

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIFUSO

NICOLÁS LUNA CHACÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIFUSO

NICOLÁS LUNA CHACÓN

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director

Élder Jesús Villamizar Roa

Doctorado en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2020

DEDICATORIA

Este trabajo viene dedicado a mi familia, mis amigos y mi novia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por el apoyo que me han dado durante todos estos años; a mis amigos con quienes he disfrutado y aprendido durante mi periodo académico; a mi novia por haber estado siempre para mí; y a mi director, quien estuvo siempre atento, y sin su ayuda no habría sido posible la culminación de este trabajo.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. CONJUNTOS DIFUSOS	19
1.1. CONJUNTOS DIFUSOS	19
1.2. OPERACIONES BÁSICAS ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS	24
1.3. α -NIVELES DE UN CONJUNTO DIFUSO	27
1.4. TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN	30
1.5. PRINCIPIO DE EXTENSIÓN	31
1.6. NÚMEROS DIFUSOS	36
1.7. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN NÚMEROS DIFUSOS	38
2. Lógica difusa	40
2.1. GENERALIDADES	40
2.2. OPERADORES LÓGICOS EN LA LÓGICA CLÁSICA	44
2.3. OPERADOR LÓGICO DIFUSO T-NORMA	47
2.4. OPERADOR LÓGICO DIFUSO T-CONORMA	50
2.5. OPERADOR LÓGICO DE NEGACIÓN DIFUSA	52
2.6. RELACIONES DIFUSAS	54
2.7. VARIABLES LINGÜÍSTICAS	59
2.8. IMPLICACIONES DIFUSAS	61
2.9. PROPOSICIONES DIFUSAS	67
2.10. INFERENCIA DIFUSA	69
2.10.1. Inferencia a partir de proposiciones difusas condicionales	70
2.10.2. Razonamiento multicondicional	75

3. Sistemas de control difuso	81
3.1. GENERALIDADES	82
3.2. PROCESO DE ENTRADA: FUZIFICACIÓN	85
3.3. BASE DE REGLAS DIFUSAS	85
3.4. PROCESO DE INFERENCIA	87
3.4.1. Modelo Mamdani	87
3.4.2. Modelo Takagi-Sugeno-Kang (T.S.K.)	89
3.5. PROCESO DE SALIDA: DEFUZIFICACIÓN	92
3.6. PROCESO DE FUNCIONAMIENTO	95
4. Aplicación	101
4.1. GENERALIDADES DEL CULTIVO DE LA MORA	102
4.2. CONTROL DIFUSO DE LA PLAGA TRIPS	109
4.3. DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE CRECIMIENTO DEL TRIPS	122
4.3.1. Un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias	123
4.3.2. Determinación de tasa de crecimiento	131
5. CONCLUSIONES	145
BIBLIOGRAFÍA	147

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Conjunto difuso que representa los "números cerca al 0".	21
Figura 2. Conjunto difuso que representa los "números cerca al 0".	22
Figura 3. "Las plantas con un porcentaje alto de contaminación".	23
Figura 4. "Las plantas con un porcentaje alto de contaminación".	23
Figura 5. Ilustración de $A(x)$ y $B(x)$.	25
Figura 6. Ilustración de las operaciones básicas sobre conjuntos difusos.	26
Figura 7. Ilustración de $[u]^\alpha$ y $[u]^0$.	29
Figura 8. Suma de los conjuntos difusos v y u .	35
Figura 9. Multiplicación del conjunto difuso u por un escalar λ .	35
Figura 10. Comparación de los números e intervalos clásicos con los difusos.	37
Figura 11. Un ejemplo de una variable lingüística.	61
Figura 12. Ilustración del método de interpolación para dos reglas.	77
Figura 13. Esquema general de un controlador difuso.	84
Figura 14. Ilustración del método del centro del área.	93
Figura 15. Dos conjuntos difusos distintos con el mismo valor de defuzificación.	94
Figura 16. Conjuntos difusos asociados a la variable u .	96
Figura 17. Fuzificación del valor v_0 .	97
Figura 18. Mora de castilla.	102
Figura 19. Huevos, ninfa y adultos de arañita roja.	104
Figura 20. Botrytis cinérea en mora.	105
Figura 21. Mildew polvoso en mora.	105
Figura 22. Larva de trips.	106

Figura 23.	Hoja afectada por el Trips.	107
Figura 24.	Mora sin espinas.	108
Figura 25.	Términos lingüísticos de la variable lingüística P.	111
Figura 26.	Términos lingüísticos de la variable lingüística V.	111
Figura 27.	Términos lingüísticos de la variable lingüística D.	112
Figura 28.	Valores de entrada fuzificados.	112
Figura 29.	Ilustración paso 4.	116
Figura 30.	Asignación de variables de entrada y salida.	118
Figura 31.	Términos lingüísticos de una variable de entrada.	119
Figura 32.	Términos lingüísticos de una variable de entrada.	119
Figura 33.	Términos lingüísticos de la variable de salida.	120
Figura 34.	Base de reglas definidas.	120
Figura 35.	Salida del sistema dados los valores iniciales.	121
Figura 36.	Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35, \alpha = 0.9, \beta = 0.8, \theta = 1.2, T = 1$.	126
Figura 37.	Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35, \alpha = 0.9, \beta = 0.8, \theta = 0.9, T = 1$.	126
Figura 38.	Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35, \alpha = 0.4, \beta = 0.8, \theta = 1.2, T = 1$.	127
Figura 39.	Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35, \alpha = 1, \beta = 0, \theta = 1.2, T = 1$.	127
Figura 40.	$x_0 = 35, \alpha = 0.9, \beta = 0.8, \theta = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$.	129
Figura 41.	$x_0 = 35, \alpha = 0.9, \beta = 0.8, \theta = 0.9, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$.	129
Figura 42.	$x_0 = 35, \alpha = 0.4, \beta = 0.8, \theta = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$.	130
Figura 43.	$x_0 = 35, \alpha = 1, \beta = 0, \theta = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$.	130
Figura 44.	Términos lingüísticos de la variable lingüística H.	133
Figura 45.	Funciones del consecuente.	134
Figura 46.	Valor de entrada fuzificado.	135
Figura 47.	Variables y operadores del sistema T.S.K.	137
Figura 48.	Términos lingüísticos de la variable de entrada.	138
Figura 49.	Funciones del consecuente.	138

Figura 50.	Base de reglas del sistema T.S.K.	139
Figura 51.	Función resultante del sistema T.S.K.	140
Figura 52.	Nuevos términos lingüísticos de la variable de entrada.	141
Figura 53.	Nueva función resultante del sistema T.S.K.	142
Figura 54.	$x_0 = 35, \alpha = 1.53\overline{18}, \beta = 0.8, \theta = 1.2, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$	144
Figura 55.	$x_0 = 35, \alpha = 1.53\overline{18}, \beta = 0.8, \theta = 0.9, T_1 = 0.5, T_2 = 1, T_3 = 1.5, T_4 = 2$	144

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Valores de verdad de los operadores lógicos.	45
Tabla 2. Base de reglas para modelo Mamdani	97
Tabla 3. Base de reglas.	112
Tabla 4. Valores de salida obtenidos con el software de Matlab.	119
Tabla 5. Valores de salida con el producto algebraico y suma algebraica.	120
Tabla 6. Valores de salida obtenidos con el software de Matlab.	139
Tabla 7. Valores de salida con el producto algebraico y suma algebraica.	140
Tabla 8. Valores de salida obtenidos con distintos términos lingüísticos.	141

RESUMEN

TÍTULO: UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE CONTROL DIFUSO. *

AUTOR: NICOLÁS LUNA CHACÓN **

PALABRAS CLAVE: CONJUNTO DIFUSO, LOGICA DIFUSA, SISTEMA DE CONTROL DIFUSO, MÉTODO MAMDANI, MÉTODO TAKAGI-SUGENO-KANG.

DESCRIPCIÓN:

En el año 1965, el ingeniero Lofti A. Zadeh, introduce el concepto de lógica difusa con la publicación del artículo "Fuzzy Sets. Information and Control, 8, (1965), 338-353". De manera sucinta, Zadeh propone la Lógica Difusa como una manera de procesar la información de forma tal que los datos puedan tener una pertenencia gradual a los conjuntos universales. Esta propuesta, cobró gran importancia en la comunidad académica cuando su teoría encontró asidero en el mundo de las aplicaciones y en el desarrollo mismo de la matemática inherente por medio de los sistemas de control difuso, sistemas que emulan el proceso de razonamiento de un humano experto en un campo específico de conocimiento.

En el presente trabajo se recuerdan los conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos, se extienden los conceptos de la lógica clásica al contexto difuso, y se realizan dos aplicaciones de los sistemas de control difuso, sobre el control de plagas en plantaciones de mora. Estas aplicaciones son desarrolladas a partir de datos recopilados en la finca San Rafael del municipio de Santa Bárbara, Santander, Colombia. En la primera aplicación se empleó un sistema de control difuso basado en el método de Mamdani para deducir el nivel de concentración de un determinado insecticida requerida para el control químico de la plaga Trips en una plantación de mora. En la segunda aplicación, se determinó la tasa de crecimiento de la plaga Trips por medio del método de Takagi-Sugeno-Kang.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctorado en Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: AN INTRODUCTION TO FUZZY CONTROL SYSTEMS ^{*}

AUTHOR: NICOLÁS LUNA CHACÓN ^{**}

KEYWORDS: FUZZY SET, FUZZY LOGIC, FUZZY CONTROL SYSTEM, MAMDANI METHOD, TAKAGI-SUGENO-KANG METHOD.

DESCRIPTION:

In 1965, engineer Lofti A. Zadeh, introduced the concept of fuzzy logic with the publication of the paper "Fuzzy Sets. Information and Control, 8, (1965), 338-353". In a succinct way, Zadeh proposes Fuzzy Logic as a way of processing information in such a way that data can have a gradual membership in universal sets. The Zadeh proposal gained great importance in the academic community when it found a foothold in the world of applications and in the development of inherent mathematics, in particular, in fuzzy control systems, which are systems that emulate the reasoning process of a human expert in a specific field of knowledge.

In this work, we recall the basic concepts of fuzzy set theory and the concepts of classical logic are extended to the fuzzy context. We develop two applications of fuzzy control systems devoted to the control of pests in blackberry plantations. These applications were developed from data collected at the San Rafael farm in the municipality of Santa Barbara, Santander, Colombia. In the first application, we study a fuzzy control system based on the Mamdani method to deduce the level of concentration of a certain insecticide required for the chemical control of the Trips pest in a blackberry plantation. In the second application, we estimate the growth rate of the Trips pest by means of the Takagi-Sugeno-Kang method.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Maths. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctorate in Maths.

INTRODUCCIÓN

Los fenómenos del mundo real se encuentran impregnados de información subjetiva, ambigua, imprecisa, que aunque el ser humano sea capaz de interpretar, comunicar y ejecutar, la lógica convencional no es la adecuada para procesar este tipo de información. Por ejemplo, si a una persona se le dice que mezcle los ingredientes para hacer una torta hasta que esta esté ligeramente espesa, ciertamente esa persona entiende la regla descrita en la receta, sin embargo, esa información es de difícil representación en un lenguaje que pueda ser entendido por un computador. Ese tipo de términos lingüísticos como “ligeramente espesa” o “muy caliente” no tienen fronteras totalmente determinadas, siendo así, expresiones de naturaleza vaga e imprecisa. Lo interesante del asunto, es que la incertidumbre en el modelado es un común denominador en muchas áreas del conocimiento.

Hoy día se conocen diversos enfoques para el tratamiento de la incertidumbre; uno de ellos corresponde a un enfoque de tipo probabilista y que tiene por objeto lidiar con la incertidumbre causada por la aleatoriedad de eventos, enfoque que proviene desde principios del siglo XIX, con un lugar de destaque dentro de la Física Cuántica y la misma matemática, en donde el uso de métodos estocásticos juega un papel determinante. Basta recordar el famoso Principio de la incertidumbre de Werner HEISENBERG (1927) que establece que es imposible que determinados pares de magnitudes físicas observables y complementarias sean simultáneamente conocidas con precisión. Para complementar este tipo de enfoque, aparece en escena la Lógica Difusa la cual corresponde a una lógica multivaluada, es decir, una lógica que permite más de dos valores de verdad, que proporciona un marco matemático que permite lidiar con la incertidumbre proporcionando herramientas formales para su tratamiento.

Se puede decir que la Lógica Difusa tuvo su origen en 1965 con la publicación del artículo “Fuzzy sets. Information and Control, 8, (1965), 338-353”, bajo la autoría del profesor Lofti A. ZADEH, quien fuera catedrático de la Universidad de Berkeley, California, USA. De manera sucinta, Zadeh propone la Lógica Difusa como una manera de procesar la información de forma tal que los datos puedan tener una pertenencia gradual a los conjuntos universales. Definió por primera vez los llamados conjuntos difusos y con ellos vino la extensión de diversas estructuras lógicas como las proposiciones, las relaciones, las implicaciones, etc. Paralelamente, establecida la teoría de conjuntos difusos, se inició el desarrollo del Análisis Difuso que comprende aspectos como la continuidad, la diferenciabilidad, la medibilidad y la integración de funciones difusas y todas sus implicaciones, entre ellas, las ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales difusas.

La propuesta de Zadeh cobró real importancia en la comunidad académica cuando su teoría encontró asidero en el mundo de las aplicaciones y en el desarrollo mismo de la matemática inherente. En efecto, fue en la década de los 70 cuando la Lógica Difusa tuvo sus primeras aplicaciones en los sistemas de control, impulsando así un enorme desarrollo de procesos industriales, entre los que podríamos citar, la primera aplicación de un sistema de control difuso a una máquina de vapor por parte de Ebrahim H. MAMDANI y Sedrak ASSILIAN en el año 1974; el controlador difuso propuesto por la empresa Hitachi en 1987 para el control del tren-metro de Sedai, o el control de inyección química en plantas depuradoras de agua diseñado por la planta purificadora de agua Fuji Electric en 1993¹.

¹ P. TREMANTE y J. BREA. “Una visión de la teoría difusa y los sistemas difusos enfocados al control difuso”. En: *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias* 4 (2014), 121-136.

A pesar del amplio desarrollo teórico de la lógica difusa a comienzos de los años 70 y de las primeras aplicaciones propuestas por grandes científicos de la época, en Estados Unidos prevalecía un cierto rechazo hacia esta nueva teoría; sin embargo, los japoneses encontraron la lógica difusa como una herramienta innovadora para el modelado matemático y las aplicaciones reales de éste, pues observaron que podía ser implementada en múltiples campos de la ciencia donde los sistemas de control convencionales no funcionaban correctamente. De tal manera que en los comienzos de la década de los 80, en Japón, se incrementaron de manera masiva las aplicaciones de los sistemas de control difuso, sistemas que emulan el proceso de razonamiento de un humano experto en un campo específico de conocimiento. Los sistemas de control difuso emplean una base de conocimiento, expresado en términos de reglas de inferencia difusas relevantes, y una serie de reglas de producción que generan inferencias difusas correspondientes al área en que se trabaja. Un ejemplo de este tipo de sistemas corresponde a las lavadoras difusas, las cuales, de acuerdo al nivel de suciedad identificado en las prendas introducidas, escoge la cantidad de agua y solvente necesario para realizar un lavado acorde al estado inicial de la prenda.

En el año 1974, cuando Mamdani diseñó el primer sistema de control para la máquina de vapor, planteó un modelo de controlador difuso conocido como método Mamdani, que hasta los años 80 fue implementado en la mayoría de aplicaciones. No fue sino hasta el año 1983, cuando Tomohiro TAKAGI y Michio SUGENO plantean un sistema de control difuso; posteriormente enriquecido por Geuntaek KANG, conocido como método Takagi-Sugeno-Kang (T.S.K), que a diferencia del método Mamdani, permite trabajar sistemas que tratan con una base de datos muy extensa, posibilitando la creación de reglas condicionales más sencillas y objetivas. Este nuevo método fue acogido por la comunidad científica y es, hasta el día de hoy, uno

de los métodos más utilizados en la aplicación de sistemas de control difuso .

El auge generado por la implementación de la lógica difusa en Japón, sorprendió a los investigadores de otros lugares del mundo, entre ellos Estados Unidos, tanto que, en 1992 la primera Conferencia Internacional de la IEEE sobre sistemas de control difuso fue realizada en San Diego, California, EE.UU. Con el realce de la teoría de conjuntos difusos en Europa y Estados Unidos, esta teoría se consolidó como una de las ramas de la matemática, valorada enormemente por sus aplicaciones reales en la industria.

En el presente trabajo se ofrece una introducción a los fundamentos de la Lógica difusa con un enfoque hacia el tratamiento de los llamados sistemas de control difuso, que corresponden a sistemas de control que utilizan la lógica difusa para producir salidas para cada entrada difusa. En razón de ello, el trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: **En el primer capítulo** se introduce el concepto de conjunto difuso y sus operaciones básicas de unión, intersección y complemento. Adicionalmente se revisa el concepto de α -nivel de un conjunto difuso, el cual es fundamental en el desarrollo de esta teoría, dado que los α -niveles de un conjunto difuso permiten representar dicho conjunto por medio de los teoremas de representación y descomposición. Finalmente, se presenta el concepto de números difusos, que corresponden a conjuntos difusos definidos sobre los números reales. **El segundo capítulo** está enfocado hacia la fundamentación teórica de la lógica difusa, donde se extienden los conceptos de la lógica clásica al contexto difuso, empezando por las t -normas, t -conormas y negación difusa que son extensiones de la intersección, unión y negación clásica respectivamente; también recordamos el concepto de relación difusa y algunas propiedades. Así mismo, se introduce el concepto de variable lingüística, que corresponde a una variable cuyos estados son conceptos

lingüísticos como bajo, alto, corto, etc. y permiten conectar la teoría de conjuntos difusos con la lógica difusa. Posteriormente se establecen los conceptos de proposición e implicación difusa que son fundamentales para el desarrollo la inferencia difusa que constituye la base para el desarrollo de los sistemas de control difuso. **En el tercer capítulo**, se introducen los llamados sistemas de control difuso, iniciando con una breve explicación de los sistemas de control clásico con el objetivo de extender este concepto al contexto difuso; posteriormente se describen los pasos fundamentales para la implementación de los sistemas de control difuso. En particular, haremos énfasis en dos modelos modelos de inferencia difusa, a saber, el método Mamdani y el método Takagi-Sugeno-Kang. Finalmente, **en el cuarto capítulo**, se expone un par de aplicaciones de los sistemas de control difuso con miras a poner en práctica la teoría expuesta en los capítulos anteriores. Nos planeamos dos sistemas de control relacionados con el control de plagas en un cultivo de mora. En la primera aplicación usamos un sistema de control difuso basado en el método de Mamdani para deducir el nivel de concentración de un determinado insecticida requerida para el control químico de la plaga Trips, que es una plaga que que comúnmente afecta este tipo de cultivos. En la segunda aplicación, usamos el método de Takagi-Sugeno-Kang para determinar la tasa de crecimiento de la plaga Trips.

Para el desarrollo correcto de este trabajo fue necesaria la recolección de datos de una plantación de mora de castilla, esta fue realizada en la finca San Rafael del municipio de Santa Bárbara, Santander, Colombia, en la vereda La Salina, la cual se encuentra ubicada a una altura de 2.065 msnm, con una temperatura promedio de $18^{\circ}C$ y precipitación anual de 2.300 mm; en dicha finca fueron recopilados datos cada 3 días durante dos meses sobre la presencia de hongos, Trips y araña roja en las hojas y frutos de dos plantas de mora sin espina, la primera, la cual no fue fumigada en ningún momento, mientras que a la segunda tuvo tratamiento

con fungicidas e insecticidas aplicados de acuerdo a orientaciones del agrónomo encargado.

1. CONJUNTOS DIFUSOS

En el año 1965, Lofti A. Zadeh, en su artículo titulado “Fuzzy Sets”², introdujo el concepto de conjunto difuso, queriendo representar la vaguedad o imprecisión presente en fenómenos en los cuáles no hay una descripción clara de sus cualidades. A partir de este concepto, se inicia el desarrollo de un área de las matemáticas con un gran espectro de aplicaciones de problemas del mundo real, lo que ha llevado a que en los últimos años se haya generado un gran interés por este tema y múltiples matemáticos hayan explorado notablemente la teoría de los conjuntos difusos, y subáreas afines.

En el presente capítulo revisaremos los conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos, comenzando con su definición, ejemplos y las operaciones básicas de intersección, unión y complemento. Posteriormente se dará introducción al concepto de nivel de un conjunto difuso, acompañado de los teoremas de representación y descomposición, y del principio de extensión de Zadeh; finalmente se revisará el concepto de número difuso. Todo lo anterior para establecer las bases de la fundamentación teórica de la lógica difusa.

1.1. CONJUNTOS DIFUSOS

En la teoría clásica de conjuntos, dado un universo X y un subconjunto A de X , se define la pertenencia de un elemento de $x \in X$ a A , a partir de la función característica χ_A definida como $\chi_A(x) = 0$ en el caso en el que x no pertenece a A , y $\chi_A(x) = 1$ en el caso en el que x pertenece a A . Sin embargo, la caracterización de conjun-

² L. A. ZADEH. “Fuzzy sets”. En: *Information and control* 8.3 (1965), 338-353.

tos a través de la función característica es muy restrictiva debido a que no permite describir con claridad conjuntos con niveles de vaguedad, por ejemplo, al estudiar un grupo de plantas del que se desea conocer cuándo su nivel de afectación por cierta plaga es considerado alto; si decimos que es alto cuando el porcentaje de contaminación es mayor o igual al 50 %, se puede malinterpretar puesto que si la planta tiene un nivel de afectación del 49 %, toma un valor de 0 en la respectiva función característica, y por lo tanto, es posible afirmar que el nivel de contaminación de la planta no es alto, incluso si su diferencia es de solo 1 % con el valor que si es considerado como alto; por lo tanto, es ventajoso y necesario extender la función característica a una que tome valores en el intervalo compacto $[0, 1]$ permitiendo así grados de pertenencia diferentes de 0 o 1 de un elemento a sobre un conjunto A ; de esta manera, la planta con un porcentaje de afectación del 49 % no tomaría el valor de 0 en la función característica, sino podría tomar un valor de 0.9, lo que se puede interpretar diciendo que la planta cumple en gran proporción las características del conjunto, pero no en su totalidad, y sin embargo no es excluida totalmente de dicho conjunto.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto no vacío. Un conjunto difuso de X es una pareja (A, μ) donde A es un subconjunto de X y $\mu : A \rightarrow [0, 1]$ una *función de membresía* tal que $\mu(x)$ representa el grado de pertenencia de un elemento x de X a A . Se dice que x pertenece totalmente al conjunto si $\mu(x) = 1$; x pertenece parcialmente al conjunto si $0 < \mu(x) < 1$; y x no pertenece al conjunto si $\mu(x) = 0$.

Podemos notar que las funciones cuyo recorrido es el conjunto $\{0, 1\}$ corresponden a los conjuntos clásicos, así, los conjuntos clásicos son un caso particular de los conjuntos difusos.

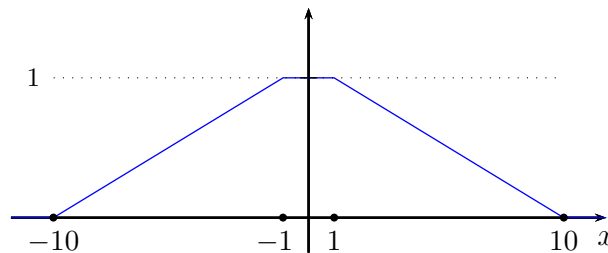
En los textos es usual encontrar la notación A o μ_A para denotar un conjunto difuso A , donde A se usa para denotar la característica del conjunto, mientras que μ_A se

usa para representar el grado de pertenencia que se le asigna a cada uno de los elementos del conjunto universal X ; por ejemplo, sea X el conjunto de las plantas de un cultivo, A podría representar el conjunto de plantas con un nivel alto de contaminación de cierta plaga, mientras que μ_A define el grado de pertenencia que se le asigna a cada planta de este conjunto. A lo largo de este texto usaremos indistintamente estas dos notaciones ya sea para mencionar un conjunto difuso A , o para nombrar la respectiva función de pertenencia μ_A . Por su parte, el conjunto de todos los conjuntos difusos sobre X se denotará por $\mathcal{F}(X)$.

Dado un conjunto difuso A la elección de su función de pertenencia μ_A es subjetiva, ya que depende del contexto del problema que se analiza; por ejemplo, en el caso de querer representar el conjunto de los números que están cerca de 0, podríamos usar la función de pertenencia dada por:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -10 \text{ ó } x > 10, \\ \frac{x+10}{9}, & \text{si } x \in [-10, -1], \\ -\frac{x-10}{9}, & \text{si } x \in [1, 10], \\ 1, & \text{si } x \in (-1, 1), \end{cases}$$

Figura 1. Conjunto difuso que representa los "números cerca al 0".

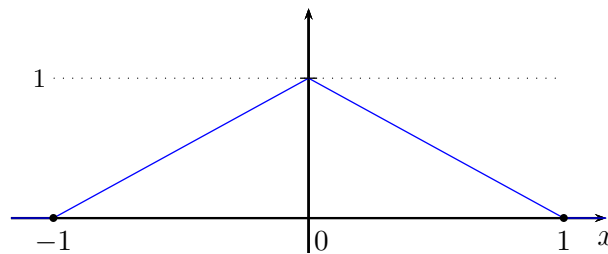


pero así mismo, en otro contexto, otra posible función de pertenencia para este

mismo concepto podría ser:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1, \\ x, & \text{si } x \in [-1, 0), \\ -x, & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

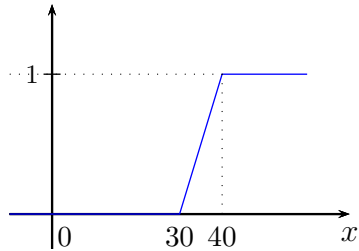
Figura 2. Conjunto difuso que representa los "números cerca al 0".



Ejemplo 1.1.2. Queremos definir un conjunto difuso que represente las plantas con un porcentaje alto de contaminación de cierta plaga, sobre todas las plantas de cierto cultivo; en este caso podemos usar la función de pertenencia:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 30, \\ \frac{x}{10} - 3, & \text{si } x \in [30, 40], \\ 1, & \text{si } x \in (40, 100]. \end{cases}$$

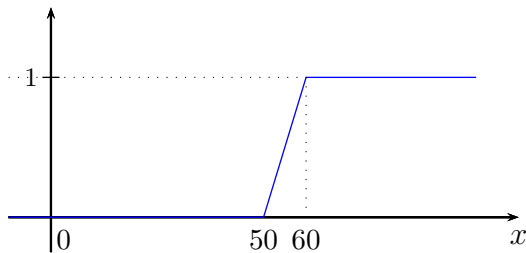
Figura 3. Conjunto difuso que representa "las plantas con un porcentaje alto de contaminación".



donde el eje x indica el porcentaje de frutos contaminados. Sin embargo, es posible que por el tipo de cultivo la planta estudiada necesite de al menos el 50% de los frutos contaminados para que el agrónomo la considere lo suficientemente contaminada y ya sea de preocupación; en este caso una función de pertenencia podría ser la siguiente:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 50, \\ \frac{x}{10} - 5, & \text{si } x \in [50, 60], \\ 1, & \text{si } x \in (60, 100]. \end{cases}$$

Figura 4. Conjunto difuso que representa "las plantas con un porcentaje alto de contaminación".



Con esto recalcamos que los factores que asociados con el contexto del problema nos ayudan a definir una función de pertenencia más adecuada dependiendo de los objetivos que proponemos alcanzar.

1.2. OPERACIONES BÁSICAS ENTRE CONJUNTOS DIFUSOS

Dentro de la teoría clásica de conjuntos, son definidas tres operaciones básicas entre los subconjuntos de un conjunto X , a saber, la unión, la intersección y el complemento. Sobre la familia $P(X)$ de todos los subconjuntos de un conjunto X , los conjuntos unión, intersección y el complemento, dados por $A, B \in P(X)$,

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ o } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A \text{ y } x \in B\},$$

$$A^c = \{x \in X | x \notin A\},$$

pueden ser caracterizados en términos de la función característica como:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \text{máx}\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \text{mín}\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A(x).$$

Esta caracterización permite extender de manera natural estas tres operaciones al contexto de los conjuntos difusos, cambiando las respectivas funciones características por las siguientes funciones de pertenencia que representan nuevamente conjuntos difusos:

$$(\mu_A \vee \mu_b)(x) = \text{máx}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = A(x) \vee B(x) = (A \vee B)(x),$$

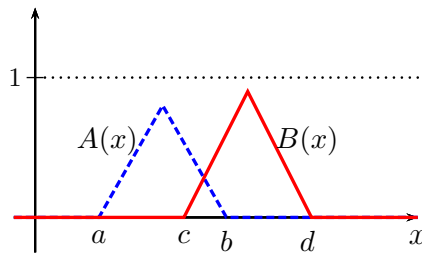
$$(\mu_A \wedge \mu_b)(x) = \text{mín}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = A(x) \wedge B(x) = (A \wedge B)(x),$$

$$(\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)).$$

Para representar el máximo y el mínimo entre los valores $A(x)$ y $B(x)$, es usual considerar las notaciones $A(x) \vee B(x)$ y $A(x) \wedge B(x)$ respectivamente. Con la siguiente ilustración podemos comprender gráficamente cómo funcionan estos operadores entre conjuntos difusos.

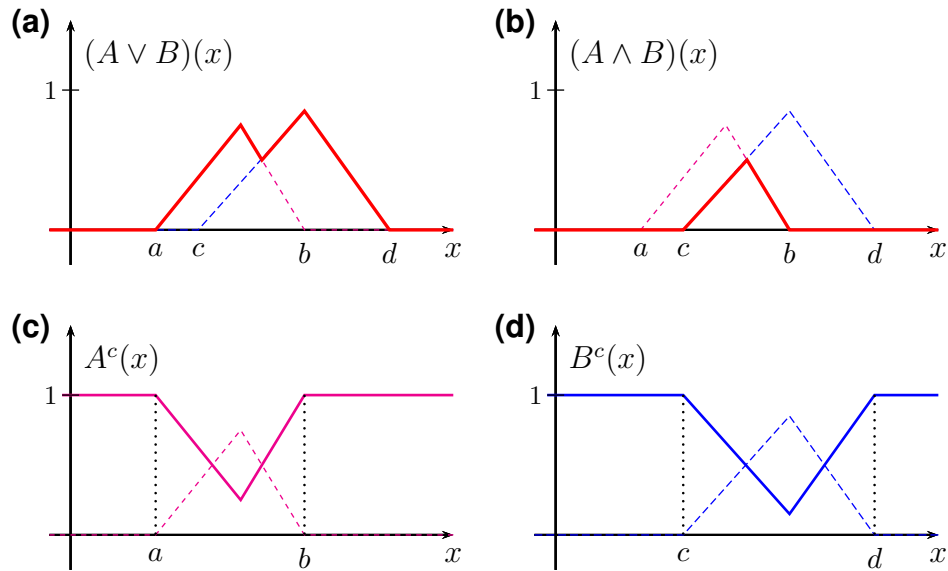
Sean A y $B \in \mathcal{F}(X)$ con funciones de pertenencia representadas en la Figura 1.1.

Figura 5. Ilustración de $A(x)$ y $B(x)$.



La unión e intersección de A y B , así como el complemento de A y de B son representados en la Figura 6.

Figura 6. Ilustración de las operaciones básicas sobre conjuntos difusos.



Aunque la mayoría de propiedades del álgebra de la teoría clásica de conjuntos se mantiene, como la distributividad, la identidad, la involución, entre otras, existen algunas excepciones como es el caso de las propiedades de la contradicción y la media inclusión, es decir, en $\mathcal{F}(X)$ no es cierto que $A \vee A^c = X$ y tampoco que $A \wedge A^c = \emptyset$. Este es el contenido de la siguiente proposición. (para detalles ver ³).

Proposición 1.2.1. Si $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, se satisfacen las siguientes propiedades:

Asociatividad: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ y $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

Conmutatividad: $A \vee B = B \vee A$ y $A \wedge B = B \wedge A$.

³ G. ARENAS DÍAZ y E. J. VILLAMIZAR ROA. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, 2018.

Distributividad: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ y $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Identidad: $A \vee \emptyset = A$ y $A \wedge X = A$.

Involución: $(A^c)^c = A$.

Idempotencia: $A \vee A = A$ y $A \wedge A = A$.

Absorción: $A \vee (A \wedge B) = A$ y $A \wedge (A \vee B) = A$.

Absorción por \emptyset y X : $A \vee X = X$ y $A \wedge \emptyset = \emptyset$.

Leyes de de Morgan: $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$ y $(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$.

Como se mencionó anteriormente, los conjuntos difusos en general no cumplen con la ley de contradicción, es decir, en general $A \vee A^c \neq X$ y $A \wedge A^c \neq \emptyset$. Por ejemplo, en el conjunto difuso $A : X \rightarrow [0, 1]$ definido de tal manera que $A(x) \geq \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$, tenemos que $A \vee A^c = A$ y $A \wedge A^c = A^c$; por otra parte, observemos que si el conjunto difuso $A : X \rightarrow [0, 1]$ es definido de tal manera que $A(x) \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in X$, tenemos que $A \vee A^c = A^c$ y $A \wedge A^c = A$; de hecho si $A(x) \notin \{0, 1\}$ entonces $A(x) \in (0, 1)$; por lo tanto, también tenemos que $A(x)^c \in (0, 1)$ y en consecuencia $(A \vee A^c)(x), (A \wedge A^c)(x) \in (0, 1)$.

1.3. α -NIVELES DE UN CONJUNTO DIFUSO

Asociado al concepto de conjunto difuso está la definición de α -nivel de un conjunto difuso; concepto que cobra importancia no solo a la hora de caracterizar los conjuntos difusos en términos de sus α -niveles, sino a la hora de analizar las funciones difusas desde el punto de vista de la continuidad, la diferenciabilidad, la integrabili-

dad, etc.

Definición 1.3.1. (α -nivel) Dado un conjunto difuso $u : X \rightarrow [0, 1]$, y cualquier número $\alpha \in (0, 1]$, el α -nivel $[u]^\alpha$ de u corresponde al conjunto:

$$[u]^\alpha = \{x | u(x) \geq \alpha\}.$$

No consideramos el caso cuando $\alpha = 0$ pues no sería útil definir $[u]^0 = \{x \in X | u(x) \geq 0\}$ dado que en ese caso, $[u]^0 = X$; es por esta razón que se introduce el concepto de *soporte* de un conjuntos difuso, como se verá a continuación.

Definición 1.3.2. (Soporte) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un espacio topológico, y consideremos el conjunto difuso $u : X \rightarrow [0, 1]$. El soporte de un conjunto difuso u se define como la clausura del conjunto de todos los $x \in X$ tales que su valor de pertenencia es positivo, es decir,

$$[u]^0 = \overline{\{x \in X | u(x) > 0\}}.$$

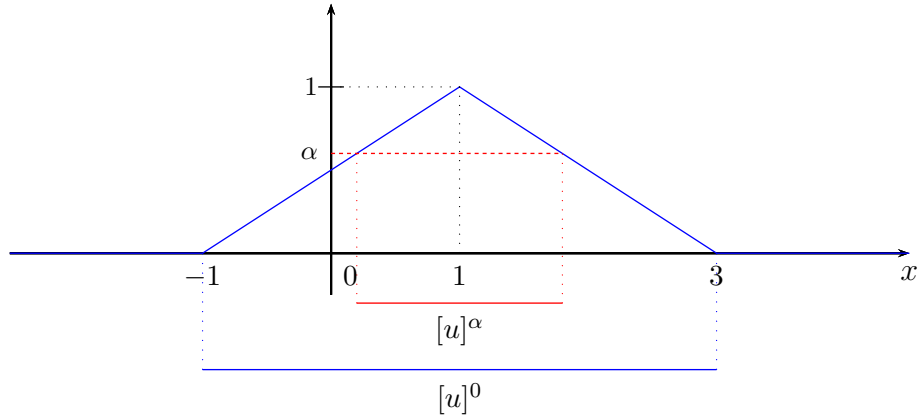
Ejemplo 1.3.3. Consideremos un conjunto difuso que represente los números cercanos al 1, dado por la función de pertenencia,

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 3, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [-1, 1), \\ \frac{3}{2} - \frac{x}{2}, & \text{si } x \in [1, 3]. \end{cases}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \alpha$ y $\frac{3}{2} - \frac{x}{2} = \alpha$, obtenemos que los α -niveles están dados por:

$$[u]^\alpha = [2\alpha - 1, 3 - 2\alpha], \quad \alpha \in (0, 1],$$

Figura 7. Ilustración de $[u]^\alpha$ y $[u]^0$.



Por su parte, el soporte de $u(x)$ es el intervalo $[-1, 3]$.

Una propiedad importante de los α -niveles que sigue inmediatamente a partir de la definición, es que el orden total de los valores de α en $[0, 1]$ es preservado inversamente por la inclusión de conjuntos de los α -niveles respectivos; es decir, dado un conjunto difuso u y dos valores $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, tal que $\alpha_1 < \alpha_2$, tenemos que

$$[u]^{\alpha_1} \supseteq [u]^{\alpha_2}. \quad (1.1)$$

Otra propiedad interesante de los α -niveles es que la unión de α -niveles de dos conjuntos, es equivalente al α -nivel de la unión de los dos conjuntos; igualmente para la intersección; es decir, dados dos conjuntos difusos u_1 y u_2 , y un valor $\alpha \in [0, 1]$, tenemos que

$$[u_1 \cap u_2]^\alpha = [u_1]^\alpha \cap [u_2]^\alpha, \quad (1.2)$$

$$[u_1 \cup u_2]^\alpha = [u_1]^\alpha \cup [u_2]^\alpha. \quad (1.3)$$

En efecto, para cada $x \in [u_1 \cap u_2]^\alpha$, se tiene que $(u_1 \cap u_2)(x) \geq \alpha$, y por lo tanto,

$\min\{u_1(x), u_2(x)\} \geq \alpha$. Esto quiere decir que $u_1(x) \geq \alpha$ y $u_2(x) \geq \alpha$, de lo cual $x \in [u_1]^\alpha \cap [u_2]^\alpha$, y en consecuencia, $[u_1 \cup u_2]^\alpha \subseteq [u_1]^\alpha \cup [u_2]^\alpha$. Para ver la otra contención, notemos que para todo $x \in [u_1]^\alpha \cup [u_2]^\alpha$, se tiene que $x \in [u_1]^\alpha$ y $x \in [u_2]^\alpha$, por lo tanto $u_1(x) \geq \alpha$ y $u_2(x) \geq \alpha$. Así, $\min\{u_1(x), u_2(x)\} \geq \alpha$, lo que implica que $(u_1 \cap u_2)(x) \geq \alpha$, entonces $x \in [u_1 \cap u_2]^\alpha$, y concluimos que $[u_1 \cup u_2]^\alpha \supseteq [u_1]^\alpha \cup [u_2]^\alpha$. Esto muestra que $[u_1 \cap u_2]^\alpha = [u_1]^\alpha \cap [u_2]^\alpha$. La prueba de (1.3) es análoga.

1.4. TEOREMAS DE REPRESENTACIÓN

La principal función de los α -niveles en la teoría de conjuntos difusos es la de representar conjuntos difusos. En esta sección mostraremos que cada conjunto difuso puede ser representado por la familia de todos sus α -niveles. Esta extensión nos permite extender ciertas propiedades y operaciones de los conjuntos clásicos a los conjuntos difusos.

Teorema 1.4.1. 3 Sean X un espacio topológico y $\{N_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}$ una familia de subconjuntos de X tales que:

1. $N_0 = X$;
2. si $\alpha \leq \beta$, entonces $N_\beta \subset N_\alpha$;
3. si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$, entonces $N_\alpha = \bigcap_{p=1}^{\infty} N_{\alpha_p}$.

Entonces, la función $u : X \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$u(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] | x \in N_\alpha\}$$

es un conjunto difuso tal que $[u]^\alpha = N_\alpha$ para cada $\alpha \in [0, 1]$.

El siguiente teorema muestra cómo descomponer un conjunto difuso en términos de sus α -niveles.

Teorema 1.4.2. \square (Teorema de descomposición). Para todo $u \in \mathcal{F}(X)$ se tiene que

$$u = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha},$$

donde $\chi_{[u]^\alpha}$ es la función característica del α -nivel de u y \bigvee denota la unión (no numerable) de conjuntos difusos.

1.5. PRINCIPIO DE EXTENSIÓN

Una pregunta natural que surge a la hora de trabajar con conjuntos difusos es la de cómo operarlos; por ejemplo, consideremos la suma de conjuntos difusos sobre un espacio vectorial topológico X ; si la suma se realiza como se suman funciones ordinarias cabe la posibilidad de que obtengamos un elemento que no pertenezca a $\mathcal{F}(X)$, es decir, es posible que existe un $x \in X$ tal que

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \notin [0, 1].$$

Esto mismo sucede con otras operaciones como la multiplicación por escalar. *El Principio de extensión de Zadeh* \square permite operar adecuadamente sobre $\mathcal{F}(x)$, estableciendo que dada una función $f : X \rightarrow Y$, ésta se puede extender a conjuntos difusos por medio de la aplicación $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, donde \tilde{f} se define para cada $u \in \mathcal{F}(X)$, como:

$$\tilde{f}(u)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$.

El siguiente resultado permite caracterizar el principio de extensión cuando f es

biyectiva.

Teorema 1.5.1. 3 Si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva, entonces

$$\tilde{f}(u)(y) = u(f^{-1}(y)).$$

Demostración. Sabemos que si f es biyectiva, entonces $f(x) = y$ si, y solo si, $f^{-1}(y) = x$, así, se tiene que

$$\sup_{x \in f^{-1}(y)} u(x) = u(f^{-1}(y)),$$

si $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, por lo tanto, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u)(y) &= \begin{cases} u(f^{-1}(y)), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \\ &= u(f^{-1}(y)). \end{aligned}$$

□

De manera similar, si X_1, X_2 y Y son conjuntos no vacíos y $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$, el principio de extensión permite extender f al contexto difuso por medio de la aplicación $\tilde{f} : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, donde $\tilde{f}(u, v)$ está definida por

$$\tilde{f}(u_1, u_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\{u_1(x_1), u_2(x_2)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

para cada $y \in Y$, donde $f^{-1}(y)$ es el conjunto de todos los puntos de $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ tales que $f(x_1, x_2) = y$.

Si X posee una estructura lineal, por ejemplo \mathbb{R}^n , se puede definir la multiplicación de conjuntos difusos sobre $\mathcal{F}(X)$, a partir de el principio de extensión.

En particular, sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, por el principio de extensión, la multiplicación de conjuntos difusos a partir de esta función está definida por la aplicación $\tilde{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, donde $\tilde{f}(u, v)$ es dada por

$$\tilde{f}(u, v)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \min\{u(x_1), v(x_2)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

para cada $y \in Y$. Notemos que para cada $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$; así

$$(u \cdot v)(y) = \tilde{f}(u, v)(y) = \sup_{x_1 \cdot x_2 = y} \min\{u(x_1), v(x_2)\}.$$

Análogamente se puede definir la adición de conjuntos difusos y la multiplicación por escalar de un conjunto difuso sobre $\mathcal{F}(X)$, entre otros, como sigue:

Definición 1.5.2. (Adición y producto por escalar en $\mathcal{F}(X)$). Sea X un espacio vectorial. Si consideramos $f : X \times X \rightarrow X$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, entonces f induce, mediante el principio de extensión, la operación de adición sobre $\mathcal{F}(X)$ como

$$(u + v)(y) = \sup_{x_1 + x_2 = y} \min\{u(x_1), v(x_2)\}.$$

Análogamente, si $\lambda \in \mathbb{R}$, y consideramos $f : X \rightarrow X$ donde $f(x) = \lambda x$, entonces f induce, mediante el principio de extensión, la operación de multiplicación por escalar, sobre $\mathcal{F}(X)$ por

$$\tilde{f}(\lambda u)(y) = \begin{cases} u\left(\frac{y}{\lambda}\right), & \text{si } \lambda \neq 0, \\ \chi_{\{0\}}(x), & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

En el siguiente ejemplo se ilustra la suma y producto por escalar de conjuntos difusos.

Ejemplo 1.5.3. 3 Consideremos los siguientes conjuntos difusos u y v :

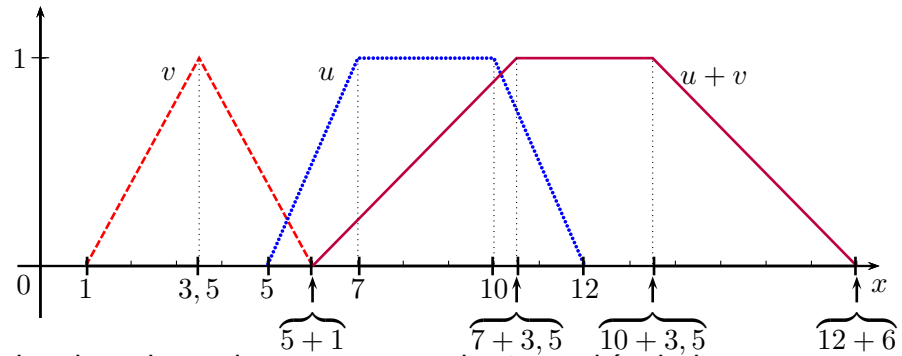
$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [5, 12], \\ \frac{x-5}{2}, & \text{si } x \in [5, 7], \\ 1, & \text{si } x \in (7, 10), \\ -\frac{x-12}{2}, & \text{si } x \in [10, 12]. \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [1, 6], \\ \frac{x-1}{2.5}, & \text{si } x \in [1, 3, 5], \\ -\frac{x-6}{2.5}, & \text{si } x \in [3, 5, 6]. \end{cases}$$

A partir del principio de extensión obtenemos que la suma de los conjuntos difusos u y v está dada por

$$u(x) + v(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [6, 18], \\ \frac{x-6}{4,5}, & \text{si } x \in [6, 10, 5], \\ 1, & \text{si } x \in (10, 5, 13, 5), \\ -\frac{x-18}{4,5}, & \text{si } x \in [13, 5, 18]. \end{cases}$$

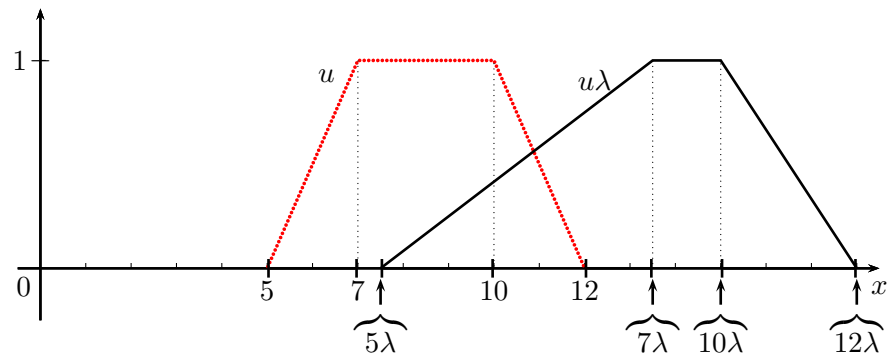
Figura 8. Suma de los conjuntos difusos v y u .



Por otro lado, el producto de u por un escalar λ vendría dado por:

$$\lambda u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [5\lambda, 12\lambda], \\ \frac{x - 5\lambda}{2\lambda}, & \text{si } x \in [5\lambda, 7\lambda], \\ 1, & \text{si } x \in (7\lambda, 10\lambda), \\ \frac{-x + 12\lambda}{2\lambda}, & \text{si } x \in [10\lambda, 12\lambda]. \end{cases}$$

Figura 9. Multiplicación del conjunto difuso u por un escalar λ .



1.6. NÚMEROS DIFUSOS

De todos los conjuntos difusos, existen ciertos conjuntos a los que se les da una importancia particular; estos conjuntos son los que tienen la forma

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$

Se pueden ver intuitivamente como aproximaciones de números o intervalos, por ejemplo “números que están cercanos a cierto número” o “números que están alrededor de un intervalo de números reales”.

Definición 1.6.1. Un número difuso es un conjunto difuso de la forma

$$u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

tal que cumple las siguientes tres propiedades:

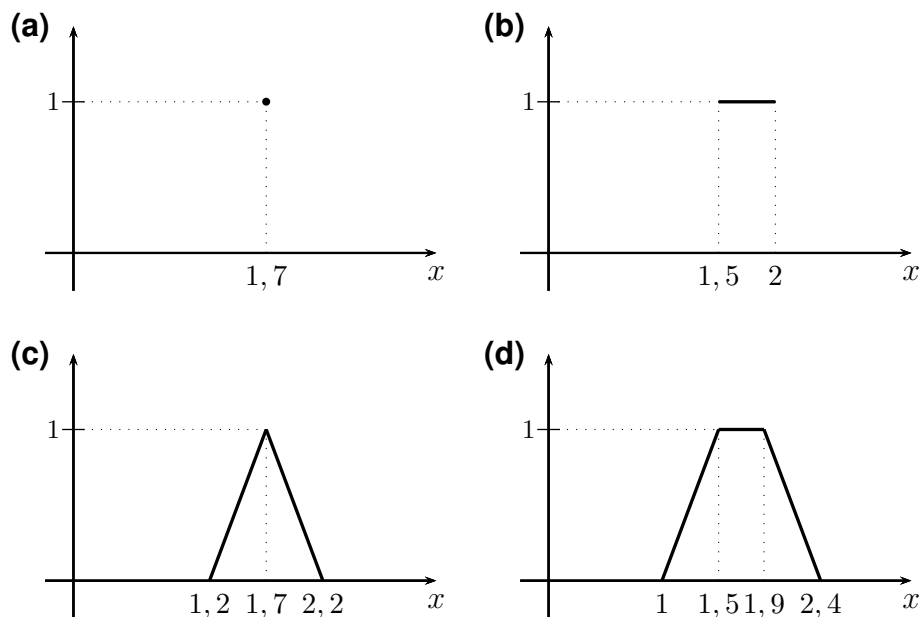
1. u es un conjunto difuso normal, es decir, existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x_0) = 1$, o, que $h(u) = 1$. En general, al valor $h(u) = \sup_{x \in X} u(x)$ es comúnmente denominado “altura” del número difuso u .
2. u es un convexo, es decir, $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.
3. $[u]^\alpha$ es un intervalo cerrado para todo $\alpha \in (0, 1]$.
4. el soporte de u , $[u]^0$, es compacto.

El conjunto difuso debe ser normal ya que este concepto de “números cercanos a c ” debe ser totalmente satisfecho por c . Las condiciones 2 y 3 son requeridas para que se nos permita definir operaciones aritméticas en términos de la aritmética estándar

definida sobre intervalos cerrados ³.

Algunos ejemplos de números difusos incluyen números reales ordinarios e intervalos de números reales, como se observa en la Figura 1.6 (a) es un número real (singleton difuso) 1,7 ; (b) un intervalo cerrado ordinario [1,5, 2], (c) un número difuso que representa los números “cercanos a 1,7”; y (d) lo que se conoce como un intervalo difuso [1,5, 1,9].

Figura 10. Comparación de los números e intervalos clásicos con los difusos.



El siguiente teorema nos permite caracterizar a los números difusos.

Teorema 1.6.2. ³ Sea $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, entonces u es un número difuso si, y solo si, existe un intervalo cerrado $[a, b] = \emptyset$ tal que

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a, b], \\ \ell(x), & \text{si } x \in (-\infty, a), \\ r(x), & \text{si } x \in (b, \infty), \end{cases}$$

donde ℓ es una función de $(-\infty, a)$ a $[0, 1]$ creciente, continua por la derecha, y tal que $\ell(x) = 0$ si $x \in (-\infty, a_1)$ para algún $a_1 \leq a$; $r(x)$ es una función de (b, ∞) a $[0, 1]$ decreciente, continua por la izquierda, y tal que $r(x) = 0$ si $x \in (b_1, \infty)$ para algún $b_1 \geq b$.

1.7. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN NÚMEROS DIFUSOS

Para desarrollar la aritmética de los números difusos es posible hacerlo de la mano del principio de extensión de Zadeh. Explícitamente,

$$u \odot v(z) = \sup_{z=x \odot y} \min\{u(x), v(y)\}$$

para todo $z \in \mathbb{R}$, donde \odot denota cualquiera de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Recalamos que, para la operación de la división, es necesario que el soporte $[v]^0$ no contenga al 0.

Por el teorema de descomposición, sabemos que todo conjunto difuso puede ser representado en término de sus α -niveles; además, sabemos que cada α -nivel es un intervalo cerrado, con lo cual podemos definir (caracterizar) las operaciones aritméticas en función de sus α -niveles. Recordemos que las operaciones aritméticas sobre intervalos cerrados se definen de la siguiente manera:

Si a, b, d, e números reales, entonces

1. $[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e]$;
2. $[a, b] - [d, e] = [a - e, b - d]$;
3. $[a, b] \cdot [d, e] = [\min(ad, ae, bd, be), \max(ad, ae, bd, be)]$;

Si $0 \notin [d, e]$, entonces

$$4. [a, b]/[d, e] = [a, b] \cdot [\frac{1}{e}, \frac{1}{d}] = \min(\frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}), \max(\frac{a}{d}, \frac{a}{e}, \frac{b}{d}, \frac{b}{e}).$$

Observación: En el caso de los números difusos, si u y v son números difusos y \odot cualquiera de las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación o división, el conjunto difuso $u \odot v$ se expresa a partir de sus α -niveles y soporte como

$$[u \odot v]^\alpha = [u]^\alpha \odot [v]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

2. Lógica difusa

A partir del concepto de conjunto difuso, es natural extender algunos elementos de la lógica matemática a este ámbito. Así como en el caso clásico en donde la lógica nos brinda métodos de razonamiento que permiten deducir afirmaciones a partir de premisas, su extensión al concepto difuso también tiene esa finalidad; en particular, la lógica difusa es la base para el desarrollo de los sistemas de inferencia difusa, que corresponden a sistemas que intentan reproducir la estrategia de un controlador humano en la ejecución de tareas.

En la primera parte del capítulo daremos algunos conceptos básicos de la lógica clásica, con el fin de extenderlos al contexto difuso. Posteriormente introduciremos los operadores *t-norma*, *t-conorma* y *negación difusa* que se refieren a la extensión al concepto difuso de los operadores de *intersección*, *unión* y *complemento*, respectivamente. Seguidamente, se presentarán los conceptos de variable lingüística, relación difusa y proposiciones difusas, que serán fundamentales para el desarrollo correcto de la implicación difusa e inferencia difusa, los cuales serán introducidos en las secciones finales del presente capítulo.

2.1. GENERALIDADES

Alrededor del año 300 *a.c* comenzaron los estudios de la *Lógica* a manos de Aristóteles, quien la estableció como base del pensamiento formal, pues consideraba que todas las ciencias se rigen por los mismos principios generales de razonamiento ⁴.

⁴ T. R. PÉREZ. *¿Existe el método científico?* <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/161/html/toc.html>. 1990.

Aristóteles planteó por primera vez el concepto de lógica con el propósito de formalizar razonamientos por medio del lenguaje natural y al presentar como argumento válido al silogismo, que consiste en el razonamiento constituido por dos premisas y una conclusión que se deduce a partir de las dos premisas. Hoy en día, la lógica se define como el estudio de los métodos, formas y principios por los cuales se rige el razonamiento, enfocándose en formas de inferencia válidas⁵. Una de sus ramas, es llamada lógica simbólica, en la cual encontramos la lógica proposicional, la más semejante a la lógica desarrollada por Aristóteles, puesto que consiste en el estudio de proposiciones o enunciados, los métodos de vincularlas por medio de conectores lógicos, similar a como lo planteaba Aristóteles con los silogismos, y las relaciones derivadas de estos procedimientos; dichas proposiciones son la unidad mínima de significado susceptibles de ser verdaderas o falsas.⁶

La afirmación de que un enunciado solo permite dos valores de verdad, verdadero o falso, es muy polémica, debido a que se considera que cada enunciado puede no ser verdadero en absoluto, pero tampoco falso; es así, que en el siglo *XX*, se comienzan a proponer distintas lógicas multivaluadas, donde cada enunciado puede tener valores de verdad como *algo falso*, *algo verdadero*, *casi falso*, etc.⁷

Un ejemplo de estas lógicas multivaluadas es la lógica trivalente, que afirma que además de las proposiciones verdaderas y falsas, existen proposiciones que no son verdaderas ni falsas; así, se definen tres valores de verdad que son: verdadero, falso

⁵ M. E. RAFFINO. *Lógica*. <https://concepto.de/logica/>. 2020.

⁶ A. PÁEZ. "Introducción a la lógica moderna". En: (2007).

⁷ A. OOSTRA. "Sobre lógicas multivaluadas". En: *Revista Integración* 22.1 and 2 (2004), págs. 7-21.

e indeterminado, y se expresan numéricamente como $1, 0, \frac{1}{2}$, respectivamente. Así mismo, son definidas otras lógicas multivaluadas, ya sean con 4, 5 o n valores de verdad. ⁸

Con el surgimiento de concepto de conjunto difuso, y de la mano del desarrollo de las lógicas multivaluadas, se define la lógica difusa, que corresponde a una lógica multivaluada que considera todos los posibles valores de verdad; es decir, permite tomar todos los valores en el intervalo $[0, 1]$, y no únicamente 0 y 1 como en la lógica clásica; en este caso, si una sentencia p tiene un valor de verdad de 0.9, se puede interpretar diciendo que la sentencia no es totalmente cierta, pero está relativamente muy cerca de serlo.

Para poder extender correctamente sentencias o proposiciones al contexto difuso, es necesario introducir el concepto de variable lingüística, que se refiere a una variable en la cual sus posibles valores son palabras, y a estos valores se les define como términos lingüísticos, que se representan por conjuntos difusos, lo cual *a posteriori* nos permite emplear las proposiciones difusas, de la mano de los operadores lógicos difusos, en el desarrollo de la implicación y inferencia difusa.

A diferencia de la lógica clásica, hay ciertas leyes que en la lógica difusa no son válidas, como lo son la ley del tercero excluido y la ley de contradicción, puesto que mientras en la lógica clásica la negación de una proposición es 0 si la proposición es verdadera o 1 si es falsa, en el contexto difuso, como ya se mencionó, el valor de verdad de la proposición, está en $(0, 1)$, lo que hace que el valor de verdad de su negación también lo esté; por lo tanto, se reafirma que hay una diferencia entre am-

⁸ J. SŁUPECKI, G. BRYLL y T. PRUCNAL. "Some remarks on three-valued logic of J. Łukasiewicz". En: *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic* 21 (1967), 45-70.

bas lógicas, y se infiere que el desarrollo de esta teoría tendrá notables diferencias⁹.

Así mismo, los operadores lógicos difusos *no*; *y*; *o*; *si*, *entonces*; *si*, *y solo si*, son una generalización de los operadores clásicos y se reducen a estos últimos cuando los valores de verdad sobre los que se operan son los del conjunto $\{0, 1\}$. Aunque los operadores de *si*, *entonces*, y *si, y solo si*, se pueden escribir en términos de los operadores *y*; *o*; *no*, en el contexto difuso existen varias definiciones no equivalentes entre sí, lo que conlleva a que el concepto de implicación difusa sea un poco más complejo, a diferencia del concepto de negación, conjunción o disyunción difusa, que aunque poseen ciertas diferencias con los casos clásicos, sus definiciones no poseen tantas complicaciones.

Otro concepto fundamental la lógica clásica, es el de *relación*, que permite, como su nombre lo indica, relacionar elementos con ciertas características en común, y por tal razón, también es necesario extender dicho concepto al contexto difuso, donde a diferencia de la relación clásica, en la cual los elementos están relacionados totalmente o no lo están en absoluto, en la relación difusa es posible que los elementos no estén relacionados totalmente, pero si tengan un cierto nivel de relación y no tomar valores de 0 (ninguna relación) o 1 (totalmente relacionado), sino valores en el intervalo $(0, 1)$, representando valores de relación intermedios.

Debido a que una de las características fundamentales de la lógica es que logramos deducir afirmaciones a partir de premisas dadas, es necesario extender dicha propiedad al contexto difuso; en el caso clásico este proceso se le conoce como inferencia, y por lo tanto, en el contexto difuso, nos referiremos como inferencia difusa.

⁹ N. da COSTA, D. KRAUSE y O. BUENO. "Paraconsistent logics and paraconsistency". En: *Philosophy of logic*. Elsevier, 2007, 791-911.

Este concepto, nuevamente será una extensión del caso clásico, y será fundamentado por lo conceptos de proposición difusa e implicación difusa.

2.2. OPERADORES LÓGICOS EN LA LÓGICA CLÁSICA

Los fundamentos de la lógica clásica se basan en el estudio de los operadores lógicos conjunción, disyunción y negación. Con estos operadores clásicos es posible describir sentencias producto de combinaciones de estos operadores, con un valor lógico determinado por las tablas de verdad de cada uno de los operadores involucrados. En la lógica clásica aprendimos que cada uno de estos operadores clásicos tiene una representación dada de la siguiente manera:

1. **Conjunción** = $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$(p, q) \rightarrow (p \wedge q) = \text{mín}\{p, q\};$$

2. **Disyunción** = $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$(p, q) \rightarrow (p \vee q) = \text{máx}\{p, q\};$$

3. **Negación** = $\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$(p) \rightarrow \neg(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 1, \\ 1, & \text{si } p = 0; \end{cases}$$

4. **Implicación** = $\Rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

$$(p, q) \rightarrow (p \Rightarrow q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p = 1 \text{ y } q = 0, \\ 1, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Los valores de verdad para estos operadores lógicos se representan en la Tabla 2.1:

Tabla 1. Valores de verdad de los operadores lógicos.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

Como se mencionó, desde que se iniciaron los estudios sobre lógica, se ha cuestionado el hecho de que cada proposición solamente pueda ser verdadera o falsa, generándose así nuevas lógicas, donde ya no se toman solo valores de 0 (falso) y 1 (verdadero), sino también valores en $(0, 1)$; éstas son llamadas *lógicas multivaluadas*. La *lógica difusa* se refiere a la lógica que toma los valores en $[0, 1]$ y cada uno de estos valores son interpretados como *valores de verdad*; por lo tanto, se puede decir que la lógica clásica es un caso particular de la lógica difusa, y la mayoría de los conceptos de inferencia, relaciones y proposiciones los podemos extender a esta lógica.

Con el propósito de extender los operadores lógicos \vee , \wedge , \neg y \Rightarrow al concepto difuso, sabiendo que ahora los valores de verdad pertenecen al intervalo $[0, 1]$, se introducen los conceptos de *t-norma*, *t-conorma*, *negación e implicación difusa*.

Es posible que diferentes fórmulas representen la misma función lógica, es decir, sus valores de verdad son los mismos; en caso de ser así son consideradas equivalentes. Por ejemplo,

$$\neg(v_1 \vee v_2) \Rightarrow (v_3) = (v_1 \vee v_2 \vee v_3),$$

lo cual es sencillo de verificar, evaluando ambas fórmulas en las 8 combinaciones de valores de verdad de las variables lógicas v_1, v_2, v_3 .

Cuando la variable representada por la fórmula lógica es siempre verdad, sin importar el valor de verdad asignado a las variables, es llamada una *tautología*; cuando siempre es falso es llamada *contradicción*. Por ejemplo, cuando dos fórmulas a y b son equivalentes, $\neg a \vee b$ es una tautología y $a \wedge \neg b$ es una contradicción.

Las tautologías son importantes en el razonamiento deductivo, pues por su estructura, son verdad siempre y nos permiten hacer deducciones más fácilmente. Las utilizadas para hacer inferencia deductiva son llamadas *reglas de inferencia*. Las tautologías utilizadas con mayor frecuencia son:

$$(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b \text{ (modus ponens),}$$

$$(\neg b \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow \neg a \text{ (modus tollens),}$$

$$((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \text{ (silogismo hipotético).}$$

El *modus ponens* dice que dadas dos proposiciones “ a ” y “ $a \Rightarrow b$ ”, llamadas premisas, la verdad de la proposición “ b ” puede ser deducida; el *modus tollens* afirma que dadas las premisas $\neg b$ y $a \Rightarrow b$, se deduce $\neg a$; el *silogismo hipotético* que si se tienen las premisas $(a \Rightarrow b)$ y $(b \Rightarrow c)$ entonces se puede deducir que $(a \Rightarrow c)$. Un ejemplo sencillo del *modus ponens* es el siguiente:

Si Juliana va a bailar, entonces Juliana se divierte. Sabemos que Juliana si fue a bailar, así, sea $p = \text{Juliana va a bailar}$ y $q = \text{Juliana se divierte}$, por lo tanto tenemos que p y $p \Rightarrow q$ son ciertas, así por el *modus ponens* podemos deducir que q es cierto, es decir, que Juliana se divirtió. La estructura formal de esta demostración es la siguiente:

Ahora, en el ejemplo anterior, si sabemos que Juliana no se divierte, entonces con el *modus tollens* podemos concluir que Juliana no fue a bailar. La estructura de esa

1. $p \Rightarrow q$ premisa.
2. p premisa.
3. q modus ponens (1 y 2).

demostración es la siguiente:

1. $p \Rightarrow q$ premisa.
2. $\neg q$ premisa.
3. $\neg p$ modus tollens (1 y 2).

Finalmente, si conocemos que si Juliana va a bailar entonces Juliana se divierte, y que si Juliana se divierte entonces Juliana tiene buenas notas, a partir del *silogismo hipotético* podemos concluir que si Juliana va a bailar entonces Juliana tiene buenas notas. La estructura de dicha demostración es la siguiente:

1. $p \Rightarrow q$ premisa
2. $q \Rightarrow r$ premisa
3. $p \Rightarrow r$ silogismo hipotético (1 y 2).

Por otro lado, las proposiciones son frases expresadas en algún lenguaje, y cada una de estas frases, que representan proposiciones, es dividida en *objeto* y *predicado*; en otras palabras, una proposición simple puede ser expresada como

$$x \text{ es } p,$$

donde x es el símbolo de un objeto y p se refiere a un predicado que caracteriza cierta propiedad ²; por ejemplo, *Finlandia es frío*, en este caso *Finlandia* es el objeto, y *frío* el predicado. En general, si tomamos x como cualquier objeto de un universo X , $p(x)$ denota una función que para cada elemento de X forma una proposición.

2.3. OPERADOR LÓGICO DIFUSO T-NORMA

Uno de los operadores lógicos clásicos es la conjunción, y para el desarrollo de la lógica difusa es necesario extender este concepto al contexto difuso. La extensión de este concepto es a lo que se denomina *t-norma*.

Definición 2.3.1. Una *t-norma* es una función de la forma

$$i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $i(a, 1) = a$ (elemento neutro);
2. $i(a, b) = i(b, a)$ (conmutatividad);
3. $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (asociatividad);
4. $b \leq d$ implica $i(a, b) \leq i(a, d)$ (monotonicidad).

Ejemplo 2.3.2. Los siguientes son ejemplos de las *t-normas* usadas con mayor frecuencia.

1. **Intersección estándar:** $i(a, b) = \min\{a, b\}$;
2. **Producto algebraico:** $i(a, b) = ab$;
3. **Diferencia acotada:** $i(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$;
4. **Intersección drástica:** $i(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 1, \\ b & \text{si } a = 1, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$

No todas las propiedades que se cumplen con la intersección clásica, se verifican con las *t-normas*; esto lo podemos observar con el siguiente teorema que nos revela una propiedad interesante de las *t-normas*.

Teorema 2.3.3. 2 La intersección difusa estándar es la única *t-norma* idempotente, es decir $i(a, a) = a \Leftrightarrow i(a, a) = \min\{a, b\}$.

Demostración. Es claro que $\min\{a, a\} = a$, para todo $a \in [0, 1]$. Ahora supongamos que existe una t -norma tal que $i(a, a) = a$, para todo $a \in [0, 1]$. Entonces, para cada $a, b \in [0, 1]$, si $a \leq b$, tenemos que

$$a = i(a, a) \leq i(a, b) \leq i(a, 1) = a,$$

por la monotonía y la propiedad del elemento neutro. Por lo tanto $i(a, b) = a = \min\{a, b\}$. De manera similar, si $b \leq a$, entonces $b = i(b, b) \leq i(a, b) \leq i(1, b) = b$, y así, $i(a, b) = b = \min\{a, b\}$. De lo anterior se concluye que $i(a, b) = \min\{a, b\}$, para todo $a, b \in [0, 1]$. \square

El siguiente teorema establece una propiedad sobre el rango de todas las t -normas.

Teorema 2.3.4. \square Para todo $a, b \in [0, 1]$ se tiene que

$$i_{\min}(a, b) \leq i(a, b) \leq \min\{a, b\},$$

donde i_{\min} denota la intersección drástica.

Demostración. Veamos primero que $\min\{a, b\} \leq i(a, b) \leq \min\{a, b\}$. Por la propiedad del elemento neutro y la monotonía, $i(a, b) \leq i(a, 1) = a$, y por la conmutatividad, $i(a, b) = i(b, a) \leq i(b, 1) = b$. Por lo tanto, $i(a, b) \leq a$ y $i(a, b) \leq b$; es decir, $i(a, b) \leq \min\{a, b\}$. Veamos ahora que $i_{\min}(a, b) \leq i(a, b)$. Nuevamente, por la propiedad del elemento neutro, $i(a, b) = a$ cuando $b = 1$, e $i(a, b) = b$ cuando $a = 1$. Notemos que por definición, $i(a, b) \geq 0$, para todo $a, b \in [0, 1]$. Concluimos que $i_{\min}(a, b)$ es el ínfimo de $i(a, b)$ para cualquier $a, b \in [0, 1]$, puesto que, cuando $i_{\min}(a, b)$ toma un valor distinto de 0, que sucede en el caso que a o b tomen el valor de 1, vimos que toda t -norma es equivalente a $i_{\min}(a, b)$; además, como $i(a, b) \geq 0$, para todo $a, b \in [0, 1]$, entonces $i_{\min}(a, b) \leq i(a, b)$, para todo $a, b \in [0, 1]$. \square

En particular, el *producto algebraico* es mayor o igual que la *diferencia acotada*, es

decir, $ab \geq \max\{0, a + b - 1\}$. Para mostrar lo anterior, notemos que $0 \leq a, b \leq 1$, así $0 \leq ab$. Por otro lado, como $a + b - ab = a + b(1 - a)$, se tiene que $a + b(1 - a) \leq a + 1(1 - a) = 1$, por consiguiente $a + b - ab \leq 1$, de donde concluimos que $a + b - 1 \leq ab$. De esta manera, vemos que $i_{\min}(a, b) \leq \max\{0, a + b - 1\} \leq ab \leq i(a, b) \leq \min\{a, b\}$. Es preciso aclarar que, en general no es posible definir un orden lineal entre todas las *t-normas*.

2.4. OPERADOR LÓGICO DIFUSO T-CONORMA

Uno de los operadores lógicos clásicos es la disyunción, y para el desarrollo de la lógica difusa es necesario extender este concepto al contexto difuso. La extensión de este concepto es a lo que se denomina *t-conorma*.

Definición 2.4.1. Una *t-conorma* es una función de la forma

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $u(a, 0) = a$ (elemento neutro);
2. $u(a, b) = u(b, a)$ (conmutatividad);
3. $u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d)$ (asociatividad);
4. $b \leq d$ implica $u(a, b) \leq u(a, d)$ (monotonicidad).

Ejemplo 2.4.2. Los siguiente son ejemplos de las *t-conormas* usadas con mayor frecuencia.

1. **Unión estándar:** $u(a, b) = \max\{a, b\}$;
2. **Suma algebraica:** $u(a, b) = a + b - ab$;

3. **Suma acotada:** $u(a, b) = \min\{1, a + b\}$;

4. **Unión drástica:** $u(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } b = 0, \\ b & \text{si } a = 0, \\ 1 & \text{caso contrario.} \end{cases}$

Nuevamente, no todas las propiedades que se cumplen con la unión clásica, son verificadas por las *t-conormas*; esto lo podemos observar con el siguiente teorema que nos revela una propiedad interesante de las *t-conormas*.

Teorema 2.4.3. \square La unión difusa estándar es la única *t-conorma* idempotente, es decir, $u(a, a) = a \Leftrightarrow u(a, a) = \max\{a, b\}$.

Demostración. Es claro que $\max(a, a) = a$, para todo $a \in [0, 1]$. Ahora supongamos que existe una *t-conorma* tal que $u(a, a) = a$, para todo $a \in [0, 1]$. Entonces, para cada $a, b \in [0, 1]$, si $a \geq b$, tenemos que

$$a = u(a, a) \geq u(a, b) \geq u(a, 0) = a$$

por la monotonía y la condición de acotamiento. Por lo tanto, $u(a, b) = a = \max\{a, b\}$. De manera similar, si $b \geq a$, entonces $b = u(b, b) \geq u(a, b) \geq u(0, b) = b$, y así, $u(a, b) = b = \max\{a, b\}$. Consecuentemente $u(a, b) = \max\{a, b\}$, para todo $a, b \in [0, 1]$. \square

El siguiente teorema establece una propiedad sobre el rango de todas las *t-conormas*.

Teorema 2.4.4. \square Para todo $a, b \in [0, 1]$ se tiene que

$$\max\{a, b\} \leq u(a, b) \leq u_{\max}(a, b),$$

donde u_{\max} denota la unión drástica.

Demostración. Veamos primero que $\text{máx}\{a, b\} \leq u(a, b)$. Por la propiedad del elemento neutro y la monotonicidad se tiene que

$$u(a, b) \geq u(a, 0) = a,$$

y por la conmutatividad, $u(a, b) = u(b, a) \geq u(b, 0) = b$. Por lo tanto, $u(a, b) \geq a$ y $u(a, b) \geq b$; es decir $u(a, b) \geq \text{máx}\{a, b\}$. Veamos ahora que $u(a, b) \leq u_{\text{máx}}(a, b)$. Nuevamente, por la propiedad del elemento neutro, $u(a, b) = a$ cuando $b = 0$, y $u(a, b) = b$ cuando $a = 0$. Notemos que por definición $u(a, b) \leq 1$, para todo $a, b \in [0, 1]$. Concluimos que $u_{\text{máx}}(a, b)$ es el supremo de $u(a, b)$ para cualquier $a, b \in [0, 1]$, puesto que, cuando $u_{\text{máx}}(a, b)$ toma un valor distinto de 1, que sucede en caso que a o b tomen el valor de 0, vimos que toda t -conorma es equivalente a $u_{\text{máx}}(a, b)$; además, como $u(a, b) \leq 1$, para todo $a, b \in [0, 1]$ entonces $u_{\text{máx}}(a, b) \geq u(a, b)$, para todo $a, b \in [0, 1]$. \square

En particular, la *suma algebraica* es menor o igual que la *suma acotada*, es decir, $a + b - ab \leq \text{mín}\{1, a + b\}$. Para mostrar lo anterior, notemos que como $0 \leq a, b \leq 1$, y $a + b - ab = a + b(1 - a)$, se tiene que $a + b(1 - a) \leq a + 1(1 - a) = 1$, entonces $a + b - ab \leq 1$. Por otro lado, como $ab \geq 0$, tenemos que $-ab \leq 0$, y sumando a y b a ambos lados obtenemos que $a + b - ab \leq a + b$, mostrando la desigualdad. Por consiguiente, vemos que $\text{máx}(a, b) \leq a + b - ab \leq \text{mín}\{1, a + b\} \leq u(a, b) \leq u_{\text{máx}}(a, b)$. Es preciso aclarar que, en general, no es posible definir un orden lineal entre todas las t -conormas.

2.5. OPERADOR LÓGICO DE NEGACIÓN DIFUSA

Uno de los operadores lógicos clásicos es la negación, y para el desarrollo de la lógica difusa es necesario extender este concepto al contexto difuso. La extensión de este concepto es a lo que se denomina *negación difusa*.

Definición 2.5.1. Una *negación difusa* es una función $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $c(0) = 1$ y $c(1) = 0$ (condición de frontera);
2. Si $a \leq b$, entonces $c(a) \geq c(b)$ (monotonicidad);
3. $c(c(a)) = a$ para todo $a \in [0, 1]$ (involución).

Ejemplo 2.5.2. Los siguientes son ejemplos de las negaciones difusas usadas con mayor frecuencia.

1. $c(\alpha) = 1 - \alpha$ (complemento estándar);
2. $c_\lambda(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{1 + \lambda\alpha}$, donde $\lambda \in (-1, \infty)$;
3. $c_\omega(\alpha) = (1 - \alpha^\omega)^{\frac{1}{\omega}}$, donde $\omega \in (0, \infty)$.

En la teoría clásica de conjuntos, las operaciones de intersección y unión son duales con respecto al complemento en el sentido que satisfacen las leyes de De Morgan. Cuando nos extendemos a la teoría de conjuntos difusa deseamos que estas leyes también se cumplan, pero esto solo sucede con ciertas combinaciones de *t-norma*, *t-conorma* y *negaciones difusas*, las cuales son llamadas *triplas duales*.

Definición 2.5.3. Decimos que una *t-norma*, una *t-conorma* y una *negación difusa* son una *tripla dual* si, y solo si, cumplen que:

1. $c(i(a, b)) = u(c(a), c(b))$;
2. $c(u(a, b)) = i(c(a), c(b))$.

Ejemplo 2.5.4. Los siguientes son ejemplos de triplas duales:

1. $\langle \min\{a, b\}, \max\{a, b\}, c \rangle$;
2. $\langle ab, a + b - ab, c \rangle$;

3. $\langle \max\{0, a + b - 1\}, \min\{1, a + b\}, c \rangle$;
4. $\langle i_{\min}(a, b), u_{\max}(a, b), c \rangle$; donde c denota la *negación difusa* estándar.

El siguiente teorema muestra una característica interesante de las triplas duales.

Teorema 2.5.5. 2 Las parejas $\langle \min\{a, b\}, \max\{a, b\} \rangle$ y $\langle i_{\min}(a, b), u_{\max}(a, b) \rangle$ forman una tripla dual con cualquier *negación difusa*.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b$. Así $c(a) \leq c(b)$ para cualquier complemento difuso, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \max\{c(a), c(b)\} &= c(a) = c(\min\{a, b\}), \\ \min\{c(a), c(b)\} &= c(b) = c(\max\{a, b\}). \end{aligned}$$

□

Recordemos que la ley de contradicción no es válida en los conjuntos difusos, dado que se debe cumplir que

$$\min\{A(\alpha), 1 - A(\alpha)\} = 0,$$

y esto no es válido, puesto que, si tomamos $\alpha \in (0, 1)$, entonces $c(\alpha) \in (0, 1)$; por lo tanto, como $c(\alpha)$ es 0 o es 1, no se cumpliría que es involutiva, y en consecuencia $\min\{A(\alpha), 1 - A(\alpha)\} \neq 0$.

2.6. RELACIONES DIFUSAS

En el contexto clásico, una relación entre n conjuntos es una colección de n -tuplas, donde cada n -tupla representa la presencia de una asociación entre los elementos de la n -tupla. En caso de que una n -tupla pertenezca a la relación se le da un valor de 1, mientras que si no pertenece, recibe solamente un valor de 0.

Este concepto puede ser generalizado al contexto difuso, lo que permite que cada n -tupla pase de poder recibir solamente valores de 0 y 1, a admitir más niveles de asociación, que vienen siendo los valores del intervalo $[0, 1]$. Este valor representa la “fuerza” de la relación o asociación entre los elementos de la n -tupla.

Definición 2.6.1. Una relación difusa es un conjunto difuso definido sobre el producto cartesiano de los conjuntos clásicos X_1, X_2, \dots, X_n , donde las tuplas $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ pueden tener grados de pertenencia en $[0, 1]$ determinados por una función de pertenencia. La relación sobre los conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n , se denota por $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Ejemplo 2.6.2. Consideremos la relación difusa entre los conjuntos $X_1 = \{\text{Bogotá, Roma}\}$ y $X_2 = \{\text{Tokyo, Bogotá, Madrid}\}$, la cual represente el concepto de “muy lejos”. Esta relación puede ser escrita en una lista de la siguiente manera:

$$R(X_1, X_2) = \{(1)(\text{Bogotá, Tokyo}), (0)(\text{Bogotá, Bogotá}), (0,6)(\text{Bogotá, Madrid}), (0,9)(\text{Roma, Tokyo}), (0,7)(\text{Roma, Bogotá}), (0,3)(\text{Roma, Madrid})\}.$$

Esto quiere decir que la pareja (Bogotá, Tokyo) está relacionada con un grado de 1, mientras que la pareja (Bogotá, Madrid) está relacionada con un grado de 0.6, por lo tanto, podemos decir que Bogotá está considerablemente más lejos de Tokyo que de Madrid.

En este caso, podemos representar esta relación en una matriz de pertenencia, de la siguiente manera:

	Tokio	Bogotá	Madrid
Bogotá	1	0	0,6
Roma	0,9	0,7	0,3

Desde el punto de vista de la inferencia, con el objetivo de tomar alguna decisión, una relación difusa que cobra particular importancia (principalmente en el análisis

de controladores difusos) es el producto cartesiano.

Ejemplo 2.6.3. Consideremos ahora una relación difusa sobre una plantación de un fruto, la cual asocia tipos de enfermedades o plagas con sus síntomas. Sea $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ el conjunto de los posibles síntomas de una planta contaminada, y $X_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ el conjunto de las posibles enfermedades de la planta. Esta relación difusa representa el concepto de “muy asociada”, donde la matriz que la representa puede ser dada por

	x_1	x_2	x_3
y_1	0,1	0,2	0,7
y_2	0,5	0,6	0,1
y_3	0,9	0	0,6
y_4	1	0,4	0,2

Así, el grado de relación entre el síntoma x_2 y la enfermedad y_3 es 0, es decir, que ese síntoma y esa enfermedad no están muy asociadas. Por otro lado, el grado de relación entre el síntoma x_1 y la enfermedad y_4 es 1, es decir, que están muy asociadas ese síntoma y esa enfermedad.

Definición 2.6.4. El producto cartesiano de n subconjuntos difusos A_1, \dots, A_n de X_1, \dots, X_n , respectivamente, es la relación $A_1 \times \dots \times A_n$, cuya función de pertenencia es dada por

$$\phi_{A_1 \times \dots \times A_n}(x_1, \dots, x_n) = \min\{\phi_{A_1}(x_1), \dots, \phi_{A_n}(x_n)\}$$

Ejemplo 2.6.5. Considere la siguiente tabla que relaciona los diagnósticos de 4 huertas de un determinado cultivo de fruto con dos tipos de enfermedades en las

plantaciones.

Huerta	Síntoma 1	Síntoma 2
1	0,3	0,2
2	1,0	0,3
3	1,0	1,0
4	0,7	0,5

Un agrónomo, para diagnosticar las enfermedades de las huertas, evalúa los síntomas y sus intensidades. Las intensidades pueden ser representadas por conjuntos difusos, y naturalmente, poseen universos distintos, por ejemplo, si el síntoma 1 es “malformación del fruto”, su universo podría ser dado por el número de frutos malformados. En la notación usada para definir el producto cartesiano de conjuntos difusos, tendríamos

$A_1 =$ Conjunto difuso representando el síntoma 1

$A_2 =$ Conjunto difuso representando el síntoma 2

$X_1 =$ Universo del conjunto A_1

$X_2 =$ Universo del conjunto A_2

Supongamos ahora, que una cierta enfermedad E_1 es caracterizada en términos de los síntomas 1 y 2. Así, si por ejemplo queremos determinar el nivel de enfermedad E_1 de la huerta 4, tenemos:

$$\phi_{E_1}(x_1, x_2) = \phi_{A_1}(x_1) \wedge \phi_{A_2}(x_2) = 0,7 \wedge 0,5 = 0,5.$$

En este caso consideramos la intersección estándar, pero otra *t-norma* podría haber sido utilizada.

Dentro del conjunto de las relaciones difusas, unas que adquieren una importancia

particular son las relaciones binarias, puesto que las funciones son casos particulares de estas, y hay ciertas operaciones básicas de funciones, como la *composición* y la *inversa*, que pueden ser extendidas sobre ellas.

Definición 2.6.6. Dada una relación difusa $R(X, Y)$, se define el *dominio* de R ($dom R$) como un conjunto difuso sobre X , cuya función de pertenencia está dada por:

$$dom R(x) = \sup_{y \in Y} R(x, y),$$

para cada $x \in X$; es decir, cada elemento de X pertenece al dominio de R , con grado igual a la “fuerza” de su relación “más fuerte” con cualquier elemento de Y .

Definición 2.6.7. Dada una relación difusa $R(X, Y)$, se define el *rango* de R ($ran R$) como un conjunto difuso sobre Y , cuya función de pertenencia está dada por:

$$ran R(x) = \sup_{x \in X} R(x, y),$$

para cada $y \in Y$; es decir, cada elemento de Y pertenece al rango de R , con grado igual a la “fuerza” de su relación “más fuerte” con cualquier elemento de X .

La *inversa* de una relación difusa $R(X, Y)$, denotada por $R^{-1}(X, Y)$, es una relación sobre $Y \times X$ dada por:

$$R^{-1}(x, y) = R(x, y),$$

para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$. La matriz de pertenencia de la relación inversa $R^{-1}(X, Y)$, vendría siendo la transpuesta de la matriz de pertenencia de la relación inicial $R(X, Y)$ (2).

Definición 2.6.8. Sean $P(X, Y)$ y $Q(Y, Z)$ dos relaciones difusas. La *composición estándar* o *composición* máx – mín entre P y R , denotada por $P(X, Y) \circ Q(Y, Z)$,

genera una relación binaria $R(X, Z)$ sobre $X \times Z$, definida por la función de pertenencia

$$\phi_{R(x,z)} = \phi_{[P \circ Q](x,z)} = \sup_{y \in Y} \min\{\phi_{P(x,y)}, \phi_{Q(y,z)}\},$$

para cada $x \in X$ y $z \in Z$.

La siguiente relación matricial ilustra el uso de la composición de relaciones entre dos relaciones $P(X, Y)$ y $Q(Y, Z)$ representadas por su matriz de pertenencia $R(X, Z)$:

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,8 \\ 0 & 0,7 & 1 \\ 0,4 & 0,6 & 0,5 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,9 & 0,5 & 0,7 & 0,7 \\ 0,3 & 0,2 & 0 & 0,9 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,2 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0,4 & 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 0,3 = R_{12} &= \max\{\min\{0,3, 0,5\}, \min\{0,5, 0,2\}, \min\{0,8, 0\}\} \\ &= \max\{\min\{p_{11}, q_{12}\}, \min\{p_{12}, q_{22}\}, \min\{p_{13}, q_{32}\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,5 = R_{23} &= \max\{\min\{0, 0,7\}, \min\{0,7, 0\}, \min\{1, 0,1\}\} \\ &= \max\{\min\{p_{21}, q_{13}\}, \min\{p_{22}, q_{23}\}, \min\{p_{23}, q_{33}\}\}. \end{aligned}$$

2.7. VARIABLES LINGÜÍSTICAS

Como ya se mencionó, los conjuntos difusos son utilizados para representar conceptos lingüísticos como *alto*, *bajo*, *rápido*, *etc*; si estos son utilizados particularmente para definir estados de una variable, a esta variable se le conoce como *variable lingüística*, y cada concepto lingüístico representado es denominado *término lingüístico*. Cada uno de estos términos lingüísticos representa los posibles valores de la variable lingüística, a los cuales se les ha asignado un número difuso que los representa numéricamente; por lo tanto tenemos que cada término lingüístico se

compone de una parte simbólica (mucho, poco, lento, etc.) que permite describirla usando lenguaje natural; y una parte “numérica” indicada por el número difusa, que permite operar con este.

Un ejemplo sencillo de una *variable lingüística* es *rapidez*, que toma términos lingüísticos como *rápido*, *lento*, *muy veloz*, etc, donde a cada término lingüístico se la asigna un número difuso.

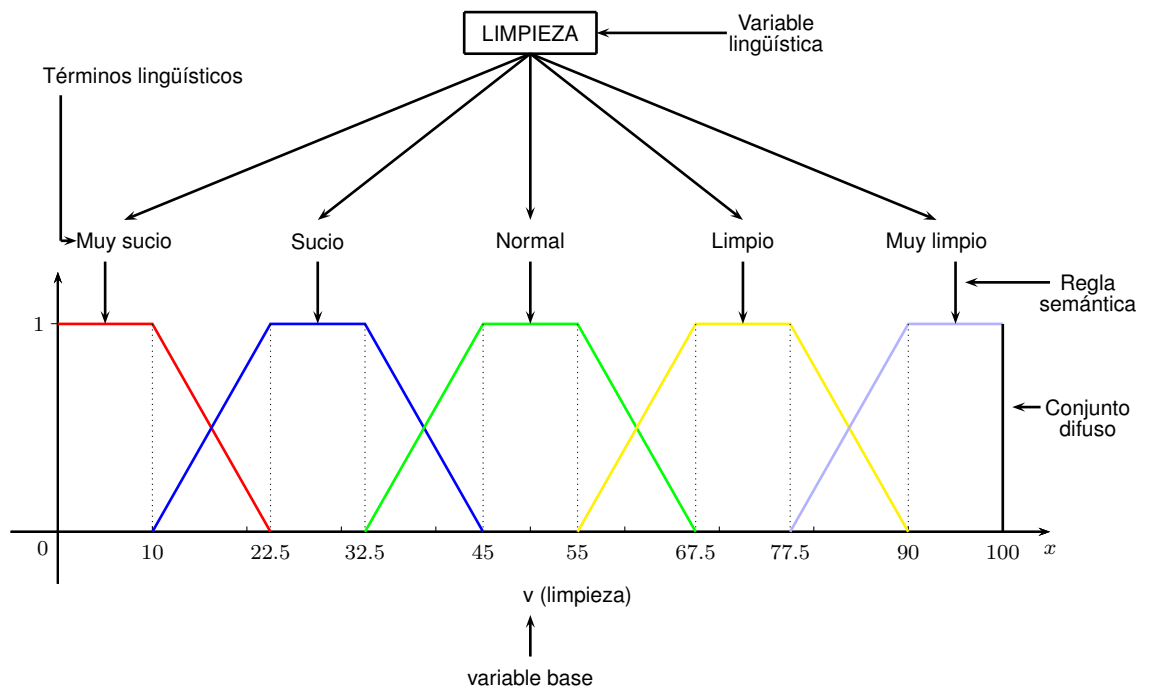
La necesidad de introducir las variables lingüísticas responde a poder realizar procesos de raciocinio lógico y obtener conclusiones a partir de premisas inciertas. Es quizás en este punto donde se junta la teoría de conjuntos difusos con la lógica difusa.

Definición 2.7.1. Una variable lingüística X en un universo U es una variable cuyos valores asumidos son subconjuntos difusos de U .

De manera didáctica podemos decir que una variable lingüística es un sustantivo, mientras que sus valores lingüísticos son adjetivos sobre este, representados por números difusos. Cada variable lingüística está caracterizada por una quintupla (v, T, U, g, m) donde v es el nombre de la variable, T es el conjunto de *términos lingüísticos* de v que se refiere a una variable base cuyos valores caen sobre un universo U , g es una *regla sintáctica* (una gramática) para generar términos lingüísticos, pues así como en el castellano, cada palabra tiene una sintaxis que no permite conocer de qué manera debe ser usada en un enunciado; y m es una *regla semántica* que asigna a cada término lingüístico $t \in T$ su *significado* $m(t)$, que es un conjunto difuso sobre U , es decir, $m : T \rightarrow \mathcal{F}(U)$.

Por ejemplo consideremos la variable lingüística *limpieza*, representada en la Figura 7.2.

Figura 11. Un ejemplo de una variable lingüística.



En este caso v es *limpieza*, que es nuestra *variable lingüística*, y toma 5 términos lingüísticos T , a saber: *muy sucio*, *sucio*, *normal*, *limpio*, *muy limpio*, así como otros términos lingüísticos generados por la gramática g (no mostrados explícitamente en la figura) como *no muy sucio*, *muy muy limpio*, *poco limpio*, etc. Cada uno de los términos lingüísticos básicos es asignado a un conjunto difuso por medio de una regla semántica (m), como se muestra en la Figura 2.1. Los números difusos tienen sus funciones de pertenencia sobre el intervalo $[0, 100]$, el rango de la variable base.

2.8. IMPLICACIONES DIFUSAS

Así como la *t-norma* y la *t-conorma* son la extensión al contexto difuso de la intersección y la unión clásica respectivamente, es necesario definir el concepto de implicación difusa, que vendría a ser la extensión del concepto de implicación clásica-

ca.

En el caso clásico, la implicación es una función de la forma $\varphi : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ donde $(a, b) \mapsto \varphi(a, b) = (a \Rightarrow b)$, y a partir de los conectores lógicos \wedge, \vee y \neg . es posible obtener diversas expresiones equivalentes a la expresión $a \Rightarrow b$, por ejemplo $\neg a \vee b$, $\text{máx}\{x \in \{0, 1\} \mid a \wedge x \leq b\}$ o $(\neg a \wedge \neg b) \vee b$.

Como vimos, una manera de expresar \Rightarrow en la lógica clásica es a través de la fórmula lógica

$$\varphi(a, b) = \neg a \vee b \quad (2.1)$$

para todo $a, b \in \{0, 1\}$. Al extender esta expresión al concepto difuso, la unión se interpreta como una *t-conorma* y la negación como una *negación difusa*, lo que nos lleva a definir la implicación difusas como

$$\varphi(a, b) = u(c(a), b) \quad (2.2)$$

para todo $a, b \in [0, 1]$, donde u es una *t-conorma* y c una *negación difusa*.

Otra expresión equivalente a φ en el caso clásico es dada por

$$\varphi(a, b) = \text{máx}\{x \in \{0, 1\} \mid a \wedge x \leq b\}. \quad (2.3)$$

Así, interpretando la intersección como una *t-norma* y la negación como una *negación difusa*, obtenemos la expresión

$$\varphi(a, b) = \text{sup}\{x \in [0, 1] \mid i(a, x) \leq b\} \quad (2.4)$$

para todo $a, b \in [0, 1]$, donde i denota una *t-norma*. Es sencillo ver que las expresiones (2.1) y (2.3) son equivalentes, pero su extensión al concepto difuso ((2.2) y (2.4)) no lo son. En efecto, al considerar la unión, intersección y complemento estándar,

se obtiene que con $a = 0,3$ y $b = 0,6$, a partir de (2.2), $\varphi(a, b) = 0,7$, mientras que a partir de (2.4), $\varphi(a, b) = 1$; mostrando que para los mismos valores de a y b , se obtienen salidas distintas al considerar expresiones equivalentes en la lógica clásica. Debido a la ley de absorción, la cual indica que si $a \Rightarrow b$ entonces $a \Rightarrow a \wedge b$, es posible obtener otras expresiones equivalentes para φ , como por ejemplo

$$\varphi(a, b) = \neg a \vee (a \wedge b) \quad (2.5)$$

o

$$\varphi(a, b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee b. \quad (2.6)$$

La extensión de estas expresiones interpretándolas con *t-norma*, *t-conorma* y *negación difusa* son, respectivamente,

$$\varphi(a, b) = u(c(a), i(a, b)), \quad (2.7)$$

$$\varphi(a, b) = u(i(c(a), c(b)), b), \quad (2.8)$$

donde u, i, c deben ser una *tripla dual*. Nuevamente, las expresiones iniciales (lógica clásica) son equivalentes, pero sus interpretaciones al contexto difuso no lo son (debido a que la ley de absorción de negación no se cumple en la lógica difusa). Claramente, dependiendo de la expresión equivalente que se seleccione como base y de la *t-norma*, *t-conorma* y *negación difusa* que se tomen, se obtienen diferentes expresiones, por lo tanto, cada una de estas expresiones vendrá siendo una implicación difusa distinta.

Consideremos las implicaciones que derivan de la expresión $\varphi(a, b) = \neg a \vee b$, cuya extensión natural al contexto difuso es dada por $\varphi(a, b) = u(c(a), b)$. Este tipo de implicaciones son denominadas *S-implicaciones* (el símbolo *S* es usualmente usado para denotar *t-conorma*)². Ahora, si tomamos la *unión estándar* como la *t-conorma*

y el *complemento estándar*, obtenemos

$$\varphi_b(a, b) = \text{máx}(1 - a, b) \quad (2.9)$$

conocida como *implicación de Kleene-Dienes*². Por otro lado, si se escoge la *unión drástica* como nuestra *t-conorma*, obtenemos

$$\varphi_{LS}(a, b) = \begin{cases} b & \text{si } a = 1, \\ 1 - a & \text{si } b = 0, \\ 1 & \text{caso contrario,} \end{cases} \quad (2.10)$$

la cuál es la *S-implicación* más grande, en el sentido que dados a, b , $\varphi_b(a, b) \geq \varphi_S(a, b)$, donde $\varphi_S(a, b)$ indica una *S-implicación* con el complemento estándar. Esto se debe al siguiente Teorema, que establece que las *S-implicaciones* con la misma *negación difusa* están ordenadas de la misma manera que su *t-conorma* asociada.

Teorema 2.8.1.² Sean u_1, u_2 *t-conormas* tales que $u_1(a, b) \leq u_2(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$, y sean φ_1, φ_2 *S-implicaciones* con la misma *negación difusa* c y con la *t-conorma* u_1, u_2 respectivamente. Entonces $\varphi_1(a, b) \leq \varphi_2(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$.

Demostración. Para todo $a, b \in [0, 1]$, se tiene que $\varphi_1(a, b) = u_1(c(a), b) \leq u_2(c(a), b) = \varphi_2(a, b)$. □

Se sigue inmediatamente de este teorema que $\varphi_b \leq \varphi_S \leq \varphi_{LS}$, donde φ_S es cualquier *S-implicación* con el complemento estándar.

Al considerar las implicaciones que derivan de la expresión $\varphi(a, b) = \text{máx}\{x \in \{0, 1\} | a \wedge x \leq b\}$, se observa que en términos de operadores difusos, vendría siendo $\varphi(a, b) = \text{sup}\{x \in [0, 1] | i(a, x) \leq b\}$; estas son llamadas *R-implicaciones*². Si se escoge la *intersección estándar* como la *t-norma* y el *complemento estándar*,

obtenemos

$$\varphi_g(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{si } a > b, \end{cases}$$

conocida como *implicación de Gödel* \square , pero si escogemos la *diferencia acotada* como nuestra *t-norma*, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_a(a, b) &= \sup\{x \mid \text{máx}\{0, a + x - 1\} < b\} \\ &= \text{mín}\{1, 1 - a + b\}, \end{aligned}$$

llamada la *implicación de Lukasiewicz* \square . Esta implicación difusa también es una *S-implicación* (tomando la *t-conorma suma acotada*). El siguiente teorema, establece que *R-implicaciones* con la misma *negación difusa* están ordenadas de manera contraria que su *t-norma* asociada.

Teorema 2.8.2. \square Sean i_1, i_2 *t-norma* tal que $i_1(a, b) \leq i_2(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$, y sean φ_1, φ_2 *R-implicaciones* con la misma *negación difusa* c y con la *t-norma* i_1, i_2 respectivamente. Entonces $\varphi_1(a, b) \geq \varphi_2(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$.

Demostración. Como $i_1(a, b) \leq i_2(a, b)$ para todo $a, b \in [0, 1]$, tenemos que $i_1(a, x_0) \leq i_2(a, x_0) \leq b$ para todo $x_0 \in \{x \mid i_2(a, x) \leq b\}$. Entonces, $x_0 \in \{x \mid i_1(a, x) \leq b\}$ y por lo tanto,

$$\{x \in [0, 1] \mid i_2(a, x) \leq b\} \subset \{x \in [0, 1] \mid i_1(a, x) \leq b\}.$$

Así,

$$\varphi_2(a, b) = \sup\{x \in [0, 1] \mid i_2(a, x) \leq b\} \leq \sup\{x \in [0, 1] \mid i_1(a, x) \leq b\} = \varphi_1(a, b).$$

\square

Sigue inmediatamente de este teorema que $\varphi_g \leq \varphi_R \leq \varphi_{LR}$, donde φ_R es cualquier *R-implicación* con el complemento estándar.

Al considerar la expresión

$$\varphi(a, b) = u(c(a), i(a, b)),$$

obtenemos implicaciones difusas llamadas *QL-implicaciones*². Éstas requieren que su *t-norma*, *t-conorma* y *negación difusa* sean una tripla dual. Si consideramos *i* y *u* como la *intersección estándar* y la *unión estándar* respectivamente, obtenemos

$$\varphi_m(a, b) = \max\{1 - a, \min\{a, b\}\}, \quad (2.11)$$

llamada la *implicación de Zadeh*², pero si consideramos *i* como el *producto algebraico* y *u* como la *suma algebraica*, obtenemos

$$\varphi_p(a, b) = 1 - a + a^2b. \quad (2.12)$$

Aunque son posibles más clases de implicaciones difusas, solo nos enfocaremos en las 3 anteriores, que son las más predominantes en la literatura. Hemos dicho que toda implicación difusa se obtiene al generalizar el operador clásico de implicación, por lo tanto, ellas son el operador clásico cuando los valores de verdad son 0 y 1. Así, al identificar ciertas propiedades de la implicación clásica y generalizarlas, nos lleva a ciertos axiomas que nos permiten dar una definición de implicación difusa.

Definición 2.8.3. Una implicación difusa es una función $\varphi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisface las siguientes condiciones:

1. φ reproduce la tabla de verdad de la implicación clásica;
2. $a \leq b$ implica $\varphi(a, x) \geq \varphi(b, x)$;
3. $a \leq b$ implica $\varphi(x, a) \leq \varphi(x, b)$.

2.9. PROPOSICIONES DIFUSAS

La diferencia fundamental entre las proposiciones difusas y las proposiciones clásicas se basa en su rango de valores de verdad. Mientras que en la lógica clásica solo se toman valores en $\{0, 1\}$, en la lógica difusa se toman valores en el intervalo $[0, 1]$.

En esta sección nos concentraremos en las proposiciones difusas simples, las cuales dividimos en los siguientes 4 tipos:

1. Proposiciones no condicionales y no cualificadas;
2. Proposiciones no condicionales y cualificadas;
3. Proposiciones condicionales y no cualificadas;
4. Proposiciones condicionales y cualificadas.

Proposiciones no condicionales y no cualificadas: La forma canónica de estas proposiciones está dada por

$$p : \mathcal{V} \text{ es } \mathcal{H},$$

donde \mathcal{V} es una variable lingüística que toma valores v en un universo V , y \mathcal{H} es un conjunto difuso en V asociado a un término lingüístico como alto, caro, largo, frío, etc. Dado un valor v de V , este valor pertenece a \mathcal{H} con un grado de pertenencia $\mathcal{H}(v)$. Este grado de pertenencia representa el valor de verdad de la proposición con ese valor v . Un ejemplo de una proposición de este estilo es: *el tigre es veloz* donde nuestro universo V es el conjunto de todos los felinos, y \mathcal{H} es el conjunto difuso que en cierto contexto representa la velocidad *alta*.

Proposiciones no condicionales y cualificadas: La forma canónica de estas pro-

posiciones está dada por

$$p : \mathcal{V} \text{ es } \mathcal{H} \text{ es } S,$$

donde \mathcal{V} y \mathcal{H} tiene el mismo significado que en el caso anterior, y S es un cualificador de verdad difuso, es decir, un número difuso que actúa sobre la proposición $p : \mathcal{V} \text{ es } \mathcal{H}$; este número difuso representando un predicado como verdadero, falso, muy verdadero, muy falso, etc. Un ejemplo de este tipo de proposición es: *Raúl es alto es muy verdadero*, donde *Raúl* es el elemento de un universo de personas, *alto* es un conjunto difuso que representa a los altos, y *muy verdadero* es el cualificador, pues está diciéndonos que es muy verdadero que Raúl es alto. Notemos que tanto \mathcal{H} como S son conjuntos difusos, es decir, son definidos a partir de funciones de pertenencia, por lo tanto, el grado de verdad de una proposición con esta estructura está dada por $S(\mathcal{H}(v))$, es decir es la composición de estas funciones.

Proposiciones condicionales y no cualificadas: La forma canónica de estas proposiciones está dada por

$$p : \text{si } \mathcal{X} \text{ es } A, \text{ entonces } \mathcal{Y} \text{ es } B,$$

donde X, A, Y, B tienen el mismo significado que en los casos anteriores, es decir, X y Y son variables lingüísticas que toman valores en los conjuntos X y Y respectivamente, y A y B son conjuntos difusos asociados a términos lingüísticos. Estas proposiciones también se pueden expresar de la forma

$$\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle \text{ es } R,$$

donde R es una relación difusa que es determinada para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$ por

$$R(x, y) = \varphi[A(x), B(x)],$$

donde φ es una implicación difusa pertinente. Un ejemplo de estas proposiciones es: *si Jairo es alto, entonces Silvia es muy linda*, donde *Jairo* y *Silvia* son elementos de un universo de personas y, *alto* y *muy linda* son conjuntos difusos. Por ejemplo, la implicación φ para este caso, podría ser la **Implicación de Lukasiewicz**, es decir $\varphi[A(x), B(x)] = \min\{1, 1 - A(x) + B(x)\}$.

Proposiciones condicionales y cualificadas: La forma canónica de estas proposiciones está dada por

$$p : \textit{si } \mathcal{X} \textit{ es } A, \textit{ entonces } \mathcal{Y} \textit{ es } B \textit{ es } S.$$

Esta proposición es como la del tipo anterior pero acompañada de un cualificador de verdad difuso S , que actúa sobre la proposición p : *si \mathcal{X} es A , entonces \mathcal{Y} es B* . Un ejemplo de este tipo de proposiciones es: *si Diego está muy frío, entonces sus defensas son muy altas es muy falso*, donde *Diego* y *defensas* son los elementos de dos universos distintos, *muy frío* y *muy altas* son conjuntos difusos, y *muy falso* es el cualificador, que nos dice, que si Diego está muy frío entonces es muy falso que las defensas son muy altas.

2.10. INFERENCIA DIFUSA

La inferencia en la lógica clásica corresponde al procedimiento de obtener una proposición a partir de proposiciones dadas por medio de reglas lógicas y de tautologías. Estas reglas de inferencia pueden ser generalizadas en la lógica difusa a partir del la *regla de inferencia composicional*. En esta sección, describiremos la generalización de las 3 reglas de inferencia clásica: *modus ponens*, *modus tollens* y *silogismo hipotético*.

2.10.1. Inferencia a partir de proposiciones difusas condicionales Consideremos una relación arbitraria R sobre $X \times Y$, y dos variables \mathcal{X} y \mathcal{Y} sobre X y Y respectivamente. Entonces, si restringimos la variable \mathcal{X} al conjunto $u \in X$, claramente se puede inferir que $\mathcal{Y} \in B = \{y \in Y \mid \langle u, y \rangle \in R\}$. Más aún, restringiendo la variable \mathcal{X} a un conjunto $A \subset X$, es posible inferir que $\mathcal{Y} \in B = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in R, x \in A\}$; es decir, los elementos de Y que están relacionados con algún elemento de A . Si denotamos esto en términos de las funciones características χ_A, χ_B, χ_R , de los conjuntos A, B, R , respectivamente, obtendremos

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in X} \min\{\chi_A(x), \chi_R(x, y)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists x \in A \text{ tal que } R(x, y) = 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}, \quad (2.13)$$

para todo $y \in Y$. Esto está definido correctamente, puesto que, para que $\chi_B(y)$ tome el valor de 1, y debe estar relacionado con un elemento x de X , y este elemento debe pertenecer a A .

Ahora vamos más allá y supongamos que R es una relación difusa en $X \times Y$, y A', B' son conjuntos difusos en X y Y respectivamente. Entonces, si conocemos A' y R , podemos obtener B' de la ecuación

$$B'(y) = \sup_{x \in X} i(A'(x), R(x, y)), \quad (2.14)$$

para todo $y \in Y$, donde i es una t-norma. Notemos que (2.14) que es la generalización de la ecuación (2.13), cambiando las funciones característica por sus respectivas funciones de pertenencia de los conjuntos difusos. En particular si tomamos i como la intersección estándar, obtenemos

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\}. \quad (2.15)$$

Esta ecuación que puede ser denotada de forma matricial como $B' = A' \circ R$ es llamada *regla de inferencia composicional*.

Queremos generalizar la regla de inferencia clásica *modus ponens* al contexto difuso, que llamaremos *modus ponens generalizado*. Esta regla de inferencia nos permite modelar silogismos del siguiente tipo:

Regla: Si la temperatura es muy alta, entonces la enfermedad es muy grave.
Hecho: La temperatura es alta.

Conclusión: La enfermedad es grave.

Donde *temperatura* y *enfermedad* son variables lingüísticas, y *alta*, *muy alta*, *grave* y *muy grave* son conjuntos difusos.

De manera más general,

Regla: Si \mathcal{X} es A , entonces \mathcal{Y} es B .
Hecho: \mathcal{X} es A' .

Conclusión: \mathcal{Y} es B' .

Donde A y A' son conjuntos difusos sobre un mismo universo, asociados a algún término lingüístico; y B y B' también son conjuntos difusos sobre un mismo universo, asociados a algún término lingüístico.

Recordemos que si tenemos una proposición de la forma $p : \text{si } \mathcal{X} \text{ es } A, \text{ entonces } \mathcal{Y} \text{ es } B$, como sucede con *Regla*, esta se puede ver de la forma $R(x, y) = \varphi[A(x), B(x)]$, donde φ es una implicación difusa pertinente. Usando la relación dada para *Regla* y tomando la proposición *Hecho*, concluimos que \mathcal{Y} es B' , a partir de (2.14), es decir

$$B'(x) = \sup_{x \in X} i(A'(x), R(x, y)), \quad (2.16)$$

y tomando en particular, la inferencia composicional, obtenemos

$$B'(x) = \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\}, \quad (2.17)$$

Notemos que si los conjuntos son clásicos y $A' = A$ y $B' = B$ obtenemos el modus ponens clásico.

El siguiente es un ejemplo del *modus ponens generalizado*.

Ejemplo 2.10.1. Sean conjuntos posibles de valores de las variables \mathcal{X} y \mathcal{Y} $X = \{x_1, x_2\}$ y $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, respectivamente. Asumamos que la proposición: *si \mathcal{X} es A , entonces \mathcal{Y} es B* , es dada, donde $A(x_1) = 1$, $A(x_2) = 0,6$, y $B(y_1) = 0,5$, $B(y_2) = 1$, $B(y_3) = 0,4$. Ahora, si la expresión *x es A'* es dada, donde $A'(x_1) = 0,3$ y $A'(x_2) = 0,8$, usaremos el modus ponens generalizado para llegar a una conclusión de la forma *\mathcal{Y} es B'* . Usemos por ejemplo la *implicación de Zadeh* ($\varphi_m(a, b) = \max\{1 - a, \min\{a, b\}\}$). En este caso obtenemos: $R(x_1, y_1) = 0,5$, $R(x_1, y_2) = 1$, $R(x_1, y_3) = 0,4$, $R(x_2, y_1) = 0,6$, $R(x_2, y_2) = 0,6$, $R(x_2, y_3) = 0,6$.

Ahora, por la regla de inferencia composicional, se sigue que

$$\begin{aligned} B'(y_1) &= \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\} \\ &= \max\{\min\{0,3, 0,5\}, \min\{0,8, 0,6\}\} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(y_2) &= \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\} \\ &= \max\{\min\{0,3, 1\}, \min\{0,8, 0,6\}\} \\ &= 0,6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'(y_3) &= \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\} \\
&= \max\{\min\{0, 3, 0.4\}, \min\{0, 8, 0.6\}\} \\
&= 0,6.
\end{aligned}$$

Así, concluimos que \mathcal{Y} es B' , donde $B'(y_1) = 0.6$, $B'(y_2) = 0.6$ y $B'(y_3) = 0.6$, cabe resaltar que no es necesario que todos los valores de B' sean iguales.

Otra regla de inferencia en lógica difusa es el *modus tollens generalizado*, que es la generalización del *modus tollens* clásico, y se representa en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ll}
\text{Regla:} & \text{Si } \mathcal{X} \text{ es } A, \text{ entonces } \mathcal{Y} \text{ es } B. \\
\text{Hecho:} & \mathcal{Y} \text{ es } B'. \\
\hline
\text{Conclusión:} & \mathcal{X} \text{ es } A'.
\end{array}$$

Donde A , A' , B y B' son definidos de la misma manera que para el modus ponens. De manera similar al proceso realizado en el modus ponens generalizado, obtenemos de (2.14) que tiene la forma

$$A'(x) = \sup_{y \in Y} i(B'(y), R(x, y)), \quad (2.18)$$

y en particular, tomando la inferencia composicional, tenemos

$$A'(x) = \sup_{y \in Y} \min\{(B'(y), R(x, y))\}, \quad (2.19)$$

donde R es obtenida a partir de la proposición *Regla*. Observemos nuevamente, que si son conjuntos clásicos y $A' = \neg A$ y $B' = \neg B$ obtenemos el modus tollens clásico.

Un ejemplo donde se observe la estructura de un modus tollens generalizado es el siguiente

Donde el “equipo de fútbol” y la “cantidad de goles realizados” son las variables lingüísticas; “bueno” y “regular” son conjuntos difusos de la variable “equipo de

Regla: Si el equipo de fútbol es bueno entonces hará muchos goles.
Hecho: El equipo de fútbol hizo pocos goles.

Conclusión: El equipo de fútbol es regular.

fútbol”, y “muchos” y “pocos” son conjuntos difusos de la variable “cantidad de goles realizados”.

Por último, el *silogismo hipotético generalizado*, que es la generalización del *silogismo hipotético*, es basado en dos proposiciones condicionales, y expresa a través del siguiente esquema:

Regla 1: Si \mathcal{X} es A , entonces \mathcal{Y} es B .
Regla 2: Si \mathcal{Y} es B , entonces \mathcal{Z} es C .

Conclusión: Si \mathcal{X} es A , entonces \mathcal{Z} es C .

En este caso \mathcal{X} , \mathcal{Y} y \mathcal{Z} son variables que toman valores en X , Y y Z , respectivamente, y A , B y C son conjuntos difusos en X , Y y Z respectivamente.

Para cada proposición hay una relación determinada de la misma manera que en los casos anteriores. Estas relaciones están definidas para cada $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, por las ecuaciones:

$$R_1(x, y) = \varphi[A(x), B(y)];$$

$$R_2(y, z) = \varphi[B(y), C(z)];$$

$$R_3(x, z) = \varphi[A(x), C(z)].$$

El silogismo hipotético generalizado se tiene si

$$R_3(x, z) = \sup_{y \in Y} i(R_1(x, y), R_2(y, z)), \quad (2.20)$$

que nuevamente se obtiene a partir de (2.14); si en particular, tomamos la inferencia composicional, tenemos

$$R_3(x, z) = \sup_{y \in Y} \min\{R_1(x, y), R_2(y, z)\}. \quad (2.21)$$

Esta ecuación también puede ser escrita de manera matricial como $R_3 = R_1 \circ R_2$. Notemos que si A , B y C con conjuntos clásicos, tenemos el silogismo hipotético clásico.

El siguiente es un ejemplo donde podemos observar la estructura del silogismo hipotético generalizado.

Regla: Si la ciudad es grande entonces viven muchas personas.

Hecho: Si viven muchas personas entonces hay mucha contaminación.

Conclusión: Si la ciudad es grande entonces hay mucha contaminación.

Donde el “tamaño de la ciudad”, la “población de la ciudad” y la “contaminación de la ciudad” son las variables lingüísticas, y “muy grande”, “muchas” y “muy contaminado” sus conjuntos difusos, respectivamente.

2.10.2. Razonamiento multicondicional En el caso del modus ponens observamos que solo se encontraba una regla, sin embargo, en la mayoría de casos prácticos, como en los sistemas de control difusos (Capítulo 3), suelen haber más de una regla, y en estos casos debemos recurrir a el razonamiento multicondicional. Este caso es utilizado en el método Mandami (ver **3.4.1**).

Un esquema general de este razonamiento es el siguiente:

Regla 1: Si \mathcal{X} es A_1 , entonces \mathcal{Y} es B_1 .
 Regla 2: Si \mathcal{X} es A_2 , entonces \mathcal{Y} es B_2 .
 \vdots
 Regla n : Si \mathcal{X} es A_n , entonces \mathcal{Y} es B_n .
 Hecho: \mathcal{X} es A'

Conclusión: \mathcal{Y} es B' ;

Dadas n reglas *si-entonces*, y un hecho \mathcal{X} es A' , concluimos que \mathcal{Y} es B' , donde $A', A_j \in \mathcal{F}(X)$, $B', B_j \in \mathcal{F}(Y)$, para todo j con $j = 1, 2, \dots, n$, y X, Y son conjuntos de valores de variables \mathcal{X}, \mathcal{Y} . El método más común para determinar a B' , es conocido como *método de interpolación*¹⁰, que consiste en los siguientes pasos:

Paso 1: Calculamos el *grado de consistencia* $r_j(A')$, que representa la altura de la intersección entre el hecho dado y el antecedente de cada regla, es decir, los conjuntos difusos A' y A_j , definido, para cada j con $j = 1, 2, \dots, n$, como

$$r_j(A') = h(i(A', A_j)),$$

donde h denota la altura. Usando la intersección difusa estándar, obtenemos

$$r_j(A') = \sup_{x \in X} \min\{A'(x), A_j(x)\}.$$

Paso 2: Calculamos la conclusión B' truncando cada conjunto B_j con el valor de $r_j(A')$, el cual expresa el grado para el cual el antecedente A_j es compatible con el hecho A' , y tomamos la unión de los conjuntos truncados, es decir

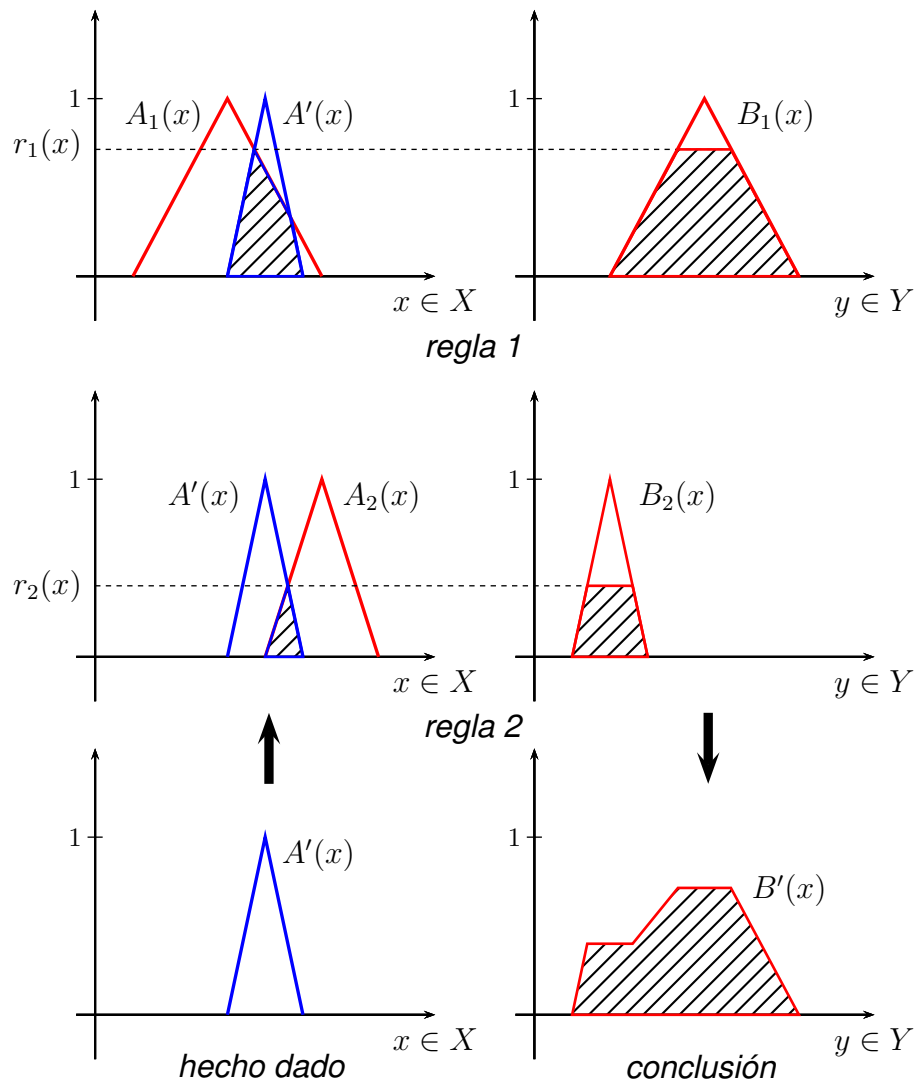
$$B'(y) = \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{r_j(A'), B_j(y)\}$$

¹⁰ G. J. KLIR y B. YUAN. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995.

para todo $y \in Y$.

La siguiente figura ilustra el método de interpolación para dos reglas *si-entonces* 10:

Figura 12. Ilustración del método de interpolación para dos reglas.



En la Figura 2.2, sucede lo siguiente: a partir del conjunto de entrada A' se calcula el *grado de consistencia* con el conjunto A_1 , es decir, $\sup_{x \in X} \min\{A'(x), A_j(x)\}$; este valor se usa para truncar o “cortar” el conjunto B_1 . Se repite este proceso con los

conjuntos A_2 y B_2 , obteniendo un conjunto B_2 “cortado”. Con estos dos conjuntos “cortados” obtenidos, realizamos la operación de unión, que nos da el conjunto salida difuso. Notemos que si el conjunto difuso $A'(x)$ es un singleton difuso de un número c , entonces $\sup_{x \in X} \min\{A'(x), A_j(x)\} = A_j(c)$.

Veamos que el método de interpolación es un caso especial del caso de la regla de inferencia composicional. Para demostrar esto, asumamos que R es una relación difusa en $X \times Y$ definida por

$$R(x, y) = \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{A_j(x), B_j(y)\}$$

para todo $x \in X$ y $y \in Y$. Veamos que B' obtenido en el paso 2, es igual a $A' \circ R$, donde “ \circ ” denota la composición sup-mín. Para esto, a partir de las ecuaciones anteriores, obtenemos que ¹⁰:

$$\begin{aligned} B'(y) &= \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{r_j(A'), B_j(y)\} \\ &= \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{\sup_{x \in X} \min\{A'(x), A_j(x)\}, B_j(y)\} \\ &= \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \sup_{x \in X} \{\min\{A'(x), A_j(x), B_j(y)\}\} \\ &= \sup_{x \in X} \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{A'(x), \min\{A_j(x), B_j(y)\}\} \quad (2.22) \\ &= \sup_{x \in X} \min\{A'(x), \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{A_j(x), B_j(y)\}\} \\ &= \sup_{x \in X} \min\{A'(x), R(x, y)\} \\ &= (A' \circ R)(y). \end{aligned}$$

Así, $B'(y) = (A' \circ R)(y)$.

□ Notemos que la relación difusa R utilizada se obtiene a partir de las reglas *si-entonces* de la siguiente manera: para cada regla j obtenemos la relación R_j por la fórmula

$$R_j(x,y) = \min\{A_j(x), B_j(y)\}, \quad (2.23)$$

para todo $x \in X$ y $y \in Y$. Entonces R es definido por la unión de las relaciones R_j , es decir,

$$R = \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}} R_j. \quad (2.24)$$

En este caso tomamos las reglas de manera disyuntiva, esto significa que obtenemos una conclusión para un hecho A' si $r_j(A') > 0$ para al menos una regla j .

Las reglas también pueden ser tratadas de manera conjuntiva. En este caso definiremos R por la intersección de todas las relaciones R_j , es decir,

$$R = \bigcap_{j \in \{1, \dots, n\}} R_j, \quad (2.25)$$

y se obtendrá una conclusión para un hecho A' solamente si $r_j(A') > 0$ para toda regla j .

Para cada una de las interpretaciones, hay dos maneras posibles de aplicar la regla composicional; una es aplicarla a la relación difusa R después de ser calculada, ya sea, por (2.16) o por (2.17); o es aplicada a cada relación R_j , y los conjuntos resultantes son combinados ya sea, de manera disjunta o de manera conjunta. De tal manera, tenemos las siguientes opciones de calcular la conclusión B' □:

$$B'_1 = A' \circ \left(\bigcap_{j:1, \dots, n} R_j \right), \quad (2.26)$$

$$B'_1 = A' \circ \left(\bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}} R_j \right), \quad (2.27)$$

$$B'_1 = \bigcup_{j:1, \dots, n} A' \circ R_j, \quad (2.28)$$

$$B'_1 = \bigcap_{j:1, \dots, n} A' \circ R_j. \quad (2.29)$$

3. Sistemas de control difuso

Los modelos matemáticos son, en esencia, formulaciones matemáticas que permiten establecer una relación entre variables, parámetros y restricciones¹¹. El modelamiento matemático ha permitido avanzar en el estudio de los procesos de toma de decisiones y en la comprensión de fenómenos de las ciencias físicas y naturales, como por ejemplo, en la elaboración de pronósticos, la evaluación de estrategias, la dinámica de poblaciones, el control de sistemas, etc.

Una herramienta común para aplicar modelos matemáticos, es dada por los sistemas de control, los cuales son un conjunto de dispositivos que regulan su funcionalidad, o la de otros sistemas, con el fin de lograr un número determinado de acciones, que permitan obtener control sobre ciertas tareas.

Con el desarrollo de los conceptos de lógica difusa, su utilidad para representar la experiencia y conocimiento humano, y la necesidad de un sistema de control que permita representar estos conceptos, surge la idea de los sistemas de control difuso, una de las aplicaciones más importantes e interesantes de la teoría de conjuntos difusos y la lógica difusa.

La estructura de un sistema de control difuso se puede dividir en 4 partes, a saber: *la fuzificación*, donde las variables de entrada son interpretadas como conjuntos difusos; *la base de reglas*, donde se definen las reglas difusas que serán la base para el desarrollo del proceso de inferencia; *el proceso de inferencia*, donde a partir

¹¹ P. N. ROLDÁN. *Modelo matemático*. <https://economipedia.com/definiciones/modelo-matematico.html>.

de la base de reglas y las variables de entrada se obtienen las variables de salida interpretadas como conjuntos difusos; y finalmente, *la defuzificación*, en donde los conjuntos difusos son convertidos en números reales.

En el presente capítulo se introducirá el concepto de sistema de control y sistema de control difuso; posteriormente se explicará detalladamente el proceso de control de los sistemas de control difusos, y finalmente se explicará paso a paso el funcionamiento del sistema.

3.1. GENERALIDADES

Un sistema de control se define como un sistema de dispositivos que regula o dirige el comportamiento de otros dispositivos o el de si mismo ¹². Tiene como finalidad conseguir, a partir de la manipulación de acciones externas, denominadas variables de entrada, un control sobre las respuestas a estas acciones externas, denominadas variables de salida, de tal manera que se disminuyan los errores en el proceso y se obtenga el mejor resultado posible.

Un ejemplo natural de un sistema de control se puede observar en el propio cuerpo humano, donde si la temperatura supera los $37^{\circ}C$, el cuerpo suda, para así refrescarse; mientras que si la temperatura baja de los $37^{\circ}C$, el cuerpo comienza a temblar, y se generan contracciones musculares para así aumentar la temperatura.

Otro ejemplo lo podemos encontrar en la fumigación de una plantación de un fruto; en este caso se puede emplear un sistema de control para que conociendo la canti-

¹² M. A. PÉREZ, A. PÉREZ H. y E. PÉREZ BERENGUER. "Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo". En: (2008).

dad de frutos sanos y afectados por una determinada plaga (variables de entrada), se obtenga la concentración necesaria del fumigante (variable de salida) para que la plantación se mantenga sana, o en unos niveles tolerables de contaminación.

Los objetivos esenciales de un sistema de control son los siguientes ¹³:

- Ser robustos frente a perturbaciones y errores en los datos.
- Ser tan eficientes como sea posible a partir de un criterio establecido. Usualmente, este criterio consiste en que la acción de control sobre las variables de entrada sea realizable, evitando comportamientos drásticos e irreales.
- Ser fácilmente implementables y cómodos de operar en tiempo real, con ayuda de un computador.

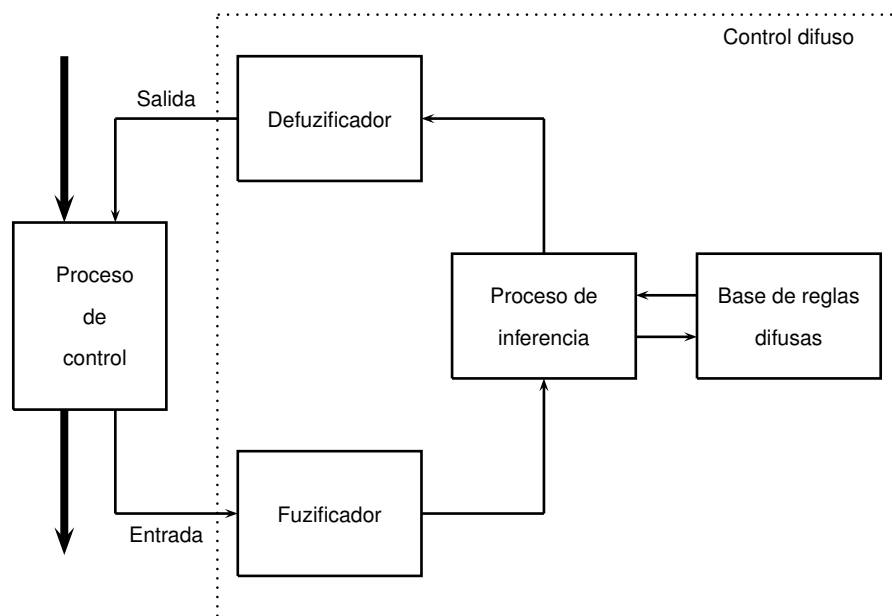
Ante la necesidad de encontrar sistemas que permitan desarrollar modelos matemáticos a partir de la experiencia y el conocimiento humano, se desarrollan los sistemas de control difuso, donde los procesos de control son basados en los principios de inferencia difusa, y por lo tanto sus variables de entrada y de salida también deben ser interpretadas como conjuntos difusos.

Más precisamente, un sistema de control difuso, es un sistema que emula el proceso de razonamiento de un humano experto en un campo específico de conocimiento. Éste emplea una base de conocimiento, expresado en términos de reglas de inferencia difusas relevantes, y cierta serie de reglas de producción que generan inferencias difusas correspondientes al área en que se trabaja.

¹³ M. GUTIÉRREZ y S. ITURRALDE. *Fundamentos básicos de instrumentación y control*. Universidad estatal Península de Santa Elena, 2017.

El proceso de control difuso es ejecutado en un controlador difuso y la estructura de este la podemos observar en la Figura 3.1 ¹⁰.

Figura 13. Esquema general de un controlador difuso.



Un ejemplo para entender este esquema es una lavadora (con acción difusa) de ropa, donde, el proceso de control sería el lavado de la ropa, y el funcionamiento de manera general es el siguiente: se introduce la prenda de ropa a la lavadora; esta se interpreta como un conjunto difuso por medio del *fuzificador* de acuerdo a qué tan sucia se encuentra la prenda; posteriormente se escoge la cantidad de jabón y de agua mediante el *proceso de inferencia* basado en la *base de reglas* determinada; luego de realizado el lavado se obtiene un valor que interprete el nivel de suciedad pos-lavado por medio del *defuzificador*, y si de acuerdo a este valor la prenda sigue estando sucia se vuelve a realizar el proceso; en caso contrario deja la prenda tal como está. Los conceptos de *fuzificador*, *proceso de inferencia*, *base*

de reglas difusa y defuzificador serán explicados a continuación.

3.2. PROCESO DE ENTRADA: FUZIFICACIÓN

La *fuzificación* corresponde a la etapa de un sistema de control difuso en la cual las variables de entrada deben ser interpretadas como conjuntos difusos. Es en esta etapa en la cual, con la ayuda de conocimiento experto, las variables de entrada son convertidas en conjuntos difusos de su respectivo universo. En general, el conocimiento experto juega un papel importante en la definición de las funciones de pertenencia asociadas a los conjuntos difusos de cada entrada. A cada una de estas funciones se les denomina *función de defuzificación*. Usualmente el valor de entrada corresponde a un conjunto crisp; en estos casos, se suele tomar la función característica asociada, por lo cual, la función de fuzificación viene dada por $f_e(x_0) = x_0$

3.3. BASE DE REGLAS DIFUSAS

Las reglas difusas son un elemento fundamental en el desarrollo de los sistemas de control difuso, puesto que es con ellas que se representan las ideas provenientes de la experiencia y de asociaciones empíricas. Así, una regla difusa se puede interpretar como un mecanismo que permite capturar información que posea imprecisión o vaguedad. Cada una de estas reglas es una proposición difusa condicional, es decir, una expresión de la forma

Si x_1 es A_1 , x_2 es A_2 , ..., x_m es A_m , ENTONCES y_1 es B_1 , y_2 es B_2 , ..., y_n es B_n .

La estructura del antecedente (antes del ENTONCES) y el consecuente (después del ENTONCES) dependen del sistema de inferencia que sea utilizado, los cuales introduciremos más adelante.

Es necesario que esta base de reglas no genere inconsistencias, es decir, que no tengan información contradictoria. Una situación muy común en la cual la base de reglas es inconsistente es cuando dos o más reglas tienen el mismo antecedente pero diferentes consecuentes, o cuando la progresión de los cambios de los consecuentes no se preservan gradualmente. En estos casos es posible que se obtengan resultados inesperados. Un ejemplo de una base de reglas inconsistente, relativo a las plantas de cierto cultivo, es el siguiente:

	<i>tiene una cantidad muy alta de frutos</i>		<i>es muy sana,</i>
<i>SI</i>		<i>ENTONCES</i>	
	<i>tiene una cantidad muy alta de frutos</i>		<i>es poco sana.</i>

En este caso, se está afirmando que una planta con muchos frutos es tanto *muy sana* como *poco sana*, lo cual es información inconsistente.

Un ejemplo en el cual la progresión de los cambios de los consecuentes no se preservan gradualmente, es el siguiente:

	<i>tiene una cantidad muy alta de frutos</i>		<i>es muy sana,</i>
<i>SI</i>	<i>tiene una cantidad alta de frutos</i>	<i>ENTONCES</i>	<i>es sana,</i>
	<i>tiene una cantidad poco alta de frutos</i>		<i>es muy enferma.</i>

Aquí, los términos lingüísticos para la variable de entrada son: *muy alta, alta, poco alta, media, poco baja, baja, muy baja*; y las de la de variable de salida son: *muy sana, sana, poco sana, media, poco enferma, enferma, muy enferma*. Notemos que entre la primera y la segunda regla, el cambio del antecedente es “poco brusco” al igual que el del consecuente, pues pasa de *muy alta* a *alta*, y de *muy sana* a *sana*, lo cual es coherente; mientras que entre la segunda y tercera regla el cambio del antecedente entre la segunda y tercera regla es “poco brusco”, puesto que pasa de

alta a poco alta, pero el de el consecuente es “muy brusco”, ya que pasa de *sana a muy enferma*.

3.4. PROCESO DE INFERENCIA

En los sistemas de control, la salida es un conjunto difuso proveniente de otros conjuntos difusos obtenidos en el proceso de entrada. Para la obtención de dicho conjunto es necesario un proceso al que se le denomina “proceso de inferencia difusa”. Es en este proceso en donde cada proposición difusa es traducida matemáticamente por medio de la lógica difusa. Adicionalmente, en esta fase se definen los operadores lógicos que se emplean sobre la base de reglas determinada.

En la literatura se encuentran básicamente dos modelos de sistemas de inferencia para el sistema de control: modelos en los cuales el consecuente de las reglas es un conjunto difuso, y modelos en donde el consecuente es una función de las variables de entrada. Cuando el consecuente es un conjunto difuso, el modelo es llamado *modelo Mamdani*. Por otro lado, cuando el consecuente es una función se tiene el conocido *modelo Takagi-Sugeno-Kang* (T.S.K), que es normalmente referido solamente como *modelo Sugeno*. A continuación haremos una breve descripción de estos modelos.

3.4.1. Modelo Mamdani Este fue el primer método de inferencia desarrollado. Fue propuesto en 1974 por Ebrahim H. Mamdani y Sedrak Assilian en el contexto de los sistemas de control¹⁴. Este modelo permite crear un sistema de control que sintetiza el conocimiento experto a partir de una base de reglas, y a partir de la inferencia da una salida de un conjunto difuso. Debido a que este modelo es muy

¹⁴ E. MASSAD y col. *Fuzzy logic in action: Applications in Epidemiology and Beyond*. Springer, 2008.

intuitivo y es sencillo interpretar su base de reglas, es recomendable usarlo en sistemas en los cuales la base de reglas es creada a partir de conocimiento experto humano, por ejemplo en diagnóstico médico. El modelo Mamdani está compuesto por n reglas

Regla 1: si \mathcal{X} es A_1 , entonces \mathcal{Y} es B_1 ,
Regla 2: si \mathcal{X} es A_2 , entonces \mathcal{Y} es B_2 ,
 \vdots
Regla n : si \mathcal{X} es A_n , entonces \mathcal{Y} es B_n .

Dado un valor de entrada, se obtendrá un enunciado, que interpretaremos como un *hecho*; así, se obtendrá la estructura de un razonamiento multicondicional (Sección 2.10.2). Si se usa la *t-norma* estándar y la *t-conorma* estándar comúnmente se le conoce como inferencia máx-mín.

Sistemas difusos compuestos por una colección de n reglas como en el modelo anterior son conocidos como modelos SISO, puesto que tienen una única variable de entrada y una única variable de salida. Sin embargo, también existe una gran cantidad de aplicaciones del modelo Mamdani MISO, es decir, múltiples variables de entrada, y una única variable de salida; o MIMO, múltiples variables de entrada y múltiples variables de salida. En el presente texto solo trataremos modelos MISO; por lo tanto, solo procederemos a explicar el funcionamiento de éste. Sin embargo, el funcionamiento del modelo MIMO es similar al del caso MISO 14.

Consideremos un conjunto de reglas de la siguiente forma:

Regla 1: si \mathcal{X}_1 es A_{11} , \mathcal{X}_2 es A_{12} , ... y \mathcal{X}_m es A_{1m} , entonces \mathcal{Y} es B_1 ,
Regla 2: si \mathcal{X}_1 es A_{21} , \mathcal{X}_2 es A_{22} , ... y \mathcal{X}_m es A_{2m} , entonces \mathcal{Y} es B_2 ,
 \vdots
Regla n : si \mathcal{X}_1 es A_{n1} , \mathcal{X}_2 es A_{n2} , ... y \mathcal{X}_m es A_{nm} , entonces \mathcal{Y} es B_m ,

donde $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m$ son las variables de entrada que toman valores en los univer-

tos X_1, X_2, \dots, X_m , respectivamente; \mathcal{Y} es la variable de salida que toma valores en el universo Y ; y A_{ij} y B_j ($i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$) son conjuntos difusos de los universos X_1, X_2, \dots, X_m, Y , respectivamente. Así, como en el modelo SISO, cada regla es asociada a una relación difusa R_i definida en el producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_M \times \mathcal{Y}$ como:

$$R_i(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m, \mathcal{Y}) = \min\{A_{i1}(\mathcal{X}_1), A_{i2}(\mathcal{X}_2), \dots, A_{im}(\mathcal{X}_m), B_i(\mathcal{Y})\}. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, la función de pertenencia de la relación difusa de ese modelo se obtiene a partir de la *t-conorma* estándar, y tenemos

$$\begin{aligned} R(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m, \mathcal{Y}) &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{R_i(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_m, \mathcal{Y})\} \\ &= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\min\{A_{i1}(\mathcal{X}_1), A_{i2}(\mathcal{X}_2), \dots, A_{im}(\mathcal{X}_m), B_i(\mathcal{Y})\}\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Como este es un caso de razonamiento multicondicional, nos basamos en lo explicado en la Sección **2.10.2** para encontrar una salida difusa F .

La ventaja de los modelos Mamdani es que pueden ser dato-independientes, es decir, un fenómeno puede ser modelado solamente por conocimiento experto, si no hay una gran colección de datos disponibles. Por otro lado, dichos modelos también podrían volverse experto-dependientes. Más aún, si el modelo tiene una gran cantidad de variables de entrada y son fuertemente no relacionadas linealmente, los expertos podrían tener problemas para desarrollar el modelo ¹⁴. En este caso, una alternativa es modelar el fenómeno a través del *Modelo Takagi-Sugeno-Kang*.

3.4.2. Modelo Takagi-Sugeno-Kang (T.S.K.) El método de inferencia de Takagi-Sugeno-Kang (T.S.K.) fue propuesto inicialmente por T. Takagi y M. Sugeno en 1983

¹⁵, y posteriormente recibió la atención de Kang, en 1988 ¹⁶. La diferencia central entre el modelo Mamdani y el modelo T.S.K radica en la forma de escritura del consecuente de cada regla y en el procedimiento de defuzificación para hallar la salida general del sistema.

La razón por la cual se desarrolló este modelo fue la de utilizar la información funcional sobre la relación entre las variables de entrada en las reglas difusas, debido a que la información está disponible en varios problemas, como las leyes físicas y químicas que rigen los sistemas ¹⁴. De tal manera que, como se aclaró previamente, las reglas están compuestas por conjuntos difusos en el antecedente, y por funciones en el consecuente. Así, las reglas con múltiples entradas se estructuran de la siguiente manera:

Reg.1: si x_1 es A_{11} , x_2 es A_{12} , ... y x_m es A_{1m} , entonces $\mathcal{Y}_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m$,

Reg.2: si x_1 es A_{21} , x_2 es A_{22} , ... y x_m es A_{2m} , entonces $\mathcal{Y}_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m$,

⋮

Reg.n: si x_1 es A_{n1} , x_2 es A_{n2} , ... y x_m es A_{nm} , entonces $\mathcal{Y}_n = a_{n0} + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m$,

donde x_1, x_2, \dots, x_m son las variables de entrada que toman valores en los universos X_1, X_2, \dots, X_m , respectivamente; A_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, 2, \dots, m$) son conjuntos difusos de los universos X_1, X_2, \dots, X_m respectivamente, y \mathcal{Y}_i son funciones lineales.

¹⁵ M. SUGENO y T. TAKAGI. "A new approach to design of fuzzy controller." En: *In: Wang, P.P. (ed.) Advances in fuzzy sets, possibility theory and applications* (1983), págs. 325-334.

¹⁶ M. SUGENO y G. T. KANG. "Structure identification of fuzzy model." En: *Fuzzy Sets Syst.* 28.1 (1988), 15-33.

Geoméricamente, las reglas del modelo Sugeno se pueden ver como una aproximación del mapeo $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Y$ por una función lineal a trozos. Además, no hay restricciones sobre las funciones \mathcal{Y}_i , de hecho, en un caso más general, estas pueden ser funciones no lineales. Claramente el modelo Sugeno más sencillo es en el cual las \mathcal{Y}_i son funciones constantes, es decir $a_{ij} = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1, 2, \dots, m$) 14.

El valor de salida de cada regla viene dado por la “fuerza de salida”, es decir, el grado en el cual el antecedente de la regla es satisfecho; como en cada regla estamos tomando el operador “y”, entonces la “fuerza de salida” viene dada por la *t-norma* de todos los conjuntos difusos del antecedente, es decir,

$$w_k = i(A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \dots, A_{km}(x_m)) \quad (3.3)$$

donde i denota una *t-norma*, siendo la *intersección estándar* la más usada. Se toma el valor de pertenencia de x_j puesto que la función de fuzificación usualmente usada es la identidad. El proceso para dar la salida final en el método T.S.K está definido por el promedio ponderado de todas las salidas de las reglas, es decir,

$$y = \frac{\sum_{k=1}^n w_k \mathcal{Y}_k}{\sum_{k=1}^n w_k}. \quad (3.4)$$

De manera informal, lo que se hace es evaluar los valores de entrada en la función del consecuente y el resultado multiplicarlo por la “fuerza de salida” de su correspondiente regla; esto se hace con cada regla y se suman los valores obtenidos; y dicho valor se divide por la suma de todas las “fuerzas de salida”.

3.5. PROCESO DE SALIDA: DEFUZIFICACIÓN

Como pudimos notar, en el método Mamdani obtuvimos conjuntos difusos como salida. Es con el proceso de defuzificación que nos es posible interpretar estos conjuntos como números reales, que resumen de manera flexible, posibles valores para la variable de salida. Hay varios métodos de defuzificación, y los más usados en la literatura son: *centro de masa*, *centro de máximos* y *media de máximos*, cada uno con buenos resultados en distintos campos donde han sido aplicados 14.

- **Método del centro de área:** Esta técnica es similar a la utilizada en física para calcular el centro de gravedad; por esta razón también es conocida como *método del centroide* o *método del centro de gravedad*; consiste en dividir el área bajo la curva dada por u en dos áreas iguales. Consideremos un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ con función de pertenencia $u(y)$. Si u está definido en un intervalo continuo $[y_a, y_b]$ o (y_a, y_b) , el valor defuzificado $d_{CA}(u)$ es dado por la fórmula:

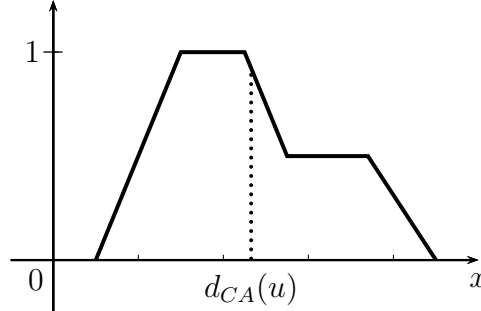
$$d_{CA}(u) = \frac{\int_{y_a}^{y_b} u(y)ydy}{\int_{y_a}^{y_b} u(y)dy}.$$

Para el caso discreto, donde u es definido en un conjunto universal $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ el valor $d_{CA}(u)$ es dado por:

$$d_{CA}(u) = \frac{\sum_{k=1}^n u(y_k)y_k}{\sum_{k=1}^n u(y_k)}.$$

La siguiente figura ilustra el método del centro de área:

Figura 14. Ilustración del método del centro del área.



- Centro de máximos:** Consideremos un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ con función de pertenencia $u(y)$. Si u está definido sobre un intervalo $[y_a, y_b]$ o (y_a, y_b) , este método proporciona el valor defuzificado $d_{CM}(u)$, definido como el promedio entre el ínfimo y el supremo de \mathcal{M} , donde \mathcal{M} es un conjunto clásico dado por:

$$\mathcal{M} = \{y \in [y_a, y_b] \mid u(y) = h(u)\},$$

donde $h(u)$ denota la altura de u (Sección 1.6); es decir, el valor defuzificado $d_{CM}(u)$ es dado por:

$$d_{CM}(u) = \frac{\inf(\mathcal{M}) + \sup(\mathcal{M})}{2}. \quad (3.5)$$

Para el caso discreto, donde cual u es definido en un conjunto universal $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, \mathcal{M} es dado por:

$$\mathcal{M} = \{y_k \mid u(y_k) = h(u)\},$$

y el valor defuzificado $d_{CA}(u)$ es encontrado por la fórmula:

$$d_{CM}(u) = \frac{\min\{y_k \mid y_k \in \mathcal{M}\} + \max\{y_k \mid y_k \in \mathcal{M}\}}{2}. \quad (3.6)$$

- Media de máximos:** Consideremos un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ con función de pertenencia $u(y)$. En este método, que es definido únicamente para el caso

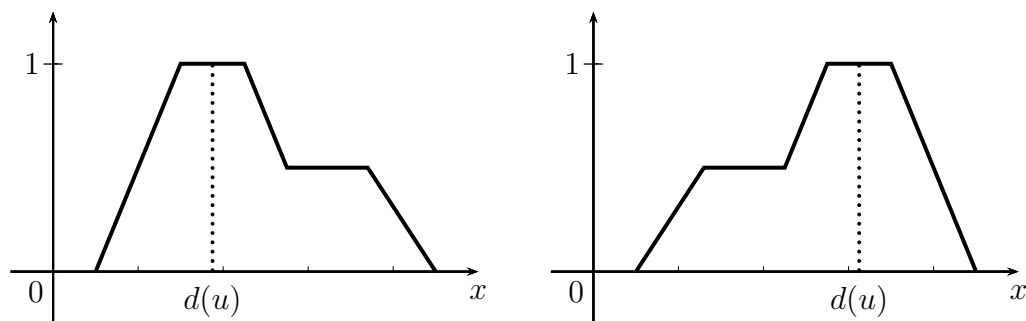
discreto, es decir, cuando u es definido en un conjunto universal $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, su valor defuzificado $d_{MM}(u)$ es el promedio de todos los valores en el conjunto \mathcal{M} definido en (3.6), es decir,

$$d_{MM}(u) = \frac{\sum_{y_k \in \mathcal{M}} y_k}{|\mathcal{M}|}, \quad (3.7)$$

donde $|\mathcal{M}|$ es la cardinalidad del conjunto \mathcal{M} . En el caso continuo, es decir, cuando \mathcal{M} es dado por (3.6), $d_{MM}(u)$ puede ser definido como la media aritmética de los valores medios de todos los intervalos contenidos en \mathcal{M} incluyendo los intervalos con longitud cero.

La principal dificultad de los métodos de *media de máximos* y *centro de máximos* es que no consideran toda la gráfica del conjunto difuso. De esta manera, dos conjuntos difusos distintos que presenten el mismo conjunto \mathcal{M} , obtendrán luego del proceso de defuzificación el mismo valor numérico, independientemente de sus diferencias en la gráfica, como se observa en la Figura 3.3, donde $d(u)$ es el mismo tanto en d_{MM} como en d_{CM} . En estos casos el proceso de defuzificación ignora una parte de la información obtenida; por esta razón, es el método del centro de área el más utilizado en la literatura.

Figura 15. Ilustración de dos conjuntos difusos distintos con el mismo valor de defuzificación.



3.6. PROCESO DE FUNCIONAMIENTO

En un sistema de control difuso se han establecido cinco pasos que lo determinan. Para ilustrar mejor este procedimiento, supongamos un sistema de control desarrollado con el modelo Mamdani en el cual hay dos variables de entrada u y v con rangos en $[-a, a]$ y $[-b, b]$, respectivamente, y una variable de salida w con rango en $[-c, c]$ (también podrían ser intervalos abiertos). El proceso de funcionamiento del modelo T.S.k tiene muchas similitudes, pero hay factores que lo diferencian, de tal manera, en cada paso se harán las aclaraciones respectivas a este modelo.

Paso 1: Se identifican las variables de entrada y de salida, y el rango de los valores a tomar por cada una; además se escogen términos lingüísticos para cada variable y se expresan en conjuntos difusos apropiados. Para nuestro interés, estos conjuntos difusos son números difusos. En caso de que el proceso de inferencia a utilizar sea el modelo T.S.K, se definirán las funciones del consecuente.

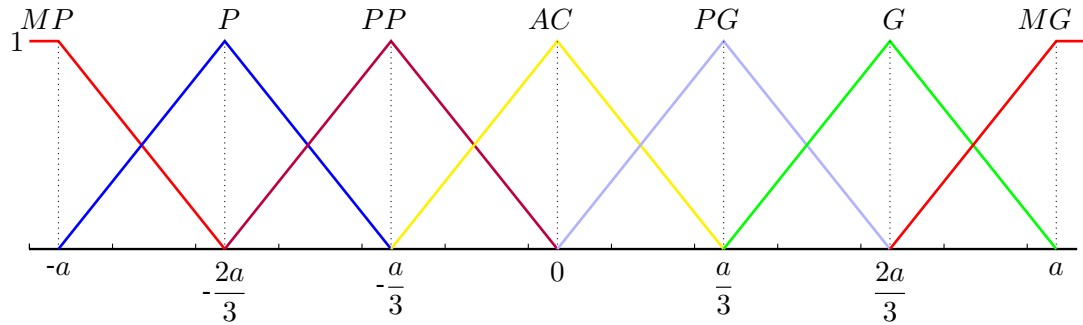
Para ilustrar este paso para el modelo Mamdani, asumamos que los siguientes 7 términos lingüísticos son elegidos para las 3 variables:

$$\begin{aligned}MP & - \text{muy pequeño} \\ P & - \text{pequeño} \\ P & - \text{poco pequeño} \\ AC & - \text{aproximadamente cero} \\ PG & - \text{poco grande} \\ G & - \text{grande} \\ MG & - \text{muy grande.}\end{aligned}\tag{3.8}$$

A cada término lingüístico le asignaremos, por simplicidad, números difusos igual-

mente separados sobre el rango, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 16. Conjuntos difusos asociados a la variable u .



Para las variables v y w , el valor a en la figura será reemplazado por b y c , respectivamente.

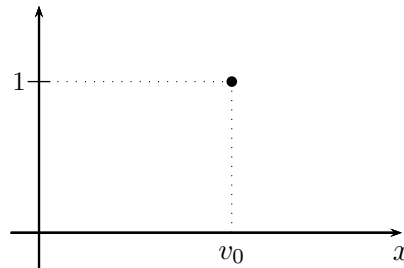
Paso 2: En este paso se realiza el proceso de fuzificación para cada una de las variables de entrada, por lo tanto es necesario definir una función de fuzificación para cada una de las variables, siendo las triangulares o las trapezoidales las más usadas en la literatura, e incluso tomar la misma función característica del valor de entrada. Esto permite que, dado un valor de entrada, éste sea interpretado como un conjunto difuso, y sea añadido como un “hecho” al esquema de la base de reglas. Por ejemplo si tenemos un valor de entrada v_0 de la variable v , y una función de fuzificación f_v , el “hecho” es dado por:

$$\text{Hecho: } v \text{ es } f_v(v_0).$$

este es interpretado como el conjunto dado por la función característica de v_0 , es decir

$$f_v(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = v_0, \\ 0, & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Figura 17. Fuzificación del valor v_0 .



Paso 3: En este paso se definen la base de reglas, y el método de inferencia a ser utilizado. Por ejemplo, si aplicamos el método Mamdani, estas reglas suelen obtenerse a partir operadores humanos con experiencia, o con datos empíricos. En el ejemplo que estamos tratando, como cada una de las variables de entrada tiene 7 estados lingüísticos, la cantidad de reglas distintas son $(7)^2 = 49$. En la práctica, un conjunto pequeño de todas las reglas de inferencia posibles, es suficiente para obtener un desempeño aceptable del sistema de control difuso. Para el modelo Mamdani las reglas pueden ser mostradas convenientemente de forma matricial, como se ilustra en la Tabla 3.1:

Tabla 2. Base de reglas para modelo Mamdani

$\begin{matrix} v \\ u \end{matrix}$	MP	P	PP	AC	PG	G	MG
MP	MG	MG	MG	MG	G	AC	AC
P	MG	MG	MG	MG	G	AC	AC
PP	G	G	G	PG	AC	P	P
AC	G	G	PG	AC	PP	P	P
PG	G	G	AC	PP	P	P	P
G	AC	AC	P	MP	MP	MP	MP
MG	AC	AC	P	MP	MP	MP	MP

La forma adecuada de leer la tabla es la siguiente: si nos ubicamos en la columna

4, fila 6, se lee:

Si u es PG y v es PP entonces w es AC.

Para el modelo TSK el posible mostrar las reglas de manera similar a como se hizo con el modelo Mandami, pero en lugar de colocar los términos lingüísticos de la variable de salida, se ubicaran las funciones del consecuente respectivas.

Paso 4: En este paso se ejecuta el proceso de inferencia sobre las reglas y los hechos dados para derivar una salida razonable o conclusión. En nuestro ejemplo, con las variables u, v y w , para el modelo Mamdani, procederemos de la siguiente manera. Primero, convertimos las reglas definidas anteriormente en proposiciones condicionales simples de la forma:

si (u, v) es $A \times B$ entonces w es C ,

donde

$$[A \times B](x, y) = \min\{A(x), B(y)\}, \quad (3.9)$$

para todo $x \in [-a, a]$ y para todo $y \in [-b, b]$; esto con el fin de trabajar sobre un solo conjunto $A \times B$, en lugar de los dos conjuntos A y B , y no se generarán inconvenientes, puesto que, como se muestra en (3.11), estamos tomando el mínimo de los dos valores de entrada evaluados en los respectivos conjuntos difusos. Similarmente, expresamos las medidas de entrada fuzificadas $f_u(u_0)$ y $f_v(v_0)$ como una sola “medida”,

$$\langle u_0, v_0 \rangle = f_u(u_0) \times f_v(v_0).$$

De esta manera una regla es escrita como:

Si $\langle u, v \rangle$ es PG \times PP entonces w es AC.

Entonces el problema de inferencia se vuelve un caso de razonamiento multicondicional, como fue discutido en la Sección 2.10.2. Cuando la base de reglas consiste de n reglas de inferencia, el esquema tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Regla 1:} & \text{si } \langle u, v \rangle \text{ es } A_1 \times B_1, \text{ entonces } w \text{ es } C_1. \\
 \text{Regla 2:} & \text{si } \langle u, v \rangle \text{ es } A_2 \times B_2, \text{ entonces } w \text{ es } C_2. \\
 & \vdots \\
 \text{Regla } n: & \text{si } \langle u, v \rangle \text{ es } A_n \times B_n, \text{ entonces } w \text{ es } C_n. \\
 \text{Hecho:} & \langle u, v \rangle \text{ es } f_u(u_0) \times f_v(v_0).
 \end{array}$$

Conclusión: w es C .

Los símbolos A_j, B_j, C_j ($j \in \{1, 2, \dots, n\}$) denotan conjuntos difusos que representan términos lingüísticos de las variables u, v, w , respectivamente. Para cada regla de inferencia, habrá una relación R_j correspondiente que se determina como se explicó en la Sección 2.8. Como las reglas son interpretadas de manera disyunta, usamos (2.20), y podemos concluir que el estado de v está caracterizado por el conjunto difuso

$$C = \bigcup_j [f_u(u_0) \times f_v(v_0)] \overset{i}{\circ} R_j; \quad (3.10)$$

donde $\overset{i}{\circ}$ es la composición $\text{sup-}i$ para una t -norma i , que en este caso es la intersección estándar.

Observación: Dada una t -norma i y dos relaciones difusas $P(X, Y)$ y $Q(Y, Z)$, la composición $\text{sup-}i$ de P y Q es la relación difusa $P \overset{i}{\circ} Q$ sobre $X \times Z$ definida por:

$$[P \overset{i}{\circ} Q](x, z) = \sup_{y \in Y} i[P(x, y), Q(y, z)] \quad (3.11)$$

para todo $x \in X$ y $z \in Z$. Esta composición generaliza la composición estándar.

Como se mencionó en la Sección 2.10.2, las relaciones serán dadas por la intersección estándar (aunque podría ser otra relación), y por lo mostrado en (2.23) y como

la función de fuzificación es la identidad, tenemos que

$$C = \sup_{j \in \{1, \dots, n\}} \min\{\min\{r_j(f_u(u_0), r_j(f_v(v_0))), C_j(w)\} \quad (3.12)$$

y r_j es el grado de consistencia definido en la Sección **2.10.2**.

Paso 5: En el último paso, debemos seleccionar el método de defuzificación. El conjunto que debe ser defuzificado en este caso es el conjunto C definido en (3.10), para dos valores de entrada $u = u_0$ y $v = v_0$.

Para el modelo T.S.K los pasos 4 y 5 son un poco más sencillos y se desarrollan como fue explicado en la Sección **3.4.2**.

Cabe mencionar, que existen software que permite realizar el proceso de sistemas de control difuso. De hecho, un ejemplo de estos es el Matlab con la función "fuzzy", donde introducidas las variables lingüísticas, sus respectivos términos lingüísticos, la base de reglas definida y los valores de entrada, obtenemos el valor de salida correspondiente, esto facilita los cálculos a realizar en este tipo de procesos.

4. Aplicación

La mora es una de las frutas más cultivadas en América; en Colombia, particularmente en los departamentos de Santander y Cundinamarca, la mora de castilla es un renglón importante en la economía campesina, siendo una de las actividades agrícolas que más ingresos generan en la región. Como todo cultivo, las plagas y enfermedades son uno de los principales inconvenientes a la hora de hacer prosperar el cultivo; como su presencia es inevitable, se han creado productos químicos y orgánicos, y desarrollado técnicas de cultivo, para controlar su desarrollo y minimizar sus efectos sobre las plantaciones; sin embargo, aplicar estos químicos en grandes cantidades trae efectos secundarios que pueden dañar el fruto, y hacerlo poco saludable para el consumo humano.

Queriendo hacer uso de los sistemas de control difuso, hemos decidido plantear un sistema de control, basado en reglas de la lógica difusa, que permita entender de una mejor manera el comportamiento de la plaga, y optimizar el proceso de fumigación sobre el cultivo.

Para mejor entendimiento del planteamiento del sistema de control, iniciamos el presente capítulo con una presentación sobre algunas generalidades de la mora de castilla para ubicar al lector interesado; posteriormente, se introducirá un modelo Mamdani para simular el porcentaje de concentración de cierto insecticida que debe ser aplicada en una plantación de mora, conocido tanto el porcentaje de infestación de la plaga, como la variación de la plaga. Finalmente, se empleará un modelo T.S.K para modelar el comportamiento de la plaga Trips en una plantación de mora. Todo lo desarrollado en este capítulo corresponde a un ejercicio didáctico si se quiere, que busca aproximar al lector a interesarse por el tema y ahondar en un proble-

ma de la misma naturaleza, y sobre el cual se cuente con datos e información a priori del cultivo. Aunque los datos que usaremos pueden considerarse razonables y ajustados a este ejercicio, no podemos afirmar que sean suficientes para sacar conclusiones.

4.1. GENERALIDADES DEL CULTIVO DE LA MORA

La mora de castilla (*Rubus Glaucus*) es originaria de los Andes tropicales. Crece casi silvestre en distintos lugares de América, como Panamá, México, Honduras, El Salvador, Ecuador y Colombia¹⁸.



Figura 18. Mora de castilla, tomado de¹⁷.

Esta especie puede encontrarse entre los 1.200 y 3.200 msnm, pero la mejor adaptación de la planta está entre los 1.800 y 2.400 msnm. En relación a la temperatura ideal para el cultivo, es recomendado que oscile entre $11^{\circ}C$ y $18^{\circ}C$, aunque en regiones muy frías ($10^{\circ}C$ a $12^{\circ}C$) el fruto es pequeño debido a que en estos pisos térmicos no existen las unidades de calor suficientes que permitan un desarrollo mayor y más rápido del fruto¹⁹. La humedad relativa recomendada va del 70% al 80%; en cuanto al requerimiento hídrico, las regiones más aptas para su cultivo son aquellas con precipitaciones de 1.500 a 2.500 mm al año¹⁸. Presenta un óptimo desarrollo en suelos francos arcillosos, ya que permiten el almacenamiento de agua y la evacuación de los excesos de humedad; el cultivo requiere altos contenidos de materia orgánica, fósforo, potasio y una adecuada relación de calcio y magnesio. La planta es muy susceptible al encharcamiento, por lo

¹⁸ CÁMARA DE COMERCIO DE BOGOTÁ. *Manual Mora*. <https://bibliotecadigital.ccb.org.co/>. 2015.

¹⁹ J. A. JARAMILLO. *El cultivo de la mora de castilla*. <https://repository.agrosavia.co/>. 1984.

que el suelo debe presentar un buen drenaje interno y externo. El cultivo se adapta muy bien en suelos con pH ácidos entre los 5,2 y 6,7, siendo 5,7 el más óptimo ¹⁸.

En Colombia los cultivos de mora se encuentran establecidos en pendientes suaves de 3% a 10% a fuertes de 20% a 30%; además, es importante tener en cuenta que requiere una profundidad efectiva del suelo de 50 *cm* para el buen desarrollo de las raíces ¹⁸.

La mora de castilla pertenece a la familia de las rosáceas. Es una planta arbustiva, semirecta y perenne, con tallos angulosos y cubiertos de espinas, verdes durante el primer año y leñosos a partir del segundo, hojas persistentes, divididas en 5 lóbulos ovales y dentados, de 5 a 12 *cm* de longitud, con espinas en el pecíolo y nervio medio, verde oscuro en el haz y blancuzco en el envés ¹⁹. Las flores miden de 2 a 3 *cm* de diámetro y son de color blanco o rosado. Los frutos son principalmente verdes, después rojos y al final se vuelven negros cuando maduran; son de forma oval o elipsoidal con punta redonda; miden de 1 a 2 *cm* de diámetro en la parte más ancha y de 2 a 4 *cm* de largo. El sabor es agridulce con madurez incompleta y dulce al madurar, de aroma característico ¹⁹.

La distribución de las plantas varía dependiendo de condiciones como la pendiente del terreno, la fertilidad, la humedad del ambiente y el sistema de poda. Suelen ser distribuidas en calles separadas entre sí a una distancia entre 2 y 2.5 metros; y en cada calle las plantas se distancian entre 1.5 y 2 metros ¹⁸.

En cuanto a su ciclo de vida, esta planta, una vez comienza la etapa de maduración, la planta incrementa su producción paulatinamente hasta los 18 meses, tiempo en el cual se estabiliza y continúa produciendo por aproximadamente 12 a 15 años, de-

pendiendo del manejo que se le realice al cultivo¹⁸.

El problema de las plagas y las enfermedades es un inconveniente usual en el cultivo de frutas, y la mora no es una excepción; por lo tanto, en el proceso de cultivo, es necesario tomar medidas para prevenir la propagación de éstas. Las plagas y enfermedades más comunes y perjudiciales en el cultivo de la mora son: *la arañita roja*, *la pudrición de fruto*, *el Mildeo polvoso* y *el Trips*¹⁸.

1. *La arañita roja (Tetranychus sp)*: Son ácaros rojos diminutos, de alrededor de 0,5mm de tamaño, capaces de tejer telarañas, razón por la cual son confundidas con arañas. Se localizan en el envés de la hoja y los síntomas de daño pueden notarse sobre los frutos, los cuales toman un color rojo óxido, mientras que las hojas se tornan pálidas y arrugadas.



Figura 19. Huevos, ninfa y adultos de arañita roja, tomado de²⁰.

2. *La pudrición de fruto (Botrytis cinérea)*: Considerada una de las enfermedades más limitantes y es producida por el hongo *Botrytis cinérea*. El mayor inoculo en el cultivo viene de micelio formado en tallos de mora en descomposición y hojas secas. Es favorecida por bajas temperaturas y humedad relativa alta siendo los pétalos y los frutos maduros más susceptibles a la enfermedad. Los síntomas se inician principalmente en las flores y frutos, lo cual afecta el cuajado de los frutos.

3. *Mildeo polvoso (Oidium sp)*: Es un hongo que cambia el color de las hojas y las

²⁰ (COMERCIAL QUÍMICA MASSÓ. *Ácaros, araña roja, araña amarilla, araña blanca*. <http://www.massogarden.com/es/plagas-y-enfermedades-es/acaros-arana-roja-arana-amarilla-arana-blanca>)

deforma. Se localiza en ramas jóvenes, en tallos botones y frutos, en estos tres últimos se presenta un polvillo de color blancuzco.



Figura 20.
Botrytis cinérea
en mora, tomado
de ²¹

4. *Trips (Frankliniella)*: Son insectos pequeños que no sobrepasan los 2 mm, de cuerpo alargado, color amarillento o negruzco; succionan el alimento de las hojas y frutos, se presentan especialmente en épocas de verano, ocasionando amarillamientos en la planta, y raspaduras en las frutas. Altas poblaciones pueden inducir pérdida prematura de flores; además son transmisores de virus que afectan la producción.

El insecto atraviesa 6 estadios: huevo, dos estadios larvales, prepupa, pupa, y insecto adulto. Duran entre 13 a 15 días para llegar a la fase adulta, donde viven de 2 a 5 semanas, incluso más. Se desarrollan de manera normal entre los 25°C y 30°C, en las cuales el tiempo de incubación es de aproximadamente 4 días. Puede haber desarrollo desde los 8°C, y después de los 35°C no hay desarrollo en absoluto. Cada hembra puede llegar a poner de 40 a 100 huevos.



Figura 21. Mildeo polvoso
en mora, tomado de ²¹

El Trips puede llegar a un invernadero ya sea con material vegetal, o los adultos pueden ingresar volando desde el exterior. Igualmente estos pueden hibernar en hendiduras, reapareciendo en la estación siguiente. Los métodos de control pueden ser con químicos, como el Exalt o Brigada, que deben alcanzar bien toda la

²¹ (INSTITUTO COLOMBIANO AGROPECUARIO. *Manejo fitosanitario del cultivo de la mora*. <https://www.ica.gov.co/>. 2011)

planta, o de manera biológica con depredadores como el *Amblyseius cucumeris* (Oudemans) o el *Orius laevigatus* (Fieber).



Figura 22. Larva de trips, recuperado de ²².

Una variedad reciente de la mora de castilla es la variedad sin espina, conocida vulgarmente como INIAP Andimora 2013; ésta fue creada en el Ecuador; es proveniente de una mutación de semilla sexual de mora de castilla con espinas, identificada en los semilleros de los segregantes donde se buscaba ampliar la variabilidad genética como parte del programa de mejoramiento en esta especie ²³. Debido a las buenas características de esta nueva especie, en Colombia fueron creados cultivos con este tipo de mora, en lugares como Santander y Cundinamarca.

A partir del 2008 una serie de investigaciones de campo y laboratorio relacionadas con la caracterización agronómica, molecular, físico-química, y de calidad de la fruta de la colección de moras, donde, la mora sin espinas correspondió a la accesión MA-0100, colectada en el sector de San Luis-Cantón Tisaleo, Tungurahua, misma que luego de cinco años de investigación, fue seleccionada por el Programa Nacional de Fruticultura-Zona Central y Granja Experimental Tumbaco en el año 2012 por presentar alta productividad y calidad de fruta; además, tiene como atributo importante la ausencia de espinas, característica que es de interés de los productores ya

²² (IDEAS BIOLÓGICAS. *Plan fotosanitario. Control biológico del Trips*. <https://www.ideasbiologicas.com/control-biologico-del-trips>)

²³ CHILEALIMENTOS. *NUEVA ESPECIE DE MORA SIN ESPINAS OFRECE NUEVAS OPORTUNIDADES A LOS PRODUCTORES DE ECUADOR*. <https://www.chilealimentos.com/wordpress/nueva-especie-de-mora-sin-espinas-ofrece-nuevas-oportunidades-a-los-productores-de-ecuador/>. 2014.

que facilita la poda y cosecha, que en este cultivo son periódicas²⁴.

Finalmente, pruebas sensoriales y agroindustriales permitieron concluir que, esta variedad reúne las características que demanda el mercado para el consumo en fresco e industrial²⁴.

Información proporcionada por el Iniap, el Programa Nacional de Fruticultura realizó las evaluaciones de adaptación de la variedad en tres localidades de la provincia de Tungurahua, en un rango de altitud de 2.810 a 2.950 msnm, y de temperaturas promedio de 12°C a 14°C. El Programa también estableció plantaciones en los valles de Cotacachi (2.400msnm y 15°C promedio) y Tumbaco (2.348 msnm y 17°C promedio) donde se observó un buen desarrollo inicial del cultivo. La variedad INIAP Andimora-2013 presenta sólidos solubles con un valor de 12,60 grados Brix, valor que supera en gran medida las normas de varios países²³.



Figura 23. Hoja afectada por el Trips, tomada en la finca San Rafael.

En relación con los nutrientes del fruto, la variedad presentó 131,95 miligramos por cada 100 gramos de vitamina C. Asimismo, posee un alto contenido de proteínas, carbohidratos totales, azúcares reductores, polifenoles, magnesio, fósforo, potasio y manganeso en comparación a varias variedades de moras de castilla evaluadas²³. Bajo condiciones controladas de almacenaje (1°C, 90% HR), la deshidratación de la fruta cosechada es lenta y se inicia a los 6 días de almacenamiento y posteriormente se incrementa a los 12 días. Finalmente, se alcanzan tasas altas de transpiración

²⁴ INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES AGROPECUARIAS. *Ficha técnica de la variedad de mora sin espinas (Rubus glaucus Benth) INIAP ANDIMORA-2013.* <https://repositorio.iniap.gob.ec/bitstream/41000/4768/1/iniapsc359.pdf>. 2013.

a los 15 días²³.



Figura 24. Mora sin espinas, tomado de²⁵.

Por otra parte, en frigoconservación, la aparición de daños por pudriciones alcanza el 1% a los 9 días y el 2% a los 15 días, cuando se cosecha la fruta con el 75% de color morado, mientras que al cosecharla con el 50% de color morado, no se registra pudrición alguna en los dos periodos de conservación, lo que determina que bajo este sistema de almacenamiento se reduce la deshidratación y la presencia de enfermedades de pos cosecha y se amplía el tiempo de almacenaje²³.

El estudio indica que “La variedad de mora INIAP Andimora-2013, comparada con dos variedades de mora de Castilla común, presenta mejores características para el almacenamiento, tanto en condiciones ambientales naturales como controladas. En el caso de almacenamiento al ambiente el estado de madurez de la fruta influye en el tiempo de conservación”²³.

Nuestro interés en esta especie radica, en que realizamos una recopilación de datos sobre un cultivo de esta variedad, y es a partir de dichos datos que desarrollaremos a continuación la aplicación de los sistemas de control introducidos en la sección anterior.

²⁵ (MINISTERIO DE AGRICULTURA Y GANADERÍA DE ECUADOR. *INIAP entregará nueva variedad de mora sin espina*. <https://www.agricultura.gob.ec/iniap-entregara-nueva-variedad-de-mora-sin-espinas/>. 2013)

4.2. CONTROL DIFUSO DE LA PLAGA TRIPS EN CULTIVOS DE MORA

A continuación presentamos un ejemplo de un sistema de control difuso para determinar la eficiencia de la fumigación de una plantación de mora, simulando la cantidad de veneno que debe ser aplicada en una plantación de mora, conocidos el nivel de infección y la variación de la plaga. El objetivo es usar el método Mamdani. Con este ejemplo buscaremos ilustrar los pasos del método Mamdani descritos en la sección anterior; cabe resaltar que los datos utilizados no son suficientes para hacer un análisis exhaustivo; sin embargo, son basados en datos recopilados en una plantación de mora sin espina, en la finca San Rafael del municipio de Santa Bárbara, Santander, Colombia, en la vereda La Salina, la cual se encuentra ubicada a una altura de 2.065 msnm, con una temperatura promedio de 18°C y precipitación anual de 2.300 mm; en dicha finca fueron recopilados datos cada 3 días durante dos meses sobre la presencia de hongos, trips y arañita roja en las hojas y frutos de dos plantas de mora sin espina. Para la recolección de datos, y teniendo en cuenta las limitaciones para hacer esta tarea, se tomaron dos plantas al azar; la planta 1 no fue fumigada en ningún momento, mientras que la planta 2 tuvo tratamiento con insecticidas y fungicidas, aplicados de acuerdo a orientaciones del agrónomo encargado. Estos datos nos sirvieron como guía para la elección de los conjuntos difusos asociados a las variables de entrada. Contamos además con la asesoría del ingeniero agrónomo Carlos Alberto Ávila, quien además es el autor del artículo ²⁶, trabajo que nos sirvió de guía para la elección de los conjuntos difusos de la variable de salida. Por limitaciones en la extensión de este trabajo, nos concentramos en la plaga trips; además de ser sobre esta plaga en donde pudimos recolectar mejor información de

²⁶ C. A. AVILA. "MODELO TECNOLÓGICO SISTEMA PRODUCTIVO ESPECIE AGRÍCOLA: MORA (Rubus glaucus Benth)". En: (2019).

datos.

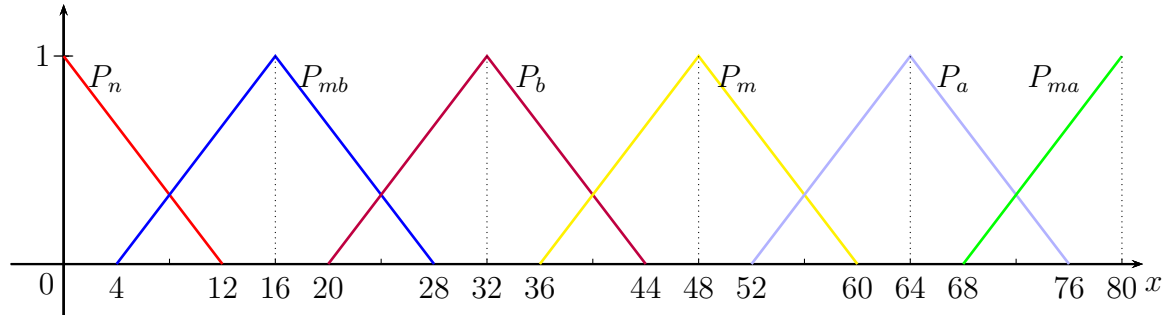
En este caso se tomaron dos variables de entrada, a saber, la densidad de hojas infectadas por el Trips (número de hojas infectadas sobre el total de hojas por árbol de mora) y la variación de la densidad de la porcentaje de hojas infectadas por el Trips en una semana; por otro lado, consideramos una variable de salida como siendo la concentración del insecticida.

Paso 1: Establecimos las variables de entrada como *porcentaje de hojas infectadas por el Trips* (P), *variación del porcentaje de hojas infectadas por el Trips en una semana* (V), y la variable de salida como *concentración del insecticida* (D), medida en centímetros cúbicos por litros de agua.

La variable P la trabajaremos en el rango de $[0, 80]$ (porcentaje). La razón de la toma de este intervalo se debe a que según las informaciones dadas por el ingeniero Ávila, luego de cierto porcentaje de contaminación, aproximadamente el 80 %, la planta se considera perdida. Adicionalmente, los términos lingüísticos que empleamos fueron: *densidad casi nula* P_n , *densidad muy baja* P_{mb} , *densidad baja* P_b , *densidad media* P_m , *densidad alta* P_a y *densidad muy alta* P_{ma} . Los respectivos conjuntos difusos que los representan son ilustrados en la Figura 25.

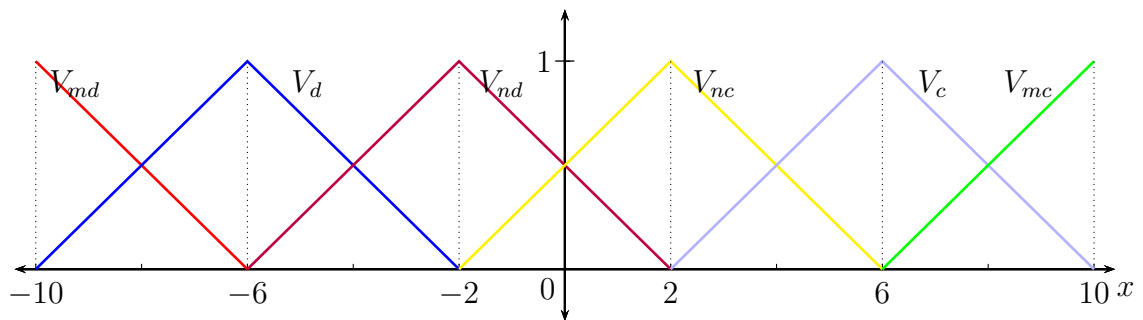
Por simplicidad en la exposición tomamos conjuntos difusos triangulares, pero naturalmente que otras geometrías podrían ser consideradas. La variable V la trabajaremos en el rango de $[-10, 10]$, pues de acuerdo a los datos recopilados, observamos que entre estos valores se mantenía la variación cada semana; y los términos lingüísticos empleados fueron: *variación muy decreciente* V_{md} , *variación decreciente*

Figura 25. Términos lingüísticos de la variable lingüística P.



V_d , *variación nula decreciente* V_{nd} , *variación nula creciente* V_{cd} , *variación creciente* V_c y *variación muy creciente* V_{mc} . Los conjuntos difusos que los representan son ilustrados en la Figura 26.

Figura 26. Términos lingüísticos de la variable lingüística V.



Finalmente, basados en la información del agrónomo, la variable D la trabajamos en el rango de $[0.012, 0.028]$; y los términos lingüísticos empleados fueron: *control muy bajo* D_{mb} , *control bajo* D_b , *control medio* D_m , *control alto* D_a y *control muy alto* D_{ma} . Los respectivos conjuntos difusos son ilustrados en la Figura 27.

Paso 2: Se consideró la función de fuzificación dada por la función identidad $f_e(x_0) = x_0$. Esto que quiere decir, que los valores de entrada, serán considerados como la función característica del valor de entrada. Por ejemplo, si consideramos un porcentaje inicial de contaminación del 39% y una variación del porcentaje de hojas

infectadas del 4.8 %, obtenemos los conjuntos difusos ilustrados en la Figura 28.

Figura 27. Términos lingüísticos de la variable lingüística D.

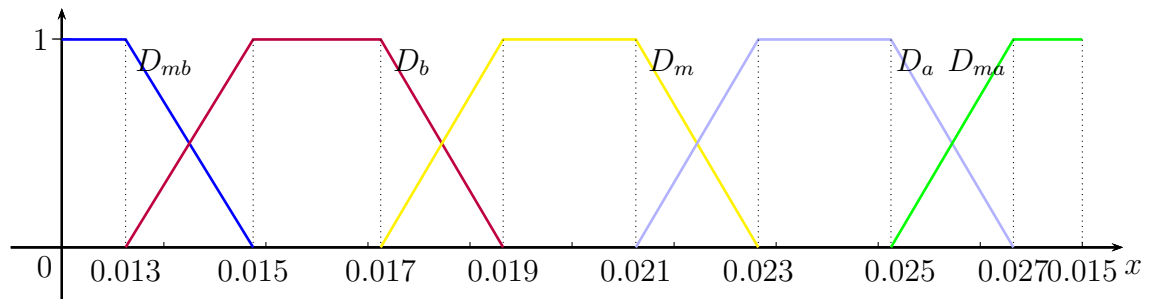
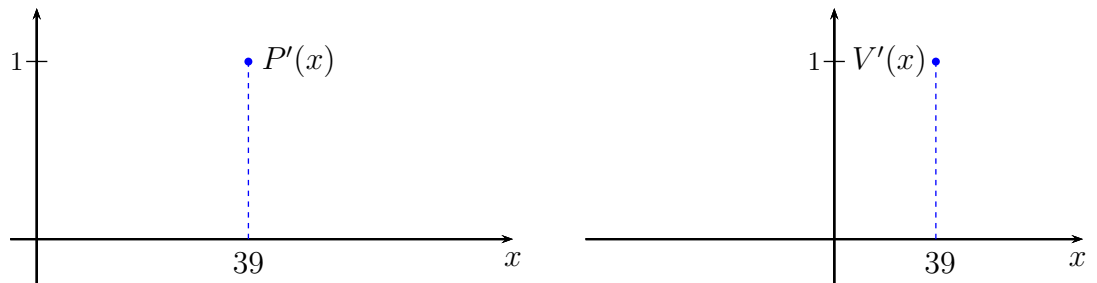


Figura 28. Valores de entrada fuzificados.



Paso 3: La base de reglas definidas para este caso se encuentran en la Tabla 3.

Tabla 3. Base de reglas.

$V \backslash P$	P_n	P_{mb}	P_b	P_m	P_a	P_{ma}
V_{md}	D_{mb}	D_{mb}	D_b	D_m	D_a	D_a
V_d	D_{mb}	D_b	D_b	D_m	D_a	D_{ma}
V_{nd}	D_{mb}	D_b	D_m	D_m	D_a	D_{ma}
V_{nc}	D_{mb}	D_b	D_m	D_m	D_a	D_{ma}
V_c	D_{mb}	D_b	D_m	D_a	D_{ma}	D_{ma}
V_{mc}	D_{mb}	D_b	D_m	D_a	D_{ma}	D_{ma}

Paso 4: Para ilustrar el funcionamiento, consideremos por ejemplo, un porcentaje inicial de contaminación del 39% y una variación del porcentaje de hojas infectadas del 4.8%, cuyos valores fuzificados serán denotados por $P'(x)$ y $V'(x)$ respectivamente; y los operadores de intersección y unión estándar como las t -norma y t -conorma respectivamente. En este caso la variable P toma valores distintos de 0 en el conjunto difuso P_b con valor de $0.41\bar{6}$ y en el conjunto difuso P_m con valor de 0.25; y la variable V toma valores distintos de 0 en el conjunto difuso V_{nc} con valor de 0.3 y en el conjunto difuso V_c con valor de 0.7. Estos valores corresponden con los respectivos α -niveles asociados a los respectivos conjuntos difusos P_b, P_m, V_{nc} y V_c . Más exactamente, para el caso del conjunto difuso P_b , por ejemplo, sus α -niveles son dados por la familia de intervalos cerrados

$$[P_b]^\alpha = [12\alpha + 20, -12\alpha + 44], \alpha \in [0, 1].$$

Luego, dado $P = 39$, necesitamos un $\alpha \in [0, 1]$ tal que $39 = 12\alpha + 20$ ó $39 = -12\alpha + 44$, con lo cual, despejando, obtenemos que $\alpha = \frac{5}{3}$ o $\alpha = 0.41\bar{6}$, y como $\alpha \in [0, 1]$, entonces tomamos $\alpha = 0.41\bar{6}$, que corresponde al valor de $P_b(39)$. Este mismo procedimiento puede ser realizado con los α -niveles de cada uno de los conjuntos P_m, V_{nc} y V_c .

Teniendo en cuenta lo anterior, de acuerdo con el Paso 3, las reglas que nos interesan serán las que involucren solamente a estos 4 conjuntos difusos, que son las siguientes:

Regla 1: si P es P_b y V es V_{nc} , entonces D es D_m ,

Regla 2: si P es P_b y V es V_c , entonces D es D_m ,

Regla 3: si P es P_m y V es V_{nc} , entonces D es D_m ,

Regla 4: si P es P_m y V es V_c , entonces D es D_a .

Además, tenemos que los conjuntos difusos D_m y D_a están dados por las funciones de pertenencia

$$D_m(x) = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,017 \leq x \leq 0,019, \\ 1 & \text{si } 0,019 \leq x \leq 0,021, \\ -500x + 11,5 & \text{si } 0,021 < x \leq 0,023, \\ 0 & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

$$D_m(x) = \begin{cases} 500x - 10,5 & \text{si } 0,021 \leq x \leq 0,023, \\ 1 & \text{si } 0,023 \leq x \leq 0,025, \\ -500x + 13,5 & \text{si } 0,025 < x \leq 0,027, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Como en la *Regla 1* están involucrados P_b y V_{nc} , y $\sup_{x \in X} \min\{P_b(x), P'(x)\} = 0,41\bar{6}$ y $\sup_{x \in X} \min\{V_{nc}(x), V'(x)\} = 0,3$, tomamos $\min\{0,41\bar{6}, 0,3\} = 0,3$. Recordemos que el valor mínimo se toma debido a que la t -norma escogida fue la intersección estándar. Con el valor obtenido, se trunca el conjunto difuso D_m , y se obtiene el siguiente conjunto difuso

$$\min\{0,3, D_m(x)\} = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,017 \leq x \leq 0,0176, \\ 0,3 & \text{si } 0,0176 \leq x \leq 0,0224, \\ -500x + 11,5 & \text{si } 0,0224 < x \leq 0,023, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Este proceso se repite para cada una de las reglas consideradas, de donde se

obtienen los siguientes 3 conjuntos difusos

$$\text{mín}\{0, 41\bar{6}, D_m(x)\} = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,017 \leq x \leq 0,0178\bar{3}, \\ 0,41\bar{6} & \text{si } 0,0178\bar{3} \leq x \leq 0,0221\bar{6}, \\ -500x + 11,5 & \text{si } 0,0221\bar{6} < x \leq 0,023, \\ 0 & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

$$\text{mín}\{0, 25, D_m(x)\} = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,017 \leq x \leq 0,0175, \\ 0,25 & \text{si } 0,0175 \leq x \leq 0,0225, \\ -500x + 11,5 & \text{si } 0,0225 < x \leq 0,023, \\ 0 & \text{caso contrario;} \end{cases}$$

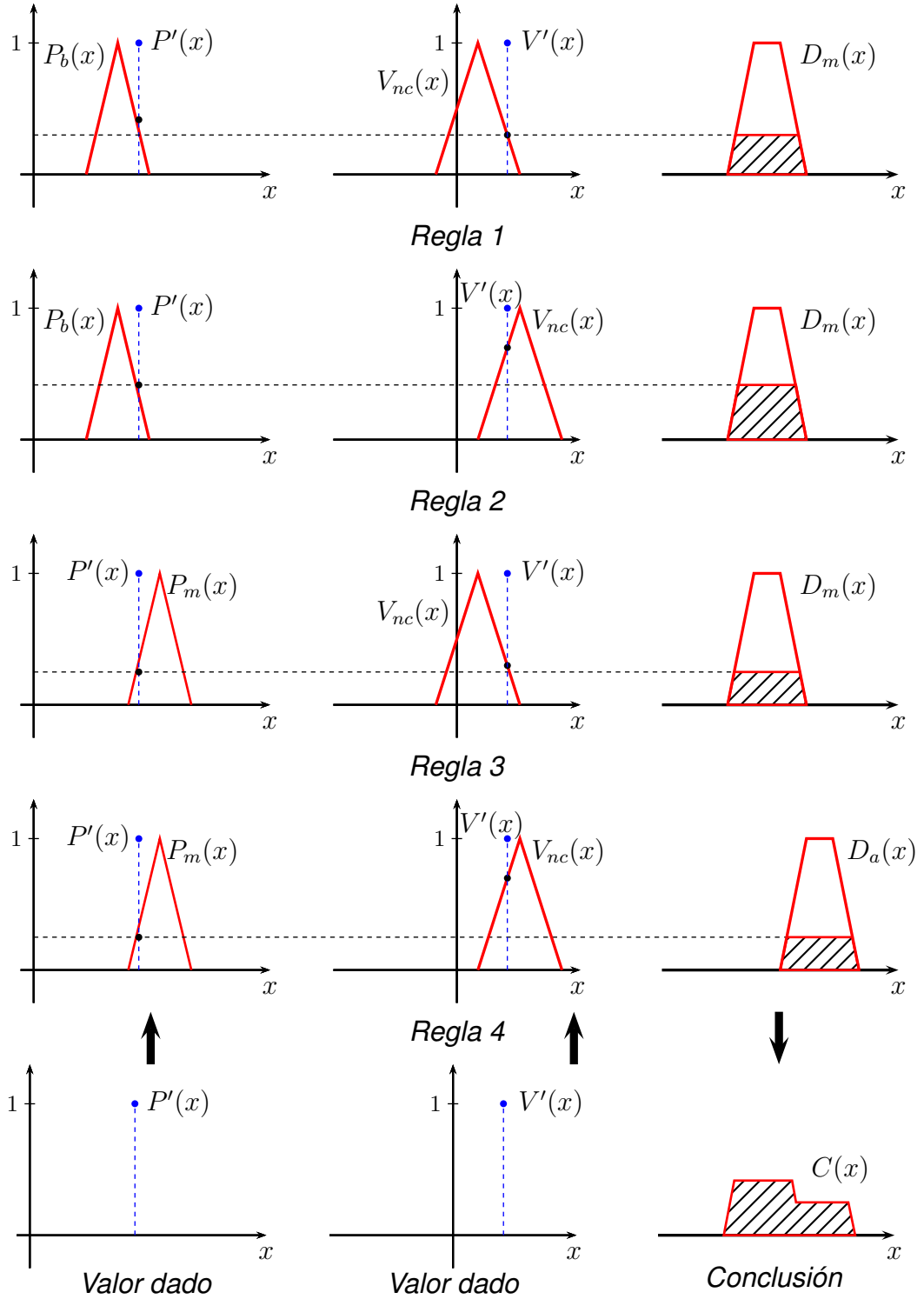
$$\text{mín}\{0, 25, D_a(x)\} = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,021 \leq x \leq 0,0215, \\ 0,25 & \text{si } 0,0215 \leq x \leq 0,0265, \\ -500x + 13,5 & \text{si } 0,0265 < x \leq 0,027, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Finalmente, se realiza operación de unión estándar de los 4 conjuntos difusos previamente obtenidos, que corresponde al siguiente conjunto difuso

$$C = \begin{cases} 500x - 8,5 & \text{si } 0,017 \leq x \leq 0,0178\bar{3}, \\ 0,41\bar{6} & \text{si } 0,0178\bar{3} \leq x \leq 0,0221\bar{6}, \\ -500x + 11,5 & \text{si } 0,0221\bar{6} < x \leq 0,0225, \\ 0,25 & \text{si } 0,0225 \leq x \leq 0,0265, \\ -500x + 13,5 & \text{si } 0,0265 < x \leq 0,027, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Este proceso, se ilustra en la Figura 29.

Figura 29. Ilustración paso 4.



En la Figura 29, cada una de las 4 primeras filas corresponde a cada una de las 4 reglas consideradas; y cada una de las columnas corresponden a las variables lingüísticas tomadas. La última fila muestra los conjuntos difusos de entrada asociados a los valores de entrada, y el conjunto difuso C , obtenido anteriormente. En cada fila, la línea horizontal punteada, se refiere a el valor mínimo con el cual se trunca el conjunto difuso de la variable de salida.

Paso 5: Ya obtenido el conjunto difuso C en el paso anterior, procederemos a realizar la defuzificación, y en este caso será desarrollada con el método del Centroide, porque como se explicó anteriormente, es el que toma más de la información dada por el conjunto difuso para dar un valor como salida. En consecuencia, tenemos que

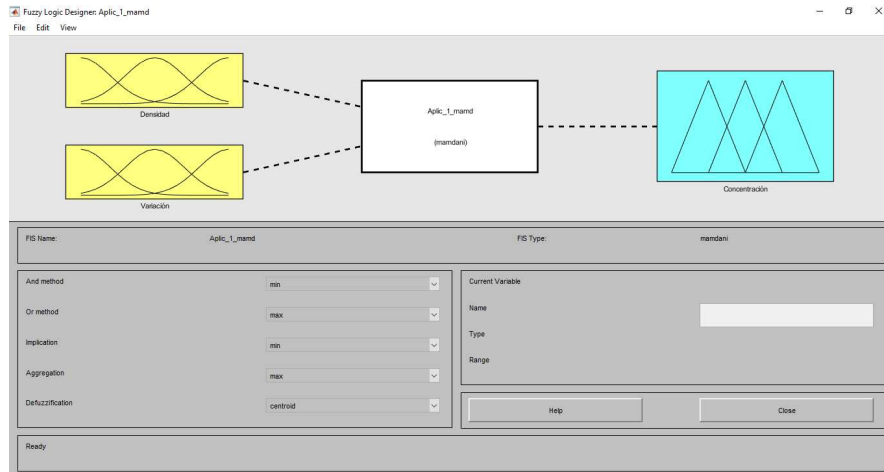
$$d_{CA}(C) = \frac{\int_{0,017}^{0,027} C(x)x dx}{\int_{0,017}^{0,027} C(x) dx} = 0,0215. \quad (4.2)$$

Lo que quiere decir, que de acuerdo a la base de reglas definidas, si el porcentaje de las hojas contaminadas de una planta es del 39% y una variación del porcentaje de las hojas contaminadas en una semana del 4.8%, entonces debe ser fumigada con una concentración de 0,0215.

Con el desarrollo de diferentes Softwares se han podido facilitar los cálculos para ver el funcionamiento de un sistema de control, como el que acabamos de ver. Un ejemplo de estos es Matlab, que tiene incorporada la función de **Fuzzy Logic Designer** en la cual se introducen las diferentes variables de entrada y salida, sus respectivos términos lingüísticos y la base de reglas definida, y luego, dados los diferentes valores de entrada, obtenemos los valores de salida de acuerdo a los operadores definidos y el sistema de defuzificación. Con el deseo de verificar el procedimiento manual realizado anteriormente, introducimos en Matlab la aplicación previamente mencionada y confirmamos que el valor de salida fue el que obtuvimos.

Inicialmente introducimos las variables de entrada y salida con sus respectivos nombres (Figura 30).

Figura 30. Asignación de variables de entrada y salida.



Luego, para cada variable se asignan los términos lingüísticos correspondientes (Figuras 31, 32 y 33); posteriormente se introducen la base de reglas definidas (Figura 34), y finalmente, obtenemos la estructura del sistema de control dado, e introduciendo los valores iniciales para las variables de entrada, nos da la salida correspondiente (Ver la Figura 35). Se observa que efectivamente el valor de salida es 0.0215 con un porcentaje de concentración inicial del 39% y una variación en una semana del 4.8%.

Con ayuda de este software, obtenemos los valores de salida para distintos valores iniciales, estos son mostrados en la Tabla 4.

Nuevamente, con ayuda del software, consideramos los operadores producto algebraico y suma algebraica como las t -norma y t -conorma respectivamente, y obtuvimos los resultados mostrados en la Tabla 5.

El procedimiento previo, nos permitió observar que el sistema está definido de manera coherente, pues las alteraciones en las variables de entrada son proporcionales

Figura 31. Términos lingüísticos de una variable de entrada.

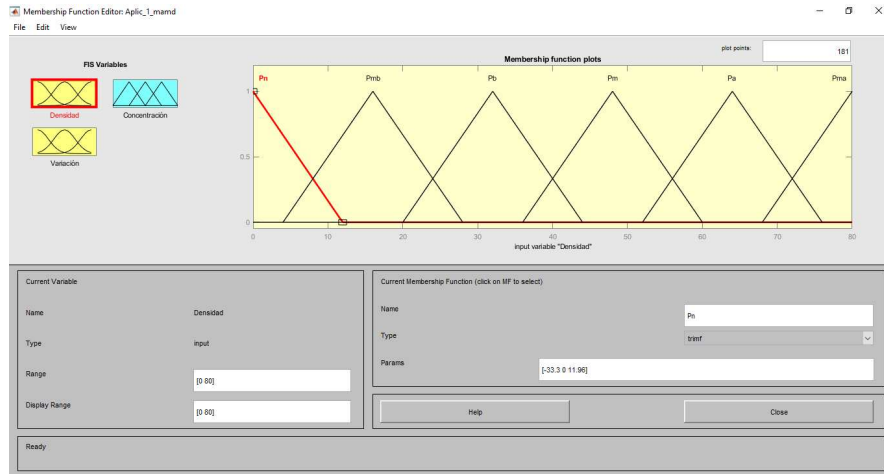


Figura 32. Términos lingüísticos de una variable de entrada.

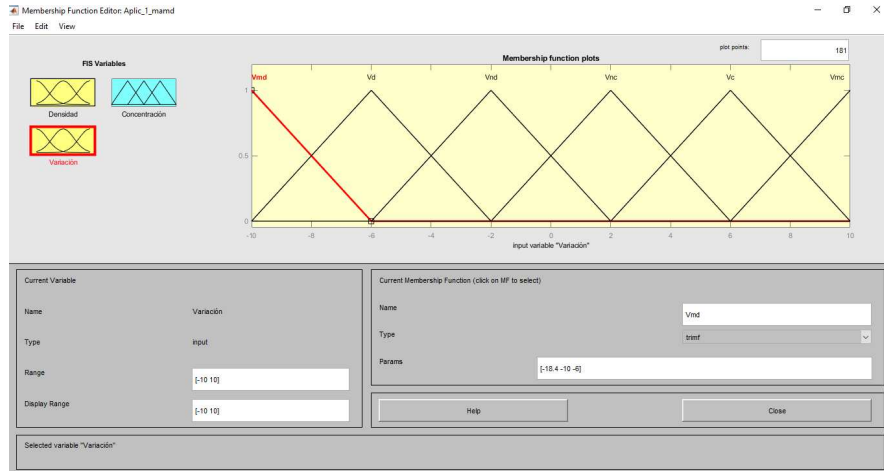


Tabla 4. Valores de salida obtenidos con el software de Matlab.

$V \backslash P$	0	13	39	50	70	80
-10	NA	0.0131	0.0175	0.0200	0.0240	0.0240
-4.8	NA	0.0160	0.0177	0.0200	0.0243	0.0269
-1	NA	0.0160	0.0200	0.0200	0.0243	0.0269
1	0.0131	0.0160	0.0200	0.0200	0.0243	NA
4.8	0.0131	0.0160	0.0215	0.0227	0.0251	NA
9	0.0131	0.0160	0.0215	0.0240	0.0268	NA

Figura 33. Términos lingüísticos de la variable de salida.

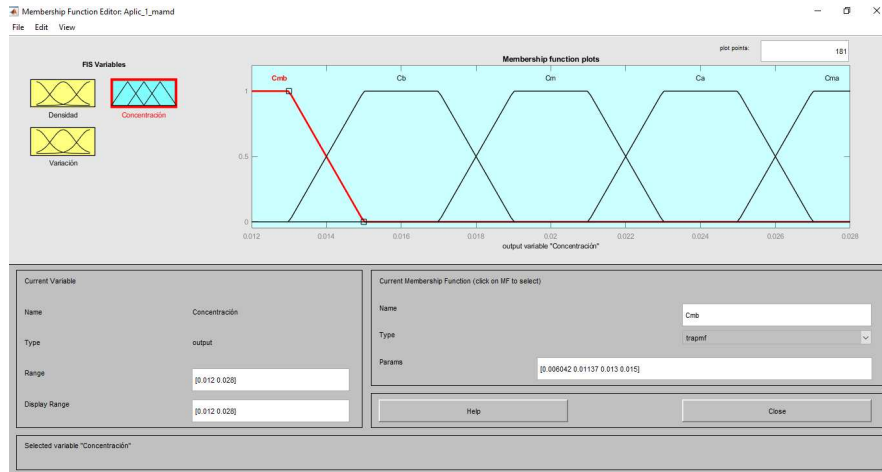


Figura 34. Base de reglas definidas.

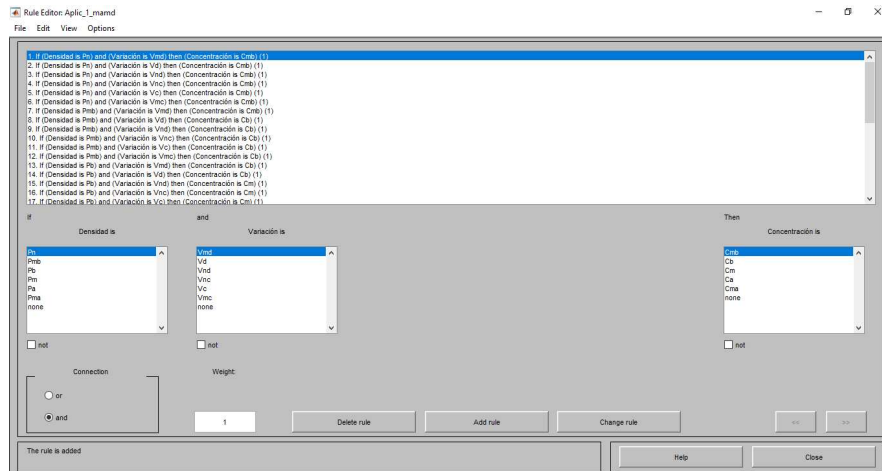
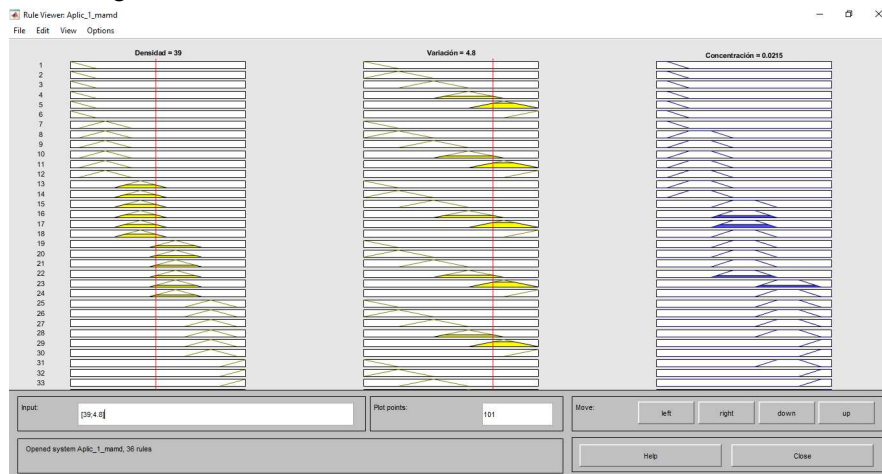


Tabla 5. Valores de salida obtenidos con el producto algebraico y suma algebraica.

$V \backslash P$	0	13	39	50	70	80
-10	NA	0.0131	0.0175	0.0200	0.024	0.024
-4.8	NA	0.0160	0.0175	0.0200	0.0242	0.0269
-1	NA	0.0160	0.0200	0.0200	0.0242	0.0269
1	0.0131	0.0160	0.0200	0.0200	0.0242	NA
4.8	0.0131	0.0160	0.0215	0.0228	0.0253	NA
9	0.0131	0.0160	0.0215	0.0240	0.0267	NA

Figura 35. Salida del sistema dados los valores iniciales.



a los resultados obtenidos para la variable de salida, y los valores son coherentes a los recomendados por el ingeniero. En otras palabras, este ejercicio nos permitió validar el sistema de control difuso planteado y concluir que hay una coherencia entre los resultados arrojados y los procedimientos empleados por el trabajo del agrónomo. Adicionalmente pudimos observar que al cambiar la t -norma y la t -conorma la variabilidad es baja, por lo cual la elección de estos operadores no genera un cambio drástico.

Es importante observar que en la práctica, durante el proceso de fumigación, se aplica una cantidad constante de plaguicidas, independiente de la afectación que tenga el cultivo, y con periodos constantes de tiempo. Al respecto, teniendo en cuenta los resultados arrojados en nuestro estudio, se podría plantear un cambio en la manera como se está llevando a cabo ese procedimiento en el cultivo propiamente dicho. Se podría plantear un manejo diferenciado de la concentración de químico dependiendo de la afectación. Este cambio podría tener unos beneficios económicos dado que implicaría la optimización de recursos y más aún, se puede argumentar que una aplicación mas óptima de los fungicidas implica un producto mejor apetecido para

el consumo. Naturalmente, estas afirmaciones se pueden acompañar de un estudio de costos y un análisis de la pureza del producto cuando este va al consumidor. Finalmente, cabe recalcar que los conjuntos difusos fueron definidos de esta manera por simplicidad, de hecho, podrían haberse trabajado conjuntos con otras geometrías un poco más complejas, sin embargo, esto a fin de cuentas no genera cambios sustanciales.

4.3. DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE CRECIMIENTO DE LA PLAGA TRIPS EN CULTIVOS DE MORA

Un problema fundamental en agronomía consiste en conocer la tasa de crecimiento de plagas en determinados cultivos, en particular, las tasas de crecimiento de las plagas Trips en cultivos de mora, que es el caso que nos ocupa. Por un lado, esta información es determinante a la hora de establecer en qué intervalos de tiempo se deben hacer las aplicaciones de controles químicos y cuales deberían ser los niveles de concentración del químico fungicida en cada fumigación. Adicionalmente, desde el punto de vista de la matemática aplicada, este tipo de información es imprescindible a la hora de validar modelos matemáticos descritos en términos de ecuaciones diferenciales, los cuales solo tendrán aplicación práctica en la medida en que conozcamos los parámetros que determinan la tasa de crecimiento, migración y demás.

El objetivo de esta sección es la de ilustrar el uso del control difuso en la determinación de la tasa de crecimiento de la plaga Trips, de manera tal que una vez establecido un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias que describa la dinámica poblacional, se pueda hallar solución en función de esas tasas de crecimiento, y en consecuencia, describir la solución de la densidad de la plaga en función del tiempo. Queremos determinar de tasa de crecimiento vía sistemas basados en re-

glas difusas usando el método de T.S.K.

4.3.1. Un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias Nos proponemos plantear un modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias que describa el crecimiento de la población de la plaga Trips en un cultivo de mora. Para tal efecto, denotamos por $x(t)$ la población de Trips en el instante de tiempo t . Teniendo en cuenta la literatura que describe las características biológicas de la plaga Trips, constitutivamente se infiere que el crecimiento poblacional es proporcional a la población existente, con lo cual, es razonable plantear un modelo matemático que describa la dinámica de $x(t)$ dada por el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + \beta - \theta x(t)\delta_T(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

donde α representa la tasa de crecimiento de la plaga, β la tasa de migración de la plaga, θ la efectividad de la aplicación de un determinado insecticida, $\delta_T(t)$ la “función” delta de Dirac centrada en el tiempo $t = T$, siendo T el tiempo de aplicación del insecticida, y x_0 la población inicial de la plaga en el tiempo inicial t_0 .

Usando la transformada de Laplace, que denotamos por $\mathcal{L}(\cdot)$, podemos resolver de manera explícita el P.V.I (4.3). En efecto, recordemos las siguientes propiedades de \mathcal{L} sobre la transformada de la derivada, y la transformada de la “función” delta de Dirac.

Si f es continua en $[0, \infty)$ y f' es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad s > 0. \quad (4.4)$$

Por otro lado se tiene que

$$\mathcal{L}\{\delta_T(t)\}(s) = e^{-sT}, \quad s > 0, \quad (4.5)$$

y

$$\mathcal{L}\{x(t)\delta_T(t)\}(s) = e^{-sT}x(T), \quad s > 0. \quad (4.6)$$

Finalmente recordemos que

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \quad (4.7)$$

Entonces, aplicando \mathcal{L} al P.V.I (4.3) y usando (4.4) y (4.7), obtenemos que

$$s\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - x_0 = \alpha\mathcal{L}\{x(t)\}(s) + \frac{\beta}{s} - \theta e^{-sT}x(T). \quad (4.8)$$

Despejando $\mathcal{L}\{x(t)\}(s)$ de (4.8), obtenemos que

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x_0}{s - \alpha} + \frac{\beta}{s(s - \alpha)} - \frac{\theta e^{-sT}x(T)}{s - \alpha}. \quad (4.9)$$

Recordando que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - \alpha}\right\}(s) = e^{\alpha t}, \quad (4.10)$$

notando que

$$\frac{1}{s(s - \alpha)} = \frac{-1}{\alpha s} + \frac{1}{\alpha(s - \alpha)}, \quad (4.11)$$

y observando que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-sT}}{s - \alpha} \right\} (s) = e^{\alpha(t-T)} \mathcal{U}(t-T), \text{ siendo } \mathcal{U}(t-T) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < T, \\ 1, & \text{si } t \geq T, \end{cases} \quad (4.12)$$

encontramos que

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha t} - \theta x(T) e^{\alpha(t-T)} \mathcal{U}(t-T). \quad (4.13)$$

Note que

$$x(T) = x_0 e^{\alpha T} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha T} - \theta x(T), \quad (4.14)$$

es decir,

$$x(T) = \frac{1}{1 + \theta} (x_0 e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1)). \quad (4.15)$$

Por lo tanto, reemplazando (4.15) en (4.13) concluimos que la solución del P.V.I (4.3) es dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1), & \text{si } t < T, \\ x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - \frac{\theta}{1 + \theta} (x_0 e^{\alpha T} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T} - 1)) e^{\alpha(t-T)}, & \text{si } t \geq T. \end{cases} \quad (4.16)$$

Con ayuda de Geogebra, obtuvimos las gráficas de la solución dada en (4.16), para $\alpha > \beta$ con $\theta = 1.2$ (Figura 36), y con $\theta = 0.9$ (Figura 37); para $\beta > \alpha$ con $\theta = 1.2$ (Figura 4.38) y para $\beta = 0$ con $\theta = 1.2$ (Figura 39), es decir, considerando en el último caso que no hubiera tasa de migración. En los 3 casos consideramos $x_0 = 35$ y $T = 1$. En cualquier caso, se observa que después de la aplicación del insecticida en el instante de tiempo T , hay un quiebre en el crecimiento poblacional y posterior

a esta aplicación, la dinámica vuelve a ser exponencial.

Figura 36. Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T = 1$.

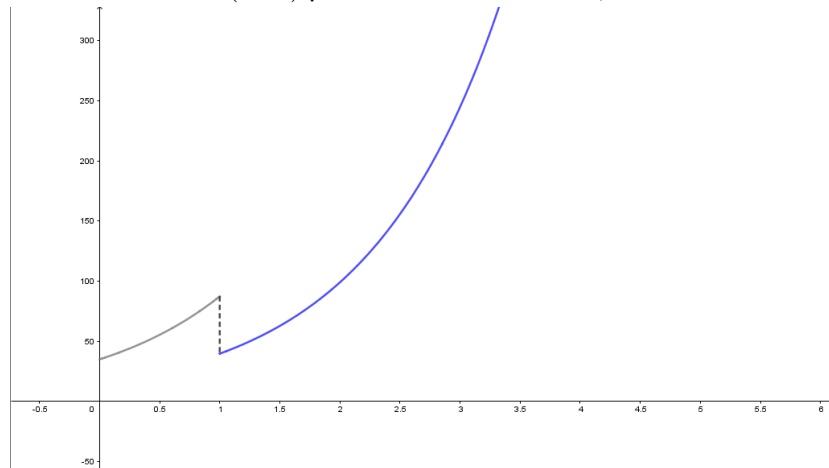
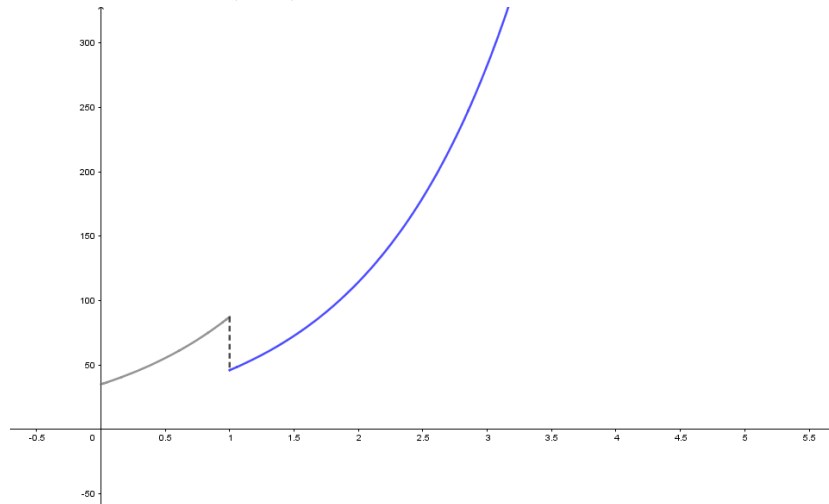


Figura 37. Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\theta = 0.9$, $T = 1$.



Naturalmente, el modelo de EDO dado por (4.3) puede ser mejorado permitiendo incorporar nuevos ingredientes que describan de una mejor manera la dinámica poblacional; por ejemplo, incorporar en el modelo la acción de la fumigación en determinados tiempos T_1, T_2, \dots, T_m . En este caso, el PVI de (4.3) puede ser modificado

Figura 38. Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T = 1$.

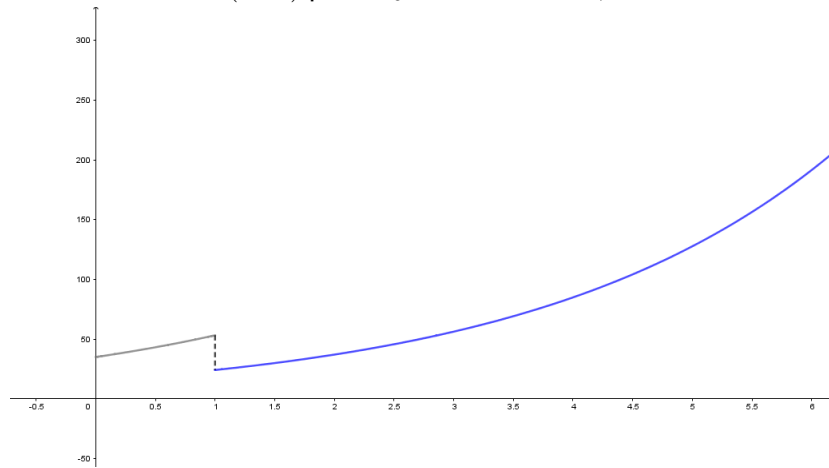
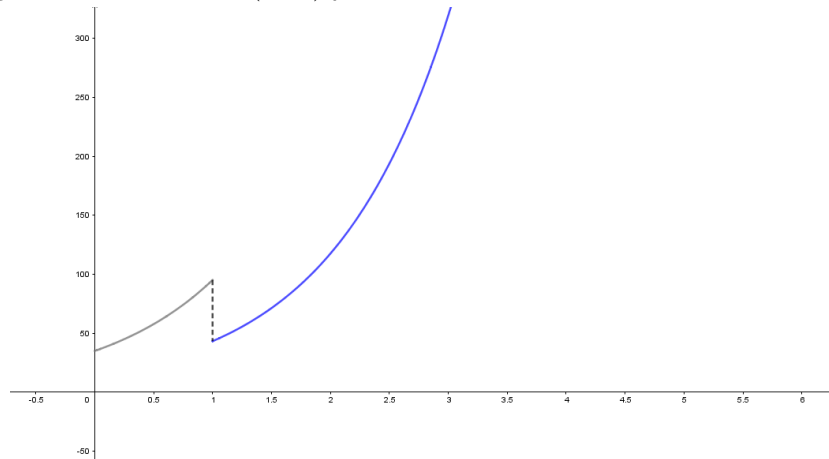


Figura 39. Gráfica de (4.16) para $x_0 = 35$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\theta = 1.2$, $T = 1$.



de la siguiente manera

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + \beta - \theta \sum_{i=1}^m x(t) \delta_{T_i}(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Trabajando de manera análoga a lo hecho para obtener la solución del P.V.I (4.3), la

solución del P.V.I (4.17), es dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1), & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - \theta x(T_1) e^{\alpha(t-T_1)}, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ \vdots & \\ x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^p x(T_i) e^{\alpha(t-T_i)}, & \text{si } T_p \leq t < T_p + 1, \\ \vdots & \\ x_0 e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^m x(T_i) e^{\alpha(t-T_i)}, & \text{si } T_m \leq t, \end{cases} \quad (4.18)$$

donde $x(T_i)$ es dado por

$$x(T_i) = \frac{\theta}{1 + \theta} \left(x_0 e^{\alpha T_i} + \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha T_i} - 1) - \theta \sum_{r=1}^{i-1} x(T_r) e^{\alpha(T_i - T_r)} \right).$$

Nuevamente, con ayuda de Geogebra, obtuvimos las gráficas de la solución dada en (4.18), para $\alpha > \beta$ con $\theta = 1.2$ (Figura 40), y con $\theta = 0.9$ (Figura 41); para $\beta > \alpha$ con $\theta = 1.2$ (Figura 42) y para $\beta = 0$ con $\theta = 1.2$ (Figura 43), es decir, considerando en el último caso que no hubiera tasa de migración; además escogimos los tiempos de fumigación de manera periódica, es decir, que la diferencia de dos tiempos consecutivos sea constante. En los 3 casos consideramos $x_0 = 35$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$ y $T_4 = 2$, estos valores debido a que la tasa de crecimiento la tomamos a 1 mes (30 días), y suponemos fumigaciones cada 2 semanas aproximadamente. Al igual que en las Figuras 36, 37, 38 y 39, se observa que después de la aplicación del insecticida, hay un quiebre en el crecimiento poblacional, y posteriormente a esta aplicación, la dinámica vuelve a ser exponencial.

Figura 40. Gráfica de (4.18) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$,
 $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.

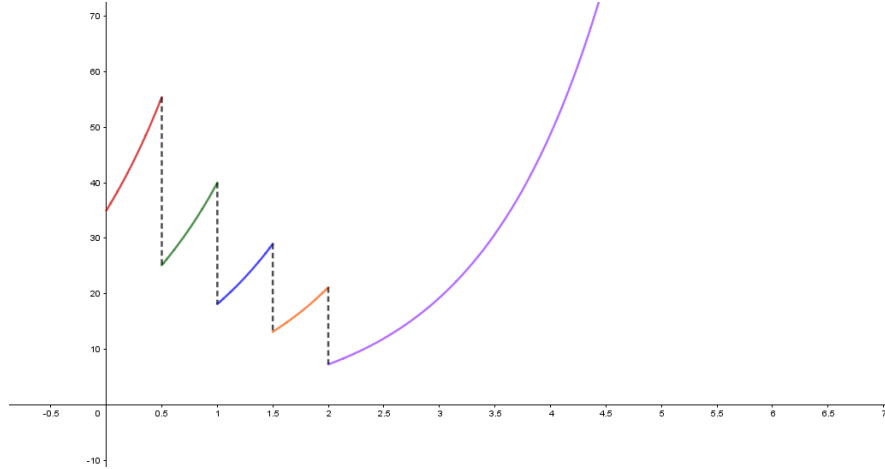
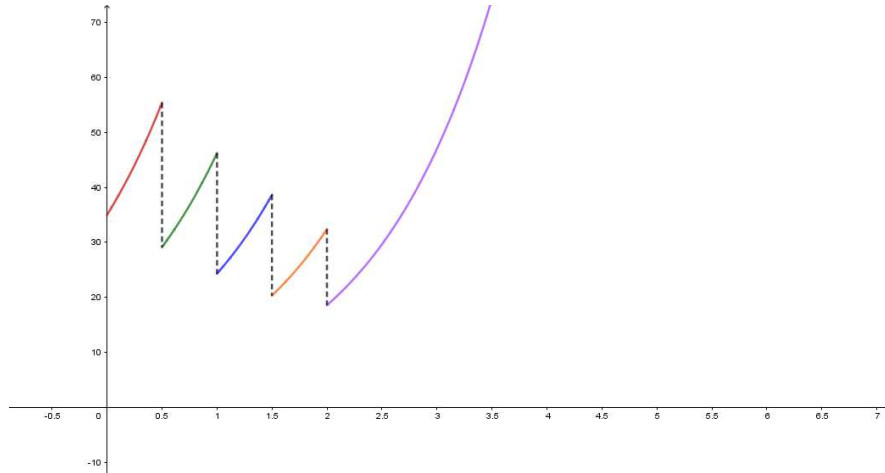


Figura 41. Gráfica de (4.18) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\theta = 0.9$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$,
 $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.



Como se observa en (4.16) y (4.18), desde el punto de vista práctico es prioritario conocer los parámetros α , β y θ . Sin embargo, en general, la determinación de estos parámetros no es una tarea fácil, ya que depende en que medida de información y estadísticas que haya sido recolectada y analizada por expertos.

En el caso que nos ocupa, hasta donde pudimos consultar, no hay información explí-

Figura 42. Gráfica de (4.18) para $x_0 = 35$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.

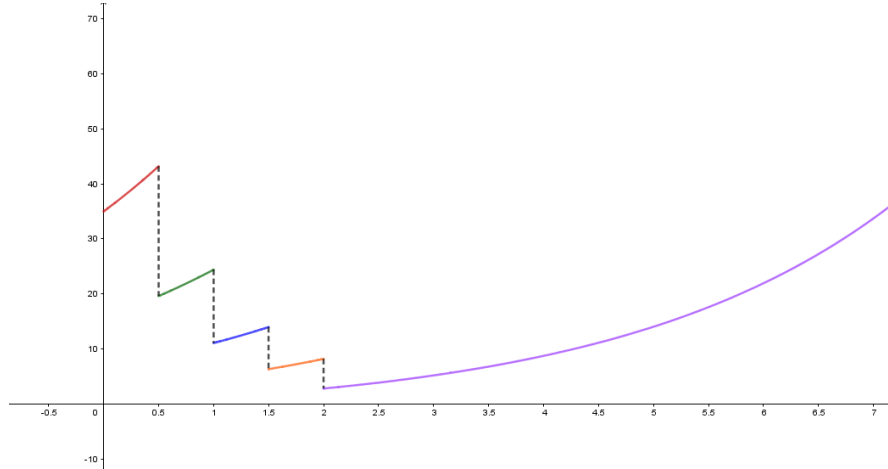
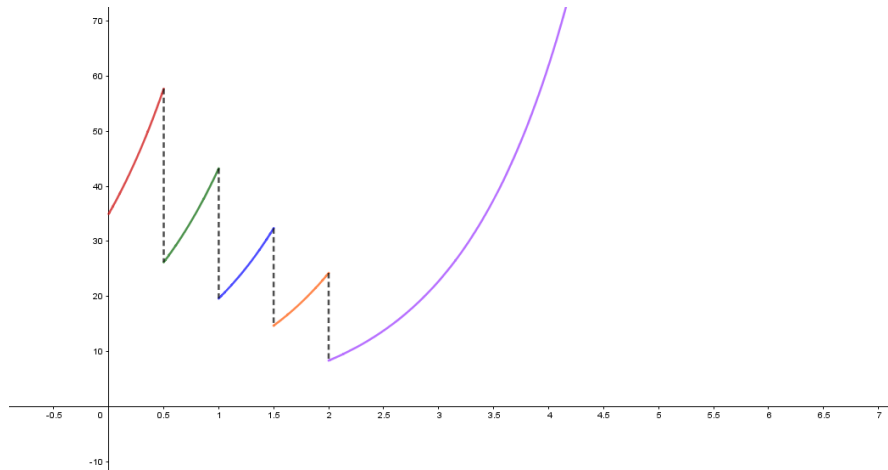


Figura 43. Gráfica de (4.18) para $x_0 = 35$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\theta = 1.2$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.



cita que permita saber posibles valores de estos parámetros. Es por esta razón que nos pusimos en la tarea de recolectar información y datos sobre el comportamiento de la plaga Trips en función de la temperatura, que aunque insuficientes, nos permiten, a través de herramientas de sistemas de control basados en reglas difusas, dar una primera aproximación de estos valores como se mostrará en la siguiente sección.

4.3.2. Determinación de tasa de crecimiento a partir del método T.S.K Como se mencionó al final de la Sección 4.3.1, un problema en la agronomía de la mora, es la determinación de los parámetros α , β y θ , que involucra el modelo dado por (4.3). Teniendo presente esta problemática, y ante la ausencia de literatura al respecto, nos propusimos hacer un primer ejercicio académico para determinar estos coeficientes, haciendo uso de cierta información recolectada en un cultivo de mora sin espina, en la finca San Rafael del municipio de Santa Bárbara, en la vereda La Salina; y de ²⁷, un artículo donde conseguimos una buena colección de datos del crecimiento del Trips a distintas temperaturas, a la cual recurrimos en ausencia de información para poder llevar a cabo el análisis. Teniendo en cuenta esta información, y siendo conscientes que no es para nada suficiente, nos propusimos hacer uso de la teoría de sistemas de control basados en reglas difusas para la determinación del parámetro α .

Ciertamente, la naturaleza de α es difusa; más aún, teniendo en cuenta la literatura sobre la plaga Trips, se ha determinado que α depende esencialmente de la *temperatura*, es decir, que en las soluciones (4.16) y (4.18), $\alpha = \alpha(h)$, siendo h la temperatura. Por lo tanto, presentaremos un ejemplo de un sistema de control difuso con el método T.S.K, con el objetivo, de no solo obtener una aproximación del valor de α (en función de la temperatura), sino también de mostrar el funcionamiento de este sistema.

Recordemos que la diferencia del sistema T.S.K con el sistema Mamdani radica en la estructura de sus reglas, pues, mientras que en el sistema Mamdani el consecuente

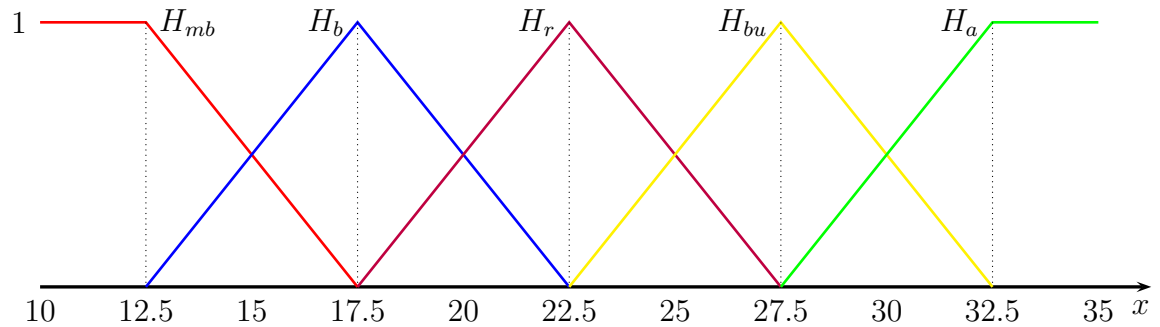
²⁷ J. R. MCDONALD, J. S. BALE y K.F.A. WALTERS. "Effect of temperature development of the Western Flower Thrips, *Frankliniella occidentalis* (Thysanoptera: Thripidae)". En: *European Journal of Entomology* 95 (1998), 301-306.

de las reglas son conjuntos difusos, en el sistema T.S.K son funciones lineales; por lo tanto, es esencial tener una colección de datos lo suficientemente grande y precisa que nos permita definir dichas funciones; y aunque por cuestiones de tiempo y herramientas no nos fue posible recoger esta gran cantidad de datos, pudimos encontrar en ²⁷ una colección valiosa de datos que nos permitieron dar un bosquejo de las funciones lineales deseadas.

Como se mencionó anteriormente, la literatura al respecto de la plaga Trips afirma que el crecimiento de la plaga depende de la temperatura, por lo tanto, se considerará una única variable de entrada, la temperatura, y la función del consecuente, que dependerá de la temperatura, indicará la tasa de crecimiento del Trips en un mes (30 días) hasta volverse un adulto.

Paso 1: Establecimos la variable de entrada *temperatura* (H). Esta variable la trabajaremos en el rango $[10, 35]$ ($^{\circ}C$). Se consideran estos valores debido a que la literatura relacionada al ciclo de vida del Trips, afirma que es en este rango de temperaturas donde se da el desarrollo de la plaga, y además los datos de ²⁷ corroboran esta información. Adicionalmente, los términos lingüísticos definidos son: *temperatura muy baja* H_{mb} , *temperatura baja* H_b , *temperatura regular* H_r , *temperatura buena* H_{bu} y *temperatura alta* H_a . Los respectivos conjuntos difusos que los representan son ilustrados en la Figura 44.

Figura 44. Términos lingüísticos de la variable lingüística H.

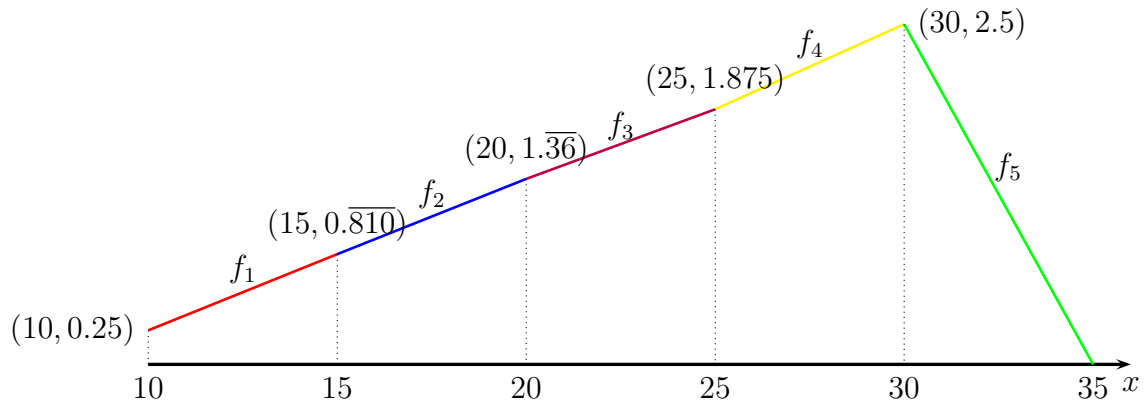


Las funciones de los consecuentes serán funciones lineales entre los valores obtenidos a partir de 27, los cuales nos indican que:

- A los $10^{\circ}C$ la tasa de crecimiento a 30 días es de $\frac{30}{120}$.
- A los $15^{\circ}C$ la tasa de crecimiento a 30 días es de $\frac{30}{37}$.
- A los $20^{\circ}C$ la tasa de crecimiento a 30 días es de $\frac{30}{22}$.
- A los $25^{\circ}C$ la tasa de crecimiento a 30 días es de $\frac{30}{16}$.
- A los $30^{\circ}C$ la tasa de crecimiento a 30 días es de $\frac{30}{12}$.
- A los $35^{\circ}C$ ya no hay crecimiento, por lo tanto la tasa de crecimiento a 30 días es de 0.

De esta manera las funciones del consecuente son ilustradas en la Figura 45.

Figura 45. Funciones del consecuente.

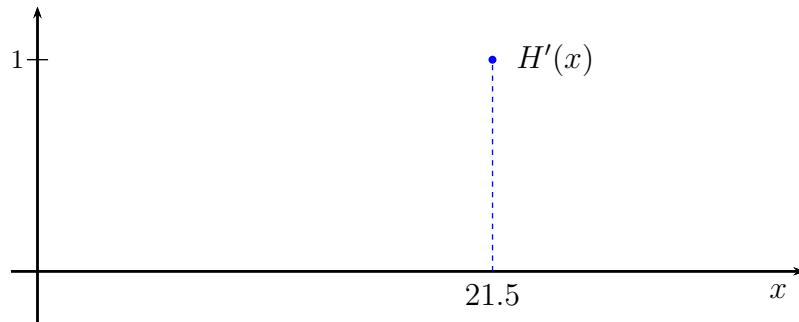


Así mismo, las funciones del consecuente, son dadas por

- $f_1 = \frac{83}{740}x - \frac{129}{148},$
- $f_2 = \frac{45}{407}x - \frac{690}{814},$
- $f_3 = \frac{9}{88}x - \frac{15}{22},$
- $f_4 = \frac{1}{8}x - \frac{5}{4},$
- $f_5 = -\frac{1}{2}x + \frac{35}{2}.$

Paso 2: Se consideró la función de fuzificación dada por la función identidad $f_e(x_0) = x_0$. Esto quiere decir que cada uno de los valores de entrada, serán considerados como la función característica correspondiente al valor de entrada. Por ejemplo, si consideramos una temperatura inicial de $21.5^{\circ}C$ obtenemos el conjunto difuso ilustrado en la Figura 46.

Figura 46. Valor de entrada fuzificado.



Paso 3: Las reglas consideradas para este caso con las siguientes:

1. Si H es H_{mb} , entonces f_1 .
2. Si H es H_b , entonces f_2 .
3. Si H es H_r , entonces f_3 .
4. Si H es H_{bu} , entonces f_4 .
5. Si H es H_a , entonces f_5 .

Paso 4: Para dar la salida en este sistema, es necesario calcular la “fuerza de salida”, que viene dada por

$$w_k = i(A_{k1}(x_1), A_{k2}(x_2), \dots, A_{km}(x_k)),$$

siendo i una t -norma A_{kj} los conjuntos difusos del antecedente de la regla y x_j los valores de entrada para cada variable de entrada. Como en este caso hay 5 reglas, y en cada una solo participa una única variable de salida, obtenemos 5 “fuerzas de salida” distintas. Tomando la intersección estándar como la t -norma obtenemos que

- $w_1 = \min\{H_{mb}(x_0)\} = H_{mb}(x_0)$.

- $w_2 = \min\{H_b(x_0)\} = H_b(x_0)$.
- $w_3 = \min\{H_r(x_0)\} = H_r(x_0)$.
- $w_4 = \min\{H_{bu}(x_0)\} = H_{bu}(x_0)$.
- $w_5 = \min\{H_a(x_0)\} = H_a(x_0)$.

Recordemos que, la salida de este método está dada por el promedio ponderado de las “fuerzas de salida”, es decir,

$$y = \frac{\sum_{k=1}^n w_k \mathcal{Y}_k}{\sum_{k=1}^n w_k}, \quad (4.19)$$

siendo \mathcal{Y}_k cada una de las funciones del consecuente. Entonces obtenemos que

$$y = \frac{H_{mb}(x_0)f_1(x_0) + H_b(x)f_2(x) + H_r(x)f_3(x) + H_{bu}(x)f_4(x) + H_a(x)f_5(x)}{H_{mb}(x) + H_b(x) + H_r(x) + H_{bu}(x) + H_a(x)}. \quad (4.20)$$

Por ejemplo, para una temperatura de $21.5^\circ C$, obtenemos que

- $w_1 = H_{mb}(21.5) = 0$,
- $w_2 = H_b(21.5) = 0.2$,
- $w_3 = H_r(21.5) = 0.8$,
- $w_4 = H_{bu}(21.5) = 0$,
- $w_5 = H_a(21.5) = 0$.

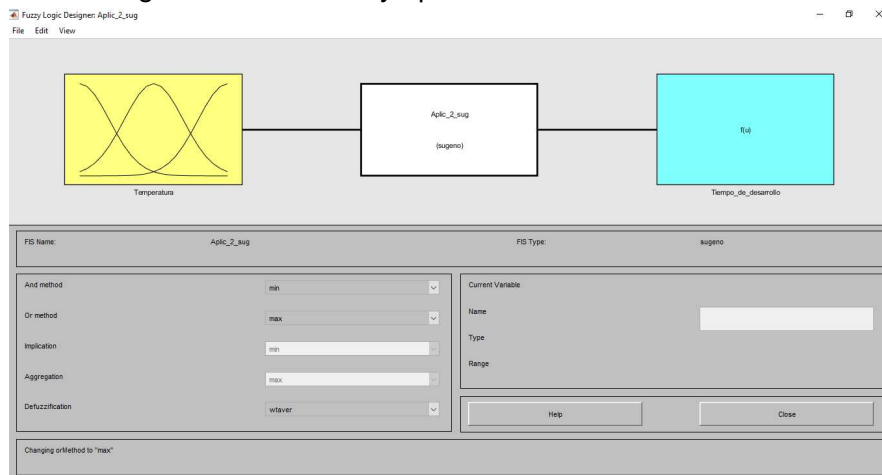
Así, como solo de w_2 y w_3 obtuvimos valores diferentes de 0, entonces la salida será dada por

$$y = \frac{0.2f_2(21.5) + 0.8f_3(21.5)}{0.8 + 0.2} = 1.53\overline{18}. \quad (4.21)$$

Lo que esto indica es que a $21.5^\circ C$ la tasa de crecimiento del Trips (α), hasta volverse un adulto a 30 días es de $1.53\overline{18}$.

Con ayuda del software de Matlab comentado en la aplicación anterior, al introducir las variables con sus respectivos nombres y definidos los operadores (Figura 47); los términos lingüísticos correspondientes a las variables de entrada(Figura 48); las funciones del consecuente (Figura 49) y las reglas correspondientes (Figura 50), pudimos obtener una mayor cantidad de valores para distintos valores de entrada, como se muestra en la Tabla 6.

Figura 47. Variables y operadores del sistema T.S.K.



Para una temperatura de $21.5^\circ C$, como la tomada en el ejemplo, obtuvimos un valor cercano $1.53\overline{18}$, el valor no es exacto debido a que el software toma solamente 4 decimales, por lo tanto, no trabaja con exactamente las mismas funciones que nosotros consideramos; sin embargo nos permite observar el comportamiento de los

Figura 48. Términos lingüísticos de la variable de entrada.

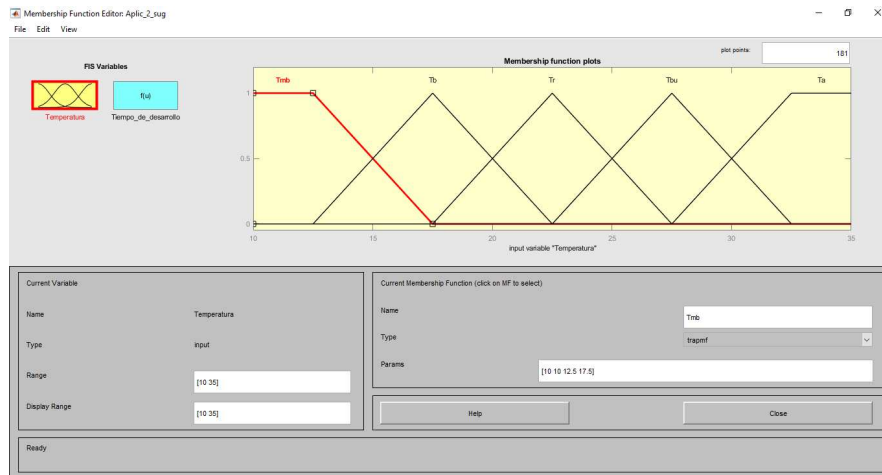
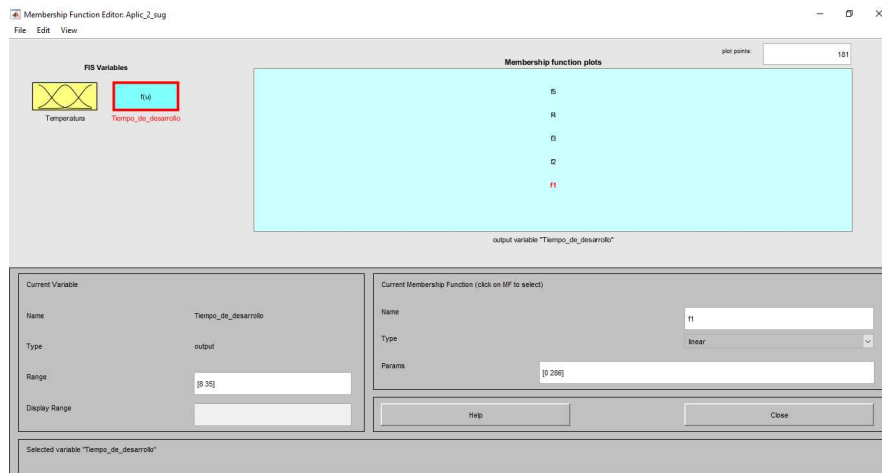


Figura 49. Funciones del consecuente.



valores de salida ante cambios en el valor de entrada.

Nuevamente, con ayuda del software, consideramos los operadores producto algebraico y suma algebraica como las t -norma y t -conorma respectivamente, y obtuvimos los resultados mostrados en la Tabla 7.

Notemos que ninguno de los valores cambió a pesar de que los operadores si lo

Figura 50. Base de reglas del sistema T.S.K.

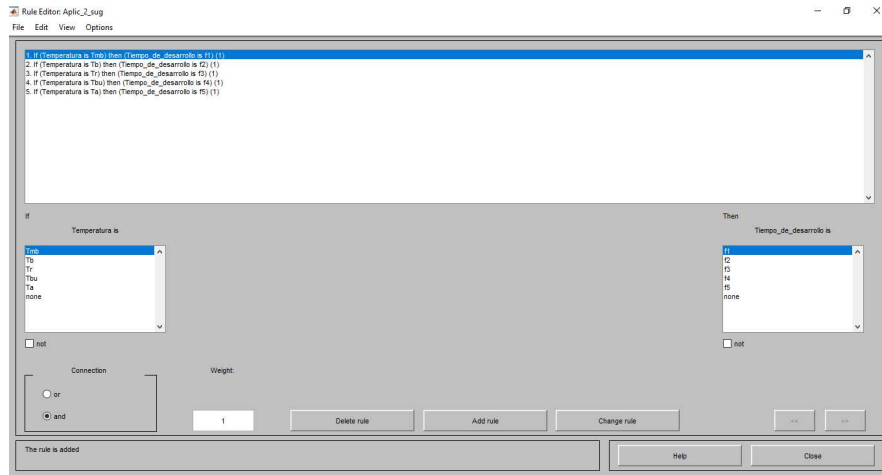


Tabla 6. Valores de salida obtenidos con el software de Matlab.

Temperatura	Tasa de crecimiento (α)
10	0.250
12	0.474
12.5	0.530
15	0.811
17.5	1.090
18.5	1.200
20	1.360
21.5	1.520
22.5	1.620
25	1.880
27.5	2.190
29	2.560
30	2.500
32	1.630
32.5	1.250
35	0.000

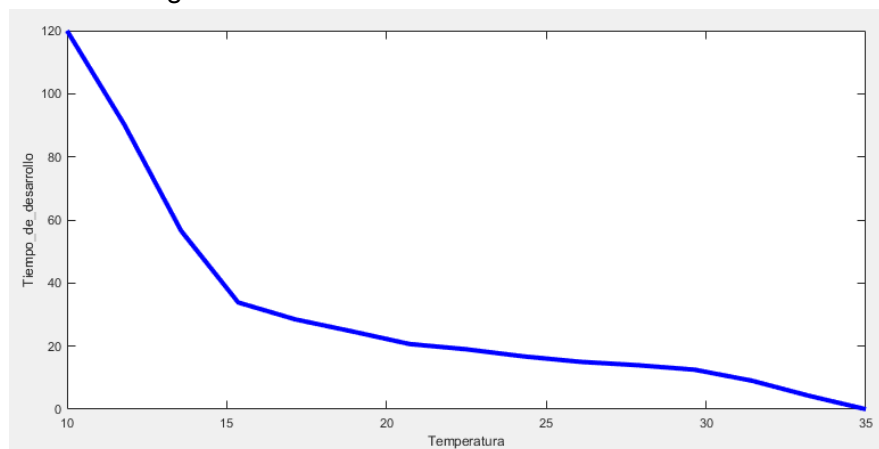
hicieron.

Adicionalmente obtuvimos la función resultante luego del proceso con el sistema T.S.K que podemos observar en la Figura 51.

Tabla 7. Valores de salida obtenidos con el producto algebraico y suma algebraica.

Temperatura	Tasa de crecimiento (α)
10	0.250
12	0.474
12.5	0.530
15	0.811
17.5	1.090
18.5	1.200
20	1.360
21.5	1.520
22.5	1.620
25	1.880
27.5	2.190
29	2.560
30	2.500
32	1.630
32.5	1.250
35	0.000

Figura 51. Función resultante del sistema T.S.K.



Observemos que esta función es muy similar a la Figura 45 pues el sistema T.S.K tiene como objetivo realizar transiciones más “suaves” entre las funciones definidas en el consecuente.

Adicionalmente, con ayuda del software de Matlab cambiamos los conjuntos difusos definidos para la variable de entrada por los de la Figura 52, y al calcular valores de salida dados distintos valores de entrada, obtuvimos los datos mostrados en la Tabla 8.

Figura 52. Nuevos términos lingüísticos de la variable de entrada.

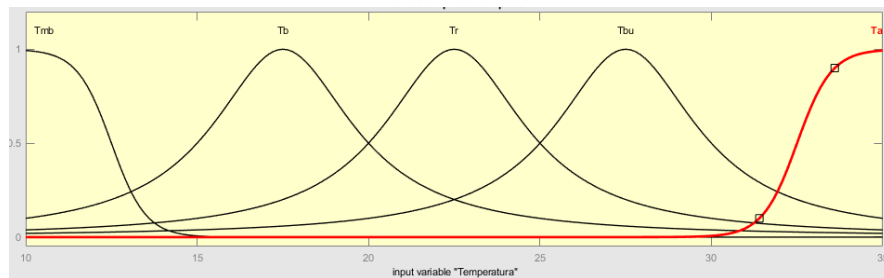


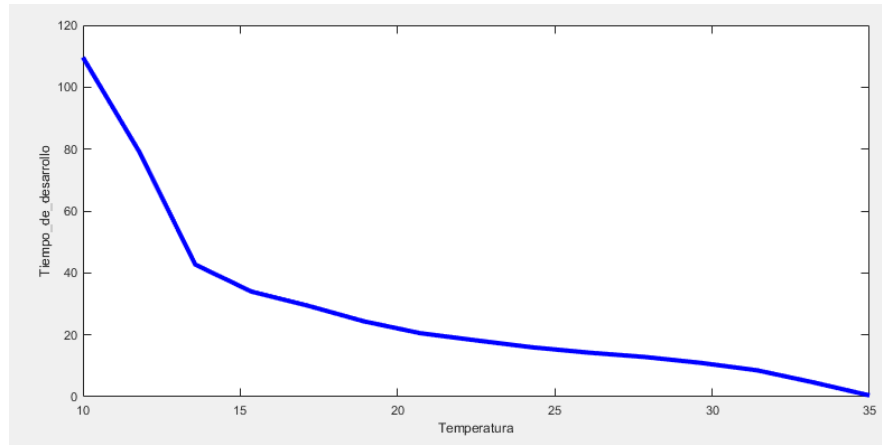
Tabla 8. Valores de salida obtenidos con distintos términos lingüísticos.

Temperatura	Tasa de crecimiento (α)
10	0.249
12	0.473
12.5	0.529
15	0.806
17.5	1.080
18.5	1.190
20	1.350
21.5	1.510
22.5	1.610
25	1.880
27.5	2.180
29	2.360
30	2.480
32	2.170
32.5	1.800
35	0.421

La función resultante fue la mostrada en la Figura 53. Nuevamente, obtuvimos una gráfica muy similar a la de la Figura 45, pero con transiciones un poco más suaves

que la obtenida con los conjuntos difusos triangulares y trapezoidales.

Figura 53. Nueva función resultante del sistema T.S.K.



Como pudimos observar, para el desarrollo del sistema T.S.K, es necesaria una gran cantidad de datos con los cuales sea posible definir las funciones del consecuente. Esta es una de las desventajas del método T.S.K, la dependencia de una basta colección de datos para el desarrollo correcto del sistema.

Ya obtenido el valor de α respecto a la temperatura, podemos devolvemos a la solución del P.V.I (4.18), y reemplazar el valor de α , por lo tanto, obtenemos una función de 2 variables, pues depende tanto del tiempo como de la temperatura, dada por

$$x(t,h)=\begin{cases} x_0 e^{\alpha(h)t} + \frac{\beta}{\alpha(h)}(e^{\alpha(h)t} - 1), & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ x_0 e^{\alpha(h)t} + \frac{\beta}{\alpha(h)}(e^{\alpha(h)t} - 1) - \theta x(T_1, h) e^{\alpha(h)(t-T_1)}, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ \vdots & \\ x_0 e^{\alpha(h)t} + \frac{\beta}{\alpha(h)}(e^{\alpha(h)t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^p x(T_i, h) e^{\alpha(h)(t-T_i)}, & \text{si } T_p \leq t < T_p + 1, \\ \vdots & \\ x_0 e^{\alpha(h)t} + \frac{\beta}{\alpha(h)}(e^{\alpha(h)t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^m x(T_i, h) e^{\alpha(h)(t-T_i)}, & \text{si } T_m \leq t, \end{cases} \quad (4.22)$$

donde $x(T_i, h)$ es dado por

$$x(T_i, h) = \frac{\theta}{1 + \theta} \left(x_0 e^{\alpha(h)T_i} + \frac{\beta}{\alpha(h)} (e^{\alpha(h)T_i} - 1) - \theta \sum_{r=1}^{i-1} x(T_r) e^{\alpha(h)(T_i - T_r)} \right).$$

Así, por ejemplo para una temperatura $h = 21.5^\circ C$, como $\alpha(21.5) = 1.53\overline{18}$ obtenemos la función

$$x(t, 21.5) = \begin{cases} x_0 e^{1.53\overline{18}t} + \frac{\beta}{1.53\overline{18}} (e^{1.53\overline{18}t} - 1), & \text{si } 0 \leq t < T_1, \\ x_0 e^{1.53\overline{18}t} + \frac{\beta}{1.53\overline{18}} (e^{1.53\overline{18}t} - 1) - \theta x(T_1, 21.5) e^{1.53\overline{18}(t - T_1)}, & \text{si } T_1 \leq t < T_2, \\ \vdots & \\ x_0 e^{1.53\overline{18}t} + \frac{\beta}{1.53\overline{18}} (e^{1.53\overline{18}t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^p x(T_i, 21.5) e^{1.53\overline{18}(t - T_i)}, & \text{si } T_p \leq t < T_{p+1}, \\ \vdots & \\ x_0 e^{1.53\overline{18}t} + \frac{\beta}{1.53\overline{18}} (e^{1.53\overline{18}t} - 1) - \theta \sum_{i=1}^m x(T_i, 21.5) e^{1.53\overline{18}(t - T_i)}, & \text{si } T_m \leq t, \end{cases} \quad (4.23)$$

donde $x(T_i, 21.5)$ es dado por

$$x(T_i, 21.5) = \frac{\theta}{1 + \theta} \left(x_0 e^{1.53\overline{18}T_i} + \frac{\beta}{1.53\overline{18}} (e^{1.53\overline{18}T_i} - 1) - \theta \sum_{r=1}^{i-1} x(T_r) e^{1.53\overline{18}(T_i - T_r)} \right).$$

Nuevamente, con ayuda de Geogebra, obtenemos las gráficas para $x_0 = 35$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$ (Figura 4.18), y para $x_0 = 35$, $\beta = 0.8$, $\theta = 0.9$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$ (Figura 4.19), es decir variando la efectividad de aplicación del fumigante.

Figura 54. Gráfica de (4.23) para $x_0 = 35$, $\alpha = 1.53\overline{18}$, $\beta = 0.8$, $\theta = 1.2$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.

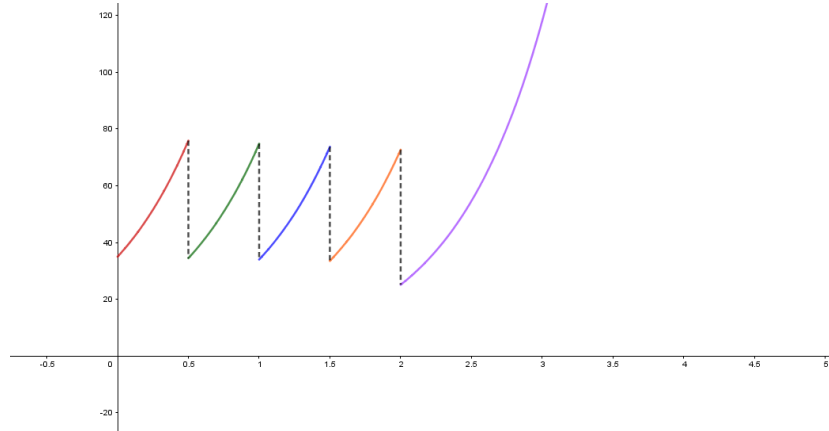
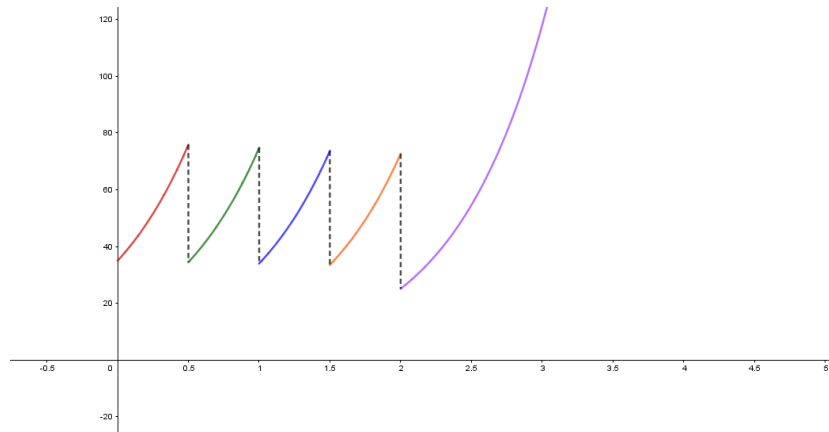


Figura 55. Gráfica de (4.23) para $x_0 = 35$, $\alpha = 1.53\overline{18}$, $\beta = 0.8$, $\theta = 0.9$, $T_1 = 0.5$, $T_2 = 1$, $T_3 = 1.5$, $T_4 = 2$.



Las Figuras 54 y 55 corresponden a la tasa de crecimiento del Trips para una temperatura de $21.5^{\circ}C$ con distintos valores de θ .

5. CONCLUSIONES

- Se comprendieron los fundamentos de la teoría de conjuntos difusos, y de la lógica difusa como punto de partida para el estudio de los sistemas de control basados en reglas difusas.
- Se entendió la estructura de los sistemas de control difuso, y se evidenciaron los pasos fundamentales para la correcta aplicación de estos, incluyendo la fase de fuzificación, la definición de las reglas difusas, los métodos de inferencia y los tipos de defusificación.
- Se conocieron las características generales de la mora de castilla, así como sus plagas más comunes, haciendo un énfasis en la plaga Trips, que fue involucrada en las aplicaciones del presente trabajo.
- Se propuso un sistema de control difuso para determinar el control químico de la plaga Trips en el proceso la fumigación de una plantación de mora sin espina, lográndose entender la aplicabilidad del método de inferencia de Mamdani, a partir de la cual se observó que dicho método facilita enormemente tanto el planteamiento del problema como su solución.
- Se propuso un sistema de control difuso para aproximar la tasa de crecimiento (en función de la temperatura) de la plaga Trips que afecta la plantación de mora sin espina, lográndose entender el procedimiento del método Takagi-Sugeno-Kang (T.S.K), a partir de la cual se observó que el método es más complejo de aplicar que el método Mamdani y necesita de una vasta colección de datos para que valga la pena su uso, pero a su vez, facilita el desarrollo de sistemas que involucren esta gran cantidad de datos.

- Se empleó el Software Matlab para la ejecución de los sistemas de control planteados en las aplicaciones basados en los métodos Mamdani y T.S.K.

BIBLIOGRAFÍA

ARENAS DÍAZ, G. y E. J. VILLAMIZAR ROA. *Introducción a las ecuaciones diferenciales difusas*. Ediciones UIS, 2018 (vid. págs. 26, 30-32, 34, 37).

AVILA, C. A. “MODELO TECNOLÓGICO SISTEMA PRODUCTIVO ESPECIE AGRÍCOLA: MORA (*Rubus glaucus* Benth)”. En: (2019) (vid. pág. 109).

CÁMARA DE COMERCIO DE BOGOTÁ. *Manual Mora*. <https://bibliotecadigital.ccb.org.co/>. 2015 (vid. págs. 102-104).

CHILEALIMENTOS. *NUEVA ESPECIE DE MORA SIN ESPINAS OFRECE NUEVAS OPORTUNIDADES A LOS PRODUCTORES DE ECUADOR*. <https://www.chilealimentos.com/wordpress/nueva-especie-de-mora-sin-espinas-ofrece-nuevas-opportunidades-a-los-productores-de-ecuador/>. 2014 (vid. págs. 106-108).

COMERCIAL QUÍMICA MASSÓ. *Ácaros, araña roja, araña amarilla, araña blanca*. <http://www.massogarden.com/es/plagas-y-enfermedades-es/acaros-arana-roja-arana-amarilla-arana-blanca> (vid. pág. 104).

COSTA, N. da, D. KRAUSE y O. BUENO. “Paraconsistent logics and paraconsistency”. En: *Philosophy of logic*. Elsevier, 2007, 791-911 (vid. pág. 43).

EL ABRAZO DEL BOSQUE. *Mora de castilla*. <https://shorturl.at/sAR01>. 2019 (vid. pág. 102).

GUTIÉRREZ, M. y S. ITURRALDE. *Fundamentos básicos de instrumentación y control*. Universidad estatal Península de Santa Elena, 2017 (vid. pág. 83).

- IDEAS BIOLÓGICAS. *Plan fotosanitario. Control biológico del Trips*.
<https://www.ideasbiologicas.com/control-biologico-del-trips> (vid. pág. 106).
- INSTITUTO COLOMBIANO AGROPECUARIO. *Manejo fitosanitario del cultivo de la mora*. <https://www.ica.gov.co/>. 2011 (vid. pág. 105).
- INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES AGROPECUARIAS. *Ficha técnica de la variedad de mora sin espinas (Rubus glaucus Benth) INIAP ANDIMORA-2013*. <https://repositorio.iniap.gob.ec/bitstream/41000/4768/1/iniapsc359.pdf>. 2013 (vid. pág. 107).
- JARAMILLO., J. A. *El cultivo de la mora de castilla*. <https://repository.agrosavia.co/>. 1984 (vid. págs. 102, 103).
- KLIR, G. J. y B. YUAN. *Fuzzy sets and fuzzy logic*. Vol. 4. Prentice hall New Jersey, 1995 (vid. págs. 76-79, 84).
- MASSAD, E. y col. *Fuzzy logic in action: Applications in Epidemiology and Beyond*. Springer, 2008 (vid. págs. 87-92).
- MCDONALD, J. R., J. S. BALE y K.F.A. WALTERS. "Effect of temperature development of the Western Flower Thrips, *Frankliniella occidentalis* (Thysanoptera: Thripidae)". En: *European Journal of Entomology* 95 (1998), 301-306 (vid. págs. 131, 132).
- MINISTERIO DE AGRICULTURA Y GANADERÍA DE ECUADOR. *INIAP entregará nueva variedad de mora sin espina*. <https://www.agricultura.gob.ec/iniap-entregara-nueva-variedad-de-mora-sin-espinas/>. 2013 (vid. pág. 108).

OOSTRA, A. "Sobre lógicas multivaluadas". En: *Revista Integración* 22.1 and 2 (2004), págs. 7-21 (vid. pág. 41).

PÁEZ, A. "Introducción a la lógica moderna". En: (2007) (vid. pág. 41).

PÉREZ, M. A., A. PÉREZ H. y E. PÉREZ BERENQUER. "Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo". En: (2008) (vid. pág. 82).

PÉREZ, T. R. *¿Existe el método científico?* <http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/161/html/toc.html>. 1990 (vid. pág. 40).

RAFFINO, M. E. *Lógica*. <https://concepto.de/logica/>. 2020 (vid. pág. 41).

ROLDÁN, P. N. *Modelo matemático*. <https://economipedia.com/definiciones/modelo-matematico.html> (vid. pág. 81).

SŁUPECKI, J., G. BRYLL y T. PRUCNAL. "Some remarks on three-valued logic of J. Łukasiewicz". En: *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic* 21 (1967), 45-70 (vid. pág. 42).

SUGENO, M. y G. T. KANG. "Structure identification of fuzzy model." En: *Fuzzy Sets Syst.* 28.1 (1988), 15-33 (vid. pág. 90).

SUGENO, M. y T. TAKAGI. "A new approach to design of fuzzy controller." En: *In: Wang, P.P. (ed.) Advances in fuzzy sets, possibility theory and applications* (1983), págs. 325-334 (vid. pág. 90).

TREMANTE, P. y J. BREA. “Una visión de la teoría difusa y los sistemas difusos enfocados al control difuso”. En: *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias* 4 (2014), 121-136 (vid. págs. 14, 16).

ZADEH, L. A. “Fuzzy sets”. En: *Information and control* 8.3 (1965), 338-353 (vid. págs. 19, 47-49, 51, 54, 58, 60, 63-67).