el estudiante se hará más complicado continuar dibujando las serpientes hasta el día 100, que hallar características que le permitan determinar el número de partes de la serpiente de una forma más sencilla. Por ejemplo, "si la cantidad de días es 1, la cantidad de partes serán $1^2 + 1$", identificando que la cantidad de triángulos que posee cada serpiente se halla al elevar el número de la figura al cuadrado y sumarle uno.

Cuando el estudiante ya ha construido las relaciones mencionadas (Recurrencia y Correspondencia), a partir de la interacción con los ítems *a*, *b* y parte del *c*, se espera que a partir la reflexión que pueda generar el ítem *c*, se abra paso a la construcción de la relación de covariación; movidos por la necesidad de hallar una expresión que les permita hallar la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente, en cualquier día.

Un caso que posiblemente les permita observar de manera clara lo que sucede a medida que la secuencia avanza, podría ser la representación icónica, como se puede ver en la siguiente figura.



Otra representación con la cual podría evidenciarse la relación que hay entre las variables de la tarea, es la tabular. A partir de ella, es posible que se logre identificar la función que describe la tarea.

Día	***Número de partes***
1	$(1 \times 1) + 1$
2	$(2 \times 2) + 1$
3	$(3 \times 3) + 1$
.	.
.	.
.	.

A partir de la construcción de la tabla, se espera que los estudiantes inicialmente procedan a realizar los primeros dibujos, y a medida que vayan avanzando sientan la necesidad de recurrir a formas más elaboradas para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Momento 4 (*Construcción de una expresión)*: En este momento se espera que el estudiante a partir de los registros hechos en los momentos anteriores, logre plasmar la relación que describe la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente en cualquier día. Esta representación podría darse de la siguiente forma:

Día	***Número de partes***
1	$(1 \times 1) + 1$
2	$(2 \times 2) + 1$
3	$(3 \times 3) + 1$
.	.
.	.
.	.
◆	(◆ × ◆) + 1

Donde (figura rombo) representa el día en que se observa la serpiente. Con este momento no se pretende que el estudiante haga uso de fórmulas o expresiones algebraicas, si no que pueda evidenciar a partir de su trabajo, la manera en que la relación funcional que describe la tarea, se va construyendo.

Tarea: Problema de la flor

En el jardín botánico Eloy Valenzuela se ha venido estudiando los cambios que sufre una flor tras la aplicación de un fertilizante, que al parecer genera una mutación.

La siguiente figura muestra lo que sucede a la flor después de tres aplicaciones del fertilizante:

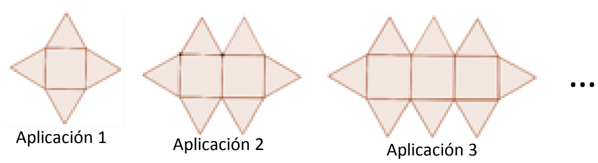


Figura 15. Tarea de la flor, adaptación de Ferdinand, 2012, p.112.

a) ¿Cómo estará la flor tras la aplicación 4 y 5?

b) ¿Describir con palabras cómo se verá la flor en la aplicación 10 y en la aplicación 20 y en la 1000? Explica por qué sabes que funciona de este modo.

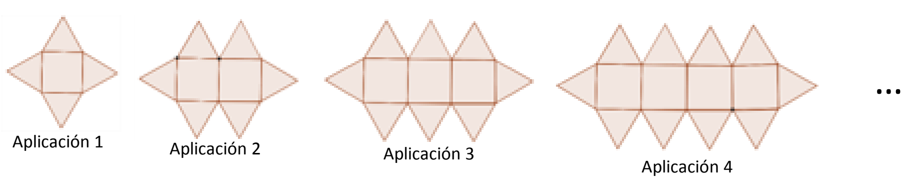
Momento 1 (*Participar de una situación funcional*): Este momento busca brindarle un contexto "familiar" al estudiante. Al hacer una primera lectura de la situación propuesta, el estudiante pueda encontrar elementos (lugares, imágenes, personajes, objetos, entre otros), que le permitan iniciar con cierta seguridad, la solución de la tarea planteada.

En este primer momento, puede evidenciarse la relación de Recurrencia, en el instante en que el estudiante observa las primeras imágenes gráficas, y continúa generando las flores correspondientes a las aplicaciones consecutivas cercanas. Este primer momento se podría relacionar con el ítem *a* de la tarea.

Momento 2 (*Centrar la atención en las relaciones entre las variables identificadas en el momento 1*): En este momento los estudiantes pueden dar evidencias sobre la construcción preliminar de la relación funcional de Covariación; estableciendo por ejemplo que "las aplicaciones aumentan de una en una y las partes de la flor aumentan de tres en tres"; esto es, centrar la atención en los cambios de las variables individuales (Bastías, 2016, p.18). Es posible que los estudiantes identifiquen que de la aplicación uno a la aplicación dos, la flor aumenta en tres partes; de la aplicación dos a la aplicación tres, también lo hace en tres partes. Este razonamiento podría llevar a los estudiantes a pensar que los cambios se realizarán de esta manera para los casos cercanos en la secuencia, aumentando siempre tres partes, lo cual es cierto para esta tarea. Esta parte de la tarea se podría relacionar con la primera parte del ítem *b* (en el caso de la aplicación 10).

Momento 3 (*Registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían*): Estas representaciones podrán ser tabulares, gráficas o icónicas como se muestra a continuación.

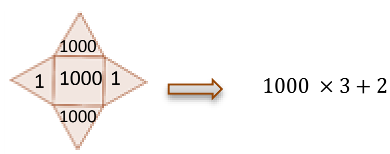
La primera representación a la que posiblemente acudan los estudiantes es gráfica, siguiendo el modelo que se presenta en la secuencia dada, por ejemplo:



Es posible que, en este momento, a partir de las representaciones que logren evidenciar los estudiantes, se pueda construir la relación funcional de Correspondencia entre las variables. A este momento se le podría asociar la segunda parte ítem *b* (aplicación 20). Dado que para el estudiante se hará más complicado continuar dibujando las flores hasta el día 20, que hallar características que le permitan hallar el número de partes de la flor. Por ejemplo, “si la cantidad de aplicaciones es 1, la cantidad de partes serán $(1 \times 3) + 2$", identificando que la cantidad de partes de cada flor, se halla al multiplicar el número de la aplicación por tres y sumarle dos.

Cuando el estudiante ha construido las relaciones descritas (Recurrencia y Correspondencia), a partir de la interacción con los ítems *a* y las dos primeras partes del *b*, se espera que a partir de su reflexión sobre la tarea, pueda generar la parte final ítem *b* (aplicación 1000), se abra paso a la construcción de la relación de covariación; movidos por la necesidad de hallar una expresión que les permita hallar de manera sencilla la cantidad de partes de la flor, en cualquier aplicación.

La siguiente es una representación icónica, puede contribuir significativamente en la identificación de las variables y su rol, para la construcción de la función que describe la tarea.



Aplicación 1000

Otra representación muy empleada para identificar la función que describe la tarea es la tabular, a partir de esta representación se espera que el estudiante logre hallar las características que definen la función que muestra la cantidad de partes de la flor para cualquier aplicación.

Aplicación	***Partes de la flor***
1	$(1 \times 3) + 2$
2	$(2 \times 3) + 2$
3	$(3 \times 3) + 2$
.	.
.	.
.	.

La representación escogida dependerá de lo que mejor entienda el estudiante o que más se adapte a las condiciones del problema.

Se espera que a medida que los estudiantes vayan avanzando, sientan la necesidad de recurrir a formas más elaboradas para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Momento 4 (*Construcción de una expresión*): En este momento se espera que el estudiante a partir de los registros hechos en los momentos anteriores, logre plasmar la relación que describa la cantidad de partes de la flor en cualquier aplicación. Esta representación podría darse de la siguiente forma.

Aplicación	***Número de partes***
1	$(1 \times 3) + 2$
2	$(2 \times 3) + 2$
3	$(3 \times 3) + 2$
.	.
.	.
.	.
$\circledast$	$\circledast \times 3 + 2$

Donde (figura círculo con asterisco) representa el número de la aplicación. Con este momento no se busca que el estudiante haga uso de fórmulas o expresiones algebraicas, si no que pueda evidenciar a partir de su trabajo, la manera en que la relación funcional que describe la tarea se va construyendo.

Como se puede evidenciar en las dos tareas propuestas, el tipo de pregunta que se presenta corresponde a una función directa, donde se presentan casos particulares donde se pide a los estudiantes pensar en números cada vez más grandes, con la intención de llegar a una expresión verbal, icónica o escrita, de la función que representa cada tarea.

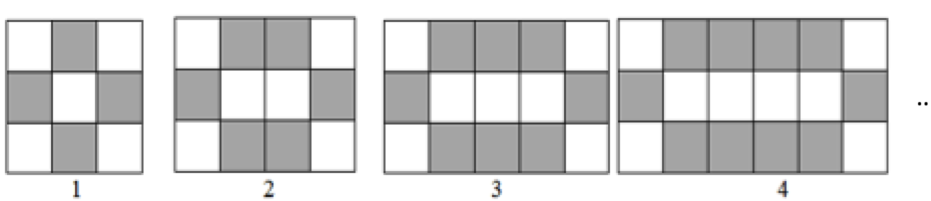
5.1.2 Tarea de las baldosas

La relación funcional que entra en juego, cuando se pide el número total de baldosas es $f(x) = 3x + 6$ ó vista de otra manera $f(x) = 3(x + 2)$. Cuando se le pide a los estudiantes la cantidad de baldosas blancas, la relación funcional es $s(x) = x + 4$; y cuando se les pide la cantidad de baldosas grises la relación funcional es $g(x) = 2x + 2$. Estas relaciones funcionales involucran adición y multiplicación, operaciones básicas que fueron planteadas pensando en la capacidad y desempeño de los participantes del GTM–UIS.

A continuación se presenta el análisis a priori de esta tarea, donde se plantean algunos posibles caminos de solución. El análisis muestra la tarea tal y como se le presentó a los estudiantes y el desarrollo que se espera de la misma, momento a momento.

Tarea: Problema de las baldosas.

Sara construye una secuencia de figuras utilizando baldosas grises y blancas acomodándolas de la siguiente manera:



Responde las siguientes preguntas, explica todo tu razonamiento con tus propias palabras, con dibujos o cálculos.

a. Representa la 5ª y 6ª figura de la secuencia.

b. ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?

c. ¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?

d. Ayuda a Sara a completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta las figuras formadas con las baldosas.

Número de la figura	**Número de baldosas grises**	**Número de baldosas blancas**	**Total de baldosas**
1			
2			
3	8	7	15
4			
5			
6			
7			

Ayuda a Sara a encontrar una expresión que le permita saber cuántas baldosas grises y cuántas blancas tendrá cualquier figura de la secuencia.

Momento 1 (*Participar de una situación funcional*): Este podría llamarse el momento de exploración, el estudiante entra en contacto con la Tarea que se propone e inicia su propio proceso de solución que, de acuerdo a sus capacidades y destrezas podrá ir modificando y/o mejorando, a medida que avanza en cada momento. Este tipo de Tareas proporcionan lugares, imágenes, personajes, objetos, entre otros, con los cuales el estudiante se sienta cómodo y familiarizado, para iniciar un primer acercamiento hacia la solución de la Tarea planteada.

En este primer momento, puede evidenciarse la relación Recursiva, cuando el estudiante observa los primeros números que se dan en la tabla y continúa generando columna a columna los datos correspondientes a la cantidad de baldosas grises, blancas y al total de las mismas. Con esta Tarea se induce el uso de la tabla (que también es una representación de la función), se espera que el estudiante pueda identificar las relaciones funcionales que surgen. Este primer momento se podría relacionar con el ítem *a* de la Tarea.

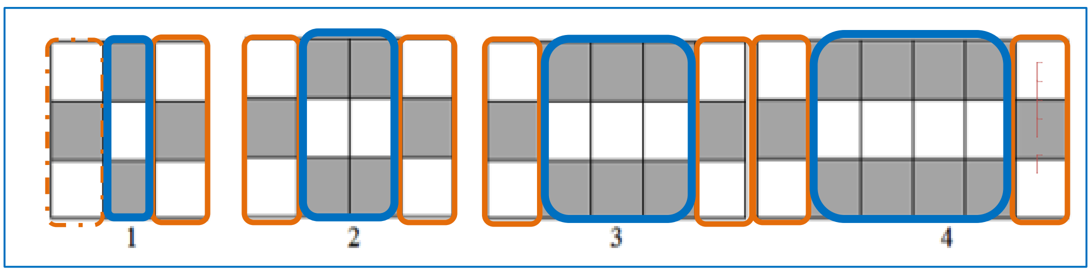
Momento 2 (*Centrar la atención en las relaciones entre las variables identificadas en el momento 1*): Completando la tabla que se proporciona en esta Tarea, se espera que el estudiante pueda identificar la correspondencia entre las variables. Por ejemplo, "si el número de la figura es 1, la cantidad de baldosas blancas será 1. Esta baldosa está ubicada en el centro más las 4 baldosas de las esquinas"; "si el número de la figura es 1, la cantidad de baldosas grises será $1x2$ más las 2 de los lados que permanecen constantes en todas las figuras". Por otra parte, se espera que el estudiante identifique la Covariación entre las variables, por ejemplo, "las baldosas grises aumentan de 2 en 2 a partir del 4 y las baldosas blancas aumentan de 1 en 1 a partir del 5".

Momento 3 (*Registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían*): Estas representaciones pueden ser tabulares, gráficas, icónicas u otro tipo de representación que pueda surgir.

En esta Tarea se induce la representación tabular y se espera que las figuras consecutivas cercanas surjan de manera natural. Se espera que a partir de los datos que suministra la tabla, se hagan evidentes las relaciones funcionales que involucran esta Tarea. Por ejemplo la representación del total de baldosas mediante la espresión "el número de la figura multiplicado por tres más seis, que corresponde a las baldosas laterales". La representación escogida dependerá de la capacidad interpretativa del estudiante o la que más se adapte a las condiciones del problema. Se espera que a medida que los estudiantes vayan avanzando, sientan la necesidad de recurrir a formas más elaboradas para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Momento 4 (*Construcción de una expresión*): En este momento se espera que el estudiante a partir de los registros hechos en los momentos anteriores, logre plasmar la relación que describe la cantidad de baldosas blancas, grises y el total de baldosas para cualquier término de la secuencia. Podrían presentarse algunas de las siguientes soluciones.

Primera solución:



Se espera que los estudiantes establezcan una relación entre la posición de la figura y los cuadrados del centro (azul); teniendo en cuenta que el número de columnas centrales indica la posición y se mantienen seis cuadrados constantes en los laterales (naranja). De acuerdo a lo expuesto por Pinto (2016), este primer acercamiento, se puede relacionar con la Recurrencia (la más elemental), pues el alumno está identificando algunas características en la secuencia que le van a permitir construir la figura correspondiente a cualquier posición. Entonces, con esta solución es posible evidenciar un primer acercamiento al desarrollo de pensamiento funcional, a partir de la identificación de una de las relaciones funcionales (Recurrencia) expuestas por Smith (2008).

A continuación se muestra una manera que posiblemente surja para la construcción de la secuencia:

La primera posición: $(3 \cdot 1) + 6$ representa el total de cuadrados, ya que la baldosa blanca, que representa el número de la posición, se repite tres veces. Luego se suman los seis cuadrados que van a permanecer siempre constantes.

En la segunda posición: $(3 \cdot 2) + 6$

En la tercera posición: $(3 \cdot 3) + 6$

En la cuarta posición: $(3 \cdot 4) + 6$

Mediante este proceso podemos observar que la variación corresponde específicamente a la posición de la figura.

(b) ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?

Según el análisis anterior sería: $(3 \cdot 30) + 6 = 96$

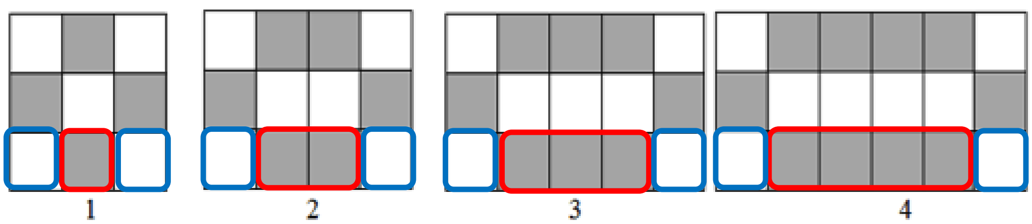
Se espera que las dos actividades anteriores, propicien en los estudiantes la capacidad para relacionar las tabletas con el número de la posición para responder a la pregunta ¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?

Para la realización de este punto se espera que los estudiantes inviertan el proceso que realizaron para el anterior ítem; $81 - 6 = \frac{75}{3} = 25$. La figura tendrá la posición 25.

Finalmente se espera que los estudiantes a partir de los datos de la tabla y el análisis realizado en los anteriores ítems, puedan llegar a la siguiente expresión: $\mathbf{3} \circledast \mathbf{+6}$. Donde la figura asterisco ($\circledast$) representa la posición de la figura.

A partir de las anteriores respuestas y de acuerdo a lo expuesto por Cañadas y Pinto (2016), puede evidenciarse Pensamiento Funcional, inicialmente a partir de la relación de Recurrencia, cuando el estudiante encuentra las principales características de la secuencia, identificando los elementos que varían (baldosas blancas y baldosas grises en la parte central de cada figura) o permanecen constantes (las seis baldosas de los lados), con el fin de hallar el patrón que describe la secuencia. También es posible ver en esta solución la Correlación, pues el estudiante para llegar a la expresión mostrada, debe identificar que la figura asterisco (⊛) representa la posición de la figura y además debe establecer una relación entre la posición de la figura y la cantidad de baldosas en total, interpretando que debe multiplicar por tres y sumarle las seis baldosas constantes de los lados.

Otra solución:



En esta solución los estudiantes relacionan la posición de la figura con las tabletas grises (rojo) y observan que las dos tabletas blancas de los laterales permanecen constantes (azul). Tomando lo anterior como la base de un rectángulo cuya altura constante es de tres tabletas, los estudiantes podrán predecir la cantidad de tabletas para cualquier figura.

Es posible que los estudiantes realicen el siguiente proceso para hallar la cantidad de tabletas: donde $(\mathbf{1}+\mathbf{2})\cdot\mathbf{3}$ representa el total de cuadrados en la primera posición.

En la segunda posición: $(\mathbf{2}+\mathbf{2})\cdot\mathbf{3}$

En la tercera posición: $(\mathbf{3}+\mathbf{2})\cdot\mathbf{3}$

En la cuarta posición: $\mathbf{(4+2)\cdot 3}$ …

En la secuencia varía un solo término, que representa la posición de la figura, mientras que el tres, que representa las filas y el dos, que representa las baldosas laterales, permanecen constantes.

Se espera que los estudiantes mediante la realización de la tabla y el análisis realizado en los anteriores ítems, puedan llegar a la siguiente expresión : $(⋇ + 2) \cdot 3$, donde la figura ⋇ representa el número de la figura.

Con esta solución, se evidencia desde el inicio la Recurrencia y la Correlación, pues los estudiantes empiezan por identificar las principales características de la secuencia, logran hallar la manera en que se va formando el patrón que la describe y terminan relacionando la posición de la figura con la cantidad de baldosas en total. Para esta solución no hay presencia de la Covariación, pues no se observa un enfoque en el que se analicen las variables por separado y cómo una afecta a la otra.

5.1.3 Entrevista Final (Tarea del tren en movimiento)

En esta Tarea la relación funcional que se estudia es es $f(x) = 2^{x+1}$. Esta relación funcional involucra adición y potenciación, operaciones básicas que fueron planteadas pensando en la capacidad y desempeño de los participantes del GTM–UIS.

A continuación, se presenta el análisis a priori en la cual se plantean algunos de los posibles caminos de solución. El análisis muestra la Tarea tal y como se le presentó a los estudiantes y el desarrollo que se espera de la misma, momento a momento.

Tarea: *Tren en movimiento*

Había un tren que corría la misma ruta todos los días. Mientras avanzaba, enganchaba vagones en cada parada. Su recorrido inicia con la locomotora y 2 vagones. La siguiente tabla ilustra las primeras paradas del tren y sus respectivos vagones.

Número de parada	Número de vagones
1	4
2	8
3	16
4	32
5	
6	

a. ¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 10?
b. ¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 100?
c. ¿Cuántos vagones recoge en cada parada?
d. ¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?
e. ¿Cómo le explicarías a un amigo el proceso para calcular el número de vagones del tren para cualquier número de paradas?

Momento 1 (*Participar de una situación funcional*): Con la lectura del enunciado se espera que el estudiante pueda encontrar elementos (lugares, imágenes, personajes, objetos, entre otros), que le permitan iniciar un primer acercamiento hacia la solución de la situación planteada.

En este primer momento, puede evidenciarse la relación Recursiva, cuando el estudiante observa los primeros números que se dan en la tabla y continúa generando la cantidad de vagones correspondientes a los días consecutivos. Este primer momento se podría relacionar con el ítem *a* de la tarea.

Momento 2 (*Centrar la atención en las relaciones entre las variables identificadas en el momento 1*): En este momento se espera que el estudiante pueda identificar la Correspondencia entre las variables, por ejemplo, "si la cantidad de paradas es 1, el número de vagones será 2^{1+1}" o si "dos elevado al número de paradas más uno, me permite encontrar la cantidad de vagones". Por otra parte, se espera que el estudiante identifique la covariación entre las variables, por ejemplo, al expresar de manera verbal o escrita que "las paradas aumentan de una en una y la cantidad de vagones aumenta al doble del inmediatamente anterior (teniendo en cuenta que la locomotora arranca con dos vagones)".

Momento 3 (*Registrar los valores correspondientes de las cantidades que varían*): Estas representaciones pueden ser tabulares, gráficas, icónicas u otro tipo de representación que pueda surgir.

Es posible que la primera representación que emerja sea la tabular, dada la presentación de la Tarea. Seguidamente es posible que los estudiantes recurran a una expresión icónica que les permita comunicar la cantidad de vagones en cualquier parada. Por ejemplo que en la parada $\circledast$ la cantidad de vagones es $2^{\circledast+1}$.

La representación escogida dependerá de la capacidad interpretativa del estudiante o la que más se adapte a dadas las condiciones del problema.

Se espera que a medida que los estudiantes vayan avanzando, sientan la necesidad de recurrir a formas más elaboradas para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Momento 4 (*Construcción de una expresión*): En este momento se espera que el estudiante a partir de los registros hechos en los momentos anteriores, logre plasmar la relación que describe la cantidad de vagones en cualquier número de paradas. Esta representación podría darse de la siguiente forma:

Número de paradas	***Número de vagones***
1	2^{1+1}
2	2^{2+1}
3	2^{3+1}
4	2^{4+1}
.	.
.	.
.	.
$\circledast$	$2^{\circledast+1}$

Donde $\circledast$ (figura círculo con asterisco) representa el número de paradas.

Como se puede evidenciar en la Tarea propuesta, el tipo de pregunta corresponde a una función directa. Se presentan casos particulares en los que se pide a los estudiantes pensar en números cada vez más grandes, con la intención de llegar una expresión ya sea verbal, icónica o escrita, de la función que representa la Tarea.

5.2 Análisis a posteriori

Para este análisis se tendrá en cuenta la producción escrita y verbal de nuestros estudiantes, así como las diferentes representaciones que logren evidenciar. De acuerdo con Bastías (2016):

> El pensamiento funcional incorpora la construcción y generalización de patrones y relaciones usando diversas herramientas lingüísticas y representacionales. Por tanto, se considera que forman parte de esta categoría todas las respuestas o estrategias en las que se aprecia que el alumno identifica una relación entre dos cantidades variables y describen el patrón funcional apropiado que exprese dicha relación (p. 34).

Para evidenciar la existencia de pensamiento funcional, se tendrá en cuenta la aparición de las relaciones funcionales: Recurrencia, Correspondencia y Covariación. De acuerdo a investigaciones sobre el desarrollo de pensamiento funcional (Smith (2008); Pinto (2016), Cañadas y Molina (2016), Batías (2016), entre otros), estas tres relaciones permitirán evidenciar la existencia o no de pensamiento funcional. Se considera evidencia del desarrollo de pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes, cuando al analizar las respuestas, se identifique al menos una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones empleadas en las dos Tareas.

Por tanto, en esta fase se realiza el análisis a posteriori, dando cuenta del desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes, a partir de la Actividad generada en el GTM–UIS.

A conticuación se presenta un análisis Tarea a Tarea que evidencia la aparición de relaciones fucionales de acuerdo a las categorías emergentes.

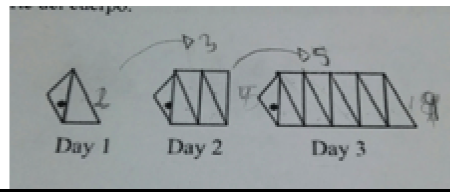
5.2.1 Entrevista Inicial (Tarea de la flor y Tarea de la serpiente)

En este aparte se van a mostrar unos fragmentos que hacen parte de la entrevista inicial, donde se evidencia desarrollo de pensamiento funcional a partir de la aparición de cada una de las relaciones funcionales, como categorías de análisis que se evidencia en la medida que se avanza en las categorías emergentes.

Recurrencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la entrevista, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 2 exponiendo la forma como aborda la Tarea en su primer momento, es decir, al iniciar su participación en una situación funcional.

Tabla 3.

Evidencia de la Relación Funcional de Recurrencia.

Pregunta	**Evidencia**
¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?	E2: Que en el día 1 tenía dos triángulos, a ese le sumaba cuánto le faltaba para llegar al día 2 y a ese le sumaba cuánto le faltaba para el siguiente [Indicaba en su hoja de trabajo como se muestra en las anteriores figuras]. 

Con esta evidencia, el estudiante muestra que está enfocado sólo en la variación de una de las variables, en este caso de la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente. Aquí su atención está fija en la identificación del patrón de variación, sin tener en cuenta otras variables, como es el caso de los días; por tanto se evidencia una relación de Recurrencia.

Correspondencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la entrevista, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 1 exponiendo la forma como aborda la Tarea. Es decir, el estudiante se encuentra en ese segundo momento, donde centra su atención en la relación entre vaiables y al mismo tiempo de acuerdo a lo propuesto por Smith (2008) para esta relación, empieza a establecer esas generalidades de la secuencia, que lo conducirán a la construcción de una expresión algebraica, posiblemente de manera verbal.

Tabla 4.

Evidencia de la Relación Funcional de Correspondencia.

Pregunta	**Evidencia**
¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el	E1: Multiplicamos el número del día por el mismo

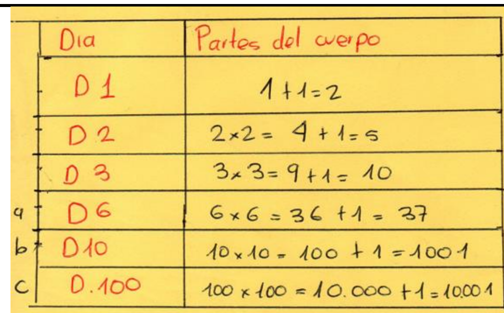
día 6?	número y le sumamos uno.
Cómo hiciste eso [Dirigiéndose a E1]	Inv: ¿Cómo saben que eso funciona? ¿Cuál fue su respuesta? E2: Por ejemplo, en el día 6 … 6x6 que da 36 más uno que sería la cabeza, 37.

Con esta evidencia, el estudiante muestra que está hallando la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente, al establecer una relación que involucra la manera como aumentan las partes de la serpiente día a día. Aquí su atención está fija en la identificación de cómo se relacionan las variables que intervienen en la Tarea; por tanto se evidencia una relación de Correspondencia.

Covariación: La siguiente tabla muestra un episodio de la entrevista, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y los estudiantes 3 y 4 exponiendo la forma como abordan la Tarea. De acuerdo a lo propuesto por Doorman et al., (2012) se destacan como representaciones útiles para el estudio de la Covariación, el uso de tablas. Aquí se puede establecer una relación con el tercer momento, cuando se busca llegar a un registro de los valores correspondientes a las cantidades que varian.

Tabla 5.
Evidencia de la Relación Funcional de Covariación.

Pregunta	**Evidencia**
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100. ¿Cómo lo harías?	E3: Observando la figura y el número de días se eleva a la dos y el resultado es el número de partes del cuerpo. Inv: ¿Siempre se eleva al cuadrado? E3: Si. E4: El número de días se eleva a la dos y se suma uno.



Con esta evidencia, los estudiantes muestran que compreden la manera en que se va construyendo la secuencia y la forma en que aumentan y se relacionan las variables. Aquí su atención está fija en identificar cómo varían los valores de la variable depediente en función de cómo varían los valores de la variable independente; por tanto se evidencia una relación de Covariación.

La siguiente tabla muestra de manera general la cantidad de estudiantes que evidenciaron en sus producciones cada una de las relaciones funcionales para la entrevista inicial en el caso de la Tarea de la serpiente.

Tabla 6.
Relaciones Funcionales evidenciadas en la entrevista inicial.

Tarea	Relación Funcional	Estudiante							Total
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
T1	Rc	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	7
	Cr	✓	✓	✓	✓			✓	5
	Cv							✓	1

Los datos de la Tabla 6, muestran que los siete estudiantes lograron evidenciar al menos una relación funcional en el desarrollo de la Tarea de la serpiente y la Tarea de la flor, coincidiendo los resultados que aquí se presentan, con los hallazgos que se reportaron en el capítulo de antecedentes, referentes a las relaciones que surgen con mayor o menor incidencia. Tambien aquí se resalta la participación del estudiante 7, quien sobresale evidenciado las tres relaciones funcionales en sus producciones.

5.2.2 Tarea de las baldosas

En este aparte se van a mostrar unos fragmentos que hacen parte de la Tarea de las baldosas, donde se evidencia desarrollo de pensamiento funcional a partir de la aparición de cada una de las relaciones funcionales, a medida que se avanza en las categorías emergentes.

Recurrencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea de las baldosas, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 3 exponiendo la forma como aborda la Tarea en su primer momento, es decir, al iniciar su participación en una situación funcional.

Tabla 7.

Evidencia de la Relación Funcional de Recurrencia.

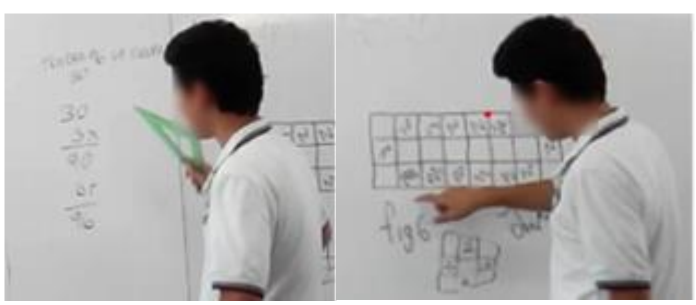
Pregunta	**Evidencia**
Representa la figura 5 de la secuencia. ¿Cómo lo hiciste?	E3: Como después seguía la figura 5, hay 5 baldosas grises acá [señalando en su figura].  y acá [señalando la esquina superior izquierda de su figura] y a este borde [señalando la esquina superior derecha de su figura] solo queda una blanca, y por eso las hice así.

Con esta evidencia, la estudiante muestra que realiza la construcción de la figura 5 a partir de las figuras que proporciona la Tarea (desde la figura 1 hasta la figura 4). No menciona características específicas de la secuencia, o algún tipo de relación explícita. Centra su análisis en la variación de una de las baldosas, guiándose más por la ubicación que por establecer una relación. Aquí su atención está fija en la identificación del patrón de variación; por tanto se evidencia una relación de Recurrencia.

Correspondencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea de las baldosas, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 6 exponiendo la forma como aborda la Tarea, es decir, el estudiante se encuentra en el segundo momento, que implica centrar la atención en la relación entre vaiables. De acuerdo a Smith (2008) en esta relación, el estudiante empieza a establecer generalidades en la secuencia, que lo conducirán a la construcción de una expresión algebraica, posiblemente de manera verbal.

Tabla 8.

Evidencia de la Relación Funcional de Correspondencia

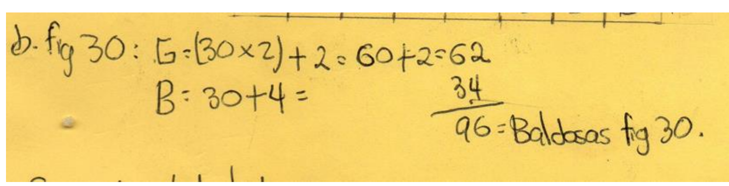
Pregunta	**Evidencia**
¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?	E6: Yo creo que sería 96 profesora, porque mire [indica la imagen de la figura 6]. Como es la figura 6 entonces hay 6 baldosas grises y dos blancas acá [indica la primera fila de abajo hacia arriba] entonces multipliqué 30 por 3 porque aquí siempre se mantiene el mismo número [refiriéndose al centro de la figura y lo relaciona con la posición de la misma]. Eso me da 90 y acá le voy a sumar estas 3 [indica 3 baldosas a cada lado de la figura] que sobran, aunque no es que sobren, y me da 96. 

Con esta evidencia, el estudiante muestra que está hallando el total de baldosas para la figura 30, al identificar elementos determinates en la secuencia. Esto mediante la identificación que hace al mencionar que hay tres filas con 30 baldosas y le suma las que concidera que sobran. Aquí su atención está fija en la identificación de cómo se relacionan las variables que intervienen en la Tarea; por tanto, se evidencia una relación de Correspondencia.

Covariación: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea de las baldosas, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 4 a partir de una figura que muestra la forma como aborda la Tarea. Aquí se destaca la manera como el estudiante 4 identifica la manera en que van aumentando las baldosas blancas y las grises, esto de manera independiente y finalmente cómo se relacionan. Aquí se puede establecer una relación con el tercer momento, cuando se busca llegar a un registro de los valores correspondientes a las cantidades que varian, en este caso un registro numérico.

Tabla 9.

Evidencia de la Relación Funcional de Covariación

Pregunta	**Evidencia**
¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?	**E4:**  b. fig 30: G=(30×2)+2=60+2=62 B=30+4= 34 96=Baldosas fig 30.

Con esta evidencia, el estudiante muestra que comprede la manera en que se va construyendo la secuencia y la forma en que aumentan y se relacionan las variables, logrando establecer también cómo hallar la cantidad de baldosas blancas y la cantidad de baldosas grises, aún cuando sólo se cuestionaba por el total de baldosas. Su atención está fija en identificar cómo cambian los valores de la variable depediente en función de cómo varían los valores de la variable independente; por tanto se evidencia una relación de Covariación.

La siguiente tabla muestra de manera general la cantidad de estudiantes que evidenciaron en sus producciones cada una de las relaciones funcionales para la Tarea de las baldosas.

Tabla 10.
Relaciones Funcionales evidenciadas en la Tarea de las baldosas.

Tarea	**Relación Funcional**	**Estudiante**							**Total**
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
T2	Rc	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	7
	Cr	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	7
	Cv	✓			✓				2

Los datos que se observan en la Tabla 10, muestran que los siete estudiantes lograron evidenciar dos relaciones funcionales en el desarrollo de esta Tarea (baldosas), coincidiendo los resultados que aquí se presentan con los hallazgos que se reportaron en el capítulo de antecedentes, referentes a las relaciones que surgen con mayor o menor incidencia. Tambien aquí se resalta la participación de los estudiantes 1 y 4 quienes evidencian las tres relaciones funcionales en sus producciones.

5.2.3 Entrevista final (Tarea del tren en movimiento)

En este aparte muestran fragmentos que hacen parte de la Tarea del tren en movimiento, donde se evidencia desarrollo de pensamiento funcional a partir de la aparición de cada una de las relaciones funcionales, a medida que se avanza en las categorías emergentes.

Recurrencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea del tren en movimiento, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 4 exponiendo la forma como aborda la Tarea en su primer momento, es decir, al iniciar su participación en una situación funcional.

Tabla 11.
Evidencia de la Relación Funcional de Recurrencia.

Pregunta	**Evidencia**
¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?	E4: Mire, [expresa emoción y asombro por creer haber encontrado una nueva relación.] en la parada 1 hay 4, la deferencia entre 1 y 4 es 3. En la parada 2 hay 8 y la diferencia entre 2 y 8 son 6, que sería 3 por 2. En la 3 hay 16, la deferencia entre 16 y 3, sería 13… Entonces no.[hace un gesto de decepción al no haber conseguido nada] 

Con esta evidencia, el estudiante empieza a observar cuántos vagones va aumentando el tren y la diferencia que hay entre vagones consecutivos. No menciona características específicas de la secuencia, o algún tipo de relación explícita. Centra su análisis en la diferencia entre vagones. Aquí su atención está fija en la identificación del patrón de variación; por tanto se evidencia una relación de Recurrencia.

Correspondencia: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea del tren en movimiento, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 4 exponiendo la forma como aborda la Tarea, es decir, el estudiante se encuentra en el segundo momento, que implica centrar la atención en la relación entre variables. De acuerdo a Smith (2008) en esta relación, el estudiante empieza a establecer generalidades en la secuencia, que lo conducirán a la construcción de una expresión algebraica, posiblemente de manera verbal.

Tabla 12.

Evidencia de la Relación Funcional de Correspondencia.

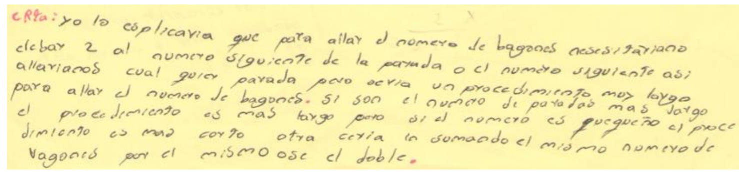
Pregunta	**Evidencia**
¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?	E4: O sea que en la parada 100 sería igual a 2 a la 101. Inv.: ¿Seguro? E4: Si porque la parada 3 es 16, y 16 es igual a 2 a la 4. Inv.: En ese orden de ideas, si fuera en la parada 1000… ¿cómo quedaría? E4: Entonces habría 2 elevado a la mil uno.

Con esta evidencia, el estudiante muestra que entiende la manera en que se va construyendo la secuencia. No dice una cantidad explícita de vagones, pero llega a explicar a partir de ejemplos cercanos y lejanos la manera en que se va construyendo la secuencia, estableciendo la relación que existe entre las variables. Aquí su atención está fija en la identificación de cómo se relacionan las variables que intervienen en la Tarea; por tanto, se evidencia una relación de Correspondencia.

Covariación: La siguiente tabla muestra un episodio de la Tarea de las baldosas, donde intervienen el investigador en su papel de mediador y el estudiante 6 a partir de su producción escrita, donde explica la forma como se va constriyendo la secuencia. Este momento es visto como una validación, pues el estudiante debe pasar a explicar cómo él está entendiendo la manera en que se construye la secuencia. Aquí se puede establecer una relación con el tercer momento, cuando se busca llegar a un registro de los valores correspondientes a las cantidades que varian, en este caso un registro verbal.

Tabla 13.

Evidencia de la Relación Funcional de Covariación

Pregunta	**Evidencia**
¿Cómo le explicarías a un amigo el proceso para calcular el número de vagones del tren para cualquier número de paradas?	E6:  [Yo lo esplicaría que para hallar el número de vagones necesitaríamos elevar 2 al número siguiente de la parada o el número siguiente, así hallaríamos cualquier parada, pero sería un procedimiento muy largo para hallar el número de vagones. Si son el número de paradas más largo, el procedimiento es más largo, pero si el número es pequeño, el procedimiento es más corto. Otra sería sumando el mismo número de vagones por el mismo, o sea el doble.]

Con esta evidencia, el estudiante muestra que comprede la manera en que se va construyendo la secuencia y su convicción personal le da argmentos para explicar a un compañero cómo está entendiendo la manera en que se construye la secuencia. Aquí su atención está fija en identificar cómo varían los valores de la variable depediente en función de cómo varían los valores de la variable independente; por tanto, se evidencia una relación de Covariación.

La siguiente tabla muestra de manera general la cantidad de estudiantes que evidenciaron en sus producciones cada una de las relaciones funcionales para la Tarea del tren en movimiento.

Tabla 14.

Relaciones Funcionales evidenciadas en la entrevista final.

Tarea	**Relación Funcional**	Estudiante							**Total**
		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
	Rc	✓	✓	✓	✓		✓	✓	6
T3	Cr	✓					✓	✓	3
	Cv						✓	✓	2
Total		7	5	5	6	3	6	8	

Los datos que se observan en la Tabla 14, evidencian dificultades en el desrrollo de esta Tarea, relacionadas especialmente con hallar el patrón de variación y establecer la relación de Correspondencia entre variables. Un dato que llama la atención de lo que se puede observar, es que E5 a pesar de haber participado en todas las actividades desarrolladas en el grupo, no logra enfrentar satisfactoriamente la última tarea (el tren en movimiento). Esto quizá se deba a las dificultades antes mencionadas.

Encontrar las Tareas adecuadas para impulsar la aparición de alguna relación funcional en la Actividad desempeñada por los estudiantes, no es una labor fácil, como tampoco lo es identificar el momento en que se produce pensamiento funcional; al respecto Bastías (2016), quien cita a Smith (2008) comenta:

> El pensamiento funcional se produce cuando los niños idean un sistema de representación apropiado para representar una generalización de una relación entre cantidades variables. Por lo tanto, el pensamiento funcional tiene como interés principal las actvidades mentales, que son los procesos por los cuales el registro de los valores de correspondencia de las cantidades, regularmente de tabla, gráfica o icónica, se transforma en una representación generalizada de la relación funcional y la forma en que el sujeto crea una certeza matemática de esta relación generalizada. (p. 11)

Por su parte Fuentes (2014) se refiere a los beneficios que trae a los estudiantes trabajar con el pensamiento funcional, afirma que la inclusión de este pensamiento en las actividades regulares, hace que los estudiantes sean capaces de detectar “similitudes, diferencias, repetición y otros aspectos de las regularidades, así como realizar operaciones aritméticas para generalizar, partiendo de casos particulares y viceversa” (p. 9).

Las anteriores intervenciones coinciden en resaltar los beneficios que trae abordar Tareas que promevan el desarrollo de pensamiento funcional en los estudiantes, las habilidades que se desarrollan no solo aportan beneficios para el desempeño en grados posteriores respecto a la matemática, sino que genera en los estudiantes una actitud más inquieta y analítica ante cualquier situación matemática.

6 Conclusiones

En este capítulo se presentan las principales conclusiones que surgen como producto de esta investigación. Se consideran tres ítems representativos: 1) Categorías de análisis, que dan cuenta del desarrollo de pensamiento funcional; 2) Marco Institucional, que presenta las principales características del contexto del GTM-UIS y 3) Futuras Investigaciones. A partir de los cuales se da cuenta de los objetivos de la investigación, sus principales aportes y las limitaciones que surgieron de su desarrollo.

6.1 Sobre las Categorías de Análisis

El análisis que se presenta en el capítulo 5, muestra la manera en que los estudiantes del GTM–UIS abordaron las Tareas propuestas. Los datos que se obtuvieron de las video grabaciones y producciones escritas en las hojas de trabajo, permitieron la identificación de Pensamiento Funcional en los estudiantes del GTM–UIS, evidenciado a partir de las relaciones funcionales expuestas por Smith (2008) Recurrencia, Correspondencia y Covariación y lo que plantea Pinto (2016), referente a la condición que dice: "consideraremos presencia de pensamiento funcional en las respuestas de los estudiantes cuando al analizar de forma conjunta la totalidad de las respuestas, identificamos, al menos, una relación funcional en, al menos, dos de las cuestiones empleadas" (p. 40).

El objetivo general que guía esta investigación se centra en describir las relaciones de Recurrencia, Correspondencia y Covariación que desarrollan individuos en el GTM–UIS, las evidencias que se muestran en el capítulo anterior, surgen a partir de un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes. Allí se puede observar que los estudiantes establecen la relación entre las cantidades variables, en algunos casos logran identificar cómo se forman las variables de manera independiente y cómo el cambio en una variable afecta a la otra. También se evidencia la identificación de un patrón funcional, pues los estudiantes logran describir verbalmente la manera en que se va construyendo la secuencia, llegando a una expresión que les permite hallar cualquier término de la misma; esas características fueron clave en la descripción de las tres relaciones funcionales (Recurrencia, Correspondencia y Covariacin).

Las evidencias de pensamiento funcional que en esta investigación se presentan, son una muestra del trabajo que se logró con los participantes del GTM–UIS. Se muestra que algunos estudiantes en mayor nivel que otros, establecen de forma clara y convincente la relación que determina la secuencia que se está trabajando. También se evidencia recursividad en los estudiantes, al mostrar en sus producciones diferentes representaciones, entre ellas la tabular, numérica y verbal, para dar solución a la Tarea que se presenta.

6.2 Sobre el Marco Institucional

A partir del objetivo general, surgen dos objetivos específicos, el primero consiste en diseñar Tareas que potencien el pensamiento funcional y fomenten su desarrollo en la solución de diferentes Tareas relacionadas con las relaciones funcionales de Recursividad, Correspondencia y Covariación. El cumplimiento de este objetivo se puede evidenciar en el análisis de la Actividad generada por las Tareas analizadas, en las cuales se aplicó un Modelo Institucional que incluyó cuatro elementos clave:

1. El rol del docente como mediador u orientador.

2. El rol del estudiante como parte activa.

3. El diseño de Tareas que implican una secuencia que motiva habilidades como la cominicación, verbalización y argumentación.

4. El análisis de Tareas, que fue guiado por Categorías emergentes (1. Participar de una situación funcional, 2. Centrar la atención en la relación entre variables identificadas en el primer

momento, 3. Registrar los valores correspondientes a las cantidades que varían, 4. Construcción de una expresión) que incluyeron las categorías de análisis (Relaciones funcionales de Recurrencia, Correspondencia y Covariación).

El segundo objetivo específico consiste en analizar las características de creación y desarrollo de un grupo extracurricular de estudiantes que propicie y fomente su talento matemático potencial. El cumplimiento de este objetivo puede evidenciarse observando las características de creación del GTM–UIS, guiada por los requisitos de ingreso al programa, mostradas de forma más específica en el capítulo referente a la metodología. Estos requisiton son: Ser elegidos por sus profesores, sentir un gusto por las matemáticas y manifestar interés en participar del GTM–UIS. Los elementos mencionados fueron considerados suficientes para caracterizar a un sujeto potencialmente talentoso en matemáticas desde el punto de vista de esta investigación.

Finalmente se concluye que los objetivos propuestos fueron cumplidos a cabalidad, aportando a las investigaciones que sobre pensamiento funcional se han venido adelantando, con un nuevo ingrediente, la población con talento matemático potencial. Nuestro principal aporte a la Comunidad de educadores matemáticos consiste en el diseño de una secuencia de Tareas construidas y analizadas con el objetivo de motivar el desarrollo de pensamiento funcional en los estudiantes de básica primaria, cabe resaltar que a pesar que estas Tareas fueron implementadas en un grupo extracurricular, es posible aplicarlas en un grupo regular, a partir de los momentos que aquí se proponen para su correcto desarrollo. Es decir, las características que definen el Marco Institucional, que se constituye como un aporte fundamental de esta investigación. También se considera un aporte significativo a la sociedad en general, el entrenamiento de un grupo de sujetos para los cuales, el paso por el GTM–UIS representa una ampliación del panorama académico. Estos estudiantes han sido testigos, junto con sus familias de su propia evolución; en particular planteando ante sus ojos la posibilidad de continuar una formación profesional en una entidad pública, como la Universidad Industrial de Santander.

El desarrollo de Tareas que implican enfrentarse a situaciones funcionales, aumenta la posibilidad de aprovechar el potencial que cada individuo posee, enfocados principalmente en la adquisición de estrategias y características propias del pensamiento funcional. De acuerdo a lo reportado por Cañadas y Molina (2016), las capacidades de los estudiantes son útiles para mejorar el razonamiento en general y el matemático en particular.

Las evidencias de relaciones funcionales, que aparecen en cada una de las Tareas abordadas, muestran que la mayoría de los estudiantes expresan el patrón funcional de la relación entre variables a través de la representación verbal, siendo pocos los estudiantes que necesitan utilizar ejemplos para expresar de manera general la forma en que cada secuecia se va construyendo.

Las relaciones funcionales fueron surgiendo casi de manera natural, las Tareas que se proporcionaron, fueron diseñadas con la intención de exigir más a medida que se avanzaba en ellas. Esto quiere decir que el primer momento donde el estudiante se enfrenta a la situación funcional, no exige mayor esfuerzo, con una correcta interpretación de la Tarea es suficiente. El proceso a seguir en cada Tarea consiste en identificar las relaciones entre variables, lo cual requiere un mayor grado de profundidad y abstracción de los principales elementos que intervienen en cada Tarea. Con esta identificación se da paso a la elección de una representación, que surge de acuerdo a las característcas de la Tarea y las habilidades de cada individo. Para finalizar, se crea mediante preguntas, la necesidad de llegar a una expresión, no necesariemente algebraica, que va a dar cuenta de la forma general en que cada secuencia se construye. Estos momentos representan la estructura general planteada en cada Tarea, que acompañada de todos los elementos que constituyen el Marco Institucional, permitió guiar el proceso de los estudiantes pertenecientes al GTM–UIS hacia la adquisición de evidencias (Relaciones funcionales) que muestran la existencia de pensamiento funcional en sus producciones.

El trabajo realizado resultó satisfactorio, en el sentido de que no sólo hubo ganancias para la investigación y los debidos reportes, sino que se realizó un verdadero aporte a la formación académica, personal y motivacional de los integrantes del GTM–UIS.

6.2.1 Sobre los estudiantes con talento matemático potencial

Con esta investigación se plantea un nuevo término que surge a partir de tres ya definidos y trabajados ampliamente en el campo de la Sicología y recientemente en la Educación Matemática; estos términos son: Talento, Talento Matemático y Talento Potencial. La propuesta que aquí se plantea es innovadora, en el sentido que busca incluir no solo a los sujetos talentosos, sino a aquellos que cuentan con un talento potencial específicamente en matemáticas, pero dadas las condiciones de su entorno y el contexto en el que se han formado, no han podido desarrollarlo. Con la postura que en esta investigación se asume, nace un nuevo término que pretende ampliar el campo del talento, rompiendo paradígmas y brindando posibilidades de superación de dificultades y adquisición de habilidasdes matemáticas a sujetos que desde la perspectiva del Talento, no las tienen.

Con la experiencia que la creación del GTM–UIS deja para esta investigación, se concluye que es posible potenciar habilidades como comprensión de lectura, búsqueda de nuevas soluciones, postura crítica ante las nuevas situaciones, exposición de ideas, creación de conjeturas, razonamiento, expresar ideas de manera general, identificar elementos determinantes en una Tarea, entre otros. De acuerdo a lo expuesto por Cañadas y Molina (2016), Pinto (2016), Bastías (2016), Thales (2003), entre otros, la adquisición de este tipo de habilidades contribuyen signficativamente para mejorar el rendimiento académico en general.

La atención de los estudiantes potencialmente talentosos en matemáticas es una tarea que requiere un gran compromiso, es necesario mostrar a la sociedad la utilidad y los beneficios que trae el generar espacios que promuevan el talento matemático potencial. Cuando la sociedad en general comprenda que esos talentos potenciales encierran el futuro científico y tecnológico de todo un país, se pondrá freno al detrimento en que estamos sumidos. Como lo expone Radford (2010), el rol del maestro ante este panorama es determinante, si bien es cierto que para esta investigación se trabajó con las condiciones "ideales", esto no quita responsabilidad al papel que dentro del desarrollo del Talento Matemático Potecial juega el maestro. Es importante dejar clara la posibilidad de generar espacios de discusión y razonamiento al interior del aula y desde la temática convencional, crear sujetos críticos y con un buen razocinio es compromiso de todo su entorno, incluidos familiares, amigos e instituciones educativas; el reto para el docente de hoy, está en modificar la dinámica de clase y ser un agente facilitador en la construcción de conocimiento, que genere aportes para que sea el sujeto quien tome las riendas de su aprendizaje y se coprometa a dar lo mejor de si.

6.3 Sobre los programas extracurriculares

El espacio que en el GTM–UIS se genera, brinda a los estudiantes potencialmente talentosos, la oportunidad de explorar y desarrollar sus habilidades matemáticas.

La creación del GTM–UIS representó un desafío, no sólo por el compromiso personal que este proyecto implica, sino por la responsabilidad que representa el trabajo extracurricular con un grupo de estudiantes menores de edad. Iniciar un proyecto con estudiantes que proceden de colegios públicos trae consigo un sinnúmero de inconvenientes, desde la parte económica (transporte, alimentación, entre otros), pasando por los trámites al interior de la institución donde se va a realizar la implementación del proyecto, hasta el comportamiento (normatividad en el aula). Sin embargo, resulta satisfactorio e inspirador el tipo de avances que pueden lograrse con estos individuos, al ofrecerles condiciones adecuadas (Marco Institucional), diferentes a las que a diario encentran en su colegio y la respuesta de su parte es brindar su mayor esfuerzo y un gran compromiso en el desarrollo de cada Tarea.

Como apoyo legal a esta propuesta, se presenta la postura del Ministerio de Educación Nacional (MEN) en Colombia, que en el decreto 366, hace referencia a la inclusión de estudiantes con necesidades educativas especiales, y específicamente en el artículo 8 habla sobre las condiciones que los estudiantes talentosos o con capacidades educativas excepcionales deben tener en el aula. Esta propuesta incluye organizar, flexibilizar, adaptar y enriquecer el currículo y el plan de estudios, conforme a las condiciones y estrategias establecidas en las orientaciones pedagógicas producidas por el Ministerio de Educación y articular acciones con los semilleros de las universidades regionales o locales para potenciar su desarrollo. Esta propuesta va en la misma ruta de lo que desde el GTM–UIS se plantea, la diferencia está en que la propuesta de la ley contempla brindar esas condiciones adecuadas desde la diversidad del aula y de manera contínua, desafortunadamente esta investigación sólo brindó atención a los estudiantes Potencialmente Talentosos en Matemáticas, durante dos semestres; queda latente la posibilidad de reabrir el grupo e institucionalizarlo, con el fin de brindar un seguimiento a estos estudiantes, creando conciencia ante los beneficios que trae para la comunidad, la atención y promoción del talento, y enfatizando en la necesidad de hacer cumplir las leyes aprobadas al respecto, que hasta el momento no han generado el suficiente impacto.

Por tanto, Es fundamental crear condiciones adecuadas con el apoyo de instituciones educativas universitarias para fomentar el desarrollo del talento matemático potencial, que permitan detallar con mayor precisión aspectos asociados con: el seguimiento y acompañamiento del talento matemático, desde una perspectiva incluyente.

6.4 Sobre futuras investigaciones

Al ser esta investigación enmarcada en un campo conceptual relativamente nuevo en nuestra disciplina, abre muchas puertas que posibilian el inicio de nuevas investigaciones, específicamente en relación al Talento Matemático Potencial, al desarrollo del pensamiento funcional y a las características que determinan un Marco Institucional al interior de un grupo de enriquecimiento extracurricular.

Una primera investigación que puede surgir es el estudio del Talento Matemático Potencial en una aula regular, a partir del diseño de Tareas que impliquen situaciones funcionales, teniendo como guía las Categorías emergentes propuestas en este documento.

Lo que fue nuestro Marco teórico, en este momento lo estamos concibiendo como un modelo que permite determinar las características que debe cumplir un programa de enriquecimiento extracurricular, esto a manera de hipótesis. Son considerados elementos del Marco Institucional creado al interior del GTM-UIS: 1. El rol del docente, 2. El rol del estudiante, 3. El tipo de Tareas implementadas y 4. El análisis de Tareas a partir de las categorías emergentes que fueron descritas en el capítulo referente a la metodología.

A continuación se presenta el modelo inicial del Marco conceptual propuesto en esta investigación y el Marco que surge tras el análisis de las condiciones Institucionales que fueron creadas en esta investigación para el GTM-UIS. La parte del modelo propuesto que muestra la familia incluye líaneas punteadas, porque aún no se han encontrado evidencias sólidas que sustenten de manera teórica la influencia de la familia en el Marco Institucional; por tanto no se ha definido si se encuentra dentro o fuera de dicho Marco.

Otro dato relevante en este modelo es la posibilidad de cambiar los elementos que conforman el triangulo central, por otro tipo de pensamiento, con la intensión de probar si bajo las condiciones del Marco Institucional propuesto, es posible potenciar otro tipo de actividad matemática.

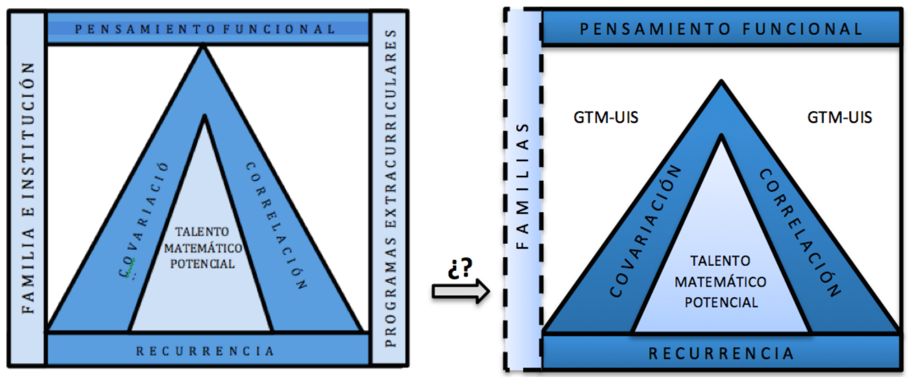


Figura 16. Propuesta que pasa del Marco teórico a un Marco Institucional

Referencias Bibliográficas

Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Education Journal*, 6(2), 141-149.

Bastías, K. (2016). *Análisis de evidencias de pensamiento funcional en estudiantes de 5° curso primaria.* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Benavides, M. y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre el talento matemático? *IX congreso iberoamericano superdotación, talento y creatividad*. Buenos Aires, Argentina.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. (Tesis de doctorado). Universidad de Granada, España.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco R. (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

Blanco, R., Rios, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En Benavides, M., Maz, A., Castro E. y Blanco, R. *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. pp. 49-60. Santiago (Chile): OREALC-UNESCO.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28th *International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Noruega: Bergen *University* College.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M. & Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En Cai, J. & Knuth. (Ed.), *Early Algebraization* (pp. 3-21). New york, Estados Unidos: Springer.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.

Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE Nueva Época*, 21, 37-44.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Les- ter (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2014). Early algebra teaching and learning. En S. Ler- man (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 193-196). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"/ Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Cañadas, M., Brizuela, B. & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87–103.

Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo presentado en XIX SEIEM (Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática) Alicante, España.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Carrillo, C. y Jimenez, O. (2015). El talento matemático. Un privilegio que requiere atención especial. En López, M. y Cuevas, J. *Educación especial y matemática educativa una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (pp. 125-146), San Luis de Potosí: Cenejus.

Clark, B. (1997) *Growing Up Gifted*, Charles E. Merril, Prentice Hall: Los Ángeles.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). *Grounded theory research: Procedures, canons, and eva- luative criteria*. Qualitative Sociology, 13(1), 3-21.

Diezmann, Carmel M and Lowrie, Tom and Bicknell, Brenda and Faragher, Rhonda and Putt, Ian (2004) *Catering for exceptional students in mathematics*, in Perry, B and Anthony, G and Diezmann, C, Eds. Research in mathematics education in Australasia 2000-2003, pages 175-195. Post Pressed.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. y Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243-1267.

Espinoza, J. (2011). *Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: un estudio exploratorio*. Tésis de Maestría. Universidad de Granada, España.

Feldhusen, J. (2003). Beyond General Giftedness: New Ways to Identify and Educate Gifted, Tlented, and Precocious Youth. En Borland J. Rethinking *Gifted Education*. (pp. 34-45), New York: Teachers College Press.

Fernández, M. & Pérez, A. (2011). Las Altas Capacidades y el Desarrollo del Talento Matemático. El Proyecto Estalmat-Andalucía. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 89 – 113.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria. Un estudio exploratorio*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Gagné, F. (1993): Constructs and models pertaining to exceptional human abilities. En K. A. Heller, F. J. Monks y A. H. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 69-87). Oxford: Pergamon.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples*. Barcelona: Paidós.

Jiménez, W., Rojas, S. & Mora, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. XIII CIAEM - IACME. Recife, Brasil.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning,* 7(3), 231-258.

Martínez, C. (2016). *Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano*. (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Mason, J. (2008). Making use of children's power to produce algebraic thinking. In J. J. Kaput, D. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. pp. 57–94. New York: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

MEN. (9 de febrero de 2009) Por medio del cual se reglamenta la organización del servicio de apoyo pedagógico para la atención de los estudiantes con discapaciad y con capacidades o con talentos excepcionales en el marco de la educación inclusiva. [Decreto 366 de 2009]. DO: 47.258.

Mönks, F. y Mason, E. (2000). "Developmental psychology and giftedness: theories and research". En K. Heller, F. Mönks, R. Sternberg, R. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent*. Oxford: Pergamon Press.

Mönks, F. J. (1992). Desarrollo de los adolescentes superdotados. En Y. Benito (Ed.), *Desarrollo y educación de los niños superdotados* (pp. 205-216). Salamanca: Amaru.

Mora, L., Casas, A. y González, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes*, 30, 131-151.

Miller, R. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. ERIC Digest E482. Washington, D.C.: Office of Educational Research and Improvement.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministry of Education. (2008). Patterning and algebra, grades 4 to 6. Toronto, Canadá: Autor.

National Council of Teacher of Mathematics. (NCTM). (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. NCTM. Reston, VA.

National Council of Teacher of Mathematics. (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Oktaç, A., Roa-Fuentes, S. y Rodríguez, M. (2011). Equity Issues Concerning Gifted Children in Mathematics: A perspective from Mexico. En Atweh, B., Graven, M., Secada, W. & Valero, P. *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education* (pp. 351-364), New York: Springer.

Pasarín, M., Feijoo, M., Díaz, O. & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faísca, Revista de altas capacidades*, 11, 83-102.

Passow, A. (1993). National/State policies regarding education of the gifted. En Séller K., Mönks, F. y Passow, A. *Internacional Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Penfold, N. (2016). *Pensamiento funcional de alumnos de tercero de educación primaria en una tarea de generalización*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Pinto, E.(2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación en estudiantes de tercero de primaria*. (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford & B. D'Amore), pp. 267-299.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Renzulli, J. (1977). *The enrichment triad model: a guide for developing defensible programs for the gifted and talented*. N.Y.: Creative Leading Press.

Renzulli, J. (2005). The three-ring definition of giftedness: A developmental model for promoting creative productivity. En R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (Vol. 2, pp. 246–280). New York: Cambridge University Press.

Roa-Fuentes, S. (2012). *El infinito: Un análisis cognitivo de niños y jóvenes talento en Matemáticas.* (Tesis doctoral). Centro de Investigación y de Estudios avanzados del Instituto politécnico nacional, México.

Rojas, N., Martinez, A. y García, G. (2011). El pensamiento funcional. Un estudio en 7°. 12° *Encuentro colombiano de matemática educativa*. pp. 271-280. Quindío, Colombia.

Rusell, S., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In Jinfa Cai and Eric Knuth (Eds.) *Early Algebraization*. A global dialogue from multiple prespectives. New York, USA: Springer.

Smith, E. (2008). Representational Thinking as a Framework for Introducing Functions in the Elementary Curriculum. En J. J. Kaput, Carraher, D. W, & Blanton, M. L. *Algebra in the Early Grades*. pp. 133-160. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Stake, R. E. (2010). Investigación con estudio de casos. (5a Ed.). Barcelona: Labor.

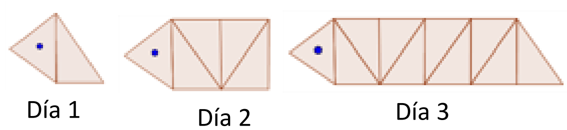
Thales, S. A. E. M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, SAEM Thales.

Villarraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En Benavides, M., Maz, A., Castro E. y Blanco, R. (Eds.) *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. pp. 25-35. Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

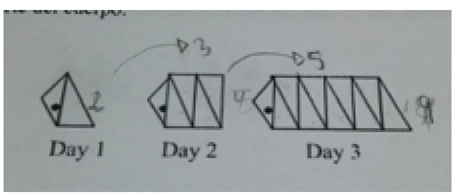
Apéndices

Con la siguiente tabla se presenta un análisis de tres Tareas, a partir de la producción de los estudiantes, tanto en sus hojas de trabajo, como en las video grabaciones que se realizaron durante el desarrollo de cada Tarea. Se resaltan los resultados más relevantes y se presenta un análisis donde se da cuenta de las relaciones funcionales que van surgiendo Recurrencia, Correspondencia y Cvariación, vistas como categorías de análisis.

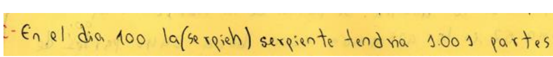
Apedice A: Entrevista Inicial (Tarea de la flor y Tarea de la serpiente)

PREGUNTA	EVIDENCIA	RELACIÓN FUNCIONAL
Problema de la serpiente 		
ENTREVISTA 1		
Video 001 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?	Inv.: ¿Cómo lo hicieron? ¿Quién tuvo la idea inicial? E2: Ella [señalando a su compañera E1]  Inv: Escuchándolos pude notar que tenían dos ideas diferentes. ¿Estoy en lo cierto? E1 y E2: Si Inv: [Dirigiéndose a E2]. ¿Qué idea tenías tú?	En la primera intervención de E2 evidencia que el estudiante ha logrado establecer una relación de Recurrencia. El estudiante se centra en encontrar el patrón de variación, tal y como se observa en la figura. Cuando comprende que este método le llevará mucho tiempo decide abandonarlo y acogerse al de su compañera. Por su parte en la respuesta verbal dada por E1 se evidencia la

<table>
<tr>
<td></td>
<td>E2: Que en el día 1 tenía dos triángulos, a ese le sumaba cuánto le faltaba para llegar al día 2 y a ese le sumaba cuánto le faltaba para el siguiente [Indicaba en su hoja de trabajo como se muestra en las anteriores figuras]. Pero después vi que si seguíamos así no podríamos terminar porque no es fácil saber para un número grande. Entonces mi compañera se dio cuenta de otra cosa.

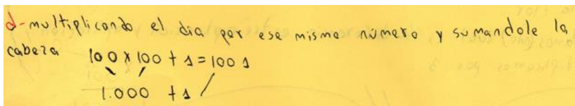
Inv: [Dirigiéndose a E1] ¿Qué hallaste?
E1: Multiplicamos el número del día por el mismo número y le sumamos uno.
Inv: ¿Cómo saben que eso funciona? ¿Cuál fue su respuesta?
E2: Por ejemplo, en el día 6 … 6x6 que da 36 más uno que sería la cabeza, 37.
Inv: ¿Y en el día 1?
E2: uno por uno es uno más uno, dos.
Inv: ¿Y en el día 2?
E1: dos por dos es cuatro, más una es cinco.
Inv: ¿Y en el día 3?
E1: tres por tres es nueve, más una es diez.</td>
<td>relación de Correlación. La estudiante observa cómo las dos cantidades (el número de días y el número de partes de la serpiente) se correlacionan. Esto se evidencia en su respuesta “Multiplicamos el número del día por el mismo número y le sumamos uno”.</td>
</tr>
</table>

	Inv: ¿Creen que funciona del mismo modo para todos los casos? E1 y E2: Si Inv: Ok. Sigamos.	
Video 002 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 10?	Inv: Cómo hiciste eso [Dirigiéndose a E1] E1: diez por diez, más una. Inv: ¿De la misma manera en que se hizo el anterior? E1: sí.	El estudiante usa la misma relación para el día 6 y el 10, es decir, evidencia la relación de Correlación. Tal y como lo menciona Pinto (2016), en los dos casos, se observa que relaciona pares de valores (*a*, *f*(*a*)) para valores de *a* correspondientes a los casos particulares (6 y 10), estableciendo una Correspondencia entre la variable independiente (Número de días) y la variable dependiente (Partes de la serpiente).
Video 002 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100?	Inv: ¿Qué escribiste ahí? [Dirigiéndose a E2] E2: En el día 100 la serpiente tendrá 101 partes.   Inv: ¿Por qué es que tiene 101 partes? E2: Porque cien por cien es… [el estudiante cae en cuenta de su error de operación y rectifica] digo jejeje… 1000 y 1, mil uno.	Para dar respuesta a esta pregunta el estudiante E2 continúa aplicando la misma relación descrita para el ítem anterior, tal y como se evidencia las imágenes, es decir, evidencia la relación de Correlación.
Video 002	Inv: Recuerden que deben ser muy explícitos.	Para dar solución a esta última pregunta, los estudiantes E1 y E2

<table>
<tr>
<td>Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100. ¿Cómo lo harías?</td>
<td>Que lo pueda entender un niño que vaya de primero.

E1: Multiplicamos el número del día por ese mismo número y al resultado le sumamos uno que sería igual a la cabeza.

E2:



[multiplicando el día por ese mismo número y sumándole la cabeza]

Inv: y si la pregunta fuera para cualquier número de partes…un número muy grande…por ejemplo para un millón.

E2: Un millón por un millón más uno.

Inv: para el día 5 millones.

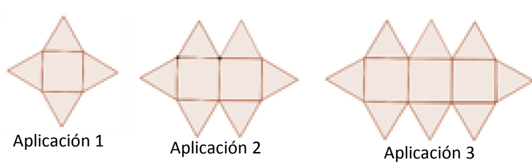
E1: cinco millones por cinco millones más uno.

Inv: Para el día cien mil millones.

E1 y E2: Cien mil millones por cien mil millones más uno.

Inv: Cómo hallaríamos el número de partes para cualquier día.

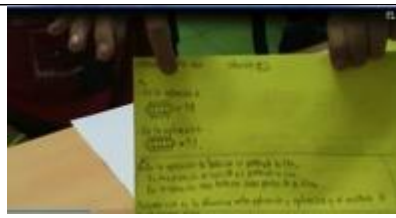
E2: Para cualquier día ese número se multiplica por sí mismo y al resultado se le suma uno.</td>
<td>continuaron implementando la relación funcional que usaron en los ítems anteriores (Correlación), con la novedad de recurrir a una representación numérica que deja ver la función que representa esta tarea. También se resalta en esta parte de la tarea que los estudiantes llegan al momento 4, donde logran construir una expresión verbal que les permita hallar el número de partes de la serpiente para cualquier día.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Problema de la flor



…</td>
</tr>
<tr>
<td>Video 003

¿Cómo estará la flor tras la</td>
<td>Inv: ¿Cómo quedaría la flor tras la aplicación 4?

E1: En la 4 quedó de 4 centros y de 10 pétalos.</td>
<td>Como se observa en la figura, al enfrentarse por primera vez a la Tarea, los estudiantes simplemente acuden a</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>aplicación 4 y 5?</td>
<td>

Inv: ¿Y en la 5?

E1: de 5 centros y de 12 pétalos.

Inv: ¿Cómo lo supiste?

E1: Bueno… Porque al número de la aplicación lo multiplicamos por 3 que sería el número de centros y después le sumamos dos.

Inv: mmm… entonces de esto podrían decir, ¿con qué coincide el centro?

E2: si, con el número de la aplicación.

Inv: Entonces en la aplicación 1 ¿cuántos centros hay?

E1 y E2: Uno

Inv: ¿En la dos?

E1 y E2: Dos

Inv: ¿En la tres?

E1 y E2: Tres

Inv: ¿En la mil?

E1 y E2: mil

Inv: Ok. Entonces ustedes dicen: lo multiplico por tres, ¿por qué lo multiplican por tres?

E1: Porque tenemos los de arriba, los del centro y los de abajo [señalando con su lápiz la ubicación de las partes de la flor].</td>
<td>dibujar las figuras consecutivas, brindando una respuesta casi inmediata. En este momento los estudiantes no ven la necesidad de analizar en detalle las características de la secuencia.

Cuando el número de aplicaciones va en crecimiento, los estudiantes ven la necesidad de hallar una estrategia diferente que les permita hallar la catidad de partes de la flor sin tener que recurrir a dibujar la secuencia. En este momento se evidencia una relación de Recurrrencia, de acuerdo a Bastías (2016), a medida que se genera una secuencia de valores, los estudiantes podrán obtener el patrón recurrente.</td>
</tr>
</table>

	 Inv: ok. E2: y se le suman los dos de los lados.  Inv: ¿O sea que siempre le voy a sumar dos?, ¿o no? E1 y E2: Sí. Inv: Y ¿qué es lo que varía entonces? E2: El número de aplicación. Inv: Y en la flor, ¿Qué varía? E1: El número de pétalos y de centros. Inv: ¿Qué permanece constante? E2: Los dos de los lados. Inv: ¿Siempre? E1 y E2: Sí.	
Video 003 ¿Describir con palabras cómo	Inv: Explica cómo lo hiciste. E2: En la aplicación 10 habría 32 partes de la flor.	En esta parte del ejercicio se evidencia una relación de Recurrencia, los estudiantes se centraron en encontrar el patrón

<table>
<tr>
<td>se verá la flor en la aplicación 10 y en el aplicación 20 y en la 1000? Explica por qué sabes que funciona de este modo.</td>
<td>E1: En la aplicación 20 habrían 62 partes de la flor.

Inv: Por qué supieron que esa es la respuesta.

E1: Porque en la 20 por ejemplo, serian 20 por 3, que daría 60 y los 2 de las esquinas que daría 62.

Inv: Y por qué veo un paréntesis y observo que los dos coincidieron en ese paréntesis.

E2: Porque nos quedó mal, porque no le sumábamos los dos de los lados.

E1: Porque tampoco multiplicábamos por el número de la aplicación, si no que hallábamos era la diferencia de una aplicación a la que nos preguntaban.

Inv: ¿a qué diferencia te refieres?

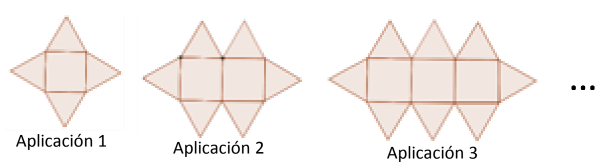
E1: Por ejemplo de la 10… no, de la 5 cuando preguntaban la 10, entonces de la 5 a la 10 habían 5 y así por 3 y ya.

Inv: mmm ya. Ok, muy bien. Entonces ¿por qué saben que funciona?

E1: Bueno, al número de la aplicación lo multiplicamos por 3 y le sumamos 2.

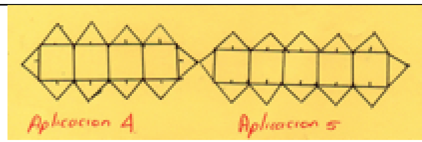
Inv: [Dirigiéndose a E2] ¿lo podrías decir de una manera diferente?

E1: No. Lo pensamos los dos.</td>
<td>de variación, y a partir de ahí dar respuesta a los demás ítems. Cuando comprenden que este método no les da los resultados esperados, deciden abandonarlo y analizar nuevamente el ejercicio.

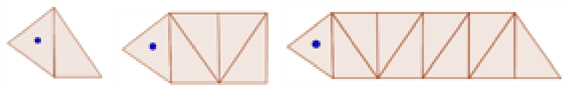
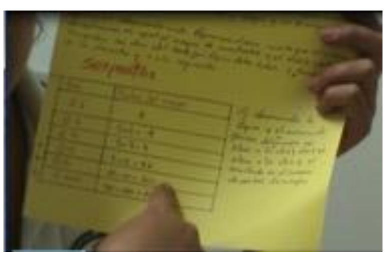
Cuando interviene el investigador cuestionando sobre el proceso que se llevó a cabo, surge la justificación esperada, haciendo uso de la relación funcional de correlación. E1 responde “Porque en la 20 por ejemplo, serian 20 por 3, que daría 60 y los 2 de las esquinas que daría 62.”</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">ENTREVISTA 2</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Problema de la flor

</td>
</tr>
<tr>
<td>Video 004

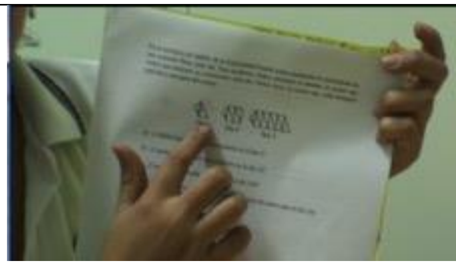
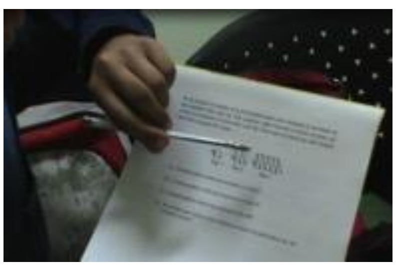
¿Cómo estará la flor tras la aplicación 4 y 5?</td>
<td>Inv: ¿Qué respondieron en esa pregunta?

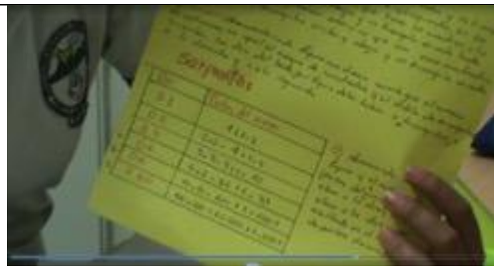
E3: Lo hicimos así [muestra la figura que representó en su hoja de trabajo]</td>
<td>En este primer acercamiento a la solución del problema, se evidencia la relación de Recurrencia. El estudiante se dedica a realizar los dibujos</td>
</tr>
</table>

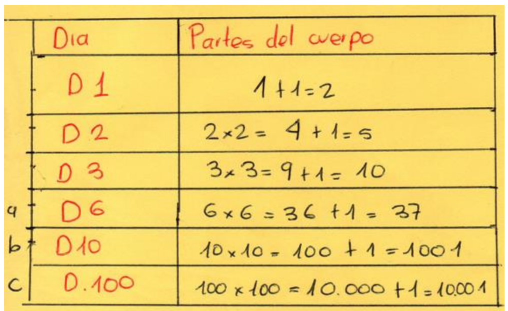
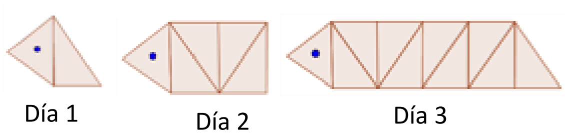
	 Inv: ¿Cómo supieron que era esa representación? E4: Porque observamos cada figura y dedujimos que según el número de aplicación, había una cantidad de cuadrados, entonces por cada cuadrado deberían haber dos triángulos, uno arriba y otro abajo, y por cada figura debía haber uno a la izquierda y otro a la derecha.   Inv: ¿Hay algo que varíe o permanezca constante en todas las flores? Por ejemplo en la flor 1, ¿Qué observamos en la flor 1? E3: Pues ahí lo que permanece constante son los dos triángulo de la derecha y de la izquierda. Inv: ¿Eso permanece constante en todas las flores? E3: Sí. Inv: ¿y qué varía? Por ejemplo de la aplicación uno a la dos o a la 100 o a la 1000.	consecutivos que se le piden, identificando que el número del centro de la flor va aumentando de uno en uno, pero sin ahondar demasiado en las características particulares que definen esta secuencia. Cuando en nivel de dificultad aumenta, los estudiantes empiezan a relacionar las variables del problema. Por ejemplo, identifican que el centro de la flor coincide con el número de la aplicación del fertilizante. En este momento ya se evidencia una relación de Correlación, quizá en un nivel preliminar. Los estudiantes han identificado que en la secuencia hay tanto elementos constantes como variables. Estos hallazgos aportan en la construcción de pensamiento funcional.

	E3: Variar es ¿Qué cambia? Inv: Sí. E3: [Piensa por un momento] O sea, la cantidad de cuadrados y triángulos arriba y abajo. Inv: Ok. Muy bien.	
Video 004 ¿Describir con palabras cómo se verá la flor en la aplicación 10 y en el aplicación 20 y en la 1000? Explica por qué sabes que funciona de este modo.	E4: Según lo que habíamos explicado antes, la flor en la aplicación 10 debe tener 10 cuadrados a lo largo, 10 triángulos arriba, 10 triángulos abajo, cada uno sobre un cuadrado y dos triángulos, uno a la izquierda y otro a la derecha. E3: En la aplicación 20 es casi igual a la aplicación 10, sólo que cambia el número de cuadrados y el número de triángulos. Inv: ¿Cómo lo escribiste? E3: Yo escribí, 20 cuadrados a lo largo, 20 triángulos arriba y abajo y un triángulo en cada lado. Inv: ¿Cómo quedó en el de mil? E4: Es igual a los casos anteriores, sólo tenía que hay 1000 cuadrados, mil triángulos arriba y abajo y dos triángulos a la izquierda y a la derecha. Inv: Ok, muy bien. Entonces ahora si yo quisiera saber la flor en la aplicación un millón. ¿Cómo quedaría? E4: Con un millón de cuadrados, un millón de triángulo arriba, un millón de triángulos abajo y uno a la izquierda y uno a la derecha. Inv: [Dirigiéndose a E3] Si yo quisiera saber las partes de la flor en la aplicación cincuenta mil millones. ¿Cómo lo harías? E3: De la misma manera que lo dijo E4, cincuenta mil millones de cuadrados a lo largo, cincuenta mil millones de triángulo arriba, cincuenta mil millones de triángulos abajo y dos triángulos, uno a la derecha y otro a la izquierda. Inv: ¿Cómo lo dirían para cualquier aplicación? E3: Yo diría que el número de cada aplicación es	En este momento se espera que los estudiantes lleguen a una expresión ya sea verbal o algebraica, que les permita ver la manera en que se puede hallar la cantidad de partes de la flor para cualquier aplicación. Se evidencia la correcta interpretación de parte de los estudiantes, al expresar de manera sencilla, la forma en que se van transformando las flores tras cada aplicación del fertilizante, sin importar que el número de la aplicación sea cada vez más grande. En este moemento se evidencia una relación de Correlación, pues los estudiantes están relacionando la posición de la figura con la cantidad total de partes de la flor.

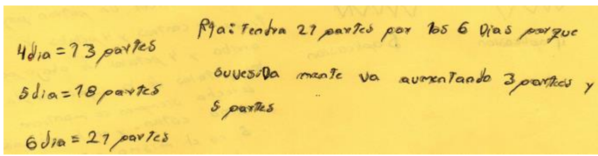
	el número de cuadrados y el doble de triángulos, sin contar el de la derecha y el de la izquierda. E4: Tomamos el número de la aplicación y ese número se convierte en cuadrados, o sea, el número de aplicación es la cantidad de cuadrados y entonces debe haber una misma cantidad de cuadrados y triángulos arriba y luego a los de abajo. [recurre al ejemplo con 100 para explicar lo que acaba de decir]	
	Problema de la serpiente  Día 1 Día 2 Día 3	
Video 005 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6? ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 10? ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100?	Inv: [Dirigiéndose a E3] ¿Cómo lo hiciste? E3: Lo hicimos en forma de una tablita, o sea, pusimos en una parte el día y en otra, partes del cuerpo, para responder las primeras tres preguntas. En el día 1 tendría 1 parte, en el día 2, yo multipliqué 2×2 que me daría 4 partes de cuerpo, en el día 3 multipliqué 3×3 que daría el número de partes igual a 9 , en 6 multipliqué 6×6 que me daría 36 y ese es el número de partes que tendría en 6 días.   Inv: Ok. Muéstrame la serpiente, enséñame el día 1, ¿Cuántas partes tiene? E3: El día 1 tiene un triangulito que sería una partecita. El día 2 yo multipliqué 2×2 me daría 4, tendría 4 partes del cuerpo.	En esta entrevista, se evidencia el uso de una estrategia diferente. Los estudiantes hacen uso de una tabla. Esta herramienta les permitió observar con más detalle la variación en la cantidad de partes del cuerpo de la serpiente, a medida que avanzaban los días. Batías (2016) cita a Doorman, et al., (2012), para referirse a la utilidad que representa el uso de tablas a la hora de evidenciar relaciones funcionales, específicamente comenta: "se destacan como representaciones útiles para el estudio de la covariación el uso de tablas y gráficos" (p. 18). En este momento se evidencia como dificultad para abordar

	 Inv: Y lo que tiene un puntico ¿qué es? E3: La cabeza de la serpiente. Inv: ¿La cabeza hace o no hace parte del cuerpo? E4: Si, pero en ese caso nos quedó mal. Inv: ¿Por qué? E4: Porque nosotros observamos la figura pero no contamos la cabeza… y nos dimos cuenta que éstos [refiriéndose a las partes del cuerpo], era el resultado de elevar el número de días a la 2.  Inv: Ok. Entonces ¿qué tendríamos que hacerle a la tabla para remediar esta situación? E3: Sumarle 1 Inv: Entonces ¿Cómo queda la tabla? E3: En el día uno hay una partecita del cuerpo y le sumamos uno que sería la cabeza, nos daría dos. En el día 2, 2×2 es 4 más uno de la cabecita, nos daría 5… en el de 100 multiplicamos 100×100 que daría 10.000 y sumaríamos 1 que es la cabecita y daría 10.001.	la Tarea, una mala comprensión de lectura, pues inicialmente los estudiantes no consideran la cabeza como parte del cuerpo de la serpiente. La construcción de la tabla brindó a los estudiantes la oportunidad de ver con mayor facilidad las característica de la secuencia y del mismo modo evidenciar con mayor prontitud la existencia de relaciones funcionales como Recurrencia y Correlación.

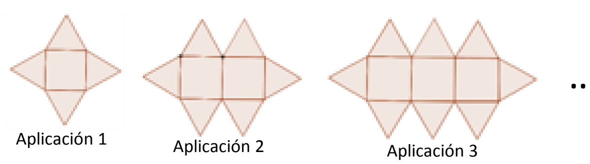
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Video 005

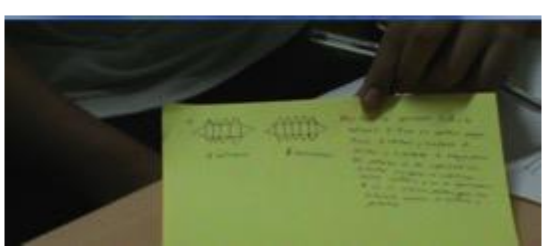
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100. ¿Cómo lo harías?</td><td>E3: Observando la figura y el número de días se eleva a la dos y el resultado es el número de partes del cuerpo.
<table><tr><th></th><th>Dia</th><th>Partes del cuerpo</th></tr><tr><td></td><td>D 1</td><td>1+1=2</td></tr><tr><td></td><td>D 2</td><td>2×2= 4+1=5</td></tr><tr><td></td><td>D 3</td><td>3×3= 9+1= 10</td></tr><tr><td>a</td><td>D 6</td><td>6×6 = 36 +1 = 37</td></tr><tr><td>b</td><td>D 10</td><td>10×10 = 100 + 1 = 1001</td></tr><tr><td>c</td><td>D.100</td><td>100×100 = 10.000 +1 = 10001</td></tr></table>
Inv: ¿Siempre se eleva al cuadrado?
E3: Si.
E4: El número de días se eleva a la dos y se suma uno</td><td>En este momento final se logra evidenciar una correcta interpretación del problema, al expresar de manera verbal la manera en que se puede hallar la cantidad de partes de la serpiente para cualquier día. A partir de esta representación, se evidencia la relación de Correspondencia y Covariación. De acuerdo a Cañadas y Molina (2016) los estudiantes pueden crear tablas de valores como herramientas para organizar la covariación de datos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ENTREVISTA 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Problema de la serpiente
</td></tr>
<tr><td>Video 006

¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?</td><td>E6: Pues…miramos la imagen del primer día, que tiene 2 partes, el segundo día tiene 5 entonces se sumaron tres partes más que el segundo día, y el tercer día se sumaron 5 partes. Entonces nuestra conclusión es que cada día va sumando 3 partes y luego 5 partes y se va repitiendo. [Lo muestra con las manos]
Inv: ¿Qué respondieron a la pregunta?</td><td>En esta entrevista se evidencia que el razonamiento de los estudiantes se da de manera unilateral. En su razonamiento sólo están teniendo en cuenta la manera en que aumentan las partes</td></tr>
</table>

	E6: En el día 6 tiene 21 partes. Esto es porque en el día 4 le sumamos 3 y en el día 5 le sumamos 5 y en el día 6 le sumamos de nuevo 3.   [Tendrá 21 partes por los 6 días porque sucesivamente va aumentando 3 partes y 5 partes]	de la serpiente día a día, sin prestar atención a la relación que existe entre los días y la cantidad de partes de la serpiente. La relación funcional que sobresale en este caso es la Recurrencia, debido a que sólo ponen en juego una de las variables del problema.
Video 006 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 10? ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100?	E5: Bueno pues en el día 10 aumentaría 35 triángulos, lo que la dejaría con 37 triángulos. Porque sumamos otra vez… [se observa confundido] Inv: ¿Habrá otra forma más fácil para hacerlo? Por ejemplo si yo les pidiera la cantidad de partes en el día cinco millones… ¿cómo lo harían? E5: Pues fácil, porque multiplicamos por el… [hacen operaciones en la mente y se muestran confundidos] Inv: ¿Cómo hicieron el del día 100? E6: Como ya teníamos la información del día 10, entonces lo multiplicamos por 10, porque 10×10 es 100. Inv: Ok. Sigamos.	Los estudiantes en este momento empiezan a ver que el método usado adelante no es muy útil cuando se trata de un número de días muy grande, así que tratan de encontrar una estrategia que les permita facilitar este proceso. La investigadora trata de hacerlos caer en cuenta que, multiplicando por 10 la cantidad de partes que obtuvieron en el día 10, no es lo mismo que la cantidad de partes que tendrán en el día 100, pero los estudiantes parecen confundidos, así que decide continuar para no intervenir

<table>
<tr><td></td><td></td><td>demasiado en el análisis de los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Video 007

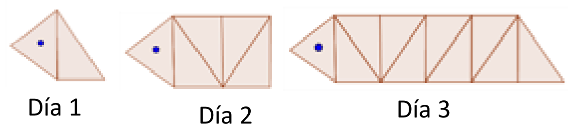
Si tuvieras que explicar cómo hallaste el número de partes para el día 100. ¿Cómo lo harías?</td><td>E5: Lo hicimos con multiplicación. Multiplicamos 10 y 37 que es lo que crecía. En el día 10 daría 370 porque del día 1 al 2 aumenta 3 partes y el día 2 al día 3 aumentaría 5. Entonces al día 10 tendría 37 cuadros, lo que significa que si nos preguntan por el día 100 tendría 370 triángulos en total y no estar sumando 3 y 5 y 3 y 5 entonces queda más fácil el procedimiento.</td><td>Como los estudiantes sólo observaron una de las variables, sin intentar hallar una relación entre el día y la cantidad de partes de la serpiente, no lograron llegar al objetivo de la Tarea, que consiste en hallar una expresión que relacione la cantidad de días con la cantidad de partes de la serpiente. Por lo tanto en esta parte de la Tarea los estudiantes E5 y E6 no evidencian ninguna de las reslaciones funcionales (Recurrencia, Correspondencia y Covariación).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Problema de la flor
</td></tr>
<tr><td>Video 008

¿Cómo estará la flor tras la aplicación 4 y 5?</td><td>E6: Hicimos la representación así. En la aplicación 5 los pétalos de arriba son 5 y los de abajo también son 5 y los de la izquierda y derecha siempre se mantienen.
</td><td>En la solución de este problema, los estudiantes lograron desde un primer momento relacionar la cantidad de pétalos, con el número de la aplicación, para dar solución a los primeros ítems. Con las respuestas de los estudiantes, se</td></tr>
</table>

	Inv: Ok. Y en el centro ¿qué pasa? E6: Hay también 5 centros que coincide con la aplicación.	evidencia una relación de Correspondencia entre la cantidad de pétalos y la cantidad de aplicaciones del fertilizante.
Video 008 ¿Describir con palabras cómo se verá la flor en la aplicación 10 y en el aplicación 20 y en la 1000? Explica por qué sabes que funciona de este modo.	E5: Yo escribí que como guiándome por el centro y por la aplicación, entonces a la aplicación 10 se verían 10 centros y 10 pétalos arriba y abajo y dos a los lados, lo que sería entonces 22 pétalos y 10 centros. E6: Yo escribí que se hallaba el mismo patrón, que por cada aplicación que le daban tendría los mismos centros, digamos si tuviera 4 … Inv: En el caso de 20. E6: En el caso de 20 como aplicaron 20 veces tendría 20 centros, 20 pétalos de arriba y 20 de abajo y 2 hacia los lados. Inv: ¿Y qué pasa con 100? ¿Queda igual? E6: Si, porque siempre se mantiene el patrón. Inv: ¿Y en el caso de 1000? E5 y E6: Mil centros, mil pétalos arriba, mil pétalos abajo y 2 hacia los lados.  Inv: ¿Siempre funciona? E5 y E6: si Inv:¿Por qué creen que siempre funciona? E6: Porque es como un patrón, que siempre va funcionando. Que siempre se da así, porque con cada aplicación siempre van a haber el mismo número de pétalos y el mismo número de centros… no, perdón… es el mismo número de	Los estudiantes logran hacer una descripción verbal de la manera en que se va modificando la flor tras la aplicación del fertilizante. Mediante sus respuestas, dejan ver que comprenden las características principales de la secuencia, lo cual describen como un patrón, que les permite saber la cantidad de partes de la flor en cualquier aplicación del fertilizante. Con estas evidencias se puede observar la relación de Recurrencia y Correspondencia al relacionar las variables e identificar la manera en que se va construyendo la secuencia.

<table>
<tr><td></td><td>pétalos de arriba y el mismo número de pétalos de abajo.

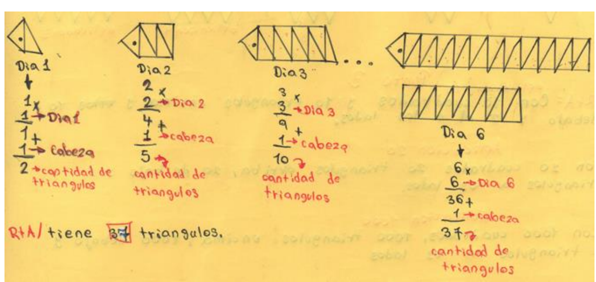
Inv: Para cualquier flor ¿Cómo lo describirías?

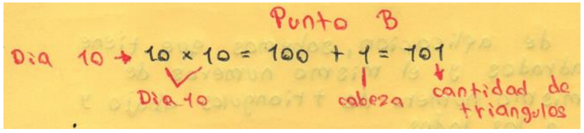
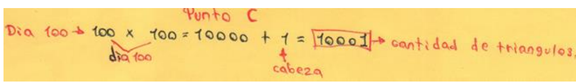
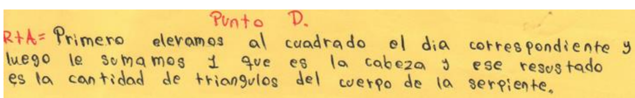
E5: Pues entonces sería cualquier número, sería cualquier aplicación, el mimo número de centros sería el mismo número de la aplicación del fertilizante y tendrían los mismo pétalos de arriba y de abajo y los dos de los lados.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ENTEVISTA 4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Problema de la serpiente

</td></tr>
<tr><td>Video 009

¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 6?</td><td>E8: Multiplicábamos el día por él mismo y le sumábamos la cabeza.

Inv: ¿Cuánto les dio?

E7: 37

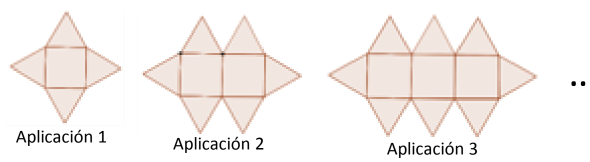
Inv: Bien.

</td><td>En las respuestas tanto verbales como escritas se evidencia la relación de Recurrencia y Correspondencia. Los estudiantes logran relacionar de manera adecuada las dos variables (número de días y cantidad de partes de la serpiente), para identificar la cantidad de partes de serpiente en un determinado número de días. Logran hacer una representación numérica y pictórica de la situación, lo cual evidencia un buen análisis de las principales características de la secuencia.</td></tr>
<tr><td>Video 009</td><td>E7: El mismo procedimiento, elevamos al cuadrado el día y luego le sumamos 1 que es la</td><td>Al haber descubierto la manera en que se va</td></tr>
</table>

¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 10?	cabeza y eso es igual a 101. Inv: Muy bien.  Punto B Dia 10 → 10 × 10 = 100 + 1 = 101 Dia 10 cabeza cantidad de triangulos	construyendo la secuencia, resulta bastante simple para los estudiantes continuar haciendo el mismo procedimiento y dar solución a las preguntas posteriores. En este caso se observa una representación numérica que muestra la forma en que el estudiante evidencia la relación de Correlación.
Video 009 ¿Cuántas partes tendrá la serpiente en el día 100?	E7: Para responder esta pregunta se hace el mismo procedimiento.  Punto C Dia 100 → 100 × 100 = 10000 + 1 = 10001 → cantidad de triangulos. dia 100 cabeza Inv: Si tuvieras que hallar el número de partes para el día 100. ¿cómo lo harías?  Punto D. R+A= Primero elevamos al cuadrado el dia correspondiente y luego le sumamos 1 que es la cabeza y ese resultado es la cantidad de triangulos del cuerpo de la serpiente. [Primero elevamos al cuadrado el día correspondiente y luego le sumamos 1 que es la cabeza y ese resultado es la cantidad de triángulos del cuerpo de la serpiente] Inv: Yo les oí que decía que para hacer ése procedimiento se demoraban mucho. ¿A qué procedimiento se referían? E7 y E8: Dibujando la serpiente. [Muestran la figura]  Inv: ¿Pretendían hacer los dibujos de todas las	Los estudiantes admiten que al principio sólo estaban dibujando las serpientes, pero se dieron cuenta que ese proceso lleva mucho tiempo. Decidieron entonces, implementar una estrategia más sencilla, multiplicando el número de días por sí mismo y sumándole uno, para hallar el número de partes del cuerpo de la serpiente. Este proceso lo implementaron en todos los ítems. Con ese análisis, los estdiantes evidecian la relación de Recurrencia y Correlación.

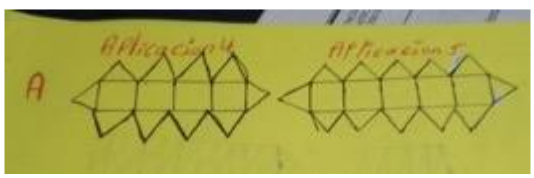
<table>
<tr><td></td><td>serpientes hasta la 100?

E7 y E8: Sí.

Inv: ¿Cómo hicieron para darse cuenta que había una forma más fácil?

E7: La vedad no sé cómo.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Problema de la flor
</td></tr>
<tr><td>Video 010

¿Cómo estará la flor tras la aplicación 4 y 5?</td><td>Inv: ¿Cómo hicieron esta parte?

E8: Hicimos el dibujo.

Inv: ¿Cómo supieron que las figuras estaban bien así?

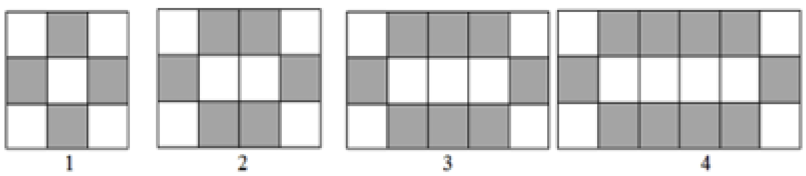
E8: Siguiendo el patrón, profe…La aplicación 1 tiene 1 centro, la 2 tiene 2, la 3 tiene 3…y así sucesivamente.

Inv: Y con los pétalos ¿Cómo funciona?

E8: La misma cantidad arriba que abajo y los de los lados.</td><td>En la solución de este problema se evidencia que los estudiantes desde el comienzo, logran realizar una conexión entre la cantidad de centros de la flor y la aplicación del fertilizante. Describen una relación de Correlación, al mencionar que coincide el número de la aplicación de fertilizante con la cantidad de centros, de pétalos en la parte superior y de pétalos en la parte inferior. Se evidencia una relación de Recurrencia, cuando los estudiantes identifican los elementos que varían (centros de la flor y pétales) y los que permanecen constantes (dos pétalos, uno a cada lado de la flor) en la secuencia, es decir, los estudiantes han</td></tr>
</table>

		identificado las principales características de la secuencia.
Video 010 ¿Describir con palabras cómo se verá la flor en la aplicación 10 y en el aplicación 20 y en la 1000? Explica por qué sabes que funciona de este modo.	Inv: [Dirigiéndose a E8] ¿Cómo lo describiste para 10? E8: 10 cuadros, 10 triángulos arriba y 10 abajo y 2 a los lados. E7: Para la aplicación 20 con 20 cuadrados en el centro, 20 triángulos encima, 20 triángulos abajo y 2 a los lados. E8: Mil cuadros, mil triángulos arriba, mil triángulos abajo y dos a los lados. Inv: ¿Por qué creen que eso funciona? E8: Porque lleva un patrón. Inv: ¿Qué es un patrón? E7: Una sucesión Inv: ¿Qué es una sucesión? E7: Es como decir 1, 2, 3, y todavía sigue el patrón 4 5 ,6,…[hace en movimiento ondulatorio con sus manos]  Inv: ¿Cómo se vería en cualquier aplicación? [Los estudiantes acuden a ejemplos sin lograr una generalización]	Es claro que los estudiantes comprenden la manera en que se va formando la secuencia, pero en el momento de concretar una expresión que de algún modo generalice esa forma en que se va construyendo la secuencia, no logran concretar, y recurren a ejemplos. Esto implica que no han logrado ir más allá de la relación de Recurrencia.

Apéndice B: Tarea Problema de las baldosas

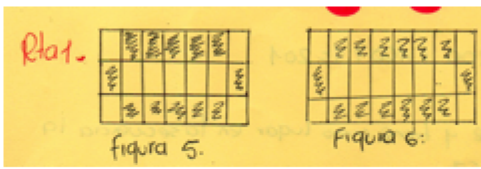
Pregunta	EVIDENCIA	RELACIÓN FUNCIONAL
	Problema de las baldosas 	
	Sesión 1	
Video 001: Representa la 5ª figura de la secuencia.	Inv.: ¿Cómo lo hiciste? E3: Como después seguía la figura 5, hay 5 baldosas grises acá [señalando en su figura].  y acá [señalando la esquina superior izquierda de su figura] y a este borde [señalando la esquina superior derecha de su figura] solo queda una blanca, y por eso las hice así.	Se evidencia que la estudiante logra identificar con ayuda de las imágenes dadas, la manera en que se va construyendo la secuencia. En este momento se puede evidenciar una relación de Recurrencia, pues la estudiante se apoya en el patrón que le proporciona las primeras 4 imágenes, para construir las siguientes. Al relacionar la posición de la figura con las baldosas grises de la primera fila, de abajo hacia arriba, se puede

	  Inv.: O sea que tu relacionaste la figura con ¿cuáles baldosas? E3: O sea, digamos ésta es la figura 5 [señalando la figura] y la relacioné con las baldosas [señala todas las baldosas]. Inv.: Ok. Pero yo ahí cuento 1, 2, 3, 4, 5, 6, y 7 baldosas. E3: Lo que pasa es que acá y acá sobra una blanca [indicando los dos extremos superiores de su figura], porque así están las figuras otras. Inv.: ¿Lo relaciones con cuáles baldosas? ¿Con las de qué color? E3: Con [se queda pensando un momento] O sea, aquí en la figura 4 habían 4 baldosas grises y una a cada lado que era blanca [indica la hoja en la que se le ha propuesto la tarea] 	evidenciar, quizá en un nivel básico, la relación de Correspondencia. E3 está relacionando las dos variables (posición de la figura y número de baldosas en la primera fila de abajo hacia arriba). Por otro lado, con este primer momento de la Tarea, se puede ver que los 7 participantes del GTM–UIS lograron evidenciar la relación de Recurrencia, catalogada como la más elemental desde e punto de vista de Cañadas y Pinto (2016). Se consideran evidencias de la existencia de la relación de Recurrencia en las imágenes que representaron los 7 estudiantes, donde construyen de manera correcta las figuras 5 y 6 de la secuencia, a partir de la información que les brindan las cuatro primeras figuras presentadas en la tarea.

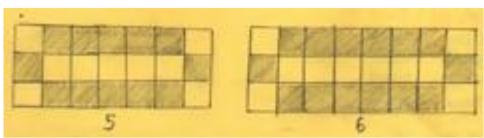
Entonces en la figura 5 eran también 5 baldosas acá [indicando el centro de la figura] grises y una blanca en cada lado.

Las siguientes imágenes muestran la manera en que los 7 estudiantes dieron solución al ítem a.

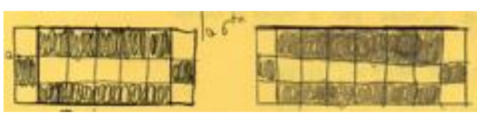
E3:



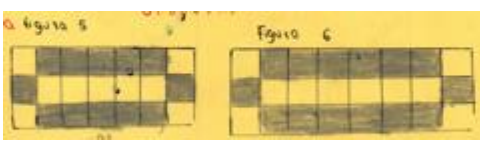
E1:



E5:

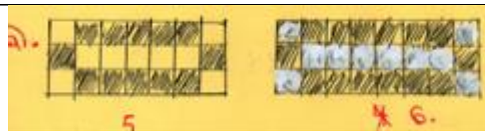
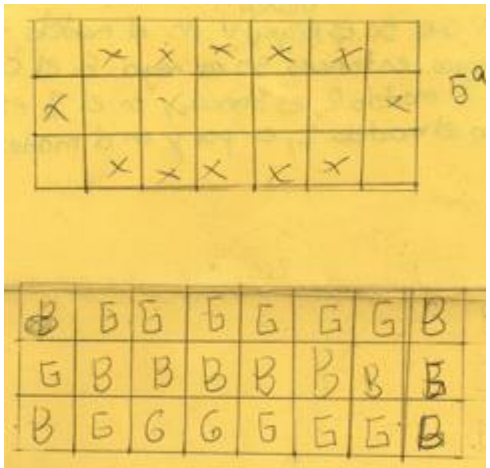


E2:

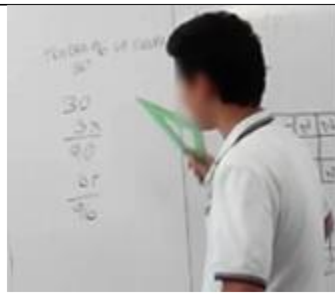


E6:

E7:

	 E4: 	
Video 002: Representa la 6ª figura de la secuencia.	E4: Esta es la figura 6 y me di cuenta que así era porque siguiendo los ejemplos [se queda pensando un momento]  Por ejemplo en la figura 1, tenía que haber un cuadrado de color gris y 2 de color blanco, uno a cada lado. Arriba en la siguiente fila tenía que haber a los lados 2 grises y en el centro 1 blanco y arriba se repetía lo mismo que en la parte de abajo, tenía que ser el del centro gris y en cada lado uno blanco.	En esta parte se evidencia una relación de Correspondencia, en un nivel elemental, cuando el estudiante logra identificar que la posición de la figura se relaciona con la cantidad de baldosas centrales. Otro elemento que nos permite evidenciar la existencia de una relación de Correspondencia es cuando el estudiante observa que en cada fila hay 6 baldosas de un color y dos de otro, intercambiando entre blancas y grises.

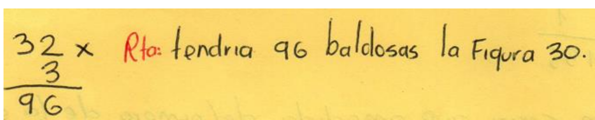
	 Inv.: Ok, entonces en la figura 6 tendría ¿cuántas baldosas? E4: En la figura 6 habrá 6 baldosas grises, la blanca a la izquierda y la blanca a la derecha [Indicado en su figura.] Arriba, las que estaban grises antes las ponemos en blanco y las que estaban en blanco las ponemos gris y arriba [refiriéndose a la última fila] la volvemos a poner como aquí abajo [refiriéndose a la primera fila], las dejamos 2 blancas a los lados y en el centro las grises.  	
Video 003 ¿Cuántas baldosas tendrá en total la figura 30?	E6: Yo creo que sería 96 profesora, porque mire [indica la imagen de la figura 6]. Como es la figura 6 entonces hay 6 baldosas grises y dos blancas acá [indica la primera fila de abajo hacia arriba] entonces multipliqué 30 por 3 porque aquí siempre se mantiene el mismo número [refiriéndose al centro de la figura y lo relaciona con la posición de la misma]. Eso me da 90 y acá le voy a sumar estas 3 [indica 3 baldosas a cada lado de la figura] que sobran, aunque no es que soben, y me da 96.	En este momento se evidencia en un nivel más avanzado la relación de Correspondencia, la estrategia implementada en el ítem anterior no es acertada en este momento, ya que en esta parte de la tarea se pide una figura que está en una posición más alta (Figura 30). El estudiante recurre a



Inv.: Ok.

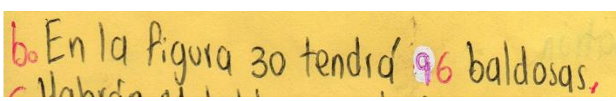
Las respuestas escritas de los estudiantes se muestran a continuación.

E3:



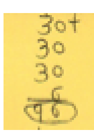
[Tendrá 96 baldosas la figura 30]

E1:

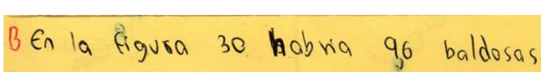


[En la figura 30 tendrá 96 baldosas]

E5:



E2:



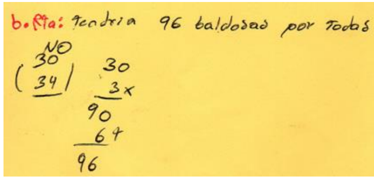
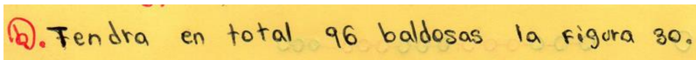
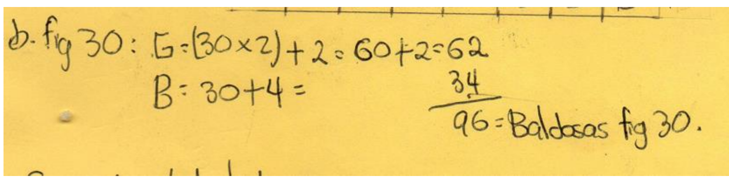
[En la figura 30 habría 96 baldosas]

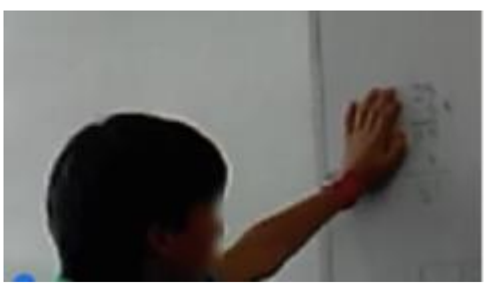
características más específicas de la secuencia, que le permiten relacionar la posición de la figura con la cantidad de baldosas.

En las respuestas escritas se puede evidenciar diferentes estrategias, por ejemplo el estudiante E4, quien halla la manera de encontrar la cantidad de baldosas grises por un lado y la cantidad de baldosas blancas por el otro; para luego sumar las dos cantidades y hallar el total; con este análisis se evidencia un relación de Covariación, el estudiante logra observar cómo varían simultáneamente dos variables y la manera en que una de las variables afecta a la otra.

El estudiante E5 multiplica por 3 la posición de la figura y finalmente le suma 6; con esto se evidencia una relación de Recurrencia.

El estudiante E6

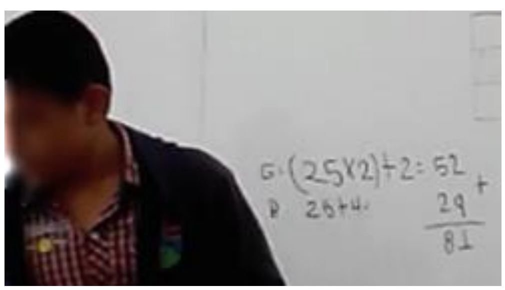
	E6:  [Tendría 96 baldosas por todas] **E7:**  [Tendrá en total 96 baldosas la figura 30] **E4:**  	suma tres veces la posición de la figura más 6, con esta respuesta se observa que el estudiante ha identificado el patrón que describe la secuencia, por tanto se ve una relación de Recurrencia. El estudiante E3 suma la posición de la figura más 2 y lo multiplica por 3, esta es otra evidencia de la relación de Correlación. Los demás estudiantes simplemente dan una respuesta directa, sin dejar evidencia de su proceso. Con los procesos que lograron realizar 4 de los estudiantes, se puede evidenciar formas diferentes de abordar el mismo problema.
Video 004 ¿Qué figura de la secuencia tiene 81 baldosas?	Inv.: Bueno, cuéntanos qué hiciste ahí. E2: Pues … como en la figura 1, 2 y 3, Esto [señalando su figura] en la figura 2 había 2 cuadritos grises. Esos 2 los multipliqué por 3 [señalando con sus dedos] .	Para la solución de esta parte de la tarea se requiere una correcta interpretación de la manera en que se va construyendo la secuencia. En este caso los estudiantes tienen el número de baldosas y necesitan

	 Y le sumé los 3 de los lados [indica los dos extremos de la figura] para saber cuántas baldosas tenía en total.  Inv.: Y ahora como te daba el número de baldosas que era 81. ¿Cómo supiste qué figura era? E2: Yo… multipliqué 25 por 3 que me da esto [indicando la multiplicación]  y le sumé 6 de los lados y ésta es la figura. Inv.: ¿Qué figura es? E2: La figura 25. Inv.: Ok. E3: Yo creo que le faltaría. Inv.: ¿Qué le falta?	averiguar la figura a la que pertenecen. En la explicación del estudiante E2 se evidencia que comprende la función principal, es decir, hay evidencia de la relación de Correlación, pero no logra explicar correctamente lo que ocurre cuando en vez de la posición se le facilita la cantidad de baldosas. Por su parte el estudiante E7, después de una discusión entre varios estudiantes, logra explicar de forma correcta la manera en que se puede hallar la figura, dada la cantidad de baldosas. Con este ítem nuevamente saltan a la vista varias estrategias de solución, unas más elaboradas que otras, pero al final casi todos lograron llegar a la solución. En esta parte de la tarea es evidente la aparición de la relación de Correspondencia, al lograr llegar a la

	E3: ¿Lo lógico? O sea ¿sumarle 6 para que de 81? [con tono irónico y un poco incrédulo] E2: Si, porque son las 6 de los lados. [le indica a su compañera las 6 baldosas de los lados de la figura] E3: No porque mire allá en la figura 6, hay más de 6 baldosas blancas. E2: Mire se multiplica 6 por 3 y se suman los 6 de los lados [indicando la figura 6].  E3: No debería sumarle 25 más 2, o sea la figura 25 más 2 que son las de los lados que son blancas… ¿sería base por altura? E7: No, lo que debe hacer es: réstele a 81 el 6 que son las baldosas laterales, luego divídala en las 3 partes y saca el resultado. E3: Ah, yo lo hice diferente. E7: ¿Cómo? E3: Lo que le estoy diciendo, 25 más 2 que me da 27, y 27 por 3 me da 81. E4: Profesora yo lo hice de otra forma para hallar las baldosas grises y las blancas. Inv.: Listo, pasa y nos muestras. E4: Ésta es la figura 5 que hizo E3. Entonces abajo hay 5 grises	variable independiente a partir de la variable dependiente, estableciendo una relación. En 3 de las respuestas escritas se puede evidenciar un correcto manejo de la función, en 2 de los casos se evidencia la estrategia de ensayo y error, y en las demás no se evidencia ningún tipo de proceso.

y arriba otras 5, entonces yo lo hice como el número de cualquier figura.

En este caso ya nos dimos cuenta que era 25, entonces lo multiplicamos por 2 le sumamos estas 2 de los lados [indicando las baldosas laterales en la figura] y entonces eso daría 52. Y para las baldosas blancas tomaríamos las 4 de los lados y las 25. Entonces sería 25 más 4 que sería 29. Luego como ya tenemos las grises y las blancas solamente nos faltaría sumarlas. En este caso sería 52 más 29 que da 81.

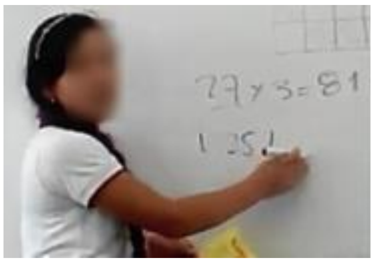


Inv.: E3 pasa y nos cuentas cómo supiste cuál era la figura.

E3: Pues yo… cómo le explico para que me entienda profesora [se queda analizando su respuesta] Pues yo miré el punto 2 [ítem b de la tarea] y decía que en la figura 32 había 96 fichas.. O sea que debía ser menos de 32, pues bueno, yo lo hice así.

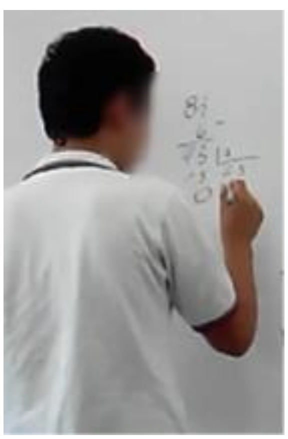
Inv.: ¿Eso quiere decir que lo hiciste a ensayo y error?

E3: Como en la figura 32 había 96 baldosas, entonces aquí [refiriéndose a la figura con 81 baldosas] debía haber un poquito menos. Primero multipliqué 20 por 3 y me dio 60, era un poquito más. Después 25 lo multipliqué por 3 y me dio 75, entonces cogí 27 por 3 que me dio 81 . Porque O sea, 27 por 3 da 81, pro a esos 27 le quité 2, entonces quedaría 25 porque aquí y aquí [señalando a lado y lado del 25] hay una figura blanca.



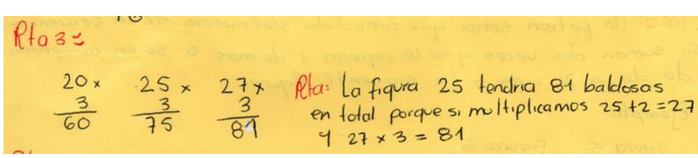
Inv.: Ok muy bien, esa es otra forma de hacerlo. Ahora E6, te escuché diciendo algo diferente, pasa y nos muestras.

E6: Yo lo hice así. 81 menos 6 da 75 y después lo dividimos en 3 que son estas 3 partes [señalando las 3 filas] y es nos va a dar 25.



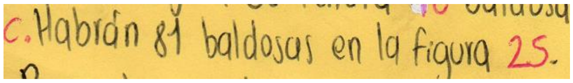
A continuación las respuestas escritas de cada uno de los estudiantes.

E3:



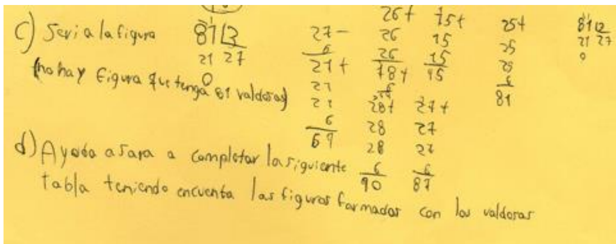
[La figura 25 tendrá 81 baldosas en total porque si multiplicamos $25+2=27\ y\ 27\ \times 3=81$]

E1:



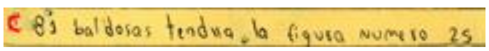
[Habrá 81 baldosas en la figura 25]

E5:



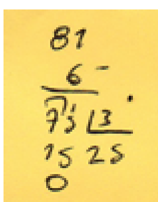
[Sería la figura (no hay figura que tenga 81 baldosas)]

E2:

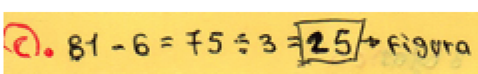


[81 baldosas tendrá la figura número 25]

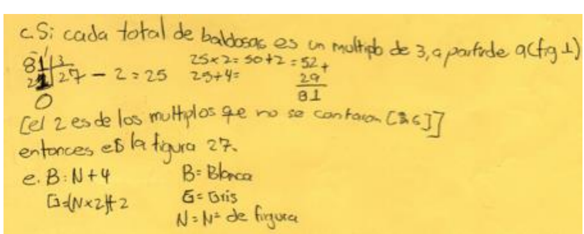
E6:



E7:

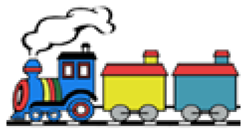


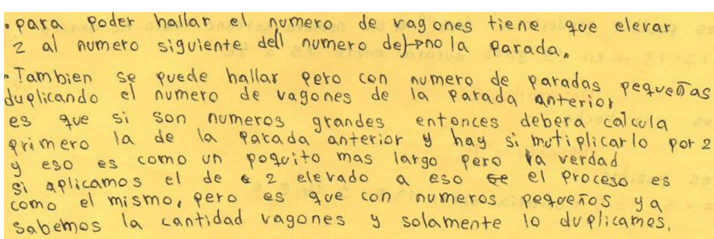
E4:

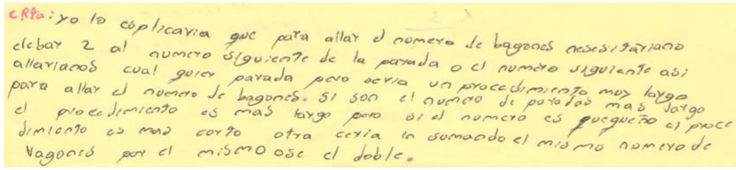


[Si cada total de baldosas es múltiplo de 3, a partir de 9 (figura 1)]

Anexo C: Entrevista Final (Tarea del tren en movimiento)

Pregunta	EVIDENCIA	RELACIÓN FUNCIONAL
	Tren en movimiento 	
	Entrevista 1	
Video 001 ¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 10?	Inv: ¿Cuál es la situación? E6: Hay un tren que recoge vagones en cada parada. Inv: ¿Empieza con cuántos vagones? E7: Con dos. Inv: ¿En la primera parada cuántos recoge? E6 y E7: El doble Inv: ¿El doble de quién? E7: Del anterior. Inv: ¿Siempre es así? E6 y E7: Si. Inv: ¿Cómo hicieron para saber cuántos vagones había después de la parada 10? E7: Solamente averiguamos el número consecutivo de 10 es 11, entonces hallamos la potenciación de 10 a la 11. Inv: O sea ¿del número siguiente? ¿Funciona? E7: Si, por ejemplo la primera: el número siguiente es 2 y dos a la dos es 4. Y así funciona con todos.	En las respuestas dadas por los estudiantes se evidencia que han identificado desde el comienzo la forma en que van aumentando los vagones. Se evidencia la relación de Recurrencia, en el momento en que el estudiante afirma que aumenta el doble de la anterior. Los estudiantes logran relacionar el número de la parada con la cantidad de vagones que le corresponden. Se evidencia una relación de Correspondencia cuando el estudiante dice “Solamente averiguamos el número consecutivo de 10 es 11, entonces, hallamos la potenciación de 10 a la 11”.
¿Cuántos vagones tiene el tren después de	E7: Entonces sería 2 a la 101. Inv: ¿Entonces nos dará un número pequeñito? E6: Profesora… [Risas] … sería muy grande.	Los estudiantes evidencian en su respuesta una correcta interpretación de la situación,

la parada 100?	E7: Sería un tren muy extraño. E7: Dos elevado al número siguiente de la parada.	implementando la misma estrategia que utilizaron para el ítem anterior, es decir, que en su proceso evidencian una relación de Recurrencia.
¿Cuántos vagones recoge en cada parada?	E7: Engancha el doble de la parada anterior.	En esta respuesta se evidencia un claro dominio de la relación de Recurrencia, pues el estudiante está identificando la manera en que varía una de las variables.
¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?	E6 y E7: Número de vagones es igual a 2 elevado al número siguiente de la parada.	En este momento el estudiante responde con una expresión verbal, que le permite hallar la cantidad de vagones de tren en cualquier parada, evidenciando la relación de Correlación.
¿Cómo le explicarías a un amigo el proceso para calcular el número de vagones del tren para cualquier número de paradas?	E7:  ·para poder hallar el numero de vagones tiene que elevar 2 al numero siguiente del numero de ~~no~~ la parada. ·Tambien se puede hallar pero con numero de paradas pequeñas duplicando el numero de vagones de la parada anterior es que si son numeros grandes entonces debera calcula primero la de la parada anterior y hay si mutiplicarlo por 2 y eso es como un poquito mas largo pero la verdad si aplicamos el de 2 elevado a eso ~~se~~ el proceso es como el mismo, pero es que con numeros pequeños ya sabemos la cantidad vagones y solamente lo duplicamos. [Para poder hallar el número de vagones tiene que elevar 2 al número siguiente de la parada. También se puede hallar pero con número de paradas pequeñas duplicando el número de vagones de la parada anterior, es que si son números grandes, entonces deberá calcular primero la de la parada anterior y ahí si multiplicarlo por 2 y eso es como un poquito más largo, pero la verdad si multiplicamos el de 2 elevado 9, el proceso es como el mismo, pero es que con números pequeños ya sabemos la cantidad de vagones y solamente lo duplicamos.]	En este momento los estudiantes intentan explicar con sus palabras el procedimiento que siguieron, coincidiendo en que hay dos maneras de saber la cantidad de vagones. Una es conociendo la cantidad de vagones de la parada inmediatamente anterior. La otra forma es elevando al cuadrado el número de la parada. Este estudiante escribe que en números muy grandes cualquiera de los dos proceso se hace complicado; con este análisis evidencia una

<table>
<tr><td></td><td>E6:

cRta: yo lo esplicaria que para allar el numero de bagones nesesitariamo elebar 2 al numero siguiente de la parada o el numero siguiente asi allariamos cual quier parada pero seria un procedimiento muy largo para allar el numero de bagones. si son el numero de paradas mas largo el procedimiento es mas largo pero si el numero es pequeño el procedimiento es mas corto otra seria lo sumando el mismo numero de vagones por el mismo ose el doble.

[Yo lo esplicaría que para hallar el número de vagones necesitaríamos elevar 2 al número siguiente de la parada o el número siguiente, así hallaríamos cualquier parada, pero sería un procedimiento muy largo para hallar el número de vagones. Si son el número de paradas más largo, el procedimiento es más largo, pero si el número es pequeño, el procedimiento es más corto. Otra sería sumando el mismo número de vagones por el mismo, o sea el doble.]</td><td>relación de Recurrencia, Correlación y Covariación, pues ha identificado las principales características que describen la secuencia, la relación entre las variables y cómo una variable afecta a la otra.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Entrevista 2</td></tr>
<tr><td>Video 002

¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 10?</td><td>Inv: ¿Qué hicieron ahí para saber cuál era la respuesta?

E1: Pues yo multipliqué por dos el número anterior de vagones [señala con su mano], por ejemplo aquí se muestra que 4, entonces por dos que sería 8, por dos 16, por dos 32 y me dio 2048.

</td><td>En la respuesta de la estudiante se evidencia la relación de Recurrencia, pues está centrada sólo en una de las variables, que en este caso es la manera en que van aumentando los vagones.</td></tr>
<tr><td>¿Cuántos</td><td>E1: Pues, le agregamos un cero más.</td><td>Los estudiantes no</td></tr>
</table>

vagones tiene el tren después de la parada 100?	 Inv: ¿Será que funciona? E5: Si. Inv: ¿Cómo saben que funciona? E5: Pues profesora, porque al multiplicar por ejemplo el 1 por 10… mmm, no. Porque es nada más multiplicar el 1 y ponerle los ceros. Inv: ¿Será que funciona así tan fácil? Revisen la tabla para ver si funciona. Se interrumpe la entrevista por falta de tiempo.	lograron hacer la transición entre la Recurrencia y la Correlación. Se centran únicamente en los cambios que surgen en una sola de las variables. No responden ante los interrogantes hechos por parte de la investigadora y continúan pensando que se obtiene igual cantidad de vagones al multiplicar los vagones que hay en la parada 10 al multiplicarlos por 10, que los que habrá en la parada 100.
Entrevista 3		
Video 003 ¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 10?	Inv: ¿Qué fue lo primero que hiciste? E2: Revisar la tabla. Inv: ¿Qué observaste? E2: En cada tabla se aumentan 4 vagones. Inv: ¿Cuatro? De 8 a 16 ¿hay 4? E2: No. O sea, cómo lo explico [se queda pensando por un momento] …O sea yo… Inv: ¿Cómo supiste que aquí era 64 y acá el 128? E2: Porque 32 por 2 es 64. Inv: O sea que lo miraste así… entonces [señalando los primeros resultados] ¿acá cómo obtuviste el resultado? E2: Pues…4 por 2 es 8, 8 por 2 es 16 , 16 por 2 es 32, 32 por 2 es 64 y 64 por 2 es 128. Inv: ¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada	En esta entrevista se evidencia la Recurrencia, el estudiante centra su análisis en la cantidad de vagones y la forma como van aumentando, sin entrar a estudiar la relación entre las variables.

	10? E2: Lo hice multiplicando por dos hasta llegar a 10.	
¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 100?	E2: Para el de 100 multipliqué este número [señalando el de la parada 10] por 10.  Inv: ¿Crees que así funciona? E2: Pues… No sé… Inv: Observa la tabla… imagina que tienes los vagones de la parada 1 y te pido los vagones de la parada 5. ¿Da igual el multiplicar 4 por 5 que la cantidad de vagones que hay para la parada 5? Inv: ¿Cuánto es 5 por 4? E2: 20. Inv: Y en la parada 5 ¿cuántos tengo? E2: 64. Inv: ¿Entonces es lo mismo? E2: No. Inv: Entonces ¿habrá otra estrategia que me permita saber la cantidad de vagones para la parada 100? E2: Yo creo que sí. Inv: ¿Qué forma será? E2: Pues…[se queda pensando]. Inv: Bueno avancemos.	Parece un error común el que los estudiantes consideren que hay la misma cantidad de vagones en la parada 100 que los que habrá al multiplicar 10 por la cantidad de vagones que hay en la parada 10. Esto lo atribuyen a que 10 por 10 es 100. En este caso a pesar que el investigador se apoya en un caso particular cercano para mostrar el error al estudiante, no es posible que el estudiante logre establecer una relación entre las variables de la Tarea.
¿Cuántos vagones recoge en cada	E2: En cada parada aumenta, por ejemplo, si en la parada 5 hay 64 vagones, aumenta el doble de la anterior.	El estudiante comprende muy bien la manera en que se va formando la secuencia de vagones, pero no logra analizar a fondo las relaciones que pueden surgir entre las

parada?		dos variables, esto significa que no logra ir más allá de la relación de Recurrencia.
¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?	Inv: ¿Habrá algo que me permita relacionar el número de la parada con el número de vagones? E2: Pues, 2 por 4 es 8, 3 por 8 es 16 y 4 por 2 es … No [se observa confundido] Inv: ¿Habrá otra? E2: Yo creo que sí, pero… no sé.	El estudiante no logra ver ningún tipo de relación entre la cantidad de vagones y la cantidad de paradas, esto implica que solo evidencia la relación de Recurrencia.
¿Cómo le explicarías a un amigo el proceso para calcular el número de vagones del tren para cualquier número de paradas?	E2: Esa sí me quedó mal, porque yo estaba pensando que en cada parada aumentaba 4 vagones. Pero por eso le expliqué en el anterior que se aumentaba era el doble, pero lo que escribí era que aumentaba el 4. Inv: ¿Cómo podrías explicar lo que sucede? E2: Me di cuenta que aumentaba el doble de la parada anterior. Inv: Y si quieres saber en una parada más grande, por ejemplo en la 100. ¿Cómo lo harías? Si no sabes el de el 99. E2: No sé... [Risas]. 	El estudiante manifiesta que tendría que hacer paso a paso todas las paradas, para saber la cantidad de vagones. Puede identificar de forma clara la manera en que aumentan los vagones de parada en parada, pero no le es posible hallar una expresión que le permita saber la cantidad de vagones en cualquier parada.
Entrevista 4		
Video 004 ¿Cuántos vagones tiene el tren	Inv.: ¿Qué fue lo primero que observaron antes de iniciar la solución? E3: Que en cada parada aumenta el doble. Inv.: ¿Cómo así?	Los estudiantes evidencian en su trabajo la relación de Recurrencia, al identificar la variación de los vagones y cómo

después de la parada 10?	E4: Que tenemos un número de vagones y a la siguiente parada tenemos el doble de vagones. Inv.: Ok. Entonces eso me es útil para cuando tengo el número anterior. Pero si me preguntan por un número grande. ¿También funciona? E4: No exactamente. Inv.: Qué respondieron a la cantidad de vagones en la parada número 10. E4: Como lo dijimos antes, lo hicimos multiplicando por dos hasta llegar al 10.	se van obteniendo a partir de la cantidad existente en la parada inmediatamente anterior.
¿Cuántos vagones tiene el tren después de la parada 100?	E4: Como tenemos el de la parada 10, como 10 por 10 es 100 entonces supusimos entre ambos que el número de la parada 100 sería el número de la parada 10 por 10. Inv.: ¿Y cómo saben que eso funciona? Revisen en la tabla casos cercanos. ¿Creen que haya otra forma de hacerlo? E4: A mí se me vino a la cabeza esta forma pero no fui capaz de terminarla. Mire por ejemplo, el dos se multiplica por sí mismo que sería 4, entonces 8 por 8 da 64 y … [se queda pensando]. No, con eso no consigo nada… Inv.: Vamos a revisar las preguntas para tratar de aclarar las cosas.	En este momento se evidencia un error común en la mayoría de los participantes, al pensar que se obtiene la misma cantidad de vagones al multiplicar 10 por la cantidad de vagones que hay en la parada 10, que los que habrá para la parada 100. Esto lo piensan debido a que 10 por 10 es 100.
¿Cuántos vagones recoge en cada parada?	E3: Cada vagón es la cantidad que había en la parada anterior por dos, o sea aumenta el doble.	Se evidencia con la respuesta que el estudiante tiene clara la manera en que aumentan los vagones parada tras parada, pero no logra establecer relaciones entre las variables.
	E4: Tomamos el número de vagones de la parada anterior y lo multiplicamos por dos. Inv.: Pero se pregunta es por la relación entre el número de paradas y el número de vagones. Y ustedes están haciéndolo solamente entre vagones.	

¿Puedes encontrar una relación entre el número de paradas que hace el tren y el número total de vagones?	E3: En cada parada aumenta el doble de vagones de la parada anterior. Inv.: Revisen qué otra relación pueden encontrar. E4: Mire, [expresa emoción y asombro por creer haber encontrado una nueva relación.] en la parada 1 hay 4, la deferencia entre 1 y 4 es 3. En la parada 2 hay 8 y la diferencia entre 2 y 8 son 6, que sería 3 por 2. En la 3 hay 16, la deferencia entre 16 y 3, sería 13… Entonces no.[hace un gesto de decepción al no haber conseguido nada]   E3: Otra cosa que podemos ver es que el número que hay en el número de vagones es múltiplo de 2. Inv.: Cómo podrías explicar que el 4 es múltiplo de 2. E3: Si multiplicamos 2 por 2 es 4. Inv.: ¿Y ahora el 8? [Señalando el número de vagones en la segunda parada]. E3: Es múltiplo de 2 porque 2 por 4 da 8.	Inicialmente el estudiante sólo evidencia la relación de Recurrencia, pues su análisis está centrado sólo en la cantidad de vagones. Tras muchas preguntas por parte de la investigadora, el estudiante logra evidenciar la relación de Correspondencia entre la cantidad de vagones y la cantidad de paradas. Dado que comprende que el número de vagones corresponde a potencias de 2. Después logra identificar la manera en que se ubica el exponente.

	Inv.: Pero como 4 es 2 por 2, entonces al 8 lo podemos ver como… ¿Cuántas veces el 2? E3: Tres. E4: Profe, es que eso lo podemos ver como potencias de 2. Inv.: ¿Y cómo podrías relacionar eso con el número de paradas? E4: Sería el número de paradas más 1, sería el exponente. Inv.: ¿Cómo así? E4: O sea que en la parada 100 sería igual a 2 a la 101. Inv.: ¿Seguro? E4: Si porque la parada 3 es 16, y 16 es igual a 2 a la 4. Inv.: En ese orden de ideas, si fuera en la parada 1000… ¿cómo quedaría? E4: Entonces habría 2 elevado a la mil uno.	