

# SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL AUTOCONSISTENTE DE LA INTERACCIÓN DE UN PLASMA ACOLISIONAL CON UN PULSO LÁSER

KEREN CAROLINA VANEGAS PÉREZ



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA

2023

**SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL AUTOCONSISTENTE  
DE LA INTERACCIÓN DE UN PLASMA ACOLISIONAL  
CON UN PULSO LÁSER**

**KEREN CAROLINA VANEGAS PÉREZ**

Proyecto de grado para optar al título de  
Física

Director:

Jesús Eduardo López Durán  
PhD(c) Física  
Universidad Industrial de Santander  
Escuela de Física

Codirector:

Eduardo Alberto Orozco Ospino  
PhD Física  
Universidad Industrial de Santander  
Escuela de Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2023

*A mis padres, Socorro y Jaime,  
A mi hermana Estefania,  
A mi sobrino Nicolas Josue,  
y al amor de mi vida, Jesús Eduardo.*

## AGRADECIMIENTOS

Llegar a este punto ha sido un proceso largo y desafiante, pero ha sido posible gracias al apoyo de muchas personas. En primera instancia le agradezco a Dios por la sabiduría, la fuerza, y la perseverancia que me ha dado para poder completar esta tarea. A mis directores Jesús López y Eduardo Orozco quienes me apoyaron en este trabajo e impulsaron a sacar lo mejor de mí. Gran parte de las habilidades adquiridas fue gracias a ustedes. Agradezco a los docentes que aportaron significativamente a lo largo de mi carrera, en especial a Andrés Camilo García, Ilia Mikailov y David Miranda. A mis padres Jaime Vanegas y Socorro Pérez: gracias por el amor, la confianza y el apoyo incondicional que me han brindado. La persona que soy y quiero ser se basa en el gran ejemplo que veo en ustedes. A mi hermana Estefanía por su constante compañía, apoyo y paciencia. A mi sobrino Nicolás Josue, por ser mi compañero de aventuras; tú curiosidad me ha inspirado a seguir adelante y a nunca dejar de aprender. A mis compañeros de carrera, especialmente a mis amigas María Camila y Dayanna: gracias por acompañarme en este largo proceso desde primer semestre, por su sincera amistad y gran apoyo en los momentos difíciles, mil y mil gracias. A Jesús Eduardo, por su amor, gran apoyo y paciencia durante todos estos años. Mi amor, eres la respuesta a cada oración que he ofrecido.

# ÍNDICE GENERAL

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>9</b>
<b>1. GENERALIDADES DEL PLASMA</b>	<b>11</b>
1.1 Parámetros del Plasma . . . . .	12
1.2 Descripción cinética del Plasma . . . . .	14
1.3 Propagación de ondas electromagnéticas en un plasma . . . . .	15
<b>2. ACELERACIÓN BASADA EN PLASMA</b>	<b>17</b>
2.1 Fuerza ponderomotriz . . . . .	17
2.2 Aceleración wakefield . . . . .	18
<b>3. MODELO DE SIMULACIÓN</b>	<b>21</b>
3.1 Modelo físico . . . . .	21
3.2 Algoritmo Particle-In-Cell . . . . .	23
3.3 Algoritmo de Boris-Bunemann . . . . .	25
3.4 Esquema de Yee . . . . .	26
3.5 Criterio CFL: Courant-Friedrichs-Levy . . . . .	28
3.6 Deposición de carga y corriente . . . . .	28
3.7 Ciclo computacional Particle in Cell . . . . .	30
3.8 Esquema de normalización . . . . .	31
<b>4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>32</b>
4.1 Propagación del pulso electromagnético . . . . .	32
4.2 Dinámica de una partícula cargada . . . . .	35
4.3 Simulación autoconsistente Particle-In-Cell . . . . .	36
4.4 Influencia de los parámetros del pulso . . . . .	40
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>45</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>47</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representación esquemática del plasma como el cuarto estado de la materia. Tomada [1] . . . . .	11
Figura 2	Potencial electrostático asociado a una carga puntual $q$ en el plasma (curva roja), y por una carga eléctrica idéntica $q$ en el vacío (curva verde). . . . .	12
Figura 3	Partículas en el espacio de fase para definir la función de distribución 1D. . . . .	14
Figura 4	Desplazamiento de carga debido a la fuerza ponderomotriz generado por un pulso electromagnético no uniforme. . . . .	17
Figura 5	Esquema de la aceleración láser wakefield (LWFA). . . . .	18
Figura 6	Ganancia energética del mecanismos LWFA a lo largo de los años. Tomada de [2]. . . . .	20
Figura 7	El método Particle-In-Cell: (a) la función continua de distribución en el espacio de fase se representa mediante (b) la superposición de pequeñas nubes de partículas cargadas denominadas superpartículas. . . . .	23
Figura 8	Representación esquemática del algoritmo de Yee: sobre el eje horizontal se representa la discretización espacial y verticalmente la evolución temporal. Cada campo tiene su propia malla pero en el cálculo se acoplan. . . . .	27
Figura 9	Representación esquemática de la deposición de carga en los puntos de malla. . . . .	29
Figura 10	Ciclo computacional del método Particle-In-Cell electromagnético. . . . .	30
Figura 11	Efecto de la variación del parámetro $n_{pg}$ sobre la propagación de un pulso láser en el vacío: (a) Simulación con $n_{pg}=5$ , (b) simulación ejecutada con $n_{pg}=20$ , y finalmente, (c) simulación de la propagación del pulso con $n_{pg}=60$ . . . . .	34
Figura 12	Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico y magnético uniforme obtenida a partir de la subrutina de Boris (círculos azules) con la respectiva trayectoria analítica (línea roja). . . . .	35
Figura 13	Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico y magnético cruzados y uniformes, obtenida a partir de la subrutina de Boris (círculos azules) con la respectiva trayectoria analítica (línea roja) para diferentes casos: a) simulación con un $\Delta t = 0,025$ , b) simulación con un $\Delta t = 0,05$ , c) simulación con un $\Delta t = 0,2$ y finalmente d) simulación con un $\Delta t = 0,5$ . . . . .	36

---

Figura 14	La simulación de un pulso láser que se propaga a través del plasma con longitud $L_s$ requiere una cantidad significativa tanto de puntos de malla espacial como de iteraciones temporales. Es por esto que se replantea la región de simulación a una región móvil con longitud $L_z$ , la cual se mueve a la velocidad de la luz y paralela al pulso láser, reduciendo significativamente el costo computacional. . . . .	37
Figura 15	Interacción del pulso láser (línea verde) con el plasma y el comportamiento del respectivo wakefield (línea morada) en tres diferentes instantes: a) Inicio de la interacción. b) Identificación de la formación del wake c) Wakefield completamente generado por la interacción. . . .	39
Figura 16	Perfiles de la onda plasmica $E_{wake}$ (línea lila) y de la concentración electrónica en el plasma $n_{plasma}$ (línea azul) respecto a variaciones en la amplitud del campo eléctrico del pulso láser empleado en la simulación: a) y d) $E_{laser} = 2[TV/m]$ ; b) y e) $E_{laser} = 5[TV/m]$ ; c) y f) $E_{laser} = 8[TV/m]$ . Al lado izquierdo se presentan las simulaciones sin técnicas de suavizado y a la derecha aplicando filtro. . . . .	41
Figura 17	Amplitud de la onda plásmica $E_{wake}$ debido a la influencia en el ancho del pulso $\sigma$ . . . . .	42
Figura 18	Comportamiento de la amplitud de la onda plásmica, $E_{wake}$ , respecto al ancho del pulso láser gaussiano, $\sigma$ . Las simulaciones se ejecutaron con $n_{pg} = 25$ y $n_{spc} = 20$ . . . . .	43
Figura 19	Wakefield generado por un pulso láser asimétrico con $\sigma_R = 2$ y $\sigma_L = 0,8$ . . . . .	44

# LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Amplitud de la onda plasmica $E_{wake}$ respecto la variable $n_{pg}$ , manteniendo el número de superpartículas por celda constante $n_{spc} = 20$ . . . . .	39
Tabla 2	Amplitud de la onda plasmica $E_{wake}$ como función del número de superpartículas por celda $n_{spc}$ , manteniendo el paso de malla constante, con $n_{pg} = 25$ . . . . .	40
Tabla 3	Dependencia de la amplitud de la onda plasmica $E_{wake}$ respecto al ancho del pulso láser empleado $\sigma$ . . . . .	43
Tabla 4	Dependencia de la longitud de onda del wake, $\lambda_p$ , y la amplitud de la onda plasmica, $E_{wake}$ , respecto a los parámetros $\sigma_R$ y $\sigma_L$ que definen la asimetría del pulso. . . . .	44

---

---

## RESUMEN

---

---

**TÍTULO:** SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL AUTOCONSISTENTE DE LA INTERACCIÓN DE UN PLASMA ACOLISIONAL CON UN PULSO LÁSER\*

**AUTOR:** Keren Carolina Vanegas Pérez, Jesús Eduardo López Durán<sup>‡</sup>, Eduardo Alberto Orozco Ospino<sup>†</sup>,

**PALABRAS CLAVES:** Plasma, Aceleración wakefield, Pulso láser.

**DESCRIPCIÓN:** Los mecanismos de aceleración de partículas cargadas actuales, además de sofisticados, suelen ser de gran tamaño. Bajo esta premisa, investigaciones recientes se han enfocado en desarrollar diferentes esquemas que permitan acelerar partículas a altas energías en espacios reducidos, siendo la aceleración basada en plasma uno de los mecanismos de aceleración que más destaca. Este mecanismo consiste en aprovechar la onda plásmica generada por un pulso láser de alta intensidad y corta duración que incide en un plasma, para acelerar partículas cargadas. Ya que la interacción de un pulso láser con un plasma conlleva a fenómenos de naturaleza altamente no lineal, su descripción teórica se sustenta principalmente en simulaciones computacionales, las cuales consideran efectos autoconsistentes y no lineales propios del sistema. Por tal motivo, en este trabajo se presenta el desarrollo de un código computacional particle in cell electromagnético unidimensional que simula la formación de la onda plásmica, donde se consideran únicamente variaciones a lo largo de la dirección de propagación del pulso láser. Esto permite estudiar la dinámica del plasma perturbado por diferentes pulsos láser de diferente duración e intensidad, y, con ello caracterizar los diversos trenes de pozos de potencial que dichos pulsos inducen a su paso.

---

\*Trabajo de Investigación.

<sup>‡</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director, Ph.D (c) Física.

<sup>†</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Co-Director, Ph.D. Física.

---

---

# ABSTRACT

---

---

**TITLE:** SELF-CONSISTENT ONE-DIMENSIONAL SIMULATION OF THE INTERACTION OF AN ACOLLISSIONAL PLASMA WITH A LASER PULSE\*

**AUTOR:** Keren Carolina Vanegas Pérez, Jesús Eduardo López Durán<sup>‡</sup>, Eduardo Alberto Orozco Ospino<sup>†</sup>,

**KEYWORDS:** Plasma, Wakefield acceleration, Laser pulse.

**DESCRIPTION:** Current charged particle acceleration mechanisms, in addition to being sophisticated, are usually large. Under this premise, recent research has focused on developing different schemes that allow particles to be accelerated to high energies in reduced spaces, with plasma-based acceleration being one of the most notable acceleration mechanisms. This mechanism consists of taking advantage of the plasmic wave generated by a high-intensity, short-duration laser pulse that hits a plasma, to accelerate charged particles. Since the interaction of a laser pulse with a plasma leads to phenomena of a highly nonlinear nature, its theoretical description is mainly based on computational simulations, which consider self-consistent and nonlinear effects inherent to the system. For this reason, this work presents the development of a one-dimensional electromagnetic particle in cell computational code that simulates the formation of the plasmic wave, where only variations along the direction of propagation of the laser pulse are considered. This allows us to study the dynamics of the plasma disturbed by different laser pulses of different durations and intensities, and thereby characterize the various trains of potential wells that these pulses induce in their path.

---

\* Research Work.

<sup>‡</sup> Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Advisor, Ph.D (c) Física.

<sup>†</sup> Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Co-Advisor, Ph.D. Física.

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

Como punto de partida, es importante mencionar que la mayor parte de la materia conocida, la cual representa cerca del ( $\sim 99\%$ ) del universo visible, corresponde a los plasmas naturales, como lo son: las estrellas, la atmósfera alta de los planetas, entre otros. Incluso, una variedad significativa de las tecnologías actuales se basan en plasma, y abarca desde la industria tecnológica hasta dispositivos médicos para mejorar la salud y calidad de vida [3–5].

En este punto es pertinente ampliar el concepto de plasma, definido como un gas ionizado, cuasi-neutro que exhibe comportamientos colectivos. Esto quiere decir que las partículas cargadas (iones y electrones) son afectados no solo por campos electromagnéticos externos si no que también por campos propios de su dinámica. De esta forma, el estudio de la dinámica del plasma aunque interesante ya que involucra propagación de ondas y desarrollo de inestabilidades, resulta complejo, hasta el punto de no tener una comprensión total de ciertos fenómenos [6–10]. Debido a la misma naturaleza del plasma y de los fenómenos presentes en el mismo, su estudio se puede abordar desde dos enfoques diferentes: *(i)* la descripción cinética que involucra la evolución de la función de distribución de las componentes del plasma y *(ii)* el modelo macroscópico, en el que se considera el plasma como fluido, siendo el modelo MHD (Magnetohidrodinámico) uno de los más representativos. En general, abordar el estudio analítico de la descripción tanto cinética como macroscópica, es una labor difícil, que en la mayoría de los casos requiere realizar un gran número de aproximaciones. Por tal razón, la implementación de diversas técnicas numéricas para simular la dinámica del plasma toma gran relevancia, dando soluciones aproximadas para cada uno de los problemas en cuestión [11, 12]. Actualmente es posible encontrar diversos códigos en la literatura tanto de acceso libre como restringido, pero en muchos casos son tan elaborados que es difícil su manipulación, de modo que es común que se elaboren códigos propios para atacar problemas específicos. Algunos de los códigos que resaltan en la literatura son: JOREK y BOUT++ que permiten el estudio lineal y no lineal de inestabilidades en dispositivos de confinamiento magnético como los tokamak y stellarators [13, 14]. FARGO3D es un código que permite la simulación de plasmas astrofísicos a través de la solución numérica de las ecuaciones MHD [15]. Respecto a simulaciones cinéticas, la mayoría de trabajos se basan en simulaciones Particle-In-Cell, destacando trabajos como el presentado por Alexander Pukhov, el código de libre acceso PICongPU, y el código OSIRIS PIC [16–18].

---

Por otra parte, desde los albores de la física de altas energías, uno de los grandes retos ha sido reducir el tamaño y el costo de los aceleradores de partículas, manteniendo o incrementando los valores energéticos requeridos. Es aquí donde la física del plasma toma un lugar importante en el desarrollo de la nueva generación de aceleradores, pues el principio base consiste en aprovechar las propiedades de la fuerza poderomotriz que un pulso láser de corta duración y de alta intensidad ejerce sobre las partículas cargadas al incidir en un plasma, dando lugar a perturbaciones en la concentración electrónica, pues dicha fuerza desplaza a los electrones hacia zonas de menor intensidad o menor gradiente del pulso electromagnético [19]. Siguiendo el pulso, los electrones del plasma afectados intentan reorganizarse y es así como se generan las oscilaciones plásmicas: conocidas también como un tren de pozos de potencial electrostático (*wake*) que viaja detrás y a la misma velocidad de grupo del pulso láser. Dicho esto, si se inyecta una nube de partículas cargadas adecuadamente, el campo electrostático asociado al wake, el *Wake-Field*, puede acelerar dichas partículas a velocidades relativistas en distancias muy cortas [20, 21]. Este esquema es conocido como Laser Wake-Field Acceleration (LWFA) y fue propuesto por T. Tajima y J. M. Dawson en 1979 [22].

La formación del wakefield no solo se genera con pulsos láser muy intensos y de corta duración, también existen diversas técnicas para tal fin, como lo es el mecanismo Plasma Wakefield Acceleration (PWFA): el cual consiste en inyectar sobre el plasma un haz de partículas cargadas, típicamente electrones con altas velocidades, que por repulsión electrostática genera la onda plásmica [23, 24]. Otros esquemas basados en pulsos láser son los mecanismos Laser Beat-Wave Acceleration (LBWA) y Self Modulated Laser Wakefield Acceleration (SM-LWFA): en el primero (LBWA), el wake se genera por la superposición de dos pulsos láser de diferente frecuencia formando un batido que se propaga a lo largo del plasma, y, en particular la frecuencia del batido debe coincidir con la frecuencia plásmica, pues la excitación es resonante [20–22]. El segundo (SM-LWFA) se basa en el fenómeno de auto-modulación, que surge de la interacción de un pulso láser de alta potencia con un plasma denso, donde la longitud de onda del pulso es mayor que la longitud de onda del plasma: la densidad electrónica del plasma y los efectos del Wake relativista modulan el pulso láser a la longitud de la onda del plasma [25, 26]. De forma general, la aceleración basada en plasma tiene a su favor enormes gradientes de aceleración respecto a los aceleradores convencionales como los LINAC y en palabras de Gessner: “*La belleza del plasma es que básicamente te da este enorme gradiente de aceleración*”; sin embargo, la implementación experimental puede ser compleja debido al requerimiento de láseres de alta potencia y corta duración.

Ya que la propagación de un pulso láser en el plasma conlleva a una interacción de naturaleza altamente no lineal, la descripción teórica de este fenómeno se realiza generalmente a través de simulaciones computacionales [16–18]: motivo por el cual en este proyecto de investigación se desarrolló un código computacional que permite estudiar la dinámica autoconsistente del fenómeno bajo la aproximación unidimensional, donde se consideraron únicamente variaciones a lo largo de la dirección de propagación del pulso láser, permitiendo identificar la formación del wake.

---

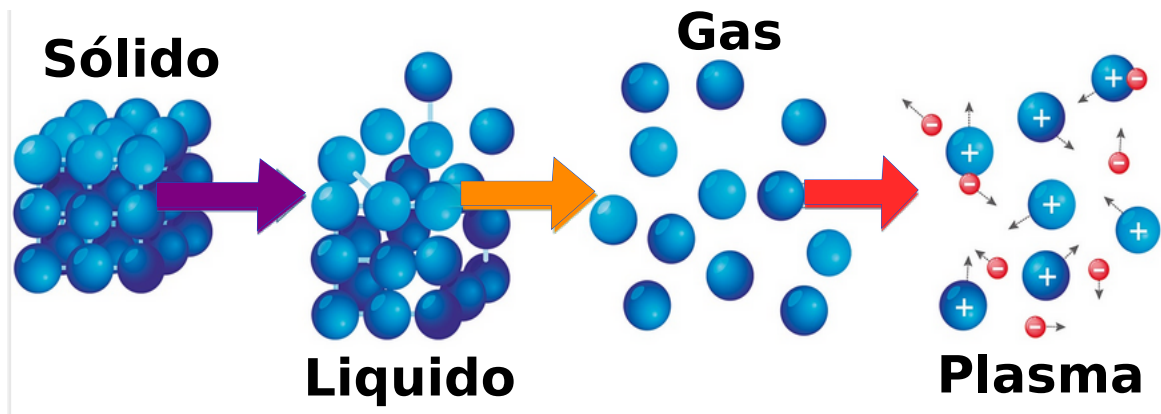
---

# 1. GENERALIDADES DEL PLASMA

---

---

El plasma es conocido como el cuarto estado de la materia: *(i)* sólido, *(ii)* líquido, *(iii)* gas y *(iv)* plasma, y tal como se presenta en la Figura 1, en el estado sólido los átomos se encuentran densamente empaquetados con intensas fuerzas de interacción entre ellos, formando así una estructura rígida con un volumen fijo. Al incrementar la energía en el sistema, la temperatura aumenta, provocando aumento de la movilidad de las moléculas entre si: vibrando y deslizándose unas sobre otras, siendo este el estado líquido. Al aumentar aún más la energía del sistema, los enlaces que hay entre los átomos se rompen, de modo que sus partículas no están cohesionadas y la fuerza de interacción es prácticamente inexistente; siendo este el estado gaseoso. Finalmente, si se suministra la energía suficiente a dicho gas para desprender electrones de sus átomos, se habla de un gas ionizado, el cual puede ser considerado como plasma si hay un comportamiento colectivo [9, 10, 19].



**Figura 1:** Representación esquemática del plasma como el cuarto estado de la materia. Tomada [1]

Formalmente, el plasma es un gas ionizado, cuasi-neutro que exhibe comportamientos colectivos, lo que indica que los átomos de un gas neutro se ionizan positivamente al liberar algunos de sus electrones, de modo que es fácil intuir que el plasma es globalmente cuasi-neutro:  $\rho_e + \rho_i \approx 0$ , y al exhibir comportamientos colectivos surgen oscilaciones plásmicas y densidades de corriente definidas por una dinámica colaborativa. En este orden de ideas, *no todo gas ionizado es plasma, pero sí todo plasma es un gas ionizado*. Un plasma es entonces un sistema constituido por electrones, iones, átomos neutros, y su dinámica depende fuertemente de la interacción con campos electromagnéticos y

de la misma manera, la evolución de dichos campos dependen de la misma dinámica del plasma, así que su descripción debe ser autoconsistente. Las variables que permiten comprender la dinámica del plasma son generalmente *i)* la concentración tanto iónica como electrónica ( $n_i, n_e$ ), *ii)* la velocidad ( $\mathbf{v}$ ), *iii)* la temperatura ( $T$ ) o presión ( $P$ ) y *iv)* los campos eléctrico y magnético ( $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ ). A continuación se presentan algunos parámetros que permiten caracterizar globalmente el sistema.

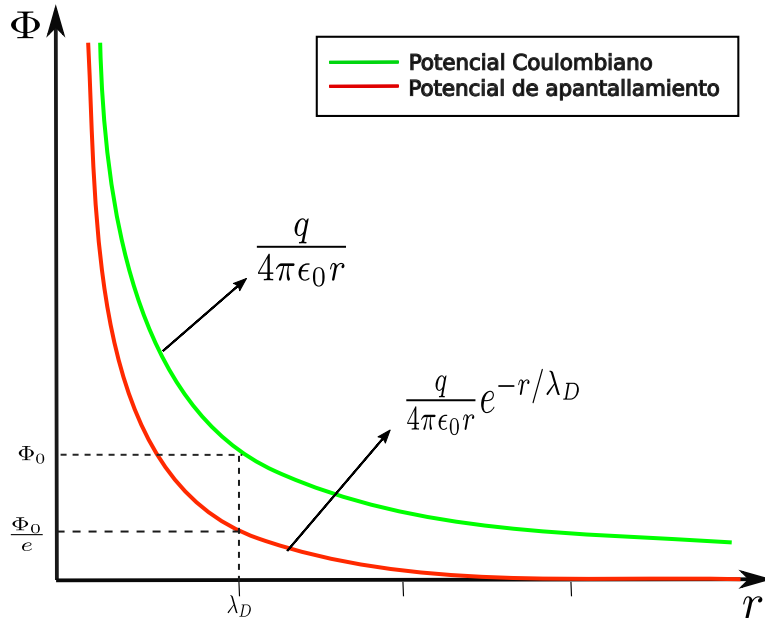
## 1.1 Parámetros del Plasma

### Longitud de Debye

La longitud de Debye hace referencia a la escala espacial del plasma en la que los campos coulombianos experimentan apantallamiento completo debido a la acumulación de carga de signo opuesto a la cercanía de una carga  $q$ , representada matemáticamente por,

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}}, \quad (1)$$

siendo  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío,  $k_B$  la constante de Boltzmann,  $T_e$  y  $n_0$  la temperatura y concentración electrónica y  $e$  la carga elemental. La Figura 2 presenta el decaimiento del potencial electrostático para una carga en el vacío y otra carga en el plasma, donde en este último decrece mucho más rápido, resaltando que si  $r \gg \lambda_D$  el plasma es considerado neutro, con el potencial aproximadamente nulo, pero si  $r \ll \lambda_D$  se viola la cuasi-neutralidad y no es prudente referirse a esta región como plasma.



**Figura 2:** Potencial electrostático asociado a una carga puntual  $q$  en el plasma (curva roja), y por una carga eléctrica idéntica  $q$  en el vacío (curva verde).

---

## Frecuencia plasmica

Si se considera un plasma inicialmente en equilibrio y este es perturbado al desplazar ligeramente una nube o grupo de electrones, se genera un campo electrostático  $\mathbf{E}$  propio de dicha redistribución de carga y esto crea una fuerza  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$  que los “empuja” de vuelta hacia su posición de equilibrio. La ganancia de energía cinética de este movimiento da como resultado una oscilación armónica con una frecuencia característica del sistema, denominada como frecuencia natural de oscilación de los electrones y está definida como

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (2)$$

donde  $n_0$  es la concentración electrónica inicial y  $m_e$  la masa del electrón [4, 9].

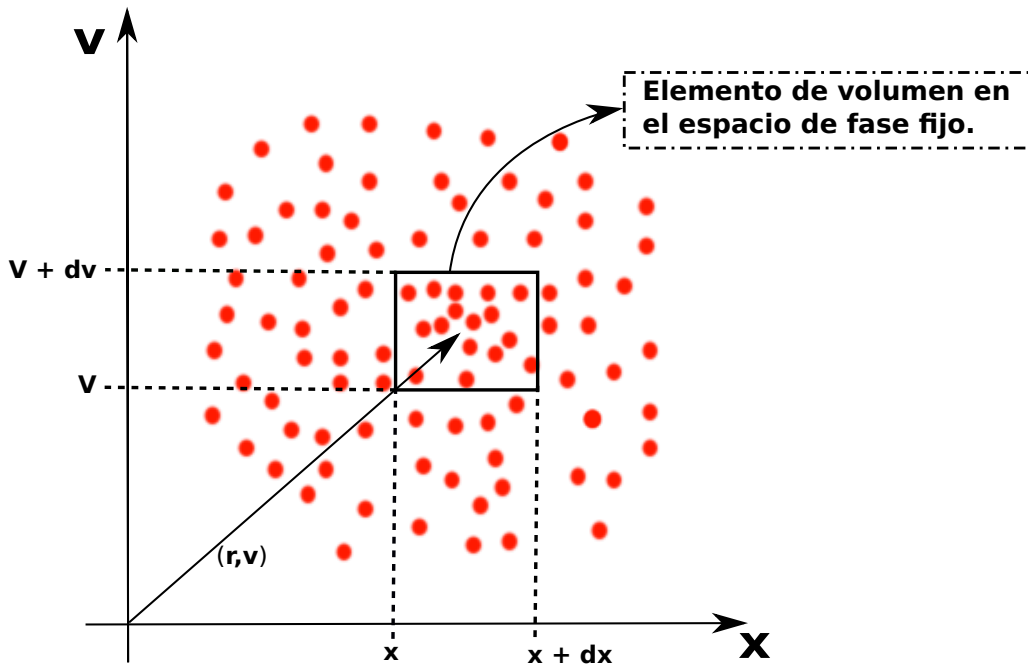
## Colisiones en el plasma

La naturaleza colectiva del plasma puede dar origen a colisiones entre partículas de la misma o diferente especie, resaltando que en estos sistemas predominan las colisiones coulombianas, las cuales generan desviaciones o cambios de dirección debido a la repulsión o atracción electrostática sin la necesidad de una colisión directa; de hecho, esta última suele ser poco probable.

En general, la dinámica de un plasma puede estar sujeta a la colisiones, por lo tanto se suelen definir parámetros asociados al fenómeno, como lo es la frecuencia de colisión,  $\nu_c$ , la cual es una medida del tiempo promedio entre colisiones, donde una partícula sufre una desviación significativa en su trayectoria. A su vez, si se conoce la velocidad promedio de las partículas se puede estimar el camino de libre medio entre colisiones, siendo esta la distancia promedio recorrida por la partícula antes de experimentar una colisión. Es de resaltar que el recorrido libre medio,  $\lambda_c$ , permite caracterizar al plasma como colisional o acolisional, así: Si el tamaño característico del plasma,  $L$ , es muy pequeño respecto a  $\lambda_c$ , se define al plasma como acolisional, garantizando que en promedio una partícula puede recorrer todo el sistema sin experimentar una colisión. Pero si por el contrario,  $\lambda_c \ll L$ , el plasma se considera altamente colisional. La relación entre  $\lambda_c$  y  $L$  determina en gran medida el comportamiento del plasma y por ende son buenos parámetros para determinar el modelo físico para describirlo, pues es común que el estudio teórico del plasma se base esencialmente en uno de dos puntos de vista. El primero el estudio teórico microscópico basado en el análisis estadístico y cinético de sus variables físicas; y, el segundo es el análisis macroscópico basado en termodinámica e hidrodinámica, el cual consiste en considerar al plasma como un fluido conductor. Es de resaltar que existen modelos intermedios con sus respectivas ventajas y desventajas. Por otra parte las colisiones suaves son definidas como un efecto acumulativo de varios eventos en los que los ángulos de desviación de la trayectoria son muy pequeños, y son más probables que las colisiones que generan grandes desviaciones a un solo evento, conocidas como colisiones fuertes; siendo esta la manifestación más clara del comportamiento colectivo de un plasma.

## 1.2 Descripción cinética del Plasma

Hacer un seguimiento y estudio detallado de cada partícula del plasma resulta un despropósito debido al gran número de partículas presentes, además de la impracticidad de los datos si es que se lograra realizar el respectivo seguimiento de cada una de ellas; de modo tal, que es conveniente realizar una descripción colectiva a este sistema físico [4,9]. Es entonces que la aproximación cinética toma lugar, la cual es una aproximación microscópica que se soporta en el estudio o seguimiento de la función de distribución en el espacio de fase seis dimensional de las partículas que conforman al plasma, (ver Figura 3). Esta función de distribución se puede entender como el número de partículas (de una especie: iones o electrones) en la región comprendida entre  $x + dx$  y  $v + dv$  en el instante  $t$ :



**Figura 3:** Partículas en el espacio de fase para definir la función de distribución 1D.

En general, la ecuación de Boltzmann rige la dinámica de la función de distribución

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}, \quad (3)$$

la cual describe el comportamiento del plasma fuera del equilibrio termodinámico, por lo que el análisis estadístico es necesario, donde el término  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , representa la función de distribución de las partículas,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  la fuerza de Lorentz que experimentan las partículas cargadas y  $\mathbf{v}$  representa la coordenada de la velocidad en el espacio de fase. El término de la derecha,  $\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}$ , es el operador colisional, asociado

---

con la variación de la función de distribución debido a las colisiones fuertes. Finalmente los operadores:  $\nabla_{\mathbf{r}}$  y  $\nabla_{\mathbf{v}}$  representan las derivadas respecto a las variables de posición y de velocidades respectivamente.

En particular cuando las colisiones no están presente en el plasma, el termino colisional se desprecia,  $(\frac{\delta f}{\delta t})_{col} = 0$ , y la ecuación de Boltzmann se transforma en la ecuación de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (4)$$

Es claro que la función de distribución evoluciona debido a la interacción de las partículas con el campo electromagnético; sin embargo, de las ecuaciones de Maxwell se sabe que la propia dinámica de las partículas afecta la evolución de los campos, tanto magnético como eléctrico. Dicho esto, la interacción del plasma con los campos es autoconsistente: los campos indican a las partículas como deben moverse y la dinámica de las partículas afecta la evolución de los campos; así que, abordar estos problemas no se centra únicamente en resolver la ecuación de Boltzman o Vlasov, si no el sistema acoplado con las ecuaciones de Maxwell.

### 1.3 Propagación de ondas electromagnéticas en un plasma

Como punto de partida se propone que una onda plana electromagnética monocromática,  $\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega_0 t - kz)}$ , se propague en un plasma frío, homogéneo y sin colisiones, con concentración electrónica  $n_o$ , donde los iones se consideran inmóviles debido a su gran inercia traslacional comprada con la masa de los electrones; por lo tanto, la dinámica del plasma se rige únicamente por la dinámica electrónica. A demás, si se ignoran los efectos relativistas, dada las bajas velocidades de los electrones respecto la velocidad de la luz, y si se suponen pequeñas perturbaciones, es posible despreciar de la descripción fluida del plasma los términos no lineales, de modo que la ecuación de movimiento de los electrones queda definida por:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (5)$$

Por su parte, es fácil identificar que la densidad de corriente está dada como  $\mathbf{J} = -en_e \mathbf{v}$ , por lo que la ecuación (5) se puede reescribir como

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}. \quad (6)$$

Tradicionalmente, la ecuación de onda se puede obtener al combinar la Ley de Faraday, ecuación (17), y la Ley de Ampere - Maxwell, ecuación (18), y al incorporar la ecuación

---

(6) se obtiene así la relación de dispersión asociada a una onda electromagnética que se propaga en un plasma frío

$$\omega_0^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2, \quad (7)$$

de donde es posible obtener el numero de onda, variable asociada a la propagación:

$$k = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2}}{c}. \quad (8)$$

Para comprender la propagación de un pulso láser en un plasma, es necesario distinguir entre dos situaciones: (i) cuando la frecuencia del plasma  $\omega_p$  es mayor que la frecuencia del láser  $\omega_0$ ; y, (ii) cuando la frecuencia del plasma  $\omega_p$  es menor que la frecuencia del láser  $\omega_0$ . El limite entre estos dos casos, justo cuando  $\omega_p = \omega_0$ , permite definir una concentración electrónica característica del sistema, denominada como concentración crítica:

$$n_c = \frac{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}{e^2}. \quad (9)$$

**Plasma de alta densidad:** En el primer caso,  $\omega_p > \omega_0$ , o que es lo mismo,  $n_e > n_c$ , el número de onda  $k$ , de la relación de dispersión, ecuación (7), es puramente imaginario, lo que corresponde a una onda evanescente, situación en la que no hay propagación de la onda electromagnética sobre el plasma, pues la concentración plásmica es muy alta para que un pulso láser pueda viajar a través de este. En esta situación, los electrones del plasma responden de forma colectiva y detienen al pulso. Esta respuesta es más rápida que la oscilación de la onda electromagnética y como resultado, el campo eléctrico oscilante del pulso es completamente compensado por el campo eléctrico propio de las oscilaciones plásmicas, así que el campo promedio es nulo. Este tipo de plasma es conocido como plasma de alta densidad, y refleja total o parcialmente los campos electromagnéticos incidentes.

**Plasma de baja densidad:** En el segundo caso,  $\omega_p < \omega_0$ , o el equivalente,  $n_e < n_c$ , el numero de onda  $k$  en la la relación de dispersión es puramente real, lo que significa que la onda electromagnética se puede propagar en el plasma. En esta situación, la respuesta colectiva de los electrones en el plasma al campo electromagnético del pulso láser no es lo suficientemente rápida como para cancelar su efecto. Este tipo de plasma se le conoce como plasma de baja densidad, transparente al campo electromagnético incidente que puede propagarse en él; sin embargo, el plasma modifica la propagación del pulso láser ya que es un medio dispersivo, pues la ecuación (7) conduce a que la velocidad de fase y de grupo difieran.

---



---

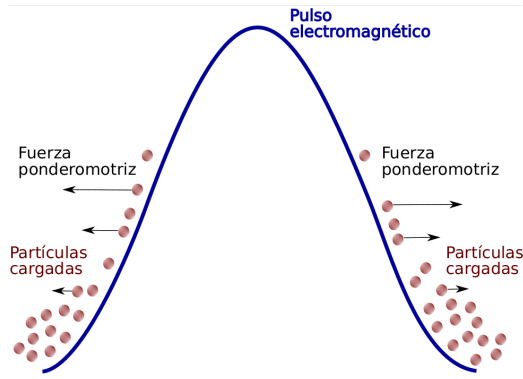
## 2. ACELERACIÓN BASADA EN PLASMA

---



---

### 2.1 Fuerza ponderomotriz



**Figura 4:** Desplazamiento de carga debido a la fuerza ponderomotriz generado por un pulso electromagnético no uniforme.

Las partículas cargadas en un campo electromagnético oscilante no homogéneo experimentan una fuerza no lineal. Esta hace que las partículas cargadas se desplacen a zonas en las que el campo electromagnético es débil ó menos intenso [19, 27]. La fuerza ponderomotriz es empleada para comprender una gran cantidad de fenómenos físicos: en particular en física del plasma para comprender el efecto de pulsos láser propagándose sobre un plasma, ya que esta puede afectar la distribución de la densidad electrónica, generando así oscilaciones plásmicas. Desde el punto de vista analítico, las ecuaciones que describen la dinámica del plasma se simplifican, donde la ecuación que describe la fuerza ponderomotriz relativista toma la forma:

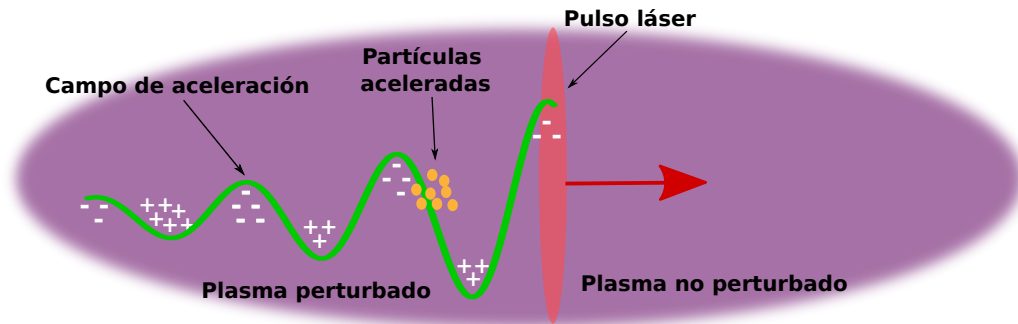
$$\mathbf{F}_{\text{pond}} = -\frac{q^2}{4\gamma m^2 \omega^2} \nabla [E^2(\mathbf{r})], \quad (10)$$

siendo,  $\gamma = (1 + v^2/c^2)^{-1/2}$  el factor de Lorentz,  $m$  y  $q$  la masa y carga de las partículas,  $E$  la amplitud del campo eléctrico y  $\omega$  la frecuencia de oscilación del campo electromagnético. Es importante resaltar que los electrones experimentan una mayor interacción que los iones debido a la gran diferencia entre sus masas; por otra parte, en el régimen de bajas velocidades,  $v \ll c$ , la ecuación (10) toma la estructura de la fuerza ponderomotriz no relativista. En la Figura 4 se puede observar el desplazamiento de las partículas cargadas debido a la fuerza ponderomotriz, las cuales se desplazan desde las zonas de mayor intensidad de campo, hacia las regiones con un campo electromagnético débil. Dicho esto, es la fuerza ponderomotriz la herramienta principal que permite comprender el origen de las ondas plásmicas generadas por pulsos láser muy intensos y de muy corta duración, cuya aplicación principal es emplear dichas ondas plásmicas como mecanismo de aceleración de partículas cargadas, tal como se verá a continuación.

---

## 2.2 Aceleración wakefield

Los aceleradores basados en plasma se caracterizan por aprovechar la onda plásmica para acelerar partículas cargadas, en principio, a altos valores de energía ya que el plasma puede soportar altos campos electrostáticos. El campo acelerador puede ser generado por pulsos láser de alta intensidad y muy corta duración e incluso empleando haces de partículas cargadas. Este esquema de aceleración es conocido como aceleración wakefield y consiste principalmente en que un agente externo (pulso láser ó haz cargado), denominado comúnmente como forzador, al incidir sobre un plasma inicialmente en equilibrio, induce oscilaciones plásmicas originadas por la separación de carga que genera a su paso, ya sea por efecto de la fuerza ponderomotriz asociada pulso láser, o por repulsión coulombiana en el caso de los haces de partículas cargadas. Debido a la gran diferencia de masa entre los iones y electrones, la dinámica iónica no se ve afectada, por lo que es válido mencionar que los iones se mantienen fijos respecto a los electrones que son altamente afectados, sufriendo altos desplazamientos a causa de su baja inercia respecto a la inercia iónica; así, los electrones previamente perturbados por el forzador al ir avanzando al lo largo del plasma, tienden a recuperar su estado de equilibrio por la atracción electrostática del fondo iónico y a la repulsión ocasionada por la gran concentración electrónica. En este proceso se genera un tren de oscilaciones plásmicas que viaja detrás y a la misma velocidad del forzador. En particular, el potencial electrostático asociado a la onda plásmica se le conoce como wake, y el campo asociado de dicho wake se denomina wakefield.



**Figura 5:** Esquema de la aceleración láser wakefield (LWFA).

En la Figura 5 se observa el tren de pozos de potencial o “wake” que viaja a velocidades típicamente relativistas, generado por un pulso láser de alta potencia que incide sobre un plasma. Este pulso induce la separación de carga y el campo eléctrico de este esquema puede acelerar una nube externa de partículas cargadas si se inyecta correctamente, de modo que es importante resaltar que las partículas que se van a acelerar deben ser inyectadas con la fase adecuada, de lo contrario dichas partículas tenderán a desacelerar o la aceleración no será la esperada. Las mismas ideas son válidas si el forzador, generador del wake, es un haz de partículas cargadas.

---

El interés principal de la aceleración basada en plasma, se debe a que el plasma puede soportar altos campos eléctricos, determinados por:

$$E = \frac{m_e c}{e} \omega_p, \quad (11)$$

donde  $m_e$  y  $e$  representan la masa y carga del electrón respectivamente,  $c$  la velocidad de la luz y  $\omega_p$  la frecuencia plasmica electrónica, definida como

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}, \quad (12)$$

siendo  $n_e$  la concentración electrónica inicial y  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica en el vacío. En este orden de ideas, si se tiene un plasma con una concentración electrónica típica, con  $n_e = 10^{18}/\text{cm}^3$ , el campo del wake o wakefield disponible para la aceleración es de aproximadamente  $E \simeq 100[\text{GV}/\text{m}]$ , que respecto a los aceleradores de radio frecuencia convencionales es tres ordenes de magnitud mayor, siendo esta una de las principales ventajas de la aceleración basada en plasma, ya que esto implicaría gradientes de aceleración mucho más altos, permitiendo acelerar partículas cargadas en longitudes mucho más cortas. Por otra parte, se ha logrado identificar que para acelerar haces de electrones cuasi-monoenergéticos, la longitud del pulso láser debe ser del mismo orden de magnitud que la longitud de la onda plásmica:  $L_{\text{pulso}} = \lambda_p$ .

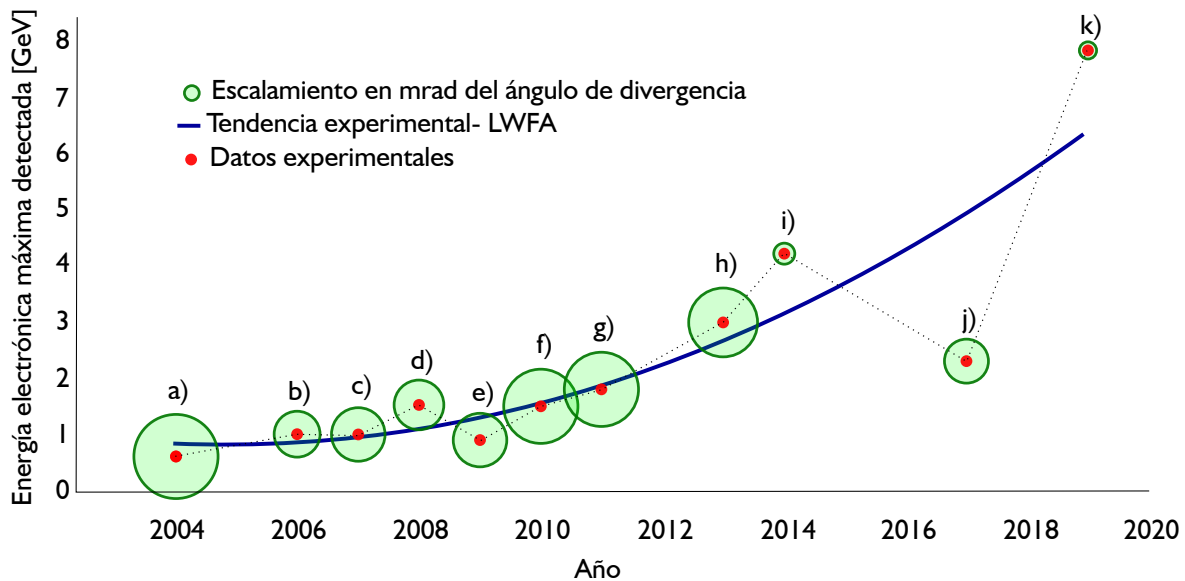
Es de resaltar que existen tres diferentes esquemas para generar el wakefield empleando pulsos láser: *i)* inyectando un pulso láser muy intenso y de corta duración, tal como se ha mencionado previamente. Este mecanismo se denomina Laser WakeField Acceleration o simplemente LWFA. *ii)* El wake también se puede excitar inyectando simultáneamente dos pulsos láser de diferentes frecuencias y muy intensos pero de mayor duración respecto al esquema anterior; cuya superposición debe formar un batido de frecuencia  $\omega_1 - \omega_2$  igual a la frecuencia plásmica, y así, excitar resonantemente el wake. El anterior mecanismo se conoce como Laser Beat-Wave Acceleration [20–22]. Por último, *iii)* si se hace incidir sobre un plasma muy denso un pulso láser intenso de larga duración, el plasma es excitado resonantemente por una inestabilidad propia de la interacción del plasma con pulsos láser de dichas características, el cual se automodula a la frecuencia plásmica; siendo este mecanismo denominado Self-Modulate Laser WakeField Acceleration, SM-LWFA [25, 26]. Como ya se presentó, el efecto de carga espacial de un haz de partículas cargadas incidiendo sobre un plasma también puede generar la onda plasmica. Este esquema es denominado como Plasma WakeField Acceleration [23, 24].

Históricamente, en 1979 Tajima y Dawson propusieron el mecanismo de aceleración en el que un pulso electromagnético de alta intensidad y corta duración incide sobre un plasma, la fuerza ponderomotriz es la causante de la separación de carga, creando a su paso el wake que viaja detrás del pulso con una velocidad de fase igual a la velocidad de grupo de la onda electromagnética  $v_p = v_g$  [22], siendo esta última definida como:

$$v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad (13)$$

donde la primera condición a satisfacer es que la frecuencia del pulso,  $\omega$ , debe ser mayor a la frecuencia plasmica,  $\omega_p$ , para que exista propagación y así excitar el wake, siendo  $c$  la velocidad de la luz. A pesar de que esta idea se propuso hace ya más de cuarenta años, la implementación experimental empezó desde hace poco, esto debido a las limitaciones tecnológicas de la época, que no permitían generar un pulso láser de corta duración y muy intenso.

Desde que se desarrolló e implemento la tecnología chirped pulse amplification-(CPA), que permite generar pulsos láser intensos y de corta duración [28, 29], el mecanismo LWFA es el de mayor implementación experimental respecto a los otros esquemas porque propensa la baja dispersión energética de las partículas aceleradas bajo el régimen *blowout* que se obtiene cuando la longitud del pulso electromagnético,  $L$ , coincide con la longitud de la onda plasmica,  $\lambda_p$  [30–37]. A pesar de que este mecanismo acelera en principio las partículas cargadas a altas energías en distancias muy cortas, la aceleración se ve afectada drásticamente por el efecto de la divergencia del pulso al propagarse por el plasma al ser un medio dispersivo, tal como se presentó en el capítulo anterior, limitando así la distancia efectiva de aceleración. Los principales y recientes éxitos de este mecanismo de aceleración se deben al mejoramiento de las técnicas de guiado del pulso láser, permitiendo alcanzar mayores valores de energía. Esta idea se plasma en la siguiente gráfica que recopila la información de los principales experimentos realizados en los últimos años y su dependencia con la divergencia del pulso [2].



**Figura 6:** Ganancia energética del mecanismos LWFA a lo largo de los años. Tomada de [2].

---

---

## 3. MODELO DE SIMULACIÓN

---

---

### 3.1 Modelo físico

El estudio de los procesos que ocurren en el plasma suelen ser abordados por modelos que se ajustan al nivel de complejidad y de las escalas del fenómeno que se desea analizar. Se mencionó en el capítulo 1 que la descripción cinética del plasma es la más adecuada cuando se desea estudiar la evolución de las funciones de distribución de las diferentes especies en el plasma,  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , en el espacio de fase seis dimensional  $\mu$ , la cual contiene toda la información física del sistema a un nivel microscópico. Este estudio se basa en la solución de la ecuación de Vlasov, que bajo los efectos relativistas adopta la siguiente estructura,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \frac{f_\alpha}{\gamma} = 0, \quad (14)$$

siendo  $\gamma$  el factor relativista de Lorentz, donde los campos eléctrico y magnético auto-consistentes  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  se rigen por las ecuaciones de Maxwell debido a la superposición de los campos electromagnéticos externos y el campo generado por el propio plasma [38],

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (17)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (18)$$

---

Ahora bien, debido a la complejidad de la aceleración wakefield por la interacción de pulsos electromagnéticos con el plasma, el tratamiento teórico se soporta fundamentalmente de las simulaciones cinéticas del plasma, pues los tratamientos analíticos, aunque muy valiosos, suelen estar planteados bajo una gran cantidad de aproximaciones que simplifican el tratamiento matemático, perdiendo varios detalles en su desarrollo. Además, una buena descripción teórica debe considerar efectos autoconsistentes del sistema, pues así como el pulso láser perturba la dinámica de las partículas que conforman el plasma, la dinámica de las mismas afecta la evolución del pulso, teniendo así, una continua transferencia de energía y momentum en ambos sentidos.

Por las razones anteriores, en este proyecto se realizó la simulación autoconsistente tanto de la dinámica de un plasma perturbado por un pulso láser, como de la evolución de dicho pulso láser al propagarse e interactuar con el plasma. Estas simulaciones se realizaron bajo la aproximación unidimensional como primer acercamiento al estudio de este fenómeno, donde se consideran únicamente variaciones a lo largo de la dirección de propagación del pulso láser y así, caracterizar la formación del *wake*. Es de recalcar que esta aproximación es válida para pulsos láser, cuyo radio de la sección transversal, o radio del *spot*, son grandes respecto a su longitud de onda, de modo que los efectos transversales se puedan despreciar. En este orden de ideas, el sistema de ecuaciones Vlasov-Maxwell a resolver, (14)-(18), se reduce a:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_y = \frac{\partial}{\partial t} B_x, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_y = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_x + \mu_0 J_x, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_x = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y + \mu_0 J_y. \quad (23)$$

Como se puede apreciar en el sistema anterior, la Ley de Gauss para el campo eléctrico y magnético, ecuaciones (15) y (16), no hacen parte del set de ecuaciones a resolver. Esto ya que no es necesario si se garantiza que la ecuación de continuidad, ecuación (24), se satisface durante toda la simulación; así que sólo se requiere resolver las dos últimas ecuaciones de Maxwell junto con la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (24)$$

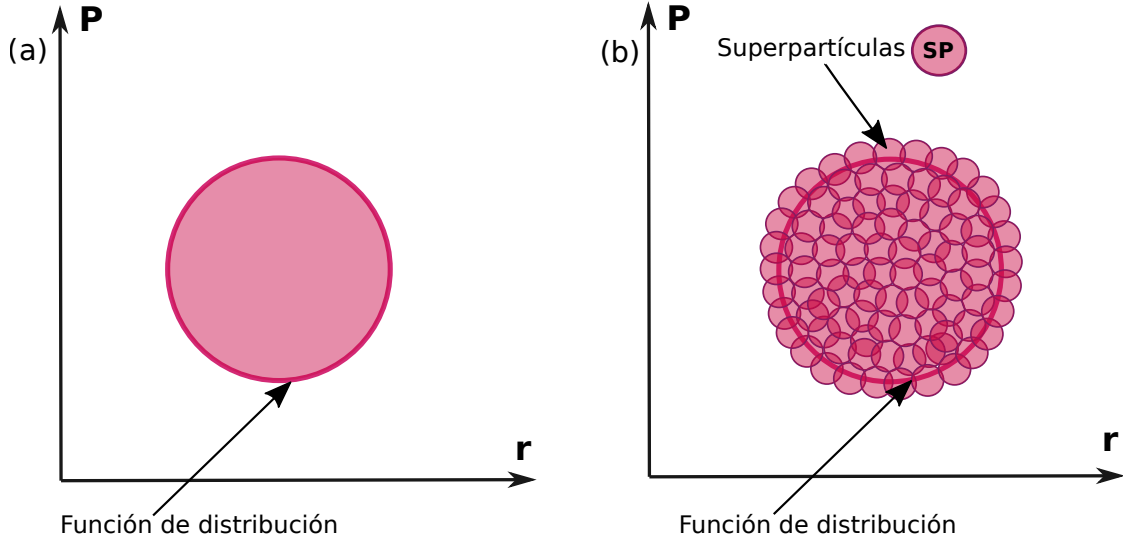
siendo  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente, definida como

$$\mathbf{J}(z, t) = \sum q \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}. \quad (25)$$

A continuación, se presentan las ideas fundamentales de la técnica *Particle-In-Cell* que permite la solución de la ecuación de Vlasov y el algoritmo de Yee para la resolución de las ecuaciones de Maxwell.

## 3.2 Algoritmo Particle-In-Cell

La ecuación de Vlasov que se acopla a las ecuaciones de Maxwell se puede resolver numéricamente mediante la técnica *Particle-In-Cell* (PIC), la cual es ampliamente empleada para estudiar la dinámica del plasma a un nivel cinético, donde se asume que la función de distribución electrónica esta dada por la superposición de pequeños elementos cercanos entre sí en el espacio de fase, tal como se presenta en la Figura 7.



**Figura 7:** El método Particle-In-Cell: (a) la función continua de distribución en el espacio de fase se representa mediante (b) la superposición de pequeñas nubes de partículas cargadas denominadas superpartículas.

La formulación matemática del método particle-in-cell parte al suponer o aproximar que la función de distribución de cada especie esta dada por la superposición de pequeños elementos finitos representados cada uno de ellos por pequeñas funciones de distribución, denominadas como superpartículas,

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{v}, t) = \sum_p f_p(\mathbf{z}, \mathbf{v}, t), \quad (26)$$

donde cada superpartícula contiene un gran número  $N_p$  de partículas físicas que se encuentran relativamente cerca unas a otras en el espacio de fase [38]. La función de

distribución  $f_p$  especifica el estado de las  $N_p$  partículas que conforman cada superpartícula, esto, a través de dos funciones o factores de forma: uno espacial,  $S_z$  y otro en velocidades  $S_v$ . Generalmente, se escoge el factor de forma  $S_v$  con la función delta de dirac, lo cual implica que las  $N_p$  partículas en cada SP tiene la misma velocidad  $\mathbf{v}_p$ ,

$$f_p(z, \mathbf{v}, t) = N_p S_z(z - z_p) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p). \quad (27)$$

Por su parte, el factor de forma espacial  $S_z$ , usualmente se define a través de las funciones *b-spline*, donde  $z_p$  representa la posición de la superpartícula,  $\Delta z$  representa el paso espacial de la malla a lo largo del eje de propagación del pulso, eje  $z$ . Con el ánimo de reducir el coste computacional y en aras de una implementación sencilla y eficiente, en este trabajo se seleccionó el *spline* de orden cero

$$S_z(z - z_p) = b_0 \left( \frac{z - z_p}{\Delta z} \right). \quad (28)$$

Para que las superpartículas respeten la ecuación de Vlasov, se debe calcular sobre esta, el momento de orden cero y los primeros momentos en posición y velocidad de la función  $f_p$ , de los cuales se puede obtener que la dinámica de cada superpartícula se rige de forma general por la ecuación de Newton-Lorentz relativista,

$$\frac{dz_p}{dt} = \mathbf{v}_p, \quad \frac{d(\gamma m_s \mathbf{v}_p)}{dt} = q_s (\mathbf{E}_p + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B}_p), \quad (29)$$

donde la carga y la masa para cada superpartícula se define como:  $q_s = N_p q$  y  $m_s = N_p m$ , y donde el número de partículas físicas  $N_p$  en cada SP no puede variar a lo largo de la simulación. La ecuación de movimiento obtenida anteriormente, tiene la misma estructura que la ecuación de Newton-Lorentz relativista, la cual, para este trabajo se propone resolver numéricamente con el algoritmo de Boris-Bunemann, que se describe en la siguiente sección [39]. Es de resaltar, que los campos eléctrico y magnético que experimenta cada SP, se deben calcular como un promedio a partir de valores de campo calculados en los puntos de malla,

$$\mathbf{E}_p = \sum_k \mathbf{E}_k W(z_k - z_p) \Delta z, \quad y, \quad \mathbf{B}_p = \sum_k \mathbf{B}_k W(z_k - z_p) \Delta z, \quad (30)$$

siendo  $k$  el índice de malla y  $W$  la función interpolación que depende del factor de forma  $S_z$  seleccionado. Para el caso particular seleccionado, ecuación (28), la función de interpolación  $W$  conduce a un esquema de interpolación lineal.

Resumiendo, el algoritmo Particle-in-Cell electromagnético sigue la siguiente secuencia lógica: primero, con las posiciones y velocidades de las superpartículas se calculan las

densidades de corriente en los puntos de malla, siguiendo de preferencia un esquema conservativo, esto para resolver únicamente las dos últimas ecuaciones de Maxwell [40]. Una vez se conocen las densidades de corriente se procede a calcular los campos en los puntos de malla al resolver las ecuaciones de Maxwell [41], y con estos, interpolar el campo en la posición de las superpartículas para finalmente actualizar las nuevas posiciones y velocidades; y así, empezar el ciclo una vez más.

### 3.3 Algoritmo de Boris-Bunnemann

El algoritmo de Boris-Bunnemann permite resolver la ecuación de Newton-Lorentz a través del esquema leap-frog de segundo orden, logrando así actualizar posiciones y velocidades en un nuevo instante, empleando los datos del paso anterior,

$$\frac{\mathbf{p}^{n+1/2} - \mathbf{p}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left( \mathbf{E}^n + \frac{\mathbf{p}^{n+1/2} + \mathbf{p}^{n-1/2}}{2\gamma^n} \times \mathbf{B}^n \right), \quad (31)$$

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\Delta t}. \quad (32)$$

Despejar las componentes del vector momento  $\mathbf{p}$  de la ecuación (31) en  $n + 1/2$  resulta una tarea compleja ya que este se encuentra en los dos lados de la igualdad y también porque el factor relativista lo contiene. El algoritmo propuesto por Boris y Bunnemann consta de siete pasos fundamentales y es una alternativa que permite dar solución a este problema:

I. Calcular  $\mathbf{p}^-$

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{p}^{n-1/2} + \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m} \frac{1}{2}, \quad (33)$$

II. Calcular el vector  $\mathbf{t}$

$$\mathbf{t} = \frac{q\mathbf{B}^n \Delta t}{\gamma^n m} \frac{1}{2}, \quad (34)$$

III. Calcular  $\mathbf{p}'$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}^- + \mathbf{p}^- \times \mathbf{t}, \quad (35)$$

IV. Calcular  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} = \frac{2\mathbf{t}}{1 + t^2}, \quad (36)$$

V. Calcular  $\mathbf{p}^+$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{p}^- + \mathbf{p}' \times \mathbf{S}, \quad (37)$$

---

VI. Calcular  $\mathbf{p}^{n+1/2}$

$$\mathbf{p}^{n+1/2} = \mathbf{p}^+ + \frac{q\mathbf{E}^n \Delta t}{m} \frac{1}{2}, \quad (38)$$

para finalmente calcular las nuevas coordenadas de las partículas,

VII. Nuevas posiciones  $\mathbf{r}^{n+1/2}$

$$\mathbf{r}^{n+1/2} = \mathbf{r}^n + \frac{\mathbf{p}^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} \Delta t. \quad (39)$$

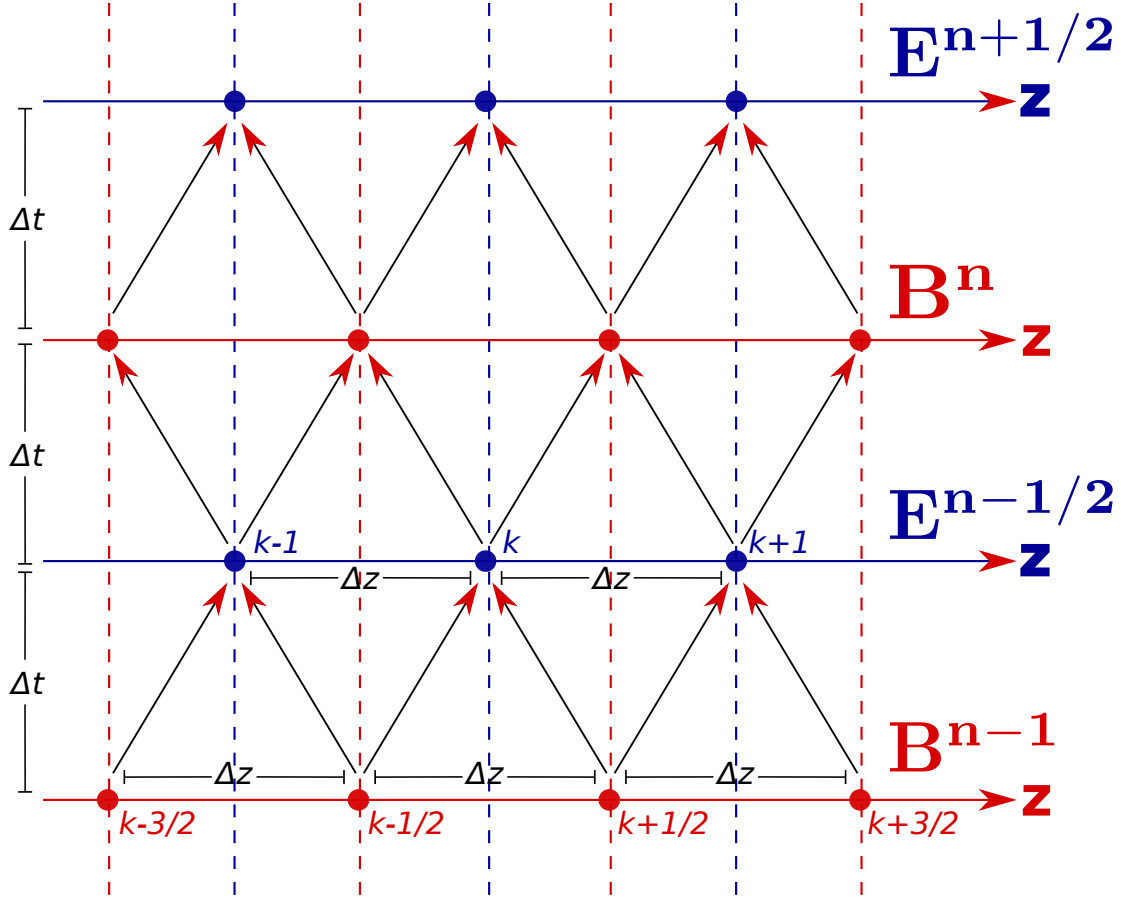
La precisión y estabilidad del algoritmo de Boris-Bunemann ha sido estudiada en trabajos recientes, mostrando que desde un punto de vista matemático, el error es limitado y no aumenta con el tiempo [42–44]. Las razones de implementarlo en este trabajo se sustentan en su precisión a largo plazo, es decir, es un algoritmo muy estable, simple de implementar y eficiente al calcular.

### 3.4 Esquema de Yee

Las ecuaciones de Maxwell 1D, que describen el comportamiento de los campos eléctrico y magnético en un medio homogéneo e isótropo, se pueden resolver mediante el esquema de Yee, un esquema FDTD, por sus siglas en inglés: *Finite-Difference-Time-Domain*, que discretiza las ecuaciones en el espacio y el tiempo. Este esquema se basa en la construcción de dos mallas espaciales desfasadas  $\Delta z/2$ : una para el campo eléctrico y otra para el campo magnético. Adicionalmente, los campos están desfasados medio paso temporal,  $\Delta t/2$ , así como su propio nombre lo indica, para resolver las ecuaciones de Maxwell en 1D, el esquema de Yee utiliza un método de diferencias finitas centradas de segundo orden, el cual es un método de aproximación numérica que permite resolver las ecuaciones diferenciales con precisión y eficiencia [39, 41, 45–47]. En particular, este algoritmo es ampliamente utilizado para resolver las ecuaciones de Maxwell, pues se utiliza en una amplia gama de aplicaciones, como la simulación de ondas electromagnéticas, la propagación de la luz y el diseño de dispositivos electrónicos [48, 49].

**Discretización espacial:** La malla espacial que discretiza los campos en este método es conocida como la red de Yee. Esta malla rectangular, consta de dos mallas espacialmente escalonadas (es decir, desplazadas en media celda) a lo largo del eje  $z$ .

**Discretización temporal:** Las ecuaciones de Maxwell también están discretizadas en el tiempo utilizando un esquema de diferencias finitas centras, donde el campo electromagnético  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  están desfasados en medio paso temporal. Usualmente, el campo eléctrico avanza temporalmente en pasos semienteros  $\mathbf{E}^{n+1/2}$  y el campo magnético en pasos de tiempo enteros  $\mathbf{B}^{n+1}$ .



**Figura 8:** Representación esquemática del algoritmo de Yee: sobre el eje horizontal se representa la discretización espacial y verticalmente la evolución temporal. Cada campo tiene su propia malla pero en el cálculo se acoplan.

A continuación, se muestran discretizadas espacial y temporalmente las ecuaciones de Maxwell. La Figura 8 ayuda a visualizar las ideas planteadas de este esquema.

para el campo eléctrico:

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ B_y^n \left( k + \frac{1}{2} \right) - B_y^n \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] - \Delta t J_x^n(k), \quad (40)$$

$$E_y^{n+1/2}(k) = E_y^{n-1/2}(k) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ B_x^n \left( k + \frac{1}{2} \right) - B_x^n \left( k - \frac{1}{2} \right) \right] - \Delta t J_y^n(k), \quad (41)$$

$$E_z^{n+1/2}(k) = E_z^{n-1/2}(k) - \Delta t J_z^n(k), \quad (42)$$

---

para el campo magnético:

$$B_x^{n+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) = B_x^n \left( k + \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} [E_y^{n+1/2}(k+1) - E_y^{n+1/2}(k)], \quad (43)$$

$$B_y^{n+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) = B_y^n \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta z} [E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)]. \quad (44)$$

La evolución temporal en FDTD del algoritmo de Yee se rige por el esquema de discretización *Leap-Frog* (salto de rana), donde el campo eléctrico y magnético están escalonados en el tiempo, tal como se presentó. Esta combinación de escalonamientos espacio temporal se muestra como una poderosa herramienta en la electrodinámica numérica, sobre todo por la facilidad en su implementación y velocidad de cómputo, además de tener una gran estabilidad, teniendo un segundo orden de precisión del método. Es importante mencionar que el paso temporal debe estar acoplado con el paso de malla espacial, es por esto que aparece el conocido criterio de Courant.

### 3.5 Criterio CFL: Courant-Friedrichs-Levy

La técnica FDTD para la descomposición del dominio del tiempo está sujeta a la conocida condición CFL, la cual afirma que la onda viajera, el pulso en nuestro estudio, no puede viajar más de una celda por cada paso temporal. Por lo tanto, una vez que se ha determinado el tamaño de la malla espacial  $\Delta z$ , la condición CFL impone una restricción a  $\Delta t$  [47, 50–52]. Para el caso unidimensional, la condición se puede expresar como

$$\Delta t < \frac{\Delta z}{c} \quad (45)$$

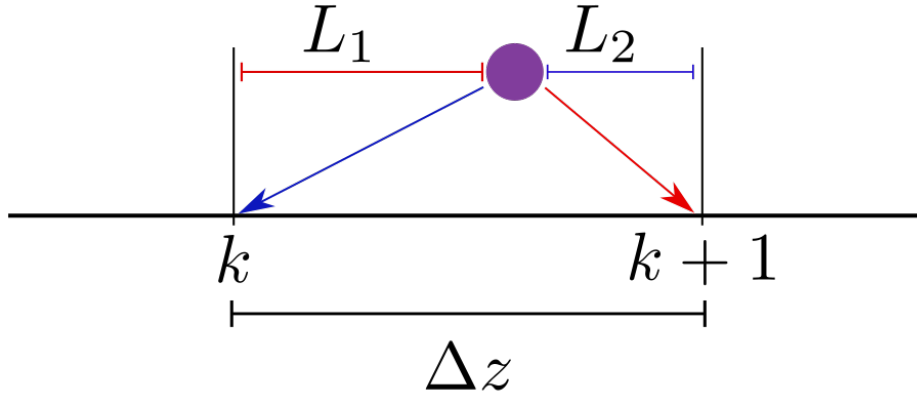
### 3.6 Deposición de carga y corriente

Es de recordar que para evitar resolver las dos primeras ecuaciones, de Maxwell en estas simulaciones se debe garantizar que la deposición de carga y corriente satisfagan la ecuación de continuidad de la carga eléctrica [16, 40, 53]. Esta deposición se realiza sobre cada punto de malla para que con estos datos, se proceda a emplear el algoritmo de Yee y calcular el campo electromagnético.

Como primer paso, se puede demostrar que la deposición de carga en los puntos de malla depende del factor de forma  $S_z$  empleado, y dado que se definió con el b-spline

de orden cero, este conduce a una asignación o redistribución lineal de la carga de cada superpartícula a los dos puntos de malla sobre la respectiva celda en la que esta se encuentre, tal como se presenta en la ecuación (46) y se esquematiza en la Figura 9.

$$\rho(k) = \frac{qNp}{\Delta z} \frac{(z_{k+1} - z_p)}{\Delta z}, \quad \rho(k+1) = \frac{qNp}{\Delta z} \frac{(z_p - z_k)}{\Delta z}. \quad (46)$$



**Figura 9:** Representación esquemática de la deposición de carga en los puntos de malla.

Por otra parte, la asignación de la densidad de corriente en los puntos de malla debe satisfacer la ecuación de continuidad, esto para omitir el cálculo de las dos primeras ecuaciones de Maxwell; por lo tanto, el punto de partida es la ecuación (24) en aproximación unidimensional,

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (47)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga y  $J_z$  es la componente  $z$  de la densidad de corriente. Si en  $t = 0$  se satisface la Ley de Gauss tanto para  $\mathbf{E}$  como  $\mathbf{B}$ , y a lo largo de la simulación se garantiza la ecuación de continuidad, el método tradicional de evolución de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  con el algoritmo de Yee en la simulación PIC sera valido. Entonces de la ecuación (47) en un esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden se tiene que

$$J_z^n(k) = \frac{\Delta z}{\Delta t} \left( \rho_{(k+1/2)}^{n+1/2} - \rho_{(k+1/2)}^{n-1/2} \right) - J_z^n(k+1), \quad (48)$$

indicando que para calcular a  $J_z$  en el punto  $k$  de la malla espacial, se requiere de  $J_z$  en un paso adelante,  $k+1$ , indicando que la integración de esta ecuación avanza de adelante hacia atrás. Este sentido de integración es implementado ya que a la derecha del pulso, el plasma está en equilibrio, y por ende allí  $J_z = 0$ , valor que es empleado como condición inicial. Las componentes  $J_x$  y  $J_y$  al no aportar en la ecuación de continuidad, no requieren de un tratamiento especial para satisfacer dicha ecuación. De este modo, la asignación de corriente para  $J_x$  y  $J_y$  se realiza de forma similar como se asigna la carga según la ecuación (46).

### 3.7 Ciclo computacional Particle in Cell

En las secciones anteriores se presentó las ideas y características principales asociadas con cada una de las diferentes técnicas numéricas que se emplearon para la construcción del código desarrollado. Es prudente en este punto presentar el algoritmo final sobre el que se sustenta la simulación autoconsistente del plasma, el cual consta de 4 pasos fundamentales y se pueden apreciar en la Figura 10:

- Calcular la densidad de corriente en cada punto de la malla a partir de las las posiciones y velocidades de las superpartículas, garantizando la conservación de la carga.
- Calcular los campos eléctrico y magnético autoconsistente en los puntos de malla implementando el algoritmo de Yee.
- Calcular los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  promedio sobre las superpartículas, a partir de los campos en los puntos de malla, empleando el esquema de interpolación asociado al factor de forma espacial  $S_z$  seleccionado.
- Calcular las nuevas posiciones y velocidades de las superpartículas a través de la integración de la ecuación de movimiento utilizando el método de Boris-Bunnemann.

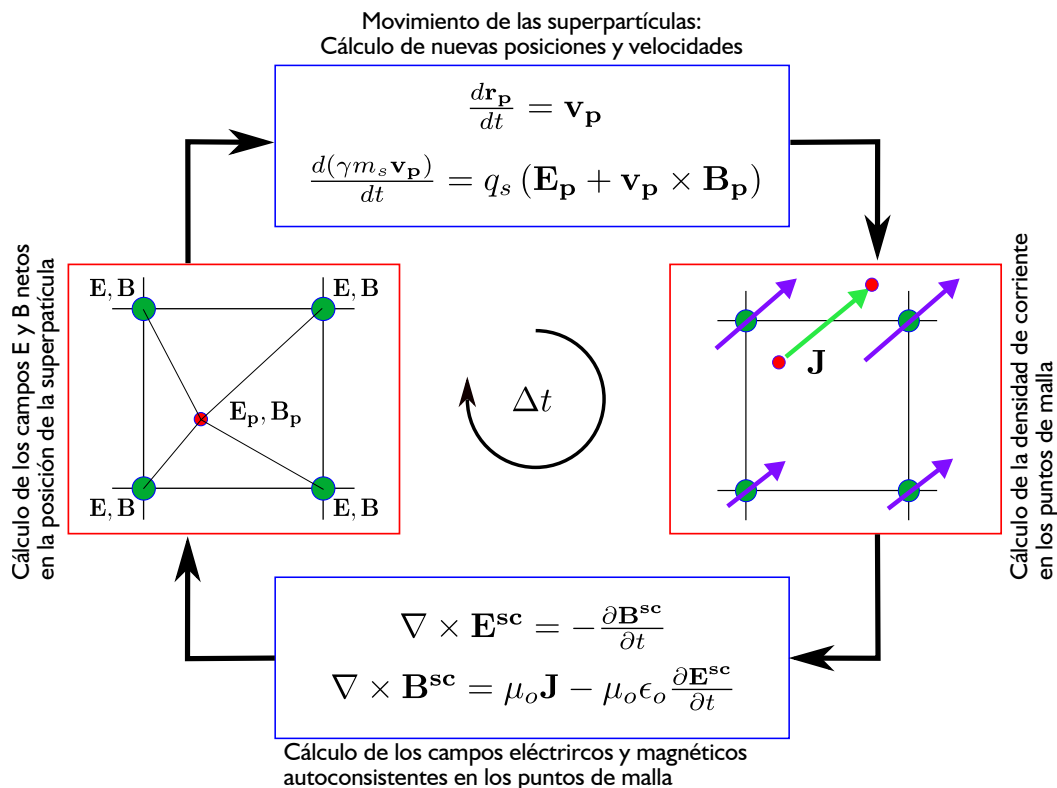


Figura 10: Ciclo computacional del método Particle-In-Cell electromagnético.

---

## 3.8 Esquema de normalización

El desarrollo de simulaciones computacionales requiere de la implementación de un esquema de normalización y adimensionalización de las cantidades físicas del sistema, ya que usualmente, las ecuaciones que describen al sistema bajo estudio, involucran operaciones entre cantidades con diferentes ordenes de magnitud. Esto puede inducir a errores en los cálculos, generalmente por redondeo; así que, normalizar y adimensionalizar es un paso fundamental en cualquier trabajo numérico, y su implementación permite realizar cálculos más precisos y eficientes.

La idea fundamental consiste en redefinir todas las variables físicas como el producto entre la cantidad normalizada y el parámetro de normalización, el cual representa o se asocia con un valor característico del sistema. El siguiente paso, es introducir dichas redefiniciones en el sistema de ecuaciones a simular, teniendo en cuenta que las derivadas espaciales se escalan con  $1/L_o^n$  y las temporales con  $1/T_o^n$ , siendo  $T_o$  y  $L_o$  el tiempo y longitud de normalización, y  $n$  el orden de la derivada. Finalmente, los coeficientes constantes que resultan en cada término de cada ecuación se deben igualar con el fin de que se cancelen mutuamente, y de este modo obtener las respectivas relaciones entre los parámetros de normalización. Al aplicar estas nociones al sistema de ecuaciones propias de este trabajo, se obtiene las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} L_o &= cT_o, & B_o &= \frac{m_e}{eT_o}, & E_o &= cB_o, \\ P_o &= m_e c, & n_o &= \frac{E_o \epsilon_0}{L_o e}, & J_o &= en_o c. \end{aligned} \tag{49}$$

De las anteriores relaciones se puede evidenciar que si se escoge un parámetro característico del sistema, los demás parámetros quedan completamente definidos a través de este. Usualmente en estas simulaciones, se suele asignar a  $T_o$  o  $L_o$  con valores típicos del plasma o del pulso, y las cantidades de normalización representan cantidades propias ya sea del pulso o del plasma. En este trabajo se tomó la frecuencia plásmica  $\omega_p$  para definir el tiempo de normalización  $T_o = 1/\omega_p$  y de este modo todos los tiempo y longitudes quedan representadas como un factor del periodo y de la longitud de la onda plásmica o wake respectivamente.

---

---

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

---

---

Las simulaciones computacionales son una gran herramienta que permiten explorar la física en diversos escenarios, ya sea para ir pasos adelante de la experimentación por limitaciones tecnológicas y prácticas, o simplemente para predecir resultados e identificar los parámetros óptimos antes de ejecutar el experimento. Es importante señalar que para tener confianza en los resultados que arrojan dichas simulaciones, los códigos deben ser validados y así determinar el alcance de la simulación o posibles restricciones asociadas a las limitaciones impuestas por el modelo físico o la misma técnica numérica empleada.

En este trabajo, el código desarrollado consta de dos subrutinas fundamentales: La primera que resuelve las ecuaciones de Maxwell en aproximación unidimensional, y la segunda que determina la dinámica de partículas cargadas afectadas por campos electromagnéticos, para posteriormente acoplarlas y así poder determinar cómo los campos afectan la dinámica de las SP's, y a su vez, cómo la dinámica de las SP's afecta la evolución de los campos electromagnéticos. En este orden de ideas, a continuación se presentará la validación individual de cada una de las subrutinas desarrolladas y posteriormente el acople de las mismas.

### 4.1 Propagación del pulso electromagnético

El algoritmo de Yee presentado en el capítulo anterior, es la herramienta empleada para discretizar y resolver las ecuaciones de Maxwell, siendo esta la subrutina que se emplea para la simulación de la propagación del pulso láser a través del plasma y la respectiva excitación del wakefield. Para validar la subrutina desarrollada, se propone emplear los siguientes precedentes teóricos: En el vacío, la relación de dispersión para una onda electromagnética, está definida como:

$$\omega = ck, \tag{50}$$

lo cual permite deducir que los pulsos electromagnéticos no se dispersan, ya que la velocidad de fase y de grupo son iguales; así que, en el vacío ni la amplitud ni la forma del pulso deben cambiar.

---

Desde un punto de vista computacional, la característica principal del esquema numérico para el desarrollo de esta subrutina es la correlación entre el paso temporal  $\Delta t$  y el paso de malla espacial  $\Delta z$ , la cual está bien definida por el criterio de Courant que se presentó en el capítulo anterior. En este trabajo no se indagará sobre este factor ya que ha sido ampliamente discutido por diversos autores; simplemente se implementó el cumplimiento de esta condición en todas las simulaciones presentadas al seleccionar siempre un factor de Courant o constante  $CFL = 1/2$ . Es así que en esta sección se presenta únicamente el efecto del tamaño del paso espacial  $\Delta z$ , en la propagación del pulso láser, el cual suele estar definido a través de la longitud de simulación  $Lz$  y el número de puntos  $n_{pz}$  empleado para su discretización,

$$\Delta z = \frac{Lz}{n_{pz} - 1}, \quad (51)$$

indicando que para una longitud de simulación fija, el tamaño del paso espacial depende directamente de la cantidad de puntos de discretización. Sin embargo, el código desarrollado no pide como parámetro de entrada el número de puntos  $n_{pz}$ , en su lugar solicita la cantidad de puntos  $n_{pg}$  que se emplearán para reconstruir una longitud de onda de dicho pulso. Esto en principio es más adecuado ya que se puede tener mayor control y noción de la precisión espacial que se empleará en la simulación. De este modo,

$$\Delta z = \frac{\lambda_{pulso}}{n_{pg} - 1}, \quad (52)$$

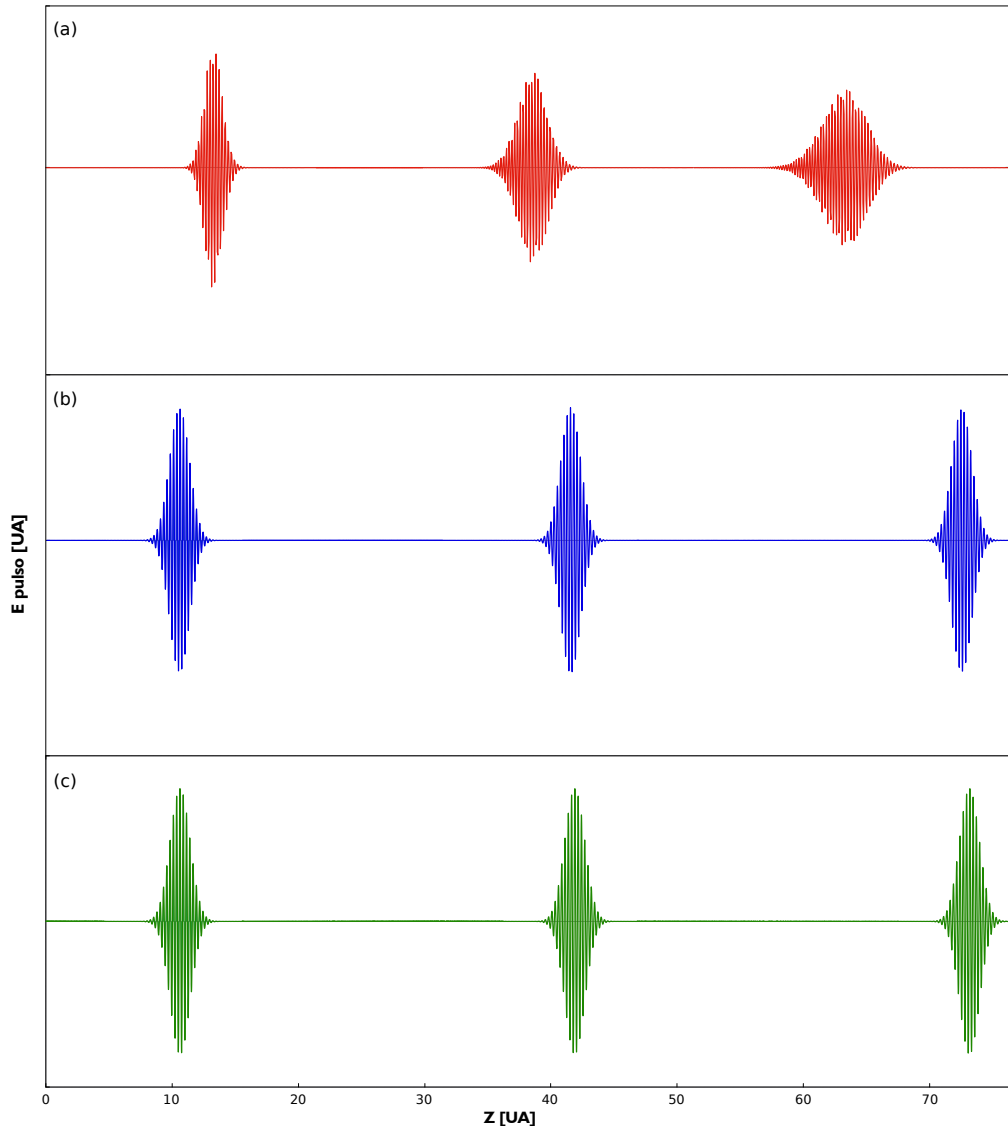
y la cantidad de puntos  $n_{pz}$  se obtiene directamente de la ecuación (51). En estas simulaciones, la excitación del pulso gaussiano se realiza al indicarle al primer punto de la malla espacial, que el campo eléctrico evolucionará según la función,

$$E_x|_{z=0} = E_o \sin(\omega t) \exp[-(t - t_o)^2/2\sigma^2]. \quad (53)$$

En la Figura 11.a se puede evidenciar la propagación del pulso electromagnético al emplear una discretización espacial con  $n_{pg} = 5$ . En este escenario se puede identificar que las propiedades o características del pulso generado cambian conforme el pulso avanza. Como se mencionó, esto no es lo esperado por la teoría, por lo que la evolución observada no es física, se debe a un efecto puramente numérico; indicando seguramente que cinco puntos no son suficientes para la descripción correcta del fenómeno.

Diversas simulaciones se ejecutaron con diferentes valores de  $n_{pg}$ , logrando identificar que para  $n_{pg} > 20$  puntos, la propagación del pulso es la esperada, donde los efectos de dispersión registrados por causas numéricas se reducen significativamente y son poco apreciables. Ahora bien, es de resaltar que cuantos más puntos se empleen, mayor precisión se espera, ya que el esquema de Yee es de segundo orden, entonces, si  $\Delta z \sim 0,01$ , el error esperado debería estar en el orden de  $\sim 10^{-4}$ ; pero emplear demasiados puntos de malla pensando en lograr una gran precisión en los resultados de simulación puede inducir a otro tipo de fenómeno numérico no deseado reportado por diversos autores, el cual se denomina calentamiento numérico [54, 55]. En este orden de ideas, es prudente

seleccionar un número adecuado de puntos de malla, que permitan recrear muy bien los resultados y comportamientos esperados, y no inducir a las denominadas inestabilidades numéricas; a demás, emplear demasiados puntos de malla injustificadamente, implica sobrecargar la simulación y elevar el costo computacional.



**Figura 11:** Efecto de la variación del parámetro  $n_{pg}$  sobre la propagación de un pulso láser en el vacío: (a) Simulación con  $n_{pg}=5$ , (b) simulación ejecutada con  $n_{pg}=20$ , y finalmente, (c) simulación de la propagación del pulso con  $n_{pg}=60$ .

En la Figura 11.b se puede apreciar que para diferentes instantes el pulso no ha cambiado significativamente sus características, donde se emplearon 20 puntos para describir la longitud de onda del pulso, siendo esta una cantidad de puntos adecuada que permiten no sólo recrear una simulación favorable que induce a una propagación estable, sino lo suficientemente precisa sin la exigencia de un elevado requerimiento computacional. La Figura 11.c permite reforzar esta idea, donde en la simulación se asigna a  $n_{pg}$  el valor de 60 y no se observa cambio significativo respecto a la simulación previa.

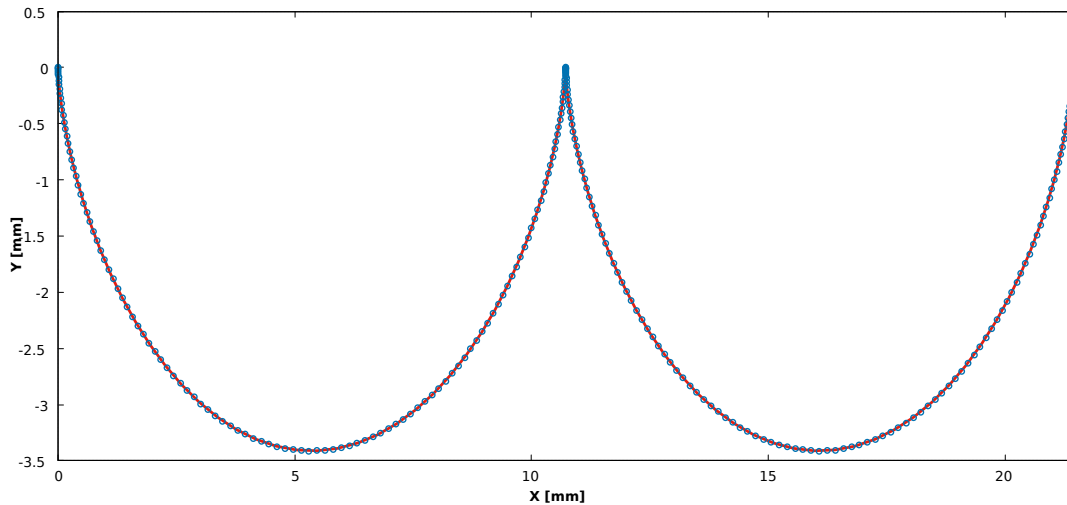
## 4.2 Dinámica de una partícula cargada

En esta sección, se presenta la validación de la subrutina desarrollada que permite obtener la dinámica de una partícula cargada a través del algoritmo de Boris-Buneman presentado anteriormente. En este orden de ideas para validar esta subrutina, se tomó como punto de partida no sólo el efecto del campo magnético sobre las partículas cargadas, sino también el efecto de campo eléctrico, pues típicamente se suele validar este tipo de códigos al reconstruir la trayectoria helicoidal de un electrón al interactuar únicamente con un campo magnético uniforme. En este trabajo se presentan los resultados que se obtienen al someter a un electrón al efecto de un campo eléctrico y magnético uniformes y cruzados,  $\mathbf{E} = E_0\hat{y}$  y  $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$ . Esta configuración se selecciona ya que la dinámica se puede obtener analíticamente, y con esta, poder contrastar directamente la solución numérica. Para un electrón que se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y se libera en el reposo, la trayectoria estará definida por:

$$x(t) = \frac{E_0}{B_0\omega}[\omega t - \text{sen}\omega t], \quad (54)$$

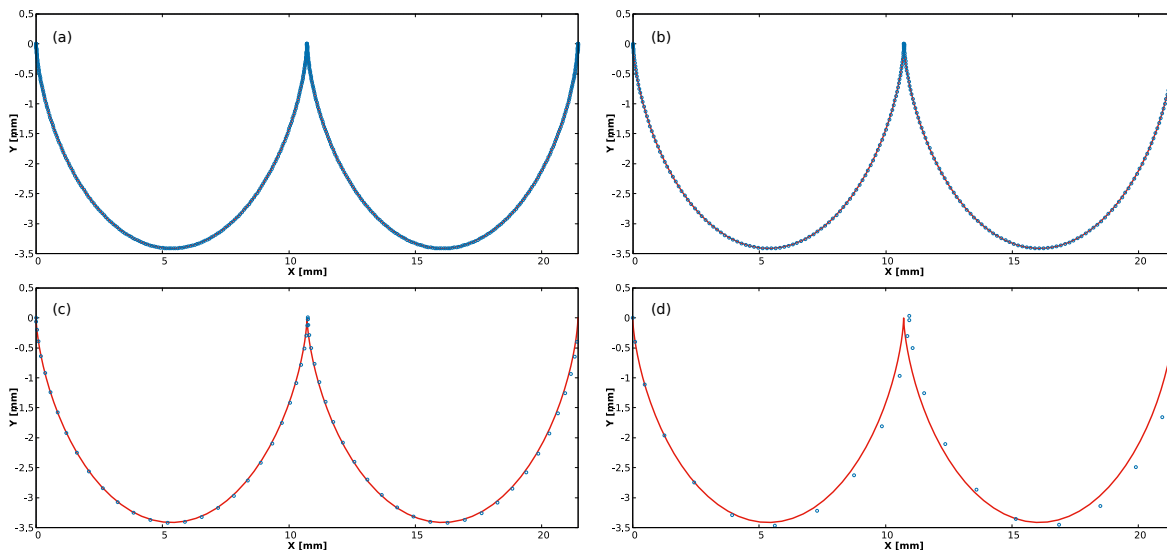
$$y(t) = -\frac{E_0}{B_0\omega}[\text{cos}\omega t - 1], \quad (55)$$

donde  $\omega = -eB_0/m_e$  representa la frecuencia ciclotronica electrónica. Los resultados de la simulación se presentan en la Figura 12 y permiten identificar que hay una completa correlación de la trayectoria numérica respecto la trayectoria predicha por la teoría. En dicha simulación se empleó un paso temporal  $\Delta t=0.05$  en unidades normalizadas, siendo este parámetro numérico el actor principal asociado a precisión y estabilidad del algoritmo, el cual se discutirá brevemente a continuación.



**Figura 12:** Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico y magnético uniforme obtenida a partir de la subrutina de Boris (círculos azules) con la respectiva trayectoria analítica (línea roja).

En particular, el esquema de Boris goza de gran prestigio en investigaciones numéricas de sistemas plásmicos por dotar a las simulaciones de una gran estabilidad, pues al realizar simulaciones muy extensas en el tiempo, el algoritmo preserva muy bien parámetros físicos como la energía y radios de giro de las partículas con pasos temporales moderados. Por su parte, la precisión en este esquema de integración es del orden de  $\Delta t^2$ , siendo así un esquema de segundo orden [42–44]. No se presentará una revisión extensa de estas características ya que en la literatura se puede apreciar con gran acierto sus grandes ventajas y desventajas, pero sí se presenta en la Figura 13 simulaciones del problema físico anterior con diferentes pasos temporales, donde se puede apreciar que para pasos pequeños, la física del sistema se recrea muy bien, apreciando una superposición de la solución numérica con la solución analítica. Cuando el paso temporal es grande, Figura 13.c y 13.d la solución numérica muestra su gran estabilidad aún cuando se sacrifica precisión, como es de esperarse. En general, cuando se desean ejecutar simulaciones de la dinámica de partículas cargadas con el presente esquema numérico, se debe garantizar que el paso temporal seleccionado, pueda reconstruir un giro ciclotrónico con al menos 25 puntos para que haya una buena relación entre precisión y estabilidad. La similitud en este parámetro, tanto para el algoritmo de Boris como para el algoritmo de Yee, se debe a que ambos se soportan en el esquema Leap-Frog que emplea diferencias finitas centradas de segundo orden.

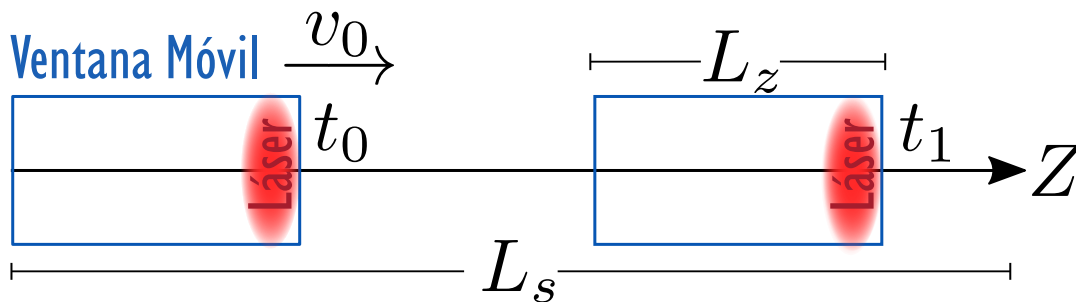


**Figura 13:** Trayectoria de un electrón en un campo eléctrico y magnético cruzados y uniformes, obtenida a partir de la subrutina de Boris (círculos azules) con la respectiva trayectoria analítica (línea roja) para diferentes casos: a) simulación con un  $\Delta t = 0,025$ , b) simulación con un  $\Delta t = 0,05$ , c) simulación con un  $\Delta t = 0,2$  y finalmente d) simulación con un  $\Delta t = 0,5$ .

### 4.3 Simulación autoconsistente Particle-In-Cell

Se ha presentado que la simulación autoconsistente de la descripción cinética del plasma se reduce principalmente al acople de las dos subrutinas desarrolladas anteriormente,

así que el código final desarrollado debería reproducir una gran cantidad de fenómenos; incluso asociados con la dinámica no lineal, pues no se han considerado aproximaciones que indiquen lo contrario, y, dado que el objetivo de este proyecto es simular la formación de la onda plasmica al ser excitada por pulsos láser intensos y de corta duración, se ha de esperar que este código tenga la capacidad de reproducir la física asociada al fenómeno en cuestión. Antes de iniciar el testeo final, se introduce el concepto de región de simulación móvil ó ventana móvil. Para comprenderlo, se debe recordar que el wake se forma y viaja detrás del pulso láser, porque allí es donde el plasma se ha perturbado, así que, el plasma que está sin excitar seguirá estando en equilibrio y no tendrá una dinámica asociada. Por otra parte, toda la región de simulación o de interés en este tipo de fenómenos es relativamente grande ( $\sim cm$ ) respecto a la longitud de onda del wake o el ancho del pulso láser ( $\sim \mu m$ ), por lo que es acertado identificar que para realizar este tipo de simulaciones se deben emplear una gran cantidad de puntos de malla así como de superpartículas para simular la dinámica autoconsistente, acarreando un gran costo computacional, que si se reflexiona, es innecesario ya que el plasma sin perturbar no es interesante ni necesario de simular; e incluso, una vez el pulso ya ha avanzado lo suficiente, toda la dinámica inicial empieza a perder relevancia porque ya estará cerca del equilibrio nuevamente.



**Figura 14:** La simulación de un pulso láser que se propaga a través del plasma con longitud  $L_s$  requiere una cantidad significativa tanto de puntos de malla espacial como de iteraciones temporales. Es por esto que se replantea la región de simulación a una región móvil con longitud  $L_z$ , la cual se mueve a la velocidad de la luz y paralela al pulso láser, reduciendo significativamente el costo computacional.

Con el ánimo de reducir el costo computacional innecesario empleado en simular el plasma aún sin perturbar y el plasma relajado, se propone establecer una región de simulación móvil que viaje paralela y junto al pulso; y así, enfocar esfuerzos en describir la dinámica de mayor interés, la cual sucede en las cercanías de dicho pulso. Estas ideas se representan en el esquema de la Figura 14, donde la longitud de la venta móvil en principio puede ser arbitraria, pero no tan pequeña que no se pueda evidenciar la formación del wake, ni tan grande que implique altos costos computacionales. Lo recomendado según los resultados obtenidos, es que su tamaño esté alrededor de  $7\lambda_p$  aproximadamente. En este trabajo se ha propuesto que esta ventana móvil viaje a la velocidad de la luz en el vacío, ya que el pulso en el plasma viajará ligeramente con velocidad menor, garantizando así que el pulso no se escapará de la ventana de simulación. En adición, se han configurado las simulaciones para que al inyectar el pulso este viaje inicialmente una distancia de  $Lz/3$  en el vacío, y encuentre luego el plasma

---

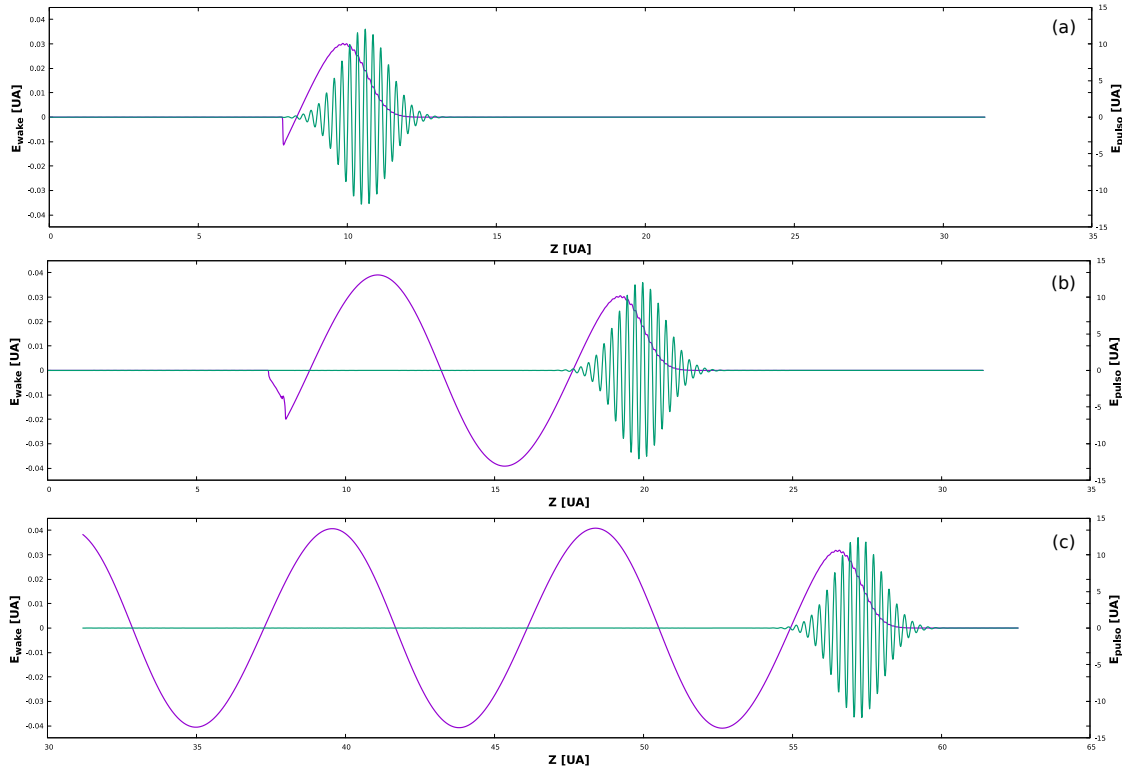
en equilibrio uniformemente distribuido a lo largo de su camino. Cabe resaltar que la ventana se activa una vez el pulso, que se genera en el extremo izquierdo, viaje hasta ubicarse en las cercanías del extremo derecho. Finalmente, es importante mencionar que no se está violando ningún principio físico al evadir las leyes de transformación, pues no se está describiendo la física desde un marco de referencia móvil paralelo al pulso; de hecho, toda la descripción se está realizando desde un marco de laboratorio, en el que simplemente se hace seguimiento a la región cercana al pulso.

Con todos los detalles claros, el testeado del código que simula la dinámica autoconsistente del plasma, toma como punto de partida la excitación de un plasma inicialmente en equilibrio de concentración  $n_o = 3 \times 10^{24}/m^3$  el cual es perturbado con un pulso láser con pico de campo eléctrico de  $E_{pulso} = 2TV/m$  y frecuencia  $f_{pulso} = 375THz$ , cuyo tamaño contiene alrededor de 15 longitudes de onda. Esta primera simulación se ejecuta empleando un paso de malla con  $n_{pg} = 25$  puntos, donde se simularon 10 superpartículas por cada celda. Los resultados de la simulación se presentan en la Figura 15, donde se puede identificar tres instantes de la simulación: Primero el pulso viajó por la región vacía y empezó a interactuar con el plasma; segundo, el pulso ya se propaga por el plasma y se puede identificar la estela o wake que deja a su paso; y finalmente, en un instante posterior, el wake ya se ha formado completamente, donde se puede notar que la ventana móvil ya se ha activado y ha seguido al pulso láser en su propagación. Este comportamiento cualitativo da un primer indicio al correcto funcionamiento del código desarrollado; sin embargo se hace necesario profundizar en este tema: validar cuantitativamente con valores esperados.

Con el ánimo de indagar un poco más la capacidad del código, se confrontarán los resultados numéricos con las estimaciones analíticas de la teoría lineal del fenómeno, que predice una amplitud del wake del orden de unos cuantos  $\sim GV/m$  con el valor de  $n_o$  establecido en la simulación. Según diversos ajustes realizados al modelo se debe emplear la máxima variación en la concentración de las partículas para predecir la amplitud del wake con mayor precisión [56, 57]. Al emplear dichos detalles de la teoría, la amplitud del wake en unidades normalizadas, (ver sección 3.8), debe estar al rededor de  $\sim 0,067$ . Antes de comparar las amplitudes numéricas y analíticas, se debe verificar que los datos empleados en la simulación obedezcan a un comportamiento lineal; por tal motivo, se estimó el valor del parámetro  $a_o$  definido como

$$a_o = \frac{eE_{pulso}}{m_e c \omega_{pulso}}, \quad (56)$$

siendo  $E_{pulso}$  y  $\omega_{pulso}$  la amplitud de campo eléctrico y frecuencia del pulso. Así, según la teoría, si  $a_o < 1$ , los parámetros empleados obedecen al régimen lineal; si  $a_o \sim 1$  se trabaja en el régimen cuasilineal; y, si  $a_o > 1$  se tiene el régimen no lineal. Sustituyendo valores, la simulación presentada en la Figura 15 obedece completamente al régimen lineal dado que  $a_o \sim 0,5$ ; y en particular, la amplitud del wake en la simulación,  $E_{wake} \sim 0,0423$ , es muy cercana a la esperada, que a pesar de no ser exacta, tiene su justificación física, la cual se abordará más adelante.



**Figura 15:** Interacción del pulso láser (línea verde) con el plasma y el comportamiento del respectivo wakefield (línea morada) en tres diferentes instantes: a) Inicio de la interacción. b) Identificación de la formación del wake c) Wakefield completamente generado por la interacción.

Dado el buen comportamiento de los resultados de la simulación con los parámetros presentados, se exploró su dependencia respecto a variaciones de los factores numéricos, tales como el número de puntos de malla y el número de superpartículas. La Tabla 1 muestra la amplitud del wakefield para diferentes valores de la variable  $n_{pg}$ , el número de puntos empleados para describir la longitud de onda del pulso, de donde se puede identificar que a mayor número de puntos de discretización, la amplitud del wake disminuye levemente. Este comportamiento no es fácil de comprender dado que no hay un valor exacto de la amplitud del wakefield, pues lo que se tiene de la teoría lineal son tan sólo estimaciones, las cuales se cumplen muy bien; entonces, no se puede afirmar que a mayor número de puntos mayor precisión, porque esta tendencia podría estar relacionada con la ya mencionada inestabilidad numérica que en cuyo caso induce variaciones poco significativas según el rango de puntos empleado. Sí es posible afirmar, que el rango de los resultados para los diferentes valores de  $n_{pg}$  presentados no varía significativamente; garantizando que todas las amplitudes están en el mismo orden de magnitud, lo cual exhibe un muy buen comportamiento del código.

$n_{pg}$	25	50	70	90
$E_{wake}$	0.0423	0.0414	0.0411	0.0408

**Tabla 1:** Amplitud de la onda plasmica  $E_{wake}$  respecto la variable  $n_{pg}$ , manteniendo el número de superpartículas por celda constante  $n_{spc} = 20$ .

---

<b>n<sub>spc</sub></b>	10	20	40	60	80
<b>E<sub>wake</sub></b>	0.0423	0.0423	0.0423	0.0423	0.0423

**Tabla 2:** Amplitud de la onda plasmica  $E_{wake}$  como función del número de superpartículas por celda  $n_{spc}$ , manteniendo el paso de malla constante, con  $n_{pg} = 25$ .

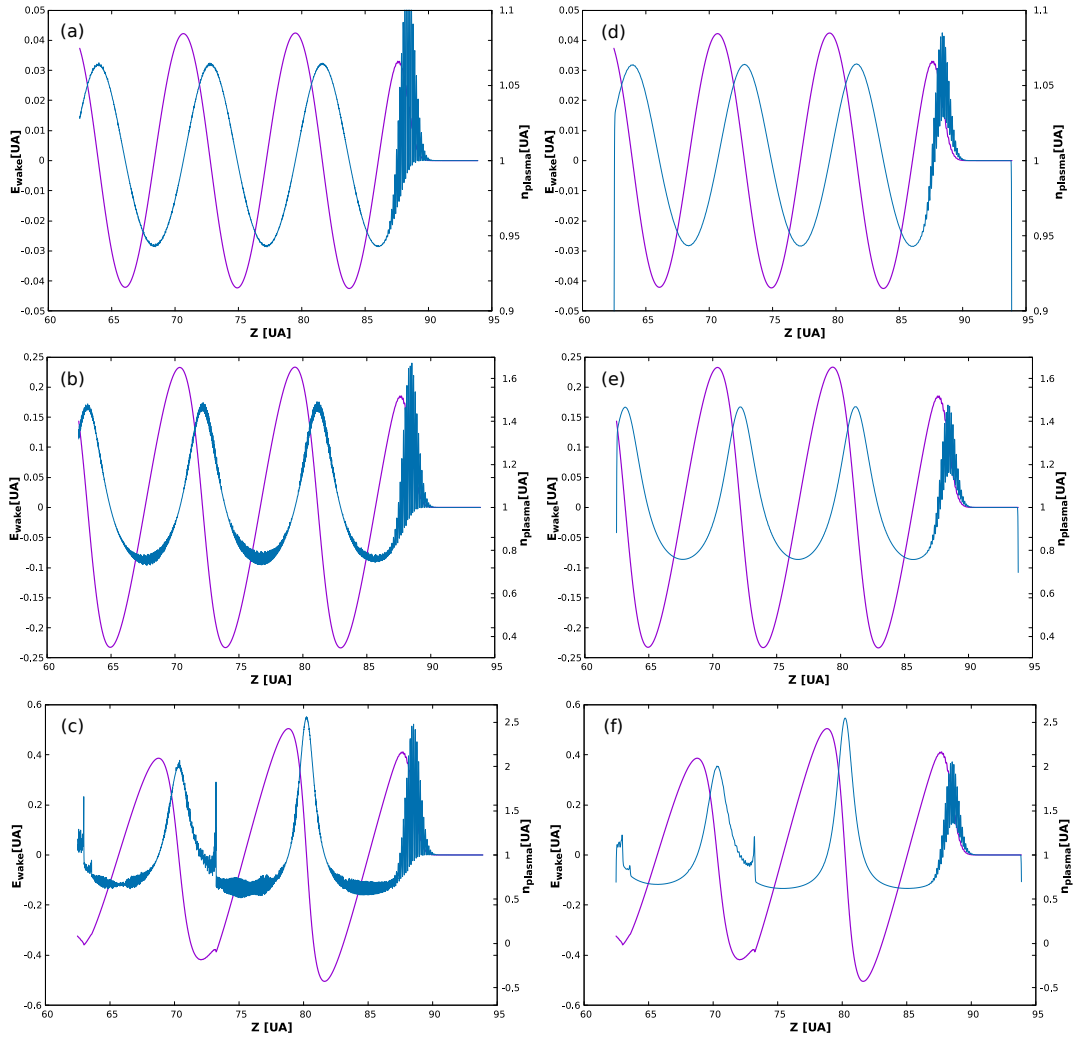
Un comportamiento importante se puede apreciar en la Tabla 2, donde al fijar el parámetro numérico  $n_{pg} = 25$  y al variar la cantidad de superpartículas por celda, se encontró que la amplitud del wakefield no cambia significativamente, siempre se obtuvo el mismo valor en cada simulación, lo cual es muy curioso, y beneficioso porque no hay necesidad de aumentar la carga numérica para controlar la dependencia de los resultados, al menos en el rango de valores presentado.

Hasta este punto, es posible garantizar que el código desarrollado es capaz de proporcionar buenas predicciones, cuyos resultados han dado una buena correlación según lo esperado con la teoría. Adicionalmente, la influencia de los parámetros numéricos no afecta significativamente los resultados físicos, lo cual es deseado. Basado en esto, en la siguiente sección se busca identificar la dependencia del fenómeno con parámetros físicos del pulso, de modo tal, que se pueda comparar el comportamiento general con los registrados en la literatura.

## 4.4 Influencia de los parámetros del pulso

Se ha presentado la influencia de los parámetros numéricos con la formación del wake, lo que ha permitido validar los resultados del código desarrollado. Ahora bien, es importante identificar que la física se puede recrear bajo diversos escenarios; por tal motivo se realizaron diferentes simulaciones variando dos de los parámetros más relevantes del pulso: La amplitud y su duración.

Inicialmente se explora la dependencia de los perfiles del wakefield y de la concentración a lo largo del eje de propagación en tres escenarios en los que se fijó la duración y frecuencia del pulso y se aumentó la intensidad. Como ya se presentó, la intensidad del pulso afecta directamente el parámetro físico  $a_o$ , el cual determina uno de tres escenarios: *i*) Régimen lineal si  $a_o < 1$ , *ii*) Régimen cuasilineal si  $a_o \sim 1$  y *iii*) Régimen no lineal si  $a_o > 1$ . En la Figura 16 se presentan los perfiles arrojados por la simulación. En particular, en la Figura 16.a la simulación se ejecutó garantizando que la amplitud del pulso correspondiera a una simulación en el régimen lineal:  $a_o \sim 0,5$ . De aquí se puede evidenciar un comportamiento similar a los resultados previamente analizados, con una amplitud del wake, en unidades adimensionales, cercana a  $\sim 0,04$ ; resaltando que el comportamiento tanto del perfil de la concentración como el del wake son suaves, muy similares a un comportamiento sinusoidal, propio del régimen lineal. En la Figura 16.b la dinámica es cuasilineal, pues allí  $a_o = 1,25$ , donde la amplitud del wake aumentó alrededor de seis veces respecto al caso lineal, conservando un comportamiento suave,



**Figura 16:** Perfiles de la onda plasmica  $E_{wake}$  (línea lila) y de la concentración electrónica en el plasma  $n_{plasma}$  (línea azul) respecto a variaciones en la amplitud del campo eléctrico del pulso láser empleado en la simulación: a) y d)  $E_{laser} = 2[TV/m]$ ; b) y e)  $E_{laser} = 5[TV/m]$ ; c) y f)  $E_{laser} = 8[TV/m]$ . Al lado izquierdo se presentan las simulaciones sin técnicas de suavizado y a la derecha aplicando filtro.

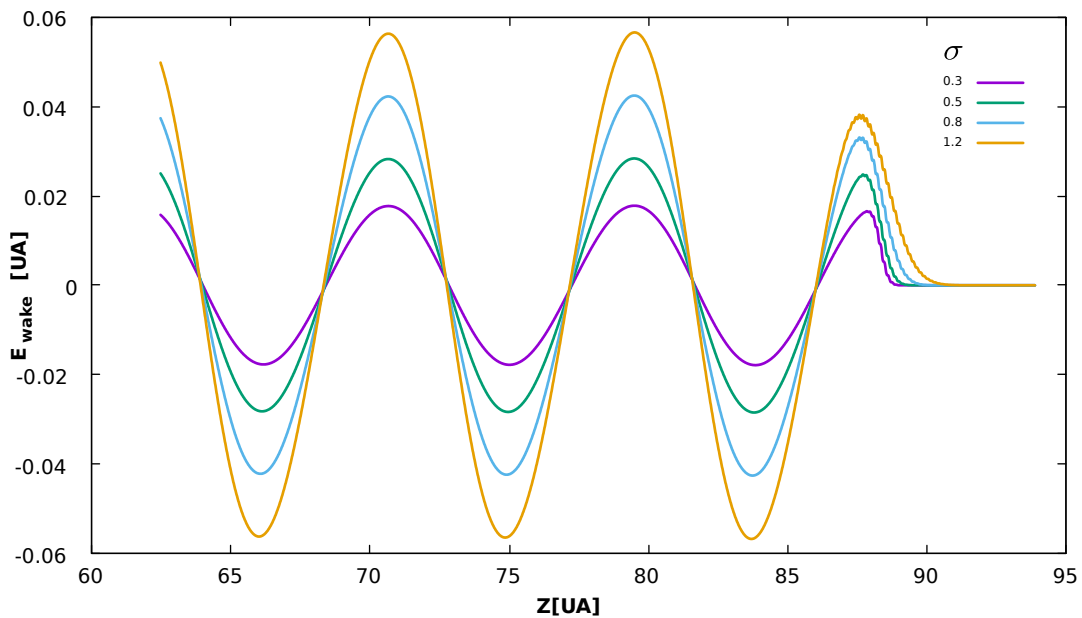
sinusoidal, a lo largo del eje  $z$ ; pero esta característica no es observada en el perfil de concentración electrónica, pues la forma, a pesar de ser aún suave, ya no se parece a un seno o coseno, pues tiene un pico más pronunciado, reflejando mayores variaciones en la concentración. Este comportamiento es más notorio en el régimen no lineal, presentado en la Figura 16.c, donde  $a_o = 2$ . Este perfil tiene completa relación con algunos trabajos encontrados en la literatura, sirviendo esto como una validación adicional al presente trabajo [56, 58]. Por su parte, el perfil del wakefield exhibe una mayor amplitud, como es de esperarse, y tiende a inclinarse perdiendo su forma sinusoidal.

Un detalle importante se puede apreciar en los resultados presentados y analizados en la Figura 16. Se puede notar que los perfiles de concentración electrónica de la izquierda presentan ruido que parece aumentar conforme la amplitud del pulso aumenta, es decir,

este ruido es más fuerte en el régimen no lineal; sin embargo, es un comportamiento totalmente esperado, tal como lo reporta [59–61], y se debe principalmente al factor de forma espacial empleado para definir la función de distribución de la superpartícula, ver sección 3.2. Ya que el perfil de concentración afecta directamente el cálculo de la densidad de corriente, ecuación (48), se pueden generar grandes acumulaciones de error, y con ello limitar las capacidades de cómputo del código. Por tal motivo se suele tomar uno de dos caminos para corregir este problema. La primera alternativa es cambiar el factor de forma espacial al seleccionar funciones b-spline de orden; pero tanto la ponderación del campo sobre la superpartícula como la asignación de carga dependen de este, por lo que se hace necesario ajustar detalles en el algoritmo haciendo que se llegue a dificultar la tarea de implementación e incluso aumentar el tiempo de computo. La segunda alternativa y la más empleada, es aplicar técnicas de filtrado que reduzcan el ruido y suavicen el perfil. Por estas razones, en el presente trabajo se implementó un filtro de tres puntos, usualmente empleada en simulaciones PIC, al aplicar la expresión

$$\phi_k^f = \alpha\phi_k + (1 - \alpha)(\phi_{k-1} + \phi_{k+1})/2 \quad (57)$$

a lo largo de toda la malla espacial en cada paso de tiempo, donde  $\phi_k^f$  es la cantidad física suavizada. El parámetro  $\alpha$  es una constante que usualmente toma el valor de 0,5. Es de resaltar que no basta con realizar un sólo cálculo de  $\phi_k^f$  en cada punto de malla para reducir el ruido; es necesario realizar una serie de  $n$  barridos para que el ruido se atenúe. Detalles de esta técnica se pueden encontrar en diversos textos [62, 63]. En este trabajo se implementaron 10 barridos aplicando la expresión (57) procurando no aumentar significativamente el costo computacional, logrando obtener así las gráficas del costado derecho de la Figura 16, donde se pueden evidenciar perfiles suaves, sin ruido, para la concentración electrónica.



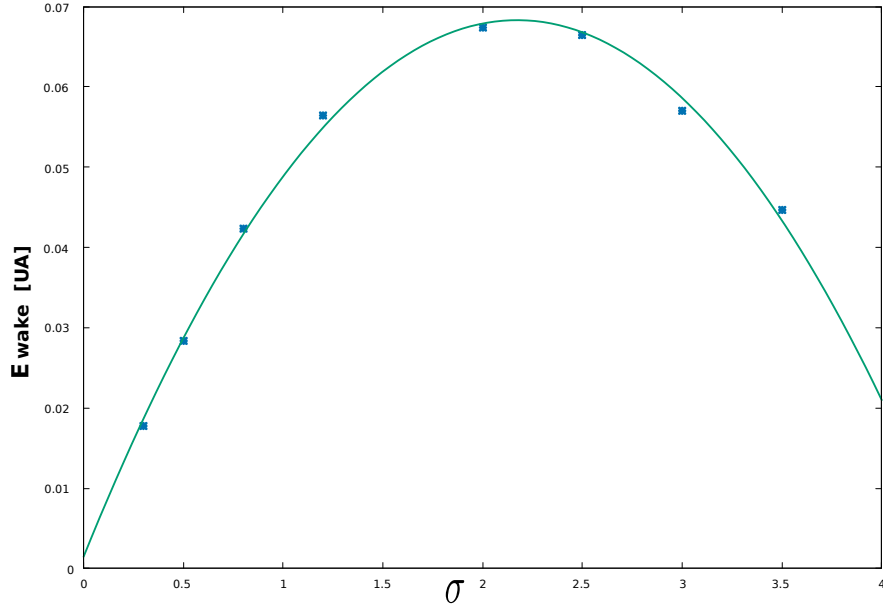
**Figura 17:** Amplitud de la onda plásmica  $E_{wake}$  debido a la influencia en el ancho del pulso  $\sigma$ .

El ancho medio del pulso fue el segundo parámetro que se consideró en este trabajo para determinar su influencia en la excitación de la onda plásmica. Retomando la forma de excitación del pulso gaussiano, ecuación (53), el coeficiente  $\sigma$  es quien determina directamente el ancho medio del pulso; por tal razón, se corrieron simulaciones en las que se hizo incidir al plasma un pulso láser con amplitud  $E_{pulso} = 2TV/m$ , frecuencia de  $f_{pulso} = 375THz$ , variando únicamente el factor  $\sigma$ . Estos resultados se presentan en la Figura 17, y se puede concluir que este parámetro afecta únicamente la amplitud de la onda plásmica y no influye significativamente en la longitud de onda. De hecho, se puede observar que conforme aumenta el ancho del pulso, mayor es la amplitud del wake. Este es un hecho interesante que vale la pena profundizar, pues de la teoría se sabe que un requerimiento para la excitación de la onda plásmica es que el pulso sea de corta duración, por lo que se exploró la dependencia de la amplitud del wake con pulsos más anchos y los resultados se registraron en la Tabla 3,

$\sigma$	0.3	0.5	0.8	1.2	2.0	2.5	3.0	3.5
$E_{wake}$	0.0423	0.0283	0.0423	0.0564	0.0665	0.0665	0.0569	0.0446

**Tabla 3:** Dependencia de la amplitud de la onda plásmica  $E_{wake}$  respecto al ancho del pulso láser empleado  $\sigma$ .

de la cual se puede apreciar que para pulsos de mayor duración, efectivamente la amplitud del wake se ve afectada y no sigue su tendencia inicial de ir aumentando. La Figura 18 permite visualizar este hecho, logrando identificar la existencia de un valor de ancho óptimo donde se excita el wakefield con mayor amplitud. Es de resaltar que la amplitud máxima registrada,  $E_{max\_wake}^{sim} = 0,0665$ , coincide con el valor esperado por la teoría lineal, tal como ya se presentó:  $E_{wake}^{teo} \sim 0,067$ .

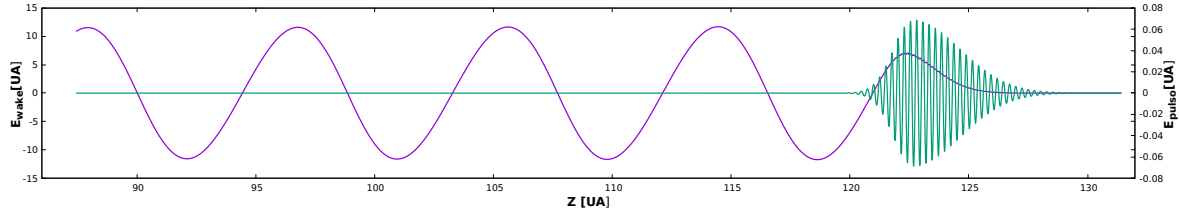


**Figura 18:** Comportamiento de la amplitud de la onda plásmica,  $E_{wake}$ , respecto al ancho del pulso láser gaussiano,  $\sigma$ . Las simulaciones se ejecutaron con  $n_{pg} = 25$  y  $n_{spc} = 20$ .

Para finalizar este trabajo, se indagó sobre el efecto de la asimetría del pulso, la cual se genera al variar el parámetro  $\sigma$  durante la excitación del mismo. En particular, para este trabajo se implementó la siguiente condición:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_R & \text{si } t < t_o \\ \sigma_L & \text{si } t > t_o \end{cases}, \quad (58)$$

cuyo resultado se puede visualizar en la Figura 19. Para determinar la influencia de la asimetría del pulso sobre la amplitud del wakefield, se analizaron dos escenarios. En el primer escenario se fijó a  $\sigma_R = 2,0$ , ya que a este valor de sigma se obtuvo en los resultados anteriores la mayor amplitud del wake, y se varió  $\sigma_L$ . De forma similar se planteó el segundo escenario, se fijó a  $\sigma_L = 2,0$  y se varió  $\sigma_R$ .



**Figura 19:** Wakefield generado por un pulso láser asimétrico con  $\sigma_R = 2$  y  $\sigma_L = 0,8$ .

$\sigma_R = 2.0$				$\sigma_L = 2.0$			
$\sigma_L$	$\bar{\sigma}$	$E_{\text{wake}}$	$\lambda_p$	$\sigma_R$	$\bar{\sigma}$	$E_{\text{wake}}$	$\lambda_p$
0.3	1.1	0.0544	8.8367	0.3	1.1	0.0552	8.8349
0.5	1.2	0.0577	8.8333	0.5	1.2	0.0585	8.8481
0.8	1.4	0.0618	8.8451	0.8	1.4	0.0627	8.8318
1.2	1.6	0.0658	8.8309	1.2	1.6	0.0668	8.8214

**Tabla 4:** Dependencia de la longitud de onda del wake,  $\lambda_p$ , y la amplitud de la onda plásmica,  $E_{\text{wake}}$ , respecto a los parámetros  $\sigma_R$  y  $\sigma_L$  que definen la asimetría del pulso.

Los resultados obtenidos se consiguen en la Tabla 4, en la que se presenta a su vez la variable  $\bar{\sigma} = (\sigma_R + \sigma_L)/2$ , refiriéndose a ella como una medida indirecta del ancho medio del pulso asimétrico. También se presenta el valor de la longitud de onda obtenida en cada caso, evidenciando que la asimetría del pulso no afecta la longitud de la onda plásmica. Es interesante notar que la amplitud del wake es similar si el pulso entra al plasma con un frente ancho a que si ingresa con un frente angosto, las simulaciones arrojan resultados similares, lo cual da en entender que la amplitud de la onda plásmica excitada por pulsos gaussianos asimétricos, depende únicamente del ancho medio de dicho pulso.

Los resultados presentados a lo largo de este documento permiten identificar las principales características del código desarrollado y se pueden obtener diversas conclusiones y observaciones del mismo; las cuales se presentarán en el siguiente capítulo.

---

---

## CONCLUSIONES

---

---

En este trabajo se desarrolló un código computacional que simula la dinámica cinética y autoconsistente del plasma bajo la técnica *Particle-In-Cell* electromagnético en aproximación unidimensional, y con este, se caracterizó el tren de pozos de potencial inducido por la propagación de un pulso láser de alta intensidad y corta duración. La evolución de los campos electromagnéticos se simuló según el esquema de Yee; y la dinámica de las superpartículas se obtuvieron al implementar el algoritmo de Boris-Bunemann. Todas las subrutinas que contienen los algoritmos requeridos, se implementaron en el lenguaje de programación C/C++. De este trabajo se resalta que la deposición de carga y corriente en los puntos de malla para determinar el campo electromagnético, satisface la ecuación de continuidad para la carga eléctrica. Adicionalmente, se desarrolló una subrutina de filtrado para suavizar los perfiles de concentración electrónica para garantizar eficiencia y estabilidad sin pérdida de precisión.

Del proceso de validación individual de las subrutinas desarrolladas se pudo identificar que existen cotas mínimas en la discretización tanto espacial como temporal, tal como se observa en la Figura 11, en la que al emplear una baja cantidad de puntos de malla, la evolución de los campos electromagnéticos no es la esperada. Las simulaciones presentadas, permitieron establecer que esta cota mínima de puntos de malla espacial ( $n_{pg} \gtrsim 20$ ), está directamente relacionada con la capacidad de reconstruir la distancia característica de menor valor presente en el sistema; que en este trabajo corresponde a la longitud de onda del pulso. Adicionalmente, se logró corroborar que el algoritmo de Boris-Bunemann goza de una gran estabilidad al requerir muy pocos pasos temporales para obtener una buena aproximación numérica a la solución analítica planteada en la sección 4.2, haciendo de este, una de las mejores herramientas disponibles para simular numéricamente sistemas plásmicos.

Desde un punto de vista físico, las simulaciones realizadas en este trabajo permiten establecer que las características tanto físicas como la propia forma del pulso láser gaussiano influyen en el perfil de la onda plásmica; logrando identificar que la asimetría de dicho pulso no juega un papel significativo, pues los resultados permiten establecer que es el ancho medio del pulso y su amplitud, los dos factores que más afectan las características del wake. En particular, fue posible evidenciar que el ancho medio del pulso láser no afecta la longitud de onda del wake, pero sí afecta su amplitud, identificando que existe un ancho óptimo del pulso láser que excita al wake con una mayor amplitud.

---

Finalmente, el código desarrollado en el marco de este proyecto de investigación, permite simular la dinámica cinética y autoconsistente del plasma en aproximación unidimensional, lo que lo hace una gran herramienta para investigar la física del plasma en la que sea aplicable. Por tal motivo, se propone como trabajo futuro realizar una exhaustiva validación en la que se determine con gran precisión las limitaciones numéricas del código y que sirva de referente en investigaciones de alto impacto, especialmente enfocadas en mecanismos de aceleración basada en plasma.

---

---

## REFERENCIAS

---

---

- [1] El estado de plasma.
- [2] Altan Cakir and Oguz Guzel. A brief review of plasma wakefield acceleration. *arXiv preprint arXiv:1908.07207*, 2019.
- [3] Fernando O Minotti. Apuntes de física del plasma. *Instituto de Física del Plasma. Universidad de Buenos Aires*, 2012.
- [4] Paul M Bellan. *Fundamentals of plasma physics*. Cambridge university press, 2008.
- [5] Mario Coccia and Ugo Finardi. New technological trajectories of non-thermal plasma technology in medicine. *International Journal of Biomedical Engineering and Technology*, 11(4):337–356, 2013.
- [6] Francis F Chen and Jane P Chang. *Lecture notes on principles of plasma processing*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [7] Richard O Dendy. *Plasma physics: an introductory course*. Cambridge University Press, 1995.
- [8] Akira Yoshizawa, Sanae I Itoh, and Kimitaka Itoh. Plasma and fluid turbulence: theory and modelling. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 45(3):321–322, 2003.
- [9] Richard Fitzpatrick. *Plasma physics: an introduction*. Crc Press, 2022.
- [10] Akira Hasegawa. *Plasma instabilities and nonlinear effects*, volume 8. Springer Science & Business Media, 2012.
- [11] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. CRC press, 2004.
- [12] Jörg Büchner, Christian Dum, and Manfred Scholer. *Space plasma simulation*, volume 615. Springer Science & Business Media, 2003.
- [13] Nikita Nikulsin, Rohan Ramasamy, Matthias Hoelzl, Florian Hindenlang, Erika Strumberger, Karl Lackner, Sibylle Günter, and Jorek Team. Jorek3d: An extension of the jorek nonlinear mhd code to stellarators. *Physics of Plasmas*, 29(6):063901, 2022.

- 
- [14] P Popovich, MV Umansky, TA Carter, and B Friedman. Analysis of plasma instabilities and verification of the bout code for the large plasma device. *Physics of Plasmas*, 17(10):102107, 2010.
- [15] Pablo Benítez-Llambay and Frédéric S Masset. Fargo3d: a new gpu-oriented mhd code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 223(1):11, 2016.
- [16] Alexander Pukhov. Particle-in-cell codes for plasma-based particle acceleration. *arXiv preprint arXiv:1510.01071*, 2015.
- [17] Heiko Burau, Renée Widera, Wolfgang Hönig, Guido Juckeland, Alexander Debus, Thomas Kluge, Ulrich Schramm, Tomas E Cowan, Roland Sauerbrey, and Michael Bussmann. Picongpu: a fully relativistic particle-in-cell code for a gpu cluster. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(10):2831–2839, 2010.
- [18] Ricardo A Fonseca, Luis O Silva, Frank S Tsung, Viktor K Decyk, Wei Lu, Chuang Ren, Warren B Mori, S Deng, S Lee, T Katsouleas, et al. Osiris: A three-dimensional, fully relativistic particle in cell code for modeling plasma based accelerators. In *Computational Science—ICCS 2002: International Conference Amsterdam, The Netherlands, April 21–24, 2002 Proceedings, Part III 2*, pages 342–351. Springer, 2002.
- [19] TJ M Boyd, TJM Boyd, and JJ Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge university press, 2003.
- [20] Eric Esarey, Carl B Schroeder, and Wim P Leemans. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Reviews of modern physics*, 81(3):1229, 2009.
- [21] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, and Antonio Ting. Overview of plasma-based accelerator concepts. *IEEE Transactions on plasma science*, 24(2):252–288, 1996.
- [22] Toshiki Tajima and John M Dawson. Laser electron accelerator. *Physical review letters*, 43(4):267, 1979.
- [23] Ya B Fainberg, VA Balakirev, and IN Onishchenko. Wake field excitation in plasma by a train of relativistic electron bunches. *Plasma Physics Reports*, 20(7), 1994.
- [24] Pisin Chen, JM Dawson, Robert W Huff, and Thomas Katsouleas. Acceleration of electrons by the interaction of a bunched electron beam with a plasma. *Physical review letters*, 54(7):693, 1985.
- [25] Eric Esarey, Phillip Sprangle, Jonathan Krall, Antonio Ting, and Glenn Joyce. Optically guided laser wake-field acceleration. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 5(7):2690–2697, 1993.
- [26] J Krall, A Ting, E Esarey, and P Sprangle. Self-modulated-laser wakefield acceleration. In *Proceedings of International Conference on Particle Accelerators*, pages 2629–2631. IEEE, 1993.

- 
- [27] Andrew Zangwill. *Modern electrodynamics*. Cambridge University Press, 2013.
- [28] Donna Strickland and Gerard Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics communications*, 55(6):447–449, 1985.
- [29] Gérard A Mourou, CP Barty, and Michael D Perry. Ultrahigh-intensity laser: physics of the extreme on a tabletop. ., 1997.
- [30] J Vieira, RA Fonseca, and LO Silva. Multidimensional plasma wake excitation in the non-linear blowout regime. *arXiv preprint arXiv:1607.03514*, 2016.
- [31] JP Palastro, JL Shaw, P Franke, D Ramsey, TT Simpson, and DH Froula. Dephasingless laser wakefield acceleration. *Physical review letters*, 124(13):134802, 2020.
- [32] Xi Zhang, Vladimir N Khudik, and Gennady Shvets. Synergistic laser-wakefield and direct-laser acceleration in the plasma-bubble regime. *Physical review letters*, 114(18):184801, 2015.
- [33] PE Masson-Laborde, MZ Mo, A Ali, S Fourmaux, P Lassonde, JC Kieffer, W Rozmus, D Teychenné, and R Fedosejevs. Giga-electronvolt electrons due to a transition from laser wakefield acceleration to plasma wakefield acceleration. *Physics of Plasmas*, 21(12):123113, 2014.
- [34] Serguei Y Kalmykov, A Beck, SA Yi, VN Khudik, Michael C Downer, E Lefebvre, Bradley Allan Shadwick, and DP Umstadter. Electron self-injection into an evolving plasma bubble: Quasi-monoenergetic laser-plasma acceleration in the blowout regime. *Physics of Plasmas*, 18(5):056704, 2011.
- [35] Patrick Mora and Thomas M Antonsen Jr. Electron cavitation and acceleration in the wake of an ultraintense, self-focused laser pulse. *Physical Review E*, 53(3):R2068, 1996.
- [36] JB Rosenzweig, B Breizman, T Katsouleas, and JJ Su. Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields. *Physical Review A*, 44(10):R6189, 1991.
- [37] WB Mori, T Katsouleas, CB Darrow, CE Clayton, C Joshi, JM Dawson, CB Decker, K Marsh, and SC Wilks. Laser wakefields at ucla and llnl. In *Proceedings of the Particle Accelerator Conference. San Francisco, California*, 1991.
- [38] Giovanni Lapenta. Particle simulations of space weather. *Journal of Computational Physics*, 231(3):795–821, 2012.
- [39] Allen Taflove, Susan C Hagness, and Melinda Picket-May. Computational electromagnetics: the finite-difference time-domain method. *The Electrical Engineering Handbook*, 3:629–670, 2005.
- [40] Takayuki Umeda, Yoshiharu Omura, T Tominaga, and Hiroshi Matsumoto. A new charge conservation method in electromagnetic particle-in-cell simulations. *Computer Physics Communications*, 156(1):73–85, 2003.

- 
- [41] Kane Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 14(3):302–307, 1966.
- [42] Hong Qin, Shuangxi Zhang, Jianyuan Xiao, Jian Liu, Yajuan Sun, and William M Tang. Why is boris algorithm so good? *Physics of Plasmas*, 20(8), 2013.
- [43] Hann-Shin Mao and Richard Wirz. Comparison of charged particle tracking methods for non-uniform magnetic fields. In *42nd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference in conjunction with the 18th International Conference on MHD Energy Conversion (ICMHD)*, page 3739, 2011.
- [44] J-L Vay. Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocity. *Physics of Plasmas*, 15(5), 2008.
- [45] Matthew NO Sadiku. *Numerical techniques in electromagnetics with MATLAB*. CRC press, 2018.
- [46] Patrick J Ford, Sterling R Beeson, Hermann G Krompholz, and Andreas A Neuber. A finite-difference time-domain simulation of high power microwave generated plasma at atmospheric pressures. *Physics of Plasmas*, 19(7), 2012.
- [47] Dennis M Sullivan. *Electromagnetic simulation using the FDTD method*. John Wiley & Sons, 2013.
- [48] Imene Zemzemi. *High-performance computing and numerical simulation for laser wakefield acceleration with realistic laser profiles*. PhD thesis, Institut polytechnique de Paris, 2020.
- [49] Stephen D Gedney and Faiza Lansing. A parallel planar generalized yee algorithm for the analysis of microwave circuit devices. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 8(3-4):249–263, 1995.
- [50] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische annalen*, 100(1):32–74, 1928.
- [51] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- [52] Carlos A de Moura and Carlos S Kubrusly. *The Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition: 80 years after its discovery*. Birkhäuser Basel, 2012.
- [53] T Zh Esirkepov. Exact charge conservation scheme for particle-in-cell simulation with an arbitrary form-factor. *Computer Physics Communications*, 135(2):144–153, 2001.

- 
- [54] Estelle Cormier-Michel, Bradley Allan Shadwick, Cameron Guy Robinson Geddes, Eric Esarey, Carl B Schroeder, and Wim P Leemans. Unphysical kinetic effects in particle-in-cell modeling of laser wakefield accelerators. *Physical Review E*, 78(1):016404, 2008.
- [55] BM Cowan, Serguei Y Kalmykov, A Beck, X Davoine, K Bunkers, AF Lifschitz, E Lefebvre, DL Bruhwiler, Bradley Allan Shadwick, and DP Umstadter. Computationally efficient methods for modelling laser wakefield acceleration in the blowout regime. *Journal of Plasma Physics*, 78(4):469–482, 2012.
- [56] Brigitte Cros. Laser-driven plasma wakefield: propagation effects. *arXiv preprint arXiv:1705.10566*, 2017.
- [57] Valentina Lee and Bagrad Oganyan. A brief introduction to plasma accelerators. *Journal of Undergraduate Reports in Physics*, 28(1), 2018.
- [58] P Sprangle, Eric Esarey, and A Ting. Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions. *Physical review letters*, 64(17):2011, 1990.
- [59] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. Particle simulation techniques. In *Computer Applications in Plasma Science and Engineering*, pages 7–41. Springer, 1991.
- [60] Joseph R Smith, Chris Orban, Nashad Rahman, Brendan McHugh, Ricky Oropeza, and Enam A Chowdhury. A particle-in-cell code comparison for ion acceleration: Epoch, lsp, and warpx. *Physics of Plasmas*, 28(7), 2021.
- [61] J-L Vay, A Almgren, J Bell, L Ge, DP Grote, M Hogan, O Kononenko, R Lehe, A Myers, C Ng, et al. Warp-x: A new exascale computing platform for beam-plasma simulations. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 909:476–479, 2018.
- [62] H Georg Schulze, Rod B Foist, Andre Ivanov, and Robin FB Turner. Fully automated high-performance signal-to-noise ratio enhancement based on an iterative three-point zero-order savitzky-golay filter. *Applied spectroscopy*, 62(10):1160–1166, 2008.
- [63] Cameron J Dasch. One-dimensional tomography: a comparison of abel, onion-peeling, and filtered backprojection methods. *Applied optics*, 31(8):1146–1152, 1992.