

GENERACIÓN DE SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A FLUIDOS
ROTANTES EN GRAVEDAD DE EINSTEIN MEDIANTE EL “FORMALISMO” DE
NEWMAN-JANIS

NICOLÁS HERNÁNDEZ BELTRÁN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2022

GENERACIÓN DE SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A FLUIDOS
ROTANTES EN GRAVEDAD DE EINSTEIN MEDIANTE EL “FORMALISMO” DE
NEWMAN-JANIS

NICOLÁS HERNÁNDEZ BELTRÁN

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
FÍSICO

DIRECTOR

ANTONIO CALIXTO GUTIÉRREZ PIÑEREZ
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2022

*Dedicado a mi madre,
el aleph de mi vida*

A manera de gratitud

Nadie es una isla, completo en sí mismo; cada hombre es un pedazo del continente, una parte de la tierra; si el mar se lleva una porción de tierra, toda Europa queda disminuida, como si fuera un promontorio, o la casa de uno de tus amigos, o la tuya propia; la muerte de cualquier hombre me disminuye, porque estoy ligado a la humanidad; y por consiguiente, nunca hagas preguntar por quién doblan las campanas; doblan por ti.

—John Donne, *Devotions upon Emergent Occasions* (1624).

Rodeado de todos sus amigos y en medio de una gran congoja ante la inminente muerte, las últimas palabras del poeta François Rabelais fueron: «Voy en busca de un gran Quizá». Con estas palabras en mente ingresé a Física, en busca de mi gran Quizá. En el principio me encontré con un terreno árido y desalentador, donde el cosmos dibujado de antaño en mis interminables soliloquios por los libros de Sagan y Hawking, se redujo a un conjunto de fútiles fórmulas y vanas recetas donde la memoria pasaba de ser un don, a una necesidad; de manera que un sentimiento de lasitud fue creciendo paulatinamente. Es aquí donde agradezco inmensamente al profesor Yeinzon Rodriguez, quien fue la primera persona que me enseñó a pensar con clarividencia y me mostró la física de una forma fértil y apasionante.

Bajo este mismo sentimiento quiero expresar mi enorme gratitud y gran cariño al

profesor de la Universitat Autònoma de Barcelona, Javier García. Gracias a sus espléndidas clases en Youtube yo conocí de la mejor forma posible el mundo de la Relatividad General. Así, Javier y Yeinzon sembraron en mi las primeras semillas que en un futuro germinaron en un gran amor y fascinación por la física teórica, por lo cual les estaré eternamente agradecido.

Mientras escribo estas líneas el conticinio de la noche me hace pensar en la cercanía con la presencia humana, que nos sacude, nos alienta en los momentos cuando nuestros poros no están impregnados del ineludible afán intrínseco del diario vivir. Comprendo que el otro es quien nos auxilia incesantemente, tendiendo temblorosos y transitorios puentes para salvarnos del abismos que siempre se abre entre uno y el universo, materializado en el brillo de unos amorosos ojos, una sincera sonrisa, un caluroso abrazo o en un café que nos une en un día cualquiera. La palabras son inútiles ante la ardua tarea de expresar el inefable sentimiento de agradecimiento hacia las personas que siempre han estado para mi en todo este trayecto: Fercho, el ángel oculto entre una tierna sonrisa; Laura, la del noble corazón; Emmanuel, el adulto con alma de niño; Luisk, el del aura erudita; Kima, el sinónimo de dulzura; Araque, mi eterno amigo; Lorena, la incondicional; Yisus, el humilde; Julián, el niño prodigio; Stephany, la de la contagiosa sonrisa; Wilson, mi abre tensores favorito; Teffa, la viva personificación de la fraternidad; Romario, el amable; Kevin, el del rostro risueño; Jorge, el curioso; John, mi hermano, el amoroso Lobo Estepario; Esteban, el bondadoso Perry; Angie, mi más grande amor de ojos bondadosos, donde desemboca el eterno fluir del agua de nuestras vidas fundidas en un mismo Heráclito. Asimismo expreso mi enorme amor y gratitud a mi madre, la más clara prueba de todo lo que está bien hecho y a quien le debo todo lo que soy, porque te veo en todas mis acciones, porque soy una viva extensión de ti.

Principalmente quiero agradecer al profesor Antonio por extenderme su afectuosa mano y acogirme como uno de sus estudiantes; por mostrarme el hermoso camino de la literatura; por enseñarme a desear y sacarme de mi país de Cucaña; por

acercarme a Ítaca y hacer mucho más amena mi búsqueda del gran Quizá. Más que mi director de trabajo de grado, colega o amigo, con sus enseñanzas e interminables cafés ha sido para mi casi tan cercano como un padre, por lo cual estoy inmensamente agradecido con el azar y con él por ofrecerme su valiosa amistad y apoyo incondicional desde que nos conocimos. Puedo asegurar que sus esfuerzos, su trabajo y el corazón generoso que usted puso continuarán siempre vivos en uno de sus pequeños discípulos, que, a pesar de los años, no dejará de ser su alumno agradecido.

En palabras de Hölderlin

*El hermoso consuelo de encontrar
el mundo en un alma, de abrazar a
mi especie en una criatura amiga.*

Yo tuve la gran fortuna de hallar a lo largo de este trayecto varias manos amigas, sin su ayuda nada de esto hubiese sido posible. Infinitas gracias les doy por ello.

CONTENIDO

	pág.
Prolegómenos	15
1. Breve Historia del “Formalismo”	41
1.1. Método de Newman-Janis	42
1.2. Método de Giampieri	48
1.3. Método de Matt Visser y Del Rajan	52
1.4. Posibles explicaciones al “formalismo”	56
2. Perspectiva Geométrica	66
2.1. Ansatz de Newman-Janis	66
2.2. Caracterización Física de las Soluciones Obtenidas	76
3. Soluciones Particulares	82
3.1. Solución Clase I	84
3.1.1. <i>Caso particular de la solución Clase I</i>	86
3.2. Solución Clase II	89
3.2.1. <i>Caso particular de la solución Clase II</i>	91
3.3. Solución Clase III	94
3.3.1. <i>Caso particular de la solución III</i>	95
3.4. Solución tipo Clase IV	98
3.4.1. <i>Caso particular de la solución IV</i>	100
4. Conclusiones: Parte I	104

5. Fluido Anisótropo con Flujo de Calor	107
5.1. Observador de Bardeen en NJA	108
5.2. Flujos termodinámicos, variables cinemáticas y condiciones de energía	115
5.3. Caso particular: Kerr-Newman	121
5.3.1. Flujos termodinámicos	124
5.3.2. Variables cinemáticas	131
5.3.3. ¿Carga... sin carga?	137
6. Generación de Agujeros de Gusano a través de NJA	143
6.1. Preliminares	146
6.1.1. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico con horizonte de eventos	147
6.1.2. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico sin horizonte de eventos	148
6.1.3. Espaciotiempo estacionario y axisimétrico sin factor de deformación	149
6.1.4. Espaciotiempo estacionario y axisimétrico con factor de deformación	152
6.2. Soluciones de agujeros de gusano estáticos	154
6.3. Generación de agujeros de gusano rotantes	161
6.4. Casos particulares: Reissner-Nordström y Kerr-Newman	165
7. Sombras de Agujeros Negros Mediante el Método de Hamilton-Jacobi	169
7.1. Separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi en NJA	173
7.2. Órbitas esféricas: movimiento radial	181
7.3. Sombras de agujeros negros rotantes	184
7.3.1. Parámetros de impacto	187
7.4. Caso particular: Kerr-Newman	191
8. Conclusiones: Parte II	194

9. Comentarios Generales	197
BIBLIOGRAFÍA	201
ANEXOS	220

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1.	Esquema del pullback $\mathcal{J}^* : T_{\mathcal{J}(p)}^*(\mathcal{M}') \mapsto T_p^*(\mathcal{M})$.	70
Figura 2.	Esquema del pushforward $(\mathcal{J}_R)_* : T_{p'}(\mathcal{M}') \mapsto T_{\mathcal{J}_R(p')}(\mathcal{M}'')$.	73
Figura 3.	Esquema del pullback $(\mathcal{J}_{BL})^* : T_{p''}^*(\mathcal{M}'') \mapsto T_{\mathcal{J}_{BL}(p'')}^*(\mathcal{M})$.	75
Figura 4.	Densidad de energía para la solución de Kerr-Newman.	124
Figura 5.	Flujo de calor para la solución de Kerr-Newman.	125
Figura 6.	Presión isotrópica para la solución de Kerr-Newman.	126
Figura 7.	Tensión $\Pi^{T\Phi}$ para la solución de Kerr-Newman.	127
Figura 8.	Tensión en la dirección radial para la solución de Kerr-Newman.	128
Figura 9.	Tensión en la dirección colatitudinal para la solución de Kerr-Newman.	129
Figura 10.	Tensión en la dirección azimutal para la solución de Kerr-Newman.	130
Figura 11.	Componente σ_{TR} de cizalladura para la solución de Kerr-Newman.	131
Figura 12.	Componente $\sigma_{T\Theta}$ de cizalladura para la solución de Kerr-Newman.	132
Figura 13.	Componente $\sigma_{R\Phi}$ de cizalladura para la solución de Kerr-Newman.	133
Figura 14.	Componente $\sigma_{\Theta\Phi}$ de cizalladura para la solución de Kerr-Newman.	134
Figura 15.	Componente ω_{TR} de vorticidad para la solución de Kerr-Newman.	135
Figura 16.	Componente $\omega_{T\Theta}$ de vorticidad para la solución de Kerr-Newman.	136
Figura 17.	Agujero de gusano.	140
Figura 18.	Representación de la homotopía existente entre una carga topológica y eléctrica.	142
Figura 19.	Lente gravitacional de la galaxia Gargantua de la película <i>Interstellar</i> .	172
Figura 20.	Parámetros de impacto para la sombra generada por un agujero negro.	189
Figura 21.	Carta coordenada de Eddington-Filkenstein.	223

- Figura 22. Tétrada como una congruencia de líneas de mundo confinadas a un espacio infinitesimal y en un intervalo de tiempo corto. 225
- Figura 23. Interpretación física de las componentes del tensor energía-momentum.236
- Figura 24. Esquema de la interpretación física de las variables cinemáticas en un fluido relativista 246

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. Comportamiento de las condiciones de energía aplicadas a las soluciones “interiores” de Kerr-Newman ($[Q \neq 0, a \neq 0]$), Kerr ($[Q = 0; a \neq 0]$), Reissner-Nordström ($[Q \neq 0, a = 0]$) y Shcwarzschild ($[Q = 0, a = 0]$) para diferentes valores de carga y rotación bajo un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor, visto por ZAMO. El símbolo en azul ✓ certifica el cumplimiento de una condición de energía en un rango particular de carga y rotación; por el contrario, el símbolo en rojo ✗ lo niega.

123

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Carta coordenada de Eddington-Filkenstein	220
Anexo B. Formalismo de las tétradas	224
Anexo C. Carta coordenada de Boyern-Lindsquit	229
Anexo D. Sobre los Fluidos Disipativos en Relatividad General	231
Anexo E. Método de Hamilton-Jacobi en la Teoría General de Relatividad	250

RESUMEN

TÍTULO: GENERACIÓN DE SOLUCIONES CORRESPONDIENTES A FLUIDOS ROTANTES EN GRAVEDAD DE EINSTEIN MEDIANTE EL “FORMALISMO” DE NEWMAN-JANIS¹

AUTOR: NICOLÁS HERNÁNDEZ BELTRÁN ².

PALABRAS CLAVE: ECUACIONES DE EINSTEIN, GRAVEDAD DE EINSTEIN, ANSATZ DE NEWMAN-JANIS, AGUJEROS DE GUSANO, SOMBRAS GENERADAS POR AGUJEROS NEGROS.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se abordó el problema de hallar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein que describan el campo gravitacional generado por un cuerpo aislado, con el objetivo de proponer modelos teóricos que describan objetos astrofísicos. Para tal fin se empleó el ansatz formulado por Newman y Janis en la generación de soluciones exactas, tal que se obtuvo una colección de clases independientes de soluciones interiores interpretadas como fluidos rotantes con presiones anisótropas y flujo de calor. Asimismo, se presentó una descripción con varios aspectos matemáticos respecto a las restricciones físicas y geométricas que este impone de forma natural sobre las soluciones generadas, del tal suerte que sean aptas para interpretar como agujeros de gusano; posteriormente, se presentaron algunos ejemplos para ilustrar los resultados obtenidos. Adicionalmente, mediante el método de Hamilton-Jacobi se determinó la forma analítica de los parámetros de impacto que describen la sombra generada por todas las soluciones halladas. Finalmente, se estudia la sombra generada por un agujero negro de Kerr-Newman como caso particular.

¹ Trabajo de Grado

² Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director).

ABSTRACT

TITLE: GENERATION OF SOLUTIONS CORRESPONDING TO ROTATING FLUIDS IN EINSTEIN'S GRAVITY USING THE NEWMAN-JANIS "FORMALISM"³.

AUTHOR: NICOLÁS HERNÁNDEZ BELTRÁN ⁴.

KEYWORDS: EINSTEIN EQUATIONS, EINSTEIN GRAVITY, NEWMAN-JANIS ANSATZ, WORMHOLES, BLACK HOLE SHADOWS.

DESCRIPTION: The aim of this work lays on finding exact solutions to Einstein's equations which describe the gravitational field generated by an isolated body, with the aim of proposing theoretical models that describe astrophysical objects. For this purpose, the ansatz formulated by Newman and Janis was used to generate exact solutions, such that a collection of independent classes of interior solutions was obtained, interpreted as rotating fluids with anisotropic pressures and heat flux. Likewise, a description is presented with various mathematical aspects regarding the physical and geometric restrictions that this naturally imposes on the generated solutions, such that they are suitable to be interpreted as wormholes; later, some examples are presented to illustrate the results obtained. Additionally, the Hamilton-Jacobi method determines the analytical form of the impact parameters that describe the shadow generated by all the solutions found. Finally, the shadow generated by a Kerr-Newman black hole is studied as a particular case.

³ Bachelor Thesis.

⁴ Faculty of sciences, School of Physics, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director).

Prolegómenos

Paradoxically, physicist claim that the gravity is the weakest of the fundamental forces.

—Prof. Hallstein Høggåsen -after having fallen from a ladder and breaking both arms.

Naturaleza e Importancia del Problema

Las teorías formuladas en física involucran un conjunto de ecuaciones diferenciales (ED), las cuales describen objetos que yacen en el mundo platónico de las formas matemáticas; luego, a través de un conjunto de reglas impuestas por la naturaleza, estas nos permiten describir fenómenos físicos que conectan resultados matemáticos que provienen de este mundo platónico con nuestra noción de realidad en el mundo físico. Para el caso de teorías clásicas gravitacionales, es comúnmente aceptado que la teoría más exitosa por su contundencia en verificaciones observacionales hasta el día de hoy sea la teoría General de Relatividad ⁵. Aquí, las ED nacen a través de requerimientos puramente geométricos impuestos por la idea de que el espaciotiempo se puede modelar como una variedad diferenciable y Lorentziana, el principio de equivalencia y junto con la igualdad entre materia y geometría mediante las ecuaciones de campo de Einstein. Debido a que la gravedad es el más universal de los campos, uno tiene una clase adicional de problemas concernientes a la influencia de este con otros campos y materia, los cuales deben reflejarse en la solución obtenida. Para lograrlo, podríamos, por ejemplo, imponer condiciones de

⁵ Clifford M Will: *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge university press, 2018.

simetría sobre la métrica, añadir ecuaciones de campo para las variables materiales o imponer ciertas condiciones iniciales y de frontera sobre las ecuaciones diferenciales, sólo así obtendremos una *solución exacta*. En otras palabras, una métrica en donde sus componentes estén escritas en unas coordenadas cómodas y en términos de funciones analíticas bien conocidas (polinomios, funciones trigonométricas, entre otras).

Ahora bien, al ser la simetría axial y la rotación sobre un eje determinado dos de las características fundamentales en un sistema aislado en el universo, la abundancia de objetos rotantes en el cosmos -desde fuentes extendidas autogravitantes hasta objetos compactos- exige la generación de soluciones exactas que describan este tipo de cuerpos. Infortunadamente, debido a la no linealidad intrínseca en las ecuaciones de campo, nos encontramos con una gran limitación matemática en la búsqueda de estas soluciones. Muchas *técnicas de generación de soluciones* se han formulado hasta la fecha, las cuales han pretendido en obtener una solución nueva, de tal suerte que generalice a una ya conocida, dando como resultado la obtención de un gran número de soluciones exactas conocidas ⁶. Así pues, la obtención e interpretación de soluciones a las ecuaciones de Einstein resulta ser una tarea ardua y bastante interesante. Sin embargo, resulta verosímil afirmar que, a pesar del gran número de soluciones disponibles actualmente, la mayor parte de ellas constituyen un conjunto de trofeos de colección que posan aún en el mundo platónico, debido a que resultan complicadas de interpretar y más aún considerar como soluciones que describan una realidad física, por lo menos como la conocemos hasta el momento. No obstante, pese a lo desalentador que suena el panorama, el gran interés en estudiar las distintas formas de obtener soluciones exactas radica en el entendimiento de la estructura matemática detrás de las teorías físicas candidatas a describir nuestro universo que se puede llegar a adquirir mediante su estudio.

⁶ Hans Stephani y col.: *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009.

Por otro lado, la obtención de soluciones a las ecuaciones de Einstein también se puede llevar a cabo numérica o perturbativamente. Sin embargo, a pesar del avance en el campo de la relatividad numérica y gracias a que los computadores pueden manipular un número significativo de asignaciones genéricas, aún así las soluciones de esta naturaleza resultan difíciles de clasificar e interpretar. Por su parte, la solución exacta representa una situación ideal en la naturaleza, la cual es asequible mediante simplificaciones sustanciales en la situación a estudiar. Así, la importancia física y matemática en describir cuerpos astrofísicos rotantes subyace en pensar que a través de la solución exacta particular podría, en principio, estimularnos a pensar en situaciones más generales al problema actual en estudio y, a su vez, permitirnos discernir entre una característica anómala que surge de la matemática misma o una singularidad física que pueda presentarse. Adicionalmente, nos permite estudiar la estabilidad intrínseca de la solución, de manera que resulta de gran importancia en la adquisición de un mayor entendimiento tanto de la estructura fundamental del problema, como también la teoría bajo la cual queremos describirlos. Asimismo, a la hora de formular algún tipo de conjetura presente en la teoría, la solución exacta posee la facultad de ayudarnos de forma más certera en vislumbrar la validez o eventual modificación de la conjetura. O incluso, en algunos casos, las soluciones particulares a ella pueden actuar como estados asintóticos ocultos en una clase de modelos mucho más generales, que al final resultan ser muy valiosos a la hora de desentrañar las implicaciones de la conjetura misma. Por tanto, todas estas cuestiones discutidas hasta el momento nos permiten evidenciar la importancia que para el desarrollo de la teoría en sí y las propiedades de los distintos sistemas astrofísicos representa, la obtención e interpretación de las soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, bajo el modelo de la teoría General de Relatividad.

Por su parte, quizás la solución exacta más famosa y estudiada hasta la fecha, que

describa un cuerpo rotante, es la descubierta por R.P. Kerr en 1963 ⁷, considerada por muchos como la que mejor describe la geometría exterior de este tipo de objetos; sin embargo, tomó más de cuarenta años después de la publicación de la gravedad de Einstein para ser descubierta, debido al alto grado de complejidad y extensión matemática en su derivación ⁸. Un año después a la publicación de las ideas de Kerr, Newman y Janis desarrollaron cierto ansatz (NJA, como se conoce hoy día) el cual conduce a una “derivación” más simple de la solución de Kerr a partir de una transformación compleja de coordenadas que actúa sobre la métrica de Schwarzschild; producto de ello, aparece un parámetro asociado a la rotación de la fuente gravitacional, surgiendo así la solución de Kerr ⁹.

En un trabajo posterior, Newman aplicó NJA sobre la solución de Reissner-Nordström, obteniendo así una solución exacta que describe un cuerpo rotante con una carga electromagnética asociada, conocida ampliamente en la literatura como la solución de Kerr-Newman ¹⁰. Pese al gran éxito y uso de NJA desde su publicación en la generación de soluciones exactas, este no puede considerarse como un formalismo o un método de generación de soluciones, dado que en su procedimiento persisten, hasta la fecha, muchas ambigüedades sin resolver ¹¹. El ejemplo más claro radica en la complexificación totalmente arbitraria en la coordenada radial o la imposición de un cambio de signo en algunas tétradas ortonormales. Esto explica las comillas

⁷ Roy P Kerr: *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. En: *Physical review letters* 11.5 (1963), pág. 237.

⁸ David L Wiltshire, Matt Visser y Susan M Scott: *The Kerr Spacetime*. En: *The Kerr Spacetime* (2009.)

⁹ Ezra T Newman y Al Janis: *Note on the Kerr spinning-particle metric*. En: *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), págs. 915-917.

¹⁰ Ezra T Newman y col.: *Metric of a rotating, charged mass*. En: *Journal of mathematical physics* 6.6 (1965), págs. 918-919.

¹¹ SP Drake y Peter Szekeres: *Uniqueness of the Newman–Janis algorithm in generating the Kerr–Newman metric*. En: *General relativity and Gravitation* 32.3 (2000), págs. 445-457.

empleadas en el título de este trabajo¹². Adicionalmente, existen fuertes indicios que señalan a este *ansatz* como un procedimiento que depende fuertemente de la carta coordenada empleada¹³. Por tanto, para alcanzar el estatus de formalismo o técnica de generación de soluciones exactas, este debe poder ser descrito como un mecanismo de bases matemáticas sólida que nos permitan desentrañar y entender sus más profundos secretos con respecto a su inesperada eficacia en la generación de soluciones estacionarias.

A pesar de todo ello, NJA ha sido empleado ampliamente por la comunidad científica para atacar distintos problemas en la astrofísica actual. Quizás uno de los menos nombrados sea la generación de soluciones interpretadas como agujeros de gusano¹⁴. Estos exóticos objetos predichos por la relatividad general han permeado profundamente la cultura popular, despertando la imaginación tanto de escritores, cineastas y científicos, comenzando por el propio Einstein con su famoso puente de Einstein-Rosen¹⁵; luego, con la gran novela de ciencia ficción *Contacto* escrita por Carl Sagan¹⁶ y, más recientemente, la reconocida película *Interestellar* dirigida por Christopher Nolan de la mano con Kip Thorne¹⁷, entre otros muchos ejemplos.

Quizás el aspecto más llamativo de los agujeros de gusano sea la posibilidad de

¹² En lo que resta omitiremos las comillas en el uso de esta palabra al referirnos a NJA.

¹³ Antonio C Gutiérrez-Piñeres y Hernando Quevedo: *Newman–Janis Ansatz in conformastatic spacetimes*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.11 (2016), pág. 146

¹⁴ Mustapha Azreg-Ainou: *From static to rotating to conformal static solutions: rotating imperfect fluid wormholes with (out) electric or magnetic field*. En: *The European Physical Journal C* 74.5 (2014), págs. 1-11; Mustapha Azreg-Ainou: *Wormhole solutions sourced by fluids, II: three-fluid two-charged sources*. En: *The European Physical Journal C* 76.1 (2016), págs. 1-15

¹⁵ Albert Einstein y Nathan Rosen: *The particle problem in the general theory of relativity*. En: *Physical Review* 48.1 (1935), pág. 73

¹⁶ Carl Sagan: *Contacto*. Nova, 2018

¹⁷ Kip Thorne: *The science of Interstellar*. WW Norton & Company, 2014

en un futuro poder realizar viajes interestelares a través de ellos: imaginar intrépidos aventureros sumergiéndose a través de estos extravagantes objetos y emerger al otro lado en algún lugar distante del universo -o incluso en otro universo-. Sin embargo, para ello debemos preguntarnos si las leyes de la física permiten a una civilización avanzada construir y mantener agujeros de gusano aptos para estos viajes, tal que este se entiende como una región compacta del espaciotiempo con una frontera topológicamente simple, pero con un interior topológicamente no trivial ¹⁸. Así pues, la física -en específico la Relatividad General- nos dice que, para ser transitables, ellos no deberán contener horizonte de eventos y violarán ciertas condiciones de energía, exigiendo que la densidad de materia de la cual están hechos debe ser negativa, justificando que comúnmente se califiquen a estos objetos de “exóticos” ¹⁹. De manera que la existencia de ellos de momento sigue siendo un tópico altamente especulativo. Adicionalmente, en la actualidad no existe una posibilidad experimental que permita verificar o no la existencia de los agujeros de gusano en el universo, dejándolos, por ahora, en el mundo platónico de las formas matemáticas.

Sin embargo, se podría justificar ingenuamente su estudio argumentando que su existencia hace que el universo sea más interesante ²⁰. Sujetos a esta audaz afirmación se podría investigar fructíferamente lo que los límites y las restricciones respecto a la existencia y el comportamiento de tales agujeros de gusano podría ser deducible desde la teoría de Einstein; por tanto, resulta necesario hallar soluciones exactas a las ecuaciones de campo que nos permitan describir o investigar la naturaleza de estos objetos exóticos predichos por la teoría. Es aquí donde podría cobrar relevancia el *ansatz* de Newman-Janis como una forma de generar soluciones que

¹⁸ Matt Visser: *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking*. 1995

¹⁹ Michael S Morris y Kip S Thorne: *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. En: *American Journal of Physics* 56.5 (1988), págs. 395-412

²⁰ Visser 1995

describan la geometría de un agujero de gusano rotante que sea transitable, partiendo de una semilla ya conocida, verbigracia ²¹.

Por otro lado, en vista del premio Nobel del año 2020, otro de los usos más importantes que se le está atribuyendo actualmente a NJA es la generación de soluciones para posteriormente estudiar las sombras generadas por los objetos compactos que modelan. Esto es posible gracias a que el campo gravitacional en la vecindad de un agujero negro es tan descomunal que los rayos de luz quedan atrapados, formando órbitas circulares o anillos lumínicos bastante inestables alrededor de su horizonte de eventos (lente gravitacional fuerte) ²². Una pequeña perturbación sobre estos fotones puede producir una absorción hacia el agujero negro o, por el contrario, salir expulsados. Tales órbitas son altamente relacionadas con la sombra proyectada por estos objetos ²³. Mientras que la intensidad sobre una imagen de esta sombra depende del mecanismo de emisión de estos fotones, el contorno de ella es determinado por el espaciotiempo mismo, dado que corresponde a la forma aparente de estas órbitas inestables vistas por un observador lejano. Con base en lo anterior, se ve que las imágenes de una lente gravitacional fuerte y sus sombras ofrecen una valiosa oportunidad no sólo para detectar la naturaleza de estos objetos compactos, sino también para testear si el campo gravitacional en su vecindad corresponde o no con la geometría de Schwarzschild, Kerr o algún tipo de generalización de estas.

Estudiar la sombra de un agujero negro arbitrario, así como el flujo de una geodésica nula en general, es considerablemente más fácil mediante la implementación de la ecuación de Hamilton-Jacobi, lo cual conduce a la separación de la ecuación

²¹ Morris y Thorne 1988

²² Pedro VP Cunha y Carlos AR Herdeiro: *Stationary black holes and light rings*. En: *Physical Review Letters* 124.18 (2020), pág. 181101; Valerio Bozza: *Gravitational lensing in the strong field limit*. En: *Physical Review D* 66.10 (2002), pág. 103001

²³ Pedro VP Cunha y Carlos AR Herdeiro: *Shadows and strong gravitational lensing: a brief review*. En: *General Relativity and Gravitation* 50.4 (2018), págs. 1-27

de las geodésicas nulas en dos ecuaciones diferenciales para dos cantidades conservadas en la solución: la energía y el momento angular ²⁴. En el caso de Kerr, la separabilidad de Hamilton-Jacobi es una propiedad bastante importante, enunciada por Carter en 1968 ²⁵. Esto puede generalizar y demostrar que las geodésicas lumínicas de un espaciotiempo generado a través de NJA *siempre* admiten esta separabilidad ²⁶. Otro requerimiento adicional es que la métrica obtenida debe ser expresada en la forma de Boyern-Lindquist ²⁷, de tal suerte que sea un sistema Liouville integrable. Sólo así podremos obtener de forma analítica los parámetros de impacto que modelan el contorno de los objetos compactos, para de esta manera estudiar las características que proporcionan y, adicionalmente, qué nos dicen con respecto a la geometría intrínseca en estos.

En resumen, es importante señalar que NJA, a pesar de no ser reconocido aún como un auténtico método de generación de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, es actualmente muy estudiado y empleado por la comunidad científica para atacar diversos temas que aún siguen abiertos en la gravedad de Einstein, siendo el propio ansatz uno de los principales problemas sin respuesta hasta nuestros días ²⁸.

²⁴ Rajibul Shaikh: *Black hole shadow in a general rotating spacetime obtained through Newman-Janis algorithm*. En: *Physical Review D* 100.2 (2019), pág. 024028

²⁵ Brandon Carter: *Global structure of the Kerr family of gravitational fields*. En: *Physical Review* 174.5 (1968), pág. 1559

²⁶ Haroldo CD Lima Junior y col.: *Spinning black holes with a separable Hamilton–Jacobi equation from a modified Newman–Janis algorithm*. En: *The European Physical Journal C* 80.11 (2020), págs. 1-12

²⁷ Shaikh 2019

²⁸ Philip Beltracchi y Paolo Gondolo: *Physical interpretation of Newman-Janis rotating systems. I. A unique family of Kerr-Schild systems*. En: *Phys. Rev. D* 104 (12 2021), pág. 124066. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.124066; Philip Beltracchi y Paolo Gondolo: *Physical interpretation of Newman-Janis rotating systems. II. General systems*. En: *Phys. Rev. D* 104 (12 2021), pág. 124067. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.124067

Estado General del Tema

Recordemos que NJA presenta varios problemas porque a.) este procedimiento no es un método universal de generación de soluciones estacionarias de vacío a partir de una solución estática de vacío, y b.) presenta una serie de arbitrariedades en la escogencia del tipo de complexificación empleado sobre las coordenadas en la solución semilla original. Quizás la primera persona que intentó explicar todas estas ambigüedades subyacentes en NJA fue C.J. Talbot, quien argumenta que este puede interpretarse como un caso particular de una transformación compleja más general entre subclases de métricas escritas en la forma de Kerr-Schild ²⁹, y así poder explicarlo como una parte de estas transformaciones, de tal suerte que estén regidas por las ecuaciones de Einstein ³⁰; sin embargo, producto a su forma totalmente arbitraria a la hora de realizar algunas transformaciones complejas, este procedimiento no llegó al estatus de una explicación satisfactoria para NJA. Adicionalmente, al involucrar mapeos no-holomórficos en su razonamiento, nos imposibilita el emplear las herramientas proporcionadas por la geometría diferencial en variedades complejas para intentar remediar estos inconvenientes.

Cuatro años después, Newman al ver el gran éxito de su *ansatz*, proporcionó otra explicación parcial desde la perspectiva de un espaciotiempo minkowskiano complejo ³¹; no obstante, su explicación padece de las mismas ambigüedades contenidas en las ideas de Talbot, como veremos en la sección 1.4. Por otro lado, E.J. Flaherty generaliza las ideas de Talbot, y argumenta que NJA puede ser formulado de una forma mucho más elegante utilizando las propiedades de una variedad tetradimen-

²⁹ Roy P Kerr: *Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics*. En: *arXiv preprint arXiv:0706.1109* (2007)

³⁰ CJ Talbot: *Newman-Penrose approach to twisting degenerate metrics*. En: *Communications in Mathematical Physics* 13.1 (1969), págs. 45-61

³¹ ET Newman: *Complex coordinate transformations and the Schwarzschild-Kerr metrics*. En: *Journal of Mathematical Physics* 14.6 (1973), págs. 774-776

sional compleja con estructura Hermitiana y así poder explicar su funcionamiento con base en estas herramientas ³²; sin embargo, su talón de Aquiles subyace, de nuevo, en la no explicación a la forma arbitraria en cómo complexifica algunas coordenadas a través de mapeos no-holomórficos, poniendo en duda su procedimiento y presunto éxito en la explicación a este ansatz.

En el año 2000 Drake y Szekeres, por medio de una generalización a las ideas de Newman y Janis, proporcionan una explicación parcial -aunque no del todo contundente- a estas ideas, argumentando que esta complexificación no es del todo arbitraria; sin embargo, se podría tomar de otras formas y aún así llegar a los resultados deseados; de manera que ellos proporcionan una explicación incompleta, dado que aún no se entiende la naturaleza de varias arbitrariedades implícitas en él, como veremos más detalladamente en la sección 1.4. Así pues, vemos que NJA goza del don de la efectividad, más no la facultad de la claridad.

Teniendo en cuenta todos estos inconvenientes en la búsqueda de una explicación contundente, algunos investigadores han optado por encontrar versiones alternativas a NJA. De manera que veintisiete años después de su versión original, el investigador italiano Giacomo Giampieri desarrolló un nuevo ansatz para derivar la solución de Kerr tomando como semilla a Schwarzschild, de tal suerte que él evita la introducción de tétradas nulas y ataca el problema directamente sobre el tensor métrico; no obstante, tiene la necesidad de postular una transformación *ad hoc* y, a su vez, introducir una dimensión extra en su razonamiento ³³. Infortunadamente, esta versión alternativa fue prácticamente ignorada por la comunidad científica. Quizás la única persona que posó su atención sobre él fue Harold Erbin, proponiendo una

³² Edward J Flaherty: *Hermitian and Kählerian geometry in relativity*. En: (1976)

³³ Giacomo Giampieri: *Introducing angular momentum into a black hole using complex variables*. En: *Gravity Research Foundation* (1990)

simplificación y generalización a estas ideas en 2015 ³⁴, para posteriormente aventurarse en extrapolarlas sobre variedades de dimensión mayor ³⁵. Adicionalmente, en este mismo año Matt Visser y Del Rajan demuestran la íntima relación existente entre NJA y el método de Giampieri ³⁶. Asimismo, desarrollan un atajo para NJA reduciéndolo a un procedimiento de sólo dos pasos haciendo uso de las coordenadas oblatas esferoidales ³⁷, como veremos en el siguiente capítulo en la sección 1.3. Adicionalmente, se ha demostrado que NJA falla cuando es aplicada a modelos con constante cosmológica ³⁸.

En este orden de ideas, recientemente se ha intentado extrapolar NJA a teorías modificadas de la gravedad, por ejemplo en teorías $f(R)$ ³⁹, *EinsteinMaxwell-dilaton-*

³⁴ Harold Erbin: *Janis–Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation*. En: *General Relativity and Gravitation* 47.3 (2015), pág. 19

³⁵ Harold Erbin y Lucien Heurtier: *Five-dimensional janis–newman algorithm*. En: *Classical and Quantum Gravity* 32.16 (2015), pág. 165004

³⁶ Del Rajan: *Complex spacetimes and the newman-janis trick*. En: *arXiv preprint arXiv:1601.03862* (2016)

³⁷ Del Rajan y Matt Visser: *Cartesian Kerr–Schild variation on the Newman–Janis trick*. En: *International Journal of Modern Physics D* 26.14 (2017), pág. 1750167

³⁸ Rosangela Canonico, Luca Parisi, Gaetano Vilasi y col.: “Theoretical models for Astrophysical objects and the Newman-Janis Algorithm”. En: *Proceedings of the Eleventh International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. Institute of Biophysics y Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of ? 2010, págs. 85-96

³⁹ Rosangela Canonico, Luca Parisi y Gaetano Vilasi: “The Newman Janis Algorithm: A Review of Some Results”. En: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. Institute of Biophysics y Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of ? 2011, págs. 159-169; Sushant G Ghosh, Sunil D Maharaj y Uma Papnoi: *Radiating Kerr–Newman black hole in $f(R)$ gravity*. En: *The European Physical Journal C* 73.6 (2013), págs. 1-11

*axion gravity*⁴⁰, en el mundo de las branas⁴¹, gravedad de Lovelock⁴², gravedad de Einstein-Cartán⁴³, entre otras. Para ello el ansatz se ha implementado en las siguientes situaciones: se quiere rotar una métrica esféricamente simétrica y estacionaria para obtener su contraparte rotante en gravedad modificada cuando i.) la teoría conduce a ecuaciones de campo tan difíciles de resolver que no se han hallado soluciones que describan agujeros negros rotantes o ii.) uno está considerando deformaciones parametrizadas de métricas tipo Schwarzschild y carece de una acción bien definida para describirlas⁴⁴. Sin embargo, se ha demostrado que, a la hora implementar NJA sobre este tipo de teorías, estas dos consideraciones pueden llevar a grandes patologías sobre el espaciotiempo, verbigracia⁴⁵. Adicionalmente, se ha argumentado que este falla a la hora de generar soluciones tipo Kerr en gravedad de Brans-Dicke, a pesar de los recientes intentos por evitar este fallo⁴⁶. Asimismo, en 2013 Hansen y Yunes demostraron que al aplicar NJA a soluciones de agujeros negros no rotantes en teorías modificadas, este no conduce a soluciones que describan objetos rotantes⁴⁷; más aún, poseen singularidades desnudas, lo que di-

⁴⁰ Stoytcho Yazadjiev: *Newman-Janis method and rotating dilaton-axion black hole*. En: *arXiv preprint gr-qc/9907092* (1999); E Kyriakopoulos: *Rotating Black Hole Solutions with Axion Dilaton and Two Vector Fields and Solutions with Metric and Fields of the Same Form*. En: *arXiv preprint arXiv:0905.2542* (2009)

⁴¹ Richard Whisker: *Braneworld black holes*. En: *arXiv preprint arXiv:0810.1534* (2008)

⁴² Naresh Dadhich y Sushant G Ghosh: *Rotating black hole in Einstein and pure Lovelock gravity*. En: *arXiv preprint arXiv:1307.6166* (2013)

⁴³ Rafael Ferraro: *Untangling the Newman–Janis algorithm*. En: *General Relativity and Gravitation* 46.4 (2014), pág. 1705

⁴⁴ *ibíd.*

⁴⁵ Sarah J Vigeland y Scott A Hughes: *Spacetime and orbits of bumpy black holes*. En: *Physical Review D* 81.2 (2010), pág. 024030

⁴⁶ Yu F Pirogov: *Towards the rotating scalar-vacuum black holes*. En: *arXiv preprint arXiv:1306.4866* (2013)

⁴⁷ Nicolás Yunes y Leo C Stein: *Nonspinning black holes in alternative theories of gravity*. En: *Physical Review D* 83.10 (2011), pág. 104002

ficulta en gran medida su verificación observacional. Un trabajo similar demostrando la ineffectividad en otras teorías ajenas a la relatividad general fue desarrollado por Ferraro un año después ⁴⁸. Ambos concluyen que NJA genera varias patologías irremovibles en teorías modificadas de la gravedad. Así pues, existen argumentos muy fuertes hasta la fecha señalando que la generación de soluciones que describan objetos rotantes bajo las ideas de Newman y Janis no se pueden extrapolar más allá de la gravedad de Einstein.

Dejando de lado todos los inconvenientes que han surgido en el entendimiento del porqué y cómo funciona NJA, centrémonos ahora en el uso que se le ha dado, teniendo en cuenta su indudable eficacia en la generación de soluciones. Quizás el mayor problema, que aún sigue abierto en relatividad general y que se ha intentado resolver por medio de las ideas de Newman y Janis, es el de encontrar una solución exacta interior que pueda ser pegada con la solución exterior de Kerr, la cual, como hemos mencionado antes, se cree que es la que mejor describe la geometría exterior de los cuerpos rotantes en el universo. El problema en encontrar posibles fuentes para ella, con el fin de encontrar una distribución de materia que sea físicamente sensible con las observaciones, radica en hallar un tensor métrico que se adhiera suavemente con la solución a través de una hipersuperficie razonable para un cuerpo rotante, de tal suerte que su presión hidrostática se anule sobre ella. Generalmente, también se quiere que la fuente no radíe y, a su vez, que en su límite estático se pueda obtener una razonable solución interior de Schwarzschild. Adicionalmente, también se desea hallar esta contraparte interior tal que cumpla con todas las condiciones de energía usuales en gravedad de Einstein. Así pues, muchos investigadores han enfrentado este problema combinando el *ansatz* de Newman-Janis y las condiciones de pegado de Darmois e Israel ⁴⁹, las cuales a través de la primera

⁴⁸ Ferraro 2014

⁴⁹ Werner Israel: *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*. En: *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)* 44.1 (1966), págs. 1-14; Georges Darmois: *Mémorial des sciences mathématiques*. En: *Fascicule XXV (Gauthier-Villars, Paris, 1927)* (1927)

y segunda forma fundamental, se cree hasta la fecha que son las que mejor aseguran el pegado de soluciones a través de una hipersuperficie determinada.

El primer par de personas que atacó este problema fueron Herrera y Jiménez, quienes aplicaron NJA a una solución semilla interior esféricamente simétrica para así llegar a un tensor métrico interior y estacionario que pudiese ser pegado con Kerr⁵⁰. El siguiente intento fue protagonizado por Drake y Turolla, donde ellos aplican NJA y luego reescriben la solución final en la carta coordenada de Boyern-Lindsquist, para así pegar las soluciones obtenidas con Kerr, siendo los pioneros en la búsqueda de generalizar el formalismo⁵¹. Adicionalmente, Drake y Szekeres desarrollan tres importantes teoremas para NJA cuando es aplicado a un modelo de fluido perfecto⁵². Muchos trabajos se han desarrollado aplicando todas estas ideas⁵³.

Aún así, muchas de las generalizaciones a la idea seminal de Newman y Janis generalmente han fallado en el último paso, el cual consiste en reescribir la solución final en la carta coordenada de Boyern-Lindquist⁵⁴, con el objetivo de tener una métrica que describa un cuerpo rotante expresada en unas coordenadas lo suficientemente cómodas que permitan vislumbrar la física de forma mucho más clara y simple. Usualmente, las transformaciones planteadas por estos autores son descritas por

⁵⁰ L Herrera y J Jiménez: *The complexification of a nonrotating sphere: An extension of the Newman–Janis algorithm*. En: *Journal of Mathematical Physics* 23.12 (1982), págs. 2339-2345

⁵¹ SP Drake y R Turolla: *The application of the Newman-Janis algorithm in obtaining interior solutions of the Kerr metric*. En: *Classical and Quantum Gravity* 14.7 (1997), pág. 1883

⁵² Drake y Szekeres 2000

⁵³ Ng Ibohal: *Rotating metrics admitting non-perfect fluids*. En: *General Relativity and Gravitation* 37.1 (2005), págs. 19-51; T Papakostas: “Rotating fluids in General Relativity”. En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 8. 1. IOP Publishing. 2005, pág. 002; T Papakostas: “A new anisotropic solution for ellipsoidal spaces”. En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 189. 1. IOP Publishing. 2009, pág. 012027

⁵⁴ Robert H Boyer y Richard W Lindquist: *Maximal analytic extension of the Kerr metric*. En: *Journal of mathematical physics* 8.2 (1967), págs. 265-281

funciones en términos de la coordenada radial y colatitudinal, lo que impide, bajo este razonamiento, que sean integrables y permitan establecer un difeomorfismo bien definido entre las coordenadas de Eddington-Filkenstein y Boyern-Lindquist, dando como resultado soluciones sin sentido físico que no pueden expresarse en la carta coordenada deseada, por ejemplo en ⁵⁵.

Este hecho ha sido ampliamente señalado por el investigador turco Mustapha Azreg ⁵⁶. Por ello, él estuvo trabajando en una nueva generalización a NJA con el objetivo de eliminar la complexificación ambigua en algunas coordenadas que hemos discutido en líneas anteriores, y a su vez imponer condiciones físicas y de simetría de tal suerte que se pueda extender su aplicabilidad y así abordar situaciones mucho más generales a las consideradas de antaño, al tiempo que intenta clarificar su funcionamiento. No fue hasta el año 2014 que pudo lograr su objetivo, el cual fue publicado en un serie de artículos donde genera soluciones interiores interpretadas como fluidos imperfectos con o sin un campo electromagnético asociado y, más interesante aún, soluciones aptas para ser interpretadas como agujeros de gusano rotantes^{57 58}.

La física tras los agujeros de gusano puede dividirse en dos grandes ramas: los

⁵⁵ Francesco Caravelli y Leonardo Modesto: *Spinning loop black holes*. En: *Classical and Quantum Gravity* 27.24 (2010), pág. 245022; Bobir Toshmatov y col.: *Rotating regular black hole solution*. En: *Physical Review D* 89.10 (2014), pág. 104017; Leonardo Modesto y Piero Nicolini: *Charged rotating noncommutative black holes*. En: *Physical Review D* 82.10 (2010), pág. 104035; Tim Johannsen y Dimitrios Psaltis: *Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem*. En: *Physical Review D* 83.12 (2011), pág. 124015

⁵⁶ Mustapha Azreg-Aïnou: *Comment on Spinning loop black holes* [arXiv: 1006.0232]. En: *arXiv preprint arXiv:1106.0970* (2011)

⁵⁷ En este punto no daremos muchos detalles sobre sus investigaciones, dado que este trabajo se encuentra altamente inspirado en sus ideas.

⁵⁸ Azreg-Ainou 2014; Mustapha Azreg-Aïnou: *Generating rotating regular black hole solutions without complexification*. En: *Physical Review D* 90.6 (2014), pág. 064041; Mustapha Azreg-Aïnou: *Regular and conformal regular cores for static and rotating solutions*. En: *Physics Letters B* 730 (2014), págs. 95-98

relacionados con agujeros de gusano euclidianos ⁵⁹ y los Lorentzianos ⁶⁰. Históricamente, la noción de agujero de gusano comienza con las ideas seminales proporcionadas por Flamm ⁶¹, poco tiempo después de la publicación del espaciotiempo de Schwarzschild. Adicionalmente, importantes especulaciones al respecto fueron formuladas por Hermann Weyl en sus disertaciones filosóficas ⁶². Tiempo después Einstein y su estudiante doctoral Nathan Rosen proponen una construcción geométrica con el objetivo de eliminar las singularidades de curvatura, y entender cómo relacionar el concepto de una partícula con la noción de una teoría de campos continuos como lo es la relatividad general; en consecuencia, ellos introducen lo que hoy se conoce como el “puente de Einstein-Rosen”, conectando dos espacios físicos alejados entre sí ⁶³. Tuvieron que pasar aproximadamente veinte años para que el tema fuese retomado por Wheeler, donde él emplea las coordenadas de Kruskal-Szkeres para describir la geometría del agujero de gusano de Schwarzschild y discutir aspectos topológicos en relatividad general, dando como resultado el primer diagrama de lo que actualmente entendemos como un agujero de gusano ⁶⁴. Adicionalmente, el término “agujero de gusano” aparece por primera vez en la literatura en un trabajo posterior realizado por Misner y el mismo Wheeler dos años después ⁶⁵, para luego Hawking extrapolar sus soluciones al mundo de los agujeros

⁵⁹ Soumendranath Ruz y col.: *Euclidean wormholes with minimally coupled scalar fields*. En: *Classical and Quantum Gravity* 30.17 (2013), pág. 175013; Nima Arkani-Hamed, Jacopo Orgera y Joseph Polchinski: *Euclidean wormholes in string theory*. En: *Journal of High Energy Physics* 2007.12 (2007), pág. 018; Stephen W Hawking: *Quantum coherence down the wormhole*. En: *Physics Letters B* 195.3 (1987), págs. 337-343; Stephen W Hawking: *Wormholes in spacetime*. En: *EUCLIDEAN QUANTUM GRAVITY*. 1988, págs. 363-369

⁶⁰ Visser 1995

⁶¹ Ludwig Flamm: *Beiträge zur Einsteinschen gravitationstheorie*. Hirzel, 1916

⁶² Hermann Weyl: *Philosophie der Mathematik Und Naturwissenschaft*. En: (1927)

⁶³ Einstein y Rosen 1935

⁶⁴ John Archibald Wheeler: *Geons*. En: *Physical Review* 97.2 (1955), pág. 511; J. A. Wheeler: *Geometrodynamics*. Academic Press Inc., New York, 1962

⁶⁵ Charles W Misner y John A Wheeler: *Classical physics as geometry*. En: *Annals of physics* 2.6

de gusano eculideanos ⁶⁶.

El renacimiento de estos objetos como un medio físicamente viable para realizar viajes interestelares surge en 1988 con las ideas de Morris y Thorne, inspirados en la novela de ciencia ficción *Contact* publicada por Carl Sagan en 1985 ⁶⁷. Morris y Thorne fueron las primeras personas que discutieron respecto a las condiciones que debería cumplir un agujero de gusano para que sea transitable por un ser humano, marcando así un antes y un después en la física tras estos ⁶⁸. Un agujero de gusano transitable permite, en principio, el viaje de ida y regreso para un ser humano en un tiempo razonable y de tal suerte que no sea destrozado por las fuerzas de marea gravitacionales.

Adicionalmente y dejando de lado la remota posibilidad de su construcción, el concepto de transitabilidad abrió la puerta a fructíferas investigaciones referentes a sus propiedades fundamentales ⁶⁹, su uso como máquinas del tiempo ⁷⁰ e incluso su estructura cuántica ⁷¹. Infortunadamente, para construir tales objetos surge la necesidad de introducir un contenido material “exótico” cuyo tensor energía momentum

(1957), págs. 525-603

⁶⁶ Hawking 1988

⁶⁷ Sagan 2018

⁶⁸ Morris y Thorne 1988

⁶⁹ M Visser y D Hochberg: “The internal structure of black holes and spacetime singularities”. En: *Proceedings of the Hafia Workshop*. 1997; Sean A Hayward: *Dynamic wormholes*. En: *International Journal of Modern Physics D* 8.03 (1999), págs. 373-382; David Hochberg y Matt Visser: *Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions*. En: *Physical Review D* 58.4 (1998), pág. 044021

⁷⁰ Morris y Thorne 1988; Valery P Frolov e Igor D Novikov: *Physical effects in wormholes and time machines*. En: *Physical Review D* 42.4 (1990), pág. 1057

⁷¹ Matt Visser: *Quantum wormholes*. En: *Physical Review D* 43.2 (1991), pág. 402; David Hochberg, Arkadiy Popov y Sergey V Sushkov: *Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity*. En: *Physical Review Letters* 78.11 (1997), pág. 2050

viola las condiciones de energía, al menos en las zonas aledañas a su garganta ⁷². Muchos intentos se han realizado para evitar apelar a este tipo de materia exótica, pero todos han sido en vano en la teoría General de Relatividad. Sin embargo, recientemente se han realizado avances significativos en esta dirección tratando de minimizar la violación de las condiciones de energía a través de una integral de volumen que cuantifique la cantidad de materia no deseada ⁷³. Por tanto, no ha sido una tarea fácil hallar candidatos prometedores para agujeros de gusano libres de estas violaciones. A pesar de ello, se han propuesto modelos de energía oscura con extravagantes ecuaciones de estado para obtener soluciones de agujeros de gusano estables, soportados por: energía fantasma ⁷⁴, constante cosmológica ⁷⁵, entre otras.

Sorprendentemente, en teorías modificadas de la gravedad se ha demostrado que el requerimiento de materia exótica se puede minimizar, o incluso eliminar por completo ⁷⁶. Adicionalmente, la contraparte rotante a las ideas de Morris y Thorne fue

⁷² Visser 1995

⁷³ Matt Visser, Sayan Kar y Naresh Dadhich: *Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations*. En: *Physical review letters* 90.20 (2003), pág. 201102; Sayan Kar, Naresh Dadhich y Matt Visser: *Quantifying energy condition violations in traversable wormholes*. En: *Pramana* 63.4 (2004), págs. 859-864; Peter KF Kuhfittig: *Can a wormhole supported by only small amounts of exotic matter really be traversable?* En: *Physical Review D* 68.6 (2003), pág. 067502

⁷⁴ Francisco SN Lobo: *Phantom energy traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 71.8 (2005), pág. 084011; Francisco SN Lobo: *Stability of phantom wormholes*. En: *Physical Review D* 71.12 (2005), pág. 124022; OB Zaslavskii: *Exactly solvable model of a wormhole supported by phantom energy*. En: *Physical Review D* 72.6 (2005), pág. 061303

⁷⁵ F Rahaman y col.: *Wormhole with varying cosmological constant*. En: *General Relativity and Gravitation* 39.2 (2007), págs. 145-151; José PS Lemos, Francisco SN Lobo y Sergio Quinet de Oliveira: *Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant*. En: *Physical Review D* 68.6 (2003), pág. 064004

⁷⁶ Tiberiu Harko y col.: *Modified-gravity wormholes without exotic matter*. En: *Physical Review D* 87.6 (2013), pág. 067504; Nadiezhda Montelongo Garcia y Francisco SN Lobo: *Nonminimal curvature-matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition*. En: *Classical and Quantum Gravity* 28.8 (2011), pág. 085018

hallada por Teo ⁷⁷; sin embargo, como es señalado por Azreg, esta solución no tiene en cuenta el “aplastamiento” debido a la rotación del agujero de gusano; por tanto, esta sólo será válida en el límite de rotación lenta, remediando estos problemas en una nueva generalización ⁷⁸. Quizás él ha sido el único hasta el momento que se ha aventurado en la generación de agujeros de gusano rotantes mediante el ansatz de Newman Janis ⁷⁹, siendo este un terreno aún desconocido y fértil para la investigación. Así pues, vemos que, a pesar de que este tópico es altamente especulativo debido a la poca probabilidad de poder detectar estos objetos en un futuro, los agujeros de gusano son un tema actual de discusión en astrofísica ⁸⁰, donde se espera que NJA sea una herramienta fundamental en la búsqueda de soluciones aptas para su interpretación.

Ahora bien, como se mencionó en líneas anteriores, NJA actualmente se ha implementado en la generación de soluciones estacionarias con el objetivo de estudiar las sombras generadas por los objetos que estas modelan. Así, el estudio de las sombras comienza con Synge en 1966 con el estudio de las sombras generadas por la solución de Schwarzschild ⁸¹. Sumado a ello, el concepto de la sombra generada por un cuerpo astrofísico rotante fue estudiada por primera vez por Bardeen en 1973 ⁸², sugiriendo que la imagen de un agujero que, en principio, deberíamos ser capaces de detectar, aparecería producto de un efecto de lente gravitacional muy fuerte; no

⁷⁷ Edward Teo: *Rotating traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 58.2 (1998), pág. 024014

⁷⁸ Azreg-Ainou 2016

⁷⁹ Azreg-Ainou 2014

⁸⁰ Juan Maldacena y Alexey Milekhin: *Humanly traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 103.6 (2021), pág. 066007; Juan Maldacena y Alexey Milekhin: *SYK wormhole formation in real time*. En: *Journal of High Energy Physics* 2021.4 (2021), págs. 1-40; Mark Van Raamsdonk: *Comments on wormholes, ensembles, and cosmology*. En: *arXiv preprint arXiv:2008.02259* (2020)

⁸¹ J.L. Synge: *The escape of photons from gravitationally intense stars*. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 131.3 (1966), págs. 463-466

⁸² J.M. Bardeen: *Black Holes (Les astres occlus)*, ed. B.S. Dewitt & C. Dewitt. 1973

obstante, la palabra “sombra” no apareció en la literatura sino hasta el año 1999⁸³.

No cabe duda que el estudio de las sombras generadas por agujeros negros adquiere una importancia fundamental en la física actual con la detección de las ondas gravitacionales realizada por LIGO⁸⁴ y Virgo⁸⁵, ofreciéndonos una gran oportunidad para estudiar la naturaleza de los agujeros negros a través del estudio de la gravedad en un régimen de campo fuerte. En otras palabras, el estudio de la física cerca de un agujero negro es un tópico a nivel teórico y experimental bastante prometededor en la actualidad. Sin embargo, analizar la naturaleza de estos objetos requiere la detección de su horizonte de eventos; por tanto, hasta la fecha se han realizado distintos test con el objetivo de brindarnos más información al respecto, verbigracia⁸⁶. Adicionalmente, se han realizado varias observaciones, las cuales muestran que la gran mayoría de galaxias contienen un agujero negro supermasivo en su interior y, adicionalmente, producen un efecto rotación en estas⁸⁷. Producto de todas estas investigaciones, en la actualidad se sabe que los agujeros negros en el centro de las galaxias poseen un espín determinado y en este ambiente se transforman en una fuente interesante para investigarlos mediante la sombra que ellos emiten en un *background* brillante de estrellas (ver figura 19).

⁸³ Heino Falcke, Fulvio Melia y Eric Agol: *Viewing the shadow of the black hole at the galactic center*. En: *The Astrophysical Journal Letters* 528.1 (1999), pág. L13

⁸⁴ Junaid Aasi y col.: *Advanced ligo*. En: *Classical and quantum gravity* 32.7 (2015), pág. 074001

⁸⁵ Fet al Acernese y col.: *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*. En: *Classical and Quantum Gravity* 32.2 (2014), pág. 024001

⁸⁶ Avery E Broderick, Abraham Loeb y Ramesh Narayan: *The event horizon of Sagittarius A*. En: *The Astrophysical Journal* 701.2 (2009), pág. 1357; Avery E Broderick y col.: *Testing the no-hair theorem with event horizon telescope observations of Sagittarius A*. En: *The Astrophysical Journal* 784.1 (2014), pág. 7

⁸⁷ Martin J Rees: *Black hole models for active galactic nuclei*. En: *Annual review of astronomy and astrophysics* 22.1 (1984), págs. 471-506; John Kormendy y Douglas Richstone: *Inward bound the search for supermassive black holes in galactic nuclei*. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 33.1 (1995), págs. 581-624

Actualmente, de forma teórica se han estudiado las sombras generadas por distintas configuraciones de agujeros negros rotantes, tales como el de Kerr-Newman⁸⁸, Kerr con un campo escalar asociado⁸⁹, Kerr-Sen⁹⁰, doble agujero negro de Kerr⁹¹; aún así, existen diferentes test que sugieren que la sombra de un agujero negro arbitrario en realidad no prueba de forma unívoca la geometría del horizonte de eventos del objeto que pretenden modelar, por lo menos en gravedad de Einstein⁹². Así pues, investigaciones en sombras generadas por agujeros negros bajo teorías modificadas de la gravedad han recibido un gran apogeo⁹³. Por otro lado, se han elaborado nuevos métodos computacionales de trazado de rayos para codificar y obtener una mejor visualización de las sombras estudiadas⁹⁴. Adicionalmente, se han efectuado varios test con el objetivo de poder distinguir -si se puede- la sombra de un agujero negro de objetos astrofísicos sin horizonte de eventos, tales como los agujeros de

⁸⁸ A De Vries: *The apparent shape of a rotating charged black hole, closed photon orbits and the bifurcation set A 4*. En: *Classical and Quantum Gravity* 17.1 (2000), pág. 123; Naoki Tsukamoto: *Black hole shadow in an asymptotically flat, stationary, and axisymmetric spacetime: The Kerr-Newman and rotating regular black holes*. En: *Physical Review D* 97.6 (2018), pág. 064021

⁸⁹ Pedro VP Cunha y col.: *Shadows of Kerr black holes with scalar hair*. En: *Physical review letters* 115.21 (2015), pág. 211102; Pedro VP Cunha, Carlos AR Herdeiro y Eugen Radu: *EHT constraint on the ultralight scalar hair of the M87 supermassive black hole*. En: *Universe* 5.12 (2019), pág. 220

⁹⁰ Kenta Hioki y Umpei Miyamoto: *Hidden symmetries, null geodesics, and photon capture in the Sen black hole*. En: *Physical Review D* 78.4 (2008), pág. 044007

⁹¹ Cunha y Herdeiro 2018

⁹² Pedro VP Cunha, Carlos AR Herdeiro y Maria J Rodriguez: *Does the black hole shadow probe the event horizon geometry?* En: *Physical Review D* 97.8 (2018), pág. 084020

⁹³ Arne Grenzebach, Volker Perlick y Claus Lämmerzahl: *Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant*. En: *Physical Review D* 89.12 (2014), pág. 124004; Cosimo Bambi y Katherine Freese: *Apparent shape of super-spinning black holes*. En: *Physical Review D* 79.4 (2009), pág. 043002; Leonardo Amarilla, Ernesto F Eiroa y Gaston Giribet: *Null geodesics and shadow of a rotating black hole in extended Chern-Simons modified gravity*. En: *Physical Review D* 81.12 (2010), pág. 124045

⁹⁴ Ziri Younsi y col.: *New method for shadow calculations: Application to parametrized axisymmetric black holes*. En: *Physical Review D* 94.8 (2016), pág. 084025; AA Abdujabbarov, L Rezzolla y BJ Ahmedov: *A coordinate-independent characterization of a black hole shadow*. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 454.3 (2015), págs. 2423-2435

gusano ⁹⁵. De manera que el estudio teórico y observacional de las sombras generadas por agujeros negros es un tema de investigación que se encuentra en un gran auge, debido a sus prometedores resultados, donde NJA se espera sea de gran utilidad en la generación de soluciones aptas para ser interpretadas bajo distintos modelos de materia, los cuales puedan ser estudiados a través de las sombras que generan ⁹⁶.

Propósito y Organización del Trabajo

El objetivo central del presente trabajo de grado es la generación de soluciones correspondientes a fluidos rotantes mediante el formalismo de Newman-Janis, tal que se planea abordar respondiendo las siguientes preguntas: *¿por qué NJA es exitoso en la generación de soluciones rotantes? ¿bajo qué circunstancias funciona? ¿qué soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein podríamos obtener mediante este ansatz que describan problemas físicos con ciertas características preestablecidas? ¿qué interpretaciones físicas podríamos atribuirles a las soluciones generadas mediante NJA?* Para tal fin el trabajo de grado se ha dividido en dos grandes partes: la primera consta de los primeros tres capítulos, los cuales estarán dedicados exclusivamente en un estudio a profundidad de NJA y en la generación de soluciones mediante una perspectiva geométrica del ansatz; por último, la segunda parte constituye los tres capítulos restantes, donde estudiaremos las distintas interpretaciones físicas atribuibles a las soluciones halladas previamente.

Por consiguiente, en la primera parte del trabajo se partirá con el capítulo 1 don-

⁹⁵ Naoki Tsukamoto, Tomohiro Harada y Kohji Yajima: *Can we distinguish between black holes and wormholes by their Einstein-ring systems?* En: *Physical Review D* 86.10 (2012), pág. 104062; Vitor Cardoso, Edgardo Franzin y Paolo Pani: *Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon?* En: *Physical review letters* 116.17 (2016), pág. 171101; Cosimo Bambi: *Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm very long baseline interferometry facilities.* En: *Physical Review D* 87.10 (2013), pág. 107501

⁹⁶ Junior y col. 2020; Rajibul Shaikh: *Shadows of rotating wormholes.* En: *Physical Review D* 98.2 (2018), pág. 024044; Azreg-Aïnou 2014a

de se presenta una breve revisión bibliográfica con respecto a NJA y algunas de las más importantes formas alternativas que se han discutido desde su publicación. Adicionalmente, se abordarán algunos de los intentos más reconocidos por la comunidad científica en explicar el porqué, cómo y cuándo funciona. Una vez realizado ello el lector se encontrará familiarizado con la dinámica del *ansatz* y toda la historia relacionada con él, que a pesar de haber pasado más de cincuenta años desde su publicación, actualmente es un tema de controversia y fructíferas discusiones en física teórica.

De manera que, inspirados en las ideas de Azreg⁹⁷, en el capítulo 2 se realizará una generalización para NJA de una forma moderna a través del lenguaje de la geometría diferencial -a diferencia de la forma puramente algebraica que se ha hecho hasta la fecha-. Para ello se partirá de una solución semilla estática y con simetría esférica lo suficientemente general para generar una métrica maestra que describe una solución interior estacionaria con simetría axial. Así pues, se presentará, lo que constituye, hasta donde se sabe, una nueva forma de emplear NJA de manera que deja transparente la idea según la cual el formalismo abandona la transformación entre espacios métricos en favor de los mapeos entre tétradas. Una vez obtenida la solución interior final general, se presupondrá que esta describirá un modelo de fluido anisótropo sin flujo de calor. Así pues, se empleará esta imposición sobre las ecuaciones de Einstein para así obtener cinco clases independientes de soluciones interiores generales que describen fluidos de esta naturaleza. Adicionalmente, las ecuaciones de Einstein proporcionarán las formas generales para la densidad de energía y presiones anisótropas del sistema, visto por un observador comóvil a un elemento de fluido arbitrario.

Una vez obtenidas las cinco clases independientes de fluidos rotantes generados por NJA, en el capítulo 3 se presentarán las formas explícitas para el tensor métrico,

⁹⁷ Azreg-Aïnou 2014a; Azreg-Ainou 20140

la velocidad del fluido, los flujos termodinámicos, entre otros, para cada una de las clases de fluidos anisótropos sin flujo de calor que obtuvimos en el capítulo anterior. Asimismo, se presentarán un conjunto de soluciones particulares para cada una de ellas con el objetivo de responder a la pregunta si NJA preserva o no la estructura conforme del espaciotiempo, la cual fue estudiada de antaño por el director de este trabajo de grado para el caso de configuraciones conformestáticas ⁹⁸. Finalmente, al analizar cualitativamente los resultados, se observó que estos modelos de fluido podrían violar las condiciones de energía usuales en gravedad de Einstein y, a su vez, se planteará la hipótesis que este observador comóvil empleado en la caracterización del fluido no nos proporciona la información completa del sistema, por lo que se opta por realizar un cambio de observador para verificar la validez de nuestras sospechas, dado que se intuye que en realidad existe un flujo de algún campo vectorial oculto en el fluido.

Así pues, la segunda parte del trabajo inicia con el capítulo 5, donde se estudiará al nuevo observador que empleado en la caracterización de las soluciones obtenidas. En este trabajo investigación se usará a ZAMO (*zero angular momentum observer*, por sus siglas en inglés), el cual como se discute allí, no será comóvil a los elementos de fluido; por tanto, él proporcionará la gran ventaja con respecto al anterior observador en corroborar nuestra hipótesis y determinar a la naturaleza de este campo vectorial oculto. Para lograr ello, primero se realizará una transformación de Lorentz entre el observador comóvil y ZAMO con el objetivo de extrapolar los resultados estudiados en el capítulo 3 para expresarlos en función de este nuevo observador. Posteriormente se determinarán las formas funcionales en las desigualdades que caracterizan cada una de las condiciones de energía del sistema y se aplicarán para el caso particular de la solución de Kerr-Newman generada por NJA. Adicionalmente, se presentarán los perfiles de los flujos termodinámicos y variables cinemáticas obtenidos para esta solución y, de la misma forma, se realizará una disertación con

⁹⁸ Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016

respecto a cada uno de ellos. Aún así, surgiría la pregunta de cómo una solución interior sin ningún tipo de campo electromagnético asociado puede generar una solución de esta naturaleza, como en el caso de Kerr-Newman. Para responder esta pregunta se hará una breve discusión inspirada en las ideas de Wheeler y Thorne presentadas en ⁹⁹, más unos comentarios realizados por el autor de este trabajo. Sin embargo, estas ideas presentadas por ellos, más la violación en las condiciones de energía, nos conducirán a pensar que en realidad estas soluciones de fluidos rotantes generadas por NJA pueden ser interpretadas como agujeros de gusano rotantes.

De manera que, ampliando los resultados presentados por Gutierrez-Piñeres y N.H. Beltrán en ¹⁰⁰, en el capítulo 6 se presentará un análisis detallado con respecto al comportamiento que presenta NJA en la generación de agujeros de gusano rotantes, donde se encontraron ciertas condiciones físicas y geométricas impuestas por el mismo ansatz. Adicionalmente se aplicarán los resultados obtenidos al caso particular del agujero de gusano de Kerr-Newman.

Finalmente, inspirados en las ideas de Azreg ¹⁰¹, Shaikh ¹⁰² y Lima Junior ¹⁰³, se estudiarán las sombras generadas por NJA a través del formalismo de Hamilton-Jacobi y se aplicará al caso particular de la sombra generada por el agujero negro de Kerr-Newman. Como parte final se presentan las principales conclusiones del trabajo de investigación junto con los respectivos apéndices que ayudarán al lector al mejor entendimiento de todo lo realizado a lo largo del trabajo.

⁹⁹ Misner y Wheeler 1957

¹⁰⁰ AC Gutiérrez-Piñeres, NH Beltrán y CS López-Monsalvo: "Newman-Janis Ansatz for rotating wormholes". En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 2081. 1. IOP Publishing. 2021, pág. 012005

¹⁰¹ Azreg-Aïnou 2014a

¹⁰² Shaikh 2018

¹⁰³ Junior y col. 2020

1. Breve Historia del “Formalismo”

*... esa pieza doctrinal observaba
que la lotería es una interpolación
del azar en el orden del mundo y
que aceptar errores no es
contradecir el azar: es corroborarlo.*

—Jorge Luis Borges, *La lotería de Babilonia* (1941).

En este capítulo se presentará una pequeña revisión bibliográfica con respecto a NJA y algunas de las formas alternativas discutidas por la comunidad científica en los años posteriores a su publicación. Actualmente, se considera una herramienta -aunque bastante misteriosa- muy útil en la generación de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, y a su vez una aplicación bastante peculiar del uso de las variables complejas en relatividad general.

Como se mencionó en los prelogómenos, este formalismo involucra una transformación compleja de coordenadas la cual nos lleva a la solución de Kerr partiendo de la solución Schwarzschild. El porqué de su eficacia aun sigue siendo una pregunta abierta en la astrofísica actual, lo que ha conducido a denominarlo como un simple truco o mera casualidad por la mayor parte de la comunidad científica. A pesar de ello, aún existimos pocas personas las cuales creen que su éxito se debe a una estructura física y matemática más profunda, ajena aún a nosotros. Por ello, al final de este capítulo se presenta una breve discusión con respecto a las posibles explicaciones realizadas por diferentes autores. Otros *reviews* relevantes y “explicaciones” a NJA pueden hallarse en ¹⁰⁴.

¹⁰⁴ Rajan 2016; Whisker 2008; Harold Erbin: *Deciphering and generalizing Demiański–Janis–Newman algorithm*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.5 (2016), págs. 1-21

1.1. Método de Newman-Janis

Comenzaremos con el estudio de la versión original de NJA, siguiendo los mismos pasos realizados por Newman y su estudiante doctoral Janis, presentados en su artículo de 1964 ¹⁰⁵.

Como primer paso, iniciemos con la bien conocida solución de Schwarzschild escrita en las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) y con una signatura Lorentziana -2,

$$\mathcal{G}_0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi), \quad (1)$$

donde m corresponde a la masa de la fuente, vista por un observador en el infinito. Como siguiente paso, efectuamos la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} u &= t - r - 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right), \\ r' &= r, \\ \theta' &= \theta, \\ \phi' &= \phi, \end{aligned} \quad (2)$$

de tal suerte que la solución sea reescrita en las coordenadas salientes de Eddington-Filkentein (ver apéndice 1), tomando la forma

$$\mathcal{G}_s = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) du \otimes du + 2 du \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi), \quad (3)$$

¹⁰⁵ Newman y Janis 1965

tal que hemos eliminado la comilla en las coordenadas por simplicidad. El siguiente paso será escribir (3) en forma de tétrada nula compleja (ver apéndice 2)

$$(\mathcal{G}_s)_{ij} = (\mathbf{L})_i(\mathbf{N})_j + (\mathbf{N})_i(\mathbf{L})_j - (\mathbf{M})_i(\mathbf{W})_j - (\mathbf{W})_i(\mathbf{M})_j, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \partial_r, \\ \mathbf{M} &= \partial_u - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \partial_r, \\ \mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \right) \partial_\theta, \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \right) \partial_\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

corresponden a los elementos de la base vectorial escrita en esta carta coordenada, tal que \mathbf{W} es el complejo conjugado de \mathbf{N} . Se puede verificar que estas tétradas cumplen con las condiciones de ortonormalidad propias de las tétradas nulas ¹⁰⁶, en este caso para la solución de Schwarzschild (3).

Las ambigüedades comienzan en el siguiente paso, al permitir que la coordenada r tome valores complejos, es decir, imponer que $r \in \mathbb{C}$. Adicionalmente, tomaremos de forma arbitraria el complejo conjugado de algunas coordenadas radiales. Las demás permanecerán inalteradas. Todo esto conlleva a la tétrada

¹⁰⁶ Es decir, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = 1$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \partial_r, \\
\mathbf{M} &= \partial_u - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\bar{r}} \right) \partial_r, \\
\mathbf{N} &= \frac{1}{\sqrt{2} \bar{r}} \left(\partial_\theta + \frac{i}{\sin \theta} \right) \partial_\theta, \\
\mathbf{W} &= \frac{1}{\sqrt{2} r} \left(\partial_\theta - \frac{i}{\sin \theta} \right) \partial_\theta,
\end{aligned} \tag{6}$$

donde \bar{r} denota complejo conjugado de r . Producto de esta ambigüedad, existen, en teoría, muchas formas de complexificar estas tétradas, pero sólo algunas nos conducirán al resultado deseado, es decir, Kerr ¹⁰⁷. Este es el punto de partida en la “derivación” de esta solución.

Después de esto, lo siguiente es permitir que la coordenada u también tome valores complejos; luego, efectuaremos la siguiente rotación compleja de coordenadas

$$\begin{aligned}
u_R &= u - ia \cos \theta, \\
r_R &= r + ia \cos \theta, \\
\theta_R &= \theta, \\
\phi_R &= \phi,
\end{aligned} \tag{7}$$

donde a es una constante, la cual tendrá una interpretación física bien importante, como veremos enseguida. A su vez, ella induce en las bases vectoriales la siguiente transformación:

¹⁰⁷ Azreg-Aïnou 2014a

$$\begin{aligned}
\partial_u &= \partial_{u_R}, \\
\partial_r &= \partial_{r_R}, \\
\partial_\theta &= \partial_{\theta_R} + ia \sin \theta (\partial_{u_R} - \partial_{r_R}), \\
\partial_\phi &= \partial_{\phi_R}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Comentario 1.1: Gracias a la inclusión de la constante a en (7), podemos vislumbrar que, en este paso, la geometría de Schwarzschild comienza a transformarse en la de Kerr. Lo realmente llamativo aquí es que este cambio de geometría se produce en el dominio de los números complejos. En otras palabras, estamos pasando de una versión complexificada de la solución de Schwarzschild a una complexificada de la solución de Kerr.

Otra de las claves para el éxito de este anzats es, como lo mencionan en el artículo original, imponer durante todo este proceso que \mathbf{W} *siempre* sea el complejo conjugado de \mathbf{N} ¹⁰⁸. Aplicando esta rotación compleja de coordenadas, la tétrada adquiere la forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_R &= \partial_{u_R}, \\
\mathbf{M}_R &= \partial_{u_R} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m r_R}{r_R^2 + a^2 \cos^2 \theta_R} \right) \partial_{r_R}, \\
\mathbf{N}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}(r_R + ia \cos \theta_R)} \left(\partial_{\theta_R} + ia \sin \theta_R (\partial_{u_R} - \partial_{r_R}) + \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right), \\
\mathbf{W}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}(r_R - ia \cos \theta_R)} \left(\partial_{\theta_R} - ia \sin \theta_R (\partial_{u_R} - \partial_{r_R}) - \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right),
\end{aligned} \tag{9}$$

tal que ella también cumple con las reglas de ortonormalidad típicas de las tétradas

¹⁰⁸ Sobre la importancia de esta imposición, hablaremos más adelante. Por el momento, es muy importante tener presente este detalle.

nulas. Como paso final simplemente restringimos a las coordenadas $(u_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$ a tomar valores reales; obteniendo la misma tétrada (9), salvo por esta imposición.

Construyendo la inversa de la métrica (4) con base en (9), es decir, $(\mathcal{G}_R)^{ij} = (\mathbf{L}_R)^i(\mathbf{N}_R)^j + (\mathbf{N}_R)^i(\mathbf{L}_R)^j - (\mathbf{M}_R)^i(\mathbf{W}_R)^j - (\mathbf{W}_R)^i(\mathbf{M}_R)^j$, obtenemos el siguiente tensor métrico:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) du \otimes du + 2 du \otimes dr + \frac{4mr a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} du \otimes d\phi \\ & - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta \otimes d\theta - 2a \sin^2 \theta d\phi \otimes dr - [(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)a^2 \sin^2 \theta \\ & + 2mra^2 \sin^2 \theta + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2] \frac{\sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} d\phi \otimes d\phi, \end{aligned} \quad (10)$$

el cual corresponde a la solución hallada por Kerr en 1963 ¹⁰⁹.

Si tomamos el límite cuando $a \rightarrow 0$, obtenemos de vuelta la solución de Schwarzschild; así pues, a este parámetro a se le puede atribuir la rotación estacionaria de la fuente gravitacional descrita por la solución de Kerr. En conclusión, vemos que NJA funciona de forma exitosa en la generación de una solución rotante a partir de una sin rotación.

Comentario 1.2: Algo interesante por resaltar es que, si le aplicásemos el ansatz de Newman-Janis a la solución de Kerr, obtendríamos de nuevo la solución de Kerr.

Comentario 1.3: Al realizar directamente la rotación compleja de coordenadas (7) sobre la métrica de Schwarzschild en coordenadas esféricas, en lugar de hacerlo en las coordenadas de Eddington-Filkenstein, NJA no genera la solución de Kerr. Esto podría sugerir que este depende fuertemente de la carta coordenada con la que estemos trabajando.

¹⁰⁹ Kerr 1963

Comentario 1.4: El primer problema que se observa radica en la transformación donde la tétrada (6) es obtenida a partir de (5). Por un lado, está la ambigüedad con la que se complexifica a r pero, un problema aún más serio, es este proceso en el cual está incluido un mapeo no-holomórfico¹¹⁰ $r \rightarrow \bar{r}$; por tanto, para ir de (5) a (6) necesitamos de una transformación la cual no puede ser explicada a través de las herramientas usuales en la teoría de variedades complejas, dado que, por definición, ellas requieren de una función de transición la cual necesariamente debe ser holomórfica¹¹².

Por otro lado, un problema aún más directo con respecto a la tétrada (6) radica en el hecho que esta contiene cantidades geométricas las cuales no están bien definidas dentro del análisis estándar de las variedades complejas. Concretamente, si queremos calcular el tensor de Riemman, el tensor de Ricci y el correspondiente escalar de curvatura en (6) a través de la métrica (4), veremos que estas cantidades dependerán de derivadas con respecto al módulo complejo de la coordenada r , lo que significa que las matemáticas desarrolladas en el estudio del análisis y geometría compleja no es útil en el análisis de la estructura matemática de NJA.

En conclusión, vemos que el problema central en la búsqueda de un sentido físico

¹¹⁰ Una función complejo-evaluada $f : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^n$ es *holomórfica* si $f = f_1 + if_2$ satisface las relaciones de Cauchy-Riemann para cada $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$, i.e.,

$$\partial_{x^\mu} f_1 = \partial_{y^\mu} f_2 \quad \text{y} \quad \partial_{x^\mu} f_2 = -\partial_{y^\mu} f_1.$$

Por tanto, un mapeo $(f^1, \dots, f^n) : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^n$ es llamado holomórfico si cada función f^λ tal que $(1 \leq \lambda \leq n)$ es holomórfica. Por otro lado, definamos a f como un difeomorfismo $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$, siendo \mathcal{M} y \mathcal{N} dos variedades complejas con $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M} = m$ y $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{N} = n$, respectivamente. Ahora tomemos un punto p en la carta $(U, \phi) \in \mathcal{M}$, y sea (V, ψ) la carta en \mathcal{N} , tal que $f(p) \in V$, de tal suerte que definimos a $z^\mu = \phi(p)$ y $w^\nu = \psi(f(p))$ como las coordenadas (complejas) en las cartas U y V , respectivamente; por tanto, bajo esta estructura tendremos el mapeo $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{C}^m \mapsto \mathbb{C}^n$. Si cada función w^ν con $1 \leq \nu \leq n$ es holomórfica a z^μ , diremos que f corresponde a un mapeo holomórfico entre dos variedades complejas, tal que esta definición será independiente de la carta coordenada con la que estemos trabajando¹¹¹.

¹¹² Flaherty 1976

más profundo en NJA radica en la tétrada (6), por ende un aspecto importante que se debería resolver es: *¿Cuál es el sentido físico de la tétrada (6)?*¹¹³

1.2. Método de Giampieri

Luego del éxito de NJA frente a la generación de soluciones rotantes, la comunidad científica intentó comprender cómo, cuándo y el porqué este ambiguo ansatz trabajaba como lo hacía. Hasta la fecha no existe una justificación satisfactoria ante estas cuestiones.

En 1990, veintiséis años después de la publicación de las ideas de Newman y Janis, un investigador italiano del *California Institute of Technology* llamado Giacomo Giampieri, envió un ensayo a la *Gravity Research Foundation* con una curiosa y nueva forma de “derivar” la métrica de Kerr a partir de la solución de Schwarzschild similar a las ideas de Newman y Janis, salvo algunos aspectos, como veremos a lo largo de este desarrollo.

Como vimos en la sección anterior, NJA trabaja directamente con las tétradas nulas. Contrario a estas ideas, el método de Giampieri ataca el problema directamente sobre la métrica, como consecuencia de ello él tiene la necesidad de embeber el espaciotiempo dentro de un espacio ambiente complejo de cinco dimensiones.

Similar a NJA, Giampieri comienza con la métrica de Schwarzschild escrita en la carta coordenada de Eddington-Finkelstein (u, r, θ, ϕ) descrita en (3); a partir de esta, permite que las coordenadas (u, r) adopten valores complejos, de tal suerte que tomando el complejo conjugado de r en algunos términos de forma específica, se obtiene la métrica

¹¹³ Un nuevo acercamiento que busca resolver estos problemas subyacentes en NJA fue desarrollado por Visser y Del Rajan en ¹¹⁴.

$$\mathcal{G}_s = \left[1 - m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \right] du \otimes du + 2 du \otimes dr - r\bar{r}(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi), \quad (11)$$

donde nuevamente \bar{r} denota el complejo conjugado de r . Lo siguiente será realizar una rotación compleja de coordenadas similar a la efectuada en NJA (ver (7)), salvo que ahora introduciremos una nueva coordenada real θ^* , llegando a una transformación de la forma

$$\begin{aligned} u_R &= u - ia \cos \theta^*, \\ r_R &= r + ia \cos \theta^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Comentario 1.5: En este paso se puede evidenciar el embebimiento realizado por Giampieri en un espaciotiempo complejo de cinco dimensiones al introducir esta nueva variable real θ^* .

Sustituyendo esta rotación compleja en la métrica (11), se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta^*} \right) du_R \otimes du_R + 2 du_R \otimes dr_R + \frac{4mri a \sin \theta^*}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta^*} du_R \otimes d\theta^* \\ &\quad - 2ia \sin \theta^* d\theta^* \otimes dr_R + \left(1 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta^*} \right) a^2 \sin^2 \theta^* d\theta^* \otimes d\theta^* \\ &\quad - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta^*) (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \end{aligned} \quad (13)$$

En este siguiente paso es donde radica el ansatz que utiliza Giampieri en su método, el cual consiste en definir

$$i \frac{d\theta^*}{\sin \theta^*} = d\phi, \quad (14)$$

producto de la sustitución

$$\theta^* = \theta. \tag{15}$$

Al inyectar este ansatz en la métrica (13), se obtiene automáticamente la solución de Kerr descrita por (10).

Giampieri en su artículo argumenta que su método es mucho más simple que el efectuado por Newman y Janis, debido a que este no involucra el uso de tétradas nulas, razón por la cual evita la introducción de una estructura espinorial extra sobre la variedad Lorentziana en la cual se cimentan todos estos métodos ¹¹⁵.

Comentario 1.6: Irónicamente, este nuevo método no recibió la atención o el impacto esperado por parte de la comunidad científica, a diferencia de NJA. Actualmente, existen muy pocos trabajos donde hacen mención al trabajo de Giampieri, verbigracia ¹¹⁶.

Comentario 1.7: En 2016, Harold Erbin realiza una generalización de este método para ciertas geometrías diferentes a la de Schwarzschild ¹¹⁷.

Comentario 1.8: También en el 2016, Matt Visser y su estudiante Del Rajan en su tesis de maestría desarrollan un método similar al de Giampieri salvo que, según argumentan ellos, es mucho más rápido de calcular ¹¹⁸. Adicionalmente, en este mismo trabajo demostraron que existe una íntima relación entre el método de Giam-

¹¹⁵ Giampieri 1990; Robert Geroch: *Spinor structure of space-times in general relativity. I.* En: *Journal of Mathematical Physics* 9.11 (1968), págs. 1739-1744

¹¹⁶ Erbin 2016

¹¹⁷ ibíd.

¹¹⁸ Rajan 2016

perri y NJA. Para establecer esta relación ellos hallaron una forma alternativa de realizar este método evitando la introducción de una dimensión extra.

Tétrada oculta

Como mencionamos en el comentario anterior, existe una íntima relación entre NJA y el método de Giampieri. El puente que conecta estos dos métodos surge en la existencia de una tétrada oculta en el proceso realizado por Newman y Janis que no mencionan en su trabajo original. No fue hasta el 2016 que se supo de su verdadera importancia ¹¹⁹.

Recordemos la tétrada nula compleja para la solución de Schwarzschild escrita en las coordenadas de Eddington-Filkenstein (5), donde observamos que \mathbf{W} corresponde al complejo conjugado de \mathbf{N} . El siguiente paso consistió en permitir que la coordenada radial pueda tomar valores complejos y complexificar algunas coordenadas de forma totalmente arbitraria, obteniendo la tétrada (6), de tal suerte que nuevamente \mathbf{W} corresponde al complejo conjugado de \mathbf{N} ; luego, efectuamos la rotación compleja de coordenadas (7), lo cual implicó la transformación (8) y obtuvimos (9). Estrictamente hablando esto no es cierto, si efectuásemos estas transformaciones sobre (6), en realidad obtendríamos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_R &= \partial_{u_R}, \\
 \mathbf{M}_R &= \partial_{u_R} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m r_R}{r_R^2 + a^2 \cos^2 \theta_R} \right) \partial_{r_R}, \\
 \mathbf{N}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}(r_R + ia \cos \theta_R)} \left(\partial_{\theta_R} + ia \sin \theta_R (\partial_{u_R} - \partial_{r_R}) + \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right), \\
 \mathbf{W}_R &= \frac{1}{\sqrt{2}(r_R - ia \cos \theta_R)} \left(\partial_{\theta_R} + ia \sin \theta_R (\partial_{u_R} - \partial_{r_R}) - \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right),
 \end{aligned} \tag{16}$$

¹¹⁹ Rajan 2016

donde W_R ya no corresponde al complejo conjugado de N_R . Esta es la *tétrada oculta*, la cual no aparece en el trabajo original de Newman y Janis, ni en los trabajos posteriores realizados por la comunidad científica. Usualmente lo que se hacía era pasar por alto esta tétrada y seguir directamente a (9).

Como mencionan Newman y Janis, parte del *ansatz* consiste en *siempre* mantener a W como el complejo conjugado de N , lo que desde una perspectiva matemáticamente estricta atribuye un paso extra a este procedimiento. Por tanto, al aplicar la transformación compleja de coordenadas (7) a (6), nos lleva realmente a (16); lo que implica que esta tétrada oculta no generará a la solución de Kerr ¹²⁰. Por el contrario, produce algo que no es una tétrada nula.

Por último, este paso extra consistirá en cambiar el signo positivo de $ia \sin \theta_R (\partial_{u_R} - \partial_{r_R})$ en la componente W_R de la tétrada oculta, para que sea negativo y así corresponda al complejo conjugado de N_R , añadiendo así aún más arbitrariedades a NJA.

1.3. Método de Matt Visser y Del Rajan

Desde su publicación, NJA ha generado varias discusiones y debates con respecto a cómo deberíamos considerar la ideas de Newman y Janis, ¿puede este procedimiento llegar a considerarse un algoritmo, un *ansatz* o simplemente un truco aleatorio sin ningún significado físico profundo? A pesar de no responder a esta cuestión, en el 2017 el investigador del instituto de matemáticas y estadística de la *Victoria University of Wellington* Matt Visser, junto con su estudiante doctoral Del Rajan, idearon una variación de NJA la cual reduce el tradicional procedimiento de cuatro pasos (ver sección 1.1) a una forma más simple, la cual consta de sólo dos ¹²¹.

¹²⁰ Para ser más precisos, en realidad no generará a la versión complexificada de la solución de Kerr.

¹²¹ Rajan y Visser 2017

Similar al método de Giampieri, ellos sólo trabajan sobre el tensor métrico, evitando así introducir tétradas nulas en su procedimiento. Otra característica es la interacción entre las coordenadas oblatas esferoidales y las cartesianas, motivado a través de la forma “cartesiana” de Kerr-Schild en la solución de Kerr.

En coordenadas cartesianas, la solución de Schwarzschild se puede llevar a la forma de Kerr-Schild, descrita por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2m}{r} l_{\mu} l_{\nu}, \quad (17)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico de Minkowski con signatura +2 y l_{μ} corresponden a la congruencia de geodésicas nulas radiales

$$l_{\mu} = (1; \hat{r}) = \left(1; \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = (1; \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (18)$$

La clave para ir desde la geometría de Schwarzschild a la de Kerr se divide en dos pasos:

1. Reemplazar

$$l_{\mu} = (1; \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \longrightarrow (1; \sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') = l'_{\mu} \quad (19)$$

2. Reemplazar

$$\frac{2m}{r} \longrightarrow m \left(\frac{1}{r' + ia \cos \theta'} + \frac{1}{r' - ia \cos \theta'} \right) = \frac{2mr'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'}. \quad (20)$$

Producto de efectuar estos dos pasos, la métrica (17) se transforma en

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} l_{\mu} l_{\nu}, \quad (21)$$

donde hemos omitido las primas por simplicidad. Como podemos observar, esta métrica corresponde al espaciotiempo de Kerr en la forma cartesiana de Kerr-Schild ¹²².

¿Por qué esta variación de NJA funciona?

Como vimos, en este procedimiento involucramos dos mapeos: el primero sobre el covector nulo $l_{\mu} \rightarrow l'_{\mu}$ y el segundo sobre la función escalar $f(r) \rightarrow f(r', \theta')$ en la métrica en la forma de Kerr-Schild $g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}$ ¹²³, producto de ello se podría decir:

- Con respecto a el mapeo (19), es curioso en su manifiesta simplicidad. Para pasar de las geodésicas nulas radiales de Schwarzschild l_{μ} a las de Kerr l'_{μ} aparentemente consiste en omitir las primas implicadas en este mapeo y simplemente interpretar las coordenadas polares esféricas en términos de las esferoidales oblatas. En las subyacentes coordenadas cartesianas, el mapeo (19) adopta la forma

$$\left(1; \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \rightarrow \left(1; \frac{xr' + ay}{r'^2 + a^2}, \frac{yr' - ax}{r'^2 + a^2}, \frac{z}{r'}\right), \quad (22)$$

tal que no implica una transformación de coordenadas, por el contrario, es un cambio genuino en los covectores nulos.

¹²² Wiltshire, Visser y Scott 2009.

¹²³ Ellos no *derivan* estos mapeos, sólo los *postulan* ¹²⁴.

- Por otro lado, en el mapeo correspondiente a la función escalar (20) observamos que una pista es el bien conocido comportamiento del potencial $2m/r$ en Schwarzschild, bajo un desplazamiento complejo de su fuente gravitacional (para más detalles consultar ¹²⁵). Formalmente hablando, el hecho de desplazar la fuente en Schwarzschild ia veces a lo largo del eje imaginario \hat{z} , implica en coordenadas esferoidales el mapeo

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{r_d} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(r'^2 + a^2) \sin^2 \theta' + (r' \cos \theta' - ia)^2}} = \frac{1}{r' - ia \cos \theta'}. \quad (23)$$

Otra pista proviene del hecho que, para métricas de las forma Kerr-Schild $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f(r, \theta) l_\mu l_\nu$ donde l_μ es una congruencia de geodésicas libres de cizalladura, el tensor de Ricci es lineal en la función escalar $f(r, \theta)$ ¹²⁶. Con esto en mente podemos superponer los dos desplazamientos posibles a lo largo del eje imaginario \hat{z} , es decir $\pm ia\hat{z}$, así

$$\frac{1}{r} \rightarrow \frac{1}{2r_d} + \frac{1}{2\bar{r}_d} = \frac{1}{2(r' + ia \cos \theta')} + \frac{1}{2(r' - ia \cos \theta')} = \frac{r'}{r'^2 + a^2 \cos^2 \theta'}. \quad (24)$$

El cual corresponde a la función escalar en la métrica (21).

Comentario 1.10: La transición de Schwarzschild a Reissner-Nordström en su función escalar corresponde a

¹²⁵ Menahem M Schiffer y col.: *Kerr geometry as complexified Schwarzschild geometry*. En: *Journal of Mathematical Physics* 14.1 (1973), págs. 52-56; Nilton O Santos: *Newtonian potential and the complex space*. En: *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* 14.9 (1975), págs. 327-329

¹²⁶ Schiffer y col. 1973

$$\frac{2m}{r} \longrightarrow \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2},$$

y para la transición de Reissner-Nordström a Kerr-Newman a

$$\frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \longrightarrow \frac{m}{r_d} + \frac{m}{\bar{r}_d} + \frac{q^2}{r_d \bar{r}_d}.$$

Como conclusión, vemos que incluso en esta versión reducida de NJA existen ciertas arbitrariedades subyacentes en la transición de las congruencias geodésicas nulas en Schwarzschild a las de Kerr, dado que la deformación de coordenadas esféricas polares hacia las esferoidales oblatas es técnicamente simple, pero bastante misteriosa (ver (19)).

1.4. Posibles explicaciones al “formalismo”

Como hemos visto, desde la publicación de NJA en 1964, la comunidad científica ha intentado explicar la efectividad de este por medio de distintos métodos alternativos, o intentando vislumbrar alguna estructura fisicomatemática profunda que nos ayude en nuestra búsqueda del porqué, cómo y cuándo funciona. En esta sección haremos una pequeña revisión bibliográfica con respecto a las explicaciones parciales más importantes a NJA que se han escrito desde su publicación.

Ezra Theodore Newman

Algunos años después, y en vista de que su ansatz había sido recibido por la comunidad científica como un simple truco sin ninguna implicación física profunda, Newman utilizó el hecho de que las geometrías de Schwarzschild y Kerr tienen intrínsecamente un espacio de Mikowski bien definido sobre ellos, con lo cual demostró que estos pueden ser vistos como “rebanadas reales” de un espaciotiempo

de Mikowski complejo asociado (cada diferente valor del parámetro rotacional a en Kerr puede ser visto como una rebanada diferente. Naturalmente la rebanada $a = 0$ corresponderá a la solución de Schwarzschild) ¹²⁷. En otras palabras, Newman proporcionó una explicación parcial para NJA desde la perspectiva de un espaciotiempo de Minkowski complexificado.

Como es bien conocido, todo miembro de la familia de soluciones para Kerr puede ser llevado a la forma de Kerr-Shild ¹²⁸

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda l^*_{\mu} l^*_{\nu}, \quad (25)$$

donde λ es una función escalar y l^*_{μ} corresponde a un vector nulo degenerado. Lo que nos interesa es demostrar que esta puede considerarse como una familia embebida en un espacio de Minkowski complejo. Para esto podemos considerar el espaciotiempo Minkowskiano complexificado $\mathbb{M}^{\mathbb{C}}$ cubierto por una carta compleja, donde $z^{\mu} = x^{\mu} + iy^{\mu}$ corresponden a las etiquetas en sus coordenadas, de tal que suerte que $x^{\mu}, y^{\mu} \in \mathbb{R}$ ¹²⁹, y dotado con el tensor métrico complejo

$$\mathcal{G} = \eta_{\mu\nu} dz^{\mu} \otimes dz^{\nu}, \quad (26)$$

donde todas las transformaciones de coordenadas compatibles con este espacio complejo deben ser holomórficas, y tal que su grupo de movimiento corresponda al grupo de Poincaré complexificado. Así pues, el espacio Mikowskiano real puede considerarse como un subespacio de $\mathbb{M}^{\mathbb{C}}$, donde la métrica inducida es la parte real

¹²⁷ Newman 1973

¹²⁸ Kerr 2007

¹²⁹ Este espacio complexificado necesariamente debe pertenecer a un espacio real de dimensión ocho ¹³⁰.

de (26)¹³¹ .

Para comenzar, escribamos la métrica de Minkowski real en las coordenadas de Eddigton-Filkenstein (u, r, θ, ϕ) , dada por

$$\eta = du \otimes du + 2 du \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \quad (27)$$

Con base en esto podemos construir un espacio de Minkowski complejo siempre y cuando permitamos que *todas* las coordenadas adquieran una estructura compleja¹³². Lo siguiente será aplicar una transformación de coordenadas similar -pero no equivalente- a (7), de la forma

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u} + ia \cos \theta, & r &= \tilde{r} - ia \cos \theta, \\ \cos \theta &= \frac{\tilde{r} \cos \tilde{\theta} - ia}{\tilde{r} - ia \cos \tilde{\theta}}, & \cos 2(\phi - \tilde{\phi}) &= \frac{\tilde{r} - a^2}{\tilde{r} + a^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Producto de ello, la métrica (27) adopta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} &= d\tilde{u} \otimes d\tilde{u} + 2 d\tilde{u} \otimes d\tilde{r} - 2a \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{r} \otimes d\tilde{\phi} - a^2 \sin^4 \tilde{\theta} d\tilde{\phi} \otimes d\tilde{\phi} \\ &\quad - (\tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \tilde{\theta})(d\tilde{\theta} \otimes d\tilde{\theta} + \sin^2 \tilde{\theta} d\tilde{\phi} \otimes d\tilde{\phi}). \end{aligned} \quad (29)$$

Si imponemos que estas coordenadas tildadas $(\tilde{u}, \tilde{r}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ estén restringidas a tomar sólo valores reales, luego la métrica (29) corresponderá al espacio real de Minkowski, y expresado en la misma carta coordenada que la solución final del procedimiento

¹³¹ A pesar de todo esto, Newman sólo consideró en su tratamiento la parte real de $\mathbb{M}^{\mathbb{C}}$, sobre la cuál actuarán transformaciones complejas de coordenadas análogas a la versión original de NJA descritas en la sección 1.1.

¹³² Flaherty 1976

original de Newman-Janis (ver ecuación (10)).

Por otro lado, la función escalar λ en (25) correspondiente a Schwarzschild es

$$\lambda = \frac{2m}{r}. \quad (30)$$

Para obtener la función escalar ad hoc a la solución de Kerr, es indispensable complejificar a (30) como

$$\lambda = \frac{2m}{r} \longrightarrow m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right), \quad (31)$$

para luego efectuar la transformación compleja de coordenadas (28). Resultado de ello, obtenemos

$$\lambda = m \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) \longrightarrow \frac{2m\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \tilde{\theta}}, \quad (32)$$

que corresponde a la función escalar para Kerr ¹³³. Como vemos, la “rebanada real” $a = 0$ en (32) corresponderá a (30). En conclusión, podemos ver que, dada la geometría Minkowskiana intrínseca en las soluciones de Schwarzschild y Kerr, estos espacios se pueden interpretar como “rebanadas reales” embebidas en un espacio-tiempo de Mikowski complejo (26).

Con base en este procedimiento, se podría concluir que las anteriores transformaciones tienen la característica de relacionar diferentes métricas en la forma de Kerr-Schild y facilitarnos una explicación con respecto al porqué del éxito de NJA. Así mismo, las ideas de Newman proporcionan una interpretación geométrica subya-

¹³³ Wiltshire, Visser y Scott 2009.

cente en el espaciotiempo complejo de Mikowski. Sin embargo, al igual que la explicación dada por Talbot en 1969 ¹³⁴, tienen el problema en la interpretación de la complexificación de algunas coordenadas, específicamente en la forma totalmente arbitraria en que complexifican la coordenada radial en (31), dado que existen diversas formas de hacerlo, pero sólo la descrita en esa ecuación nos proporcionará la función escalar deseada (32), es decir, Kerr.

Adicional a este problema, se encuentra la transformación involucrada en esta forma de complexificar a la coordenada radial, ya que $r \rightarrow \bar{r}$ no constituye una transformación holomorfa. Esta transformación junto con la arbitrariedad descrita en el párrafo anterior, conforman los principales problemas en la explicación de Newman del porqué NJA funciona.

Al analizar todas estas cuestiones inherentes en esta explicación, naturalmente surge la pregunta: *¿Existe una forma de relacionar el espacio complexificado de Schwarzschild con el espacio complexificado de Kerr a través de una transformación holomorfa?* Como se menciona en ¹³⁵, Newman y Winicour a través de una serie de correspondencias privadas argumentan que tal transformación no existe.

Comentario 1.11: Un argumento que complementa la no existencia de esta transformación holomorfa es proporcionada por Visser y Del Rajan en 2016 ¹³⁶. Supongamos que tal transformación entre Schwarzschild y Kerr complexificados existe; luego, sabemos que la solución de Schwarzschild tiene tres vectores de Killing reales linealmente independientes (ξ, ς, γ) ¹³⁷. Así pues, bajo una transformación holomor-

¹³⁴ Talbot 1969

¹³⁵ Flaherty 1976

¹³⁶ Rajan 2016

¹³⁷ Charles W Misner, Kip S Thorne y John Archibald Wheeler: *Gravitation*. Macmillan, 1973

fica, estos vectores de Killing deberían ser mapeados hacia el espacio complejo de Kerr, es decir que estos nuevos tres vectores de Killing complejos adoptarían la forma $(\xi_1 + i\xi_2, \varsigma_1 + i\varsigma_2, \gamma_1 + i\gamma_2)$.

Debido a que (ξ, ς, γ) son vectores reales linealmente independientes, esto implica que los vectores $(\xi_1, \varsigma_1, \gamma_1)$ también lo serán en Kerr. Sin embargo, si tomamos la parte real de este espacio complexificado obtendremos naturalmente la solución de Kerr; luego esto conlleva a una contradicción dado que existirían tres vectores de Killing linealmente independientes en este espaciotiempo, lo cual es falso, dado que sabemos que esta geometría contiene en realidad dos ¹³⁸. Como vemos, esta gran contradicción nos dice que tal transformación holomórfica efectivamente no podría existir.

En conclusión, la pista sobre una estructura fisicomatemática profunda en el ansatz de Newman-Janis aún sigue ausente.

Samuel Picton Drake y Peter Szekeres

Contrario a la creencia de la comunidad científica con respecto a la “mera casualidad” en qué consiste NJA, Drake y Szekeres demostraron parcialmente el porqué este ansatz es exitoso en obtener la solución de Kerr-Newman removiendo algunas ambigüedades presentes en la versión original de Newman-Janis ¹³⁹. Adicional a ello, demostraron tres teoremas bastante importantes en la búsqueda de la explicación de NJA, como veremos enseguida. En su trabajo, los tres objetivos principales de Drake y Szekeres son

- Especificar precisamente lo que es el ansatz de Newman-Janis.

¹³⁸ Wiltshire, Visser y Scott 2009.

¹³⁹ Drake y Szekeres 2000

- Entender bajo qué circunstancias y bajo qué escogencia en la complejificación de las coordenadas, este ansatz es exitoso en generar una nueva solución de las ecuaciones de Einstein partiendo de una vieja.
- Explorar la posibilidad de generalizarlo para una solución semilla arbitraria con el objetivo de generar soluciones interiores para un modelo de fluido perfecto en las ecuaciones de Einstein.

Para lograr sus objetivos, ellos describieron NJA en cinco pasos y de una forma generalizada, así

Primer paso: Escribir la solución semilla estática en coordenadas nulas $\{u, r, \theta, \phi\}$

$$\mathcal{G} = e^{2\Phi(r)} du \otimes du + e^{\Phi(r)+\lambda(r)} du \otimes dr - r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \quad (33)$$

Segundo paso: Expresar el tensor métrico (33) en términos de una tétrada nula

$$(\mathcal{G})^{\mu\nu} = (\mathbf{L})^\mu(\mathbf{N})^\nu + (\mathbf{N})^\mu(\mathbf{L})^\nu - (\mathbf{M})^\mu(\mathbf{W})^\nu - (\mathbf{W})^\mu(\mathbf{M})^\nu, \quad (34)$$

donde \mathbf{W} es el complejo conjugado de \mathbf{N} . Adicionalmente, estas tétradas satisfacen la condición de ortonormalidad $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = 1$.

Tercer paso: Extender las coordenadas x^μ a un nuevo conjunto de nuevas coordenadas complejas \tilde{x}^μ , a través de la transformación

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + iy^\mu(x^\sigma), \quad (35)$$

donde $y^\mu(x^\sigma)$ es una función analítica de las coordenadas reales x^σ , y simultánea-

mente consideramos la transformación sobre las componentes de la tétrada $(\mathbf{Z})_a^\mu$ en (34), de la forma

$$(\mathbf{Z})_a^\mu \rightarrow (\tilde{\mathbf{Z}})_a^\mu(\tilde{x}^\sigma, \bar{\tilde{x}}^\sigma), \quad (36)$$

y bajo la única condición que debemos recobrar la vieja tétrada y métrica cuando $\tilde{x}^\sigma = \bar{\tilde{x}}^\sigma$.

Cuarto paso: Una nueva métrica es obtenida a través de la transformación compleja de coordenadas¹⁴⁰

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + i\gamma^\mu(x^\sigma) \quad (37)$$

aplicada a la tétrada $(\tilde{\mathbf{Z}})_a^\mu$ ¹⁴².

Quinto paso: Finalmente, mediante una transformación de coordenadas de la forma

$$u = t + \int g(r) \, dr, \quad \phi = \psi + \int h(r) \, dr, \quad (38)$$

tal que

$$g(r) = -\frac{e^{\lambda(r,\theta)}(\Sigma + a^2 \sin^2 \theta e^{\lambda(r,\theta)+\Phi(r,\theta)})}{e^{\Phi(r,\theta)}(\Sigma + a^2 \sin^2 \theta e^{2\lambda(r,\theta)}), \quad h(r) = -\frac{a e^{2\lambda(r,\theta)}}{\Sigma + a^2 \sin^2 \theta e^{2\lambda(r,\theta)}},$$

¹⁴⁰ La escogencia particular escogida para generar a Kerr-Newman fue $\tilde{x}^\mu = x^\mu + ia \cos \theta (\partial_u - \partial_r)$
¹⁴¹.

¹⁴² Los vectores en la tétrata nula tranforman de la manera usual $(\mathbf{Z})_a^\mu = (\tilde{\mathbf{Z}})_a^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}$.

donde $\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, obtenemos la métrica final ¹⁴³. De manera que podemos reescribir esta nueva métrica en las coordenadas de Boyern-Lindsquit, de tal suerte que el único término fuera diagonal sea la componente $\mathcal{G}_{t\phi}$.

Como vimos, el único paso donde se ha efectuado una ambigüedad ha sido en el paso número tres, específicamente en la transformación (35). Por otro lado, vemos en (38) que la métrica final dependerá de dos potenciales métricos desconocidos e^Φ y e^λ dependientes de las coordenadas (r, θ) , los cuales sólo están restringidos bajo la imposición descrita en este mismo paso.

Con base en la forma general de la métrica final, Drake y Szekeres hallaron lo siguientes tres importantes teoremas:

Teorema 1: El único fluido perfecto generado por NJA es el vacío (es decir, Kerr).

Teorema 2: Las únicas geometrías especialmente algebraicas generadas por NJA son Petrov tipo D.

Teorema 3: El único espaciotiempo algebraicamente especial Petrov tipo D generado a través de NJA con una escalar de Ricci nulo es el espaciotiempo de Kerr-Newman.

Así pues, Drake y Szekeres proporcionan una explicación a NJA evitando algún tipo de complejización en algunas coordenadas. Adicionalmente, enfatizan en el hecho que, mientras NJA es efectivo en la generación de soluciones interiores interpretadas como fluidos rotantes tomando como semilla una solución de fluido perfecto, el ansatz mismo destruye la propiedad de fluido perfecto a la hora de aplicar el límite de no rotación sobre el espaciotiempo final generado por NJA.

¹⁴³ La forma general de esta métrica corresponde a la ecuación (21) en ¹⁴⁴.

Finalmente, vemos que hasta la fecha han pasado aproximadamente sesenta años desde la publicación de la idea seminal propuesta por Newman y Janis; sin embargo, a pesar de buscar varias alternativas y explicaciones tratando a NJA desde diferentes perspectivas, su completo entendimiento es aún ajeno a todos nosotros. A pesar de ello, en la búsqueda de tales explicaciones se han dejado varios puntos clave que deberían ser resueltos para poder explicar el porqué de su funcionamiento, tales como las transformaciones no-holomórficas y las cantidades tensoriales en ciertas tétradas que no se entienden muy bien por medio de las herramientas matemáticas que disponemos hoy día, entre otras cuestiones.

De manera que resulta natural pensar en una generalización a NJA que pueda remediar todos estos inconvenientes, al mismo tiempo que nos permita ver su funcionamiento de forma más global. Como hemos visto, han existido varios intentos en la búsqueda de tal objetivo. Quizás la persona que lo ha logrado de forma contundente ha sido el investigador turco Mustapha Azreg, quien en 2014 publica una serie de artículos con una forma totalmente nueva y general de emplear NJA ¹⁴⁵. Sin embargo, su forma modificada de emplearlo posee el don de la efectividad, más no el de la claridad, dado que funciona muy bien, *evita* todos los inconvenientes descritos en líneas anteriores, pero se reduce a un algoritmo con una serie de pasos algebraicos que dejan un poco oculto la estructura fisicomatemática bajo la cual funciona NJA. Por tal razón, resultaría más conveniente tratar de mirar las ideas de Azreg de una forma que sea mucho más familiar a la relatividad general, es decir, mediante el uso del lenguaje moderno de la geometría diferencial bajo el cual está estructurada toda la gravedad de Einstein. Teoría en la que, como se mencionó en los prelogómenos, se cree actualmente que es la única sobre la cual funciona el *ansatz* de Newman-Janis. Por tal motivo, en el siguiente trataremos esta cuestión.

¹⁴⁵ Azreg-Aïnou 2014a; Azreg-Aïnou 2014b; Azreg-Ainou 20140

2. Perspectiva Geométrica

... algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: 'I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine'.

—Sir Michael Atiyah, *Mathematics in the 20th century* (2001).

En este capítulo se presentarán algunos resultados obtenidos referentes a una forma de realizar el ansatz de Newman-Janis mediante el uso del lenguaje moderno de la geometría diferencial. En esta oportunidad la interpretación física que le proporcionaremos a las soluciones obtenidas será a través del tensor energía-momentum, el cual describirá un fluido anisótropo sin flujo de calor.

2.1. Ansatz de Newman-Janis

A continuación, describiremos el procedimiento empleado en 1964 por Newman y Janis ¹⁴⁶ (salvo por unas pequeñas modificaciones) para “derivar” la métrica de Kerr por medio de un mapeo complejo de coordenadas sobre la solución de Schwarzschild. Lo bosquejaremos a través del lenguaje moderno de la geometría diferencial, y empleando un espaciotiempo esféricamente simétrico lo suficientemente general para generar una métrica maestra, la cual describirá una solución estacionaria y axialmente simétrica.

¹⁴⁶ Newman y Janis 1965

Sean (t, r, θ, φ) las coordenadas en un punto p sobre una variedad \mathcal{M} , y $(\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\varphi)$ los elementos de la base del espacio tangente a la misma $T_p(\mathcal{M})$. Así, tenemos un tensor métrico general $\mathcal{G}_0 \in T_p^*(\mathcal{M})$, dado por

$$\mathcal{G}_0 = G(r) dt \otimes dt - \frac{1}{F(r)} dr \otimes dr - H(r)(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi). \quad (39)$$

En lo que resta del trabajo usaremos esta métrica como solución semilla, a la cual le aplicaremos NJA. Para ello, primero realizaremos el mapeo \mathcal{J}

$$\mathcal{J} : (t, r, \theta, \phi) \longrightarrow (u, r, \theta, \phi), \quad (40)$$

el cual nos conduce de coordenadas esféricas a las coordenadas salientes de Eddington-Filkenstein (u, r, θ, ϕ) , a través de la relación

$$u = t - \int \frac{dr}{\sqrt{FG}}. \quad (41)$$

Todo esto está definido de tal suerte que el mapeo \mathcal{J} induce el pullback \mathcal{J}^*

$$\mathcal{J}^* : T_{\mathcal{J}(p)}^*(\mathcal{M}') \mapsto T_p^*(\mathcal{M}), \quad (42)$$

el cual lleva a la métrica \mathcal{G}_S hacia \mathcal{G}_0 , i. e., $\mathcal{J}^* \mathcal{G}_S = \mathcal{G}_0$ (ver figura 1), luego la métrica (39) puede ser interpretada como la acción del mapeo \mathcal{J}^* sobre $\mathcal{G}_S \in T_{\mathcal{J}(p)}^*(\mathcal{M}')$, dada por

$$\mathcal{G}_S = \mathbf{E}^t \otimes \mathbf{E}^t - \mathbf{E}^r \otimes \mathbf{E}^r - \mathbf{E}^\theta \otimes \mathbf{E}^\theta - \mathbf{E}^\phi \otimes \mathbf{E}^\phi, \quad (43)$$

donde los elementos vectoriales \mathbf{E}^μ están dados por la tétrada ortonormal

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}^t &\equiv \sqrt{G} \, d u + \frac{d r}{\sqrt{F}}, \\
 \mathbf{E}^r &\equiv \frac{d r}{\sqrt{F}}, \\
 \mathbf{E}^\theta &\equiv \sqrt{H} \, d \theta, \\
 \mathbf{E}^\phi &\equiv \sin \theta \sqrt{H} \, d \phi.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Ahora bien, podemos convertir cualquier espacio vectorial real V en un espacio vectorial complejo $V^{\mathbb{C}}$ formando el conjunto $V \times V$ de todas las parejas $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$, con $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j \in V$ y luego escribir $(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$ como $\mathbf{E}_i + i \mathbf{E}_j$. La multiplicación escalar por números reales se puede extender a números complejos si definimos $i(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j)$, como

$$i(\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = (-\mathbf{E}_j, \mathbf{E}_i) = -\mathbf{E}_j + i \mathbf{E}_i .$$

Con esta definición de $V^{\mathbb{C}}$, este se convierte en un espacio vectorial complejo (para más detalles ver ¹⁴⁷). Por tanto, podemos construir un conjunto de vectores lo cuales forman una base $\{\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{W}\}$ en $T_{p'}(\mathcal{M}')$, definida por¹⁴⁸

¹⁴⁷ Fernando De Felice y Christopher James Seaton Clarke: *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, 1992

¹⁴⁸ Esta nueva forma de definir las tétradas nulas complejas es totalmente equivalente a la forma usual, la cual consiste en resolver un sistema de dieciséis ecuaciones lineales con dieciséis incógnitas.

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} &\equiv \frac{1}{\sqrt{F}} (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_r) = \partial_r, \\
\mathbf{N} &\equiv \frac{\sqrt{F}}{2} (\mathbf{E}_t - \mathbf{E}_r) = \sqrt{\frac{F}{G}} \partial_u - \frac{F}{2} \partial_r, \\
\mathbf{M} &\equiv \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{E}_\theta + i\mathbf{E}_\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{H}} \partial_\theta + \frac{\sqrt{2}i}{2\sin\theta\sqrt{H}} \partial_\phi, \\
\mathbf{W} &\equiv \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{E}_\theta - i\mathbf{E}_\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{H}} \partial_\theta - \frac{\sqrt{2}i}{2\sin\theta\sqrt{H}} \partial_\phi,
\end{aligned}$$

donde esta nueva tétrada consiste en dos vectores reales nulos \mathbf{L} , \mathbf{N} y dos vectores nulos complejos conjugados \mathbf{M} y \mathbf{W} ; así, el producto escalar entre las tétradas satisface las condiciones de ortonormalidad $\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = 0$ y $\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = 1$, usual en el formalismo de las tétradas ortonormales complejas o de Newman-Penrose ¹⁴⁹.

El próximo paso consiste en introducir una rotación a través del mapeo \mathcal{J}_R , el cual conduce a unas coordenadas rotadas $(u_R, r_R, \theta_R, \phi_R)$, dado por

$$\mathcal{J}_R : (u, r, \theta, \phi) \mapsto (u_R, r_R, \theta_R, \phi_R), \tag{45}$$

bajo el requerimiento que u_R y r_R sean complejas; por tanto, esta transformación se puede considerar como una rotación compleja alrededor de los planos θ y ϕ , de la forma

¹⁴⁹ Subrahmanyan Chandrasekhar: *The mathematical theory of black holes*. Vol. 69. Oxford University Press, 1998

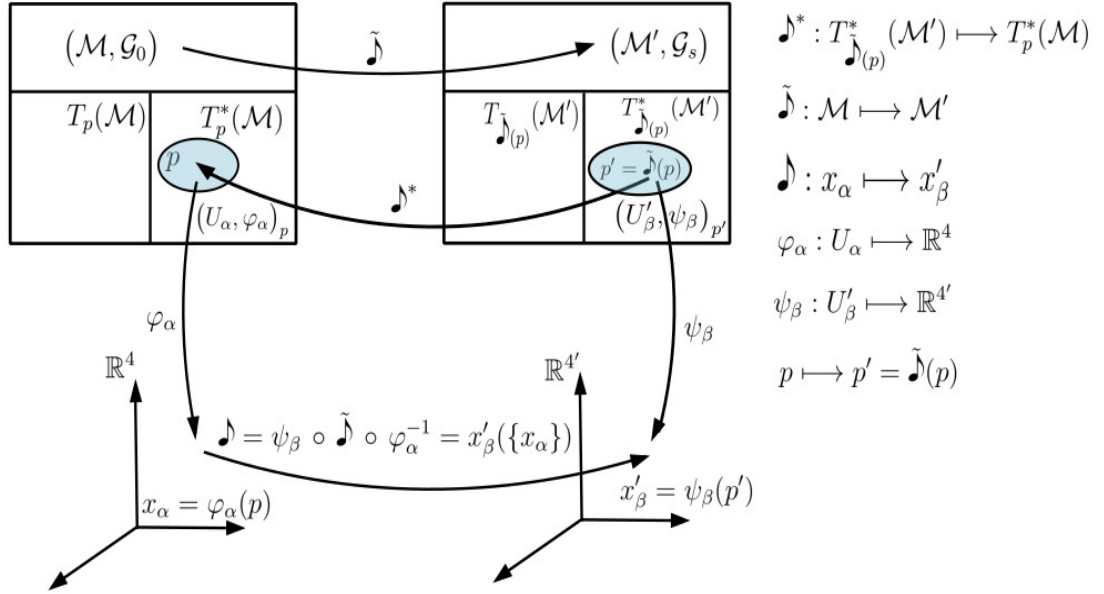


Figura 1. Esquema del pullback $\mathcal{J}^* : T_{\tilde{\mathcal{J}}(p)}^*(\mathcal{M}') \mapsto T_p^*(\mathcal{M})$. Las dos variedades diferenciables $(\mathcal{M}, \mathcal{G}_0)$ y $(\mathcal{M}', \mathcal{G}_s)$, las cuales están dotadas con las cartas coordenadas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_p$ y $(U'_\beta, \psi_\beta)_{p'}$ que contienen a p y p' , son mapeadas a través de φ_α y ψ_β hacia las coordenadas locales de p ($x_\alpha = \{t, r, \theta, \phi\}$) y p' ($x'_\beta = \{u, r, \theta, \phi\}$), respectivamente. Luego ellos, más el pullback \mathcal{J}^* y el mapeo $\tilde{\mathcal{J}}$, inducen el cambio de coordenadas $\mathcal{J} : (t, r, \theta, \phi) \rightarrow (u, r, \theta, \phi)$.

$$\begin{aligned}
 u_R &= u - ia \cos \theta, \\
 r_R &= r + ia \cos \theta, \\
 \theta_R &= \theta, \\
 \phi_R &= \phi,
 \end{aligned} \tag{46}$$

y tal que induce induce la transformación sobre los potenciales métricos, dada por¹⁵⁰

¹⁵⁰ Para ver más detalles con respecto a estas tres funciones $\{A(r, \theta), B(r, \theta), \Psi(r, \theta)\}$, ver ¹⁵¹.

$$\{G(r), F(r), H(r)\} \longrightarrow \{A(r, \theta, a), B(r, \theta, a), \Psi(r, \theta, a)\}. \quad (47)$$

El mapeo \mathcal{J}_R naturalmente induce el push-forward $(\mathcal{J}_R)_*$ (ver figura 2)

$$(\mathcal{J}_R)_* : T_{p'}(\mathcal{M}') \mapsto T_{\mathcal{J}_R(p')}(\mathcal{M}''), \quad (48)$$

por consiguiente se puede verificar que los vectores de la base $\xi \equiv \{\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{W}\} \in T_{p'}(\mathcal{M}')$ son mapeados por medio de \mathcal{J}_R en los elementos vectoriales $\xi_R \equiv \{\mathbf{L}_R, \mathbf{N}_R, \mathbf{M}_R, \mathbf{W}_R\} \in T_{\mathcal{J}_R(p')}(\mathcal{M}'')$, de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_R &= \partial_{r_R}, \\ \mathbf{N}_R &= \sqrt{\frac{B}{A}} \partial_{u_R} - \frac{B}{2} \partial_{r_R}, \\ \mathbf{M}_R &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\Psi}} \left(ia \sin \theta_R \partial_{u_R} - ia \sin \theta_R \partial_{r_R} + \partial_{\theta_R} + \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right), \\ \mathbf{W}_R &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\Psi}} \left(-ia \sin \theta_R \partial_{u_R} + ia \sin \theta_R \partial_{r_R} + \partial_{\theta_R} - \frac{i}{\sin \theta_R} \partial_{\phi_R} \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Como podemos observar, ξ_R es una tétrada nula compleja, la cual consiste en dos vectores reales nulos $\mathbf{L}_R, \mathbf{N}_R$ y dos vectores nulos complejos conjugados $\mathbf{M}_R, \mathbf{W}_R$; por tanto, nuevamente el producto escalar entre tétradas satisface la condición de ortonormalidad $\mathbf{L}_R \cdot \mathbf{L}_R = \mathbf{M}_R \cdot \mathbf{M}_R = \mathbf{N}_R \cdot \mathbf{N}_R = \mathbf{L}_R \cdot \mathbf{M}_R = \mathbf{M}_R \cdot \mathbf{N}_R = 0$ and $\mathbf{L}_R \cdot \mathbf{N}_R = -\mathbf{M}_R \cdot \mathbf{W}_R = 1$.

Además

$$\eta_R^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

son las componentes de un tensor métrico específico \mathcal{G}_R respecto a las tétradas nulas complejas ¹⁵²¹⁵³, i.e.,

$$(\mathcal{G}_R)_{ij} = (\mathbf{L}_R)_i(\mathbf{N}_R)_j + (\mathbf{N}_R)_i(\mathbf{L}_R)_j - (\mathbf{M}_R)_i(\mathbf{W}_R)_j - (\mathbf{W}_R)_i(\mathbf{M}_R)_j. \quad (50)$$

En consecuencia, el tensor métrico \mathcal{G}_R puede ser expresado en términos de las bases reales dx_R^μ como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R = & Adu_R \otimes du_R + 2\sqrt{\frac{A}{B}}du_R \otimes dr_R + 2a \sin^2 \theta_R \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) du_R \otimes d\phi_R \\ & - 2a \sin^2 \theta_R \sqrt{\frac{A}{B}} dr_R \otimes d\phi_R - \Psi d\theta_R \otimes d\theta_R \\ & + \frac{\sin^2 \theta_R}{B} \left[a^2 \sin^2 \theta_R (AB - 2\sqrt{AB}) - B\Psi \right] d\phi_R \otimes d\phi_R, \end{aligned} \quad (51)$$

donde $A = A(r, \theta, a)$, $B = B(r, \theta, a)$ y $\Psi = \Psi(r, \theta, a)$ son funciones aún desconocidas. Adicionalmente, vemos que el tensor métrico (51) corresponde a una generalización a la solución final obtenida por Newman y Janis (ver 10).

¹⁵² Stephani y col. 2009.

¹⁵³ Notemos que las coordenadas del espaciotiempo se mantienen reales, como en η_R^{ij} . Solamente *algunas* de las componentes de las tétradas tratadas anteriormente son permitidas que pertenezcan al conjunto de los números complejos \mathbb{C} , la variedad y la métrica sobre las cuales se cimienta todo esto siguen siendo reales ¹⁵⁴.

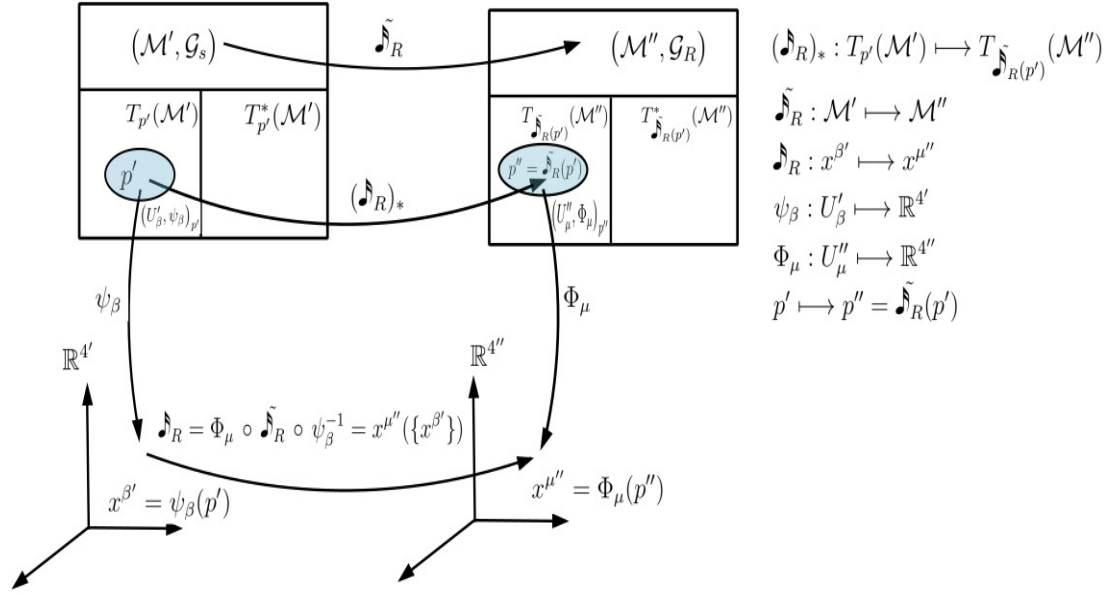


Figura 2. Esquema del pushforward $(\mathcal{J}_R)_* : T_{p'}(\mathcal{M}') \mapsto T_{\mathcal{J}_R(p')}(\mathcal{M}'')$. Las dos variedades diferenciables $(\mathcal{M}', \mathcal{G}_S)$ y $(\mathcal{M}'', \mathcal{G}_R)$, las cuales están dotadas con las cartas coordenadas $(U'_\beta, \psi_\beta)_{p'}$ y $(U''_\mu, \Phi_\mu)_{p''}$ que contienen a p' y p'' , son mapeadas a través de ψ_β y Φ_μ hacia las coordenadas locales de p' ($x^{\beta'} = \{u, r, \theta, \phi\}$) y p'' ($x^{\mu''} = \{u_R, r_R, \theta_R, \phi_R\}$), respectivamente. Luego ellos, más el pushforward $(\mathcal{J}_R)_*$ y el mapeo $\tilde{\mathcal{J}}_R$, inducen el cambio de coordenadas $\mathcal{J}_R : (u, r, \theta, \phi) \mapsto (u_R, r_R, \theta_R, \varphi_R)$.

Finalmente, introducimos las coordenadas de Boyern-Lindquist, de tal suerte que minimicen el número de términos fuera de la diagonal en (51), e implementando el mapeo \mathcal{J}_{BL} el cual nos transporta a unas coordenadas (T, R, Θ, Φ)

$$\mathcal{J}_{BL} : (u_R, r_R, \theta_R, \phi_R) \longrightarrow (T, R, \Theta, \Phi), \quad (52)$$

a través de la transformación

$$d u_R = d T - \lambda(R) d R, \quad d \phi_R = d \Phi - \chi(R) d R, \quad (53)$$

donde¹⁵⁵

$$\lambda(R) = \frac{a^2\sqrt{G} + \sqrt{FH}}{(a^2 + FH)\sqrt{G}}R, \quad \chi(R) = \frac{a}{FH + a^2}. \quad (54)$$

Comentario 2.1: Para evitar funciones multievaluadas, las funciones $\{\lambda, \chi\}$ deben depender sólo de la coordenada r y, así, asegurar la integrabilidad de (53). En nuestro caso se comprueba que efectivamente las funciones en (54) aseguran la integrabilidad global de las coordenadas $u_R(t, r)$ y $\phi_R(t, r)$. El método usual de NJA falla, en general, en mostrar a (51) a través de las coordenadas de Boyern-Lindquist, dado que las funciones $\{A, B, \Psi\}$ son fijadas a través de un tipo de complejificación de la coordenada r , y no quedan parámetros o funciones libres sobre los que actuar para lograr la transformación hacia estas coordenadas¹⁵⁶. Como producto de ello, surgen soluciones con varios problemas físicos en su interpretación, verbigracia¹⁵⁷.

La transformación \mathcal{J}_{BL} induce el pullback $(\mathcal{J}_{BL})^*$ (ver figura 3), el cual nos conduce finalmente a la métrica rotante

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & \frac{(a^2 \cos^2 \theta + FH)G\Psi}{(a^2 \cos^2 \theta \sqrt{G} + \sqrt{FH})^2} dT \otimes dT - \frac{\Psi}{FH + a^2} dR \otimes dR - \Psi d\Theta \otimes d\Theta \\ & - \Psi \sin^2 \Theta \left[1 + \frac{a^2 \sin^2 \Theta \sqrt{G} (2\sqrt{FH} - FH\sqrt{G} + a^2 \cos^2 \Theta \sqrt{G})}{(a^2 \cos^2 \Theta \sqrt{G} + \sqrt{FH})^2} \right] d\Phi \otimes d\Phi \\ & - \frac{2(F\sqrt{G} - \sqrt{F})a \sin^2 \Theta \Psi H \sqrt{G}}{(a^2 \cos^2 \theta \sqrt{G} + \sqrt{FH})^2} dT \otimes d\Phi, \end{aligned} \quad (55)$$

o escrita en una forma parecida a la solución de Kerr

¹⁵⁵ Para ver lo detalles del cómo se obtuvo estos valores explícitos para $\lambda(R)$ y $\chi(R)$, ver el apéndice 3.

¹⁵⁶ Azreg-Aïnou 2014a

¹⁵⁷ Caravelli y Modesto 2010; Toshmatov y col. 2014; Modesto y Nicolini 2010

$$\mathcal{G} = \frac{\Psi}{\rho^2} \left\{ \frac{\Delta}{\rho^2} (dT - a \sin^2 \Theta d\Phi)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dR \otimes dR - \rho^2 d\Theta \otimes d\Theta - \frac{\sin^2 \Theta}{\rho^2} [a dT - (K + a^2) d\Phi]^2 \right\}, \quad (56)$$

donde $K \equiv \sqrt{F/GH}$, $\rho^2 \equiv K + a^2 \cos^2 \Theta$, $2f \equiv K - FH$ y $\Delta \equiv FH + a^2$.

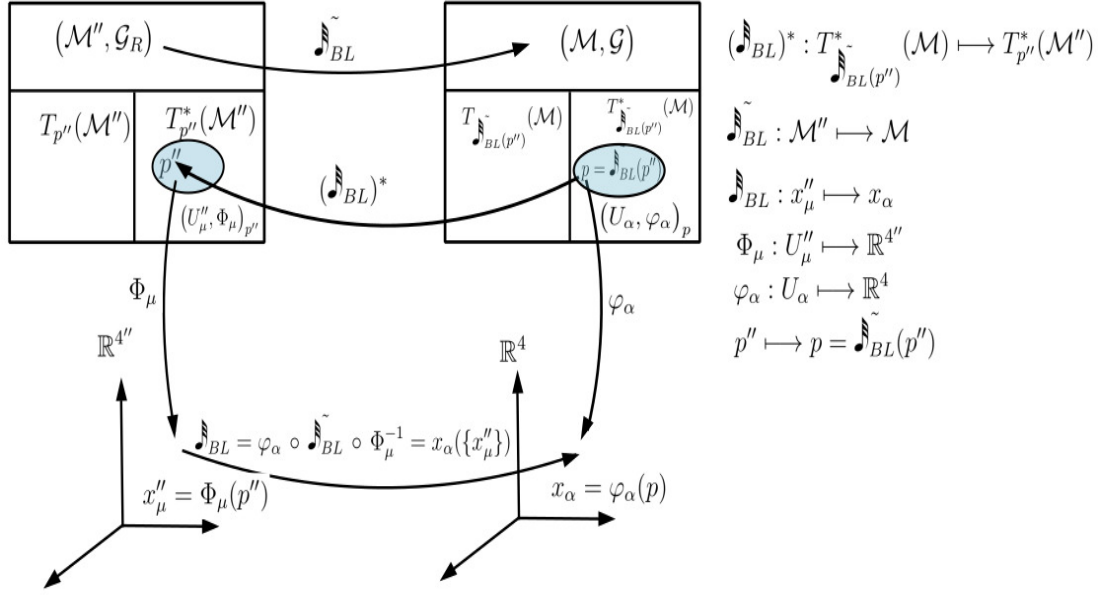


Figura 3. Esquema del pullback $(j_{BL})^* : T_{p''}^*(\mathcal{M}'') \rightarrow T_p^*(\mathcal{M})$. Las dos variedades diferenciables $(\mathcal{M}'', \mathcal{G}_R)$ y $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$, las cuales están dotadas con las cartas coordenadas $(U''_\mu, \Phi_\mu)_{p''}$ y $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_p$ que contienen a p'' y p , son mapeadas a través de Φ_μ y φ_α hacia las coordenadas locales de p'' ($x''_\mu = \{u_R, r_R, \theta_R, \phi_R\}$) y p ($x_\alpha = \{T, R, \Theta, \Phi\}$), respectivamente. Luego ellos, más el pullback $(j_{BL})^*$ y el mapeo j_{BL} , inducen el cambio de coordenadas $j_{BL} : (u_R, r_R, \theta_R, \phi_R) \rightarrow (T, R, \Theta, \Phi)$.

Como observamos, (55) corresponde a una generalización del tensor métrico ante-

riormente derivado en ¹⁵⁸ y fue publicada antes en ¹⁵⁹ tal que lo hacen mediante un procedimiento puramente algebraico. Una característica importante de este tensor métrico es el parámetro a inducido por medio de NJA, relacionado exclusivamente con la rotación estacionaria de la fuente gravitacional. Vemos que en el caso límite cuando $a = 0$, los términos mixtos en la métrica se anulan y recuperamos nuestra solución semilla (39). Por tanto, esto corresponde a una versión generalizada de este ansatz, el cual admite una interpretación como un mapeo coordenado complejo que actúa sobre una solución estática esféricamente simétrica de las ecuaciones de campo de Einstein para derivar su contraparte rotante. Adicionalmente, reescribiendo la métrica como en (56), nos da la ligera sospecha que la función Ψ podría interpretarse como un factor conforme. Recientemente, el director de este trabajo, junto con uno de sus colegas, demostraron que NJA no preserva la simetría conforme del espaciotiempo para geometrías conformestáticas¹⁶⁰¹⁶³, lo cual reafirma que nuestra sospecha no es del todo injustificada. Más aún, nos aventura a formular otro interrogante: *¿NJA preserva la estructura conforme del espaciotiempo?*

2.2. Caracterización Física de las Soluciones Obtenidas

Como vimos en la sección anterior, al no imponer alguna restricción sobre las funciones (A, B, Ψ) podemos afirmar que esta forma de aplicar NJA difiere de la usual,

¹⁵⁸ Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016

¹⁵⁹ Azreg-Ainou 2014; Azreg-Ainou 2014a

¹⁶⁰ Una solución conformestática forma una subclase de campos estáticos, los cuales admiten un espacio tridimensional plano conformalmente ortogonal al vector de Killing $\xi = \partial_t$ ¹⁶¹. Teniendo en cuenta lo anterior, el tensor métrico para una clase conformestática en coordenadas canónicas de Weyl toma la forma ¹⁶²

$$g = -e^{2\Psi(\rho,\phi,z)} dt \otimes dt + e^{-2\Psi(\rho,\phi,z)} (d\rho \otimes d\rho + dz \otimes dz + \rho^2 d\phi \otimes d\phi).$$

¹⁶³ Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016

porque no hemos asumido que (A, B, Ψ) fue derivado a partir de algún tipo de complejificación para la coordenada radial en (F, G, H) , lo que nos llevaría a un procedimiento bastante ambiguo, el cual no cumple la unicidad, y podría conducir a soluciones sin sentido físico ¹⁶⁴, dadas las múltiples ambigüedades introducidas en el ansatz de Newman-Janis presentado en ¹⁶⁵ (ver comentario 2.1).

Con base en lo anterior, nos surge la pregunta: *¿qué significado tiene la función métrica $\Psi(R, \Theta, a)$ en la métrica (55)?* La determinación de Ψ dependerá fuertemente del problema físico que querramos atacar, es decir, en la forma de la fuente en las ecuaciones de Einstein $G = 8\pi T$. En otras palabras, la caracterización de Ψ dependerá estrictamente del modelo físico que impongamos en la forma de las componentes del tensor energía-momentum $T^{\mu\nu}$ en las ecuaciones de campo.

El caso más simple que se nos podría ocurrir sería en la situación cuando $T^{\mu\nu} = 0$, lo cual nos conduciría inevitablemente a la solución de Kerr ¹⁶⁶. Por otro lado, podríamos poner un tensor electromagnético, pero se ha demostrado que la única clase de soluciones de electrovacío generadas vía NJA corresponde a la solución de Kerr-Newman ¹⁶⁷. Adicionalmente, como vimos en los tres teoremas expuestos en la sección 1.4, en el estudio del modelo correspondiente a fluido perfecto se ha visto que *la única solución de fluido perfecto generada mediante NJA es el vacío* ¹⁶⁸.

Ahora bien, para interpretar el tensor métrico (55), nosotros conjeturamos que describe un espaciotiempo estacionario e interior correspondiente a un fluido anisótropo

¹⁶⁴ Azreg-Aïnou 2011

¹⁶⁵ Newman y Janis 1965

¹⁶⁶ ibíd.; Drake y Szekeres 2000

¹⁶⁷ Newman y col. 1965; Drake y Szekeres 2000

¹⁶⁸ ibíd.

sin flujo de calor. Este tipo de fluidos admite una representación en términos de las componentes de un tensor energía-momentum, descritas de la siguiente forma:

$$(\mathbf{T})^{ab} = \mu (\mathbf{V})^a (\mathbf{V})^b + P_R (\mathbf{e}_R)^a (\mathbf{e}_R)^b + P_\Theta (\mathbf{e}_\Theta)^a (\mathbf{e}_\Theta)^b + P_\Phi (\mathbf{e}_\Phi)^a (\mathbf{e}_\Phi)^b, \quad (57)$$

siempre que el espaciotiempo esté dotado con alguna métrica Lorentziana y pseudo-Riemanniana con signatura $(+2)$ ¹⁶⁹

$$(\mathcal{G})^{ab} = -\mathbf{V}^a \mathbf{V}^b + (\mathbf{e}_R)^a (\mathbf{e}_R)^b + (\mathbf{e}_\Theta)^a (\mathbf{e}_\Theta)^b + (\mathbf{e}_\Phi)^a (\mathbf{e}_\Phi)^b, \quad (58)$$

donde $\mu(R, \Theta)$ corresponde a la densidad de energía del fluido y $\{P_R(R, \Theta), P_\Theta(R, \Theta), P_\Phi(R, \Theta)\}$ son las presiones anisótropas a lo largo de las correspondientes direcciones. Las líneas de mundo del fluido corresponden a curvas integrales con un vector velocidad \mathbf{V} , el cual satisface la condición de ortonormalidad $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = -1$. Aquí $(\mathbf{V})^a, (\mathbf{e}_R)^a, (\mathbf{e}_\Theta)^a$ y $(\mathbf{e}_\Phi)^a$ son las componentes de los vectores de la tétrada ortonormal

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\frac{1}{\sqrt{\Psi(FH + a^2)}} \left[\left(\sqrt{FH}/\sqrt{G} + a^2 \right) \partial_T + a \partial_\Phi \right], \\ \mathbf{e}_R &= \sqrt{\Psi(FH + a^2)}/\Psi \partial_R, \\ \mathbf{e}_\Theta &= \frac{1}{\sqrt{\Psi}} \partial_\Theta, \\ \mathbf{e}_\Phi &= -\frac{1}{\sqrt{\Psi} \sin \Theta} (a \sin^2(\Theta) \partial_T + \partial_\Phi), \end{aligned} \quad (59)$$

las cuales caracterizan a un observador que es comóvil a un elemento de fluido arbitrario. Así, las ecuaciones de Einstein $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$, junto con el tensor métrico

¹⁶⁹ Todos estos cálculos se han realizado usando un código en Maple 2021. Para preservar la consistencia con el paquete de "Differential Geometry", se ha cambiado la signatura (-2) a $(+2)$ en esta sección (y así se hará en el resto de este trabajo).

(55) y el tensor de energía-momentum descrito en (57), nos conducen al siguiente sistema independiente de ecuaciones diferenciales para la densidad de energía y las presiones anisotrópicas

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{32\pi\rho^4\Psi^3} & \left\{ 3\rho^4(\Psi_{,\Theta}^2 + \Delta\Psi_{,R}^2) - 4\rho^4\Psi(\Psi_{,\Theta\Theta} + \Delta\Psi_{,RR}) - \rho^2(\Psi^2)_{,R}(\rho^2\Delta_{,R} \right. \\ & - a^2\sin^2\Theta K_{,R}) + 2a^2\sin^2\Theta\rho^2\Psi^2K_{,RR} - 2\cot\Theta\rho^2(\Psi^2)_{,\Theta}(K + a^2) \\ & \left. + \Psi^2[3a^2\sin^2\Theta K_{,R}^2 - 4(\rho^2 + 4a^2\cos^2\Theta)(K + a^2) + 12\cos^2\Theta\Delta^2] \right\}, \quad (60) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_R = \frac{1}{32\pi\rho^4\Psi^3} & \left\{ 4\rho^4\Psi\Psi_{,\Theta\Theta} + 3\rho^4(\Psi_{,R}^2 - \Psi_{,\Theta}^2) + \rho^2(\Psi^2)_{,R}(\rho^2\Delta_{,R} - 2\Delta K_{,R}) \right. \\ & + \rho^2(\Psi^2)_{,\Theta}[a^2\sin 2\Theta + 2\cot\Theta(K + a^2)] - 4K(K + 2a^2) \\ & \left. + \Psi^2[a^2\sin^2\Theta K_{,R}^2 + 4a^2\cos^2\Theta(6(\rho^2 + a^2\sin^2\Theta) - (\Delta + a^2\cos^2\Theta))] \right\}, \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Theta = \frac{1}{32\pi\rho^4\Psi^3} & \left\{ 4\rho^2\Delta\Psi(\rho^2\Psi_{,RR} - \Psi K_{,RR}) + 2\rho^4\Psi^2(F_{,RR}H + FH_{,RR}) \right. \\ & + 2\rho^2[\cot\Theta(\Psi^2)_{,\Theta}(K + a^2(1 + \sin^2\Theta)) + (\Psi^2)_{,R}(\rho^2\Delta_{,R} - \Delta K_{,R})] \\ & + 3\rho^4(\Psi_{,\Theta}^2 - \Delta\Psi_{,R}^2) + \Psi^2[K_{,R}^2(8\Delta - a^2\sin^2\Theta) - 6\rho^2K_{,R}\Delta_{,R} \\ & \left. + 4(\rho^4F_{,R}H_{,R} + a^2\cos^2\Theta\Delta)] \right\}, \quad (62) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Phi = \frac{1}{32\pi\rho^4\Psi^3} & \left\{ 4\rho^4\Psi(\Psi_{,\Theta\Theta} + \Delta\Psi_{,RR}) + 2\rho^4\Psi^2(F_{,RR}H + FH_{,RR}) \right. \\ & - 3\rho^4(\Psi_{,\Theta}^2 + \Delta\Psi_{,R}^2) + 2\rho^2\Delta(\cot\Theta(\Psi^2)_{,\Theta} - \Psi^2K_{,RR}) + \Psi^2[3K_{,R}^2(2\Delta \\ & \left. - a^2\sin^2\Theta) - 6\rho^2\Delta_{,R}K_{,R} + 4\rho^4F_{,R}H_{,R} + 4\Delta(2a^2\cos^2\Theta - K)] \right\}, \quad (63) \end{aligned}$$

donde “,” denota la derivada con respecto a una coordenada y hemos usado la

notación $\rho^2 \equiv K + a^2 \cos^2(\Theta)$, $K \equiv \sqrt{FH}/\sqrt{G}$ y $\Delta \equiv FH + a^2$. Adicional al sistema anterior, las ecuaciones de Einstein nos proporcionan el siguiente sistema no trivial de ecuaciones independientes

$$(3\Psi_{,R}\Psi_{,\Theta} - 2\Psi_{,R\Theta}\Psi)\rho^4 + 3a^2 \sin(2\Theta)K_{,R}\Psi^2 = 0, \quad (64)$$

$$[(\Psi K_{,R})_{,R} + 2\Psi_{,\Theta} \cot(\Theta)](K + a^2 \cos^2(\Theta))^2 - \Psi(2K - a^2 \cos^2(\Theta) + K_{,R}^2) = 0, \quad (65)$$

el cual debemos resolver para determinar las cantidades dinámicas previas que caracterizan completamente a los fluidos. Por tanto, una larga lista de clases de soluciones correspondientes a fluidos rotantes anisótropos surgen después de obtener las soluciones del sistema de ecuaciones (64) - (65). Hasta donde sabemos, a lo sumo existen cinco clases de soluciones distintas. Estas son:

Clase I:	$K = c_1,$	$\Psi = \frac{a^2 \cos^2 \Theta + c_1}{\cos \Theta},$
Clase II:	$K = R^2,$	$\Psi = \frac{8 c_1^2 (a^2 \cos^2 \Theta + R^2)}{(\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2},$
Clase III:	$K = (R - c_1)^2,$	$\Psi = -\frac{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]}{(R - c_1)^2 \cos^2 \Theta},$
Clase IV:	$K = R^2 + c_1 R + c_2,$	$\Psi = a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2,$
Clase V:	$K = -\frac{(e^{c_2+R} + 2)^2}{2 e^{c_2+R}},$	$\Psi = \frac{2 a^2 \cos^2 \Theta e^{c_2+R} - (e^{c_2+R} + 2)^2}{\cos^2 \Theta (e^{c_2+R} + 2)^2},$

tal que c_1 , c_2 y c_3 son constantes arbitrarias y $K \equiv \sqrt{F/G}H$ es una relación entre los potenciales métricos de la solución semilla (39). Como podemos ver, cada clase define un tipo específico de fluido rotante. En particular, si nosotros tomamos a $c_1 = c_2 = 0$ en la Clase 4 obtendremos una solución para de la forma $\Psi = a^2 \cos^2 \Theta + R^2$ y $K = R^2$. Adicionalmente, si tomamos a $K \equiv \sqrt{F/G}H$ de

la forma para Schwarzschild (i.e., $H = R^2$ y $F = G = 1 - \alpha/R$, donde α es una constante), llegaremos a un fluido rotante sin flujo de calor con todas las presiones iguales a cero. Este caso corresponderá a la solución de Kerr, es decir, a la misma respuesta que llegaron Newman y Janis en la formulación original del ansatz ¹⁷⁰.

¹⁷⁰ Newman y Janis 1965

3. Soluciones Particulares

*A la realidad le gustan las simetrías
y los leves anacronismos.*

—Jorge Luis Borges, *El sur* (1944).

En el capítulo anterior, llegamos a una solución general de las ecuaciones de Einstein que describe el campo gravitacional interior de fuentes rotantes modeladas como fluidos anisótropos sin flujo de calor por medio de NJA. La métrica resultante se encuentra completamente determinada, siempre que se disponga de una solución estática de las ecuaciones de campo. Vemos que en el caso límite $a = 0$ los términos cruzados en (55) se anulan y el espaciotiempo recobra su naturaleza estática; por tanto, en su versión generalizada el ansatz de Newman-Janis admite una interpretación como un mapeo complejo coordinado que actúa sobre una solución estática de las ecuaciones de Einstein para generar una solución estacionaria con simetría axial. A continuación, se presentarán los resultados obtenidos, junto con mi director de tesis, correspondientes a las soluciones generales y particulares, las cuales describirán cada tipo de fluido que hemos hallado a través del procedimiento descrito anteriormente.

Para chequear que todas las cantidades dinámicas que caracterizan el fluido (60)-(65) tengan un sentido físico, debemos garantizar que satisfagan la ecuación de continuidad $\nabla \mathbf{T} = 0$ ¹⁷¹. Así pues, imponiendo que la divergencia del tensor energía-momentum sea igual cero, el siguiente sistema adicional de ecuaciones debe cumplirse:

¹⁷¹ En el siguiente capítulo estudiaremos otras condiciones de energía adicionales que debemos imponer en la caracterización de estas soluciones interiores.

$$2P_{R,R} + (\ln \Psi)_{,R}(3P_R - P_\Theta - P_\Phi + \mu) + \frac{(\mu + P_R)}{\Delta\rho^2}(\rho^2(FH)_{,R} - 2\Delta K_{,R}) = 0, \quad (66)$$

$$P_{\Theta,\Theta} + \frac{(\ln \Psi)_{,\Theta}}{2}(3P_\Theta - P_\Phi - P_R + \mu) = -\frac{(P_\Theta - P_\Phi)}{\rho^2}(\rho^2 + 2a^2 \sin^2(\Theta)) \cot(\Theta). \quad (67)$$

Desde un punto de vista pragmático, el hecho de resolver el sistema (64)-(65) nos permite entender la acción que tiene NJA sobre la solución estática (39) y, adicionalmente, nos proporcionará la función $\Psi(R, \Theta)$ que determina la característica estacionaria del espaciotiempo y de las presiones anisótropas. En efecto, en el límite $a = 0$, la ecuación (64) se desvanece idénticamente¹⁷², y la ecuación (65) se transforma sólo en una restricción sobre los potenciales métricos para la solución estática. Por el contrario, en el caso cuando $a \neq 0$, debemos resolver el sistema para obtener la función $\Psi(R, \Theta)$ que determinará la característica estacionaria del espaciotiempo y sus presiones anisótropas, entre otras.

En este capítulo presentaremos un conjunto de pares de soluciones (Ψ, K) para el sistema (64)-(65). Cada par determina una única clase de soluciones para un tipo de fluido anisótropo rotante. Sin embargo, debido a que $K \equiv \sqrt{G/F} H$, no existe una manera exclusiva de emplear NJA para obtener una solución única. Todo lo estudiado aquí satisficará la ecuación de continuidad, al menos localmente, a través de las ecuaciones (66)-(67).

¹⁷² En otras palabras, llegamos a una igual del tipo $0 = 0$.

3.1. Solución Clase I

$$K = c_1, \quad \Psi = \frac{a^2 \cos^2 \Theta + c_1}{\cos \Theta} : \quad c_1 = \text{cte.} \quad (68)$$

Inyectando esta solución en (55), obtenemos el espaciotiempo descrito por el siguiente tensor métrico

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda = \frac{1}{(a^2 \cos^2 \Theta + c_1) \cos \Theta}, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & - (a^2 \cos^2 \Theta + FH) dT \otimes dT + 2a \sin^2 \Theta (FH - c_1) dT \otimes d\Phi \\ & + \frac{(a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^2}{FH + a^2} dR \otimes dR + (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^2 d\Theta \otimes d\Theta \\ & + \sin^2 \Theta [(a^2 + c_1)^2 - a^2 \sin^2 \Theta (a^2 + FH)] d\Phi \otimes d\Phi, \end{aligned}$$

el cual describe un fluido propagándose con un vector velocidad \mathbf{V} y una densidad de energía, dadas por

$$\mathbf{V} = - \frac{\sqrt{\cos \Theta}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + c_1} \sqrt{FH + a^2}} [(c_1 + a^2) \partial_T + a \partial_\Phi], \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \mu = & - \frac{1}{32\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3} [\sin^2 \theta (c_1 + a^2 \cos^2 \Theta)^2 + 4c_1 (c_1 + a^2 \cos^4 \Theta) \\ & + 12a^2 \cos^2 \Theta (c_1 - \cos^2 \Theta FH)], \quad (71) \end{aligned}$$

respectivamente. Por otro lado, las presiones anisotrópicas adoptan la forma,

$$P_R = -\mu + \frac{a^2 \cos^3 \Theta (FH + a^2)}{4\pi (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3}, \quad (72)$$

$$P_\Theta = \frac{1}{32\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3} \left\{ \cos^2 \Theta \left[2(a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^2 (FH)_{,RR} \right. \right. \\ \left. \left. + a^2 \left(\sin^2 \Theta (2c_1 - a^2 \cos^2 \Theta) + 4 \cos^2 \Theta FH \right) \right] \right. \\ \left. + c_1^2 (\cos^2 \Theta + 3) \right\}, \quad (73)$$

$$P_\Phi = P_\Theta + \frac{\sin^2 \Theta [(a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^2 + 4a^2 c_1 \cos^2 \Theta]}{16\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3}. \quad (74)$$

El escalar de curvatura es

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2 \cos \Theta (c_1 + a^2 \cos^2 \Theta)^3} \left[4a^2 \cos^4 \Theta (c_1 + FH) - a^2 \cos^2 \Theta (5a^2 \cos^2 \Theta + 22c_1) \right. \\ \left. + \cos^2 \Theta (c_1 + a^2 \cos^2 \Theta)^2 (1 - 2(FH)_{,RR}) - 9c_1^2 \right]. \quad (75)$$

Hasta ahora, hemos determinado una familia de soluciones interiores de las ecuaciones de Einstein correspondientes a fluidos rotantes. Hemos aplicado NJA y a través de él hemos obtenido la primera forma explícita para el par (K, Ψ) . Nosotros podemos obtener un miembro particular de esta familia de soluciones introduciendo una solución particular de las ecuaciones de Einstein, de tal suerte que satisfaga la restricción $K \equiv \sqrt{F/G} H = c_1$.

Por otro lado, debido a que \mathcal{R} está en función de F y H solamente, es imposible eliminar el factor $\cos \Theta (c_1 + a^2 \cos^2 \Theta)$ en su denominador; de acuerdo con ello, dos singularidades están presentes en esta familia de soluciones.

3.1.1. Caso particular de la solución Clase I

Consideremos la siguiente solución estática para un fluido perfecto

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{Iseed} = & -R^4 \left(c_2 R^{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} \right) dT \otimes dT \\ & + \frac{1}{c_1^2} \left(c_2 R^{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} \right)^{-1} dR \otimes dR \\ & + R^2 (d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi), \end{aligned} \quad (76)$$

$$\mu_{Iseed} = \frac{c_1^2}{16\pi R^2} \left[c_2 (\sqrt{33} + 3) R^{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}} - c_3 (\sqrt{33} - 3) R^{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right], \quad (77)$$

$$p_{Iseed} = -\frac{c_1^2}{16\pi R^2} \left[c_2 (\sqrt{33} - 5) R^{-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}} - c_3 (\sqrt{33} + 5) R^{-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}} - \frac{8}{c_1^2} \right], \quad (78)$$

con c_2 siendo una constante arbitraria. Ahora describiremos un modelo correspondiente a un fluido rotante generado por medio de una escogencia adecuada de una solución semilla en la sección 3.1. Por tanto, NJA genera una solución de fluido anisótropo rotante comenzando por una solución semilla de fluido perfecto (ver (76)), obteniendo

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda = \frac{c_1}{R^2 \cos \Theta \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \Theta}{c_1} \right)}, \quad (79)$$

tal que

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} = & -R^4 \left[c_2 R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \Theta}{R^2} \right) \right] dT \otimes dT \\
& + \frac{1}{c_1^2} \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \Theta}{c_1} \right)^2 \left[c_2 R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} \left(1 + \frac{a^2}{R^2} \right) \right]^{-1} dR \otimes dR \\
& + 2a \sin^2 \Theta R^4 \left[c_2 R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} \left(1 - \frac{c_1}{R^2} \right) \right] dT \otimes d\Phi \\
& + R^2 \left(1 + \frac{a^2 \cos^2 \Theta}{c_1} \right)^2 d\Theta \otimes d\Theta + \frac{R^2 \sin^2 \Theta}{c_1^2} \left[(a^2 + c_1)^2 \right. \\
& \left. - a^2 c_1^2 \sin^2 \Theta R^2 \left(c_2 R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_3 R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + \frac{1}{c_1^2} (1 + a^2) \right) \right] d\Phi \otimes d\Phi .
\end{aligned}$$

Este tensor métrico describe un fluido rotante, el cual posee una densidad de energía μ moviéndose con una velocidad \mathbf{V} , la cual satisface la condición de normalización $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = -1$. Estas cantidades están dadas por

$$\begin{aligned}
\mu = & \frac{3}{8\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta \left[\cos^2 \Theta (c_1^2 c_2 R^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_1^2 c_3 R^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + R^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{a^2}{12} - \frac{c_1}{6} + \frac{a^2 \cos^2 \Theta}{12} \right) - \frac{7c_1}{6} \right] + \frac{c_1^2 (\cos^2 \Theta - 5)}{12} \right\} \quad (80)
\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{V} = - \frac{\cos^{\frac{1}{2}} \Theta [(a^2 + c_1) \partial_T + a \partial_\Phi]}{(a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^{\frac{1}{2}} \left(c_1^2 c_2 R^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_1^2 c_3 R^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + R^2 + a^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (81)$$

respectivamente. Mientras que las presiones anisótropas son

$$P_R = -\mu + \frac{a^2 \cos^3 \Theta \left(c_1^2 c_2 R^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_1^2 c_3 R^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + R^2 + a^2 \right)}{4\pi (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3} \quad (82)$$

$$\begin{aligned}
P_{\Theta} &= \frac{1}{32\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3} \\
&\times \left\{ 2c_1^2 \cos^2 \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^2 \left[c_2(\sqrt{33} + 9)R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} - c_3(\sqrt{33} - 9)R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} \right] \right. \\
&+ a^2 \cos^2 \Theta \left[4 \cos^2 \Theta \left(c_1^2 c_2 R^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} + c_1^2 c_3 R^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + R^2 - \frac{a^2}{4} + \frac{3c_1}{2} \right) + 2c_1 \right] \\
&\left. + 5a^4 \cos^6 \Theta + c_1^2(5 \cos^2 \Theta + 3) \right\}, \tag{83}
\end{aligned}$$

$$P_{\Phi} = P_{\Theta} + \frac{\sin^2 \Theta (\cos^4 \Theta a^4 + 6c_1 a^2 \cos^2 \Theta + c_1^2)}{16\pi \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + c_1)^3}. \tag{84}$$

Notemos que en el caso límite cuando $a \rightarrow 0$, tenemos

$$\Xi \equiv \mathcal{G}|_{a=0} = \Lambda_0 \mathbf{g}_{Iseed}, \quad \Lambda_0 \equiv \frac{c_1}{R^2 \cos \Theta}, \tag{85}$$

y

$$\mu_0 = -P_{R_0} = \frac{\cos^2 \Theta - 5}{32\pi c_1 \cos \Theta},$$

$$\begin{aligned}
P_{\Theta_0} &= \frac{1}{32\pi c_1 \cos \Theta} \left[2c_1^2 c_2 \cos^2 \Theta (\sqrt{33} + 9)R^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{33}}{2}} \right. \\
&\quad \left. - 2c_1^2 c_3 \cos^2 \Theta (\sqrt{33} - 9)R^{-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{33}}{2}} + 5 \cos^2 \Theta + 3 \right],
\end{aligned}$$

$$P_{\Phi_0} = P_{\Theta_0} + \frac{\sin^2 \Theta}{16\pi c_1 \cos \Theta},$$

donde hemos nombrado $\{\mu_0, P_{\Theta_0}, P_{R_0}, P_{\Phi_0}\} = \lim_{a \rightarrow 0} \{\mu, P_{\Theta}, P_R, P_{\Phi}\}$. De este resultado podemos concluir que NJA puede generar simultáneamente dos soluciones de fluidos anisótropos: uno rotante y el otro estático, partiendo de una solución semilla

estática correspondiente a fluido perfecto. Como podemos concluir, el tensor métrico (85) es una nueva solución obtenida de multiplicar la solución semilla (76) por un factor conforme Λ_0 . Adicionalmente, si comparamos los tensores métricos (69) y (79), vemos que los factores conformes son distintos. Estos resultados están en concordancia con un resultado previo encontrado por mi director de tesis, junto con uno de sus colegas, el cual dice que NJA no preserva la estructura conforme del espaciotiempo para configuraciones conforme-estáticas y conforme-estacionarias ¹⁷³.

3.2. Solución Clase II

$$K = R^2, \quad \Psi = \frac{8(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)}{(\sqrt{2}c_3 \cos \Theta R - c_2)^2}, \quad c_2 \text{ y } c_3 \text{ son constantes.} \quad (86)$$

Como podemos ver, este tipo de ansatz restringe la solución semilla estática satisfaciendo la relación $K \equiv \sqrt{F/G} H = R^2$. Inyectando esta solución en (55), obtenemos el espaciotiempo descrito por el tensor métrico

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda = \frac{8}{(\sqrt{2}c_3 R \cos \Theta - c_2)^2}, \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -\frac{a^2 \cos^2 \Theta + FH}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} dT \otimes dT + \frac{2a \sin^2 \Theta (FH - R^2)}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} d\Phi \otimes dT \\ & + \frac{a^2 \cos^2 \Theta + R^2}{a^2 + FH} dR \otimes dR + (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) d\Theta \otimes d\Theta \\ & + \frac{\sin^2 \Theta [(R^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \Theta (FH + a^2)]}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} d\Phi \otimes d\Phi. \end{aligned}$$

Esta métrica describe un fluido propagándose con un vector velocidad V , una den-

¹⁷³ Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016

sidad de energía y una presiones anisótropas dadas por

$$\mathbf{V} = -\frac{2c_3 \cos \Theta R - \sqrt{2}c_2}{4\sqrt{a^2 + FH}\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + R^2}} [(R^2 + a^2) \partial_T + a \partial_\Phi], \quad (88)$$

$$\begin{aligned} -\mu = P_R = & \frac{1}{64\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2} \{2c_3^2 [3(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2 + a^2 \cos^4 \Theta (3FH \\ & - R^2)] - 2\sqrt{2} c_2 c_3 R \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 - 2FH) - c_2^2 (FH + R^2) \\ & - [\sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta (R^2 - a^2 \cos^2 \Theta) + R(2c_3^2 a^2 \cos^4 \Theta - c_2^2)] (FH)_{,R}\}, \quad (89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Theta = P_\Phi = & \frac{1}{128\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2} \{ (FH)_{,RR} (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) (\sqrt{2}c_3 \cos \Theta R - c_2)^2 \\ & + FH [12c_3^2 \cos^2 \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + 2R^2) - 8\sqrt{2}c_2 c_3 \cos \Theta R + 2c_2^2] \\ & - 2(FH)_{,R} [2c_3^2 \cos^2 \Theta R (2a^2 \cos^2 \Theta + 3R^2) + c_2^2 R \\ & - 2\sqrt{2}c_2 c_3 \cos \Theta (a^2 \cos^2 \Theta + 2R^2)] - 4\sqrt{2}c_2 c_3 \cos \Theta R (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) \\ & + 12c_3^2 (a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2 - 2 \cos^2 \Theta (a^2 c_2^2 + 2c_3^2 R^4) \}. \quad (90) \end{aligned}$$

El escalar de curvatura correspondiente a estas soluciones es de la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{1}{8(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)} \left\{ (1 - (FH)_{,RR}) (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2 - 24c_3^2 \cos^2 \Theta (FH \right. \\ & + a^2) + (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R + c_2)^2 + 6c_3 \cos \Theta (2c_3 \cos \Theta R - \sqrt{2} c_2) (FH)_{,R} \\ & \left. - 8c_3 R (3c_3 R - \sqrt{2} c_2 \cos \Theta) \right\}, \quad (91) \end{aligned}$$

donde vemos que contiene una singularidad en forma de anillo tipo Kerr. Como dijimos anteriormente, la solución estática general que origina este fluido está ligada a la restricción $K = \sqrt{FH}/\sqrt{G} = R^2$. De acuerdo a esto, existen muchas maneras

de expresar $K(R) = R^2$. La forma más convenientemente simple es tomar $H = R^2$ y $G = F$. Si este es el caso, se puede demostrar que la única solución rotante con una escalar de curvatura nulo generado por esta escogencia de H emerge mediante

$$F = G = 1 - \frac{\alpha}{R} + \frac{Q^2}{R^2}, \alpha \text{ y } Q \text{ son constantes,} \quad (92)$$

que corresponde al espaciotiempo de Reissner-Nordström. Así, al tomar las constantes como $c_3 = 0$ y $c_2 = 2\sqrt{2}$, NJA genera el tensor métrico correspondiente a la geometría de Kerr-Newman con Reissner-Nordström como su solución semilla¹⁷⁴. Así, la traza del tensor energía momentum $T \equiv T_a^a = -\mu + p_R + p_\Theta + p_\Phi$, está dado por

$$\mu = -p_R = p_\Theta = p_\Phi = \frac{Q^2}{8\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2}, \quad (93)$$

de tal suerte que este tensor será de traza nula. Se puede demostrar que la única solución correspondiente al fluido anisótropo rotante y libre de traza generado por NJA a través de la solución (86) corresponde a Kerr-Newman, la cual es obtenida a partir de la solución de Reissner-Nordström. Sin embargo, al considerar el tercer teorema desarrollado por Szekeres y descrito en la sección 1.4, este resultado no debería sorprendernos.

3.2.1. Caso particular de la solución Clase II

Una solución más general puede ser obtenida tomando una función arbitraria $m(R)$, de tal suerte que $F(R) = G(R) = m(R)$ determine el fluido anisotrópico estático con un tensor métrico

¹⁷⁴ En otras palabras, esta solución contiene como caso particular el trabajo de Newman descrito en ¹⁷⁵.

$$\Xi \equiv \Lambda_0 \mathbf{g}_0, \quad \Lambda_0 \equiv \frac{8}{(\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2}, \quad (94)$$

$$\mathbf{g}_0 = -m dT \otimes dT + \frac{1}{m} dR \otimes dR + R^2 (d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi),$$

con una densidad de energía y presiones anisótropas dadas por

$$\mu_0 = -P_{R_0} = \frac{1}{64\pi R^2} \left\{ c_2 (R m_{,R} - m) (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2) - \sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta R (m - 2) - 6c_3^2 R^2 + c_2^2 \right\}, \quad (95)$$

$$P_{\Theta_0} = P_{\Phi_0} = \frac{1}{128\pi R} \left\{ R m_{,RR} (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2 + 2 m_{,R} (c_2^2 - 2c_3^2 \cos^2 \Theta R^2) + 4 c_3 \cos \Theta m (c_3 \cos \Theta R + \sqrt{2} c_2) + 4 [c_3^2 R (3 - \cos^2 \Theta) - \sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta] \right\}, \quad (96)$$

respectivamente. En este caso, NJA genera el espaciotiempo rotante descrito por

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda \equiv \frac{8}{(\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2}, \quad (97)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = & -\frac{a^2 \cos^2 \Theta + mR^2}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} dT \otimes dT + \frac{2a \sin^2 \Theta R^2 (m - 1)}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} dT \otimes d\Phi \\ & + \frac{a^2 \cos^2 \Theta + R^2}{mR^2 + a^2} dR \otimes dR + (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) d\Theta \otimes d\Theta \\ & + \frac{\sin^2 \Theta [(R^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \Theta (mR^2 + a^2)]}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2} d\Phi \otimes d\Phi, \end{aligned}$$

con un vector velocidad de la forma

$$\mathbf{V} = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}c_3 \cos \Theta R - c_2)}{4\sqrt{mR^2 + a^2}\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta R^2}} [(R^2 + a^2) \partial_T + a \partial_\Phi]. \quad (98)$$

Esta solución puede ser interpretada como un fluido rotante con una densidad de energía y presiones anisótropas dadas por

$$\begin{aligned} \mu = -P_R = & \frac{1}{64\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2} \left\{ R^2 m_{,R} [\sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta (R^2 - a^2 \cos^2 \Theta) \right. \\ & + R(2c_3^2 a^2 \cos^4 \Theta - c_2^2)] - 2\sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta R (m - 1) (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) \\ & - 2c_3^2 a^2 \cos^4 \Theta [R^2 (m - 1) + 3a^2] - 6c_3^2 R^2 (2a^2 \cos^2 \Theta + R^2) \\ & \left. - c_2^2 R^2 (m - 1) \right\}, \quad (99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\Theta = P_\Phi = & \frac{1}{128\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)^2} \left\{ R^2 m_{,RR} (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2 (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) \right. \\ & + 2R m_{,R} [2 \cos^2 \Theta (a^2 c_2^2 - \sqrt{2} c_2 c_3 a^2 \cos \Theta R - c_3^2 R^4) + c_2^2 R^2] \\ & + 4\sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta R (m - 1) (a^2 \cos^2 \Theta + R^2) + 12c_3^3 (a^4 \cos^4 \Theta + R^4) \\ & \left. + \cos^2 \Theta [2m(2c_3^2 R^4 + a^2 c_2^2) + 4c_3^2 R^2 (6a^2 - R^2) - 2c_2^2 a^2] \right\}, \quad (100) \end{aligned}$$

respectivamente. Por otro lado, el escalar de curvatura adopta la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{1}{8(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)} \left\{ 2R m_{,R} (2c_3^2 \cos^2 \Theta R^2 + \sqrt{2} c_2 c_3 \cos \Theta R - 2c_2^2) \right. \\ & - R m_{,RR} (\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R - c_2)^2 - 2m [(\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R + 2c_2)^2 - 3c_2^2] \\ & \left. + 2c_2 (4\sqrt{2} c_3 \cos \Theta R + c_2) + 4c_3^2 [\cos^2 \Theta R^2 - 6(a^2 \cos^2 \Theta + R^2)] \right\}, \quad (101) \end{aligned}$$

donde, por simplicidad, en todas las anteriores expresiones hemos definido $m \equiv$

$m(R)$. Por otro lado, con base a (101), vemos que este espaciotiempo tendrá la misma singularidad en forma de anillo descrita en la solución de Kerr, i.e., en $R = 0$ y $\Theta = \pi/2$.

Finalmente, realizando una comparación entre los factores Λ en (87) y (97), vemos que en este caso se conserva la estructura conforme del espaciotiempo.

3.3. Solución Clase III

$$K = (R - c_1)^2, \quad \Psi = -\frac{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]}{(R - c_1)^2 \cos^2 \Theta}, \text{ con } c_2 \text{ una constante arbitraria.} \quad (102)$$

Como podemos ver, este tipo de anzats restringe a la solución estática a satisfacer la condición $K = \sqrt{FH}/\sqrt{G} = (R - c_1)^2$. Inyectando esta solución en (55), obtenemos el espaciotiempo descrito por el tensor métrico

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda \equiv & -\frac{1}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2] (R - c_1)^2 \cos^2 \Theta}, \\ \mathbf{g} = & - (a^2 \cos^2 \Theta + FH) dT \otimes dT + 2a \sin^2 \Theta [FH - (R - c_1)^2] dT \otimes d\Phi \\ & + \frac{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2}{FH + a^2} dR \otimes dR + [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2] d\Theta \otimes d\Theta \\ & + \sin^2 \Theta \left\{ (R - c_1)^4 - a^2 \sin^2 \Theta (FH + a^2) + a^2 [a^2 + 2(R - c_1)^2] \right\} d\Phi \otimes d\Phi, \end{aligned} \quad (103)$$

tal que describe un fluido propagándose con un vector velocidad \mathbf{V} , una densidad de energía y unas presiones anisótropas dadas por

$$\mathbf{V} = \frac{i(R - c_1) \cos \Theta}{\sqrt{FH + a^2} \sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2}} \left\{ [(R - c_1)^2 + a^2] \partial_T + a \partial_\Phi \right\}, \quad (104)$$

$$\mu = -P_R = \frac{1}{8\pi [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta [\cos^2 \Theta (3(FH + a^2) - (R - c_1)(FH)_{,R}) + (R - c_1)^2 (6 - \cos^2 \Theta)] + 3(R - c_1)^4 \right\}, \quad (105)$$

$$P_\Theta = P_\Phi = \frac{1}{16\pi [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} \left\{ 2(R - c_1)^4 (\cos^2 \Theta - 3) - \cos^2 \Theta (R - c_1)^2 [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2] (FH)_{,RR} + 2 \cos^2 \Theta (R - c_1) [2a^2 \cos^2 \Theta + 3(R - c_1)^2] (FH)_{,R} - 6 \cos^2 \Theta [a^2 \cos^2 \Theta + 2(R - c_1)^2] (FH + a^2) \right\}, \quad (106)$$

respectivamente y tal que $i = \sqrt{-1}$; por tanto, esta solución contiene una patología en su vector velocidad. Por otro lado, su escalar de curvatura es

$$\mathcal{R} = \frac{1}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]} \left\{ \cos^2 \Theta [(R - c_1)^2 (FH)_{,RR} - 6(R - c_1)(FH)_{,R} + 12(FH + a^2)] + 2(R - c_1)^2 (6 - \cos^2 \Theta) \right\}, \quad (107)$$

evidenciando singularidades de curvatura en $\Theta = \pi/2$ y $R = c_1$, tal que en el caso $c_1 = 0$ obtendremos las mismas singularidades de curvatura que en la solución tipo Clase II.

3.3.1. Caso particular de la solución III

Consideremos la siguiente solución estática de fluido perfecto, descrita por el

tensor métrico

$$\begin{aligned}
g_0 = & - \frac{(R + c_2) - (R - c_1)^3}{(R - c_1)} dT \otimes dT \\
& + \frac{(R - c_1)^2}{(R - c_1)(R + c_2) - (R - c_1)^4} dR \otimes dR \\
& + (R - c_1)^2 (d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi),
\end{aligned} \tag{108}$$

y con una relación entre su densidad de energía y presión

$$\mu_0 = - P_{R_0} = \frac{3}{8\pi c_2^2}, \tag{109}$$

tal que al escoger a $c_2 = -(2m + c_1)$ obtenemos la solución de Schwarzschild-de Sitter ¹⁷⁶. Ahora bien, tomemos esta métrica como la solución semilla para una solución rotante generada a través de NJA, y descrita por

$$\begin{aligned}
g = & - \frac{(R - c_1)^2 [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)(R + c_2)] - (R - c_1)^6}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} dT \otimes dT \\
& + \frac{2a \sin^2 \Theta (R - c_1)^3 [(c_1 + c_2) - (R - c_1)^3]}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} dT \otimes d\Phi \\
& + \frac{(R - c_1)^2}{[(R - c_1)(R + c_2) + a^2] - (R - c_1)^4} dR \otimes dR + (R - c_1)^2 d\Theta \otimes d\Theta \\
& + \frac{(R - c_1)^2 \sin^2 \Theta}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta [a^2 - (R - c_1)((R - c_1)^3 - (R + c_2))] \right. \\
& \left. + (R - c_1) [a^2 (R - c_1)^3 + a^2 (R - 2c_1 - c_2)] \right\} d\Phi \otimes d\Phi,
\end{aligned} \tag{110}$$

y cuyo vector velocidad será de la forma

¹⁷⁶ Richard C Tolman: *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*. En: *Physical Review* 55.4 (1939), pág. 364

$$\mathbf{V} = -\frac{(R - c_1) \cos \Theta \{ [(R - c_1)^2 + a^2] \partial_T + a \partial_\Phi \}}{\sqrt{(R - c_1)^4 + [(R + c_2)(c_1 - R) - a^2]} \sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2}}. \quad (111)$$

La densidad de energía y presiones anisótropas están dadas por

$$\mu = -P_R = \frac{1}{8\pi [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} \left\{ a^2 \cos^4 \Theta [(R - c_1)^4 + (2(R - c_1)(c_1 + c_2) + 3a^2)] + 3(R - c_1)^2 [2a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2] \right\}, \quad (112)$$

$$P_\Theta = P_\Phi = \frac{1}{8\pi [a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]^2} \left\{ a^2 \cos^4 \Theta [((c_1 - R)(c_1 + c_2) - 3a^2) + (R - c_1)^4] - 3(R - c_1)^2 [(R - c_1)^2 + \cos^2 \Theta ((R - c_1)(c_1 + c_2) + 2a^2)] \right\}. \quad (113)$$

Y un escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = \frac{6 \{ \cos^2 \Theta [(R - c_1)(c_1 + c_2) + 2a^2] + 2(R - c_1)^2 \}}{[a^2 \cos^2 \Theta + (R - c_1)^2]}. \quad (114)$$

Notemos que en el caso límite cuando $a \rightarrow 0$, obtendremos la solución estática

$$\Xi \equiv \Lambda_0 \mathbf{g}_0, \quad \Lambda_0 \equiv -\frac{1}{\cos^2 \Theta (R - c_1)^2},$$

$$\mu_0 = -P_{R_0} = \frac{3}{8\pi c_2^2}, \quad (115)$$

$$P_{\Theta_0} = P_{\Phi_0} = -\frac{3[(c_1 + c_2) \cos^2 \Theta + R - c_1]}{8\pi(R - c_1)}, \quad (116)$$

que corresponde, bajo la escogencia $c_2 = -(2m + c_1)$, a una solución conforme a Schwarzschild-de Sitter, donde nos encontramos de nuevo que NJA no preserva la estructura conforme del espaciotiempo. Adicionalmente, rompe la propiedad de un fluido perfecto. Resultado que se encuentra de acuerdo con una investigación previa realizada por Rosquist ¹⁷⁷.

3.4. Solución tipo Clase IV

$$K = R^2 + c_1 R + c_2, \quad \Psi = a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2, \quad \text{con } c_1 \text{ y } c_2 \text{ constantes.} \quad (117)$$

Inyectando esta solución en (55), obtenemos el espaciotiempo descrito por el tensor métrico

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2},$$

¹⁷⁷ Kjell Rosquist: *Exact relativistic stellar models with liquid surface: I. Generalizing Buchdahl's n= 1 polytrope*. En: *Classical and Quantum Gravity* 16.6 (1999), pág. 1755

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} = & - (a^2 \cos^2 \Theta + FH) dT \otimes dT + 2a \sin^2 \Theta (FH - R^2 - c_1 R - c_2) dT \otimes d\Phi \\
& + \frac{(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^2}{FH + a^2} dR \otimes dR + (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^2 d\Theta \otimes d\Theta \\
& + \sin^2 \Theta [(R^2 + a^2)^2 + (c_1 R + c_2)^2 - (FH + a^2) a^2 \sin^2 \Theta \\
& + 2(c_1 R + c_2)(R^2 + a^2)] d\Phi \otimes d\Phi.
\end{aligned} \tag{118}$$

Este tensor métrico describe un fluido propagándose con un vector velocidad \mathbf{V} , una densidad de energía y unas presiones anisótropas dadas por

$$\mathbf{V} = - \frac{1}{\sqrt{FH + a^2} \sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2}} [(R^2 + c_1 R + c_2 + a^2) \partial_T + a \partial_\Phi], \tag{119}$$

$$\begin{aligned}
\mu = & \frac{1}{32\pi (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta (2R + c_1)^2 + [4(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 \right. \\
& + c_1 R - 2c_2) + 3c_1^2] FH - 2(2R + c_1)(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)(FH)_{,R} \\
& \left. + 4(c_1 R + c_2)^2 + 4R^2(R^2 + 2c_1 R + 2c_2) + 2a^2(c_1^2 - 4c_2) \right\},
\end{aligned} \tag{120}$$

$$P_R = \frac{(c_1^2 - 4c_2)(FH + a^2)}{16\pi (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} - \mu, \tag{121}$$

$$\begin{aligned}
P_\Theta = & \frac{1}{32\pi (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ 2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2) [(a^2 \cos^2 \Theta \right. \\
& + R^2 + c_1 R + c_2)(FH)_{,RR} - (2R + c_1)(FH)_{,R}] + a^2 \cos^2 \Theta [4(FH \\
& - a^2 \cos^2 \Theta - R^2 - c_1 R - 2c_2) + c_1^2] + (2R + c_1)^2 FH \left. \right\},
\end{aligned} \tag{122}$$

y

$$P_{\Phi} = P_{\Theta} - \frac{a^2 \sin^2 \Theta (c_1^2 - 4c_2)}{16\pi (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3}, \quad (123)$$

respectivamente. Con un escalar de curvatura

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{1}{2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta [4(2R^2 + 2c_1 R + 3c_2 + a^2 \cos^2 \Theta) \right. \\ & - c_1^2] + (c_1^2 - 4c_2) FH + 4(c_1 R + c_2)^2 + 4R^2 (R^2 + 2c_1 R + 2c_2) + 2a^2 (c_1^2 - 4c_2) \\ & \left. - 2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^2 (FH)_{,RR} \right\}, \quad (124) \end{aligned}$$

tal que, al tomar $c_1 = c_2 = 0$, nuevamente tenemos las mismas singularidades descritas por la solución de Kerr.

3.4.1. Caso particular de la solución IV

Ahora mostraremos un modelo de fluido rotante generado bajo la conveniente escogencia de una cómoda solución semilla descrita como un fluido anisótropo estático, dado por la solución

$$\mathbf{g}_0 = -m(R) dT \otimes dT + \frac{1}{m(R)} dR \otimes dR + (R^2 + c_1 R + c_2) (d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi) \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \mu_0 = & \frac{1}{32\pi (R^2 + c_1 R + c_2)^2} \left\{ 2m_{,R} [R(2R^2 + 3c_1 R + c_1^2 + 2c_2) + c_1 c_2] \right. \\ & \left. + 4(R^2 + c_1 R + c_2) (m - 1) + m(4c_2 - c_1^2) \right\}, \quad (126) \end{aligned}$$

$$P_{R_0} = -\mu_0 + \frac{m(c_1^2 - 4c_2)}{16\pi(R^2 + c_1R + c_2)^2}, \quad (127)$$

$$P_{\Theta_0} = P_{\Phi_0} = \frac{1}{32\pi(R^2 + c_1R + c_2)^2} \left\{ 2m_{,RR} [R^2(R^2 + 2c_1R + c_1^2 + 2c_2) + c_2(2c_1R + c_2)] \right. \\ \left. + 2m_{,R} [R(2R^2 + 3c_1R + c_1^2 + 2c_2) + c_1c_2] + m(4c_2 - c_1^2) \right\}. \quad (128)$$

En este caso tenemos el espaciotiempo rotante adopta la forma

$$\mathcal{G} = \Lambda \mathbf{g}, \quad \Lambda \equiv \frac{1}{a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1R + c_2}, \quad (129)$$

$$\mathbf{g} = - [a^2 \cos^2 \Theta + m(R^2 + c_1R + c_2)] dT \otimes dT + 2a \sin^2 \Theta [(m-1)(R^2 + c_1R + c_2)] dT \otimes d\Phi + \frac{(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1R + c_2)^2}{m(R^2 + c_1R + c_2) + a^2} dR \otimes dR + (a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1R + c_2)^2 d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta [(R^2 + c_1R + c_2)(a^2 \cos^2 \Theta m + R^2 + c_1R + c_2 + a^2(2-m)) + a^4 \cos^4 \Theta] d\Phi \otimes d\Phi,$$

tal que su vector velocidad es igual a

$$\mathbf{V} = - \frac{(R^2 + c_1R + c_2 + a^2) \partial_T + a \partial_\Phi}{\sqrt{m(R^2 + c_1R + c_2) + a^2} \sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1R + c_2}}. \quad (130)$$

Por otro lado, la densidad de energía y las presiones anisótropas son:

$$\mu = \frac{1}{32\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ a^2 \cos^2 \Theta [(2R + c_1)^2 - 2m(2R^2 + 2c_1 R + c_1^2 - 2c_2)] - (R^2 + c_1 R + c_2) [2(2R + c_1)(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)m_{,R} + m(4(R^2 + c_1 R + 2c_2) - c_1^2)] + 4[(R^2 + c_2)^2 + (c_1 R + c_2)^2] + 4(2c_1 R^3 - c_2^2) + 2a^2(c_1^2 - 4c_2) \right\}, \quad (131)$$

$$P_R = -\mu + \frac{1}{16\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ m[(c_1 R - c_2)^2 + c_2(R - c_1)^2 + R(c_1^3 - 5c_2 R) - 5c_2^2] + a^2(c_1^2 - 4c_2) \right\}, \quad (132)$$

$$P_\Theta = \frac{1}{32\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ 2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2) [(R^2 + c_1 R + c_2)(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)m_{,RR} + (2a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)(2R + c_1)m_{,R}] - m(c_1^2 - 4c_2)(R^2 + c_1 R + c_2) + a^2 \cos^2 \Theta [4(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R)(m - 1) + 2m(6c_2 - c_1^2) + c_1^2 + 8c_2] \right\}, \quad (133)$$

$$P_\Phi = P_\Theta + \frac{a^2 \sin^2 \Theta (c_1^2 - 4c_2)}{16\pi(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3}. \quad (134)$$

Adicionalmente, el escalar de curvatura es de la forma

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^3} \left\{ 4(c_1 R + c_2)^2 + 2a^2(c_1^2 - 4c_2) + 4R^2(R^2 + 2c_1 R + 2c_2) - 2(a^2 \cos^2 \Theta + R^2 + c_1 R + c_2)^2 [m_{,RR}(R^2 + c_1 R + c_2) + 2m_{,R}(2R + c_1)] - a^2 \cos^2 \Theta [4(m-1)(2(R^2 + c_1 R + c_2) + a^2 \cos^2 \Theta) - 4c_2 + c_1^2] - m(R^2 + c_1 R + c_2)(4(R^2 + c_1 R + 2c_2) - c_1^2) \right\}. \quad (135)$$

En el caso límite cuando $a \rightarrow 0$, obtenemos la solución semilla. Si ponemos a $c_1 = -2\sqrt{c_2}$ y $m(R) = 1 - 2M/(R - c_2) - (R - c_2)^2/c_1^2$ tendremos otra forma de generar una nueva solución a través de la solución de AdS como su semilla. Es importante señalar que en esta solución si se presenta una conservación de la estructura conforme del espaciotiempo. Naturalmente al tomar $c_1 = c_2 = 0$ y $m(R) = 1 - 2M/R$ tendremos la solución de Schwarzschild como solución semilla y a Kerr como su contraparte rotante generada por NJA. En otras palabras, como caso particular obtendremos el trabajo original realizado por Newman y Janis ¹⁷⁸. Por último, para el caso de la solución tipo Clase V se optó por no presentar los resultados obtenidos, debido a su gran extensión en las formas explícitas de todas las cantidades que hemos estudiado a lo largo de este capítulo; por tanto, con el objetivo de no extender más este trabajo, no se presentarán.

¹⁷⁸ Newman y Janis 1965

4. Conclusiones: Parte I

En esta primera parte del trabajo de grado se investigaron las formas más famosas en las que la comunidad científica ha desarrollado el *ansatz* de Newman Janis con el objetivo de implementarlo en varias situaciones de interés astrofísico. Adicionalmente, se realizó una revisión bibliográfica con respecto a las posibles explicaciones que le han atribuido diferentes autores; sin embargo, hasta la fecha no se tiene una explicación contundente referente al porqué de su eficacia, o cómo y cuándo funciona. Incluso, en muchos casos, las soluciones generadas por NJA resultan no satisfacer las ecuaciones de campo de Einstein Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016. A pesar de todo ello, fruto de todas estas investigaciones han salido a la luz varios problemas específicos que deben resolverse para lograr este objetivo. El primero, y quizás el más urgente, subyace en hallar una interpretación física a la tetrada (6), dado que se encuentra inmersa en una transformación no-holomórfica, imposibilitando una eventual explicación e interpretación mediante el análisis complejo sobre variedades diferenciales. Infortunadamente, hasta el momento se han hallado varios indicios señalando la no existencia de una transformación de esta naturaleza que resuelva estos problemas, como se expuso en el comentario 1.12. Adicionalmente, existen los problemas en la forma totalmente arbitraria de complexificar algunas coordenadas y la difícil interpretación de varias cantidades tensoriales descritas en la tetrada (6).

Con base en todo lo anterior e inspirados en las ideas de Azreg Azreg-Aïnou 2014a, se realizó una generalización a NJA desde un punto de vista puramente geométrico mediante el uso del lenguaje moderno de la geometría diferencial. Para ello se partió de una solución semilla estática y esféricamente simétrica lo suficientemente general para generar una métrica maestra de naturaleza estacionaria y con simetría axial. De manera que se evitó complexificar alguno de los potenciales métricos o coordenadas de forma totalmente arbitraria, evitando así generar soluciones

carentes de una clara interpretación física que no puedan ser escritas en la carta coordenada de Boyern-Lindsquit. En consecuencia, surgió la necesidad de introducir un nuevo potencial métrico Ψ , de tal suerte que este dependerá fuertemente del problema físico en estudio, es decir, estará ligado al tipo de solución interior a la que se quiera arribar. Posteriormente se evidenció que Ψ obedece a un sistema de ecuaciones diferenciales que surgen de forma natural de las ecuaciones de Einstein; proporcionando a su vez, un sistema de ecuaciones adicional que describen los flujos termodinámicos del sistema. Así, en esencia esta forma de emplear NJA se reduce a la tarea de fijar a Ψ por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen fuertemente del modelo material que implementemos en nuestra situación particular.

En el presente trabajo de grado se conjeturó que el espaciotiempo generado por NJA (55), describe un modelo de fluido anisótropo sin flujo de calor. De manera que se obtuvieron las formas generales para cada uno de los flujos termodinámicos (60)-(65) y, adicionalmente, al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (64) - (65) se hallaron cinco clases de soluciones distintas, de tal suerte que cada una de ellas describe una clase general de fluidos anisótropos sin flujo de calor. Una vez fueron halladas, se determinaron las formas funcionales para los flujos de termodinámicos y la velocidad para cada una de las clases de soluciones obtenidas, medidas por un observador comovil a un elemento de fluido arbitrario. Identificando en el camino las singularidades de curvatura que cada una presenta por medio de la forma del escalar de Ricci en cada caso. Adicionalmente, se estudió un caso particular de fluido rotante para cada una de las clases de soluciones generales, donde se demostró que la única solución correspondiente a un fluido anisótropo rotante y libre de traza generado por NJA a través de la solución Clase II corresponde al espaciotiempo de Kerr-Newman. Asimismo, se observó que el ansatz de Newman-Janis destruye la propiedad de fluido perfecto en el límite estático aplicado a las soluciones que genera. En consecuencia, para la mayoría de los casos se evidenció que NJA no preserva la estructura conforme del espaciotiempo, razón por la cual se puede evi-

denciar que este, incluso en su generalización, depende fuertemente de la carta coordenada implementada. Por tanto, estos resultados ratifican los hallados previamente por Gutierrez-Piñeres y Quevedo en Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016.

Finalmente, es importante señalar la repetitiva relación que existe entre la densidad de energía y la presión anisótropa en dirección radial en la gran mayoría de soluciones halladas (ver, por ejemplo, las ecuaciones (89),(99),(105) o (112)): siendo la segunda la negativa de la primera. A priori, uno podría sugerir cualitativamente un comportamiento similar al descrito por la energía oscura Steven Weinberg: *Cosmology*. Oxford university press, 2008, o quizás el descrito por algún tipo de materia “exótica” generalmente interpretada como agujeros de gusano transitables Visser 1995; tal que ambas tienen en común la violación de una o varias condiciones de energía usuales impuestas en la gravedad de Einstein. En la segunda parte de este trabajo de grado nos centraremos en esta cuestión, y en la interpretación física atribuible a las soluciones interiores halladas mediante esta forma de implementar NJA.

5. Fluido Anisótropo con Flujo de Calor

*Everything should be made as
simple as possible, but no simpler.*

—Albert Einstein, *The New York
Times* (1950).

En el capítulo 2, conjeturamos que el observador comóvil interpreta las soluciones interiores rotantes generadas por NJA como un fluido anisótropo sin flujo de calor. Sin embargo, al ser comóvil a los elementos de fluido, no podrá medir cantidades que fluyan a la misma velocidad con respecto a él, brindándonos un modelo con información física oculta en su interior, producto de una desafortunada elección en la tétrada ortonormal que lo caracterizan.

En este capítulo realizaremos una transformación entre tétradas, es decir, aplicaremos una transformación de Lorentz entre ellas, con el objetivo de optar por un nuevo observador que no sea comóvil a los elementos de fluido, y a su vez nos permita describir la física de forma simple¹⁷⁹. Por consiguiente, describiremos la física vista por un nuevo observador ampliamente conocido en la literatura como ZAMO, tal que la transformación misma entre el observador comóvil (59) y él, nos dirá que el modelo de un fluido anisótropo sin flujo de calor es inconsistente desde su marco de referencia, debido a que surge un nuevo campo vectorial desconocido. Así pues, nuestra hipótesis nace en el hecho de que, al ser ZAMO un observador que no es comóvil, este podrá evidenciar un flujo de calor en la dirección de su movimiento codificado en este nuevo campo vectorial, sugiriendo de forma totalmente natural que

¹⁷⁹ Aunque claro, la simplicidad en la descripción de la realidad siempre será una cuestión de gustos. En nuestro caso, optaremos por una tétrada que nos permita obtener la información física completa del sistema, y que las formas funcionales en sus flujos termodinámicos y variables cinemáticas sean lo más compactas posibles.

él caracterizará las soluciones interiores generadas mediante NJA bajo un nuevo modelo de fluido anisótropo con flujo de calor, el cual se estudia a profundidad en el apéndice 4. A continuación se presentarán los resultados obtenidos.

5.1. Observador de Bardeen en NJA

Una estrella rotante puede ser modelada en relatividad general como un espacio-tiempo estacionario, axisimétrico y bajo un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor. Para la descripción de este tipo de geometrías es conveniente tomar las coordenadas de tiempo coordinado como $x^0 = T$ y $x^3 = \Phi$ como el ángulo azimutal alrededor del eje de simetría de la fuente gravitacional. Por otro lado, la característica estacionaria y axisimétrica del espaciotiempo nos exige que los coeficientes del tensor métrico sean independientes de T y Φ ¹⁸⁰. Adicional a ello deberemos satisfacer las siguientes tres condiciones¹⁸¹:

1. El espaciotiempo debe ser asintóticamente plano.
2. Deben existir dos vectores de Killing: uno tipo tiempo ξ_T y otro rotacional tipo espacio ξ_Φ ¹⁸².
3. Estos vectores de Killing conmutan (i.e., $[\xi_T, \xi_\Phi] = 0$), de tal suerte que exista una isometría sobre la variedad \mathcal{M} que simultáneamente revierta la dirección de los vectores de Killing. En otras palabras, requeriremos que el espaciotiempo sea invariante ante la inversión simultánea del tiempo y coordenada azimutal, i.e., transformaciones del tipo $T \mapsto -T$ y $\Phi \mapsto -\Phi$, las cuales físicamente

¹⁸⁰ Chandrasekhar 1998

¹⁸¹ John L. Friedman y Nikolaos Stergioulas: *Rotating relativistic stars*. Cambridge University Press, 2013

¹⁸² Sin embargo, en varios modelos de estrellas rotantes que giran rápidamente, como por ejemplo en el caso de modelos de agujeros negros, tendremos ergoregiones en las cuales ξ_T será tipo espacio y ξ_Φ tipo tiempo.

implicarán que, sea lo que sea la fuente gravitacional, esta tendrá movimientos puramente rotacionales alrededor de su eje de simetría, para los cuales su tensor de energía-momentum asociado deberá cumplir con esta misma invariancia.

Al cumplir estos requerimientos se puede demostrar que una forma apropiada del tensor métrico para un espaciotiempo estacionario y axisimétrico con signatura Lorentziana +2, adopta la siguiente estructura ¹⁸³:

$$\mathcal{G} = -e^{2\nu} dT \otimes dT + e^{2\mu} dR \otimes dR + e^{2\eta} d\Theta \otimes d\Theta + e^{2\lambda} (d\Phi - \omega dT)^2, \quad (136)$$

donde $\nu, \mu_2, \mu_3, \lambda$ y ω son funciones de la coordenada radial R y colatitudinal Θ .

Para una estrella rotante, la asimetría bajo la inversión de la coordenada temporal implica que no existirá una familia de superficies ortogonales a ξ_T , implicando así un tensor métrico donde ξ_T y ξ_Φ no serán ortogonales entre sí, hecho que se puede evidenciar en (136). Esta carencia de ortogonalidad es medida por el potencial $\omega(R, \Theta)$, el cual describirá el *dragging* gravitacional para observadores inerciales.

En nuestro caso, el tensor métrico obtenido a través de NJA (55) se puede llevar a la forma (136), cuyos potenciales métricos y *dragging*, adoptarán la forma

$$e^{2\nu} = \frac{\Psi \Delta}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}, \quad e^{2\mu} = \frac{\Psi}{\Delta}, \quad e^{2\eta} = \Psi, \quad (137)$$

$$e^{2\lambda} = \frac{\Psi \sin^2 \Theta}{\rho^4} [(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta]$$

y

¹⁸³ Chandrasekhar 1998

$$\omega = -\frac{\mathcal{G}_{T\Phi}}{\mathcal{G}_{\Phi\Phi}} = \frac{(K - FH)a}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}, \quad (138)$$

respectivamente. Donde hemos definidos las cantidades $\rho^2 \equiv K + a^2 \cos^2 \Theta$ y $\Delta = FH + a^2$.

Ahora bien, para este tipo de soluciones estacionarias, axisimétricas y asintóticamente planas, nos será bastante útil introducir un conjunto local de observadores, quienes de cierta manera “rotarán con la geometría”¹⁸⁴. Cada observador llevará consigo una tétrada ortonormal (ver apéndice 2), tal que en lugar de intentar describir objetos geométricos (i.e., vectores, uno-formas, tensores, etc.) con base a las componentes coordenadas en cada punto, les será mucho más fructífero describir estos objetos a través de sus proyecciones sobre su tétrada ortonormal. En otras palabras, podrán describir mejor la física a través de las componentes medidas en su marco local (el cual naturalmente será minkowskiano, teniendo en cuenta el principio de equivalencia fuerte). La decisión entre escoger un observador u otro vendrá gobernada por el hecho de cuál de los dos describirá la física de tal suerte que parezca más “simple” y completa en su tétrada ortonormal. En conclusión, para métricas escritas de la forma (136), existirá un observador que logrará nuestro objetivo de describir la física de forma mucho más simple: el observador con momentum angular cero, o mejor conocido en la literatura como ZAMO (*Zero Angular Momentum Observer*, por sus siglas en inglés) u observador de Bardeen.

Con base en lo anterior, podemos reescribir a (136) como

$$\mathcal{G} = -\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{M} \otimes \mathbf{M} + \mathbf{O} \otimes \mathbf{O}, \quad (139)$$

¹⁸⁴ James M Bardeen: *Kerr metric black holes*. En: *Nature* 226.5240 (1970), págs. 64-65

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} \equiv \omega^{(0)} &= e^\nu dT & \Rightarrow & \omega^{(0)}_\alpha = (e^\nu, 0, 0, 0), \\
\mathbf{A} \equiv \omega^{(1)} &= e^\mu dR & \Rightarrow & \omega^{(1)}_\alpha = (0, e^\mu, 0, 0), \\
\mathbf{M} \equiv \omega^{(2)} &= e^\eta d\Theta & \Rightarrow & \omega^{(2)}_\alpha = (0, 0, e^\eta, 0), \\
\mathbf{O} \equiv \omega^{(3)} &= e^\lambda (d\Phi - \omega dT) & \Rightarrow & \omega^{(3)}_\alpha = e^\lambda (-\omega, 0, 0, 1),
\end{aligned} \tag{140}$$

corresponden a la tétrada escrita en los elementos de la base de uno-formas asociada a (139). Al efectuar

$$e_{(a)}^\beta = \eta_{(a)(b)} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \omega^{(b)}_\alpha : \quad \eta_{(a)(b)} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1),$$

obtendremos las tétradas escritas en los elementos de la base vectorial, dados por

$$\begin{aligned}
e_{(0)} &= e^{-\nu} (\partial_\Phi + \omega \partial_T) & \Rightarrow & e_{(0)}^\beta = e^{-\nu} (1, 0, 0, \omega), \\
e_{(1)} &= e^{-\mu} \partial_R & \Rightarrow & e_{(1)}^\beta = (0, e^{-\mu}, 0, 0), \\
e_{(2)} &= e^{-\eta} \partial_\Theta & \Rightarrow & e_{(2)}^\beta = (0, 0, e^{-\eta}, 0), \\
e_{(3)} &= e^{-\lambda} \partial_\Phi & \Rightarrow & e_{(3)}^\beta = (0, 0, 0, e^{-\lambda}).
\end{aligned} \tag{141}$$

Así, debido a que en (140) y (141) la métrica es Minkowskiana, ellos representarán un marco localmente inercial¹⁸⁵. Una vez hecho esto, consideremos un punto en el espaciotiempo donde podremos asignar una velocidad \mathbf{u} , cuyas componentes se definen como $u^\alpha = dx^\alpha/ds$, donde ds corresponde a la raíz cuadrada del elemento de línea (i.e., el tensor métrico en el lenguaje antiguo $ds^2 = \mathcal{G}$), tal que

¹⁸⁵ Chandrasekhar 1998

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ds}{dT}\right)^2 &= -e^{2\nu} + e^{2\lambda}\left(\frac{d\Phi}{dT} - \omega\right)^2 + e^{2\mu}\left(\frac{dR}{dT}\right)^2 + e^{2\eta}\left(\frac{d\Theta}{dT}\right)^2 : \quad \Omega \equiv \frac{d\Phi}{dT} \\
&= -e^{2\nu} + e^{2\lambda}(\Omega - \omega)^2 + e^{2\mu}(V^R)^2 + e^{2\eta}(V^\Theta)^2 \\
&= -e^{2\nu}\left[1 - e^{2(\lambda-\nu)}(\Omega - \omega)^2 - e^{2(\mu-\nu)}(V^R)^2 - e^{2(\eta-\nu)}(V^\Theta)^2\right] \\
&= -e^{2\nu}[1 - V^2],
\end{aligned}$$

donde Ω corresponde a la velocidad angular del fluido, visto por un observador en reposo en el infinito (i.e., un observador asintótico con una velocidad en dirección del vector de Killing tipo tiempo ξ_T), y hemos definido $V^2 \equiv e^{2(\lambda-\nu)}(\Omega - \omega)^2 - e^{2(\mu-\nu)}(V^R)^2 - e^{2(\eta-\nu)}(V^\Theta)^2$. Así pues,

$$u^T = \frac{dT}{ds} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad u^R = \frac{dR}{ds} = V^R u^T, \quad u^\Theta = \frac{d\Theta}{ds} = V^\Theta u^T, \quad u^\Phi = \frac{d\Phi}{ds} = \Omega u^T.$$

En resumen,

$$u^\alpha = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1 - V^2}} (1, V^R, V^\Theta, \Omega). \quad (142)$$

Sin embargo, nos será mucho más útil asignar en este mismo punto la misma velocidad, pero escrita en el marco local inercial con base en (140) y (142), a través de

$$u^{(a)} = \omega^{(a)}{}_\alpha u^\alpha,$$

tal que concluimos que la velocidad escrita en el lenguaje de las tétradas, adopta la forma

$$u^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} (1, V^R e^{(\mu-\nu)}, V^\Theta e^{(\eta-\nu)}, (\Omega - \omega) e^{(\lambda-\nu)}). \quad (143)$$

Ahora bien, la línea de mundo medida por ZAMO describirá trayectorias con $R = cte$ y $\Theta = cte$. Por tanto, el punto en consideración describirá órbitas circulares con una velocidad angular Ω en el marco elegido (i.e., $V^R = V^\Theta = 0$). Bajo estas circunstancias podremos reescribir la velocidad (143) como

$$u^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} (1, 0, 0, (\Omega - \omega) e^{(\lambda-\nu)}), \quad (144)$$

donde

$$V^2 = e^{2(\lambda-\nu)} (\Omega - \omega)^2 \quad \Rightarrow \quad V = e^{(\lambda-\nu)} (\Omega - \omega). \quad (145)$$

Una vez obtenidas las expresiones (144) y (145), podemos concluir que

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= (1 - V^2)^{-1/2}, \\ u^{(3)} &= (1 - V^2)^{-1/2} (\Omega - \omega) e^\lambda = V e^\nu u^{(0)}, \\ u_{(0)} &= \eta_{(0)(0)} u^{(0)} = -u^{(0)} = -(1 - V^2)^{-1/2}, \\ u_{(3)} &= \eta_{(3)(3)} u^{(3)} = u^{(3)} = -u_{(0)} V e^\nu = -V e^\nu (1 - V^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (146)$$

Así pues, podríamos atribuirle a ZAMO una interpretación física observando que, en la descripción de una estrella en relatividad general, las partículas que caen desde el infinito hacia la fuente gravitacional con un momento angular¹⁸⁶ diferente de cero

¹⁸⁶ Aquí y en todo momento nos referiremos realmente al momento angular orbital, excluyendo el espín.

adquieren una velocidad angular diferente de cero en la dirección de rotación de la estrella (ver (145)). Formalmente hablando, la existencia de un vector de Killing rotacional ξ_{Φ} nos conduce a la conservación del momentum angular $L = p_{(a)} \xi_{\Phi}^{(a)}$ de una partícula con momentum $p^{(a)} = m u^{(a)}$, medido en el marco local. Esta conservación de L se obtiene debido a que estamos recorriendo una geodésica (i.e., $a = 0$). Una partícula con un momento angular nulo $L = 0$, por tanto, en su marco local tendrá una velocidad angular $u^{(3)} = 0$, i.e.,

$$L = 0 \Rightarrow u^{(3)} = m u^{(a)} \xi_{\Phi}^{(a)} = 0 : \quad u^{(3)} = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}}$$

$$\Rightarrow u^{(3)} = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}} = 0 \Leftrightarrow V = e^{(\lambda - \nu)} (\Omega - \omega) = 0.$$

Así, una partícula con momento angular cero y vista por ZAMO debe satisfacer necesariamente que

$$\Omega = \omega. \tag{147}$$

En otras palabras, para ZAMO una partícula inicialmente en el infinito que cae libremente de forma radial hacia la estrella (i.e., con momento angular cero) adquirirá una velocidad angular medida por un observador inercial en el infinito $\Omega = \omega$, a pesar de que su momento angular a lo largo de toda su trayectoria sea cero (ella “rotará con la geometría”), por tanto sus líneas de mundo serán normales a las hipersuperficies $T = cte$ ¹⁸⁷.

Finalmente, con base en (147), la velocidad descrita por las componentes (146) adquirirá una forma muy *simple*, dada por

¹⁸⁷ Friedman y Stergioulas 2013

$$u^{(a)} = (1, 0, 0, 0) \quad \text{y} \quad u_{(a)} = (-1, 0, 0, 0). \quad (148)$$

Este observador nos será muy útil en la caracterización de las soluciones obtenidas en el capítulo 3, como veremos enseguida. Adicionalmente, ZAMO nos ayudará en la descripción de los *shadows* (ver capítulo 7) para las soluciones que estudiaremos en el capítulo 6.

5.2. Flujos termodinámicos, variables cinemáticas y condiciones de energía

En el capítulo 2 postulamos un modelo de materia correspondiente a un fluido anisótropo sin flujo de calor descrito por el tensor energía-momentum (57), medido por un observador comóvil caracterizado por la tétrada ortonormal (59). Sin embargo, como argumentamos al inicio de este capítulo, él no describirá la física de forma completa, por lo que surge la necesidad de incorporar a ZAMO en nuestra caracterización de soluciones interiores generadas por NJA.

Para describir la física vista por ZAMO, será fundamental realizar una transformación de Lorentz sobre el tensor energía-momentum (57), de tal suerte que nos lleve de la tétrada ortonormal comóvil (59) hacia la tétrada (141) que caracteriza a ZAMO. Para ello, recordemos las componentes descritas por (57), las cuales adoptan la forma

$$\begin{aligned} T^{TT} &= \frac{\mu (K + a^2)^2 + P_\Phi \Delta a^2 \sin^2 \Theta}{\Psi \Delta}, & T^{T\Phi} &= T^{\Phi T} = \frac{a [\mu (K + a^2) + P_\Phi \Delta]}{\Psi \Delta}, \\ T^{RR} &= \frac{P_R \Delta}{\Psi}, & T^{\Theta\Theta} &= \frac{P_\Theta}{\Psi}, & T^{\Phi\Phi} &= \frac{\mu a^2 \sin^2 \Theta + P_\Phi \Delta}{\Psi \Delta \sin^2 \Theta}, \end{aligned} \quad (149)$$

donde la densidad de energía μ y las presiones anisótropas P_R , P_Θ y P_Φ obedecen a las expresiones (60), (61), (62) y (63) medidas por (59), respectivamente. Ahora bien, una vez descritas las componentes (149), aplicaremos una transformación de la forma (280), i.e.,

$$\mathcal{S}^{(a)(b)} = \omega^{(a)}{}_{\mu} \omega^{(b)}{}_{\nu} T^{\mu\nu}, \quad (150)$$

donde $\omega^{(a)}{}_{\mu}$ corresponde a la tétrada (140) y $\mathcal{S}^{(a)(b)}$ al tensor energía-momentum medido por ZAMO. Al efectuar esta transformación Lorentziana obtenemos que este tensor toma la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(0)(0)} &= \omega^{(0)}{}_T \omega^{(0)}{}_T T^{TT}, \\ \mathcal{S}^{(0)(3)} &= T^{(3)(0)} = \omega^{(0)}{}_T \omega^{(3)}{}_T T^{TT} + \omega^{(0)}{}_T \omega^{(3)}{}_{\Phi} T^{T\Phi}, \\ \mathcal{S}^{(1)(1)} &= \omega^{(1)}{}_R \omega^{(1)}{}_R T^{RR}, \\ \mathcal{S}^{(2)(2)} &= \omega^{(2)}{}_{\Theta} \omega^{(2)}{}_{\Theta} T^{\Theta\Theta}, \\ \mathcal{S}^{(3)(3)} &= \omega^{(3)}{}_T \omega^{(3)}{}_T T^{TT} + 2\omega^{(3)}{}_T \omega^{(3)}{}_{\Phi} T^{T\Phi} + \omega^{(3)}{}_{\Phi} \omega^{(3)}{}_{\Phi} T^{\Phi\Phi}. \end{aligned} \quad (151)$$

Sin embargo, como veremos más adelante, nos será de utilidad describirlo en componentes, por lo que será necesario aplicar otra transformación de Lorentz (280), i.e.,

$$\mathcal{S}^{\mu\nu} = e_{(a)}{}^{\mu} e_{(b)}{}^{\nu} \mathcal{S}^{(a)(b)}, \quad (152)$$

donde $e_{(a)}{}^{\mu}$ corresponde a la tétrada (141). Al efectuar esta operación obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{TT} &= T^{TT}, & \mathcal{S}^{T\Phi} &= \mathcal{S}^{\Phi T} = 2\omega T^{TT} - T^{T\Phi}, & \mathcal{S}^{RR} &= T^{RR}, \\ \mathcal{S}^{\Theta\Theta} &= T^{\Theta\Theta}, & \mathcal{S}^{\Phi\Phi} &= 4\omega (\omega T^{TT} - T^{T\Phi}) + T^{\Phi\Phi}, \end{aligned} \quad (153)$$

donde ω corresponde al *dragging* gravitacional descrito por (138). En conclusión, el tensor energía-momentum (57) con componentes (149) y visto por ZAMO, adquiere

la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & T^{TT} \partial_T \otimes \partial_T + 2 (2\omega T^{TT} - T^{T\Phi}) \partial_T \otimes \partial_\Phi + T^{RR} \partial_R \otimes \partial_R + T^{\Theta\Theta} \partial_\Theta \otimes \partial_\Theta \\ & + [4\omega (\omega T^{TT} - T^{T\Phi}) + T^{\Phi\Phi}] \partial_\Phi \otimes \partial_\Phi. \end{aligned} \quad (154)$$

Ahora bien, a diferencia de la interpretación física que le atribuimos al modelo de materia en el capítulo 3, aquí postularemos que ZAMO medirá un fluido anisótropo con flujo de calor (ver apéndice 4), adscrito a la forma canónica del tensor energía-momentum (305), i.e.,

$$\mathcal{S}^{(a)(b)} = (\mu_Z + \mathcal{P}_Z) u^{(a)} u^{(b)} + \mathcal{P}_Z \mathcal{G}^{(a)(b)} + \mathcal{Q}^{(a)} u^{(b)} + \mathcal{Q}^{(b)} u^{(a)} + \Pi^{(a)(b)},$$

donde $\mu_Z, \mathcal{P}_Z, \mathcal{Q}^{(a)}$ y $\Pi^{(a)(b)}$ corresponden a la densidad de energía, la presión isotropa promedio, el vector flujo de calor y las presiones anisótropas medidas por ZAMO¹⁸⁸, respectivamente. Por último, $u^{(a)}$ corresponde a la velocidad descrita por la ecuación (148).

Lo siguiente será hallar la forma de los flujos termodinámicos descritos en (306) - (309) con base en la velocidad (148) y las componentes del tensor energía-momentum (153), así:

La densidad de energía (306) adquiere la forma $\mu_Z = \mathcal{S}^{(a)(b)} u_{(a)} u_{(b)}$, tal que después de efectuar las respectivas operaciones, obtenemos¹⁸⁹

¹⁸⁸ Aquí hemos puesto el subíndice “Z” en los flujos termodinámicos para especificar que estos son medidos por ZAMO, y así evitar confusiones con la notación.

¹⁸⁹ Es importante señalar que, a pesar que a lo largo de esta sección nos hemos enfocado en expresar todas las cantidades en el lenguaje de las tétradas, los flujos termodinámicos (155) - (162) se expresarán en componentes debido a la mayor facilidad a la hora de realizar los respectivos cálculos simbólicos con Maple 2021.

$$\mu_Z = e^{2\nu} T^{TT}. \quad (155)$$

La presión isotrópica promedio (307) adquirirá la forma $\mathcal{P}_Z = \frac{1}{3} \mathcal{H}^{(a)(b)} \mathcal{S}_{(a)(b)}$, de tal suerte que después de hacer un poco de álgebra, concluiremos que

$$\mathcal{P}_Z = \frac{1}{3} \{ [e^{2\nu} - (1 + \omega)^2] T^{TT} + [\omega^2 T^{TT} - 2\omega T^{T\Phi} + T^{\Phi\Phi}] + T^{RR} + T^{\Theta\Theta} \}. \quad (156)$$

El flujo de calor (308), por su parte, tomará la forma $\mathcal{Q}_{(a)} = -(\mu_z u_{(a)} + \mathcal{S}_{(a)(b)} u^{(b)})$, donde veremos que el calor fluirá sólo en la dirección de rotación de la fuente (i.e., en dirección Φ). Por tanto,

$$\mathcal{Q}^\Phi = (\omega T^{TT} - T^{T\Phi}) e^{\nu+\lambda}, \quad (157)$$

tal que podemos inferir o, quizás sospechar, que el *dragging* gravitacional es el generador de un gradiente de temperatura responsable de un flujo de calor a lo largo de la dirección azimutal de la fuente en estudio. Sin embargo, aún no se tiene una interpretación física clara con respecto a lo que podría significar un flujo de calor en la dirección de rotación de un cuerpo astrofísico arbitrario.

Por último, las presiones anisótropas (309) adoptan la forma $\Pi_{(a)(b)} = \mathcal{H}_{(a)}^{(c)} \mathcal{H}_{(b)}^{(d)} (\mathcal{S}_{(c)(d)} - \mathcal{P} \mathcal{H}_{(c)(d)})$, donde las diferentes componentes de este tensor son:

$$\Pi^{TT} = 4 e^{2\nu} T^{TT} - \mathcal{P}_Z (1 - e^{2\nu}), \quad (158)$$

$$\Pi^{T\Phi} = \Pi^{\Phi T} = 2 \mathcal{Q}^\Phi, \quad (159)$$

$$\Pi^{RR} = e^{2\mu_2} [T^{RR} - \mathcal{P}_Z], \quad (160)$$

$$\Pi^{\Theta\Theta} = e^{2\mu_3} [T^{\Theta\Theta} - \mathcal{P}_Z], \quad (161)$$

$$\Pi^{\Phi\Phi} = [\omega^2 T^{TT} - 2\omega T^{T\Phi} + T^{\Phi\Phi} + \mathcal{P}(1 - \omega)^2] e^{2\lambda}. \quad (162)$$

Cabe resaltar que hemos expresado los flujos termodinámicos (155) - (162), en función de los potenciales métricos (137), el *dragging* (138) y las componentes del tensor energía-momentum (149) hallado en el capítulo 2. Adicionalmente, de la ecuación (159) vemos que la tensión anisótropa $\Pi^{T\Phi}$ es generada por el flujo de calor en la dirección de rotación de la fuente discutido anteriormente; por otro lado, con base en la ecuación de Einstein $G^{T\Phi} = 8\pi S^{T\Phi}$, vemos que el lado derecho está relacionado con la componente $\mathcal{G}^{T\Phi}$ del tensor métrico que, como discutimos en la sección 5.1, codifica la información del *dragging* gravitacional, luego este es el generador del flujo de calor y, a su vez, de la tensión anisótropa $\Pi^{T\Phi}$.

Ahora bien, una vez determinados todos los flujos termodinámicos, nuestro siguiente paso será determinar la forma general de las variables cinemáticas medidas por ZAMO:

Con base en (314), las componentes diferentes de cero para el tensor de vorticidad

son:

$$\omega_{TR} = -(e^\nu)_{,R}, \quad (163)$$

$$\omega_{T\Theta} = -(e^\nu)_{,\Theta}. \quad (164)$$

Adicionalmente, las componentes diferentes de cero para el tensor de cizalladura (315), adoptaron la forma

$$\sigma_{TR} = -\omega \omega_{,R} e^{2\lambda-\nu} + (e^\nu)_{,R}, \quad (165)$$

$$\sigma_{T\Theta} = \omega \omega_{,\Theta} e^{2\lambda-\nu} + (e^\nu)_{,\Theta}, \quad (166)$$

$$\sigma_{R\Phi} = \omega_{,R} e^{2\lambda-\nu}, \quad (167)$$

$$\sigma_{\Theta\Phi} = \omega_{,\Theta} e^{2\lambda-\nu}. \quad (168)$$

Por otro lado, el escalar de expansión (316), visto por ZAMO, es igual a cero. Este resultado nos permite inferir que el elemento de fluido no presentará ningún tipo de cambio volumétrico a lo largo de su línea de mundo para todas las clases de soluciones halladas mediante NJA bajo este modelo de materia.

Finalmente, se determinaron las formas explícitas de las condiciones de energía débil (317), fuerte (318) y dominante (321) vistas por ZAMO, adoptando la siguiente forma general:

$$\text{WEC: } e^{2\nu} T^{TT} \geq 0, \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \text{SEC: } & (\nu_{,RR} - \nu_{,R}\mu_{,R} + \eta_{,R}\nu_{,R} + \lambda_{,R}\nu_{,R} + \nu_{,R}^2) e^{-2\mu} \\ & + (\nu_{,\Theta\Theta} - \nu_{,\Theta}\eta_{,\Theta} + \nu_{,\Theta}\lambda_{,\Theta} + \nu_{,\Theta}\mu_{,\Theta} + \nu_{,\Theta}^2) e^{-2\eta} \\ & - \frac{1}{2} (\omega_{,R}^2 e^{-2\mu} + \omega_{,\Theta}^2 e^{-2\eta}) e^{-2(\nu-\lambda)} \geq 0, \end{aligned} \quad (170)$$

$$\text{DEC: } [T^{T\Phi} - (1 + 2\omega) T^{TT}] e^\nu \leq 0, \quad (171)$$

tal que hemos expresado las hemos en función de los potenciales métricos (137), el *dragging* (138) y las componentes del tensor energía-momentum (149).

Por último, con el objetivo de aplicar estos resultados a las soluciones que generamos mediante NJA, tomaremos la solución de Kerr-Newman que surge como un caso particular de la solución Clase II estudiada en la subsección 3.2.

5.3. Caso particular: Kerr-Newman

Como vimos en el capítulo 2, al tomar las constantes $c_2 = 2\sqrt{2}$ y $c_3 = 0$, junto con los potenciales métricos de la forma $F = G = 1 - 2M/R + Q^2/R^2$ y $H = R^2$ en la solución Clase II, llegaremos al espaciotiempo de Kerr-Newman, descrito por el tensor métrico

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & - \left(\frac{dR \otimes dR}{\Delta_{KN}} + d\Theta \otimes d\Theta \right)^2 \rho_{KN}^2 + (dT - a \sin^2 \Theta d\Phi)^2 \frac{\Delta_{KN}}{\rho_{KN}^2} \\ & - [(R^2 + a^2) d\Phi - a dT]^2 \frac{\sin^2 \Theta}{\rho_{KN}^2}, \end{aligned} \quad (172)$$

donde

$$\rho_{KN}^2 = R^2 + a^2 \cos^2 \Theta \quad \text{y} \quad \Delta_{KN} = R^2 - 2MR + a^2 + Q^2. \quad (173)$$

A continuación, analizaremos el comportamiento de las tres condiciones de energía (169),(170) y (171) donde, por simplicidad, tomaremos la masa normalizada $M = 1$ ¹⁹⁰ y, para evitar singularidades desnudas, impondremos las condiciones $a \leq M$ ¹⁹² y $Q < M$ sobre la masa M , la carga eléctrica Q y el parámetro de rotación a ¹⁹⁴. Por otro lado, también es importante señalar que, al ser la traza del tensor energía-momentum un invariante relativista en las ecuaciones de Einstein, esta será la misma medida por cualquier observador. En el caso para Kerr-Newman, vimos que la traza de este tensor es nula, vista por el observador comóvil (59). Luego, vista

¹⁹⁰ El procedimiento descrito a continuación lo hubiésemos podido realizar utilizando la masa ADM. Sin embargo, para no extender más este trabajo de investigación, aquí y en el resto del trabajo deberemos entender a la masa M simplemente como una constante que aparece en el tensor métrico (172) para su geometría espaciotemporal externa distante. Operacionalmente, esta masa M es la que usualmente obtienen los astrónomos usando la tercera ley de Kepler (para más detalles de esta definición operacional de masa, remitirse a la sección 19.3 del MTW ¹⁹¹).

¹⁹² Otra motivación para imponer esta condición sobre la masa y el parámetro de rotación, es garantizar que la velocidad del horizonte de eventos nunca supere la velocidad de la luz. En el caso cuando $M = a$ obtendremos un agujero negro extremo, el cual rotará con esta velocidad superlumínica. Por el contrario, al tomar soluciones con $a > M$ tendremos velocidades de rotación en el horizonte de eventos que exceden este límite impuesto por la relatividad especial (ver apéndice A.1 en ¹⁹³).

¹⁹⁴ Asumiremos aquí, y en lo que resta del trabajo, que el espaciotiempo de Kerr-Newman está caracterizado por los tres parámetros reales M, a y Q . Ellos están relacionados con la masa \mathfrak{M} en $[kg]$, el momento angular \mathfrak{J} en $[kg m^2 s^{-1}]$, y la carga q en $[kg^{1/2} m^{3/2} s^{-1}]$ por las relaciones

$$\mathfrak{M} = \frac{c^2 M}{G}, \quad \mathfrak{J} = a c \mathfrak{M}, \quad q = \frac{c Q}{\sqrt{G}},$$

donde c es la velocidad de la luz y G la constante de gravitación universal. Sin embargo, en todo momento hemos tomado a estas dos constantes igual a la unidad; asimismo, con el objetivo de obtener un mejor manejo en los rangos expresados en el cuadro 1 y en los perfiles de las cantidades dinámicas del sistema, tomaremos la masa M igual a la unidad y los valores de carga Q y rotación a oscilando entre los valores de cero y la unidad.

por ZAMO también lo será, implicando así que la condición de energía fuerte (320) se reduzca a la misma condición de energía débil (317) para este caso particular. Al analizar el comportamiento de las condiciones de energía al variar la carga Q y el parámetro de rotación a , se observó que sólo para ciertos valores específicos de estos se satisfacían las condiciones de energía. Por ejemplo, se observó que estas condiciones sólo son satisfechas para un valor crítico en la carga y rotación de $Q = 0.176$ y $a = 0.999$, respectivamente. De lo contrario, las tres condiciones de energía eran violadas. Adicionalmente, se vio que en el caso de no-rotación, i.e., la solución de Reissner-Nordström o Schwarzschild sí se satisfacen todas estas condiciones. Todos estos resultados se resumen en el cuadro 1.

carga y rotación	WEC	SEC	DEC
$[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$	✓	✓	✓
$[0.177 \leq Q < 1; 0 < a < 0.999]$	✗	✗	✗
$[0 \leq Q < 1; a = 0]$	✓	✓	✓

Tabla 1. Comportamiento de las condiciones de energía aplicadas a las soluciones “interiores” de Kerr-Newman ($[Q \neq 0, a \neq 0]$), Kerr ($[Q = 0; a \neq 0]$), Reissner-Nordström ($[Q \neq 0, a = 0]$) y Shcwarszchild ($[Q = 0, a = 0]$) para diferentes valores de carga y rotación bajo un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor, visto por ZAMO. El símbolo en azul ✓ certifica el cumplimiento de una condición de energía en un rango particular de carga y rotación; por el contrario, el símbolo en rojo ✗ lo niega.

Como podemos observar del cuadro, en la solución de Kerr-Newman generada por NJA y bajo este tipo de fluido, predomina en su gran mayoría la violación de las condiciones de energía débil, fuerte y dominante, lo que usualmente nos dará lugar a algún tipo de materia exótica ¹⁹⁵. Una vez realizado este estudio, procederemos al análisis de los perfiles para los flujos termodinámicos (densidad de energía, flujo de calor, presiones isotropa y anisótropas) y las variables cinemáticas (tensor de cizalladura, escalar de expansión y vorticidad) del sistema, vistos por ZAMO.

¹⁹⁵ Morris y Thorne 1988

5.3.1. Flujos termodinámicos

A continuación, presentaré los perfiles obtenidos para los flujos termodinámicos gracias a la implementación de un código realizado mediante la herramienta computacional Maple 21, donde, como he mencionado antes, se puso la masa $M = 1$ y se realizó algunas variaciones para la carga Q y la rotación a evidenciando los comportamientos críticos para la densidad de energía μ , el flujo de calor Q^Φ , la presión isótropa promedio \mathcal{P} y las presiones anisótropas $\Pi^{\alpha\beta}$ ¹⁹⁶ bajo un rango en las coordenadas radial y colatitudinal de $0 \leq R \leq 5$ y $0 \leq \Theta \leq \pi$, respectivamente.

Densidad de energía:

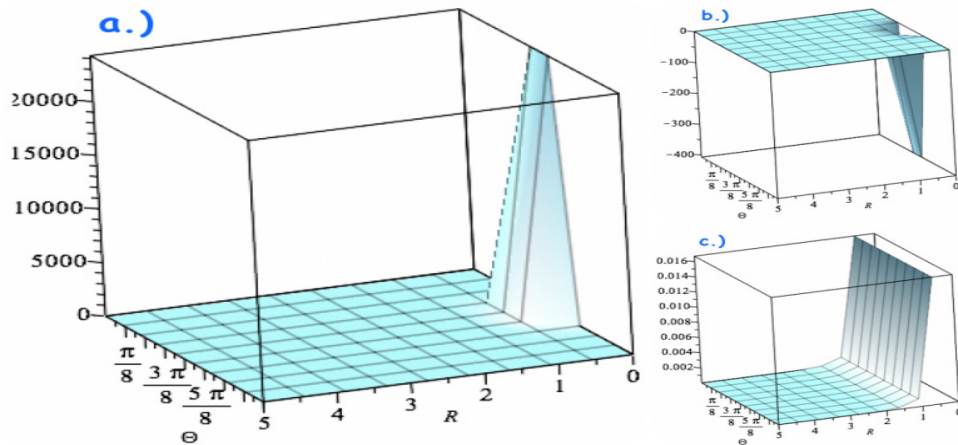


Figura 4. Densidad de energía obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.177, a = 0.5]$ y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Como vemos en la figura 4, la densidad de energía naturalmente expresa el mis-

¹⁹⁶ De la ecuación 158, vemos que en general la tensión transversal Π^{TT} será diferente de cero; sin embargo, esta tampoco nos brinda información sobre el comportamiento de las condiciones de energía. Por tal motivo se optó por no presentar el perfil descrito por esta tensión, dado que no participa en el análisis físico que queremos proporcionar a esta solución. Por otro lado, en relatividad general aún sigue abierta la discusión de lo que podría significar físicamente una presión anisótropa tipo tiempo, lo que hace aún más complicada su interpretación.

mo comportamiento descrito en el cuadro 1, evidenciando una densidad de energía positiva en los rangos $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$ y $[0 \leq Q < 1; a = 0]$, y un predominante comportamiento negativo para $[0.177 \leq Q < 1; 0 < a < 0.999]$. Adicionalmente, se observó un valor crítico de carga y rotación de $Q = 0.176$ y $a = 0.999$, donde cualquier ligera variación da lugar a una completa inversión para μ de positivo a negativo, evidenciando una dominante violación en las condiciones de energía en las regiones cerca su singularidad en forma de anillo, i.e., a la regiones aledañas a $R = 0$ y $\Theta = \pi/2$.

Flujo de calor:

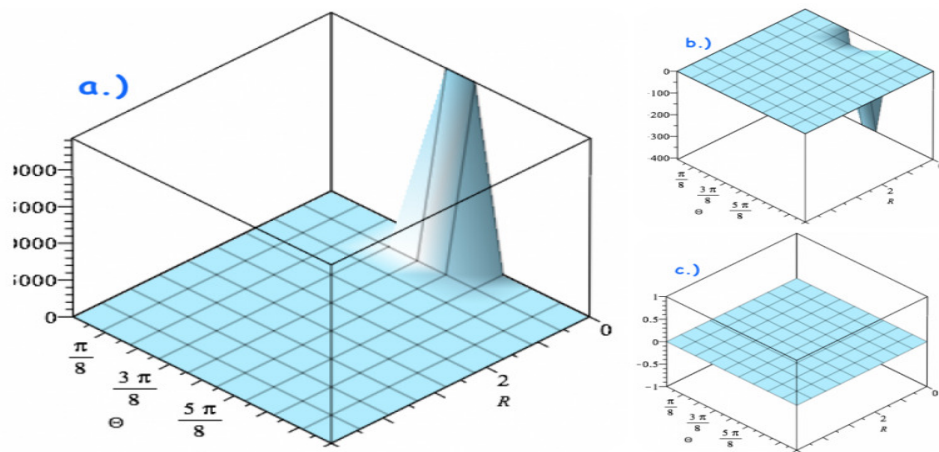


Figura 5. Flujo de calor obtenido para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.177, a = 0.999]$ y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.5, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Curiosamente, se observa cualitativamente un comportamiento muy similar entre la densidad de energía y el flujo de calor en las figuras 4 a.),b.) y 5 a.), b.), lo que ingenua y erróneamente nos podría llevar a pensar que ZAMO en este caso particular se comporta como un observador comovil, al igual que en el caso del observador (59). Sin embargo, es importante señalar que el comportamiento de flujo de calor nos está brindando la misma información en cuanto a los rangos de carga y rotación

donde existe una violación en las condiciones de energía. Adicionalmente, vemos en la figura 5 c.) que en el caso de Reissner-Nordström no existirá tal flujo de calor, corroborando nuestra hipótesis que este flujo surgirá en la dirección del *dragging* gravitacional producido por los esfuerzos anisótropos, como se puede apreciar en la ecuación (159).

Presión isotrópica promedio:

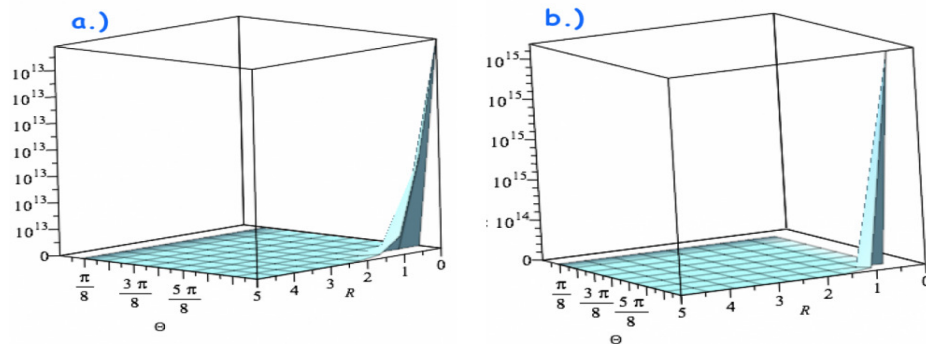


Figura 6. Presión isotrópica obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$ y en la figura b.) con $[Q = 0.7 a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

En el caso para la presión isotrópica promedio, se evidenció un comportamiento positivo y repetitivo en todo el rango que hemos implementado para la carga y rotación, i.e., $0 \leq (Q, a) < 1$, como se observa en la figura 6.

Tensión $\Pi^{T\Phi}$:

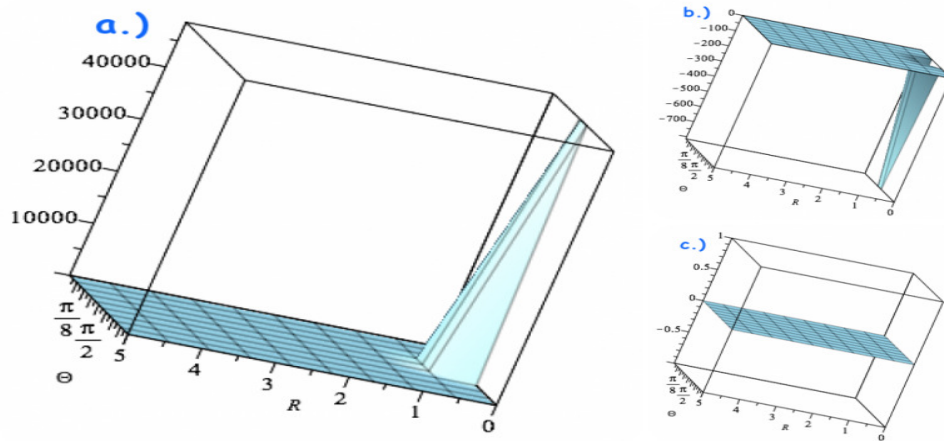


Figura 7. Tensión $\Pi^{T\Phi}$ obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.2, a = 0.999]$ y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.7, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

En el caso de la componente cruzada $\Pi^{T\Phi}$, en el primer rango de carga y rotación $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$ se obtiene un comportamiento positivo, como se aprecia en la figura 7 a.); sin embargo, cualquier ligera variación de estos dos parámetros nos dará un resultado predominantemente negativo en esta componente de presión anisótropa, como se observa en la figura 7 b.). Finalmente, para el caso de no rotación se evidenció que esta presión se anula, como vemos en la figura 7 c.), corroborando una vez más que el *dragging* gravitacional es el generador del flujo de calor, y a su vez de la presión anisótropa $\Pi^{T\Phi}$.

Tensión en la dirección radial Π^{RR} :

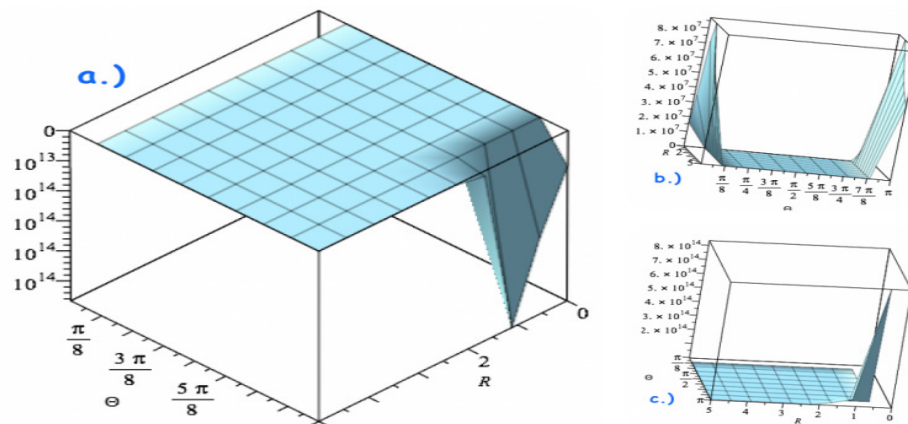


Figura 8. Tensión en la dirección radial obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.177, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.8, a = 0.999]$ y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.3, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Para la tensión radial vemos que, en el rango donde se violan las condiciones de energía, se observa una presión radial negativa, como se observa en la figura 8 a.). Curiosamente, este mismo comportamiento es característico del tipo de materia “exótica” teorizada por Azreg¹⁹⁷, Morris y Thorne¹⁹⁸ para soluciones de agujeros de gusano, lo que nos da una ligera sospecha de la interpretación física que podríamos atribuirle a la solución de Kerr-Newman bajo este modelo de materia generado por NJA. Por el contrario, en el caso de Reissner-Nordström se observa un comportamiento positivo, al igual que en el rango $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$, como se observa en las figuras 8 b.) y c.). Finalmente, en el caso de cero rotación y cero carga (i.e., Schwarzschild), la tensión radial es nula, de lo cual podemos inferir que la carga es la verdadera generadora de Π^{RR} .

¹⁹⁷ Azreg-Ainou 2016

¹⁹⁸ Morris y Thorne 1988

Tensión en la dirección colalitudinal $\Pi^{\Theta\Theta}$:

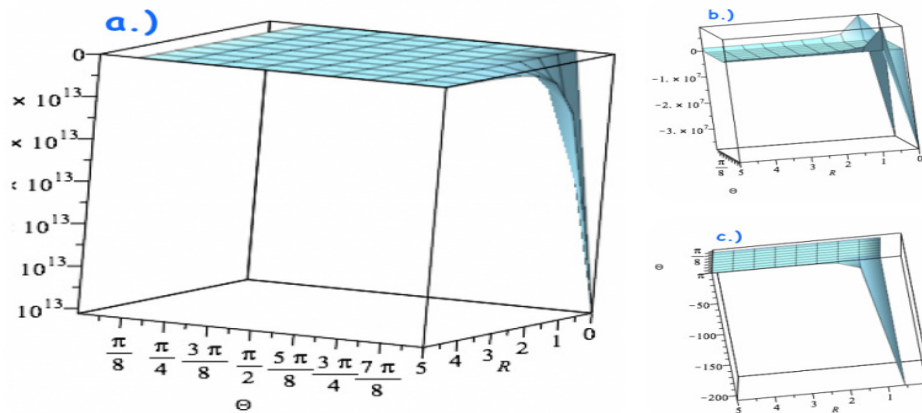


Figura 9. Tensión en la dirección colalitudinal obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.177, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.8, a = 0.8]$ y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.3, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

La tensión en la dirección Θ presenta un comportamiento predominantemente negativo en todos los rangos estudiados para la carga y rotación, como se puede observar en la figura 9. Naturalmente, para Schwarzschild esta se anulará y, así, nuevamente inferimos que la carga es la verdadera generadora de esta tensión.

Tensión en la dirección azimutal $\Pi^{\Phi\Phi}$:

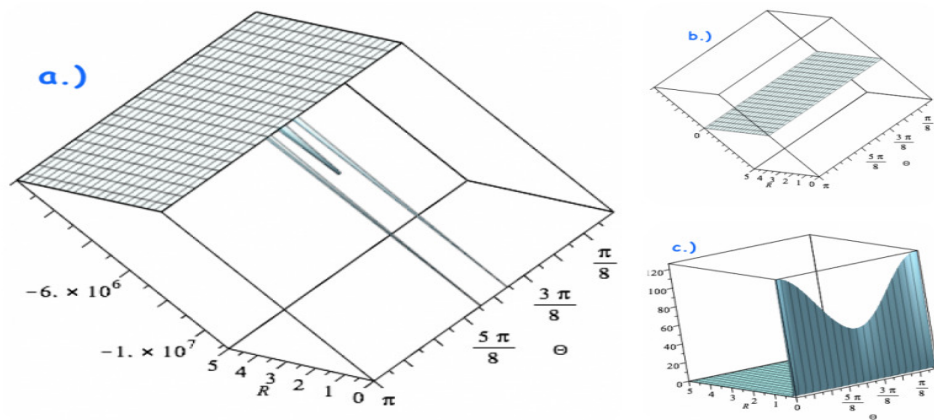


Figura 10. Tensión en la dirección azimutal obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.177, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0, a = 0.8]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.3 a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Finalmente, en la dirección azimutal nuevamente predomina un comportamiento negativo: al realizar cualquiera variación no nula de carga y rotación siempre obtendremos un comportamiento negativo, como se observa en la figura 10 a.). Sin embargo, para cualquier valor de rotación y carga nula (i.e., Kerr) la tensión anisótropa se anulará, hecho que se cumple para todas las componentes de presión anisótropa para Kerr-Newman, brindándonos la seguridad necesaria para afirmar que la carga es la verdadera generadora de las presiones anisótropas, como apreciamos en la figura 10 b.). Por último, para el caso de Reissner-Nordström curiosamente se observó un comportamiento positivo en la presión azimutal, como se observa en la figura 10 c.).

Con base en los resultados obtenidos en los flujos termodinámicos vemos que en el caso para el cual generamos la solución Kerr tomando como semilla a Schwarzschild, todos los flujos se anulan, dando una así una solución de vacío tomando como semilla una solución de vacío. De manera que efectivamente se está satisfaciendo el

primer teorema hallado por Drake y Szkeres ¹⁹⁹, el cual fue estudiado en la sección 1.4.

5.3.2. Variables cinemáticas

Por último, presentaré los gráficos realizados para las variables cinemáticas obtenidos para la solución de Kerr-Newman bajo este modelo de fluido y usando la herramienta de computación Maple 21. Al igual que en los flujos de termodinámicos, la masa es igual a la unidad y se realizaron variaciones para la carga y rotación, exhibiendo los diferentes comportamientos en el tensor de cizalladura $\sigma_{\mu\nu}$ y vorticidad $\omega_{\mu\nu}$ bajo un mapeo en las coordenadas radial y colatitudinal de $0 \leq R \leq 5$ y $0 \leq \Theta \leq \pi$, respectivamente.

Componente σ_{TR} de cizalladura:

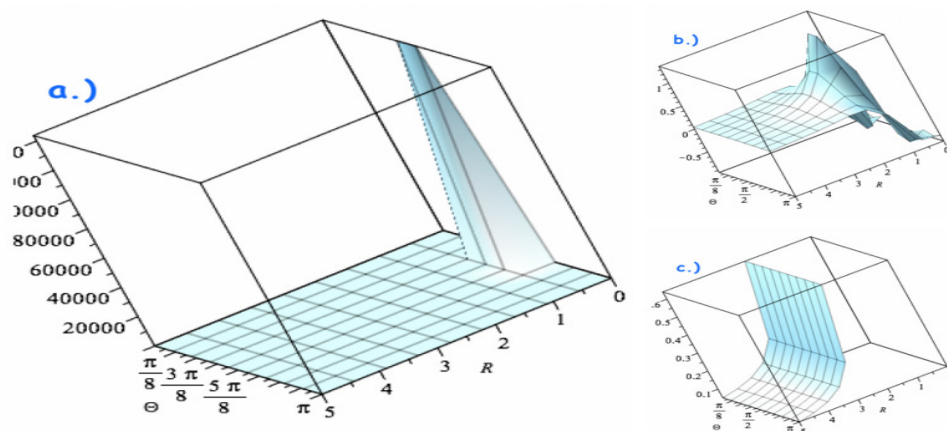


Figura 11. Componente σ_{TR} de cizalladura obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.7, a = 0.98]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.6, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Para esta componente de cizalladura se obtuvo que, en todo el rango $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$ es positiva, como se aprecia en la figura 11 a.). Sin embar-

¹⁹⁹ Drake y Szkeres 2000

go, una ligera variación de este valor crítico produce un cambio abrupto en su comportamiento, evidenciando ahora picos negativos y positivos en todo el rango $[0.177 \leq Q < 1; 0 < a \leq 0.999]$, como se observa en la figura 11 b.). Finalmente, en el caso para Reissner-Norsdröm se obtuvo exactamente el mismo comportamiento positivo, ilustrado en la figura 11 c.).

Componente $\sigma_{T\Theta}$ de cizalladura:

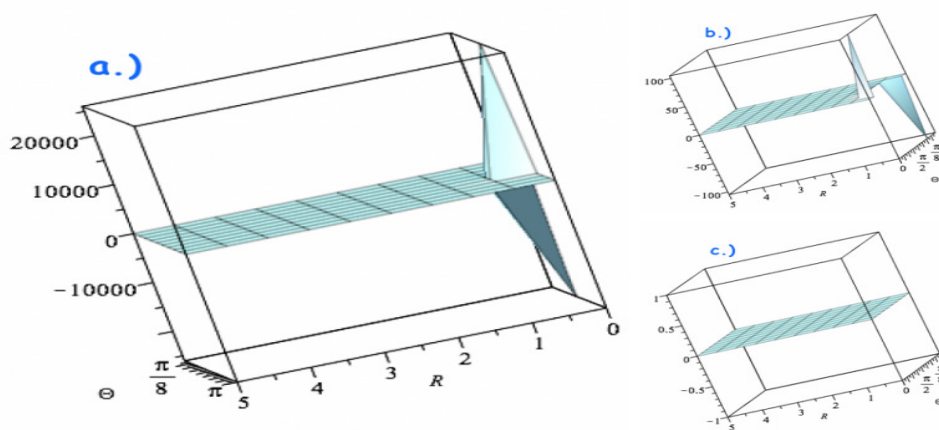


Figura 12. Componente $\sigma_{T\Theta}$ de cizalladura obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.5, a = 0.86]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8 a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

En la componente $\sigma_{T\Theta}$ de cizalladura se observa un comportamiento con un pico positivo y negativo en todo el rango para la solución de Kerr-Newman (i.e., $Q \neq 0$ y $a \neq 0$), como se ilustra en las figuras 12 a.) y b.). Finalmente, este se anulará para las soluciones de Reissner-Nordström, ilustrado en la figura 12 c.).

Componente $\sigma_{R\Phi}$ de cizalladura:

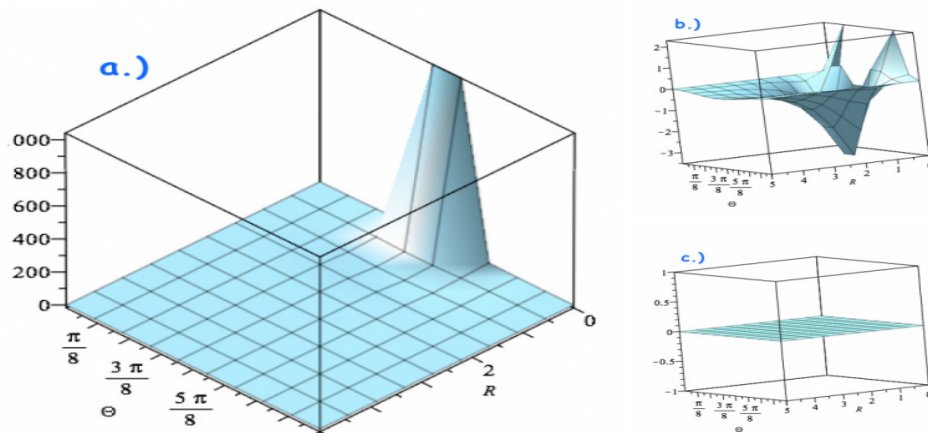


Figura 13. Componente $\sigma_{R\Phi}$ de cizalladura obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.5, a = 0.86]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Similar al comportamiento obtenido para σ_{TR} en la figura 11, en todo el rango $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$ la componente $\sigma_{R\Phi}$ es positiva, como se aprecia en la figura 13 a.). Sin embargo, una ligera variación de este valor crítico produce un cambio abrupto en su comportamiento, evidenciando una conducta predominantemente negativa en todo el rango $[0.177 \leq Q < 1; 0 < a \leq 0.999]$, como se observa en la figura 13 b.). Finalmente, para Reissner-Nordström esta componente se anula, como se ilustra en la figura 13 c.).

Componente $\sigma_{\Theta\Phi}$ de cizalladura:

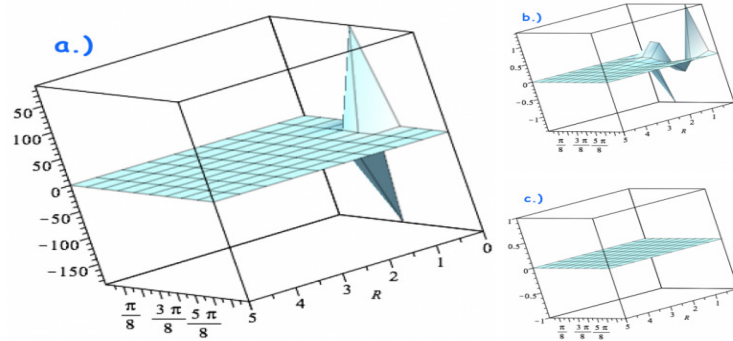


Figura 14. Componente $\sigma_{\Theta\Phi}$ de cizalladura obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.5, a = 0.86]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Similar a la componente $\sigma_{T\Theta}$ de cizalladura ilustrada en la figura 12, en el caso para $\sigma_{\Theta\Phi}$ se observa un comportamiento con un pico positivo y negativo en todo el rango para la solución de Kerr-Newman (i.e., $Q \neq 0$ y $a \neq 0$), representado en las figuras 14 a.) y b.). Finalmente, este se anulará para la solución de Reissner-Nordström, como se observa en la figura 14 c.).

Componente ω_{TR} de vorticidad:

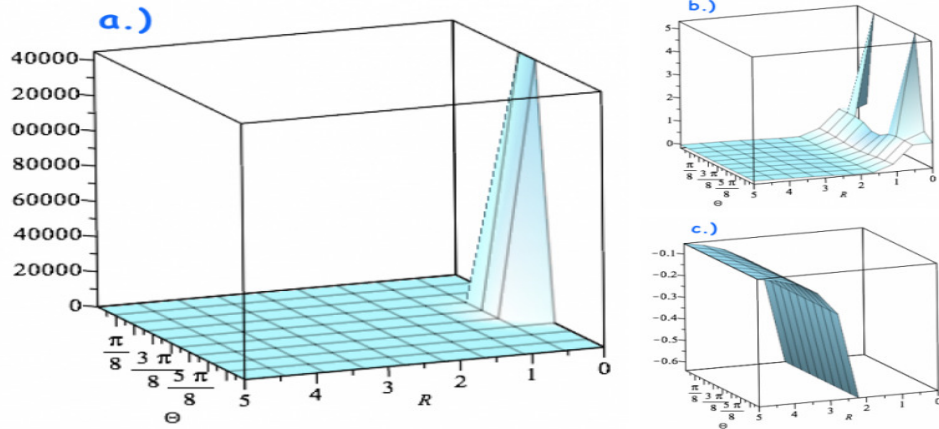


Figura 15. Componente ω_{TR} de vorticidad obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.8, a = 0.96]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Con respecto al tensor de vorticidad, la componente ω_{TR} en el rango $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$ todo el tiempo mantiene un comportamiento positivo con un sólo pico en la zona aledaña a su singularidad de curvatura, ilustrado en la figura 15 a.). Similarmente, al realizar una ligera variación en la carga y rotación, también tendrá un comportamiento positivo todo el tiempo, salvo que ahora tendrá dos picos que rodean a la singularidad, como se observa en la figura 15 b.). Finalmente, en el caso para Reissner-Nordström se evidencia una conducta totalmente negativa, apreciada en la figura 15 c.).

Componente $\omega_{T\Theta}$ de vorticidad:

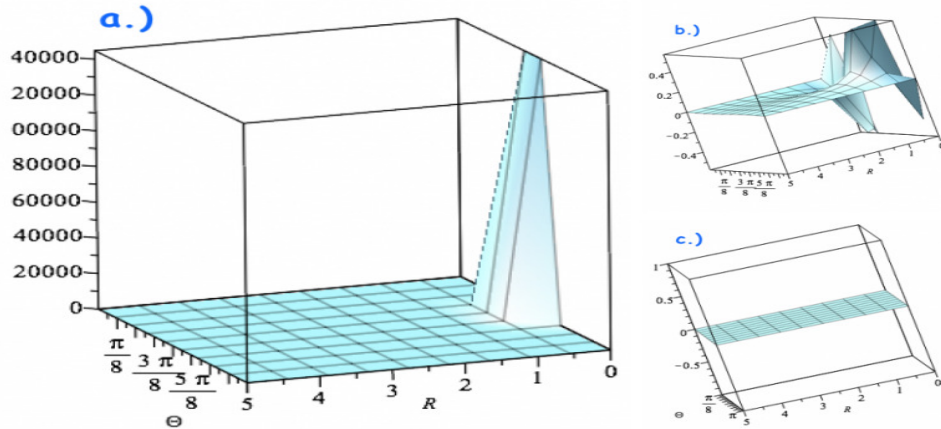


Figura 16. Componente $\omega_{T\Theta}$ de vorticidad obtenida para la solución de Kerr-Newman. En la figura a.) se puede observar como se comporta con una carga y rotación de $[Q = 0.176, a = 0.999]$; en la figura b.), con $[Q = 0.8, a = 0.96]$ para el caso del espaciotiempo de Kerr y, finalmente, en la figura c.) con $[Q = 0.8, a = 0]$, correspondiente a la solución de Reissner-Nordström.

Al igual que en el caso anterior (ver figura 15), para la componente $\omega_{T\Theta}$ se observa un comportamiento positivo con un sólo pico aledaño a la singularidad de curvatura en el rango $[0 \leq Q \leq 0.176; a = 0.999]$, ilustrado en la figura 16 a.). Sin embargo, al salirnos de este rango de variación de carga y rotación observamos un comportamiento positivo en algunas zonas y negativo en otras al rededor de la singularidad, como se aprecia en la figura 16 b.). Finalmente, en el caso para Reissner-Nordström se anulará, ilustrado en la figura 16 c.).

Hasta el momento, hemos estudiado el comportamiento de los flujos termodinámicos y variables para una solución “interior” de Kerr-Newman bajo un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor, visto por ZAMO. Todo el tiempo hemos variado los parámetros de carga y rotación, pero... al tener un modelo de fluido sin ningún tipo de campo eléctrico o magnético en él, *¿cómo tenemos una carga en una solución típicamente interpretada como un agujero negro rotante con un campo electromagnético asociado sin tener ningún campo de esta naturaleza en nuestro modelo de fluido? ¿cómo una solución predicha por las ecuaciones de Einstein-Maxwell tam-*

bién puede ser obtenida como solución de las ecuaciones de Einstein?

5.3.3. ¿Carga... sin carga?

...electricity no longer exist, for the name electricity as used up to the present time signifies at once that a substance is meant, and there is nothing more certain than that electricity is not a substance.

—Henry A. Rowland, *A plea for pure science*. *Science* (1883).

Para los años sesenta ya se tenía estructurada una teoría unificada de la gravitación y el electromagnetismo en términos puramente geométricos, cumpliendo así el sueño de Riemann y bajo el famoso mantra popularizado por Misner y Wheeler «*physics is geometry*», tal que ellos resumieron la naturaleza de esta unificación de la siguiente manera ²⁰⁰: las ecuaciones de Maxwell son de segundo orden, al igual que lo son las de Einstein; los dos conjuntos de ecuaciones pueden ser combinadas de tal suerte que den como resultado una ecuación de cuarto orden. En términos un poco más físicos, el campo electromagnético siempre dejará una *huella* sobre la métrica que es bastante característica, luego a través de esta uno puede saber todo lo que necesite sobre la naturaleza del campo electromagnético.

Una vez fue hallada una teoría autoconsistente que unifica a la gravitación y el electromagnetismo a través de una descripción en términos de un espacio vacío y curvado, ¿qué nos dice Einstein sobre la carga? Al terminar su desarrollo de la teoría General de Relatividad, él enfatiza que sus ecuaciones de campo y las ecuaciones de Maxwell tienen un carácter puramente local. Estas no nos dicen mucho con

²⁰⁰ Misner y Wheeler 1957

respecto a la topología del espaciotiempo. Así pues, *¿cuál es la característica del electromagnetismo libre de carga en un espacio dotado con una topología múltiplemente conexa?* Investigaciones en esta línea de razonamiento han mostrado que en espacios múltiplemente conexos, este tipo de topología resulta de gran interés al proporcionarle un lugar a la electricidad en un espacio curvado que es libre de toda “carga eléctrica real”, de tal suerte que en este modelo la carga se interpreta como líneas de fuerza atrapadas en la topología del espacio ²⁰¹. Aparentemente pareciese que violan las nociones elementales de causalidad, dado que existen diferentes rutas para ir de un punto A hacia un punto B (ver figura 17); sin embargo, Wheeler demostró que esto realmente no sucede ²⁰². Profundicemos un poco más en esta cuestión, así:

Imaginemos que existe una métrica que en general es casi plana, a excepción de dos regiones muy separadas entre sí donde se evidencia una topología doblemente conexa, como se ilustra en la figura 17. Esta situación nos conduce a pensar en situaciones donde existe un flujo neto de líneas de fuerza a través de lo que los estudiantes de topología podrían llamar un *handle* del espacio múltiplemente conexo, y lo que los físicos podrían denominar de una forma un poco más viva como un *agujero de gusano* ²⁰³. Por tanto, para un observador algo despistado podría parecer que estas líneas de fuerza provienen de una carga eléctrica; sin embargo, realmente no existe un lugar donde él pueda situarse y decir «¡Allí hay una carga!», debido a que las líneas de fuerza que estén dentro de las “bocas” del agujero de gusano nunca terminan; por el contrario, las que están afuera se atenuarán hasta la extinción, similar al proceso que sucede en las ondas electromagnéticas. Por tanto, esta situación donde se ilustran las líneas de fuerza atrapadas en el agujero de gusano,

²⁰¹ Wheeler 1962

²⁰² Robert W Fuller y John A Wheeler: *Causality and multiply connected space-time*. En: *Physical Review* 128.2 (1962), pág. 919

²⁰³ Misner y Wheeler 1957

satisfacen las ecuaciones de Maxwell. Como consecuencia, el flujo a través de las bocas no cambia con el tiempo. No importa qué tan irregular sea. No importa qué tan violentamente se encuentre curvado el espacio. No importa qué tan alejadas estén las bocas del agujero de gusano entre sí o de qué tamaño sean, siempre y cuando la topología no se vea alterada, como consecuencia del *teorema de censura topológica* (ver capítulo 16 en ²⁰⁴). Ya sean las ecuaciones de Maxwell o la imagen equivalente de líneas de fuerza de Faraday, esta concepción más la idea de un espacio múltiplemente conexo nos fuerza a la conclusión que el flujo de líneas a través del agujero de gusano permanece constante. Esta constante de movimiento es lo que realmente representa a la carga ²⁰⁵. Por tanto, tenemos una descripción puramente geométrica de una “carga eléctrica” en términos de la métrica y la topología de un espacio vacío y curvado, i.e., una «*carga sin carga*» ²⁰⁶. Vemos que en realidad la “carga” o flujo en el agujero de gusano en realidad es una cantidad que no está cuantizada: en principio puede tomar cualquier valor, a pesar de que pueda poseer unidades de carga eléctrica. En este sentido podemos entender que esta nueva carga no tiene mucho que ver con la carga eléctrica estudiada por la física de partículas.

²⁰⁴ Visser 1995

²⁰⁵ Misner y Wheeler 1957

²⁰⁶ Wheeler 1962

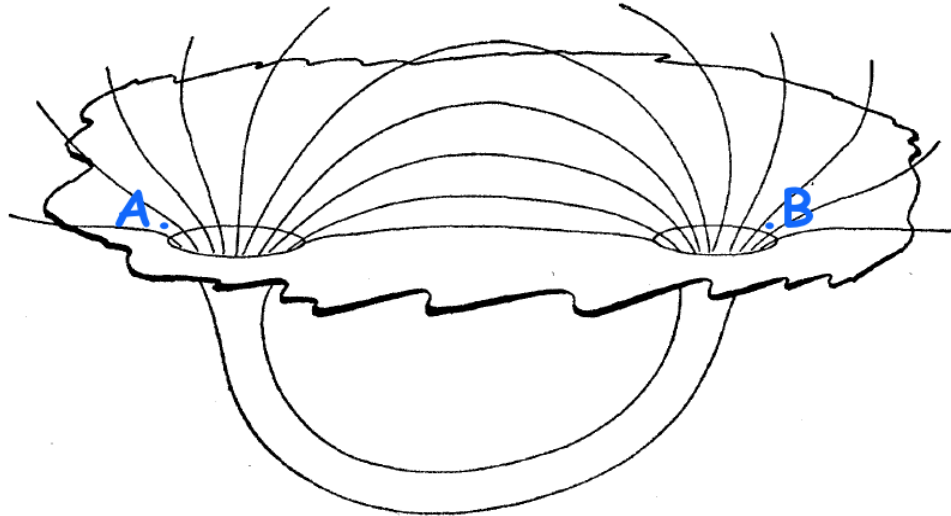


Figura 17. Primera representación simbólica para una carga no cuantizada en teoría clásica de campos: un agujero de gusano a través del cual existe un flujo “eléctrico”. Las dos bocas para un observador despistado podrían aparentar tener una carga eléctrica de signo opuesto en cada una de ellas: las líneas de fuerza que convergen de una boca hacia otra obedecen la ecuación de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$. Por tanto, podría construir una frontera alrededor de una de las bocas e incorrectamente aplicar la ley de Gauss y decir que efectivamente allí hay una carga eléctrica encerrada. Sin embargo, no podría afirmar tal cosa, dado que esta carga eléctrica en realidad no existe. Él no reconoce que ha hecho suposiciones implícitas sobre la topología del espacio. Al no existir un flujo eléctrico a través de las bocas él seguramente argumentará que, o las ecuaciones de Maxwell fallan en esta región, o existe otra “sustancia” a la que podría llamar *electricidad*²⁰⁷. Para una mejor visualización el número de dimensiones en este dibujo se redujo de tres a dos. Sin embargo, el 2-espacio múltiplemente conexo y curvado está representado a través de un embebimiento en una 3-geometría euclidiana, tal que este espacio es libre de singularidades. *Imagen tomada de*²⁰⁸.

Finalmente, resulta irresistible no pensar que esta gran similitud entre el comportamiento de un espacio topológico múltiplemente conexo y el campo eléctrico generado por dos cargas puntuales de signo opuesto, debería tener una justificación matemática bien fundamentada. Sean x y y dos bucles²⁰⁹ generados por las líneas

²⁰⁹ Sea χ un espacio topológico y sea $I = [0, 1]$ un conjunto cerrado. Un mapeo continuo $\alpha : I \rightarrow \chi$ es llamado *camino* con un punto inicial x_0 y un punto final x_1 si $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_1$. Si $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, el camino se denomina *bucle* con un punto base en x_0 (o un bucle en x_0) [Nakahara 2018].

de fuerza en un agujero de gusano y las líneas de campo eléctrico entre dos cargas puntuales, respectivamente. Ahora bien, como podemos observar en la figura 18, nosotros podríamos obtener el bucle y a partir de continuas deformaciones de x ; por tanto, x será *homotópico*²¹⁰ a y , tal que existe una relación de equivalencia entre ellos, formando así una clase de equivalencia dotada con una estructura de grupo, denominada como el grupo fundamental de la homotopía. Así pues, en vista de esta relación homotópica entre ellos se podría definir un isomorfismo entre estas dos estructuras, de tal suerte que podríamos pensar a la carga eléctrica Q como la carga conservada al aplicar el teorema de Noether al electromagnetismo, y la carga \mathcal{Q} generada por el espacio múltiplemente conexo como una *carga topológica* conservada al aplicar este mismo teorema a la estructura topológica de este sistema en particular; por tanto, no es extraño pensar que estas dos cargas podrían tener las mismas unidades.

²¹⁰ Sean $\alpha, \beta : I \mapsto \chi$ bucles en x_0 . Ellos serán homotópicos si existe un mapeo continuo $F : I \times I \mapsto \chi$, tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= \alpha(s), & F(s, 1) &= \beta(s) & \forall s \in I, \\ F(0, t) &= F(1, t) = x_0 & \forall t \in I. \end{aligned}$$

El mapeo F que conecta estos dos bucles es llamado *homotopía* entre α y β , tal que establece una relación de equivalencia $\alpha \sim \beta$ entre ellos [Nakahara 2018].

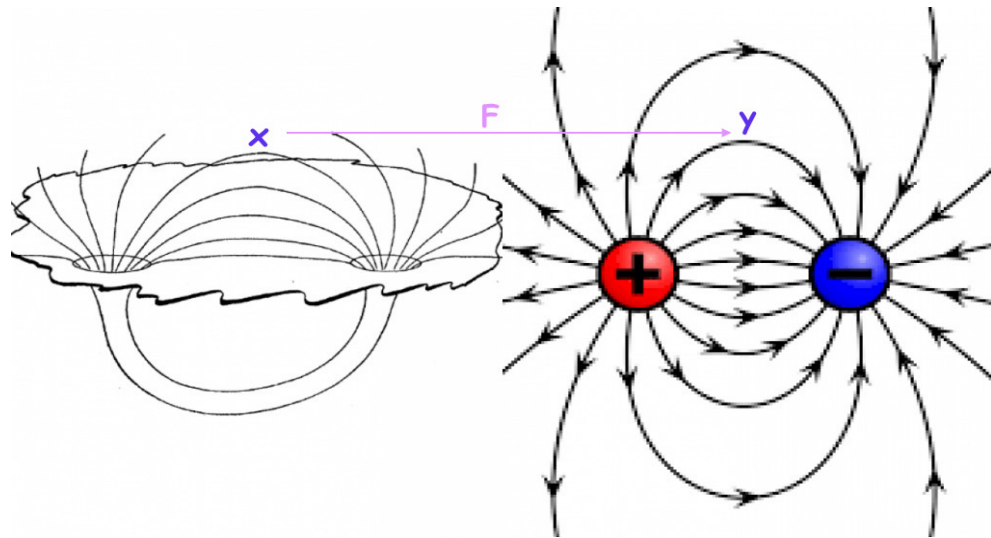


Figura 18. Esquema de la homotopía F existente entre los bucles x y y generados por el agujero de gusano y el campo eléctrico entre dos cargas puntuales de signo opuesto, respectivamente.

En conclusión, con base en el comportamiento “exótico” del modelo material que hemos implementado en la caracterización de las soluciones rotantes obtenidas mediante NJA y la existencia de esta *carga sin carga* en el caso particular para la solución de Kerr-Newman, ambas por separado y en conjunto nos conducen a inferir que estas soluciones en realidad podrían tratarse de agujeros de gusano rotantes. Sin embargo, antes debemos estudiar como se comporta NJA en la generación de soluciones de esta naturaleza, *¿son transpasables por los seres humanos? ¿existe alguna restricción geométrica y física en la generación de agujeros de gusano rotantes a través de NJA?* Esta será la esencia y el objetivo del siguiente capítulo.

6. Generación de Agujeros de Gusano a través de NJA

*... mount to paradise
By the stairway of surprise.*

—Ralph Waldo Emerson, *Merlin*,
Poems (1847).

*Wormholes. In the revealing jargon
of the theoretical physics, the
Universe was their apple and
someone had tunneled through,
riddling the interior with
passageways that criss-crossed the
core. For a bacillus who lived on the
surface, it was a miracle. But a being
standing outside the apple might be
less impressed. From that
perspective, the Tunnel builders
were only an annoyance. "But if the
Tunnel builders are worms, who are
you?" -she thought.*

—Carl Sagan, *Contact* (1985).

La posibilidad de realizar viajes interestelares ha sido una idea bastante fértil que ha inundado la mente tanto de escritores como físicos teóricos: poder imaginar una civilización alienígena capaz de construir túneles intergalácticos que conecten dos partes muy lejanas de nuestro universo puede parecer un hecho que sólo tiene sentido en el mundo de la ficción; no obstante, la física nos dice todo lo contrario... El físico teórico generalmente se pregunta *¿cuáles son las leyes de la física?* o *¿qué*

predicen esas leyes sobre el Universo? Sin embargo, en esta situación una pregunta más fructífera sería *¿qué limitaciones imponen las leyes de la física conocida sobre la construcción de una red de túneles intergalácticos realizada por una civilización arbitrariamente avanzada?* Quizás esta forma de pensar puedan traer consigo algunas cuestiones intrigantes sobre la naturaleza misma.

Podemos comenzar cuestionándonos si estas leyes permitirían a una civilización antigua, y ya extinta en nuestro universo, construir y mantener abiertos agujeros de gusano como un medio de transporte interestelar que permita comunicarnos con todas las civilizaciones de todas las galaxias del Cosmos. Tal agujero de gusano, que en nuestro caso de interés será Lorentziano, debería ser entendido a través de las siguientes definiciones ²¹¹ :

Definición 1: *Un agujero de gusano corresponde a cualquier región compacta del espaciotiempo con un límite topológicamente simple pero con un interior topológicamente no trivial.*

Definición 2: *Si un espaciotiempo Lorentziano contiene una región compacta Ω , y si la topología de Ω es de la forma $\Omega \sim \mathbb{R} \times \Sigma$, donde Σ es una 3-variedad con una topología no trivial y cuya frontera tendrá una topología de la forma $\partial\Sigma \sim S^2$, y si además las hipersuperficies Σ son todas tipo espacio, luego la región Ω contendrá un agujero de gusano que comunica dos zonas asintóticamente planas del universo.*

Para la construcción de estos túneles intergalácticos, los cuales tendrán una ligera curvatura espaciotemporal de tal suerte que la teoría General de Relatividad sea válida sobre toda la variedad, es necesaria la existencia de curvas tipo tiempo cerradas y una elección que no sea continua de conos de luz futuro dirigidos ²¹², junto

²¹¹ Visser 1995

²¹² Robert P. Geroch: *Topology in general relativity*. En: *J. Math. Phys.* 8 (1967), págs. 782-786

con una violación de la condición de energía débil (317) ²¹³. Así pues, con el objetivo de lograr soluciones de agujeros de gusano que sean transitables para un ser humano -o un alienígena-, en 1988 el físico teórico Kip S. Thorne y su estudiante posdoctoral Michael S. Morris, realizaron una lista de condiciones que un agujero de gusano transitable debería necesariamente satisfacer; luego, usaron las ecuaciones de campo de Einstein para deducir qué forma de materia debería ser requerida para mantener este túnel. Curiosamente, ellos hicieron lo opuesto al procedimiento usual de postular un tensor energía-momentum y luego resolver las ecuaciones de Einstein para obtener la forma de la geometría espaciotemporal (un paso que es sumamente complicado, por no decir imposible en algunos casos). Este cambio procedimental un poco ingeneril les permitió obtener una gran cantidad de información útil con respecto a agujeros de gusano de esta naturaleza. En este orden de ideas, las condiciones de transitabilidad básicas que debe satisfacer toda solución interpretada como un agujero de gusano son ²¹⁴ :

1. La métrica debe ser estática y esféricamente simétrica, tal que su contraparte rotante será de tipo axisimétrica y estacionaria. Este requerimiento es impuesto sólo para simplificar los cálculos; sin embargo, no es una condición estrictamente necesaria ²¹⁵.
2. Las soluciones deben obedecer en todo momento a las ecuaciones de Einstein, tal que asumiremos la exactitud de la teoría General de Relatividad.
3. Para ser una solución de agujero de gusano debe contener una garganta que conecte dos zonas asintóticamente planas del espaciotiempo.
4. No podrá contener un horizonte de eventos debido a que, al estar presente, evitaría los viajes interestelares de ida y regreso.

²¹³ Frank J Tipler: *Singularities and causality violation*. En: *Annals of physics* 108.1 (1977), págs. 1-36

²¹⁴ Morris y Thorne 1988

²¹⁵ Matt Visser: *Traversable wormholes: Some simple examples*. En: *Physical Review D* 39.10 (1989), pág. 3182

5. Las fuerzas de marea gravitacionales experimentadas por un intrépido viajero que quiera traspasar este túnel deben ser sorpotablemente pequeñas, evitando un proceso de *espaguetización*.
6. El viajero deberá ser capaz de atravesar el agujero de gusano en una cantidad finita y razonable de tiempo propio, medido no sólo por él mismo sino por cualquier observador que lo esté esperando en las vecindades del túnel o en una estación *Grand Central*.
7. La materia y campos del agujero de gusano que generan la curvatura espaciotemporal deberán tener un comportamiento físicamente plausible. Esta condición es razonable dado que está altamente ligada con los anteriores seis requisitos. Sin embargo, este necesariamente nos proporcionará modelos de materia que violarán, como mínimo, la condición de energía débil (317), dando lugar a cierto tipo de materia “exótica”.

En conclusión, satisfaciendo este mínimo de requerimientos podremos estar plenamente seguros que las soluciones de gusano que obtengamos serán transitables por un ser humano o cualquier civilización extragaláctica.

En este capítulo presentaré una ampliación de los resultados obtenidos junto con mi director de tesis y publicados en ²¹⁶, con respecto a las exigencias físicas y geométricas impuestas por NJA en la generación de soluciones que se puedan interpretar como agujeros de gusano.

6.1. Preliminares

Con el ánimo de hacer más transparentes los resultados que se presentarán a lo largo de todo este capítulo, a continuación se discutirá de forma breve los distintos tipos de espaciotiempos necesarios en la construcción de soluciones de agujeros de gusano Lorentzianos.

²¹⁶ Gutiérrez-Piñeres, Beltrán y López-Monsalvo 2021

6.1.1. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico con horizonte de eventos

El tensor métrico estático y esféricamente simétrico asociado a un espacio-tiempo arbitrario que describa una distribución de materia dada, puede ser expresado en la carta coordenada de Schwarzschild, sin perder generalidad, en su forma canónica ²¹⁷

$$\mathcal{G} = -N^2(R) dT \otimes dT + e^{2\Lambda(R)} dR \otimes dR + R^2 d\Theta \otimes d\Theta + R^2 \sin^2 \Theta d\Phi \otimes d\Phi. \quad (174)$$

Sin embargo, para este tipo de geometrías debemos centrarnos en especificar la forma explícita para los potenciales métricos N y e^Λ , de tal suerte que su interpretación física, al igual que la forma en las ecuaciones de Einstein, permanezcan lo más simple posible. Basado en las ideas de Morris y Thorne ²¹⁸, Matt Visser en el estudio de la termodinámica y la estructura del horizonte de eventos en agujeros negros “sucios”²¹⁹, postula las siguientes formas funcionales para estos potenciales gravitacionales ²²⁰:

$$N^2(R) = e^{-2\Phi(R)} \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right) \quad \text{y} \quad e^{2\Lambda(R)} = \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right)^{-1},$$

i.e.,

²¹⁷ Misner, Thorne y Wheeler 1973

²¹⁸ Morris y Thorne 1988

²¹⁹ Por “sucio” se refiere a cualquier agujero negro que interactúe con un campo clásico de materia no nulo [Matt Visser: *Dirty black holes: Thermodynamics and horizon structure*. En: *Physical Review D* 46.6 (1992), pág. 2445].

²²⁰ ibíd.

$$\mathcal{G} = -e^{-2\Phi(R)} \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right) dT \otimes dT + \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right)^{-1} dR \otimes dR + R^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (175)$$

donde la función $b(R)$ podríamos pensarla como la forma de las hipersuperficies de $T = \text{cte}$ y $\varphi(R)$ como un tipo de “corrimiento al rojo anómalo”, el cual describe la desviación del *redshift* teniendo en cuenta la función $b(R)$ ²²¹. Por otro lado, vemos que este espaciotiempo tiene un horizonte de eventos putativo²²² para aquellos valores de R que satisfacen $b(R_H) = R_H$. Ahora bien, en el horizonte de eventos más externo tendremos que $\forall R > R_H$ tal que $b(R) < R$, se cumple la condición $\partial_R b(R_H) \leq 1$ ²²³.

6.1.2. Espaciotiempo estático y esféricamente simétrico sin horizonte de eventos Ahora, consideremos el mismo espaciotiempo (174); sin embargo, si queremos que este no contenga un horizonte de eventos nos será conveniente escoger la función lapso²²⁴ y la componente \mathcal{G}_{RR} como

$$N^2(R) = e^{+2\Phi(R)} \quad \text{y} \quad \mathcal{G}_{RR} = \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right)^{-1},$$

²²¹ Visser 1992

²²² Al tener la característica de una separación 3+1 en Relatividad General, para cualquier espaciotiempo asintóticamente plano bien definido donde la función lapso $N \rightarrow 1$ en el infinito espacial, se define como horizonte putativo simplemente a la región sobre la variedad donde $N = 0$, tal que esta simple definición usualmente nos dirá mucho sobre la escogencia de esta función -lo cual es fundamental en el criterio de “traspasabilidad” en un agujero de gusano-; sin embargo, no brinda mucha información con respecto a la estructura causal espaciotemporal [Visser 1995].

²²³ Visser 1992

²²⁴ La interpretación dada para la función lapso a lo largo de todo este capítulo es completamente análoga a la dada en el formalismo 3+1 de la Relatividad General (para más detalles ver [Misner, Thorne y Wheeler 1973; Ericourgoulhon: *3+1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*. Vol. 846. Springer Science & Business Media, 2012]).

i.e.,

$$\mathcal{G} = -e^{+2\Phi(R)} dT \otimes dT + \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right)^{-1} dR \otimes dR + R^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (176)$$

que corresponde a la forma propuesta por Morris y Thorne para analizar agujeros de gusano estáticos, esféricamente simétricos y que sean transitables, de la cual profundizaremos más en la siguiente sección. Por otro lado, esta forma de tomar el tensor métrico ha sido ampliamente usada en el estudio de modelos de estrellas esféricas ²²⁵. Así pues, la escogencia de la función $N(R)$ de tal suerte que describa el problema físico en estudio constituye todo un arte.

6.1.3. Espaciotiempo estacionario y axisimétrico sin factor de deformación

Con base en las ideas de Morris y Thorne ²²⁶, el investigador Edward Teo realiza una generalización del tensor métrico (176) para un spaciotiempo estacionario, axisimétrico y el cual físicamente podría describir agujeros de gusano rotantes, tal que cumplan todos los criterios de transitabilidad ²²⁷. Para tal fin, debemos comenzar escribiendo el tensor métrico más general posible para un spaciotiempo estacionario y axisimétrico, i.e. ²²⁸,

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{TT} dT \otimes dT + 2\mathcal{G}_{T\Phi} dT \otimes d\Phi + \mathcal{G}_{\Phi\Phi} d\Phi \otimes d\Phi + \mathcal{G}_{ij} dX^i \otimes dX^j, \quad (177)$$

donde $i, j = 1, 2$. Tomando a $\mathcal{G}_{\Theta\Theta} \sin^2 \Theta = \mathcal{G}_{\Phi\Phi}$, podemos reexpresar al tensor métri-

²²⁵ Misner, Thorne y Wheeler 1973

²²⁶ Morris y Thorne 1988

²²⁷ Teo 1998

²²⁸ A Papapetrou: *Stationary gravitational fields with axial symmetry*. En: *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 4 (1966), pág. 83

co (177) en la carta coordenada esférica polar, así ²²⁹

$$\mathcal{G} = -N^2(R, \Theta) dT \otimes dT + e^{\mu(R, \Theta)} dR \otimes dR + R^2 \mathcal{K}^2(R, \Theta) [d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta (d\Phi - \omega(R, \Theta) dT)^2], \quad (178)$$

donde $\omega(R, \Theta)$ recibe la misma interpretación que le atribuimos en ZAMO (ver sección 5.1); la función $\mathcal{K}(R, \Theta)$ es positivo definida y no decreciente, la cual determina la distancia propia radial \tilde{R} , definida como $\tilde{R} \equiv R\mathcal{K}$ tal que $\partial_R \tilde{R} > 0$. Por otro lado, vemos que un horizonte de eventos putativo aparecerá cuando la función lapso sea igual a cero, i.e., $N(R, \Theta) = 0$. Para asegurar que la métrica es no-singular en el eje de rotación, las derivadas con respecto a Θ de los potenciales métricos allí deben ser cero²³⁰.

Para garantizar la transitabilidad del agujero de gusano rotante, debemos llevar el potencial gravitacional $e^{\mu(R, \Theta)}$ en (178) a la forma de Morris y Thorne, i.e.,

$$\mu(R, \Theta) = -\ln \left(1 - \frac{\mathcal{B}(R, \Theta)}{R} \right). \quad (179)$$

Adicionalmente, bajo esta escogencia estamos imponiendo que en el límite de no rotación el tensor métrico (178) se reduzca al espaciotiempo estudiado en la sub-

²²⁹ Friedman y Stergioulas 2013

²³⁰ Esto proviene de la misma definición de un espaciotiempo axisimétrico, el cual debe cumplir que i.) su grupo de acción G sobre la variedad \mathcal{M} sea isomorfo a $SO(2)$ (i.e., rotaciones en el plano) y ii.) la métrica debe ser invariante ante la acción de grupo $\mathcal{L}_{\vec{\xi}} \mathcal{G} = 0$, donde $\vec{\xi}$ es el generador de G asociado con la coordenada Φ en (178). Por tanto, con estos dos requerimientos se puede demostrar que el conjunto de puntos fijos bajo la acción del grupo G corresponde a una 2-superficie tipo tiempo (i.e., la métrica inducida por G tiene signatura $(+, -)$) en \mathcal{M} , llamada eje de rotación. Así pues, teniendo en cuenta la definición misma de un generador de un grupo de simetría, el campo vectorial $\vec{\xi}$ se debe anular sobre el eje de simetría, de lo contrario esta 2-superficie no existiría, dado que no habrían puntos fijos.

sección anterior (ver (176)), donde de forma análoga identificamos la garganta en $R = b_0$.

Dado que queremos soluciones de agujeros de gusano que sean transitables, debemos asegurarnos que esta generalización sea libre de singularidades de curvatura. Así pues, al calcular el escalar de Ricci para (178) tendrá un factor de la forma $(\partial_\Theta \mathcal{B})^2 / (R - \mathcal{B})^2$ (ver ec (9) de ²³¹); por tanto, para tener soluciones libres de singularidades debemos imponer que $\partial_\Theta \mathcal{B} = 0$, implicando que la garganta estará localizada efectivamente para algún valor constante de R . Finalmente, realizando un proceso totalmente análogo en el análisis del diagrama de embebimiento para la solución de Morris y Thorne (ver la sección 6.2), se puede demostrar que la solución de Teo también satisface la *flare-out condition* descrita en (194), implicando que segundas derivadas de la distancia coordenada con respecto a la distancia propia serán positivas en todo el espaciotiempo.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, la generalización realizada por Teo toma la forma

$$\mathcal{G} = -N^2(R, \Theta) dT \otimes dT + \left(1 - \frac{\mathcal{B}(R, \Theta)}{R}\right) dR \otimes dR + R^2 \mathcal{K}^2(R, \Theta) [d\Theta \otimes d\Theta + \sin^2 \Theta (d\Phi - \omega(R, \Theta) dT)^2]. \quad (180)$$

Finalmente, en este punto es fundamental señalar que esta geometría será válida para cuerpos astrofísicos débilmente rotantes, dado que no tiene en cuenta la deformación experimentada por estos producto de la rotación misma ²³². En conclusión, a pesar de que Teo generaliza las ideas de Morris y Thorne, el espaciotiempo

²³¹ Teo 1998

²³² Azreg-Ainou 2016

resultante sólo considera el caso particular donde tenemos sistemas astrofísicos débilmente rotantes; sin embargo, en el universo existen una exorbitante cantidad de cuerpos que no cumplen con esta condición. Así pues, es menester hallar un espaciotiempo que omita esta condición de no-aplastamiento, considerando situaciones físicamente más plausibles.

6.1.4. Espaciotiempo estacionario y axisimétrico con factor de deformación

A falta de consistencia en un espaciotiempo estacionario y axisimétrico para soluciones de agujeros de gusano rotantes que sean un poco más realistas, en el 2016 Mustapha Azreg-Aïnou con base en los resultados en sus trabajos dedicados a NJA ²³³, realiza una generalización de las ideas de Teo de tal suerte que estas soluciones sean independientes de la rotación del agujero de gusano y, a su vez, tenga en cuenta el aplastamiento del mismo debido a sus fuerzas centrífugas internas ²³⁴. Con el ánimo de satisfacer todas estas exigencias, comencemos escribiendo la forma del tensor métrico estándar para un espaciotiempo estacionario y axisimétrico en la carta coordenada quasi-isotrópica²³⁵, así

$$\mathcal{G} = -N^2(R, \Theta) dT \otimes dT + A^2(R, \Theta) (dR \otimes dR + R^2 d\Theta \otimes d\Theta) + B^2(R, \Theta) R^2 \sin^2 \Theta (d\Phi - \omega(R, \Theta) dT)^2, \quad (181)$$

tal que el cociente $\mathcal{G}_{\Theta\Theta}/\mathcal{G}_{RR} = R^2$ refleja el hecho que todas las métricas bidimensio-

²³³ Azreg-Ainou 2014; Azreg-Aïnou 2014b

²³⁴ Azreg-Ainou 2016

²³⁵ Corresponde a una carta coordenada en donde, aprovechando la condición de circularidad del espaciotiempo, podemos escribir la métrica inducida de $T = \Phi = cte$ por \mathcal{G} como $A^2(R, \Theta) (dR \otimes dR + R^2 d\Theta \otimes d\Theta)$, siendo $A(R, \Theta)$ un factor conforme. Así, producto de esta escogencia del par (R, Θ) , tendremos dos condiciones sobre los potenciales métricos: $\mathcal{G}_{R\Theta} = 0$ y $\mathcal{G}_{\Theta\Theta} = R^2 \mathcal{G}_{RR}$. Por tanto, a las coordenadas (T, R, Θ, Φ) con esta escogencia para (R, Θ) le llamaremos coordenadas quasi-isotrópicas (para más detalles al respecto, ver [Éricourgoulhon: *An introduction to the theory of rotating relativistic stars*. En: *arXiv preprint arXiv:1003.5015* (2010)]).

nales planas escritas en coordenadas polares están relacionadas por un factor conforme, lo cual es usual en este tipo de carta coordenada ²³⁶. Sin embargo, tomando como base las ideas de Teo, Morris y Thorne, vemos que este tipo de espaciotiempos escritos de la forma (181) no resultan cómodos en la construcción de soluciones de agujeros de gusano. Para tal fin será necesario introducir una nueva coordenada radial \tilde{R} de la forma $R \equiv R(\tilde{R})$, tal que nos permita describir el espaciotiempo de una forma más óptima para nuestros propósitos, adoptando la siguiente estructura:

$$\mathcal{G} = - N^2(\tilde{R}, \Theta) dT \otimes dT + e^{\mu(\tilde{R}, \Theta)} d\tilde{R} \otimes d\tilde{R} + \tilde{R}^2 \mathcal{K}^2(\tilde{R}, \Theta) [d\Theta \otimes d\Theta + \Lambda^2(\tilde{R}, \Theta) \sin^2 \Theta (d\Phi - \omega(\tilde{R}, \Theta) dT)^2], \quad (182)$$

tal que (181) y (182) se relacionan entre sí a través de

$$e^{\mu(R, \Theta)} = \left[A \frac{dR}{d\tilde{R}} \right]^2, \quad \tilde{R}^2 \mathcal{K}^2(\tilde{R}, \Theta) = A^2 R^2 \quad \text{y} \quad \Lambda^2(\tilde{R}, \Theta) = \left(\frac{B}{A} \right)^2, \quad (183)$$

de tal suerte que aún el cociente $\mathcal{G}_{\Theta\Theta}/\mathcal{G}_{RR}$ permanezca independiente de Θ . Por otro lado, los potenciales métricos en (182) reciben la misma interpretación atribuida por Teo (ver (180)), a excepción de esta nueva función $\Lambda(R, \Theta)$ ²³⁷, denominada factor de aplastamiento. Para el caso de cuerpos astrófisicos débilmente rotantes su forma no se verá afectada -de forma aproximada- por las fuerzas centrífugas internas; por tanto, su simetría esférica seguirá prevaleciendo, tal que $\mathcal{G}_{\Phi\Phi} = \mathcal{G}_{\Theta\Theta} \sin^2 \Theta$, implicando que $\Lambda^2 = 1$, que es el caso de no-aplastamiento estudiado por Teo (ver (180)).

Naturalmente, si queremos soluciones para agujeros de gusanos transitables debemos evitar los horizontes de eventos garantizando que $N(R, \Theta) \neq 0$, y tomando a

²³⁶ Gourgoulhon 2010

²³⁷ En lo que resta del trabajo, por simplicidad omitiremos el moño en la nueva coordenada radial.

$\mu(R, \Theta)$ de la misma forma descrita en (179), donde es importante señalar que usaremos la letra \mathcal{B} o b para referirnos a la función forma para un agujero de gusano rotante o estático, respectivamente. Sin embargo, la garganta seguirá definiéndose como $\mathcal{B}(b_0, \Theta_0) = b_0$.

Por último, al igual que en el caso de Teo, el escalar de curvatura para (182) también contendrá términos $(\partial_\Theta \mathcal{B})^2 / (R - \mathcal{B})^2$, acompañados por factores de la forma Λ^{-2} , implicando las mismas condiciones estudiadas en la anterior subsección. Como veremos enseguida, esta geometría nos será de mucha utilidad en la generación de agujeros de gusano rotantes mediante NJA.

6.2. Soluciones de agujeros de gusano estáticos

Imaginando una civilización extraterrestre ya extinta capaz de construir túneles intergalácticos que conectan distintas partes del universo, me llena de esperanza pensar en que otras numerosas especies de otros mundos en realidad puedan -o hubiesen- construido una estación *Grand Central*²³⁸. Así, para la construcción de esta red de túneles intergalácticos, deberíamos pensarlos como modelos de agujeros de gusano, de tal suerte que cumplan con los requerimientos mínimos discutidos al comienzo de esta sección. Con esto en mente asumiremos, al estilo Morris y Thorne, que estos serán independientes del tiempo, no rotantes y con puentes esféricamente simétricos que conectan dos regiones distantes entre sí del universo. En otras palabras, requeriremos que el espaciotiempo sea estático, esféricamente simétrico y que contenga dos regiones asintóticamente planas. Así pues, resulta más conveniente, desde un punto de vista físico, expresar esta geometría en función de la distancia propia radial, la cual denotaremos como l . Por tanto, con base en todo lo anterior y sin perder generalidad, podemos escribir el espaciotiempo con los requerimientos deseados de la forma

²³⁸ Sagan 2018

$$\mathcal{G} = -e^{2\varphi(l)} dT \otimes dT + dl \otimes dl + R^2(l) d\Omega \otimes d\Omega, \quad (184)$$

tal que cumple la siguientes características Visser 1995:

- La coordenada l cubre todo el espaciotiempo, i.e., $l \in (-\infty, +\infty)$.
- La ausencia de horizonte de eventos se debe ver reflejada en el hecho que la función $\varphi(l)$ debe ser finita sobre toda la variedad.
- Las dos regiones asintóticamente planas se encuentran cuando $l \rightarrow \pm\infty$.
- La garganta del agujero de gusano se encontrará en $l = 0$.
- Las componentes de la métrica deberán ser, a lo sumo, dos veces diferenciables con respecto a l (ver (193)).

Sin embargo, desde un punto vista pragmático nos será más conveniente reescribir a (184) en función de la distancia coordenada, i.e. Morris y Thorne 1988,

$$\mathcal{G} = -e^{\pm 2\varphi(R)} dT \otimes dT + \left(1 - \frac{b_{\pm}(R)}{R}\right)^{-1} dR \otimes dR + R^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (185)$$

tal que Visser 1995

- Debido a que la carta coordenada de Schwarzschild sólo cubre la mitad de la variedad, requeriremos dos parches, cubriendo cada uno el rango $[b_0, +\infty)$. Así pues, cada uno de ellos describirá una de las zonas del universo y se unirán en b_0 , que corresponde a la garganta del agujero de gusano.
- Por completitud demandaremos que el tiempo coordenado T sea continuo a través de la garganta. Para lograr ello debemos exigir que $\varphi_+(b_0) = \varphi_-(b_0)$ ²³⁹.

²³⁹ El subíndice “+” o “-” define, en el caso de *intra-universe wormholes*, cada una de las regiones asintóticamente planas que se conectan a través de la garganta. Por otro lado, en el caso de *inter-universe wormholes*, corresponderá a dos Universos que se conectan en b_0 .

- La distancia coordenada y propia radial se relacionan entre sí mediante

$$l(R) = \pm \int_{b_0}^R \frac{dR}{\sqrt{1 - b_{\pm}(R)/R}}. \quad (186)$$

- Para garantizar que la geometría espacial tienda de forma apropiada en los límites asintóticamente planos, requerimos que $b_{\pm}(R)$ sea finito en esa región.
- Dado que $dR/dl = 0$ en la garganta (ver (186)), nosotros tendremos que $dl/dR \rightarrow \infty$ en esa misma región, luego esto implica que $b_{\pm}(b_0) = b_0$. Fuera de la garganta tendremos la condición $b_{\pm}(R) < R$.
- Lejos de la garganta, los componentes de la métrica deberán ser, a lo sumo, dos veces diferenciables con respecto a la distancia coordenada.

En este punto es menester señalar que en (184) y (185), las funciones $\varphi(R)$ y $b(R)$ determinan el *redshift* gravitacional y la forma del agujero de gusano, respectivamente. Adicionalmente, ambas deben cumplir con los requerimientos mínimos de transitabilidad. Por otro lado, la coordenada radial se puede interpretar geoméricamente como el radio perimetral de una circunferencia centrada en la garganta del agujero de gusano²⁴⁰; por tanto, ella corresponde a la coordenada radial usual de un diagrama de embebimiento²⁴¹.

Ahora bien, comparando (39) con (185), podemos realizar las identificaciones

$$G(R) = e^{2\varphi(R)}, \quad F(R) = 1 - \frac{b(R)}{R}, \quad H(R) = R^2. \quad (187)$$

²⁴⁰ Morris y Thorne 1988

²⁴¹ Misner, Thorne y Wheeler 1973

Adicionalmente, por simplicidad asumiremos simetría entre las dos regiones asintóticamente planas que conecta el agujero de gusano, lo que particularmente implica que si su masa es finita, esta será la misma medida desde el infinito espacial en ambas regiones asintóticamente planas.

Naturalmente, el pegado del interior del agujero de gusano con una solución exterior debe ocurrir en un determinado valor R_S de la coordenada radial. Para ello, debemos garantizar que el teorema de Birkhoff²⁴² se satisfaga en el exterior; por tanto, debemos imponer que este tenga la forma estándar de Schwarzschild, i.e. ²⁴³,

i.) $b(R) = b(R_S) = \text{cte} \equiv \beta$ para todo $R > R_S$,

ii.) $\varphi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - \beta/R)$ para todo $R > R_S$.

Adicionalmente, para garantizar la existencia de soluciones asintóticamente planas debemos garantizar que:

iii.) $\lim_{R \rightarrow \infty} [b(R)/R] \rightarrow 0$,

iv.) $\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi(R) \rightarrow 0$.

Lo cual es razonable, debido a que en el espaciotiempo de Minkowski no debemos preocuparnos por el *redshift* gravitacional producido por la curvatura espaciotemporal.

Por otro lado, para verificar que efectivamente estamos hablando de un agujero

²⁴² Sea la geometría de una región del espaciotiempo tal que i.) sea esféricamente simétrica, y ii.) sea solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Luego la geometría necesariamente será una pieza de la geometría de Schwarzschild [Misner, Thorne y Wheeler 1973].

²⁴³ Morris y Thorne 1988

de gusano nos será más fructífero visualizarlo en un diagrama de embebimiento, tal que embeberemos la geometría espacial en toda la 4-variedad espaciotemporal. Para ello nos centraremos en una hipersuperficie de $T = cte$, aprovechando el hecho que el espaciotiempo lucirá igual en cualquier instante de tiempo, dada la existencia de un vector de Killing tipo tiempo $\xi_T = \partial_T$. Por otro lado, explotando la simetría esférica nos enfocaremos, sin perder generalidad, en una rebanada de la 2-geometría sobre el plano ecuatorial donde $\Theta = \pi/2$, tal que teniendo en cuenta las anteriores consideraciones el tensor métrico (185) adopta la forma

$$\mathcal{S} = \left(1 - \frac{b(R)}{R}\right)^{-1} dR \otimes dR + R^2 d\Phi \otimes d\Phi, \quad (188)$$

donde hemos omitido el subíndice \pm por simplicidad. Una vez determinada esta rebanada, debemos realizar un nuevo embebimiento de esta 2-geometría curva sobre una geometría plana en una variedad Euclideana tridimensional ²⁴⁴. En otras palabras, deseamos visualizar (188) como si fuese removida del espaciotiempo y embebida en un espacio Euclideano, donde emplearemos las carta coordenada cilíndrica tal que la superficie de rotación estará parametrizada por $\chi(R, \Phi) = [R \cos \Phi, R \sin \Phi, Z(R)]$. Así pues, el tensor métrico Euclideano del espacio embebido adoptará la forma usual de un espacio tridimensional en coordenadas cilíndricas, i.e.,

$$\mathcal{S} = dZ \otimes dZ + dR \otimes dR + R^2 d\Phi \otimes d\Phi. \quad (189)$$

Como siguiente paso determinaremos la fórmula de embebimiento $Z(R)$, para lograr ello debemos notar lo siguiente ²⁴⁵: la geometría bidimensional (188) debe lucir

²⁴⁴ Misner, Thorne y Wheeler 1973

²⁴⁵ ibíd.

igual al espacio Euclideo tridimensional (189) donde fue embebido, dado que este 3-espacio “inventado” no debe afectar en lo absoluto el mundo “real” donde vive el agujero de gusano. Por tanto, para ver mejor todo esto podemos reorganizar el tensor métrico (189) de la siguiente forma:

$$\mathcal{S} = \left[1 + \left(\frac{dZ(R)}{dR} \right)^2 \right] dR \otimes dR + R^2 d\Phi \otimes d\Phi. \quad (190)$$

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo anterior podemos concluir que la fórmula de embebimiento debe satisfacer que ²⁴⁶

$$\frac{dZ(R)}{dR} = \pm \left(\frac{R}{b(R)} - 1 \right)^{-1/2}, \quad (191)$$

donde a partir de este resultado podemos entender la manera en cómo la función $b(R)$ realmente determinará la forma del agujero de gusano. Sin embargo, debemos tener en cuenta que él por definición tendrá una garganta en $b(b_0) = b_0$, donde vemos que (191) diverge, dado que en la garganta tendremos una pendiente totalmente vertical. Por esta razón, la distancia coordenada no es una muy buena elección en regiones cercanas a ella. Así pues, nos será más útil emplear la distancia propia l medida por un observador estático, dado que, como vimos en (184), ella cubre todo el espaciotiempo. Adicionalmente, nos brindará información con respecto al comportamiento de las funciones de forma y *redshift* en el agujero de gusano. Para lograr ello, notemos que (186) y (191) implican la siguiente relación:

$$\frac{dR}{dl} = \pm \sqrt{1 - \frac{b(R)}{R}} \quad \text{y} \quad \frac{dZ}{dl} = \pm \sqrt{\frac{b(R)}{R}}, \quad (192)$$

las cuales convergen en b_0 . Por otro lado

²⁴⁶ Morris y Thorne 1988

$$\frac{d^2 R}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{dR}{dl} \right) = \frac{dR}{dl} \frac{d}{dR} \left(\frac{dR}{dl} \right) = \frac{1}{2R} \left(\frac{b}{R} - \frac{db}{dR} \right), \quad (193)$$

donde al tener que $r(l)$ es mínimo en la garganta y, a su vez, este crece conforme nos alejamos de ella, podemos inferir que (193) siempre será mayor que cero. Adicionalmente, ello impondrá la siguiente restricción:

$$\frac{db(R)}{dR} < \frac{b(R)}{R}, \quad (194)$$

conocida como la *flare-out condition* Teo 1998. Evaluando a (193) en la garganta se obtiene la relación

$$\left. \frac{d^2 R}{dl^2} \right|_{b_0} = \frac{1}{2b_0} \left[1 - \left. \frac{db_+}{dR} \right|_{b_0} \right] = \frac{1}{2b_0} \left[1 - \left. \frac{db_-}{dR} \right|_{b_0} \right], \quad (195)$$

luego $b_+(b_0) = b_-(b_0)$, garantizando la continuidad de la función forma en la garganta del agujero de gusano. Análogamente, podemos concluir que la función *redshift* también será continua allí ²⁴⁷.

Por último, si asumimos que (185) determina la existencia de un agujero de gusano estático, su contraparte rotante generada mediante NJA presentará una restricción dada entre los potenciales métricos, descrita por $K^2(R) = [F(R)/G(R)] R^4$ que estudiamos en el capítulo 2, tal que en nuestro caso $H(R) = R^2$. Por tanto, la única clase de soluciones a las ecuaciones de Einstein que describan agujeros de gusano estáticos apropiadamente para generar agujeros de gusano rotantes usando NJA debe satisfacer la relación

²⁴⁷ Visser 1995

$$e^{2\varphi(R)} = \frac{R^4}{K^2} \left[1 - \frac{b(R)}{R} \right], \quad (196)$$

con K determinada por una solución estática arbitraria de las ecuaciones de Einstein que sea consistente con las cinco clases de soluciones generadas por NJA, descritas al final del capítulo 2. Sin embargo, al hacer una comparación entre la función lapso para un espaciotiempo con horizonte de eventos descrito en la subsección 6.1.1 y la restricción impuesta por NJA en (196), vemos que

$$N^2(R) = e^{2\varphi(R)} = \frac{R^4}{K^2} \left[1 - \frac{b(R)}{R} \right] : \quad e^{-2\Phi(R)} = \frac{R^4}{K^2}. \quad (197)$$

Infortunadamente, esta escogencia en la función lapso describirá agujeros de gusano no transitables, dado que tendremos un horizonte de eventos en su garganta. Así pues, el ansatz de Newman-Janis en el caso estático describirá, en general, soluciones de agujeros de gusano con horizonte de eventos y, por tanto, no aptos para realizar viajes interestelares a través de ellos. Naturalmente, esta patología será heredada para el caso de agujeros de gusano rotantes.

6.3. Generación de agujeros de gusano rotantes

El proceso empleado aquí para construir soluciones de agujeros de gusano rotantes, comienza reescribiendo el tensor métrico estacionario y axisimétrico previamente generado mediante NJA (ver (55)) en la forma estudiada por Azreg (182), i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & -N^2(R, \Theta) dT \otimes dT + e^{\mu(R, \Theta)} dR \otimes dR \\ & + R^2 \mathcal{K}^2(R, \Theta) [d\Theta \otimes d\Theta + \Lambda^2(R, \Theta) \sin^2 \Theta (d\Phi - \omega(R, \Theta) dT)^2], \end{aligned} \quad (198)$$

identificando los potenciales métricos como

$$N^2(R, \Theta) = \frac{\Psi \Delta}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}, \quad e^{\mu(R, \Theta)} = \frac{\Psi}{\Delta}, \quad R^2 \mathcal{K}^2(R, \Theta) = \Psi(R, \Theta), \quad (199)$$

$$\Lambda^2(R, \Theta) = \frac{[K + a^2 \cos^2 \Theta]^2}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta} \quad \text{y} \quad \omega = -\frac{\mathcal{G}_{T\Phi}}{\mathcal{G}_{\Phi\Phi}} = \frac{(K - FH) a}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta},$$

tal que $\Delta(R) \equiv FH + a^2$ y, como sabemos, cada par (K, Ψ) establece una nueva solución estacionaria de las ecuaciones de Einstein proporcionada por una solución estática conocida.

Sin embargo, para justificar el uso del tensor métrico (198) bajo la escogencia en los potenciales métricos (199), será propicio analizar sus distintas características físicas y geométricas. Así pues, en su total generalidad, este exhibe propiedades bastante satisfactorias y prometedoras en la construcción de agujeros de gusano un poco más arraigados a la realidad, las cuales se presentan a continuación:

- De (198) y (199) vemos que el cociente $\mathcal{G}_{\Theta\Theta}/\mathcal{G}_{RR} = \Delta(R)$ se mantiene independiente de la coordenada Θ , como en el caso estudiado en 6.1.4. Esto garantiza el cumplimiento con las características de un espaciotiempo estacionario, axisimétrico y circular, lo cual nos brinda cierta tranquilidad a la hora de interpretarlo como un agujero de gusano rotante.
- Evitando singularidades cónicas²⁴⁸, vemos que sobre el eje de rotación ($\Theta = 0$ o $\Theta = \pi$), la relación $\mathcal{G}_{\Theta\Theta} \sin^2 \Theta = \mathcal{G}_{\Phi\Phi}$ siempre es posible.
- Para asegurar la aplicabilidad de NJA en la generación de agujeros de gusano, la escogencia de los potenciales métricos correspondientes a la solución semilla y la rotante final están restringidos por

²⁴⁸ Para más detalles con respecto a este tipo de singularidades, ver la sección 2.2.2 de [Gourgoulhon 2010].

$$F(R) = 1 - \frac{b(R)}{R} \quad \text{y} \quad e^{2\varphi(R)} = \frac{R^4}{K^2} \left[1 - \frac{b(R)}{R} \right], \quad (200)$$

donde, como sabemos, existe una única correspondencia entre la escogencia de los potenciales métricos $K(R)$ y $\Psi(R, \Theta)$ determinados por las cinco clases de soluciones halladas en el capítulo 2. Con base en ello, la condición más débil que debe ser satisfecha para la generación de agujeros de gusano rotantes impuesta por NJA está dada por la siguiente restricción:

$$1 - \frac{\mathcal{B}(R, \Theta)}{R} = \frac{R^2}{\Psi(R, \Theta)} \left(1 - \frac{b(R)}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right), \quad (201)$$

establecido por la funciones forma $b(R)$ y $\mathcal{B}(R, \Theta)$ para agujeros de gusano estáticos y rotantes, respectivamente, tal que deben satisfacer todas las condiciones discutidas a lo largo de este capítulo. Por otro lado, recordemos que la superficie de la garganta en el agujero de gusano, por definición, viene dada por $\mathcal{B}(b_0, \Theta_0) = b_0$, la cual fue discutida en 6.1.4. Como vemos de (201), esto implica que el lado izquierdo de la igualdad será cero en la garganta; por tanto, no queda más remedio que en el lado derecho se deba satisfacer que

$$b(b_0) = b_0 \left[1 + \left(\frac{a}{b_0} \right)^2 \right], \quad (202)$$

de tal suerte que nos brinde información con respecto a la función forma $b(R)$ en la garganta. Adicionalmente, en el límite estático cuando el parámetro de rotación $a \rightarrow 0$, vemos que recuperamos la definición hallada por Morris y Thorne, i.e., $b(b_0) = b_0$. Con base en todo lo anterior podemos inferir que, en el caso de una agujero de gusano rotante, la garganta corresponderá a una superficie no-esférica de revolución cuyos puntos en un valor fijo $R = b_0$ son

independientes de la coordenada Θ . Por otro lado, de (199) y (200) vemos que la forma del agujero de gusano vendrá gobernada por el potencial métrico $\Psi(R, \Theta)$ generado por NJA donde, en este caso, determinará el cuadrado de la distancia propia radial (ver (199)).

- Derivando con respecto a R la expresión (201), tenemos que

$$\frac{\mathcal{B} - R(\partial_R \mathcal{B})}{R^2} = \partial_R \left(\frac{R^2}{\Psi} \right) \left[1 - \frac{b}{R} + \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] + \frac{1}{\Psi} \left\{ \frac{R [b - R(\partial_R b)] - 2a^2}{R} \right\},$$

donde el lado derecho de la ecuación es diferente de cero y, adicionalmente es positiva; por tanto, necesariamente se debe satisfacer que

$$R(\partial_R \mathcal{B}) < \mathcal{B}, \quad (203)$$

donde esta restricción corresponde a la misma *flare-out condition* hallada en (194) para el caso de agujeros de gusano estáticos²⁴⁹.

- Tomando como base las condiciones para garantizar la existencia de soluciones asintóticamente planas en el caso estático (ver condiciones iii.) y iv.) estudiadas en la sección anterior, ellas aseguran a su vez que en el caso rotante para obtener soluciones de esta misma naturaleza se debe cumplir la siguiente condición:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} N(R, \Theta) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{B}(R, \Theta)}{R} = 0. \quad (204)$$

²⁴⁹ Sin embargo, al estudiar la geometría espacial del tensor métrico (198) también se puede llegar a la misma condición, de forma totalmente análoga a la realizada en la sección anterior.

- Como en el caso analizado para ZAMO (ver sección 5.1), naturalmente en esta situación el potencial gravitacional $\omega(R, \Theta)$ que acompaña al tensor métrico (198) corresponde a la velocidad angular del agujero de gusano que, a su vez, corresponde a la misma que posee esta familia de observadores.
- En el estudio realizado en la sección anterior vimos que NJA impone la restricción (197) sobre la función lapso, de tal suerte que, infortunadamente, tendremos soluciones con horizontes de eventos. Naturalmente, estas patologías serán heredadas por el tensor métrico (198).

En conclusión, si alguna vez se encuentra paseando tranquilamente por el Cosmos en su nave espacial y descubre un agujero de gusano generado por NJA, no intente cruzarlo, porque morirá. Seguramente morirá de la misma forma en que lo haría si estuviese cayendo libremente hacia un agujero negro. Morirá porque usted, con su altura L y masa m , experimentará una enorme aceleración relativa entre sus pies y cabeza, aceleración con una magnitud de $\sim L(2GM/c^3)^{-2} \sim (10 \text{ veces la gravedad terrestre}) \times (L/m) \times (M/10^4 \text{ masas solares})^{-2}$ y sufrirá un proceso de *spaguetización* (ver sección 32.6 del MTW ²⁵⁰).

6.4. Casos particulares: Reissner-Nordström y Kerr-Newman

Consideremos como ejemplo a una solución tipo Reissner-Nordström, que corresponderá a un agujero de gusano estático y esféricamente simétrico que posee masa, carga eléctrica (“carga sin carga”), cuyo tensor métrico en la carta coordenada de Schwarzschild es de la forma

$$\mathcal{G} = -\left(1 - \frac{R_s}{R} - \frac{Q^2}{R^2}\right) dT \otimes dT + \left(1 - \frac{R_s}{R} - \frac{Q^2}{R^2}\right)^{-1} dR \otimes dR + R^2 d\Omega \otimes d\Omega, \quad (205)$$

²⁵⁰ Misner, Thorne y Wheeler 1973

donde R_s corresponde al radio de Schwarzschild y Q a la “carga”, tal que hemos tomado en la solución semilla (39) a $G(R) = F(R) = 1 - R_s/R + Q^2/R^2$ y $H(R) = R^2$; por tanto, de (187) vemos que la función forma en este caso particular corresponde a

$$b(R) = R_s - \frac{Q^2}{R}. \quad (206)$$

Una vez obtenida esta función podremos analizar la geometría espacial del agujero de gusano gracias a la expresión (191) donde $b(R)$ está dado por (206), obteniendo la siguiente expresión:

$$dZ(R) = \pm \left(\frac{R}{R_s - Q^2/R} - 1 \right)^{-1/2} dR, \quad (207)$$

tal que la *flare-out condition* (194) nos impone la restricción

$$R_s > \frac{2Q^2}{R} \quad (208)$$

sobre la solución tipo Reissner-Nordström. Adicionalmente, esta forma que toma la condición es bien interesante, puesto que nos dice que el valor de pegado en la coordenada radial R_s es mayor que la “carga” confinada en el agujero de gusano, lo cual resulta bastante razonable, teniendo en cuenta el teorema de Birkhoff. Por otro lado, el tensor energía-momentum en este caso estará dado por ²⁵¹

$$\mu(R) = -\tau(R) = p(R) = \frac{Q^2}{8\pi R^4}, \quad (209)$$

²⁵¹ Morris y Thorne 1988

donde $\mu(R)$, $\tau(R)$ y $p(R)$ corresponden a la densidad total de energía, la tensión radial por unidad de área y $p(R)$ la presión medida en las direcciones laterales, respectivamente²⁵². Adicionalmente, es importante señalar que, con base en (205) vemos que la solución de Reissner-Nordström contendrá dos horizontes de eventos: uno interno y otro externo, localizados en

$$\mathcal{G}_{TT} = 0 \Rightarrow R_H = \frac{R_s}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4(Q/R_s)^2} \right],$$

tal que el horizonte externo corresponderá a un horizonte de eventos; por el contrario, el horizonte interno en realidad corresponde a un horizonte de Cauchy.

Al tomar el par (K, Ψ) de la forma dada por la Clase 2 de las soluciones rotantes obtenidos mediante NJA (ver el final del capítulo 2) con $c_2 = 2\sqrt{2}$ y $c_3 = 0$, llegaremos al agujero de gusano tipo Kerr-Newman, cuya función $B(R, \Theta)$ en (201) será:

$$\frac{B(R, \Theta)}{R} = 1 - \frac{R^2}{R^2 + a^2 \cos^2 \Theta} \left(1 - \frac{R_s}{R} + \frac{Q^2 + a^2}{R^2} \right), \quad (210)$$

tal que, para garantizar la existencia de zonas asintóticamente planas, la condición (204) nos dice que para este caso particular sólo se cumplirá en el caso débilmente rotante. Por otro lado, la *flare-out condition* (203) nos impone la siguiente restricción:

$$\frac{2R_s R a^2 \cos^2 \Theta + (Q^2 + a^2 \sin^2 \Theta)(R^2 - a^2 \cos^2 \Theta)}{(R^2 + a^2 \cos^2 \Theta)^2} < 1 - \frac{R^2}{R^2 + a^2 \cos^2 \Theta} \left(1 - \frac{R_s}{R} + \frac{Q^2 + a^2}{R^2} \right),$$

donde su interpretación, a diferencia del caso estático, resulta algo difusa.

²⁵² Con el objetivo de no alargar más este capítulo se remite al lector a las secciones A-2 y F del artículo de Morris y Thorne [Morris y Thorne 1988], donde se encuentra una discusión mucho más detallada con respecto a la forma y las restricciones en el tensor energía-momentum.

Adicionalmente, el agujero de gusano tipo Kerr-Newman generado mediante NJA rotará con una velocidad angular

$$\omega(R, \Theta) = \frac{a(R_s R - Q^2)}{(R^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \Theta (R^2 + Q^2 + a^2 - R_s R)}, \quad (211)$$

donde efectivamente vemos que en el límite estático $\omega(R, \Theta) \rightarrow 0$, y su correspondiente tensor energía-momentum estará dado por las cantidades dinámicas²⁵³

$$\mu(R, \Theta) = -\tau(R, \Theta) = p(R, \Theta) = \frac{Q^2}{8\pi (R^2 + a^2 \cos^2 \Theta)^2}. \quad (212)$$

En otras palabras, la contraparte rotante del agujero de gusano tipo Reissner-Nordström obtenida mediante NJA corresponde al agujero de gusano tipo Kerr-Newman.

Infortunadamente, las ideas de Newman y Janis nos restringen a soluciones que siempre contendrán horizontes de eventos, prohibiendo los viajes interestelares a través de ellas. Así pues, en principio, un observador fuera del agujero de gusano generado por NJA en realidad no podrá distinguir, en principio, si efectivamente se trata de un agujero de gusano o un agujero negro, dado que existe un horizonte de eventos que le impide discernir entre estos dos objetos astrofísicos. De manera que resulta pertinente preguntarnos cómo verá un observador en el infinito esta situación, i.e., *¿cómo lucirá el contorno de las soluciones obtenidas mediante el ansatz de Newman-Janis?* Para responder a esta cuestión deberemos centrarnos en el problema de cómo hallar una forma analítica para graficar las sombras generadas por las soluciones obtenidas.

²⁵³ Nuevamente, para no extender más este capítulo remito al lector que desee profundizar en la forma y restricciones para el tensor energía-momentum en un agujero de gusano rotante al artículo de Azreg [Azreg-Ainou 2016].

7. Sombras de Agujeros Negros Mediante el Método de Hamilton-Jacobi

El poder de la ciencia se adquiere gracias a una especie de pacto con el diablo: a costa de una progresiva evanescencia del mundo cotidiano. Llega a ser monarca, pero, cuando lo logra, su reino es apenas un reino de fantasmas.

—Ernesto Sabato, *Uno y el Universo* (1945).

Entre las muchas predicciones de la teoría General de Relatividad, una de las más extraordinarias es el fenómeno del “doblamiento” de los haces de luz producto de la curvatura espaciotemporal debido a la presencia de algún objeto astrofísico, creando así un efecto muy similar al producido por una lente. Este efecto fue predicho por Einstein en 1936 ²⁵⁴. Sin embargo, para la época una verificación observacional a este fenómeno era bastante improbable, mientras que, teóricamente hablando, adquirió paulatinamente un gran interés por la comunidad científica. No fue hasta 1960 que el estudio experimental de las lentes gravitacionales adquirió mayor fuerza con el descubrimiento del cuásar ²⁵⁵, brindando así la posibilidad de estudiar fuentes gravitacionales muy lejanas y brillantes, ideales para evidenciar este efecto detectado por primera vez en 1979 ²⁵⁶.

²⁵⁴ Albert Einstein: *Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field*. En: *Science* 84.2188 (1936), págs. 506-507

²⁵⁵ Maarten Schmidt: *3 C 273: a star-like object with large red-shift*. En: *Nature* 197.4872 (1963), págs. 1040-1040

²⁵⁶ Dennis Walsh, Robert F Carswell y Ray J Weymann: *0957+ 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?* En: *Nature* 279.5712 (1979), págs. 381-384

Gracias a estas lentes fue posible verificar la creencia general que en el centro de nuestra Galaxia, así como en muchas otras, existe un agujero negro supermasivo²⁵⁷. Estos objetos ultra compactos (UCOs, por sus siglas en inglés) producen un “doblamiento” de la luz extremadamente mayor, formando así imágenes y sombras empleadas por nosotros como una herramienta observacional muy poderosa a la hora de estudiar el campo gravitacional alrededor de los UCOs y comprender su naturaleza. Así pues, ellos poseerán, por definición, anillos de luz (LR por sus siglas en inglés) que corresponderán a órbitas circulares (i.e., geodésicas nulas²⁵⁸), las cuales constituyen una forma extrema del “doblamiento” de los haces lumínicos con dos firmas características: una gravitacional y otra electromagnética²⁵⁹.

La primera fue detectada por primera vez en 2016 por LIGO en forma de ondas gravitacionales producto de la unión de dos agujeros negros²⁶⁰, verificando así la existencia de los LR y, por ende, los UCOs. Por otro lado, la firma electromagnética viene codificada en los LR, que a su vez están altamente relacionados a la sombra producida por estos²⁶¹. Las sombras de un agujero negro, vista por un determinado

²⁵⁷ Kazunori Akiyama y col.: *First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole*. En: *The Astrophysical Journal Letters* 875.1 (2019), pág. L4

²⁵⁸ Los LR son una clase bastante particular de geodésicas nulas, los cuales están definidos para geometrías que poseen al menos dos vectores de Killing (ζ, ξ) , tal que su corchete de Lie es nulo. Según el teorema de Noether, estos vectores estarán asociados a la simetría temporal y axial del espaciotiempo en cuestión, luego en una carta local podremos expresar a estos vectores como $\zeta = \partial_T, \xi = \partial_\Phi$. Así pues, cualquier vector que viva en el espacio tangente a la variedad \mathcal{M} y, por tanto a los LR, puede ser expresado como una combinación lineal de (ζ, ξ) , adoptando a su vez las propiedades geométricas y de simetría del espaciotiempo [Cunha y Herdeiro 2018].

²⁵⁹ Pedro VP Cunha, Carlos AR Herdeiro y Eugen Radu: *Fundamental photon orbits: black hole shadows and spacetime instabilities*. En: *Physical Review D* 96.2 (2017), pág. 024039

²⁶⁰ Benjamin P Abbott y col.: *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*. En: *Physical review letters* 116.6 (2016), pág. 061102

²⁶¹ Bardeen 1973

observador, constituyen el conjunto de direcciones en el cielo local²⁶² que recibirán la luz proveniente de su horizonte de eventos. Debido a que este no es una fuente de radiación (al menos clásicamente hablando), la sombra de un agujero negro actualmente corresponde a la carencia de esta ²⁶⁴. En otras palabras, podríamos imaginar una fuente de luz producida, por ejemplo, por un *background* de estrellas en el Cosmos mucho más allá de un agujero negro con respecto al observador que detecta este evento en el universo, tal que él percibirá una silueta sobre el fondo de estrellas (ver figura 19). Esta región oscura vista por él es a lo que llamaremos la sombra del agujero negro, tal que su “forma” vendrá determinada o caracterizada por el espaciotiempo mismo (i.e., el tensor métrico).

En conclusión, la detección de sombras podría, en teoría, determinar la geometría espaciotemporal justo en la vecindad del horizonte de eventos, o al menos la parte más cercana a ellos donde se podrían producir LRs, y así brindarnos la posibilidad experimental de testear las probables desviaciones con respecto a la geometría más aceptada hasta la fecha en los agujeros negros (i.e., la solución de Kerr) ²⁶⁵. Para esta clase de geometrías rotantes tipo Kerr su movimiento geodésico es Liouville integrable²⁶⁶ y separable en la carta de Boyern-Lindsquit mediante el formalismo de Hamilton-Jacobi ²⁶⁷. En esta carta coordenada siempre podremos encontrar órbitas con coordenada radial constante, conocidas como órbitas esféricas ²⁶⁸. Así, el sub-

²⁶² El cielo local se refiere a la proyección aparente de objetos estelares en una esfera centrada en el observador ²⁶³, como se aprecia en la figura 19.

²⁶⁴ Cunha y Herdeiro 2018

²⁶⁵ Broderick y col. 2014

²⁶⁶ Es decir, que constituye a un sistema dinámico con suficientes cantidades conservadas, o primeras integrales, de tal suerte que su comportamiento tendrá un número de grados de libertad menor que la dimensión de su espacio de fase; por tanto, la evolución de este sistema se podrá restringir a una subvariedad dentro de este espacio.

²⁶⁷ Carter 1968

²⁶⁸ Edward Teo: *Spherical photon orbits around a Kerr black hole*. En: *General Relativity and Gravi-*

conjunto restringido al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ contiene dos LRs, de tal suerte que ambos convergen a $r = 3M$ en el límite de rotación nula (i.e., Schwarzschild). El conjunto de todas las órbitas esféricas determina completamente el contorno de la sombra generada por el agujero negro de Kerr, tal que todas serán inestables²⁶⁹

²⁷⁰.

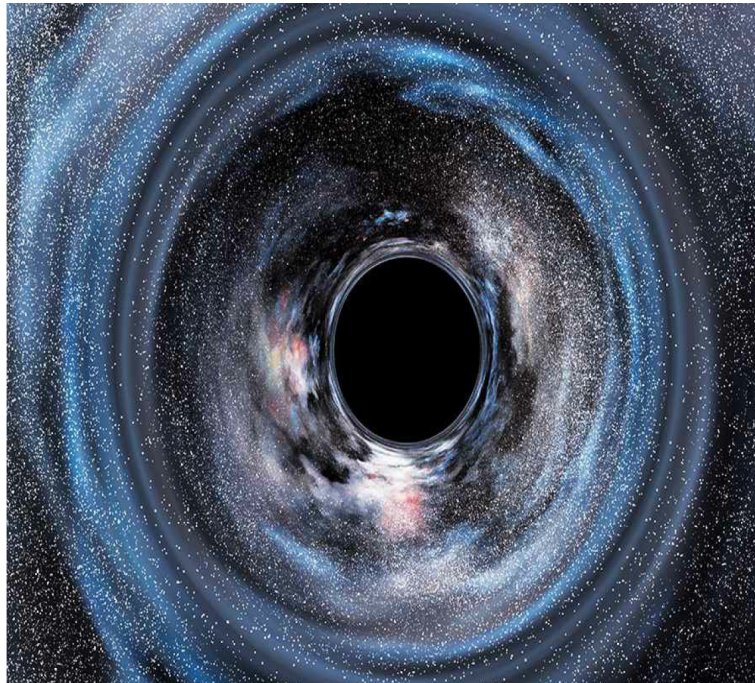


Figura 19. Esfera celeste fuertemente distorsionada por Gargantúa de la película *Interstellar* dirigida por Christopher Nolan. Como vemos, Gargantúa “dobla” los rayos de luz provenientes de cada una de las estrellas en la esfera celeste. Debido a ello la apariencia de la galaxia Gargantúa se ve altamente distorsionada (i.e., la lente gravitacional de esta galaxia). La región oscura corresponde a la sombra generada por este UCO y alrededor están los respectivos LRs. Imagen tomada de

²⁷¹.

tation 35.11 (2003), págs. 1909-1926

²⁶⁹ i.e., son órbitas esféricas que permiten a los haces de luz orbitar varias veces el agujero negro antes de ser absorbidos por él o dispersados hacia el infinito ante cualquier ligera perturbación.

²⁷⁰ Cunha, Herdeiro y Radu 2017

Aunando en lo anterior, en el 2019 se demostró que la solución final obtenida mediante NJA (ver ecuación (55)) admite una separabilidad mediante el método de Hamilton-Jacobi sólo para geodésicas nulas, y si sólo si, esta solución está escrita en la carta coordenada de Boyern-Lindsquit ²⁷². Un año después, se demostró que los LRs en un espaciotiempo generado a través de NJA *siempre* admitirán una separabilidad en la ecuación de Hamilton-Jacobi independientemente de la función métrica ambigua $\Psi(R, \Theta)$ que obtuvimos en (55) ²⁷³.

En este capítulo obtendremos la forma analítica de los LRs que definirán la forma de las sombras para todas las soluciones de agujeros negros que podemos obtener mediante NJA. Finalmente, aplicaremos los resultados obtenidos a la solución particular correspondiente al agujero negro de Kerr-Newman y así estudiar sus sombras. Para lograr todo ello nos basaremos en las ideas presentadas por Azreg ²⁷⁴, Shaikh ²⁷⁵ y Lima Junior ²⁷⁶.

7.1. Separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi en NJA

Para el estudio de las geodésicas nulas es indispensable el uso de una partícula libre de prueba que describa LRs sobre el espaciotiempo en cuestión. El Hamiltoniano en este caso adopta la forma ²⁷⁷

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\frac{1}{2} \mu^2 : \quad \mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = -1, \quad (213)$$

²⁷² Shaikh 2019

²⁷³ Junior y col. 2020

²⁷⁴ Azreg-Aïnou 2014a

²⁷⁵ Shaikh 2019

²⁷⁶ Junior y col. 2020

²⁷⁷ Chandrasekhar 1998

donde $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ corresponde a las componentes del tensor métrico inverso a (55), p_μ a las componentes del momentum generalizado y μ a la masa de la partícula de prueba. Es importante señalar que en este caso al realizar una transformación de Legendre sobre el Lagrangiano para una partícula libre \mathcal{L} llegaremos a la conclusión que la función de Lagrange y de Hamilton tendrán exactamente la misma forma (213), luego la igualdad entre el Lagrangiano y el Hamiltoniano nos conduce a la idea de estos dos serán igual a una constante, i.e.,

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} = \text{constante} = -\frac{1}{2} \mu^2,$$

que corresponderá a la primera constante de movimiento para nuestro estudio de las geodésicas: la conservación de la masa en reposo μ .

Inyectando (213) en la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J)²⁷⁸ (340), obtenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \mathcal{G}^{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (214)$$

tal que λ es un parámetro afín y hemos reescrito los momentums con base en (331). Ahora bien, debido a que (55) no depende explícitamente de T, Φ o λ , la ecuación de H-J (214) admite una separación de variables, proporcionándonos así la acción de Jacobi \mathcal{S} de la forma

$$\mathcal{S}(x^\mu, p_\mu, \lambda) = \mathcal{S}_T(T) + \mathcal{S}_\Phi(\Phi) + \mathcal{S}_\lambda(\lambda) + \mathcal{S}_{R,\Theta}(R, \Theta), \quad (215)$$

tal que, con base en (213) y (333), podemos inferir que

²⁷⁸ Para ver en detalle el formalismo de Hamilton-Jacobi en Relatividad General, dirigirse al apéndice 5.

$$\partial\mathcal{S}_\lambda/\partial\lambda = -\mathcal{H} = \mu^2/2 \Rightarrow \mathcal{S}_\lambda(\lambda) = \mu^2 \lambda/2. \quad (216)$$

Por otro lado, vemos que (55) posee dos coordenadas cíclicas (T, Φ) , luego ellas corresponderán a dos vectores de Killing de la forma $\zeta = \partial_T$ y $\xi = \partial_\Phi$ ²⁷⁹, de tal suerte que traerán consigo dos cantidades conservadas decodificadas en sus momentums canónicos, i.e., $p_T = -E$ ²⁸⁰ y $p_\Phi = L_\Phi$ donde E corresponde a la energía y L_Φ al momentum angular en dirección axial de la partícula de prueba. Teniendo en mente lo anterior y con base en (215), podemos concluir que

$$p_T = \partial\mathcal{S}_T/\partial T = -E \Rightarrow \mathcal{S}_T(T) = -ET, \quad (217)$$

$$p_\Phi = \partial\mathcal{S}_\Phi/\partial\Phi = L_\Phi \Rightarrow \mathcal{S}_\Phi(\Phi) = L_\Phi\Phi. \quad (218)$$

Por último, similar al tratamiento empleado para la solución de Kerr, nosotros asumiremos que la función $\mathcal{S}_{R,\Theta}(R, \Theta)$ en (215) se puede desacoplar de la forma²⁸¹

$$\mathcal{S}_{R,\Theta}(R, \Theta) = \mathcal{S}_R(R) + \mathcal{S}_\Theta(\Theta), \quad (219)$$

tal que al construir la acción de Jacobi con base en este ansatz, y de tal suerte que sea solución a la ecuación de H-J, este nos prooverá la correcta descripción del

²⁷⁹ Lo cual entra en total concordancia con la definición de LRs proporcionada al inicio de este capítulo.

²⁸⁰ El signo menos es atribuible a la signatura Lorentziana que hemos empleado.

²⁸¹ Carter 1968

movimiento de la partícula de prueba en estudio. Finalmente, teniendo en cuenta las ideas (216), (217), (218) y (219) aplicadas en la acción de Jacobi (215), esta toma la forma

$$\mathcal{S}(x^\mu, p_\mu, \lambda) = \frac{\mu^2}{2} \lambda - ET + L_\Phi \Phi + \mathcal{S}_R(R) + \mathcal{S}_\Theta(\Theta). \quad (220)$$

Inyectando (216) y (220) en (214), la ecuación de H-J se puede reescribir como:

$$\mathcal{G}^{TT} E^2 - 2\mathcal{G}^{T\Phi} L_\Phi E + \mathcal{G}^{\Phi\Phi} L_\Phi^2 + \mathcal{G}^{RR} (\partial_R \mathcal{S})^2 + \mathcal{G}^{\Theta\Theta} (\partial_\Theta \mathcal{S})^2 = -\mu^2, \quad (221)$$

tal que las componentes contravariantes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ del tensor métrico (55) son

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{TT} &= \frac{\Delta a^2 \sin^2(\Theta) - (K + a^2)^2}{\Psi \Delta}, & \mathcal{G}^{T\Phi} &= \mathcal{G}^{\Phi T} = \frac{(FH - K) a}{\Psi \Delta}, \\ \mathcal{G}^{RR} &= \frac{\Delta}{\Psi}, & \mathcal{G}^{\Theta\Theta} &= \frac{1}{\Psi}, & \mathcal{G}^{\Phi\Phi} &= \frac{FH + a^2 \cos^2(\Theta)}{\Psi \Delta \sin^2(\Theta)}, \end{aligned}$$

donde $K(R) \equiv \sqrt{F/G} H$ y $\Delta(R) \equiv FH + a^2$. Así pues, (221) adopta la forma

$$\underbrace{-\frac{E^2}{\Psi \Delta} [(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\Theta)] + \frac{L_\Phi^2}{\Psi \Delta \sin^2(\Theta)} (\Delta - a^2 \sin^2(\Theta)) + \frac{2a E L_\Phi}{\Psi \Delta} (K - FH)}_{\Lambda} + \frac{\Delta}{\Psi} (\partial_R \mathcal{S})^2 + \frac{1}{\Psi} (\partial_\Theta \mathcal{S})^2 = -\mu^2.$$

Factoricemos un poco a Λ , así

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{\Psi \Delta} \left[-E^2 (K + a^2)^2 + 2a L_\Phi E (K + a^2) - L_\Phi^2 a^2 \right] \\
&+ \frac{1}{\Psi \sin^2(\Theta)} \left(E^2 a^2 \sin^4(\Theta) + L_\Phi - 2a L_\Phi E \sin^2(\Theta) \right) \\
&= -\frac{[E (K + a) - L_\Phi a]^2}{\Psi \Delta} + \frac{(E a \sin^2(\Theta) - L_\Phi)^2}{\Psi \sin^2(\Theta)}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de H-J (221), toma la forma

$$-\frac{[E (K + a) - L_\Phi a]^2}{\Psi \Delta} + \frac{(E a \sin^2(\Theta) - L_\Phi)^2}{\Psi \sin^2(\Theta)} + \frac{\Delta}{\Psi} (\partial_R \mathcal{S})^2 + \frac{1}{\Psi} (\partial_\Theta \mathcal{S})^2 = -\mu^2. \quad (222)$$

Ahora bien, como hemos resaltado a lo largo de todo este capítulo, nuestro interés para estudiar la forma de la sombra del agujero negro recaerá únicamente en las geodésicas trazadas por los fotones al rededor de este UCO (i.e., $\mu = 0$). Así pues, para este caso particular la ec. (222) toma la forma

$$\underbrace{\Delta (\partial_R \mathcal{S})^2 - \frac{[E (K + a) - L_\Phi a]^2}{\Delta}}_{f(R)} = \underbrace{-\frac{(E a \sin^2(\Theta) - L_\Phi)^2}{\sin^2(\Theta)} - (\partial_\Theta \mathcal{S})^2}_{f(\Theta)}, \quad (223)$$

tal que, debido a que los potenciales métricos (F, H, K) dependen sólo de la coordenada radial, el lado izquierdo corresponderá a una función $f(R)$ con dependencia exclusivamente radial y, el lado derecho dependerá sólo de la coordenada angular Θ . En adición, dadas las diferentes dependencias en los dos lados en (223), la única forma que estas sean iguales se debe atribuir al hecho que se podrán igualar por separado a un mismo valor constante de acoplamiento que denotaremos como κ , luego podemos separar esta ecuación como

$$\Delta (\partial_R \mathcal{S})^2 - \frac{[E(K+a) - L_\Phi a]^2}{\Delta} \equiv -\kappa \quad \text{y} \quad \frac{(E a \sin^2(\Theta) - L_\Phi)^2}{\sin^2(\Theta)} + (\partial_\Theta \mathcal{S})^2 \equiv \kappa, \quad (224)$$

donde de este par de ecuaciones vemos que la ecuación de H-J es totalmente separable para el caso de geodésicas nulas teniendo en cuenta el tensor métrico (55). Por otro lado, en este punto debemos enfatizar un hecho fundamental para este estudio, el cual se puede vislumbrar en las ecuaciones (223) y (224): NJA admite una separabilidad en la ecuación de H-J si, y sólo si, la métrica rotante final está escrita en la carta coordenada de Boyern-Lindquist. También podemos concluir que este *ansatz siempre* admitirá esta separabilidad sin importar la forma del potencial métrico ambiguo $\Psi(R, \Theta)$ en la solución final obtenida a través de NJA ²⁸².

Con base en las ideas desarrolladas por Carter en 1968 en el estudio de las geodésicas en la familia de soluciones tipo Kerr ²⁸³, nos será bastante conveniente re-definir la constante de acoplamiento κ con base en una nueva constante de movimiento \mathcal{C} ²⁸⁴ que relacione la energía E y el momento angular axial L_Φ , definida como ²⁸⁵

$$\kappa \equiv \mathcal{C} + (aE - L_\Phi)^2, \quad (225)$$

donde \mathcal{C} se conoce ampliamente en la literatura como la constante de Carter. Con base en (225), podemos reescribir el par de ecuaciones en (224) como

²⁸² Junior y col. 2020

²⁸³ Carter 1968

²⁸⁴ Usualmente a esta constante de Carter se le denota como \mathcal{Q} ; sin embargo, para evitar confusiones de esta constante con la “carga” \mathcal{Q} en la solución tipo Kerr-Newman que estudiaremos en un futuro, nosotros la denotaremos como \mathcal{C} .

²⁸⁵ Junior y col. 2020

$$p_R^2 = \frac{[E(K + a^2) - aL_\Phi]^2}{\Delta^2} - \frac{[\mathcal{C} + (aE - L_\Phi)^2]}{\Delta}, \quad (226)$$

$$p_\Theta^2 = \mathcal{C} + a^2 E^2 \cos^2(\Theta) - L_\Phi^2 \cot^2(\Theta), \quad (227)$$

donde hemos usado la identidad (331). Así, este par de ecuaciones (226) y (227) junto con las conservación de la energía E y el momento angular axial L_Φ , nos provee con un conjunto de primeras integrales de movimiento suficientes para describir la dinámica del sistema²⁸⁶.

Ahora bien, reescribiendo el momentum canónico conjugado como

$$p^\mu = \mathcal{G}^{\mu\nu} p_\nu = \dot{x}^\mu : \quad \dot{x}^\mu = dx^\mu / d\lambda,$$

podemos reescribir a (226), así

$$\begin{aligned} \dot{R} = p^R &= \mathcal{G}^{RR} p_R = \frac{\Delta}{\Psi} p_R \quad \Rightarrow \quad \dot{R}^2 = \frac{\Delta^2}{\Psi^2} p_R^2 \\ \Rightarrow \dot{R}^2 &= \frac{\Delta^2}{\Psi^2} \left\{ \frac{[E(K + a^2) - aL_\Phi]^2}{\Delta^2} - \frac{[\mathcal{C} + (aE - L_\Phi)^2]}{\Delta} \right\} \\ \Rightarrow \Psi^2 \dot{R}^2 &= [E(K + a^2) - aL_\Phi]^2 - \Delta [\mathcal{C} + (aE - L_\Phi)^2]. \end{aligned} \quad (228)$$

Análogamente, podemos reescribir a (227), como

²⁸⁶ Se puede demostrar que (226) y (227) son efecto constantes sin el uso de la acción de Jacobi, debido a que sus corchetes de Poisson, teniendo en cuenta el Hamiltoniano (213) y el tensor métrico (55), será nulo.

$$\Psi^2 \dot{\Theta}^2 = \mathcal{C} + a^2 E^2 \cos^2(\Theta) - L_\Phi^2 \cot^2(\Theta), \quad (229)$$

y las ecuaciones de movimiento para (T, Φ) , adoptan la forma

$$\begin{aligned} \dot{T} = p^T &= \mathcal{G}^{TT} p_T + \mathcal{G}^{T\Phi} p_\Phi \\ &= \frac{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2(\Theta)}{\Psi \Delta} E + \frac{(FH - K) a}{\Psi \Delta} L_\Phi, \end{aligned} \quad (230)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = p^\Phi &= \mathcal{G}^{T\Phi} p_T + \mathcal{G}^{\Phi\Phi} p_\Phi \\ &= \frac{(K - FH) a}{\Psi \Delta} E + \frac{FH + a^2 \cos^2(\Theta)}{\Psi \Delta \sin^2(\Theta)} L_\Phi, \end{aligned} \quad (231)$$

donde hemos usado las constantes de movimiento $p_T = -E$ y $p_\Phi = L_\Phi$.

Para el siguiente paso es menester definir un par de funciones $\mathcal{R}(R)$ y $\mathcal{T}(\Theta)$ en el par de ecuaciones (228) y (229), tal que

$$\frac{\Psi}{E} \dot{R} = \pm \sqrt{\mathcal{R}(R)} \quad \text{y} \quad \frac{\Psi}{E} \dot{\Theta} = \pm \sqrt{\mathcal{T}(\Theta)}, \quad (232)$$

donde es importante señalar que $\mathcal{R}(R)$ y $\mathcal{T}(\Theta)$ siempre serán positivos, y adoptan la forma

$$\mathcal{R}(R) = [(K + a^2) - a L_\Phi/E]^2 - \Delta [\mathcal{C}/E^2 + (a - L_\Phi/E)^2], \quad (233)$$

$$\mathcal{T}(\Theta) = \mathcal{C}/E^2 + [a^2 - (L_\Phi/E)^2 \csc^2 \Theta] \cos^2 \Theta. \quad (234)$$

En este punto es importante resaltar que la propagación de los fotones fuera del

agujero negro vendrá gobernada por los valores que tomen las constantes E , L_Φ y \mathcal{C} . En el caso de las geodésicas nulas sólo las razones

$$\xi = L_\Phi/E \quad \text{y} \quad \eta = \mathcal{C}/E^2, \quad (235)$$

serán realmente independientes. Adicional a ello, ξ y η estarán directamente relacionadas con los parámetros de impacto que describirán la dirección de un fotón, visto por un observador lejano al agujero de gusano (ver (261) y (262)). Por tanto, para reducir el número de parámetros nos será conveniente reescribir $\mathcal{R}(R)$ y $\mathcal{T}(\Theta)$ con base en (235), obteniendo finalmente

$$\mathcal{R}(R) = [(K + a^2) - a\xi]^2 - \Delta [\eta + (a - \xi)^2], \quad (236)$$

$$\mathcal{T}(\Theta) = \eta + (a^2 - \xi^2 \csc^2 \Theta) \cos^2 \Theta. \quad (237)$$

Una vez obtenidas las expresiones (232) con la forma explícita para $\mathcal{R}(R)$ y $\mathcal{T}(\Theta)$, analizaremos el caso cuando los fotones se moverán en una superficie de radio constante (i.e., el caso para órbitas esféricas) y así poder determinar las condiciones para las cuales puedan darse este tipo de órbitas.

7.2. Órbitas esféricas: movimiento radial

Ahora nos interesaremos en las geodésicas nulas con un radio constante, denominadas órbitas esféricas, que satisfacen las condiciones

$$dR/d\lambda = 0 \quad \text{y} \quad d^2R/d\lambda^2 = 0, \quad (238)$$

tal que podemos inferir de ellas que la coordenada radial será una constante. Sin

embargo, estas condiciones no implican ninguna suposición o restricción *a priori* con respecto a la estabilidad en las órbitas ²⁸⁷.

Ahora bien, de (232) vemos que la primera condición implica que si $\dot{R} = 0$, la función $\mathcal{R}(R)$ también lo será. Derivando a (232) con respecto al parámetro afín λ nos conduce a que

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\Psi^2}{E^2} \dot{R} \ddot{R} + \frac{2\Psi\dot{\Psi}}{E^2} \dot{R}^2 = \frac{d\mathcal{R}}{dR} \dot{R} \quad \left(\times \frac{1}{\dot{R}} \right) \\
 \Rightarrow & \frac{2\Psi^2}{E^2} \ddot{R} + \frac{2\Psi\dot{\Psi}}{E^2} \dot{R} = \frac{d\mathcal{R}}{dR} : \quad \dot{R} = 0 \\
 \Rightarrow & \frac{2\Psi^2}{E^2} \ddot{R} = \frac{d\mathcal{R}}{dR} \\
 \Rightarrow & \ddot{R} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{R}}{dR} = 0.
 \end{aligned} \tag{239}$$

Por tanto, las condiciones para órbitas esféricas se pueden reescribir como Teo 2003

$$\mathcal{R}(R) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\mathcal{R}}{dR} = 0. \tag{240}$$

Inyectando (236) en las condiciones (240), obtenemos el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned}
 & [(K + a^2) - a\xi]^2 - \Delta [\eta + (a - \xi)^2] = 0, \\
 & 2K'[K + a(2a - \xi)] - \Delta' [\eta + (a - \xi)^2] = 0,
 \end{aligned}$$

tal que a la hora de resolverlas obtendremos dos pares de soluciones para (ξ, η) , dadas por

²⁸⁷ Cunha 2015

$$\xi_1 = \frac{K + a^2}{a} \quad \text{y} \quad \eta_1 = -\frac{K^2}{a^2}, \quad (241)$$

$$\xi_2 = \frac{K + a^2}{a} - \frac{2K'}{a} \frac{\Delta}{\Delta'} \quad \text{y} \quad \eta_2 = 4K'^2 \left(\frac{\Delta}{\Delta'^2} \right) - \frac{1}{a^2} \left(K - \frac{2\Delta}{\Delta'} K' \right)^2, \quad (242)$$

las cuales concuerdan con los resultados obtenidos por Lima Junior en Junior y col. 2020. Ahora bien, para averiguar qué par de soluciones (ξ, η) tomar, podemos reescribir a (237) de una forma conveniente, así ([Chandrasekhar 1998], sección 63)

$$\mathcal{T}(\Theta) = \eta + (a - \xi)^2 - (a \sin \Theta - \xi \csc \Theta)^2, \quad (243)$$

donde, debido a la definición en (232) debemos garantizar que $\mathcal{T}(\Theta)$ siempre sea un valor positivo, luego de (243) obtenemos la siguiente restricción:

$$\eta + (a - \xi)^2 \geq 0. \quad (244)$$

Al testear las soluciones (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2) con base en la restricción (244) veremos que el par que satisface este requerimiento corresponde al descrito por (242)²⁸⁸.

Es importante resaltar que la expresión (242) deberá estar evaluada en un valor de R específico, correspondiente al radio de la órbita esférica nula, el cual denotaremos como R_{OE} . Las expresiones (ξ_2, η_2) , a pesar de constantes de movimiento (ver (235)), sus valores explícitos en función de los potenciales métricos y sus primeras derivadas nos darán los valores exactos de estas constantes de movimiento eva-

²⁸⁸ En el caso de la solución de Kerr, otra forma de descartar el par (ξ_1, η_1) consiste en demostrar que, aquellas soluciones con un valor de η negativo, corresponderán a aquellas órbitas esféricas nulas con un radio que estaría dentro del horizonte de eventos del agujero negro [Cunha 2015].

luadas en R_{OE} . Por otro lado, el rango físico de valores que pueda tomar este radio dependerá fuertemente del movimiento colatitudinal en Θ (i.e., $\mathcal{T}(\Theta) \geq 0$, o lo que es lo mismo, $(p^\Theta)^2 \geq 0$). En conclusión, la silueta del *shadow* estará completamente determinada por (242) que corresponde al valor crítico que pueden tomar los parámetros (ξ, η) y que a su vez correspondan a órbitas esféricas físicamente plausibles, donde todas ellas serán órbitas inestables²⁸⁹. En la siguiente parte determinaremos las características del observador lejano que recibe la información de los fotones provenientes del UCO, y cómo él ve el contorno del mismo.

7.3. Sombras de agujeros negros rotantes

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, la firma electromagnética nos proporcionará la mayor información posible con respecto al contorno de un agujero negro, por eso resulta de vital importancia estudiar el comportamiento de los fotones recibidos por ellos. Así pues, los fotones que logran escapar del horizonte de eventos exterior conformarán un anillo brillante en el cielo local del observador; por el contrario, aquellos que inminentemente sean atrapados por el agujero negro conformarán una gran mancha, que corresponde a la que veremos en nuestros telescopios, y es a ella a la que denominaremos como su sombra. Para estudiarla, podríamos realizar el siguiente *Gedankenexperiment*:

Imaginemos que una fuente de luz se encuentra más allá del agujero negro, de tal suerte que su tamaño angular sea muy grande en comparación con él, y tal que no exista otra fuente de iluminación en su vecindad o en otra región, como se observa en la figura 19. En esta situación los fotones que pasen lo suficientemente cerca de él tendrán dos opciones que nos serán de interés: sumergirse dentro del agujero negro, u orbitarlo un par de veces y desviarse hacia el infinito espacial donde nos encontraremos nosotros, esto dependerá fuertemente del valor y la forma del

²⁸⁹ Esto se puede chequear al verificar que, al tomar la segunda derivada de $\mathcal{R}(R)$ e insertando los valores para (ξ_2, η_2) , ella será positiva.

par (ξ, η) en nuestro desarrollo. Así pues, sólo detectaremos los fotones que fueron desviados. En conclusión, en nuestro cielo local los fotones dispersados formarán una especie de anillo brillante; por el contrario, los fotones absorbidos por el agujero negro formarán una imagen oscura, i.e., construirán su sombra. Adicionalmente, nos encontraremos en un plano que será normal a la línea de visión que une el centro del agujero negro con nosotros, para así observar y estudiar su sombra.

Para llevar a cabo este experimento mental, es menester introducir un par de nuevas coordenadas (α, β) conocidas en la literatura como coordenadas celestes, tal que están definidas sobre un plano bidimensional, también denominado plano celeste ²⁹⁰. Una vez definidas debemos notar que estas corresponderán a la distancia perpendicular aparente de la imagen, vista desde el eje de simetría, y a la distancia perpendicular aparente de la imagen desde su proyección sobre el plano ecuatorial, respectivamente (ver figura 20). Finalmente, con esta construcción podremos obtener la proyección del agujero negro sobre el cielo local y determinar la forma analítica de las sombras de las obtenidas mediante NJA.

Para lograr nuestro fin será necesario recordar la forma estándar en como escribimos la métrica axisimétrica y estacionaria (ver ecuación (136)), i.e.,

$$\mathcal{G} = -e^{2\nu} dT \otimes dT + e^{2\mu} dR \otimes dR + e^{2\eta} d\Theta \otimes d\Theta + e^{2\lambda} (d\Phi - \omega dT)^2, \quad (245)$$

donde,

²⁹⁰ Chandrasekhar 1998

$$e^{2\nu} = \frac{\Psi \Delta}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}, \quad e^{2\mu} = \frac{\Psi}{\Delta}, \quad e^{2\eta} = \Psi, \quad (246)$$

$$e^{2\lambda} = \frac{\Psi \sin^2 \Theta}{\rho^4} [(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta] \quad \text{y} \quad \omega = \frac{(K - FH) a}{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}.$$

Ahora bien, usualmente en Relatividad General nos resulta mucho más fructífero expresar las cantidades físicas como el momentum de una partícula como una medida realizada por un observador local (Apéndice 2). En este caso, la medición dependerá del movimiento del observador, donde la elección más natural, con base en nuestro *Gedankenexperiment*, será un movimiento donde las coordenadas radial R y colatitudinal Θ estarán fijas y, además, este posea un momento angular igual a cero ²⁹¹. Por tanto, sus líneas de mundo serán perpediculares a las hipersuperficies tipo espacio de $T = cte$ pero, debido al término cruzado en la métrica (245), los observadores “rotarán con la geometría” con una velocidad $\omega(R, \Theta)$, vista desde el infinito. Así pues, como vimos en la sección 5.1, cada observador estará equipado con un marco de referencia (tétrada ortonormal) dado por (140) y (141). En otras palabras, el observador quien detectará en su cielo local los fotones provenientes del agujero de negro será ZAMO.

Con base en lo anterior, el siguiente paso consiste en proyectar los momentos generalizados (217) y (218) sobre la tétrada de ZAMO (141) (i.e., $p^{(a)} = \eta^{(a)(b)} e_{(b)}{}^\mu p_\mu$), obteniendo que

$$p^{(T)} = -\sqrt{\frac{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}{\Psi \Delta}} E + \frac{(K - FH) a}{\sqrt{\Psi \Delta} \sqrt{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}} L_\Phi, \quad (247)$$

²⁹¹ James M Bardeen, William H Press y Saul A Teukolsky: *Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation*. En: *The Astrophysical Journal* 178 (1972), págs. 347-370

$$p^{(R)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Psi}} p_R, \quad (248)$$

$$p^{(\Theta)} = \sqrt{\Psi} p_\Theta, \quad (249)$$

$$p^{(\Phi)} = \frac{\rho^2}{\sin \Theta \sqrt{\Psi} \sqrt{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta}} L_\Phi, \quad (250)$$

donde $p^{(T)}$, $p^{(R)}$, $p^{(\Theta)}$ y $p^{(\Phi)}$ corresponden a la energía, el momentum en las direcciones radial, colatitudinal y el momentum angular medidos por ZAMO²⁹².

7.3.1. Parámetros de impacto

Para analizar correctamente los fotones detectados en el cielo local de nuestro observador será necesario proyectarlos sobre el plano celeste con coordenadas cartesianas (x', y') , asignadas a cada fotón de tal suerte que serán proporcionales a las coordenadas celestes (α, β) , como se ilustra en la figura 20. Así se definen los parámetros de impacto, fundamentales en la forma analítica de las sombras de cualquier cuerpo astrofísico.

Debido a que el observador detectará la sombra en el infinito espacial, podemos postular como ansatz que, como es de esperarse, los ángulos (α, β) tendrán una dependencia inversamente proporcional con la distancia de observación, es decir, podremos realizar una aproximación para ángulos pequeños de la forma

$$x' = -R_{\text{obs}} \beta \quad \text{y} \quad y' = R_{\text{obs}} \alpha, \quad (251)$$

²⁹² Es de resaltar que, un fotón con un momento angular orbital igual a cero o cualquier otro tipo de partícula será observado por ZAMO con una componente nula de momento angular en la dirección $e_{(\Phi)}$. En efecto, esto debido a que un observador comóvil a él también tendrá un momento angular nulo con respecto al infinito, como es de esperarse con base en la discusión en 5.1 [Cunha 2015].

tal que R_{obs} corresponde a la distancia de observación. Es importante señalar que el signo menos en x' proviene del hecho que, al detectar un fotón con un valor de β positivo, este corresponderá a un punto en el lado izquierdo del plano celeste cuando ZAMO “observe” al agujero negro. Por tanto, corresponderá a un valor negativo para x' ²⁹³, como se muestra en la figura 20. Así pues, los elementos de la base vectorial $\hat{e}_{x'}$ $\hat{e}_{y'}$ asociados a (249) y (250) estarán definidos como

$$\hat{e}_{x'} = \hat{e}_{(\Phi)} \quad \text{y} \quad \hat{e}_{y'} = -\hat{e}_{(\Theta)}, \quad (252)$$

respectivamente. Ahora bien, el vector posición del fotón evaluado justo cuando “impacte” el plano celeste vendrá caracterizado por el trimomentum lineal $\vec{\mathcal{P}}$ medido por ZAMO (248) - (250), luego su magnitud vendrá dada por

$$|\vec{\mathcal{P}}| \equiv \mathcal{P} \implies \mathcal{P}^2 = (p^{(R)})^2 + (p^{(\Theta)})^2 + (p^{(\Phi)})^2, \quad (253)$$

tal que, con base en la figura 20, vemos que

$$p^{(R)} = \mathcal{P} \cos \alpha \cos \beta, \quad p^{(\Theta)} = \mathcal{P} \sin \alpha, \quad p^{(\Phi)} = \mathcal{P} \sin \beta \cos \alpha. \quad (254)$$

²⁹³ Cunha 2015

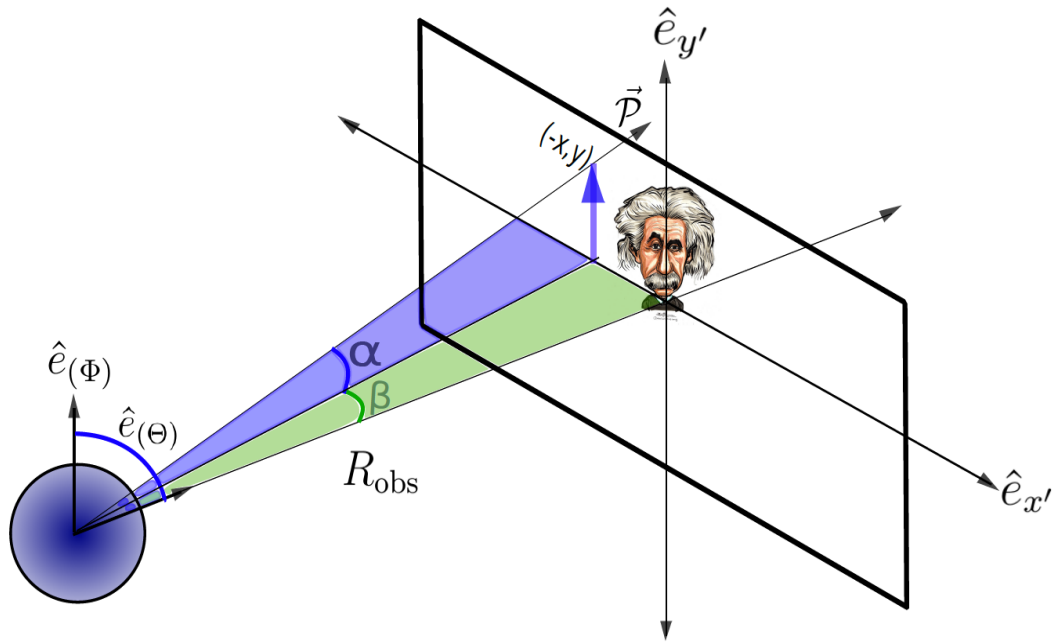


Figura 20. Representación gráfica de los parámetros de impacto para la sombra generada por un agujero negro, visto por un observador a una distancia R_{obs} . Cada fotón proveniente de las vecindades del agujero negro vendrá caracterizado por su trimomentum lineal $\vec{\mathcal{P}}$, tal que estos “impactaran” sobre el cielo local de un observador lejano -ZAMO, en este caso particular-, el cual estará situado en el origen de coordenadas del plano (x', y') y con coordenadas celestes (α, β) , donde α corresponde a la proyección del trimomentum con el plano xy y β a la proyección netamente sobre el eje x .

Sin embargo, al asumir que estamos muy, muy lejos del agujero negro (i.e., $R_{\text{obs}} \gg M_{\text{ADM}}$), los ángulos de observación serán muy pequeños ($\alpha, \beta \ll 1$), luego bajo esta aproximación (254) adopta la forma

$$p^{(R)} \approx \mathcal{P}, \quad p^{(\Theta)} \approx \mathcal{P} \alpha, \quad p^{(\Phi)} \approx \mathcal{P} \beta. \quad (255)$$

Por otro lado, la energía local \mathcal{E} que medirá el observador será análoga a como si estuviésemos en relatividad especial, luego $\mathcal{E} = \mathcal{P} c$, tal que empleando unidades naturales ($c = 1$) y, además teniendo en cuenta que $p^{(T)} = \mathcal{E}$, podemos concluir que

$$\beta \approx \frac{p^{(\Phi)}}{p^{(T)}} \quad \text{y} \quad \alpha \approx \frac{p^{(\Theta)}}{p^{(T)}}. \quad (256)$$

Luego los parámetros de impacto (251) adoptan la forma

$$x' = -R_{\text{obs}} \frac{p^{(\Phi)}}{p^{(T)}} \quad \text{y} \quad y' = R_{\text{obs}} \frac{p^{(\Theta)}}{p^{(T)}}. \quad (257)$$

Inyectando (247) - (250) en (257), obtenemos que

$$x' = -R_{\text{obs}} \frac{\rho^2 \sqrt{\Delta}}{\{[\Delta a^2 \sin^2 \Theta - (K + a^2)^2] E + (K - FH) a L_{\Phi}\} \sin \Theta}, \quad (258)$$

$$y' = \pm R_{\text{obs}} \frac{\sqrt{\Delta \mathcal{T}(\Theta)} \sqrt{(K + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \Theta} \Psi E}{[\Delta a^2 \sin^2 \Theta - (K + a^2)^2] E + (K - FH) a L_{\Phi}}, \quad (259)$$

tal que,

$$\mathcal{T}(\Theta) = \eta_2 + (a^2 - \xi_2^2 \csc^2 \Theta) \cos^2 \Theta. \quad (260)$$

Por último, asumiendo que tanto nuestra solución semilla (39) como la solución final obtenida mediante NJA (55) son asintóticamente planas, cuando $R \rightarrow \infty$ tendremos que $F(R) \rightarrow 1$, $G(R) \rightarrow 1$, $H(R) \rightarrow R^2$, $K(R) \rightarrow R^2$ y $\Psi(R, \Theta) \rightarrow R^2$. Así pues, finalmente los parámetros de impacto toman la forma ²⁹⁴

²⁹⁴ Junior y col. 2020

$$x' = -\frac{L_\Phi/E}{\sin \Theta_{\text{obs}}} = -\frac{\xi_2}{\sin \Theta_{\text{obs}}}, \quad (261)$$

$$y' = \pm \frac{\sqrt{\mathcal{T}(\Theta)}}{E} = \pm \sqrt{\eta_2 + a^2 \cos^2 \Theta_{\text{obs}} - \xi_2 \cot^2 \Theta_{\text{obs}}}, \quad (262)$$

donde Θ_{obs} corresponde al ángulo de observación y el par (ξ_2, η_2) corresponde a la expresión (242). Debemos tener muy presente que los parámetros de impacto obtenidos bajo esta aproximación sólo serán válidos cuando el observador se encuentre lejos de la fuente (i.e., $R_{\text{obs}} \gg M_{\text{ADM}}$).

7.4. Caso particular: Kerr-Newman

Consideremos como ejemplo una solución tipo Kerr-Newman al escoger el par (K, Ψ) Clase II con constantes $c_3 = 0$ y $c_2 = 2\sqrt{2}$, y adicionalmente tomando los potenciales métricos de la forma

$$H = R^2 \quad \text{y} \quad F = G = 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}.$$

Con base en esta escogencia el tensor métrico rotante generado por NJA tomará la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = & - \left(\frac{dR \otimes dR}{\Delta_{KN}} + d\Theta \otimes d\Theta \right)^2 \rho_{KN}^2 + (dT - a \sin^2 \Theta d\Phi)^2 \frac{\Delta_{KN}}{\rho_{KN}^2} \\ & - [(R^2 + a^2) d\Phi - a dT]^2 \frac{\sin^2 \Theta}{\rho_{KN}^2}, \end{aligned} \quad (263)$$

donde,

$$\rho_{KN}^2 = R^2 + a^2 \cos^2 \Theta \quad \text{y} \quad \Delta_{KN} = R^2 - 2MR + a^2 + Q^2, \quad (264)$$

tal que al tomar $\Delta_{KN} = 0$ obtendremos las soluciones

$$R_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}. \quad (265)$$

Si $R_{\pm} \in \mathbb{R}$ (i.e., para $M^2 \geq a^2 + Q^2$), R_+ determinará un horizonte de eventos y R_- un horizonte de Cauchy. Por otro lado, para $M \neq 0$ o $Q \neq 0$, el conjunto de puntos para los cuales $\rho_{KN} = 0$ determinará la única singularidad de curvatura contenida en este agujero negro “cargado” y rotante. Específicamente para $a \neq 0$ formará un anillo de radio $|a|$ en el plano ecuatorial $\Theta = \pi/2$ ²⁹⁵. Adicionalmente, si asumimos la veracidad de la *hipótesis de censura cósmica*²⁹⁶ y, por tanto, olvidando la existencia de singularidades desnudas, el horizonte de eventos en R_+ necesariamente deberá existir y la condición $M^2 \geq a^2 + Q^2$ deberá ser satisfecha.

Como vimos en la sección 7.2, los valores para (ξ_2, η_2) en (242) evaluados en el radio de la órbita nula inestable R_{OE} caracterizarán la sombra del agujero negro, que corresponde al valor crítico pueden tomar de tal suerte que sean órbitas esféricas. En el caso de Kerr-Newman, estos parámetros adoptan la forma

$$\xi_2 = \frac{2 R_{OE} (2M R_{OE} - Q^2) - (R_{OE} + M) (R_{OE}^2 + a^2)}{a (R_{OE} - M)}, \quad (266)$$

$$\eta_2 = \frac{4 a^2 R_{OE}^2 (M R_{OE} - Q^2) - R_{OE}^2 [R_{OE} (R_{OE} - 3M) + 2Q^2]^2}{a^2 (R_{OE} - M)^2}, \quad (267)$$

²⁹⁵ Chandrasekhar 1998

²⁹⁶ Roger Penrose: *Singularities and time-asymmetry*. En: *General relativity*. 1979

obteniendo los resultados hallados por A. de Vries en ²⁹⁷. Por otro lado, cuando $Q = 0$ obtendremos los mismo resultados hallados por Bardeen para la solución de Kerr (ver las ecuaciones (48) y (49) en ²⁹⁸).

²⁹⁷ De Vries 2000

²⁹⁸ Bardeen 1973

8. Conclusiones: Parte II

En la segunda y última parte del trabajo de grado se continuó con el estudio de las soluciones generadas por NJA descritas en la primera parte. Para ello se comenzó conjeturando que el observador cómovil (59) estudiado en el capítulo 2 no proporcionaba toda la información física del sistema en estudio. De manera que se optó por un observador que no fuese comóvil a un elemento de fluido arbitrario y, a su vez, permitiese ver las formas funcionales de los flujos termodinámicos los más compactas posibles; por tanto, se escogió un observador ampliamente conocido en la literatura como ZAMO. Así pues, se realizó una transformación de Lorentz entre las dos tétradas que caracterizan al observador cómovil (59) y ZAMO (140) con el objetivo de extrapolar todas los flujos termodinámicos hallados en el capítulo 2 y expresarlos con respecto a ZAMO. Al realizar este procedimiento surge un campo vectorial extra que no es “visto” por el primero, pero si por el segundo observador, corroborando la hipótesis que el observador comóvil no entrega la información física completa del sistema. Producto de ello, se interpretó este campo vectorial como un flujo de calor, dando como resultado un conjunto de soluciones interiores generadas por NJA interpretadas por ZAMO como un fluido anisótropo con flujo de calor, caracterizado por el tensor energía momentum (154).

Aunando lo anterior, se determinaron las formas funcionales de los flujos termodinámicos, variables cinemáticas y condiciones de energía, vistas por ZAMO. De manera que se evidenció que el flujo de calor sólo fluye en la dirección del *dragging* gravitacional y, adicionalmente, es generado por la tensión anisótropa $\Pi^{(T\Phi)}$, como se ilustra en la ecuación (159). Así pues, para ilustrar los resultados obtenidos se aplicaron a la solución de Kerr-Newman generada por NJA, presentada en la subsección 3.2. Al hacerlo, se evidenció una predominante violación en las condiciones de energía, como se ilustró en el cuadro (1). Ahora bien, una vez determinadas las zonas donde se violan las condiciones de energía, se procedió estudiar los perfiles para los flujos

termodinámicos y variables cinemáticas en la solución de Kerr-Newman. Producto de ello se evidenció que una de las principales fuentes de la anisotropía en el fluido, en este caso particular, es generado por la carga.

Es aquí donde nació la siguiente cuestión: *¿cómo tenemos una carga en una solución típicamente interpretada como un agujero negro rotante con un campo electromagnético asociado sin tener ningún campo de esta naturaleza en nuestro modelo de fluido? ¿cómo una solución predicha por las ecuaciones de Einstein-Maxwell también puede ser obtenida como solución de las ecuaciones de Einstein?* Para responder a estas preguntas se empleó una idea desarrollada por Wheeler, argumentando que en realidad en este caso tenemos una carga topológica, tal que esta genera líneas de fuerza que son homotópicas a las líneas de campo eléctrico generadas por dos cargas puntuales de signo opuesto, de tal que suerte que existe una isomorfismo entre estas dos cargas conservadas -a saber, la carga topológica y la carga eléctrica-, como se ilustra en la figura (18). Por tanto, las violaciones en las condiciones de energía que genera un modelo material “exótico” y la carga topológica direccionaron por separado y en conjunto a inferir que las soluciones generadas por NJA se pueden interpretar como agujeros de gusano.

Por tanto, de forma natural surgió la necesidad de estudiar cómo se comporta el *ansatz* de Newman-Janis en la generación de agujeros de gusano rotantes, tal que en el presente trabajo de grado se profundizaron los resultados obtenidos y publicados en ²⁹⁹. Así pues, se encontró que NJA impone una restricción sobre la escogencia de la función lapso en el caso de soluciones estáticas para agujeros de gusano tipo Morris-Thorne, dada por (197). Infortunadamente, esta impone soluciones de agujeros de gusano con un horizonte de eventos en su garganta, imposibilitándolos como una vía rápida y segura de realizar viajes interestelares a través de ellos. Naturalmente, esta patología es heredada por soluciones de agujeros de gusano rotantes

²⁹⁹ Gutiérrez-Piñeres, Beltrán y López-Monsalvo 2021

generadas por NJA donde, en este caso, surge una restricción sobre la función forma $\mathcal{B}(R, \Theta)$ descrita por la ecuación (201), de tal suerte que todas estas soluciones también contendrán un horizonte de eventos, descartándolos como un medio para realizar viajes interestelares a través de ellos. Sin embargo, como caso particular a los resultados obtenidos se generó el agujero de gusano de Kerr-Newman tomando al agujero de gusano de Reissner-Nordström como su semilla.

Finalmente, para responder la pregunta *¿cómo lucirá el contorno de las soluciones obtenidas mediante el ansatz de Newman-Janis?* Se comenzó estudiando cómo esta forma de emplear NJA afecta las propiedades de separabilidad con respecto al estudio de las trayectorias trazadas por las geodésicas nulas que orbitan los cuerpos astrofísicos modelos a través de las soluciones generadas a lo largo de este trabajo. Para tal fin se implementó el método de Hamilton-Jacobi, de manera que se evidenció que la ecuación de Hamilton-Jacobi *siempre* admite una separabilidad sin importar la forma del potencial métrico ambiguo Ψ que surge en la solución final (55), el cual es irrelevante en el estudio de las geodésicas nulas. Así pues, para deducir la solución analítica de la sombra proporcionada por un espaciotiempo arbitrario generado mediante NJA, fue necesario realizar una separación entre la parte radial y colatitudinal con la ayuda de la constante de Carter. Posterior a ello se realizó un estudio de las órbitas trazadas por la parte radial y se halló la condición necesaria para su existencia, descrita en (240). Adicionalmente se determinaron las ecuaciones que determinan la sombra generada por las soluciones rotantes obtenidas, descritas por (261) y (262) y visto por un observador en el infinito espacial, corroborando los resultados hallados en ³⁰⁰.

³⁰⁰ Azreg-Aïnou 2014a; Junior y col. 20200; Shaikh 20190

9. Comentarios Generales

Se presentó una generalización del ansatz de Newman-Janis mediante el uso del lenguaje moderno de la geometría diferencial partiendo de un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico lo suficientemente general para generar una métrica maestra, la cual describe una solución estacionaria con simetría axial. Adicionalmente, todo el desarrollo se realizó desde una perspectiva geométrica tal que deja transparente la idea según la cual el formalismo abandona la transformación entre espacios métricos en favor de mapeos entre tétradas, de tal suerte que el espaciotiempo generado se interpretó como una solución interior que describe un fluido anisótropo sin flujo de calor, visto por un observador comóvil a un elemento de fluido. De manera que las ecuaciones de Einstein proporcionaron un sistema de ecuaciones independientes determinando las formas funcionales generales para los flujos termodinámicos del sistema y, a su vez, un conjunto adicional de dos ecuaciones diferenciales, tal que a la hora de resolverlas se obtuvieron cinco clases distintas de soluciones generales describiendo cada una de ellas un modelo de fluido de esta naturaleza.

Se determinó la forma explícita del tensor métrico que describe cada uno de los fluidos rotantes generados por NJA, así como algunos casos particulares conocidos en la literatura y, adicionalmente, su límite estático. Por otro lado, también se hallaron las formas explícitas para la velocidad de fluido así como los flujos termodinámicos para cada uno de los fluidos generales, sus casos particulares y el correspondiente límite estático. Al analizar el comportamiento de cada clase de soluciones se evidenció que el ansatz de Newman Janis no preserva la estructura conforme del espaciotiempo, sugiriendo fuertemente que este ansatz depende de la carta coordenada empleada. Hecho que está en total acuerdo con una investigación previamente realizada por Gutierrez-Piñeres y Quevedo para el caso de configuraciones confor-

mestáticas ³⁰¹.

Se constató que el observador cómovil no brindaba una descripción completa del sistema; por tanto, se realizó un cambio de observador a través de una transformación de Lorentz que condujo a ZAMO, tal que él no es cómovil a un elemento de fluido arbitrario. Característica que le brindó la capacidad de detectar un flujo de calor no detectado de antaño. Posteriormente se realizó una transformación de todos los flujos termodinámicos, como también el tensor del energía-momentum vistos por el observador cómovil, para determinar cómo ZAMO determina estas cantidades bajo un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor. Adicionalmente, se determinaron las variables cinématicas del sistema, así como la forma general para la condición de energía débil, fuerte y dominante. De manera que se aplicaron estos resultados al caso particular para la solución de Kerr-Newman generada por NJA, donde se evidenció una predominante violación de las condiciones de energía. También se argumentó el hecho de cómo un modelo de fluido sin un campo electromagnético asociado puede generar soluciones que, en principio, contiene un campo asociado de esta naturaleza. Para ello la “carga eléctrica” se interpretó como si en realidad se tratase de una carga topológica, generando líneas de fuerza que son homotópicas a las líneas de campo eléctrico generadas por la interacción entre dos cargas puntuales de carga opuesta, tomando como referencia las ideas de Wheeler ³⁰². Así el incumplimiento de las condiciones de energía y la aparición de una carga topológica, típica en agujeros de gusano, permitió conjeturar que en realidad estas soluciones se podrían interpretar como soluciones de agujeros de gusano rotantes.

Se discutió sobre la posibilidad de construir agujeros de gusano estáticos y generar su contraparte rotante mediante NJA, para ello la propia naturaleza del ansatz impuso una serie de condiciones físicas y geométricas con respecto a las características

³⁰¹ Gutiérrez-Piñeres y Quevedo 2016

³⁰² Wheeler 1962

de las soluciones generadas por él. Así pues, se demostró que el ansatz de Newman Janis *siempre* generará soluciones de agujeros de gusano no transitables, dado que contendrán un horizonte eventos, impidiendo los viajes interestelares a través de ellos. Para ilustrar los resultados obtenidos se generó el agujero de gusano de Kerr-Newman tomando como semilla el agujero de gusano de Reissner-Nordström.

Se estudió el comportamiento de las geodésicas nulas para un espaciotiempo genérico generado por NJA por medio del método de Hamilton-Jacobi, dado que el ansatz de Newman Janis *siempre* admite una separabilidad en la ecuación de Hamilton-Jacobi sin importar el modelo de materia con el que se esté trabajando. Adicionalmente, se estudiaron las órbitas esféricas nulas y se determinó la condición necesaria para su existencia. Posteriormente, se construyó la sombra intrínseca en los objetos astrofísicos que modelan las soluciones generadas por NJA y se obtuvieron las expresiones que determinan su forma, vista por un observador en el infinito, de acuerdo con las ideas de Lima Junior ³⁰³. Para ilustrar los resultados obtenidos se estudio el caso particular para la sombra generada por un agujero negro de Kerr-Newman, estudiado previamente por A. de Vries ³⁰⁴.

Como trabajos futuros se quiere estudiar el problema abierto en relatividad general con respecto a la búsqueda de una fuente para la solución de Kerr. Para ello, se quiere estudiar cómo se comportan las soluciones halladas en este trabajo de investigación a la hora de ser pegadas con la solución exterior de Kerr bajo la técnica de pegado de soluciones C^3 ³⁰⁵. Adicionalmente, se quiere seguir investigando más a fondo la estructura matemática del ansatz de Newman Janis en la búsqueda de una explicación satisfactoria con respecto a cómo, cuándo y porqué funciona tan

³⁰³ Junior y col. 2020

³⁰⁴ De Vries 2000

³⁰⁵ Antonio C Gutiérrez-Piñeres y Hernando Quevedo: *Darmois matching and C^3 matching*. En: *Classical and Quantum Gravity* 39.3 (2022), pág. 035015

bien en la generación de soluciones rotantes a las ecuaciones de Einstein.

Adicionalmente, este trabajo de investigación ha sido presentado regionalmente en la semana de la ciencia organizada por la Universidad Industrial de Santander en el año 2020 en la modalidad de póster. Por otro lado, en 2021 de forma internacional se presentó en el *VI encuentro en modelado matemático en física y geometría* organizado por la UNAM en Ciudad de México para el año 2021 en la modalidad de ponente. En el mismo año y bajo la misma modalidad, también se presentó en el *27th International Conference of International Academy of Physical Sciences on Advances in Relativity and Cosmology* organizado por el departamento de matemáticas del instituto Birla de ciencias y matemáticas en Pilani, India. Asimismo, el director del presente de trabajo de investigación participó como ponente invitado y con estos mismos resultados en el *XXII International Meeting on Physical Interpretations of Relativity Theory (PIRT 2021)*, de tal suerte que se publicaron parte de los resultados hallados en este trabajo en la revista adscrita a este evento³⁰⁶. Finalmente, en la actualidad se encuentra en redacción un artículo científico con respecto a los resultados hallados, con el objetivo de ser sometido a la revista *The European Physical Journal*.

³⁰⁶ Gutiérrez-Piñeres, Beltrán y López-Monsalvo 2021

BIBLIOGRAFÍA

- Aasi, Junaid y col.: *Advanced ligo*. En: *Classical and quantum gravity* 32.7 (2015), pág. 074001.
- Abbott, Benjamin P y col.: *Observation of gravitational waves from a binary black hole merger*. En: *Physical review letters* 116.6 (2016), pág. 061102.
- Abdujabbarov, AA y col.: *A coordinate-independent characterization of a black hole shadow*. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 454.3 (2015), págs. 2423-2435.
- Acernese, Fet al y col.: *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*. En: *Classical and Quantum Gravity* 32.2 (2014), pág. 024001.
- Adamo, Tim y col.: *The Kerr-Newman metric: a review*. En: *arXiv preprint arXiv:1410.6626* (2014).
- Akiyama, Kazunori y col.: *First M87 event horizon telescope results. IV. Imaging the central supermassive black hole*. En: *The Astrophysical Journal Letters* 875.1 (2019), pág. L4.
- Amarilla, Leonardo y col.: *Null geodesics and shadow of a rotating black hole in extended Chern-Simons modified gravity*. En: *Physical Review D* 81.12 (2010), pág. 124045.
- Andersson, Nils: *Gravitational waves from instabilities in relativistic stars*. En: *Classical and Quantum Gravity* 20.7 (2003), R105.
- Andersson, Nils y col.: *Relativistic fluid dynamics: Physics for many different scales*. En: *Living Reviews in Relativity* 10.1 (2007), págs. 1-83.

Arkani-Hamed, Nima y col.: *Euclidean wormholes in string theory*. En: *Journal of High Energy Physics* 2007.12 (2007), pág. 018.

Arnol'd, Vladimir Igorevich: *Mathematical methods of classical mechanics*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013.

Azreg-Aïnou, Mustapha: *Comment on Spinning loop black holes* [arXiv: 1006.0232]. En: *arXiv preprint arXiv:1106.0970* (2011).

Azreg-Ainou, Mustapha: *From static to rotating to conformal static solutions: rotating imperfect fluid wormholes with (out) electric or magnetic field*. En: *The European Physical Journal C* 74.5 (2014), págs. 1-11.

Azreg-Aïnou, Mustapha: *Generating rotating regular black hole solutions without complexification*. En: *Physical Review D* 90.6 (2014), pág. 064041.

— *Regular and conformal regular cores for static and rotating solutions*. En: *Physics Letters B* 730 (2014), págs. 95-98.

Azreg-Ainou, Mustapha: *Wormhole solutions sourced by fluids, II: three-fluid two-charged sources*. En: *The European Physical Journal C* 76.1 (2016), págs. 1-15.

Bambi, Cosimo: *Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm very long baseline interferometry facilities*. En: *Physical Review D* 87.10 (2013), pág. 107501.

Bambi, Cosimo y col.: *Apparent shape of super-spinning black holes*. En: *Physical Review D* 79.4 (2009), pág. 043002.

Bardeen, James M: *Kerr metric black holes*. En: *Nature* 226.5240 (1970), págs. 64-65.

Bardeen, James M y col.: *Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation*. En: *The Astrophysical Journal* 178 (1972), págs. 347-370.

Bardeen, JM: *Black Holes (Les astres occlus)*, ed. BS Dewitt & C. Dewitt. 1973.

Beltracchi, Philip y col.: *Physical interpretation of Newman-Janis rotating systems. I. A unique family of Kerr-Schild systems*. En: *Phys. Rev. D* 104 (12 2021), pág. 124066. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.124066.

— *Physical interpretation of Newman-Janis rotating systems. II. General systems*. En: *Phys. Rev. D* 104 (12 2021), pág. 124067. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.124067.

Boyer, Robert H y col.: *Maximal analytic extension of the Kerr metric*. En: *Journal of mathematical physics* 8.2 (1967), págs. 265-281.

Bozza, Valerio: *Gravitational lensing in the strong field limit*. En: *Physical Review D* 66.10 (2002), pág. 103001.

Broderick, Avery E y col.: *Testing the no-hair theorem with event horizon telescope observations of Sagittarius A*. En: *The Astrophysical Journal* 784.1 (2014), pág. 7.

Broderick, Avery E y col.: *The event horizon of Sagittarius A*. En: *The Astrophysical Journal* 701.2 (2009), pág. 1357.

Canonico, Rosangela y col.: "The Newman Janis Algorithm: A Review of Some Results". En: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*. Institute of Biophysics y Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of ? 2011, págs. 159-169.

Canonico, Rosangela y col.: "Theoretical models for Astrophysical objects and the Newman-Janis Algorithm". En: *Proceedings of the Eleventh International Conferen-*

ce on Geometry, Integrability and Quantization. Institute of Biophysics y Biomedical Engineering, Bulgarian Academy of ? 2010, págs. 85-96.

Caravelli, Francesco y col.: *Spinning loop black holes*. En: *Classical and Quantum Gravity* 27.24 (2010), pág. 245022.

Cardoso, Vitor y col.: *Is the gravitational-wave ringdown a probe of the event horizon?* En: *Physical review letters* 116.17 (2016), pág. 171101.

Carroll, Sean M: *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.

Carter, Brandon: *Global structure of the Kerr family of gravitational fields*. En: *Physical Review* 174.5 (1968), pág. 1559.

Chandrasekhar, Subrahmanyan: *The mathematical theory of black holes*. Vol. 69. Oxford University Press, 1998.

Cunha, Pedro Vieira Pinto da: "Black hole shadows-Sombras de buracos negros". Tesis doct. 2015.

Cunha, Pedro VP y col.: *Does the black hole shadow probe the event horizon geometry?* En: *Physical Review D* 97.8 (2018), pág. 084020.

Cunha, Pedro VP y col.: *EHT constraint on the ultralight scalar hair of the M87 supermassive black hole*. En: *Universe* 5.12 (2019), pág. 220.

— *Fundamental photon orbits: black hole shadows and spacetime instabilities*. En: *Physical Review D* 96.2 (2017), pág. 024039.

Cunha, Pedro VP y col.: *Shadows and strong gravitational lensing: a brief review*. En: *General Relativity and Gravitation* 50.4 (2018), págs. 1-27.

- Cunha, Pedro VP y col.: *Shadows of Kerr black holes with scalar hair*. En: *Physical review letters* 115.21 (2015), pág. 211102.
- Cunha, Pedro VP y col.: *Stationary black holes and light rings*. En: *Physical Review Letters* 124.18 (2020), pág. 181101.
- Dadhich, Naresh y col.: *Rotating black hole in Einstein and pure Lovelock gravity*. En: *arXiv preprint arXiv:1307.6166* (2013).
- Darmois, Georges: *Mémorial des sciences mathématiques*. En: *Fascicule XXV (Gauthier-Villars, Paris, 1927)* (1927).
- De Felice, Fernando y col.: *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, 1992.
- De Vries, A: *The apparent shape of a rotating charged black hole, closed photon orbits and the bifurcation set A 4*. En: *Classical and Quantum Gravity* 17.1 (2000), pág. 123.
- Drake, SP y col.: *The application of the Newman-Janis algorithm in obtaining interior solutions of the Kerr metric*. En: *Classical and Quantum Gravity* 14.7 (1997), pág. 1883.
- Drake, SP y col.: *Uniqueness of the Newman–Janis algorithm in generating the Kerr–Newman metric*. En: *General relativity and Gravitation* 32.3 (2000), págs. 445-457.
- Eckart, Carl: *The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid*. En: *Physical review* 58.10 (1940), pág. 919.
- Eddington, Arthur S: *A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae*. En: *Nature* 113.2832 (1924), págs. 192-192.

Einstein, Albert: *Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field*. En: *Science* 84.2188 (1936), págs. 506-507.

Einstein, Albert y col.: *The particle problem in the general theory of relativity*. En: *Physical Review* 48.1 (1935), pág. 73.

Erbin, Harold: *Deciphering and generalizing Demiański–Janis–Newman algorithm*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.5 (2016), págs. 1-21.

— *Janis–Newman algorithm: simplifications and gauge field transformation*. En: *General Relativity and Gravitation* 47.3 (2015), pág. 19.

Erbin, Harold y col.: *Five-dimensional janis–newman algorithm*. En: *Classical and Quantum Gravity* 32.16 (2015), pág. 165004.

Falcke, Heino y col.: *Viewing the shadow of the black hole at the galactic center*. En: *The Astrophysical Journal Letters* 528.1 (1999), pág. L13.

Ferraro, Rafael: *Untangling the Newman–Janis algorithm*. En: *General Relativity and Gravitation* 46.4 (2014), pág. 1705.

Finkelstein, David: *Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle*. En: *Physical Review* 110.4 (1958), pág. 965.

Flaherty, Edward J: *Hermitian and Kählerian geometry in relativity*. En: (1976).

Flamm, Ludwig: *Beiträge zur Einsteinschen gravitationstheorie*. Hirzel, 1916.

Friedman, John L y col.: *Rotating relativistic stars*. Cambridge University Press, 2013.

Frolov, Valery P y col.: *Physical effects in wormholes and time machines*. En: *Physical Review D* 42.4 (1990), pág. 1057.

- Fuller, Robert W y col.: *Causality and multiply connected space-time*. En: *Physical Review* 128.2 (1962), pág. 919.
- Garcia, Nadiezhda Montelongo y col.: *Nonminimal curvature–matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition*. En: *Classical and Quantum Gravity* 28.8 (2011), pág. 085018.
- Geroch, Robert: *Spinor structure of space-times in general relativity. I*. En: *Journal of Mathematical Physics* 9.11 (1968), págs. 1739-1744.
- Geroch, Robert P.: *Topology in general relativity*. En: *J. Math. Phys.* 8 (1967), págs. 782-786.
- Ghosh, Sushant G y col.: *Radiating Kerr–Newman black hole in $f(R)$ gravity*. En: *The European Physical Journal C* 73.6 (2013), págs. 1-11.
- Giampieri, Giacomo: *Introducing angular momentum into a black hole using complex variables*. En: *Gravity Research Foundation* (1990).
- Goldstein, Herbert y col.: *Classical mechanics*. 2002.
- Gourgoulhon, Eric: *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*. Vol. 846. Springer Science & Business Media, 2012.
- Gourgoulhon, Éric: *An introduction to the theory of rotating relativistic stars*. En: *arXiv preprint arXiv:1003.5015* (2010).
- Grenzebach, Arne y col.: *Photon regions and shadows of Kerr-Newman-NUT black holes with a cosmological constant*. En: *Physical Review D* 89.12 (2014), pág. 124004.
- Gutiérrez-Piñeres, AC y col.: “Newman-Janis Ansatz for rotating wormholes”. En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 2081. 1. IOP Publishing. 2021, pág. 012005.

- Gutiérrez-Piñeres, Antonio C: *Conformastationary disk-haloes in Einstein–Maxwell gravity*. En: *General Relativity and Gravitation* 47.5 (2015), pág. 54.
- Gutiérrez-Piñeres, Antonio C y col.: *Darmois matching and C³ matching*. En: *Classical and Quantum Gravity* 39.3 (2022), pág. 035015.
- *Newman–Janis Ansatz in conformastatic spacetimes*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.11 (2016), pág. 146.
- Harko, Tiberiu y col.: *Modified-gravity wormholes without exotic matter*. En: *Physical Review D* 87.6 (2013), pág. 067504.
- Hawking, Stephen y col.: *General relativity: an Einstein centenary survey*. En: *General Relativity: an Einstein Centenary Survey* (2010).
- Hawking, Stephen W: *Black hole explosions?* En: *Nature* 248.5443 (1974), págs. 30-31.
- *Quantum coherence down the wormhole*. En: *Physics Letters B* 195.3 (1987), págs. 337-343.
- *Wormholes in spacetime*. En: *EUCLIDEAN QUANTUM GRAVITY*. 1988, págs. 363-369.
- Hawking, Stephen W y col.: *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.
- Hayward, Sean A: *Dynamic wormholes*. En: *International Journal of Modern Physics D* 8.03 (1999), págs. 373-382.
- Herrera, L y col.: *Dissipative collapse of axially symmetric, general relativistic sources: A general framework and some applications*. En: *Physical Review D* 89.8 (2014), pág. 084034.

Herrera, L y col.: *The complexification of a nonrotating sphere: An extension of the Newman–Janis algorithm*. En: *Journal of Mathematical Physics* 23.12 (1982), págs. 2339-2345.

Hioki, Kenta y col.: *Hidden symmetries, null geodesics, and photon capture in the Sen black hole*. En: *Physical Review D* 78.4 (2008), pág. 044007.

Hochberg, David y col.: *Dynamic wormholes, antitrapped surfaces, and energy conditions*. En: *Physical Review D* 58.4 (1998), pág. 044021.

Hochberg, David y col.: *Self-consistent wormhole solutions of semiclassical gravity*. En: *Physical Review Letters* 78.11 (1997), pág. 2050.

Ibohal, Ng: *Rotating metrics admitting non-perfect fluids*. En: *General Relativity and Gravitation* 37.1 (2005), págs. 19-51.

Israel, Werner: *Nonstationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory*. En: *Annals of Physics* 100.1-2 (1976), págs. 310-331.

— *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*. En: *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)* 44.1 (1966), págs. 1-14.

Johannsen, Tim y col.: *Metric for rapidly spinning black holes suitable for strong-field tests of the no-hair theorem*. En: *Physical Review D* 83.12 (2011), pág. 124015.

Junior, Haroldo CD Lima y col.: *Spinning black holes with a separable Hamilton–Jacobi equation from a modified Newman–Janis algorithm*. En: *The European Physical Journal C* 80.11 (2020), págs. 1-12.

Kar, Sayan y col.: *Quantifying energy condition violations in traversable wormholes*. En: *Pramana* 63.4 (2004), págs. 859-864.

Kerr, Roy P: *Discovering the Kerr and Kerr-Schild metrics*. En: *arXiv preprint arXiv:0706.1109* (2007).

— *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. En: *Physical review letters* 11.5 (1963), pág. 237.

Kolassis, Charalampos A y col.: *Energy conditions for an imperfect fluid*. En: *Classical and Quantum Gravity* 5.10 (1988), pág. 1329.

Kormendy, John y col.: *Inward bound the search for supermassive black holes in galactic nuclei*. En: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 33.1 (1995), págs. 581-624.

Kruskal, Martin D: *Maximal extension of Schwarzschild metric*. En: *Physical review* 119.5 (1960), pág. 1743.

Kuhfittig, Peter KF: *Can a wormhole supported by only small amounts of exotic matter really be traversable?* En: *Physical Review D* 68.6 (2003), pág. 067502.

Kyriakopoulos, E: *Rotating Black Hole Solutions with Axion Dilaton and Two Vector Fields and Solutions with Metric and Fields of the Same Form*. En: *arXiv preprint arXiv:0905.2542* (2009).

Lanczos, Cornelius: *The variational principles of mechanics*. University of Toronto press, 2020.

Landau, LD y col.: *Mechanics: Volume 1 (Course of Theoretical Physics Series)*. 2000.

Lemos, José PS y col.: *Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant*. En: *Physical Review D* 68.6 (2003), pág. 064004.

Lifshitz, EM y col.: *Fluid mechanics: Volume 6 (course of theoretical physics)*. 1987.

- Lobo, Francisco SN: *Phantom energy traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 71.8 (2005), pág. 084011.
- *Stability of phantom wormholes*. En: *Physical Review D* 71.12 (2005), pág. 124022.
- Maldacena, Juan y col.: *Humanly traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 103.6 (2021), pág. 066007.
- *SYK wormhole formation in real time*. En: *Journal of High Energy Physics* 2021.4 (2021), págs. 1-40.
- Misner, Charles W y col.: *Classical physics as geometry*. En: *Annals of physics* 2.6 (1957), págs. 525-603.
- Misner, Charles W y col.: *Gravitation*. Macmillan, 1973.
- Modesto, Leonardo y col.: *Charged rotating noncommutative black holes*. En: *Physical Review D* 82.10 (2010), pág. 104035.
- Morris, Michael S y col.: *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity*. En: *American Journal of Physics* 56.5 (1988), págs. 395-412.
- Nakahara, Mikio: *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- Nawarajan, Deloshan y col.: *Global properties of physically interesting Lorentzian spacetimes*. En: *International Journal of Modern Physics D* 25.14 (2016), pág. 1650106.
- Newman, ET: *Complex coordinate transformations and the Schwarzschild-Kerr metrics*. En: *Journal of Mathematical Physics* 14.6 (1973), págs. 774-776.
- Newman, Ezra T y col.: *Metric of a rotating, charged mass*. En: *Journal of mathematical physics* 6.6 (1965), págs. 918-919.

Newman, Ezra T y col.: *Note on the Kerr spinning-particle metric*. En: *Journal of Mathematical Physics* 6.6 (1965), págs. 915-917.

Papakostas, T: "A new anisotropic solution for ellipsoidal spaces". En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 189. 1. IOP Publishing. 2009, pág. 012027.

— "Rotating fluids in General Relativity". En: *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 8. 1. IOP Publishing. 2005, pág. 002.

Papapetrou, A: *Stationary gravitational fields with axial symmetry*. En: *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 4 (1966), pág. 83.

Penrose, Roger: *Gravitational collapse and space-time singularities*. En: *Physical Review Letters* 14.3 (1965), pág. 57.

— *Singularities and time-asymmetry*. En: *General relativity*. 1979.

Pimentel, Oscar M y col.: *The energy-momentum tensor for a dissipative fluid in general relativity*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.10 (2016), págs. 1-17.

Pirogov, Yu F: *Towards the rotating scalar-vacuum black holes*. En: *arXiv preprint arXiv:1306.4866* (2013).

Rahaman, F y col.: *Wormhole with varying cosmological constant*. En: *General Relativity and Gravitation* 39.2 (2007), págs. 145-151.

Rajan, Del: *Complex spacetimes and the newman-janis trick*. En: *arXiv preprint arXiv:1601.03862* (2016).

Rajan, Del y col.: *Cartesian Kerr–Schild variation on the Newman–Janis trick*. En: *International Journal of Modern Physics D* 26.14 (2017), pág. 1750167.

- Rees, Martin J: *Black hole models for active galactic nuclei*. En: *Annual review of astronomy and astrophysics* 22.1 (1984), págs. 471-506.
- Rezzolla, Luciano y col.: *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013.
- Rosquist, Kjell: *Exact relativistic stellar models with liquid surface: I. Generalizing Buchdahl's $n=1$ polytrope*. En: *Classical and Quantum Gravity* 16.6 (1999), pág. 1755.
- Ruz, Soumendranath y col.: *Euclidean wormholes with minimally coupled scalar fields*. En: *Classical and Quantum Gravity* 30.17 (2013), pág. 175013.
- Sagan, Carl: *Contacto*. Nova, 2018.
- Santos, Nilton O: *Newtonian potential and the complex space*. En: *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)* 14.9 (1975), págs. 327-329.
- Schiffer, Menahem M y col.: *Kerr geometry as complexified Schwarzschild geometry*. En: *Journal of Mathematical Physics* 14.1 (1973), págs. 52-56.
- Schmidt, Maarten: *3 C 273: a star-like object with large red-shift*. En: *Nature* 197.4872 (1963), págs. 1040-1040.
- Schutz, Bernard: *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- Shaikh, Rajibul: *Black hole shadow in a general rotating spacetime obtained through Newman-Janis algorithm*. En: *Physical Review D* 100.2 (2019), pág. 024028.
- *Shadows of rotating wormholes*. En: *Physical Review D* 98.2 (2018), pág. 024044.
- Stephani, Hans: *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004.

Stephani, Hans y col.: *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge university press, 2009.

Synge, JL: *The escape of photons from gravitationally intense stars*. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 131.3 (1966), págs. 463-466.

Szekeres, György: *On the singularities of a Riemannian manifold*. En: *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7 7 (1960), pág. 285.

Talbot, CJ: *Newman-Penrose approach to twisting degenerate metrics*. En: *Communications in Mathematical Physics* 13.1 (1969), págs. 45-61.

Teo, Edward: *Rotating traversable wormholes*. En: *Physical Review D* 58.2 (1998), pág. 024014.

— *Spherical photon orbits around a Kerr black hole*. En: *General Relativity and Gravitation* 35.11 (2003), págs. 1909-1926.

Thorne, Kip: *The science of Interstellar*. WW Norton & Company, 2014.

Tipler, Frank J: *Singularities and causality violation*. En: *Annals of physics* 108.1 (1977), págs. 1-36.

Tolman, Richard C: *Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid*. En: *Physical Review* 55.4 (1939), pág. 364.

Toshmatov, Bobir y col.: *Rotating regular black hole solution*. En: *Physical Review D* 89.10 (2014), pág. 104017.

Tsukamoto, Naoki: *Black hole shadow in an asymptotically flat, stationary, and axisymmetric spacetime: The Kerr-Newman and rotating regular black holes*. En: *Physical Review D* 97.6 (2018), pág. 064021.

Tsukamoto, Naoki y col.: *Can we distinguish between black holes and wormholes by their Einstein-ring systems?* En: *Physical Review D* 86.10 (2012), pág. 104062.

Van Raamsdonk, Mark: *Comments on wormholes, ensembles, and cosmology.* En: *arXiv preprint arXiv:2008.02259* (2020).

Vigeland, Sarah J y col.: *Spacetime and orbits of bumpy black holes.* En: *Physical Review D* 81.2 (2010), pág. 024030.

Visser, M y col.: "The internal structure of black holes and spacetime singularities". En: *Proceedings of the Hafia Workshop.* 1997.

Visser, Matt: *Dirty black holes: Thermodynamics and horizon structure.* En: *Physical Review D* 46.6 (1992), pág. 2445.

— *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking.* 1995.

— *Quantum wormholes.* En: *Physical Review D* 43.2 (1991), pág. 402.

— *Traversable wormholes: Some simple examples.* En: *Physical Review D* 39.10 (1989), pág. 3182.

Visser, Matt y col.: *Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations.* En: *Physical review letters* 90.20 (2003), pág. 201102.

Wald, Robert M: *General relativity.* University of Chicago press, 2010.

Walsh, Dennis y col.: *0957+ 561 A, B: twin quasistellar objects or gravitational lens?* En: *Nature* 279.5712 (1979), págs. 381-384.

Weinberg, Steven: *Cosmology.* Oxford university press, 2008.

Weyl, Hermann: *Philosophie der Mathematik Und Naturwissenschaft.* En: (1927).

- Wheeler, J. A.: *Geometrodynamics*. Academic Press Inc., New York, 1962.
- Wheeler, John Archibald: *Geons*. En: *Physical Review* 97.2 (1955), pág. 511.
- Whisker, Richard: *Braneworld black holes*. En: *arXiv preprint arXiv:0810.1534* (2008).
- Will, Clifford M: *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge university press, 2018.
- Wiltshire, David L y col.: *The Kerr Spacetime*. En: *The Kerr Spacetime* (2009.).
- Yazadjiev, Stoytcho: *Newman-Janis method and rotating dilaton-axion black hole*. En: *arXiv preprint gr-qc/9907092* (1999).
- Younsi, Ziri y col.: *New method for shadow calculations: Application to parametrized axisymmetric black holes*. En: *Physical Review D* 94.8 (2016), pág. 084025.
- Yunes, Nicolás y col.: *Nonspinning black holes in alternative theories of gravity*. En: *Physical Review D* 83.10 (2011), pág. 104002.
- Zaslavskii, OB: *Exactly solvable model of a wormhole supported by phantom energy*. En: *Physical Review D* 72.6 (2005), pág. 061303.
- Zel'dovich, Yakov Boris y col.: *Relativistic astrophysics*. Chicago Univ. Press, 1971.

ANEXOS

Anexo A. Carta coordenada de Eddington-Filkenstein

Una geometría adecuada en la descripción del colapso gravitacional en un estrella es la geometría de Schwarzschild ³⁰⁷, donde aparentemente tiene un mal comportamiento en $r = 2M$ y corresponde a su radio gravitacional. Este mal comportamiento es debido a que la carta coordenada con la cual hemos cubierto el espaciotiempo no es la adecuada. En otras palabras, corresponde a una singularidad de coordenadas, la cual se puede remover con el uso de una carta mejor comportada en este espacio. Hasta la fecha existen varias cartas bien comportadas, tales como la de Novikov ³⁰⁸, Eddington-Filkenstein ³⁰⁹.

Para el caso de Eddington-Filkenstein, primero fue ideada por Sir Arthur Eddington en 1924 y redescubierta posteriormente por David Finkelstein en 1958. Al igual que la de Novikov, trabaja con partículas en caída libre; por un lado, él trabaja con partículas materiales, y Eddington-Filkenstein lo hacen con fotones.

Las coordenadas de Eddington-Filkenstein se basan principalmente en visualizar un sistema en el cual los movimientos radiales de los fotones de prueba permanecen siempre constante (un sistema comóvil a ellos), para tal fin ellos introducen unas nuevas coordenadas u y v , las cuales designarán a las geodésicas radiales nulas

³⁰⁷ Roger Penrose: *Gravitational collapse and space-time singularities*. En: *Physical Review Letters* 14.3 (1965), pág. 57

³⁰⁸ Yakov Boris Zel'dovich e Igor Dmitrievich Novikov: *Relativistic astrophysics*. Chicago Univ. Press, 1971

³⁰⁹ Arthur S Eddington: *A Comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae*. En: *Nature* 113.2832 (1924), págs. 192-192; David Finkelstein: *Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle*. En: *Physical Review* 110.4 (1958), pág. 965 y Kruskal-Szkeres Martin D Kruskal: *Maximal extension of Schwarzschild metric*. En: *Physical review* 119.5 (1960), pág. 1743; György Szekeres: *On the singularities of a Riemannian manifold*. En: *Publicationes Mathematicae Debrecen* 7 7 (1960), pág. 285

salientes y entrantes, respectivamente. En el caso de Schwarzschild están dadas por

$$\mathcal{G}_0 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr = 0. \quad (268)$$

De forma equivalente, las geodésicas nulas salientes están dadas por $u \equiv \text{constante}$, tal que

$$u \equiv t - r^*, \quad (269)$$

y las geodésicas nulas entrantes estarán definidas por $v \equiv \text{constante}$, donde

$$v \equiv t + r^*. \quad (270)$$

Aquí r^* representa la coordenada tortuga ³¹⁰, definida en el caso de Schwarzschild como

$$r^* \equiv r + 2M \ln |r/2M - 1|. \quad (271)$$

A lo largo de todo este trabajo hablaremos sólo de las coordenadas salientes de Eddington-Filkenstein, definidas a partir de (269).

Coordenadas salientes de Eddington-Finkelstein

Adoptemos u definida en (269) como coordenada en lugar de t en (268), luego te-

³¹⁰ Para más información con respecto a esta coordenada, remitirse al MTW Misner, Thorne y Wheeler 1973.

nemos que

$$\begin{aligned}u &= t - r^* \Rightarrow du = dt - dr^*, \\dr^* &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr.\end{aligned}\tag{272}$$

Inyectando (272) en (268) y tomando la forma de sus geodésicas nulas, llegamos a que

$$\mathcal{G}_{\mathbf{EF}} = -\left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) du \otimes + 2 dr\right] \otimes du = 0,\tag{273}$$

luego los conos de luz tendrán las pendientes

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} &= 0 \Rightarrow u = t - r^*, \\ \frac{du}{dr} &= -\frac{2}{1 - 2M/r}.\end{aligned}\tag{274}$$

A partir de esto, y sólo esto, podemos inferir todas las características del dibujo mostrado a continuación.

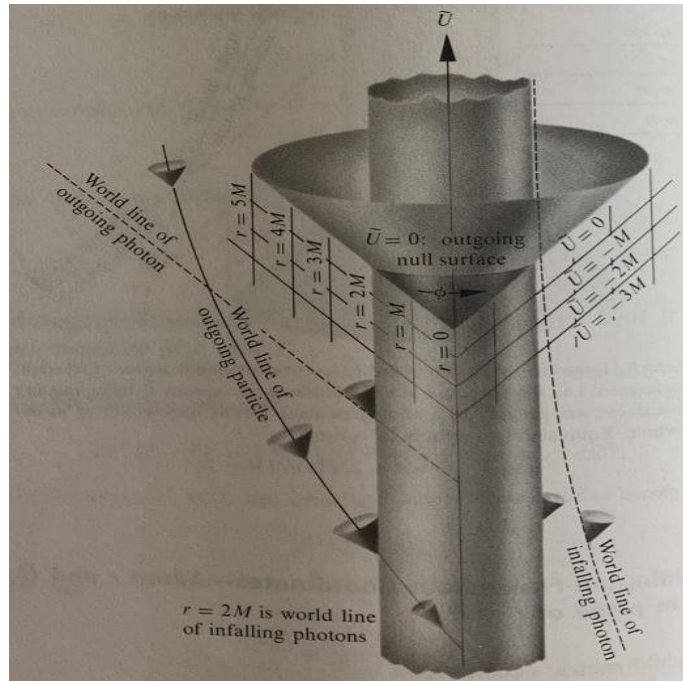


Figura 21. Coordenadas salientes de Eddington-Filkenstein, donde se ha suprimido un grado de libertad rotacional. Como vemos, las superficies $u \equiv \text{constante}$ corresponden a superficies nulas salientes, las cuales han sido dibujadas en trazados con una inclinación de $\frac{\pi}{4}$, similar a como se hace usualmente en un espaciotiempo plano. *Imagen tomada de Charles W Misner, Kip S Thorne y John Archibald Wheeler: Gravitation. Macmillan, 1973.*

Como vemos, esta carta coordenada se comporta mucho mejor en el radio gravitacional que las coordenadas de Schwarzschild usuales; sin embargo, no son totalmente bien comportadas. En el caso de las coordenadas salientes (u, r, θ, ϕ) describe en una forma no patológica la eyección de partículas desde la singularidad física $r = 0$ hasta el radio gravitacional $r = 2M$, pero la descripción contraria partiendo de $r = 2M$ hacía $r = 0$ contiene la misma patología que la descrita por las coordenadas de Schwarzschild³¹¹. En conclusión, en el contexto de NJA, el emplear esta carta coordenada en el primer paso se justifica a partir del hecho de eliminar cualquier singularidad de coordenadas que se pueda presentar.

³¹¹ Misner, Thorne y Wheeler 1973

Anexo B. Formalismo de las tétradas

El concepto de medida en relatividad general es significativo sólo cuando es con respecto a un observador el cual las interprete en términos de cantidades independientes de las coordenadas ³¹². Por tanto, estas medidas serán dependientes del observador, por lo que también debe existir un criterio para comparar mediciones hechas por distintos observadores. Aquí se deberá, pues, definir un observador físico como una colección de objetos de medida, tales como un reloj, una regla, entre otros. Esta instrumentación, sin embargo, necesita estar confinada dentro de un espacio lo suficientemente pequeño (*observador de laboratorio*, como comúnmente es conocido), y deben tomarse estas medidas en un intervalo de tiempo lo suficientemente corto de tal suerte que se pueda desprestigiar cualquier efecto producto de la curvatura espaciotemporal: sólo así podremos realizar de una forma libre de ambigüedades una foliación de tiempo constante sobre la variedad, es decir, una superficie de Cauchy, la cual consiste en una hipersuperficie tipo espacio Σ sobre la variedad \mathcal{M} tal que cada curva causal intersecte una y sólo una vez a Σ ³¹³.

En otras palabras, un observador físico es definido como una congruencia estrecha de líneas de mundo tipo tiempo γ representando puntos en posiciones fijas en su laboratorio, tal que un vector tangente V a esta congruencia cumpla la condición de ortonormalidad $\mathcal{G}(V, V) = -1$ (ver figura 22). Así pues, él encuentra natural y conveniente usar un sistema local de ejes coordenados, tal que le proporcione un marco inercial instantáneo. Los resultados de sus mediciones deben poderse comparar con las proyecciones paralelas y transversales del tensor que caracterice el fenómeno en estudio sobre sus ejes coordenados, los cuales conformarán un conjunto de cuatro bases vectoriales ortonormales y linealmente independientes, denominadas *tétrada* ³¹⁴, tal que cada una caracteriza un observador diferente.

³¹² Misner, Thorne y Wheeler 1973

³¹³ Gourgoulhon 2012

³¹⁴ De Felice y Clarke 1992

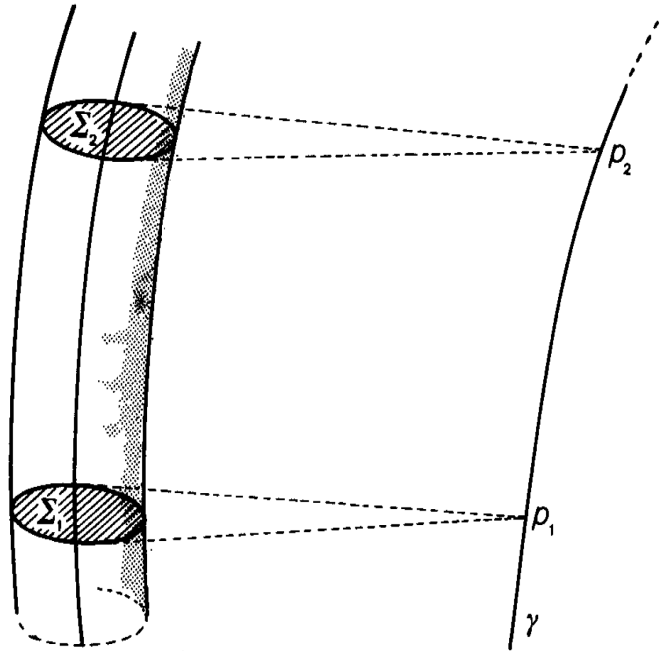


Figura 22. La congruencia de líneas de mundo γ representan a un observador físico aproximadamente como una simple línea y sus marcos locales en reposo Σ_1 y Σ_2 como los puntos p_1 y p_2 , respectivamente. *Imagen tomada de Fernando De Felice y Christopher James Seaton Clarke: Relativity on curved manifolds. Cambridge University Press, 1992.*

Con base en todo lo anterior, nosotros podemos configurar cada punto del espacio-tiempo con cuatro bases vectoriales (es decir, una tétrada) $\{\mathbf{E}_{(j)}\}$ sobre el espacio tangente, de tal suerte que cada una sea dual a las uno-formas $\{\mathbf{E}^{(i)}\}$ que viven en el espacio contangente a la variedad; esto significa que $\langle \mathbf{E}^{(i)} | \mathbf{E}_{(j)} \rangle = \delta^{(i)}_{(j)}$. Ambas bases relacionadas pueden ser expandidas en bases coordenadas duales $\{dx^\mu\}$ y $\{\partial_\mu\}$, tal que

$$\mathbf{E}^{(i)} = E^{(i)}{}_\mu dx^\mu \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_{(j)} = E^\mu{}_{(j)} \partial_\mu, \quad (275)$$

donde he encerrado los índices de las tétradas en paréntesis para distinguirlos de

los índices tensoriales ³¹⁵. Por otro lado, la dualidad métrica implica que la matriz $E^{(i)}_{\mu}$ es inversa a $E_{(j)}^{\mu}$.

Las propiedades métricas de la variedad pueden ser representadas a través del tensor métrico \mathcal{G} o, de forma alternativa, por un campo de tétradas $\{e^{(a)}\}$ vinculados a la métrica a través de la imposición

$$g_{\mu\nu} = \eta_{(a)(b)} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} \quad \text{y} \quad g^{\mu\nu} = \eta^{(a)(b)} e_{(a)}^{\mu} e_{(b)}^{\nu}, \quad (276)$$

donde $\eta_{(a)(b)}$ corresponde a una métrica Minkowskiana escrita en su forma canónica y con signatura Lorentziana -2 . Nosotros podemos chequear la ortonormalidad a través del producto interno entre los elementos de la base $\{e^{(a)}\}$:

$$\langle e^{(a)} | e^{(b)} \rangle = g^{\mu\nu} e^{(a)}_{\mu} e^{(b)}_{\nu} = \eta^{(a)(b)}. \quad (277)$$

Por otro lado, para evitar escribir los índices tensoriales reescribimos a (276) como

$$\mathcal{G} = \eta_{(a)(b)} e^{(a)} \otimes e^{(b)}, \quad (278)$$

Una característica importante de este formalismo y del cual se hizo bastante uso en la caracterización de las soluciones de fluidos que obtuvimos, es la proyección de un campo tensorial dado sobre el marco de las tétradas para obtener sus *componentes de la tétrada*. En otras palabras,

³¹⁵ Aquí y en todo el trabajo usaré letras griegas para los índices en las tétradas y letras del alfabeto latino para los índices tensoriales, siguiendo la notación de Chandrasekhar ³¹⁶.

$$\begin{aligned}
A_{(a)} &= e_{(a)\mu} A^\mu = e_{(a)}^\mu A_\mu, \\
A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e^{(a)}_\mu A^\mu = e^{(a)\mu} A_\mu, \\
A^\mu &= e_{(a)}^\mu A^{(a)} = e^{(a)i} A_{(a)},
\end{aligned}
\tag{279}$$

o de forma más general,

$$\begin{aligned}
T_{(a)(b)} &= e_{(a)}^\mu e_{(b)\nu} T_{\mu\nu} = e_{(a)}^\mu T_{\mu(b)}, \\
T_{\mu\nu} &= e^{(a)}_\mu e^{(b)\nu} T_{(a)(b)} = e^{(a)}_\mu T_{(a)\nu},
\end{aligned}
\tag{280}$$

donde A^μ y $T^{\mu\nu}$ corresponden a un vector y un tensor de rango dos, respectivamente.

Formalismo de las tétradas nulas complejas

El puente entre el tensor métrico y la tétrada puede también ser establecido a través de una *tétrada nula compleja*³¹⁷. Ambas estrategias están relacionadas, esto debido a que cualquier tétrada ortonormal $\{\mathbf{e}^{(a)}\}$ define un tétrada nula $\{\Omega^{(a)}\} = \{\mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{W}\}$, así

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(0)} + \mathbf{e}^{(1)}), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(0)} - \mathbf{e}^{(1)}), \tag{281}$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(2)} + i \mathbf{e}^{(3)}) \quad \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(2)} - i \mathbf{e}^{(3)}), \tag{282}$$

donde $i \equiv -1$. Se puede verificar que la tétrada (281) es nula, luego

³¹⁷ Este formalismo, más conocido como formalismo de Newman-Penrose, fue incorporado en 1962 bajo la fuerte motivación de Penrose en considerar la introducción de una base nula con el objetivo de incorporar el análisis espinorial en Relatividad General, y con la firme creencia que un elemento esencial del espaciotiempo es su estructura de cono de luz, la cual permite la introducción de esta base espinorial³¹⁸.

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W} = 0,$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{W} = 1, \quad (283)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (284)$$

donde \mathbf{W} corresponde al complejo conjugado de \mathbf{M} . Por otro lado, la relación entre las tétradas ortonormales y las tétradas ortonormales nulas complejas puede ser escrita como

$$\boldsymbol{\Omega}^{(a)} = \Lambda^{(a)}_{(b)} \mathbf{e}^{(b)}, \quad \mathbf{e}^{(b)} = \Lambda^{(b)}_{(a)} \boldsymbol{\Omega}^{(a)}, \quad (285)$$

donde $\Lambda^{(a)}_{(b)}$ y su inversa son

$$\Lambda^{(a)}_{(b)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{(b)}_{(a)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}. \quad (286)$$

Inyectando (286) en (278), obtenemos que

$$\mathcal{G} = \eta_{(a)(b)} \Lambda^{(a)}_{(c)} \Lambda^{(b)}_{(d)} \boldsymbol{\Omega}^{(c)} \otimes \boldsymbol{\Omega}^{(d)} = \eta_{(c)(d)} \boldsymbol{\Omega}^{(c)} \otimes \boldsymbol{\Omega}^{(d)}, \quad (287)$$

donde

$$\eta_{(c)(d)} = \eta_{(a)(b)} \Lambda_{(c)}^{(a)} \Lambda_{(d)}^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \eta^{(c)(d)}. \quad (288)$$

En resumen, la relación entre el tensor métrico y las tétradas nulas es

$$\mathcal{G} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{L} - \mathbf{M} \otimes \mathbf{W} - \mathbf{W} \otimes \mathbf{M}. \quad (289)$$

Anexo C. Carta coordenada de Boyern-Lindsquit

-Do you understand what's going on?

-No at all! - he shouted back-. I can almost prove this can't be happening. Do you know the Boyer-Lindquist coordinates?

- No, sorry.

-I'll explain it you later.

She was glad he thought there would be a "latter".

—Carl Sagan, *Contact* (1985).

Tenemos una transformación en los potenciales métricos inducida por una rotación compleja de coordenadas, de la forma

$$\{G(r), F(r), H(r)\} \longrightarrow \{A(r, \theta, a), B(r, \theta, a), \Psi(r, \theta, a)\}. \quad (290)$$

Luego, producto de la rotación en las tétradas ortonormales complejas, llegamos a

una métrica rotada escrita en la carta coordenada de Eddington-Filkenstein,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_R = & Adu_R \otimes du_R + 2\sqrt{\frac{A}{B}}du_R \otimes dr_R - 2a \sin^2 \theta_R \sqrt{\frac{A}{B}}dr_R \otimes d\phi_R \\
& + 2a \sin^2 \theta_R \left(\sqrt{\frac{A}{B}} - A \right) du_R \otimes d\phi_R - \Psi d\theta_R \otimes d\theta_R \\
& + \frac{\sin^2 \theta_R}{B} \left[a^2 \sin^2 \theta_R \left(AB - 2\sqrt{AB} \right) - B\Psi \right] d\phi_R \otimes d\phi_R.
\end{aligned} \tag{291}$$

Ahora bien, para mostrar esta solución en la carta coordenada de Boyern-Lindquist, realizamos una transformación de la forma

$$\begin{aligned}
du_R &= dT - \lambda(R) dR, \\
d\phi_R &= d\Phi - \chi(R) dR,
\end{aligned} \tag{292}$$

¿Cómo seleccionamos las formas apropiadas para $\lambda(R)$ y $\chi(R)$?

La idea consiste en inyectar la transformación (292) en el tensor métrico (51); luego, imponemos que

$$(\mathcal{G}_R)_{TR} = (\mathcal{G}_R)_{\Phi R} = 0,$$

con lo cual llegamos a

$$\lambda_0(R, \Theta) = \frac{\sqrt{A} a^2 \sin^2 \Theta + \sqrt{B} \Psi}{\sqrt{A} (a^2 \sin^2 \Theta + B\Psi)}, \quad \chi_0(R, \Theta) = \frac{a}{a^2 \sin^2 \Theta + B\Psi}.$$

Ahora bien, para evitar funciones multievaluadas que podrían proporcionarnos soluciones rotantes sin sentido físico (ver comentario 2.1), tomamos el límite cuando

$\sin^2 \Theta \rightarrow 1$, obteniendo

$$\lambda(R) = \frac{\sqrt{G} a^2 + \sqrt{F} G}{\sqrt{G}(FH + a^2)}, \quad \chi(R) = \frac{a}{FH + a^2}.$$

Finalmente, nosotros forzamos a que, justo en el límite cuando $\sin^2 \Theta \rightarrow 1$, las funciones $\{\lambda_0(R, \Theta), \chi_0(R, \Theta)\}$ y $\{\lambda(R), \chi(R)\}$ sean iguales, para así obtener los valores explícitos en $\{A(R, \Theta), B(R, \Theta)\}$ que nos permita escribir la solución rotante final en la forma de Boyern-Lindquist, dados por

$$\begin{aligned} A(R, \Theta, a) &= \frac{G\Psi(FH + a^2 \cos^2 \Theta)}{(\sqrt{G} a^2 \cos^2 \Theta + \sqrt{F} H)^2}, \\ B(R, \Theta, a) &= \frac{FH + a^2 \cos^2 \Theta}{\Psi}. \end{aligned} \tag{293}$$

Finalmente, gracias a esta fijación en los potenciales métricos nos es posible realizar una separación en la ecuación de Hamilton-Jacobi, y así estudiar las geodésicas nulas de todas las soluciones obtenidas en este trabajo de grado.

Anexo D. Sobre los Fluidos Disipativos en Relatividad General

*The stars awaken a certain
reverence, because though always
present, they are inaccessible; but
all natural objects make a kindred
impression, when the mind is open
to their influence. Nature never
wears a mean appearance.*

—Ralph Waldo Emerson, *Nature*
(1983).

Los fluidos relativistas se han convertido actualmente en un modelo altamente exitoso usado para describir la dinámica de muchas partículas. Después de todo, los

sistemas astrofísicos de esta naturaleza han sido la mejor fuente de efectos detectables asociados a la relatividad general ³¹⁹. Dos de muchos ejemplos corresponderían a la expansión del universo mismo y las oscilaciones en las estrellas de neutrones, indicando así el vasto rango de escalas sobre los cuales los modelos de fluidos relativistas cobran una importante relevancia.

Ahora bien, un fluido se define como una sustancia material (líquido o gas) que tiende a fluir, en el cual las partículas presentan una gran movilidad y se desplazan libremente debido a la poca cohesión existente entre ellas donde, en el caso de modelos astrofísicos, esta sustancia está constituida por una pequeña clase de partículas elementales (leptones, quarks, entre otras) descritas por el Modelo Estándar. Cada partícula elemental es de naturaleza cuántica, pero las ecuaciones de Einstein requieren la descripción de trayectorias explícitas. Como resultado de ello, e incluso olvidándonos por un momento de la mecánica cuántica, es bastante impráctico intentar rastrear todas y cada una de las partículas que componen a un sistema astrofísico, independientemente que sean partículas elementales o colecciones de ellas, como en el caso de las estrellas en las galaxias. Así pues, el éxito de estos modelos de fluidos consiste en promediar este comportamiento cuántico intrínseco y la existencia de muchas partículas, de tal suerte que se puedan implementar de forma consistente las ecuaciones de Einstein, tal que las trayectorias que describan sean las de los elementos de fluido ³²⁰, no las partículas que componen a estos elementos. Por tanto, cuando nos refiramos luego a la velocidad del fluido en estudio,

³¹⁹ Will 2018.

³²⁰ Debido a que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como aproximadamente como un medio continuo. Esto significa que siempre podemos suponer una "caja" (o esfera en algunos casos, como se muestra en la figura 24) local imaginaria infinitesimal con respecto a todo el sistema, pero aún lo suficientemente grande para que contenga un número considerable de partículas (es decir, un número de Avogadro). De acuerdo con esto, cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños, siempre querremos decir aquellos que son "físicamente" infinitamente pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en estudio, pero grandes comparados con las distancias entre moléculas. En un sentido semejante debemos entender expresiones tales como *partícula de fluido o punto en un fluido* ³²¹.

en realidad nos estaremos refiriendo a la velocidad promedio de estos elementos, donde cada uno de ellos trazará una trayectoria tipo tiempo en el espaciotiempo ³²². Estos son los cimientos sobre los cuales se construyen los modelos de fluidos relativistas creados hasta la fecha, como el que estudiaremos en este trabajo.

Quizás el modelo más famoso y estudiado corresponda al fluido perfecto, debido a que, dada las aproximaciones que se hacen sobre este, resulta bastante cómodo de trabajar. Sin embargo, a veces es importante considerar los efectos disipativos en el fluido. Por ejemplo, el caso de las oscilaciones en una estrella de neutrones, para la cual el modelo de fluido perfecto presenta varias inestabilidades, donde es importante introducir los efectos disipativos para estudiar si estas (las inestabilidades) desaparecen o no ³²³. Con base en esto, si queremos introducir estos efecto en el sistema en consideración, más específicamente en la forma del tensor energía-momentum con el ánimo de obtener soluciones que describan objetos astrofísicos mucho más realistas, debemos imponer que las mismas cumplan con ciertas condiciones de energía, tal que nos aseguren un comportamiento físico bastante razonable que describa la fuente gravitacional ³²⁴.

Basados en todo lo anterior, es fundamental reconocer la física de los procesos disipativos contenidos en el tensor de energía-momentum en un modelo de fluido imperfecto, por ende debemos entender cómo se relacionan las cantidades dinámicas del sistema entre sí y con otros parámetros físicos que nos ayuden a caracterizar el tipo de solución de fluido que hemos encontrado. Con este objetivo, a continuación presentaré una breve discusión con respecto a la forma y características que deben

³²² Nils Andersson y Gregory L Comer: *Relativistic fluid dynamics: Physics for many different scales*. En: *Living Reviews in Relativity* 10.1 (2007), págs. 1-83

³²³ Nils Andersson: *Gravitational waves from instabilities in relativistic stars*. En: *Classical and Quantum Gravity* 20.7 (2003), R105

³²⁴ Robert M Wald: *General relativity*. University of Chicago press, 2010

cumplir un tensor de energía-momentum de esta naturaleza, más específicamente un tensor adscrito a un modelo de fluido anisótropo con flujo de calor, sus variables cinemáticas que lo describen y sus respectivas condiciones de energía medidas por un observador arbitrario. Para lograr ello, este capítulo es motivado en gran medida en los estudios presentados en la referencias ³²⁵.

El tensor de energía-momentum

En la Teoría General de Relatividad, para cada evento en el espaciotiempo, existe un tensor lineal y simétrico con dos entradas para insertar dos vectores (o uno-formas) T , denominado tensor de energía-momentum. Este se puede considerar como una máquina que contiene el conocimiento de la densidad de energía, densidad de momentum y esfuerzos como una medida realizada por un observador arbitrario en algún lugar del espaciotiempo $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$. En él están incluidas la energía, momentum y esfuerzos asociados a todas las formas de materia y campos nos gravitacionales ³²⁶. En otras palabras, las fuentes de campo gravitacional son la energía y momentum de las partículas que forman el objeto o sistema astrofísico. Sin un conocimiento a priori de la forma de este tensor, las soluciones de las ecuaciones de Einstein carecerán de sentido físico, un punto que ha sido altamente enfatizado por Geroch y Horowitz ³²⁷.

Para entender lo que las diferentes componentes de este tensor $T^{\mu\nu}$ significan físi-

³²⁵ Andersson y Comer 2007; Wald 2010; Oscar M Pimentel, FD Lora-Clavijo y Guillermo A González: *The energy-momentum tensor for a dissipative fluid in general relativity*. En: *General Relativity and Gravitation* 48.10 (2016), págs. 1-17; L Herrera y col.: *Dissipative collapse of axially symmetric, general relativistic sources: A general framework and some applications*. En: *Physical Review D* 89.8 (2014), pág. 084034

³²⁶ Misner, Thorne y Wheeler 1973

³²⁷ Stephen Hawking y Werner Israel: *General relativity: an Einstein centenary survey*. En: *General Relativity: an Einstein Centenary Survey* (2010)

camente, podríamos realizar una serie de proyecciones a lo largo de las direcciones tipo tiempo y tipo espacio asociadas a un observador arbitrario, siguiendo el análisis hecho por Anderson y Comer ³²⁸, el cual proporciona un entendimiento más claro del operador proyección que definiremos más adelante (ver ecuación (301)). Sin embargo, con base en las ideas de Schutz ³²⁹, podemos inferir que la componente T^{00} corresponde al flujo de energía a través de una superficie de tiempo constante, es decir, la densidad de energía; la componente T^{0i} será el flujo de energía a través de una superficie $x^i = \text{cte}$, donde $i = 1, 2, 3$; por último, las componentes T^{ij} corresponden con el flujo de la componente i -ésima de momentum a través de una superficie $x^j = \text{cte}$, por tanto, ellas representan los esfuerzos en la dirección i sobre las superficies de $x^j = \text{cte}$. Las componentes T^{0i} y T^{ij} estarán relacionadas a fenómenos disipativos como la radiación térmica y la viscosidad ³³⁰. Todo esto se puede resumir en la figura 23.

³²⁸ Andersson y Comer 2007

³²⁹ Bernard Schutz: *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009

³³⁰ Pimentel, Lora-Clavijo y González 2016

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \boxed{T^{00}} & \boxed{T^{01}} & \boxed{T^{02}} & \boxed{T^{03}} \\ \boxed{T^{10}} & \boxed{T^{11}} & \boxed{T^{12}} & \boxed{T^{13}} \\ \boxed{T^{20}} & \boxed{T^{21}} & \boxed{T^{22}} & \boxed{T^{23}} \\ \boxed{T^{30}} & \boxed{T^{31}} & \boxed{T^{32}} & \boxed{T^{33}} \end{pmatrix}$$

energy density
energy flux

momentum density
momentum flux
isotropic pressure

Figura 23. Esquema donde se ilustran las diferentes partes que componen el tensor de energía-momento. *Imagen tomada de Luciano Rezzolla y Olindo Zanotti: Relativistic hydrodynamics. Oxford University Press, 2013.*

Ahora bien, consideremos un fluido anisótropo con flujo de calor totalmente general, cuyas componentes de su tensor energía-momento adoptan la forma

$$T^{\alpha\beta} = \mu V^\alpha V^\beta + \mathcal{Q}^\alpha V^\beta + \mathcal{Q}^\beta V^\alpha + \mathcal{S}^{\alpha\beta}, \quad (294)$$

donde μ es la densidad de energía; V^α , la velocidad del observador comóvil, la cual satisface la condición ortonormalización $V^\alpha V_\alpha = -1$ tal que sea futuro dirigida (i.e., $V^0 > 0$); el vector tipo espacio \mathcal{Q}^α al flujo de calor, tal que debe ser ortogonal a la velocidad (i.e., $\mathcal{Q}^\alpha V_\alpha = 0$); por último, $\mathcal{S}^{\alpha\beta}$ corresponderá al tensor de esfuerzos, tal que sea un tensor espacial de rango dos y totalmente simétrico. Por otro lado, los vectores propios de $\mathcal{S}^{\alpha\beta}$ definirán las direcciones de los principales esfuerzos, tal que este tensor sea diagonal y donde corresponderán con los vectores de las tétradas ortonormales $\{V^\alpha, L^\alpha, N^\alpha, M^\alpha\}$ asociadas a un observador arbitrario, de tal suerte que surgen las siguientes ecuaciones para los autovalores de este tensor:

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta} L_\beta = P_1 L^\alpha, \quad \mathcal{S}^{\alpha\beta} N_\beta = P_2 N^\alpha, \quad \mathcal{S}^{\alpha\beta} M_\beta = P_3 M^\alpha, \quad (295)$$

donde definiremos más adelante a P_i con $i = 1, 2, 3$ como las presiones principales del fluido. Con base en esto, el tensor de energía-momentum en la tétrada

$$e^\alpha_{(a)} = \{e^\alpha_{(0)}, e^\alpha_{(1)}, e^\alpha_{(2)}, e^\alpha_{(3)}\} = \{V^\alpha, L^\alpha, N^\alpha, M^\alpha\}, \quad (296)$$

adopta la forma en (294) con

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta} = P_1 L^\alpha L^\beta + P_2 N^\alpha N^\beta + P_3 M^\alpha M^\beta, \quad (297)$$

y

$$Q^\alpha = Q^1 L^\alpha + Q^2 N^\alpha + Q^3 M^\alpha. \quad (298)$$

Como vemos, el vector flujo de calor tiene componentes en direcciones arbitrarias, esto se atribuye a que no necesariamente debería coincidir con las direcciones de las presiones anisótropas³³¹. Este vector, como se mencionó anteriormente, es ortogonal a la velocidad y, además, es un vector tipo espacio futuro dirigido, i.e. satisface que

$$Q^\alpha V_\alpha = 0 \quad \text{y} \quad Q^\alpha Q_\alpha = Q^2 \geq 0, \quad (299)$$

respectivamente, donde $Q = \sqrt{Q_i^2}$ con $i = 1, 2, 3$.

³³¹ Pimentel, Lora-Clavijo y González 2016

Por otro lado, gracias al principio de equivalencia, se puede inferir que el espaciotiempo localmente estará descrito por un tensor métrico Minkowskiano. En esta situación estaremos parados en un sistema local momentáneamente en reposo, de tal suerte que el elemento de fluido descrito por él sólo experimentará presiones isotópicas; otros esfuerzos o flujos de calor a través de su volumen no ocurrirán ³³². Con base en esto, podemos postular que localmente la forma en la componentes del tensor (294) adoptará la de un fluido perfecto, tal que el principio de Pascal sea válido: la presión ejercida por una porción determinada del fluido es la misma en todas las direcciones, siendo perpendicular al área sobre la que actúa ³³³. Luego en esta situación tendremos que $P_1 = P_2 = P_3 \equiv \mathcal{P}$, y el tensor de esfuerzos en (297) tendrá la forma $\mathcal{S}^{\alpha\beta} = \mathcal{P}(L^\alpha L^\beta + N^\alpha N^\beta + M^\alpha M^\beta)$. Adicionalmente, nosotros identificamos que esta cantidad encerrada en paréntesis es puramente espacial. Así pues, podemos inferir que corresponderá a un tensor métrico transverso ³³⁴ \mathcal{H} el cual corresponderá a una hipersuperficie normal a la velocidad V^α y con componentes $\mathcal{H}^{\alpha\beta} = L^\alpha L^\beta + N^\alpha N^\beta + M^\alpha M^\beta$, de tal suerte que interpretándolo como un operador proyección transverso ³³⁵ podemos relacionarlo con las componentes del tensor

³³² Hans Stephani: *Relativity: An introduction to special and general relativity*. Cambridge university press, 2004

³³³ Lifshitz y Landau 1987

³³⁴ Esta métrica define a la métrica inducida con la dimensión del espacio ambiente, en este caso, con la dimensión de la 4-variedad \mathcal{M} , de tal suerte que tenga en cuenta que estamos hablando de una métrica la cual está inmersa en \mathcal{M} , pero que sea válida para la hipersuperficie Σ que viven en ella, y cuyas componentes son de la forma $\mathcal{H}^{\alpha\beta} = \mathcal{G}^{\alpha\beta} \pm n^\alpha n^\beta$, donde n^α es un vector normal a Σ . En otras palabras, a pesar que este tensor \mathcal{H} tenga las dimensiones de la variedad, él distingue los vectores que viven en \mathcal{M} y los que viven en Σ .

³³⁵ Escojamos un punto $p \in \gamma$, donde γ corresponde a una curva que vive sobre \mathcal{M} . Sean (\mathbf{u}, \mathbf{w}) dos vectores tangentes a p , y sea \mathcal{H} un operador lineal desde el espacio tangente $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ hacia él mismo, definido por

$$\mathcal{H}(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle \mathbf{u}. \quad (300)$$

En componentes toma la forma $\mathcal{H}(\mathbf{w})^\mu = \mathcal{H}^\mu_\nu W^\nu$ donde $\mathcal{H}^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + u_\nu u^\mu$. Luego vemos que la acción de \mathcal{H} sobre un vector arbitrario nos conduce al mapeo $\mathcal{H} : \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{T}_{\perp p}(\mathcal{M})$, donde $\mathcal{T}_{\perp p}(\mathcal{M})$ corresponde a un subespacio ortogonal a $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, defino por $\mathcal{T}_{\perp p}(\mathcal{M}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \mid$

métrico $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ del espaciotiempo \mathcal{M} a través de la ecuación

$$\mathcal{H}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}_{\alpha\beta} + V_\alpha V_\beta, \quad (301)$$

luego el tensor de esfuerzos, localmente puede reescribirse como

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta} = \mathcal{P} \mathcal{H}^{\alpha\beta}, \quad (302)$$

donde \mathcal{P} es presión local del fluido en equilibrio o presión estática.

Ahora bien, globalmente el fluido estará en movimiento y la situación resulta un poco diferente a la descrita en (302), debido a que ahora los esfuerzos tangenciales al elemento de fluido serán diferentes de cero, y los esfuerzos normales dependerán de la dirección espacial, i.e. $P_1 \neq P_2 \neq P_3$ en general. Para este caso, al igual que el caso local donde tenemos un fluido estático, debemos tener en cuenta una cantidad física, la cual denotaremos como $\hat{\mathcal{P}}$ para diferenciarla de la presión estática \mathcal{P} , la cual medirá la intensidad de “compresión” en un punto del fluido. Por tanto, tomaremos esta cantidad como el valor promedio de la componente normal de los esfuerzos sobre la superficie de una esfera de fluido centrada en el punto de interés (ver figura 24)³³⁷. Se puede demostrar que esta cantidad adopta la forma

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{Tr(\mathcal{S}^{\alpha\beta})}{3} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{3}, \quad (303)$$

donde $Tr(\mathcal{S}^{\alpha\beta})$ corresponde a la traza de $\mathcal{S}^{\alpha\beta}$. Usualmente (303) recibe el nombre

³³⁶ $\langle \mathbf{u} | \mathbf{w} \rangle = 0$. A este operador \mathcal{H} se le conoce con el nombre de operador proyección transverso

³³⁷ Pimentel, Lora-Clavijo y González 2016

de presión isotrópica, la cual es invariante bajo el grupo de rotaciones $\mathcal{SO}(3)$, y su interpretación es muy similar a \mathcal{P} , motivo por el cual en lo que resta de este trabajo eliminaremos por simplicidad el gorrito $\hat{}$ en (303). Teniendo en mente todo lo anterior, podemos escribir el tensor de esfuerzos global a todo el fluido anisótropo como

$$\mathcal{S}^{\alpha\beta} = \mathcal{P} \mathcal{H}^{\alpha\beta} + \Pi^{\alpha\beta}, \quad (304)$$

donde $\mathcal{P} \mathcal{H}^{\alpha\beta}$ corresponde al término isotrópico del fluido, y $\Pi^{\alpha\beta}$ será un tensor libre de traza el cual contenga toda la información con respecto a las presiones tangenciales sobre un punto de fluido, llamado tensor anisótropo. Inyectando (304) en el tensor de energía-momentum (294), obtenemos

$$T^{\alpha\beta} = \underbrace{(\mu + \mathcal{P}) V^\alpha V^\beta + \mathcal{P} \mathcal{G}^{\alpha\beta}}_{\text{Fluido perfecto}} + \underbrace{Q^\alpha V^\beta + Q^\beta V^\alpha}_{\text{Flujo de calor disipado}} + \underbrace{\Pi^{\alpha\beta}}_{\text{Viscosidad en el fluido}}, \quad (305)$$

que corresponde a la forma canónica de un tensor de energía-momentum para un fluido anisótropo con flujo de calor.

Hasta el momento no hemos definido las características escogidas con respecto al observador que mide las componentes del tensor (305), debido a que, a diferencia del modelo para un fluido perfecto, cuando la viscosidad y el flujo de calor están presentes en nuestro modelo, la definición de un sistema local en reposo se convierte en una cuestión ambigua³³⁸. Sin embargo, siempre deben satisfacerse las condiciones $\nabla_\mu \mathcal{J}^\mu = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ y $\nabla_\mu S^\mu \geq 0$, que corresponden a la conservación de la energía y el momentum, la conservación de la densidad de masa y el principio de máxima entropía, respectivamente, donde están expresadas con respecto a una

³³⁸ Luciano Rezzolla y Olindo Zanotti: *Relativistic hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013

velocidad que aún desconocemos sus características.

Tomando en cuenta lo anterior, existen dos formas de definir esta velocidad. La primera consiste en emplear un vector tipo tiempo unitario que sea paralelo a la densidad de masa \mathcal{J} que denotaremos como V_n , tal que $\mathcal{J}^\alpha = \rho V_n^\alpha$ donde ρ corresponde a la densidad de masa. La segunda es utilizar el vector propio unitario tipo tiempo de las componentes del tensor energía-momentum en (305), que denotaremos momentáneamente como V_e que sea paralelo a él, es decir, $V_e^\mu = T^\alpha_\beta V_e^\alpha$. Usualmente, estas dos distinciones para la velocidad no se les prestan tanta atención ³³⁹, debido a que en el caso para un fluido perfecto estas dos coinciden, tal que ambas definen una única velocidad hidrodinámica V ³⁴¹.

Esta ambigüedad con respecto a cual velocidad definirá el observador que mida a (305) puede ser resuelta imponiendo ciertas restricciones sobre los términos en $T^{\alpha\beta}$ que no corresponden a un fluido perfecto, pero siempre teniendo en mente que, sin importar la escogencia de esta velocidad V , la corriente de densidad de masa \mathcal{J}^α debe ser siempre paralela a V_n^α . Una posibilidad para lograr todo esto fue definida por Carl Eckart en 1940 ³⁴², quien definió la velocidad del observador comóvil al elemento del fluido como $V^\alpha = V_n^\alpha$. Hoy día a este tipo de observador se le conoce como observador de Eckart, y corresponde al marco en el cual no existen contribuciones disipativas en la corriente de masa-energía J^μ o para la densidad energía μ . Es importante resaltar que a lo largo de este trabajo todas las cantidades dinámicas que definamos serán con respecto a este tipo de observador.

³³⁹ Sin embargo, en 1976 Israel encuentra una forma de relacionar estas dos velocidades hidrodinámicas haciendo uso de un tipo de expansión que nos permite relacionarlas entre ellas junto con la densidad energía y la presión estática ³⁴⁰.

³⁴¹ Rezzolla y Zanotti 2013

³⁴² Carl Eckart: *The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid*. En: *Physical review* 58.10 (1940), pág. 919

Ahora bien, una vez definido el marco con respecto al cual definiremos todas las cantidades dinámicas, cinemáticas y la forma del tensor energía-momentum (305), estamos en condiciones de definir la forma explícita de cada uno de los términos en él. Colectivamente, las componentes \mathcal{Q}^α y $\Pi^{\alpha\beta}$ se les conoce como flujos termodinámicos, tal que ellos tienen en cuenta las desviaciones intrínsecas del fluido que le impiden ser modelado como un fluido perfecto. Estos términos pueden ser formalmente recuperados de (305), como ³⁴³

$$\mu = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \quad (306)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{3} \mathcal{H}^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \quad (307)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha = -(\mu V_\alpha + T_{\alpha\beta} V^\beta), \quad (308)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = \mathcal{H}_\alpha{}^\mu \mathcal{H}_\beta{}^\nu (T_{\mu\nu} - \mathcal{P} \mathcal{H}_{\mu\nu}), \quad (309)$$

tal que se satisfacen las propiedades

$$V^\beta \Pi_{\alpha\beta} = 0, \quad \Pi^\mu{}_\mu = 0, \quad \mathcal{Q}^\alpha V_\alpha = 0, \quad V_\alpha \mathcal{Q}^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0.$$

Variables cinemáticas

El efecto producido por la disipación de la energía durante el movimiento de un fluido es producto de la irreversibilidad termodinámica del movimiento, cuya presencia será omnipresente en todo el fluido, producto de la fricción interna (viscosidad) y la

³⁴³ Gutiérrez-Piñeres 2015

conducción térmica. La viscosidad (rozamiento interno) se debe a una transferencia de momentum, debido a que, únicamente en este caso, los distintos elementos de fluido se moverán con velocidades diferentes, de modo que existe un movimiento relativo entre los distintos puntos de fluido ³⁴⁴. La presencia de viscosidad en ellos inminentemente dará como resultado la disipación de la energía, que finalmente se transformará en calor.

Con ánimo de estudiar las distintas características que tienen este tipo de modelos, en este punto resulta bastante útil introducir ciertas cantidades que describan las propiedades cinemáticas para cualquier fluido³⁴⁵, independiente de la forma en sus ecuaciones de estado o de movimiento. Para ello, las dos cantidades físicas fundamentales con las cuales describiremos al resto serán la velocidad \mathbf{V} y la aceleración \mathbf{a} , cuyas componentes en un sistema coordenado $\{x^\mu\}$ son de la forma

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{y} \quad a^\mu = V^\alpha \nabla_\alpha V^\mu, \quad (310)$$

respectivamente, donde τ corresponde al tiempo propio y ∇_α la derivada covariante a lo largo de una curva γ con coordenadas x^μ y cuyo vector tangente corresponderá a la velocidad \mathbf{V} . Ahora bien, estas dos cantidades satisfacen dos condiciones que serán fundamentales en el estudio de las variables cinemáticas: la condición de normalización $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = -1$ y de ortogonalidad $\mathcal{G}(\mathbf{V}, \mathbf{a}) = 0$ con respecto al tensor métrico \mathcal{G} .

Por otro lado, para poder definir las variables cinemáticas en función de la velocidad y la aceleración, debemos introducir un vector desplazamiento ξ con componentes

³⁴⁴ Lifshitz y Landau 1987

³⁴⁵ Esta sección fue altamente inspirada en el tratamiento expuesto por Luciano Rezzolla y Olindo Zanotti en su libro sobre hidrodinámica relativista ³⁴⁶.

ξ^μ , el cual conectará dos elementos de fluidos infinitesimalmente cercanos a medida que se mueven a lo largo de su línea de mundo respectiva, las cuales no necesariamente deberán ser geodésicas. Por otro lado, este vector será un vector arrastrado de Lie en la dirección del vector tangente V , i.e., $\mathcal{L}_V \xi = 0$, luego las componentes ξ^μ no cambiarán. Así pues, con base en la definición de la derivada de Lie, podemos inferir que se cumple la condición

$$\mathcal{L}_V \xi = 0 \implies \dot{\xi}^\alpha = V^\mu \nabla_\mu \xi^\alpha = \xi^\mu \nabla_\mu V^\alpha. \quad (311)$$

Ahora bien, usando la descomposición irreductible para un tensor de rango 2 aplicado a $\nabla_\alpha V_\mu$, podemos reescribir a (311) de la forma

$$\dot{\xi}_\mu = \xi^\alpha \nabla_\alpha V_\mu = \xi^\alpha \left(\omega_{\mu\alpha} + \sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{3} \Theta \mathcal{H}_{\mu\alpha} - a_\mu V_\alpha \right), \quad (312)$$

donde $\mathcal{H}_{\mu\alpha}$ corresponde al operador proyección (301). Luego

$$\nabla_\alpha V_\mu = \omega_{\mu\alpha} + \sigma_{\mu\alpha} + \frac{1}{3} \Theta \mathcal{H}_{\mu\alpha} - a_\mu V_\alpha, \quad (313)$$

de tal suerte que estas partes tensoriales irreductibles se definirán como

$$\omega_{\mu\alpha} \equiv \mathcal{H}^\nu_\mu \mathcal{H}^\beta_\alpha \nabla_{[\beta} V_{\nu]} = \nabla_{[\alpha} V_{\mu]} + a_{[\mu} V_{\alpha]}, \quad (314)$$

$$\sigma_{\mu\alpha} = \nabla_{(\mu} V_{\alpha)} + a_{(\mu} V_{\alpha)} - \frac{1}{3} \Theta \mathcal{H}_{\mu\alpha}, \quad (315)$$

$$\Theta \equiv \mathcal{H}^{\mu\alpha} \nabla_{\alpha} V_{\mu} = \nabla_{\mu} V^{\mu}. \quad (316)$$

Con base en todo lo anterior, tenemos que el tensor de vorticidad $\omega_{\mu\alpha}$ corresponde a la parte antisimétrica de la derivada covariante para la velocidad, el cual adicionalmente es ortogonal a esta (i.e. es puramente espacial). Físicamente, si consideramos un elemento de fluido aproximadamente como una esfera, la vorticidad describirá las rotaciones rígidas de los ejes principales de ella con respecto al sistema local en reposo.

Similarmente, el tensor de cizalladura $\sigma_{\mu\alpha}$ corresponde a la parte simétrica y libre de traza en (313), la cual también será ortogonal a la velocidad. Físicamente hablando, este tensor describirá netamente las deformaciones efectuadas sobre el elemento de fluido y sus tres valores propios corresponderán a la tasa de cambio de las longitudes de los ejes principales de la esfera deformada de fluido. Por otro lado, el hecho que este tensor sea libre de traza refleja la propiedad que tiene de expresar estas deformaciones y, a su vez, mantener su volumen constante.

Por último, el escalar de expansión Θ corresponde a la divergencia de la velocidad. Este escalar nos proporciona información de los cambios netamente volumétricos del elipsoide de fluido sin alterar su forma. La interpretación física de estas tres cantidades se ilustra en la figura 24.

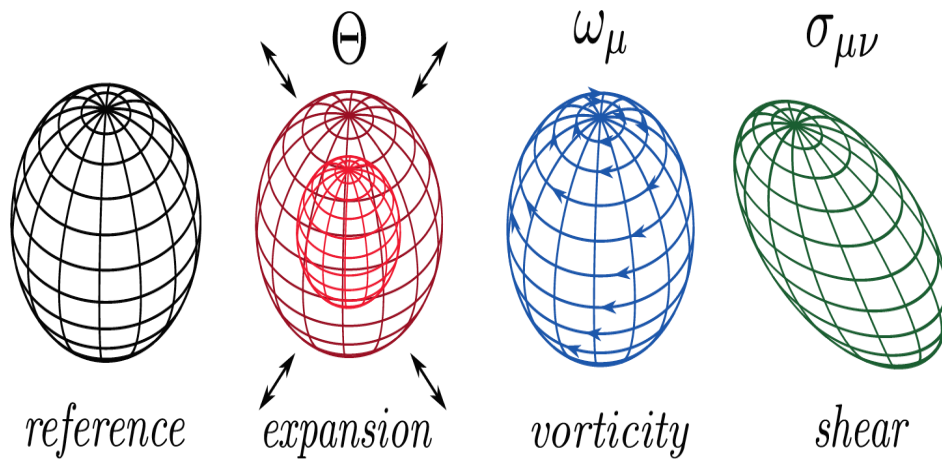


Figura 24. Esquema donde se ilustra la interpretación física de las variables cinématicas en un fluido, tal que un elemento de fluido se toma como si fuese una esfera de referencia. *Imagen tomada de* ³⁴⁷.

Condiciones de energía

Como hemos resaltado a lo largo de toda este apéndice, en el universo conocido el tensor de energía-momentum físicamente está construido teniendo en cuenta las contribuciones de un gran número de diferentes tipos de campos. Por tanto, resultaría extramadamente complicado describir exactamente este tensor, incluso aún sabiendo la forma precisa de cada contribución de cada campo y las ecuaciones de movimiento que las gobiernan. Esto se puede ver a través del hecho que, en principio, existen infinitas posibilidades de escoger la forma del tensor energía-momentum de tal suerte que exista una solución de las ecuaciones de Einstein con base en este. De manera que surge la necesidad de imponer una serie de condiciones sobre $T^{\alpha\beta}$.

Puesto que nosotros como físicos estamos interesados en extraer de la matemática objetos geométricos que describan la naturaleza, nos concierne la existencia de soluciones de las ecuaciones de Einstein que describan la presencia de fuentes

“realistas” de energía y momentum, sea lo que sea que eso signifique ³⁴⁸. Para lograr este objetivo, nos resulta conveniente imponer ciertas condiciones de energía que limiten esta arbitrariedad en la escogencia del tensor de energía-momentum, y de tal suerte que sean restricciones válidas independientemente de la carta coordenada con la cual dotemos el espaciotiempo, las cuales se presentan a continuación.

Condición de energía débil (WEC)

Esta condición establece que para cualquier vector tipo tiempo futuro dirigido V y para cualquier evento en el espaciotiempo se debe cumplir que ³⁴⁹

$$T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0. \quad (317)$$

En otras palabras, esta condición garantiza que la densidad de energía como una medida realizada por un observador arbitrario no pueda ser negativa. Esta inecuación resulta un requerimiento bastante razonable, el cual ha sido verificado por todos los campos detectados experimentalmente. Sin embargo, esta condición no siempre se ha cumplido, en estos casos se ha atribuido a modelos de fluidos carentes de sentido físico.

Condición de energía fuerte (SEC)

Esta condición puede ser enunciado de la siguiente manera ³⁵⁰: cualquier congruencia nula o tipo tiempo debe ser convergente, así el campo gravitacional será atracti-

³⁴⁸ Sean M Carroll: *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019

³⁴⁹ Charalampos A Kolassis, Nilton O Santos y Dimitri Tsoubelis: *Energy conditions for an imperfect fluid*. En: *Classical and Quantum Gravity* 5.10 (1988), pág. 1329

³⁵⁰ Pimentel, Lora-Clavijo y González 2016

vo:

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0, \quad (318)$$

donde $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci. Sin embargo, con base en las ecuaciones de Einstein, podemos reescribir el tensor de Ricci en términos de $T_{\alpha\beta}$ como

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T \mathcal{G}_{\alpha\beta} \right), \quad (319)$$

donde $T = -\mathcal{R}/8\pi$; luego, podemos reescribir a (318) como

$$\mu + \frac{T}{2} \geq 0, \quad (320)$$

donde T corresponde a la traza de $T_{\alpha\beta}$.

Como vemos, la condición fuerte de energía no implica la débil, esta es “más fuerte” sólo en el sentido que aparente un requerimiento físico más fuerte es asumir (321) en lugar de (317)³⁵¹. Esta condición puede ser violada sólo si la densidad de energía es negativa o, si esta es mayor que cero, existan presiones negativas muy grandes en $T^{\mu\nu}$ Kolassis, Santos y Tsoubelis 1988. En conclusión, este es un requerimiento más estricto que el anterior; sin embargo, es físicamente razonable imponerlo sobre el tensor energía-momentum.

Condición de energía dominante (DEC)

Para cualquier vector tipo tiempo y futuro dirigido V y para cualquier evento sobre el

³⁵¹ Wald 2010

espaciotiempo, el vector flujo de densidad de energía $S_\alpha = T^{\alpha\beta} V_\beta$ y la densidad de energía medidos por un observador arbitrario debe ser futuro dirigido y tipo tiempo o nulo ³⁵², i.e.,

$$T^{\alpha\beta} V_\beta \leq 0 \quad \text{y} \quad T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta \geq 0. \quad (321)$$

Una forma equivalente de verlo es imponer que para cualquier observador la energía dominará sobre cualquier otra componente de $T_{\alpha\beta}$, i.e. $T^{00} \geq |T^{\alpha\beta}|$ ³⁵³. En otras palabras, la condición dominante de energía es la misma condición débil más el requerimiento que la presión no podrá exceder a la densidad de energía.

Todas las formas de materia obedecen las anteriores condiciones de energía; no obstante, hasta la fecha se conocen muchos sistemas físicos -teóricos y experimentales- que violan una o más condiciones de energía de diversas maneras. Denominar como “sistemas físicos no razonables” a aquellos que violen estas condiciones de energía resulta una afirmación clásica bastante sensata; sin embargo, al introducirnos en un marco semiclásico³⁵⁴ los efectos cuánticos serán capaces de violar las condiciones de energía débil, fuerte y dominante, aunque estas “violaciones cuánticas” usualmente son muy pequeñas (del orden de \hbar), como en el caso de la evaporación de agujeros negros descubierta por Hawking ³⁵⁵. Por otro lado, al analizar soluciones de agujeros de gusano transversables podemos concluir que, en las cercanías de su garganta, la tensión radial debe ser tan grande que excede la densidad de energía total del sistema, violando así la condición de energía débil, lo cual im-

³⁵² Kolassis, Santos y Tsoubelis 1988

³⁵³ Stephen W Hawking y George Francis Rayner Ellis: *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973

³⁵⁴ Nos referimos como semiclásico en el sentido que la teoría cuántica de campos es empleada en un *background* espaciotemporal fijo (posiblemente curvo).

³⁵⁵ Stephen W Hawking: *Black hole explosions?* En: *Nature* 248.5443 (1974), págs. 30-31

plica también las violaciones de las condiciones fuerte y dominante. Por esta razón la materia en la garganta de un agujero de gusano se le denomina “exótica”, la cual debemos entender como materia que podría tener densidad de energía negativa (i.e., $\mu < 0$)³⁵⁶.

Anexo E. Método de Hamilton-Jacobi en la Teoría General de Relatividad

La descripción de los diferentes tipos de órbitas efectuadas por los fotones cercanos a un agujero negro juegan un papel fundamental en el estudio de sus sombras. Así pues, surge la necesidad de implementar un formalismo matemático bien definido y físicamente fundamentado, que nos sirva como herramienta para describir todos los tipos de geodésicas seguidas por los fotones alrededor de estos objetos astrofísicos compactos.

Quizás la técnica de generación de funciones que describan transformaciones canónicas desarrollada por Hamilton y Jacobi, sea actualmente la más poderosa para integrar las diferentes ecuaciones diferenciales dinámicas³⁵⁷, debido a que este resalta la importancia de la función generatriz para cualquier problema dinámico. En la teoría de las transformaciones canónicas ningún otro teorema es tan importante como el que establece que cualquier transformación de esta naturaleza estará completamente caracterizada por una función S , conocida como la función generadora o acción de Jacobi. Así, el problema de encontrar una transformación canónica propia que simplifique a la función de Hamilton a una forma en la cual las ecuaciones de movimiento sean directamente integrables es así, equivalente al problema de construir esta función S , la cual estará determinada por una sola ecuación diferencial (ED). En conclusión, el problema de resolver el sistema entero de ecuaciones canónicas puede ser reemplazado por el problema más simple de resolver una sola ED,

³⁵⁶ Morris y Thorne 1988

³⁵⁷ Vladimir Igorevich Arnol'd: *Mathematical methods of classical mechanics*. Vol. 60. Springer Science & Business Media, 2013

denominada la ecuación de Hamilton-Jacobi ³⁵⁸. En este apéndice desarrollaremos todo el formalismo de Hamilton-Jacobi³⁵⁹ aplicado a la Relatividad General, con el ánimo de adquirir una base teórica sólida para así obtener la forma explícita de las órbitas nulas en torno a un agujero negro estudiadas en el capítulo 6.

Ecuaciones de Hamilton

La descripción Lagrangiana de la mecánica clásica en función de las coordenadas generalizadas y sus velocidades $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ y descrita a través de las ecuaciones de Lagrange, aunque es la más empleada debido a su gran utilidad desde un punto vista pragmático, no es la única forma de describir las ecuaciones de movimiento. En ciertas ocasiones -como en nuestro caso del estudio de las sombras en un agujero negro- nos resulta mucho más fructífero realizar esta descripción en función de las coordenadas generalizadas y sus respectivos momentos conjugados. Surgiendo así la pregunta de cómo sería la forma de las ecuaciones de movimiento bajo esta nueva formulación de la mecánica. Para tal fin, una herramienta bastante útil que nos servirá como puente entre la formulación Lagrangiana y esta, será lo que se conoce en matemáticas como la transformación de Legendre, las cuales emplearemos de la siguiente forma:

El diferencial total de un Lagrangiano genérico $\mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu)$ es de la forma

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} d\dot{x}^\mu, \quad (322)$$

tal que, gracias a las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos $\partial \mathcal{L} / \partial \dot{x}^\mu = \dot{p}^\mu$ y $\partial \mathcal{L} / \partial x^\mu = p^\mu$, donde x^μ, \dot{x}^μ y p^μ en el caso de relatividad general, serán las coordenadas, la de-

³⁵⁸ Cornelius Lanczos: *The variational principles of mechanics*. University of Toronto press, 2020

³⁵⁹ El tratamiento presentado a continuación se encuentra altamente inspirado por el empleado por Landau y Lifshitz en su excelente libro sobre mecánica ³⁶⁰.

rivada de las coordenadas con respecto a un parámetro afín λ con el que parame-
trizaremos cada curva sobre nuestra variedad \mathcal{M} y el momentum espaciotemporal,
respectivamente. Así pues, podemos reescribir a (322) como

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_\mu dx^\mu + p_\mu d\dot{x}^\mu. \quad (323)$$

Utilizando la regla de la cadena, se puede reescribir el segundo término de esta
ecuación como $p_\mu d\dot{x}^\mu = d(p_\mu \dot{x}^\mu) - \dot{x}^\mu dp_\mu$, luego inyectándola en (323) y organizán-
dola un poco, tenemos que

$$d(p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}) = -\dot{p}_\mu dx^\mu + \dot{x}^\mu dp_\mu, \quad (324)$$

donde el término del diferencial del lado izquierdo de la ecuación corresponderá, en
nuestros caso de interés, a la energía del sistema³⁶¹ expresada en función de las
coordenadas y mometum espaciotemporales. Por ende, esta función la definiremos
como la función del Hamilton del sistema, donde implícitamente hemos aplicado una
transformación de Legendre sobre el Lagrangiano, así pues

$$\mathcal{H}(x^\mu, p_\mu) = p_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L}, \quad (325)$$

luego (324) adopta la forma

$$d\mathcal{H} = -\dot{p}_\mu dx^\mu + \dot{x}^\mu dp_\mu. \quad (326)$$

³⁶¹ Esto debido a que será una integral de movimiento del sistema, atribuible al hecho que ningún
término dependerá explícitamente del parámetro afín λ . Por otro lado, dado que estamos traba-
jando con un espaciotiempo estacionario, este, por definición, contendrá un vector de Killing tipo
tiempo, luego existirá una simetría en la dirección temporal. Como vemos, ambos argumentos
nos conducen inminentemente a una misma conclusión: la conservación de la energía.

Ahora bien, como vemos de (325), la función de Hamilton depende de las coordenadas y momentums espaciotemporales, luego su diferencial en general será de la forma

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\mu} dp_\mu. \quad (327)$$

Finalmente, al comparar las ecuaciones (326) y (327) concluimos que

$$\dot{x}^\mu = \partial\mathcal{H}/\partial p_\mu \quad \text{y} \quad \dot{p}_\mu = -\partial\mathcal{H}/\partial x^\mu, \quad (328)$$

las cuales se denominan ecuaciones canónicas³⁶² de Hamilton. Ellas constituyen un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden para las $2n$ funciones desconocidas $x^\mu(\lambda)$ y $p_\mu(\lambda)$, donde n corresponde al número de coordenadas empleadas. Así pues, solucionar las ecuaciones de Euler-Lagrange, las ecuaciones canónicas de Hamilton o la ecuación de la geodésica resulta ser tres formas distintas y equivalentes de obtener las ecuaciones que describen el movimiento de una partícula sobre el espaciotiempo, surgiendo todas del principio de mínima acción³⁶³.

Mirando más de cerca la acción \mathcal{S}

En la formulación Lagrangiana de la mecánica, usualmente se deducen las ecuaciones de movimiento usando el principio de mínima acción debido a su simplicidad con respecto a otras formas de hacerlo (el principio de D'Alembert, por ejemplo). En él, consideramos la integral

³⁶² Se hacen llamar canónicas debido a su simplicidad y forma simétrica. En este sentido debemos siempre entender la palabra canónica, como sinónimo de simetría y simplicidad, es decir, belleza.

³⁶³ Misner, Thorne y Wheeler 1973

$$\mathcal{S}[x^\mu(\lambda)] = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \mathcal{L}(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda) d\lambda, \quad (329)$$

donde el funcional \mathcal{S} recibe el nombre de acción. Este principio establece que la variación de (329) es igual a cero ($\delta\mathcal{S} = 0$) para trayectorias estacionarias en el que los puntos inicial λ_1 y λ_2 son totalmente fijos. Pero, *¿y si permitimos que el punto final λ_2 se pueda mover?*

Consideremos a \mathcal{S} como una cantidad que caracteriza el movimiento a lo largo de una curva $x^\mu(\lambda)$, y luego comparemos los distintos valores de la acción para curvas que tienen el mismo punto común inicial $x^\mu(\lambda_1)$, pero pasan por puntos distintos en λ_2 . Todo esto bajo la condición de mantener el mismo potencial efectivo $V(x^\mu)$, es decir, el mismo campo de “fuerzas”. De manera que podríamos hacer lo mismo para otro punto y, por tanto, el valor de \mathcal{S} dependerá de su punto final.

Por simplicidad y sin perder generalidad, consideremos un sistema con un sólo grado de libertad, luego en este caso particular la variación de (329), adopta la forma³⁶⁴

$$\delta\mathcal{S} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \delta x \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \right) \delta x d\lambda. \quad (330)$$

Debido a que esta expresión debe satisfacer el principio de mínima acción, la integral en (330) debe ser igual cero. Por otro lado, tenemos que $x(\lambda_1)$ es un punto estacionario, luego en el primer término de (330) necesariamente $\delta x(\lambda_1) = 0$, y denotaremos el valor $\delta x(\lambda_2)$ simplemente como δx . Por otro lado, gracias a las ecuaciones de Lagrange tenemos que $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x} = p$, con base en esto (330) adopta la forma $\delta\mathcal{S} = p\delta x$ o, en el caso más general para cualquier número de grados de libertad,

³⁶⁴ Para ver la derivación completa de la forma de esta variación, remitirse a la sección 2.2 del libro de Goldstein en ³⁶⁵.

$$\delta\mathcal{S} = p_\mu \delta x^\mu.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta lo anterior, vemos que la derivada parcial de la acción con respecto a las coordenadas espaciotemporales es igual al cuadrimomento, i.e.

$$\partial\mathcal{S}/\partial x^\mu = p_\mu. \quad (331)$$

Por otro lado, la acción puede ser considerada como un funcional explícito del tiempo, luego si consideramos curvas que parten de un punto mismo punto inicial $x^\mu(\lambda_1)$ y terminan en diferentes puntos, la derivada parcial de \mathcal{S} con respecto al parámetro afín puede ser obtenida a través de una apropiada variación de la acción, así:

Partiendo de la definición para \mathcal{S} en (329), podemos inferir que su derivada total a lo largo de la curva es igual al Lagrangiano ($d\mathcal{S}/d\lambda = \mathcal{L}$). Luego, tomando a la acción en función de las coordenadas y el parámetro afín y teniendo en cuenta a (331), podemos reescribir su derivada total como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{S}}{d\lambda} &= \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\lambda} + \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu = \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\lambda} + p_\mu \dot{x}^\mu : \quad \frac{d\mathcal{S}}{d\lambda} = \mathcal{L} \\ &\Rightarrow \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial\lambda} = \mathcal{L} - p_\mu \dot{x}^\mu. \end{aligned} \quad (332)$$

Finalmente, si tomamos el lado derecho en (332) y lo comparamos con (325) vemos que es igual al negativo de la función de Hamilton, lo que nos lleva a concluir que

$$\partial\mathcal{S}/\partial\lambda + \mathcal{H} = 0, \quad (333)$$

la cual corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Sin embargo, aún no sabemos a ciencia cierta qué es en el fondo esta funcional \mathcal{S} o qué papel fundamental

juega en el formalismo de Hamilton-Jacobi, del cual sólo hemos deducido su ecuación diferencial. Para responder a todos estos interrogantes es necesario investigar las transformaciones canónicas y sus funciones generadoras.

Transformaciones canónicas

A lo largo de este tratamiento no hemos presupuesto un conjunto de coordenadas o momentums privilegiados, por ende podemos inferir que todas las ecuaciones de movimiento que hemos obtenido son invariantes ante una transformación de la forma $(x^\mu, p_\mu) \mapsto (X^\mu, P_\mu)$, donde estas nuevas coordenadas y momentos espacio-temporales serán función de los viejos, y a su vez del parámetro afín de la curva en el espacio de fase, i.e.

$$X^\mu = X^\mu(x^\mu, p_\mu, \lambda) \quad \text{y} \quad P_\mu = P_\mu(x^\mu, p_\mu, \lambda). \quad (334)$$

Así pues, esta clase de posibles transformaciones constituye una de las principales ventajas del formalismo Hamiltoniano de la mecánica. Sin embargo, este conjunto de transformaciones no necesariamente garantizará la misma forma canónica de las ecuaciones de Hamilton (328): sólo cuando eso suceda diremos que se ha efectuado una transformación canónica. Por tanto, es esperarse que, al efectuar una transformación canónica, las ecuaciones de Hamilton escritas en estas nuevas variables (X^μ, P_μ) adquieran la forma

$$\dot{X}^\mu = \partial\mathcal{K}/\partial P_\mu, \quad \dot{P}_\mu = -\partial\mathcal{K}/\partial X^\mu, \quad (335)$$

donde $\mathcal{K}(X^\mu, P_\mu)$ será nuestro nuevo Hamiltoniano del sistema. Ahora bien, al imponer que las ecuaciones de Hamilton sean invariantes ante transformaciones canónicas, es de esperarse que estas a su vez sigan satisfaciendo el principio de mínima acción. Con base en (331) y (333), podemos escribir este principio como

$$\delta \int (p_\mu dx^\mu - \mathcal{H}d\lambda) = \delta \int (P_\mu dX^\mu - \mathcal{K}d\lambda) = 0, \quad (336)$$

donde es importante tener en cuenta que ambas formas serán equivalentes sólo si sus integrandos son iguales³⁶⁶, luego al ser invariantes al sumar el diferencial total de alguna función \mathcal{F} de las coordenadas, momentum y parámetro afín, podemos añadirlo para que se cumpla la igualdad entre ellos³⁶⁷. Así

$$d\mathcal{F} = p_\mu dx^\mu - P_\mu dX^\mu + (\mathcal{K} - \mathcal{H})d\lambda, \quad (337)$$

tal que cada transformación canónica estará caracterizada por una función particular \mathcal{F} , denominada función generadora. Como observamos, en (337) esta función dependerá de las nuevas y viejas coordenadas y el parámetro afín. Sin embargo, como veremos enseguida, en la formulación de Hamilton Jacobi nos resultará mucho mas conveniente definir a \mathcal{F} en función de las coordenadas viejas y los nuevos momentums. Para tal fin, debemos aplicar la transformación de Legendre adecuada en (337), tal que al reescribirla como

$$d(\mathcal{F} + P_\mu X^\mu) = p_\mu dx^\mu + X^\mu dP_\mu + (\mathcal{K} - \mathcal{H})d\lambda, \quad (338)$$

se puede demostrar que el argumento dentro del diferencial del lado izquierdo de la ecuación constituye una nueva función generatriz $\mathcal{S}(x^\mu, P_\mu, \lambda)$ producto de efectuar una transformación de Legendre sobre \mathcal{F} . Luego, de (338) vemos que

³⁶⁶ Es cierto que la variación de ambas acciones serán iguales a cero entre dos puntos estacionarios, pero esto no implicará que los integrandos lo sean.

³⁶⁷ La diferencia entre las dos integrales será igual a una constante, a saber, la diferencia entre los valores superior e inferior de la integral evaluada de este diferencial \mathcal{F} (i.e., $\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [(p_\mu dx^\mu - \mathcal{H}d\lambda) - (P_\mu dX^\mu - \mathcal{K}d\lambda)] = \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\mathcal{F} = 0$).

$$p_\mu = \partial\mathcal{S}/\partial x^\mu, \quad X^\mu = \partial\mathcal{S}/\partial P_\mu, \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial\mathcal{S}/\partial\lambda. \quad (339)$$

En conclusión, cuando la función generadora es conocida, el sistema de ecuaciones (339) nos proporciona la relación entre (x^μ, p_μ) y (X^μ, P_μ) , y el nuevo Hamiltoniano \mathcal{K} .

Formalismo de Hamilton-Jacobi

Como vimos en la sección 5, la acción puede ser vista como una función de la forma $\mathcal{S} = \mathcal{S}(x^\mu, \lambda)$, donde su derivada con respecto al parámetro afín está íntimamente relacionado con el Hamiltoniano, como se muestra en (333). Luego, teniendo en cuenta que la función de Hamilton depende de las coordenadas, momentos y el parámetro afín, y con base en (331), podemos reescribir a (333) como

$$\partial\mathcal{S}/\partial\lambda + \mathcal{H}(x^\mu, \partial\mathcal{S}/\partial x^\mu, \lambda) = 0, \quad (340)$$

la cual debe ser satisfecha por la acción de Jacobi \mathcal{S} . Formalmente, a esta ecuación diferencial de primer orden se le conoce como la ecuación de Hamilton-Jacobi (H-J), donde al igual que la formulación Lagrangiana o Hamiltoniana de la mecánica, esta ecuación es la base de un método general de integración de ecuaciones de movimiento.

Las variables independientes de la ecuación de H-J son las coordenadas y el parámetro λ . Así, para un sistema con n grados de libertad, su integral completa³⁶⁸ de esta ecuación deberá contener $n+1$ constantes arbitrarias. Ahora bien, debido a que la acción es introducida en la ecuación de H-J sólo a través de sus derivadas, una

³⁶⁸ Entiéndase por integral completa de una ecuación diferencial de primer orden como una solución que contiene tantas constantes arbitrarias como variables independientes hay en ella.

de estas constantes es aditiva, luego la integral completa en (340) es de la forma

$$\mathcal{S} = f(\lambda; x^0, \dots, x^\mu; \alpha_0, \dots, \alpha_\mu) + \Omega, \quad (341)$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ y Ω son constantes arbitrarias. Para discernir la relación existente entre la integral completa de movimiento (341) y las ecuaciones de movimiento del sistema, debemos efectuar una transformación canónica $(x^\mu, p_\mu) \mapsto (X^\mu, P_\mu)$ tomando a $f(\lambda, x^\mu, \alpha_\mu)$ como su función generatriz y a las constantes α_μ como sus nuevos momentos. Ahora bien, definamos las nuevas coordenadas X^μ como $\beta_1, \dots, \beta_\mu$, donde, debido a que el generador de la transformación canónica es una función de las coordenadas viejas x^μ y los nuevos momentums α_μ y está sumada con la constante Ω , vemos que la acción (341) coincide con la forma de la función generatriz definida en (338) y, por tanto, adquiere la misma forma que el sistema de ecuaciones en (339). Así pues, debido que esta función generadora $f(\lambda, x^\mu, \alpha_\mu)$ debe satisfacer la ecuación de H-J, vemos que el nuevo Hamiltoniano \mathcal{K} debe ser igual a cero (i.e., $\mathcal{K} = \mathcal{H} + \partial f / \partial \lambda = \mathcal{H} + \partial \mathcal{S} / \partial \lambda = 0$). Finalmente, vemos que las ecuaciones expresadas en las nuevas coordenadas β_μ y los nuevos momentums α_μ son de la forma $\dot{\alpha}_\mu = \dot{\beta}_\mu = 0$, luego en este nuevo sistema las variables (α_μ, β_μ) serán constantes.

En conclusión, por medio de las n ecuaciones (331), las n coordenadas x^μ se podrán expresar en términos del parámetro afín λ y las $2n$ constantes (α_μ, β_μ) . Esto nos proporcionará las ecuaciones de movimiento de nuestro problema en cuestión, es decir, las órbitas de los fotones alrededor de un agujero negro.