

**ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA  
EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES  
ESPECTRO POLARIZADAS**

JORGE LUIS BACCA QUINTERO  
LIZETH CAROLINA LÓPEZ SANTANA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA  
BUCARAMANGA

2017

# ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO POLARIZADAS

JORGE LUIS BACCA QUINTERO  
LIZETH CAROLINA LÓPEZ SANTANA

Trabajo de grado para optar por el título de:  
Ingeniero de Sistemas

Director:  
*Máster* HÉCTOR MIGUEL VARGAS GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECAÑICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍA DE SISTEMAS E INFORMÁTICA  
BUCARAMANGA

2017

# Índice general

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>1. IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS</b>	<b>14</b>
1.1. REPRESENTACIÓN DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.	15
1.2. APLICACIONES . . . . .	16
1.2.1. Detección de tejido cancerígeno . . . . .	16
1.2.2. Clasificación de tarjetas bajo condiciones climáticas . . . . .	17
1.2.3. Detección de objetos . . . . .	18
<b>2. MEZCLAS LINEALES DE BAJO RANGO EN IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.</b>	<b>20</b>
2.1. MODELO MATEMÁTICO DE MEZCLAS LINEALES. . . . .	21
2.2. MÉTODOS DE ADQUISICIÓN TRADICIONALES . . . . .	21
<b>3. MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.</b>	<b>22</b>
3.1. IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS COMPRIMIDAS POR UN POLARIZADOR PIXELADO Y UN DETECTOR DE COLOR MODELADO. . . . .	22
<b>4. ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.</b>	<b>24</b>
4.1. ARQUITECTURA PROPUESTA . . . . .	24
4.1.1. Componentes de la arquitectura . . . . .	24
4.2. CODIFICACIÓN DE LA ESCENA . . . . .	25
<b>5. OPTIMIZACIÓN DE LAS APERTURAS CODIFICADAS USANDO MATRICES HADAMARD</b>	<b>31</b>
5.1. MATRIZ HADAMARD . . . . .	31
5.1.1. Propiedades . . . . .	32
5.1.2. Conjetura de Hadamard . . . . .	32
5.1.3. Aplicaciones . . . . .	32
5.2. MATRIZ DE MUESTREO UTILIZANFO MATRICES HADAMARD .	32
<b>6. PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN y ALGORITMOS DE RECONSTRUCCIÓN.</b>	<b>34</b>
6.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA . . . . .	34

---

6.2. ALGORITMO PROPUESTO PARA LA RECONSTRUCCIÓN . . .	35
<b>7. SIMULACIONES Y RESULTADOS</b>	<b>39</b>
7.1. RESULTADOS EN DIFERENTES ARQUITECTURAS . . . . .	41
7.2. RESULTADOS EN DIFERENTES ALGORITMOS DE RECONSTRUCCIÓN . . . . .	46
<b>8. CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>52</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>54</b>

## Índice de figuras

1.1. Representación 4-D de una imagen espectro-polarizada . . . . .	15
1.2. Representación visual de los parámetros de Stokes en una imagen blanco y negro, a) representa el parámetro $S_0$ , b) el parámetro $S_1$ y c) el parámetro $S_2$ . . . . .	16
1.3. Polarización de los tejidos, donde C presenta el tejido prostático cancerígeno y N el tejido prostático normal. a)Dirección de polarización paralela. b)Dirección de polarización perpendicular. c) Diferencia entre las imágenes de polarización obtenidas a) y b). . . . .	17
1.4. Resultados del experimento bajo clima soleado. $DN(\lambda)$ , $R(\lambda)$ , $DoP(\lambda)$ y algoritmo propuesto. (De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) . . . . .	18
1.5. Resultados del experimento bajo clima nublado. $DN(\lambda)$ , $R(\lambda)$ , $DoP(\lambda)$ y algoritmo propuesto.(De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) . . . . .	18
1.6. Resultados obtenidos. (a)-(e) Parámetros de Stokes ( $S_0$ , $S_1$ , $S_2$ ), estado de polarización y orientación, respectivamente. (f) Detección usando el cubo de datos polarizado y datos polarizados adaptativos.(g) Algoritmo propuesto . . . . .	19
2.1. Ejemplo de la mezcla de pixeles en un respectivo ángulo de polarización . . . . .	20
3.1. Sistema de adquisición de imágenes espectro polarizadas basado en CASSI . . . . .	23
4.1. Arquitectura de único pixel para el muestreo compresivo de imágenes espectro-polarizadas . . . . .	24
4.2. Codificación espectral y de polarización . . . . .	26
4.3. Representación del arreglo de micro-polarizadores . . . . .	29
4.4. Representación de una apertura codificada, donde el pixel negro y blanco representa el bloqueo y paso de la luz, respectivamente . . . . .	29
4.5. Matriz de muestreo . . . . .	30
5.1. Representación visual de matrices Hadamard con diferentes valores de $n$ , el pixel negro y blanco representan el valor +1 y -1, respectivamente . . . . .	31

---

7.1. Representación 4-D de una imagen espectro-polarizada . . . . .	40
7.2. Datos de referencia de $S_0$ , $S_1$ y $S_2$ plano de imágenes, cada parámetro de Stokes es mostrado en 4 de los 14 canales de polarización: 500, 530, 580 y 620 nm. . . . .	41
7.3. Resultados en promedio comparando arquitecturas CASSI y Único Pixel propuesta, con el algoritmo de reconstrucción GPSR . . . . .	42
7.4. Resultados de parámetros de Stokes con algoritmo de reconstrucción GPSR . . . . .	43
7.5. Comparación visual de la reconstrucción . . . . .	44
7.6. Firmas espectrales obtenidas en las reconstrucciones con las diferentes arquitecturas . . . . .	45
7.7. Reconstrucción para el 50% de compresión de la arquitectura propuesta . . . . .	46
7.8. Resultados en promedio comparando algoritmos de reconstrucción GPSR y el propuesto. . . . .	47
7.9. Resultados de parámetros de Stoke con algoritmo de reconstrucción GPSR . . . . .	48
7.10. Reconstrucción para 50% de compresión para la arquitectura de único pixel propuesta. a) Cubo de datos original. b) Reconstrucción con GPSR. c) Reconstrucción algoritmo propuesto. . . . .	49
7.11. Firmas espectrales obtenidas con los diferentes algoritmos de reconstrucción . . . . .	50

---

## Resumen

TITULO: ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO POLARIZADAS.<sup>(\*)</sup>

AUTORES: JORGE LUIS BACCA QUINTERO  
LIZETH CAROLINA LÓPEZ SANTANA <sup>(\*\*)</sup>

PALABRAS CLAVE: Espectro-polarizado, parámetros de Stokes, muestreo compresivo, arquitectura de único pixel, mezclas lineales.

La adquisición de imágenes espectro-polarizadas es un método que permite obtener información espectral y polarizada de la escena estudiada. En este trabajo se presenta la compresión de imágenes espectro-polarizadas utilizando una arquitectura de único pixel basada en un arreglo de micro-polarizadores que se mueve con cada adquisición y una apertura codificada binaria, permitiendo así obtener diferentes codificaciones de la escena. Esta arquitectura propuesta permite obtener varias proyecciones compresivas dispersas con codificación espacial, espectral y de polarización, que son medidas en proyecciones 2D. Los parámetros de Stokes son reconstruidos usando el algoritmo propuesto de mezclas lineales desarrollado como parte de este trabajo, el cual tiene en cuenta las firmas más representativas de la imagen.

Emplear esta arquitectura permite reducir el número total de medidas necesarias para obtener una imagen espectro-polarizada con respecto a los métodos tradicionales, además la utilización del algoritmo de reconstrucción propuesto mejora el pico señal a ruido de la reconstrucción. Los experimentos realizados muestran la calidad de la arquitectura mejorando 4 dB en comparación con la arquitectura CAS-SI en el estado del arte y el algoritmo basado en mezclas lineales mejora hasta en 3 dB en comparación con el algoritmo actualmente utilizado Proyección de gradiente para la reconstrucción escasa (GPSR por su sigla en inglés).

---

<sup>(\*)</sup> Trabajo de Investigación.

<sup>(\*\*)</sup> Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas. Escuela de Ingeniería de Sistemas e Informática.  
Director: Máster Héctor Miguel Vargas García.

---

## Abstract

TITLE: ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO POLARIZADAS. (\*)

AUTHORS: JORGE LUIS BACCA QUINTERO  
LIZETH CAROLINA LÓPEZ SANTANA (\*\*)

KEYWORDS: Spectral polarization imaging, Stokes parameters, compressive sensing, single pixel systems, Linear mixtures.

The acquisition of spectral polarization images is a method that obtains polarized, spectral and spatial information of the scene. In this work, the compression of spectral polarized images using a single pixel architecture, based on micro-polarizers aligned with a binary coded aperture is presented. The micro-polarizers are aligned to the coded apertures and move with each shot, in this way obtaining diverse types of codifications from the scene. The proposed architecture allows to obtain several dispersed compressive projections with spatial, spectral and polarization coding, that are acquired in 2D projections. Stokes parameter images at several wavelengths are reconstructed using the proposed linear mixing algorithm that was developed in this work. This algorithm is based on the principal Spectral signatures of the data.

This architecture reduces the total number of measurements needed to obtain spectral polarized images compared to traditional acquisition methods. Additionally, in this work the proposed algorithm for reconstruction is used and it improves the peak signal-to-noise ratio in the reconstructed images. The experiments performed validate the quality of the architecture, improving up to 5 dB compared with CASSI from the state of the art. The algorithm based on linear mixing improves up to 5dB compared with the currently used Gradient Projection for Sparse Reconstruction (GPSR) algorithm.

---

(\*) Research Work.

(\*\*) School of Physical-Mechanical Engineering. Department of Systems Engineering and Informatics. Advisor: Master Héctor Miguel Vargas García.

# INTRODUCCIÓN

La adquisición de imágenes espectrales es un método que permite obtener información de diferentes rangos del espectro electromagnético de una escena. La información obtenida puede ser representada como un cubo de datos compuesto por diferentes imágenes en cada longitud de onda, donde cada una de ellas, banda espectral, aporta información de la escena analizada [1]. Este tipo de imágenes aportan datos espaciales y espectrales de la escena, permitiendo estimar las diferentes propiedades físicas y las distribuciones de los materiales en la escena. Una de las magnitudes asociadas a la óptica es la polarización [2], que mide información sobre la naturaleza vectorial del campo óptico en la escena. Estas imágenes proveen información acerca de la superficie del objeto como la rugosidad, forma, sombreado y orientación, teniendo como objetivo identificar áreas y secciones de objetos [3, 4]

Las imágenes espectro-polarizadas, surgen de la unión de estos dos tipos de imágenes, espectrales y polarizadas, teniendo así, más información de la escena. La obtención de imágenes espectro-polarizadas se realiza midiendo imágenes de polarización a través de las longitudes de onda espectrales.

La mayor dificultad en imágenes espectro-polarizadas es la adquisición, debido a la gran cantidad de datos. La forma tradicional de adquisición captan mediciones secuenciales, escaneando la escena por cada dimensión, cambiando filtros de color o rotando los filtros de polarización. El tiempo de adquisición es largo, la conmutación mecánica incrementa el ruido de adquisición y limita el rendimiento en una escena dinámica. Por esto, se han planteado varias arquitecturas en imágenes hiperespectrales que requieren grandes detectores.

El uso de muestreo compresivo permite que la cantidad de muestras sean menores, por esta razón, la velocidad de detección aumenta significativamente. Luego a partir de estas medidas comprimidas se obtiene el cubo de datos hiperdimensionales. La teoría de muestreo compresivo ha sido aplicada en arquitecturas de compresión de imágenes espectro-polarizadas usando un polarizador pixelado y un detector con modulación de color [5]. El principal problema de esta arquitectura es que solo permite realizar cuatro adquisiciones diferentes de la escena y el costo del detector empleado es elevado, debido a que los costos incrementan directamente proporcional a la resolución del detector. Esto limita el uso de estas imágenes, por esto lograr una reconstrucción en alta calidad con una cámara de

---

bajo costo ayudaría al estudio de estas imágenes.

Este trabajo propone una alternativa para reducir el costo de adquisición de imágenes espectro-polarizadas, debido a que el detector es de único pixel, además esta arquitectura no está limitada por el número de adquisiciones a realizar, debido a que solo depende de los componentes del micropolarizador y la apertura codificada binaria, permitiendo obtener información espacial, espectral y de polarización de la escena a partir de unas pocas mediciones de compresión. Adicionalmente, se desarrolla un algoritmo de reconstrucción basado en la representación de mezclas lineales.

El contenido de este trabajo se encuentra organizado de la siguiente manera: en el capítulo 1 se describe el concepto de imagen espectro-polarizada, su representación y algunas aplicaciones; en el capítulo 2 se establece la técnica de mezclas lineales de bajo rango en imágenes espectro-polarizadas, su modelo matemático y métodos de adquisición; en el capítulo 3 se describe el método de muestreo compresivo en imágenes espectro-polarizadas y la arquitectura CASSI para la adquisición de estas imágenes en el estado del arte. En el capítulo 4 se establecen los componentes y modelos matemáticos, que permiten describir el proceso de muestreo en la arquitectura propuesta. En el capítulo 5 se describe la optimización de las aperturas codificadas usando matrices Hadamard y el modelo matemático de matriz de muestreo; el algoritmo de reconstrucción propuesto y el problema de minimización, con su respectivo modelo matemático se muestra en el capítulo 6; los resultados de las simulaciones realizadas se muestran en el capítulo 7; finalmente, se presentan las conclusiones.

# 1. IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS

Las imágenes digitales conocidas, generalmente son captadas por cámaras que proveen tres bandas de color (rojo, verde y azul), intentando imitar el proceso de visión del sistema humano. Estas imágenes proveen información acerca de la escena captada, pero en aplicaciones reales donde las imágenes son de gran importancia, la información que proporcionan es limitada. Sin embargo, existen imágenes espectrales [1], que poseen más información debido a que su cantidad de bandas es mayor, permitiendo encontrar datos referentes a las diferentes longitudes de onda del espectro electromagnético; estas imágenes se pueden extender más allá del espectro visible.

Comúnmente en los estudios que involucran imágenes se busca medir y analizar propiedades de la luz como la intensidad, coherencia y longitud de onda, donde cada una de ellas proporciona información diferente de la escena, las cuales puede aplicarse a diferentes estudios. Para estudios más profundos, se puede agregar la polarimetría, una propiedad de la luz que utiliza el grado y estado de polarización. Las firmas de polarización se utilizan para inferir características superficiales de un objeto bajo iluminación incoherente <sup>(\*)</sup> [6], mostrando características propias de la superficie de los objetos como la rugosidad y forma.

Las imágenes espectro-polarizadas reúnen características de imágenes espectrales y polarizadas, es decir, se estudian más propiedades de la luz y por ende se obtiene más información de la escena estudiada. La parte espectral de las imágenes proveen información espectral de los materiales que conforman los objetos de la escena y la parte polarizada contiene información sobre las características de la superficies de los objetos en la escena.

El estado de polarización de la luz reflejada depende fuertemente de la granularidad o características de la superficie reflectante; pues las leyes de reflexión de la luz afirman que cuando la luz natural incide en una superficie, puede ser polarizada dependiendo del ángulo de incidencia. Las superficies ásperas tienden a reflejar la luz de una manera difusa <sup>(\*\*)</sup>, reflejando los rayos luminosos con ángulos dispersos, dejando el campo óptico no polarizado. La reflexión de las superficies lisas, que es típica de los objetos artificiales, tiende a estar dominada por la reflexión especular <sup>(\*\*\*)</sup> que puede resultar en una polarización parcial o total, según el ángulo de incidencia en el campo óptico. [7]

---

<sup>(\*)</sup>Luz incoherente, luz que no ha sido manipulada; presenta ondas emitidas con diferentes orientaciones y diferentes longitudes.

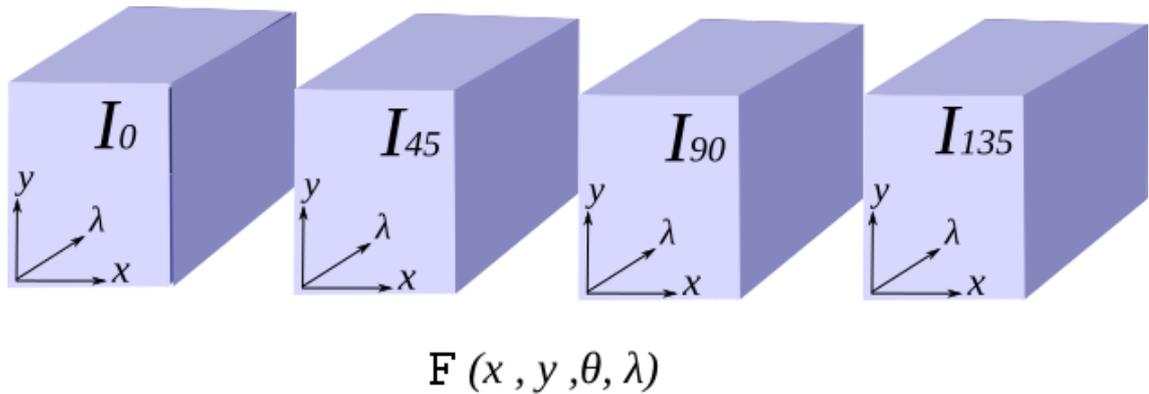
<sup>(\*\*)</sup> La reflexión difusa ocurre cuando los rayos que caen en una superficie rugosa, reflejan los rayos luminosos con ángulos dispersos. Este fenómeno ocurre porque las macro o micro rugosidades desvían la luz en distintos ángulos.

<sup>(\*\*\*)</sup>La reflexión especular se produce cuando los rayos luminosos inciden sobre una superficie reflectora muy plana, de modo que el ángulo incidente es igual al ángulo reflejado sin cambiar el medio en donde se propaga.

## 1.1. REPRESENTACIÓN DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.

Una imagen espectro-polarizada  $F$  se puede ver como un arreglo de cuatro dimensiones (4-D) ver figura 1.1, donde  $F = [F_0^T, F_1^T, F_2^T, F_3^T]^T$ ,  $F \in \mathbb{R}^{M \times N \times L \times \theta}$ , donde  $M$  y  $N$  representan la información espacial,  $L$  la espectral y  $\theta$  los 4 distintos ángulos de polarización (0, 45, 90, 135) [5].

**Figura 1.1:** Representación 4-D de una imagen espectro-polarizada



Como se muestra en la figura 1.1, una imagen espectro-polarizada puede modelarse como 4 imágenes espectrales donde en cada una de ellas se mantiene la estructura espacial de la escena.

Matemáticamente, la polarización es representada con los parámetros de Stokes, estos son cuatro vectores que describen la polarización parcial o total de la luz basada en medidas de intensidad.

El vector de Stokes,  $S$ , se define en términos de intensidad óptica de la siguiente manera:  $S_0$  es la intensidad total,  $S_1$  es la diferencia entre la intensidad transmitida por un polarizador lineal orientado paralelamente al eje  $x$  ( $0^\circ$ ), y una orientada paralelamente al eje  $y$ ,  $S_2$  es la diferencia entre la intensidad transmitida por un polarizador lineal orientado a  $45^\circ$  al eje  $x$  y una orientada a  $135^\circ$ , y  $S_3$  es la diferencia entre la intensidad transmitida por un polarizador circular derecho y un polarizador circular izquierdo [6]. En la gran mayoría de las aplicaciones, el componente  $S_3$  es despreciable; por esta razón es típico trabajar con sólo los tres primeros componentes del vector de Stokes. Los primeros tres vectores de Stokes tienen una relación lineal con las medidas de los detectores tradicionales, estos están dados por

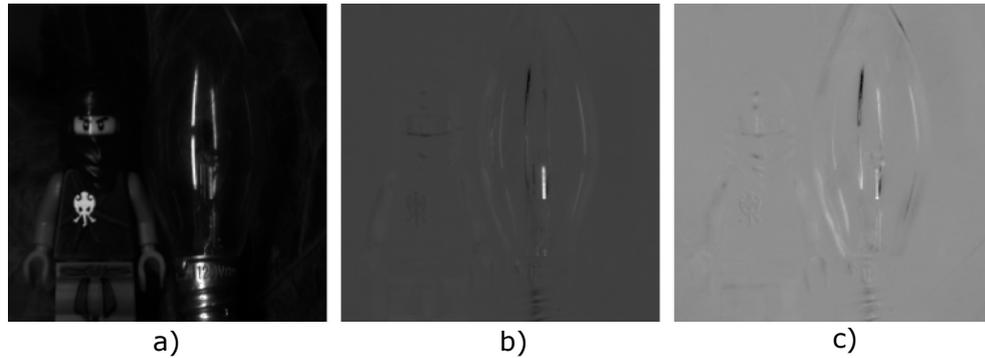
$$S_0 = I_0 + I_{90} = I_{45} + I_{135} \quad (1.1)$$

$$S_1 = I_0 - I_{90} \quad (1.2)$$

$$S_2 = I_{45} - I_{135} \quad (1.3)$$

Donde  $I_\theta$  es la intensidad de polarización en el ángulo  $\theta$ ,  $S_0$  es el total de radiación de un haz,  $S_1$  y  $S_2$  son la diferencia de radiación del haz polarizado linealmente, estos parámetros se aprecian visualmente en la figura 1.2.

**Figura 1.2:** Representación visual de los parámetros de Stokes en una imagen blanco y negro, a) representa el parámetro  $S_0$ , b) el parámetro  $S_1$  y c) el parámetro  $S_2$



El ángulo de polarización ( $AoP$ ) especifica la orientación de la oscilación del haz, que en términos de los parámetros de Stokes pueden ser representado como

$$AoP = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{S_2}{S_1} \right) \quad (1.4)$$

Como podemos ver en [6] el ángulo es calculado con los niveles de intensidad de los parámetros  $S_1$  y  $S_2$ .

## 1.2. APLICACIONES

En los últimos años, las imágenes espectro-polarizadas se han convertido en una herramienta útil que ha permitido el avance tecnológico en diferentes áreas de aplicación. Algunas aplicaciones se han desarrollado en clasificación de objetos, clasificación según condiciones climáticas y diagnóstico médico.

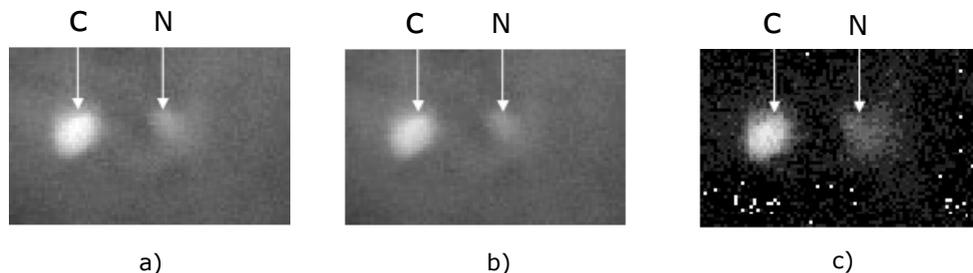
Las imágenes espectro-polarizadas pueden usarse en diferentes áreas obteniendo resultados que pueden cambiar paradigmas, su estudio aún no es muy común, pero se espera que su utilización aumente y surjan grandes aplicaciones.

**1.2.1 Detección de tejido cancerígeno** Uno de los avances más importantes, basado en ese tipo de imágenes es un estudio experimental realizado en Los Ángeles, Estados Unidos [4] donde usan imágenes espectro-polarizadas en espectroscopia del infrarrojo cercano (NIR por su sigla en inglés) usando *Cypate-Bombesin Peptide Analogue Conjugate (Cybesin)* como marcador óptico de contraste para diferenciar los tejidos humanos cancerosos y normales de

la próstata.

Basicamente, el experimento se realizó tomando dos muestras de tejido de próstata, normal y canceroso, respectivamente, cada uno se remojan en el compuesto Cybesin y posteriormente se lava con fosfato de sodio para eliminar el compuesto no absorbido. Después se exponen a la luz de una fuente de luz blanca para iluminar la muestra con una potencia media. Se deseaba demostrar si el Cybesin tiene una propiedad de preservación de la polarización para esto se estudiaron las imágenes de emisión de Cybesin grabadas en diferentes configuraciones de polarización. Como resultado obtienen que la imagen de Cybesin teñido de cáncer de próstata y los tejidos normales está formado por fotones emitidos por Cybesin que han sufrido dispersión. Dado que la mayoría de los fotones emitidos por el agente de contraste se someten a dispersión múltiple, sólo un pequeño porcentaje de los fotones conservan su información de polarización, mientras se propagan en el tejido, las intensidades de los dos componentes de imagen 1.3 tienen una pequeña diferencia en a) y b) y cuando se restan los dos componentes de la imagen, se obtiene un resultado visiblemente notorio c), donde muestra la diferencia de los tejidos.

**Figura 1.3:** Polarización de los tejidos, donde C presenta el tejido prostático cancerígeno y N el tejido prostático normal. a) Dirección de polarización paralela. b) Dirección de polarización perpendicular. c) Diferencia entre las imágenes de polarización obtenidas a) y b).

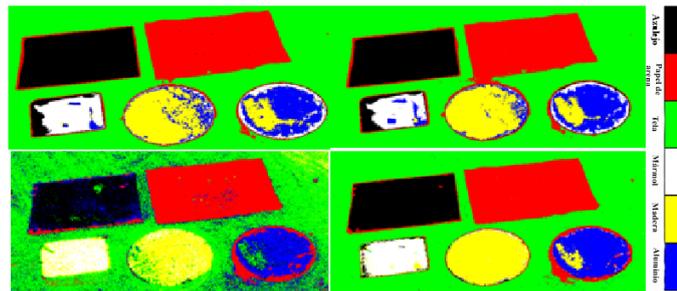


**1.2.2 Clasificación de tarjetas bajo condiciones climáticas** En la universidad Northwestern Polytechnical de China se realizó un estudio para la clasificación de tarjetas de diferentes componentes bajo dos condiciones climáticas, soleado y nublado. En el estudio se usó información espectral y de polarización tomada de imágenes adquiridas por un espectro-polarímetro. La escena se toma al aire libre para iluminarla directamente por el sol, dependiendo la condición climática [3].

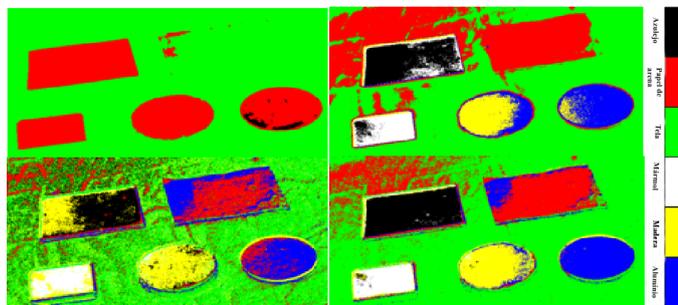
Se propuso un algoritmo que uniera características como la reflectancia espectral y el estado de polarización de las imágenes, para crear una máquina de soporte vectorial que hiciera la clasificación de las tarjetas bajo diferentes condiciones climáticas. Sus resultados se comparan con clasificadores que sólo usan una característica en la detección. La escena utilizada, tenía como fondo tela de

color negro y sobre ella tarjetas de diferentes materiales como azulejo, papel de arena, mármol y madera. Esta escena se expuso a los dos clima evaluados, soleado y nublado. Obteniendo los resultados de las figuras 1.4 y 1.5; en ellas se pueden ver los resultados de cada clasificador con el que se comparó, número digital (DN), reflectancia espectral ( $R(\lambda)$ ), estado de polarización ( $DoP(\lambda)$ ) y el algoritmo propuesto que une las características espectrales y polarizadas. Como conclusión se puede observar que su algoritmo mejora la clasificación en condiciones soleadas y es más notorio en clima nublado.

**Figura 1.4:** Resultados del experimento bajo clima soleado.  $DN(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$ ,  $DoP(\lambda)$  y algoritmo propuesto. (De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo)



**Figura 1.5:** Resultados del experimento bajo clima nublado.  $DN(\lambda)$ ,  $R(\lambda)$ ,  $DoP(\lambda)$  y algoritmo propuesto. (De izquierda a derecha y de arriba hacia abajo)



**1.2.3 Detección de objetos** Los sistemas de detección de objetos han tenido auge en los últimos tiempos, debido a las aplicaciones que pueden tener. Se han hecho grandes avances en ello, usando máquinas de soporte vectorial para clasificar e identificar objetos, características espectrales o de polarización. Sin embargo, aún resultan en la detección. Por esto, se realizó un estudio en donde se utilizan características espectrales y de polarización para detectar objetos, pues se ha visto que tiene mejores resultados debido a la mayor información que se maneja.

Se propuso un esquema de detección de objetos en tres partes basados en la fusión de imágenes espectro-polarizadas para utilizar conjuntamente espacial, espectral y polarizado. En la primera parte, se propone un esquema de proyección espectro-polarizada para dividir el conjunto de datos espectro-polarizados

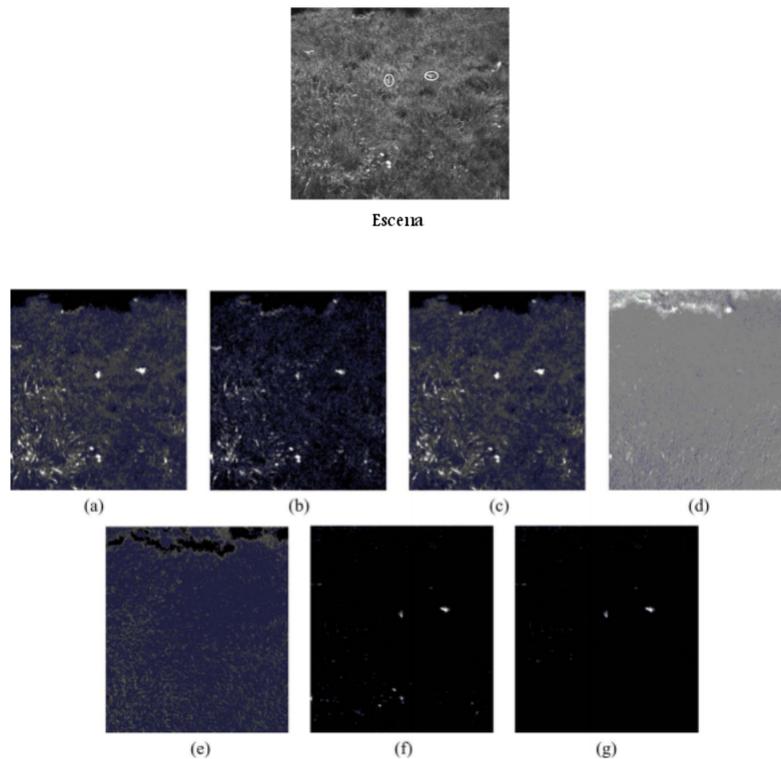
---

en dos subconjuntos, un conjunto de datos de espectro-polarizados y un conjunto de cubos de datos polarizados. En la segunda parte, se utiliza el método de extracción de la característica del espectro polarizado para tratar el conjunto de datos y se propone el método de fusión de información polarizada adaptativa para extraer la característica del cubo de datos. En la tercera parte, las características extraídas de imágenes espectro-polarizadas se combinan para utilizar conjuntamente la información espacial, espectral y polarizada; y así obtener un mejor rendimiento de detección [8].

El experimento se realizó con un espectropolarímetro que genera los datos y la adquisición y procesamiento se realizaron con un software desarrollado por los autores del estudio. La escena es un césped con dos pequeños objetos en él, con diferentes ubicaciones como se muestra en la imagen de la escena.

Los resultados obtenidos se pueden observar en la figura 1.6, donde se puede ver fácilmente los pequeños objetos que estaban localizados en la escena.

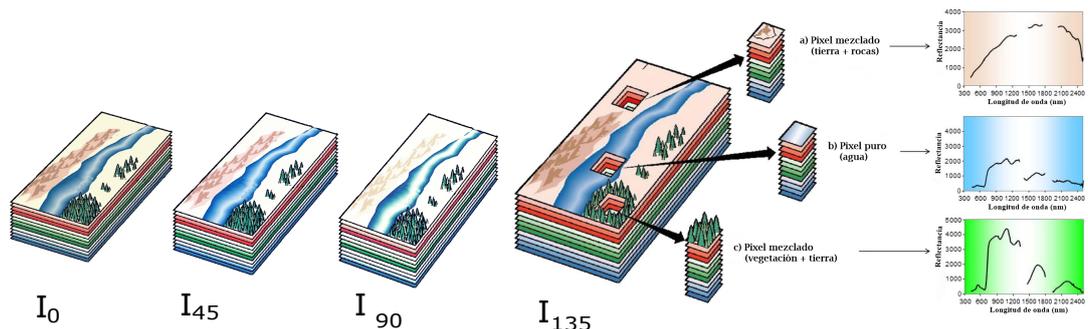
**Figura 1.6:** Resultados obtenidos. (a)-(e) Parámetros de Stokes ( $S_0$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ), estado de polarización y orientación, respectivamente. (f) Detección usando el cubo de datos polarizado y datos polarizados adaptativos.(g) Algoritmo propuesto



## 2. MEZCLAS LINEALES DE BAJO RANGO EN IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.

Una forma de aprovechar las características naturales de las imágenes espectro-polarizadas es expresarlas como una mezcla lineal de firmas espectrales puras (*endmember*), donde cada una de ellas es modelada como combinación lineal de coeficientes correlacionados espacialmente. Una firma espectral pura es la representación espectral de un compuesto químico el cual no contiene impurezas o mezclas de otros materiales. En la figura 2.1 se puede observar dicho proceso de mezclado para cada pixel, en algunos existen más de un material como se puede ver en a) donde se encuentran rocas y tierra; en c) que está compuesto de vegetación y tierra, haciendo que su firma espectral dependa de las abundancias de estos compuestos. Caso contrario, el pixel b) contiene sólo agua, en el cual está presente únicamente un material, provocando que la firma espectral en ese pixel corresponde al elemento puro.

**Figura 2.1:** Ejemplo de la mezcla de pixeles en un respectivo ángulo de polarización



Por esto, la tarea principal es poder estimar las medidas espectrales de cada pixel mezclado como una combinación de ponderaciones de fracciones o abundancias de firmas puras, que indican la proporción de cada firma presente en el pixel. Este proceso es conocido como desmezclado (*unmixing*)[9].

En el desmezclado, la identificación de las firmas puras es difícil tanto en la imagen original como poder estimarlas directamente en el dominio comprimido, por eso, muchos estudios suponen conocer dichas firmas para así poder hacer el trabajo de estimar las abundancias [10] [11], este trabajo posee diferentes desafíos, uno de ellos es la resolución espacial del sensor, debido a que diferentes mezclas suceden a diferentes escalas, también que las firmas puras no siempre están completamente presentes en el pixel mezclado, debido al ruido presente en los sistemas de adquisición como también el ruido que genera los elementos impuros en la escena.

---

## 2.1. MODELO MATEMÁTICO DE MEZCLAS LINEALES.

Sea  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{\theta MN \times L}$  una imagen espectro-polarizada ordenada de tal manera que, hay  $\theta MN$  vectores (las filas de  $\mathbf{F}$ ), cada uno de dimensiones  $L$  (las columnas de  $\mathbf{F}$ ) los cuales representan la información espectral de cada pixel polarizado en la escena. De acuerdo con el modelo matemático de mezclas lineales (MML), cada vector puede ser representado como una combinación lineal de pequeños números de firmas puras (*endmembers*) [9]. La forma matricial esta dada como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{(\theta MN)}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{(1,1)} & \cdots & a_{(1,N_e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(\theta MN,1)} & \cdots & a_{(\theta MN,N_e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{(1)}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{(N_e)}^T \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{E}, \quad \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{E} \geq 0$$

donde  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{N_e \times L}$  representan las firmas puras o diccionario de dimensiones  $N_e$ , y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\theta MN \times N_e}$  son las abundancias o matriz de coeficientes. Debido a las propiedades de las imágenes, tanto las abundancias como las firmas puras deben cumplir con la condición no-negativa (ANC por su sigla en inglés).

## 2.2. MÉTODOS DE ADQUISICIÓN TRADICIONALES

Como se puede ver, hay muchos beneficios si se obtiene información espacial, espectral y de polarización de una escena, pero captar y procesar estas imágenes es un gran reto, debido a su alta dimensionalidad. Tradicionalmente la imágenes espectrales y de polarización son adquiridas escaneando la escena en cada dimensión [12], cambiando filtros de color [13] y rotando los polarizadores [14]. Pero el largo tiempo de adquisición en el modelo de cambios incrementa el ruido y limita el rendimiento en escenas dinámicas, también su alto costo computacional para almacenar y procesar las imágenes son un problema constante. Una forma de mitigar este problema es comprimir las imágenes descartando gran parte de la información obtenida. Por esto, investigaciones sobre muestreo compresivo (CS de su sigla en inglés) han tenido acogida ya que permite muestrear y comprimir las imágenes de manera simultánea utilizando menos muestras y por consiguiente incrementa significativamente la velocidad de detección y la capacidad de almacenar y procesar. Estas imágenes son reconstruidas usando menos muestras que el teorema de Nyquist [15].

### **3. MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.**

El muestreo compresivo (CS por su sigla en inglés) es una técnica de muestrear y comprimir señales simultáneamente. El modelo tradicional planteado por el teorema de Shannon-Nyquist que dice: la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presente en la señal (la llamada tasa de Nyquist), es remplazado por un modelo disperso, el cual, asume que una señal puede ser reconstruida con una cantidad menor de mediciones lineales, lo que implica una reducción significativa de la tasa de muestreo.

CS es posible gracias a dos propiedades fundamentales: escasas e incoherencia, donde la escasas pertenece a la señal y la incoherencia a la modalidad en la cual se capta la señal [16].

La escasas se puede observar en las señales que tienen la mayor parte de su energía concentrada en un porcentaje reducido de sus componentes. En las imágenes espectro-polarizadas la escasas existe debido a que las escenas naturales muestran correlación entre píxeles adyacentes, a través de bandas espectrales y ángulos de polarización [17]. Sin embargo, se debe buscar la forma de representar eficientemente dicha imagen usando unos pequeños números de proyecciones lineales no adaptativas presentes en el dominio de alguna transformada, usualmente se utilizan bases ortonormales como Fourier, Coseno o Wavelet, entre otras [18].

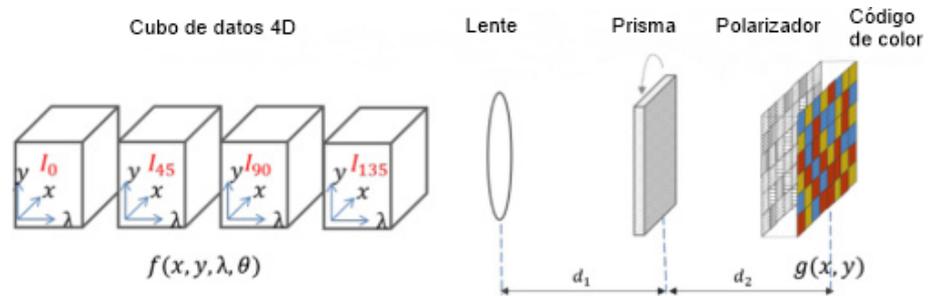
Por otro lado, la coherencia se refiere a la estructura de las formas de onda de muestreo utilizadas en CS la cual debe tener una representación densa con respecto a la base ortonormal de la imagen de interés.

CS ha diseñado protocolos de detección capaces de captar el contenido esencial de una señal escasa con pocos números de mediciones comprimidas. La modalidad de detección correlaciona la señal entrante con un pequeño número de formas de ondas fijas que satisfacen el principio de incoherencia, permitiendo reconstruir con alta precisión las medidas comprimidas, utilizando optimización numérica.

#### **3.1. IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS COMPRIMIDAS POR UN POLARIZADOR PIXELADO Y UN DETECTOR DE COLOR MODELADO.**

Una adecuación a la arquitectura Imágenes espectrales basado en apertura codificada de única captura (CASSI por su sigla en inglés) fue propuesta para adquirir información espacial, espectral y de polarización sobre una escena en medidas comprimidas [5]. La arquitectura consiste en un prisma rotatorio, un polarizador pixelado y un detector de color como se muestra en la figura 3.1.

**Figura 3.1:** Sistema de adquisición de imágenes espectro polarizadas basado en CASSI



La escena es primero dispersada a lo largo de sus componentes de longitud de onda por el prisma, después la escena dispersada es codificada por el polarizador, luego por los patrones de color y finalmente integrada en un detector. El arreglo alineado de micropolarizadores tiene una codificación fija igual que el detector de color, los cuales tienen mayor tamaño que el prisma, permitiendo así que al rotar el prisma se logren múltiples adquisiciones que se codifican en diferentes zonas del micropolarizador y el detector de color.

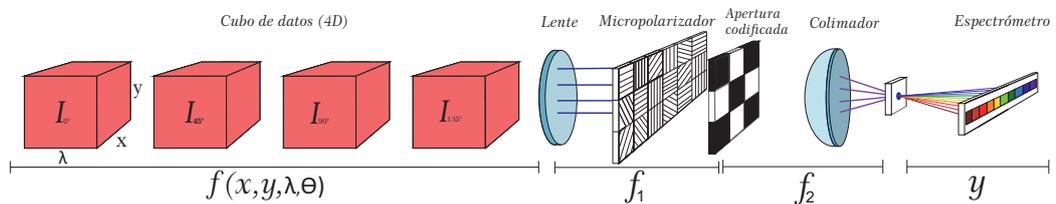
## 4. ARQUITECTURA ÓPTICA DE ÚNICO PIXEL PARA EL MUESTREO COMPRESIVO DE IMÁGENES ESPECTRO-POLARIZADAS.

### 4.1. ARQUITECTURA PROPUESTA

En este trabajo se propone una arquitectura de único pixel para el muestreo compresivo de imágenes espectro-polarizadas. La arquitectura tiene como componentes una apertura codificada, micropolarizadores móviles, un lente condensador y un espectrómetro, permitiendo obtener información espacial, espectral y polarizada partiendo de medidas comprimidas.

En la arquitectura de la figura 4.1, la escena es codificada por polarización y por espectro; la escena codificada pasa a través del lente condensador, donde se modula la luz a un punto creando un pixel mezclado, que contiene toda la información codificada. En este punto se encuentra el espectrómetro que divide la información en rangos espectrales.

**Figura 4.1:** Arquitectura de único pixel para el muestreo compresivo de imágenes espectro-polarizadas



**4.1.1 Componentes de la arquitectura** La figura 4.1 muestra la arquitectura propuesta, en ella se pueden ver los componentes necesarios para la adquisición de imágenes espectro-polarizadas. La escena es representada por cuatro cubos como se explicó en la sección 1, cada uno simboliza la intensidad de polarización para cuatro ángulos.

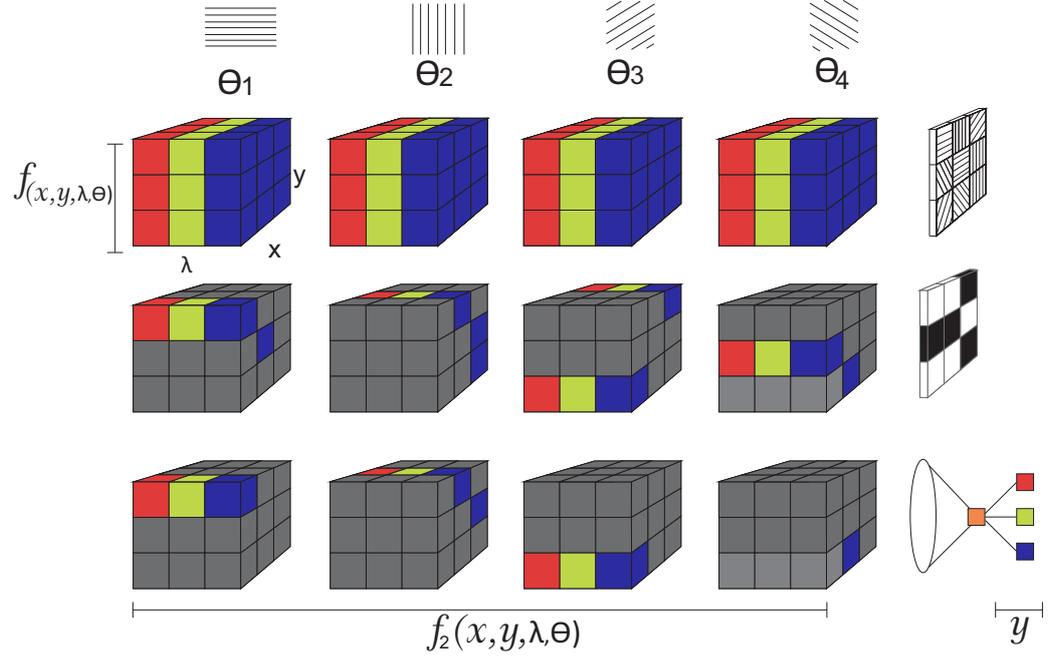
- **Lente:** Se usa para focalizar la luz y que module el proceso de adquisición.
- **Micropolarizador:** Es una matriz de filtros compuesta de polarizadores que permiten codificar la escena en polarización. Cada uno consiste en estructuras de rejilla de alambre en una de las cuatro orientaciones angulares que utilizan los vectores de Stoke, permitiendo o no el paso de la polarización en un ángulo específico. En la arquitectura propuesta, el micropolarizador se mueve constantemente en sentido horizontal, de esta forma en cada adquisición que se realice, la escena se codifica diferente.

- 
- **Aperturas codificadas:** Es un filtro que permite o deniega el paso de píxeles en la escena. En la arquitectura propuesta, las aperturas codificadas cambian con cada captura, con el fin de adquirir en cada toma diferentes valores de la imagen.
  - **Lente condensador:** Es un sistema óptico que permite homogeneizar las trayectorias del haz de luz y dirigir las a un punto deseado, en la arquitectura propuesta se encarga de converger los datos codificados y crear un pixel con toda la información espectral y de polarización de la escena, creando un pixel mezclado.
  - **Espectrómetro:** Es un instrumento óptico usado para medir las propiedades de la luz sobre una porción específica del espectro electromagnético. En la arquitectura propuesta es usado para medir las longitudes de onda e intensidades que están en el pixel mezclado resultante del lente condensador, y obtener información de cada banda espectral por separado.

## 4.2. CODIFICACIÓN DE LA ESCENA

El esquema del muestreo compresivo se puede apreciar en la figura 4.2. La escena  $f(x, y, \lambda, \theta)$  es representada por cuatro cubos, cada uno expresa las intensidades de los cuatro ángulos de polarización. En el proceso, primero pasa a través de un arreglo de filtro de polarización  $U(x, y, \theta)$ , donde permite o no el paso de cierto ángulo, obteniendo una escena codificada en polarización. Después, se encuentra con una apertura codificada  $T(x, y)$ , que aplica modulaciones espacial y espectral de la escena. En este caso,  $T$  es una apertura la cual permite bloquear o no la energía a lo largo de la coordenada espectral del cubo de datos.

**Figura 4.2:** Codificación espectral y de polarización



De esta forma, se obtiene la escena modulada espacial, espectral y de polarización como

$$f_2(x, y, \lambda, \theta) = U(x, y, \theta)T(x, y)f(x, y, \lambda, \theta), \quad (4.1)$$

Si el arreglo de micro-polarizadores y la apertura codificada tienen el mismo tamaño de pixel  $\Delta$ , el micro-polarizador es discretizado como

$$U(x, y, \theta) = \sum_{m,n,c} u_{mnc} \text{rect} \left( \frac{x}{\Delta} - m - \frac{1}{2}, \frac{y}{\Delta} - n - \frac{1}{2}, \frac{\theta}{\Delta} - c - \frac{1}{2} \right) \quad (4.2)$$

donde  $\text{rect}(\cdot)$  es la función de muestreo. De manera similar ocurre con la discretización de las aperturas codificadas

$$T(x, y) = \sum_{m,n} t_{mn} \text{rect} \left( \frac{x}{\Delta} - i - \frac{1}{2}, \frac{y}{\Delta} - n - \frac{1}{2} \right) \quad (4.3)$$

donde la forma discreta que describe la modulación de la escena queda expresado como:

$$\begin{aligned} f_2(x, y, \lambda, \theta) &= f(x, y, \lambda, \theta) \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} \text{rect} \left( \frac{x}{\Delta} - m - \frac{1}{2}, \frac{y}{\Delta} - n - \frac{1}{2}, \frac{\theta}{\Delta} - c - \frac{1}{2} \right) \\ &= \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} f_{mnc}(\lambda) \text{rect} \left( \frac{x}{\Delta} - m - \frac{1}{2}, \frac{y}{\Delta} - n - \frac{1}{2}, \frac{\theta}{\Delta} - c - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

continuando con la adquisición, los datos codificados pasan por el lente condensador, obteniendo un pixel mezclado, es decir, con información espacial y de polarización dado por

$$\begin{aligned}
f_3(\lambda) &= \int \left( \int \int \int U(x, y, \theta) T(x, y) f(x, y, \lambda', \theta) dx dy d\theta \right) \delta(\lambda' - S(\lambda)) d\lambda' \\
&= \int \left( \int \int \int f_2(x, y, \lambda', \theta) dx dy d\theta \right) \delta(\lambda' - S(\lambda)) d\lambda' \\
&= \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} \int f_{mnc}(\lambda') \delta(\lambda' - S(\lambda)) d\lambda' \\
&= \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} f_{mnc}(\lambda)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde  $\delta$  es la función delta Dirac,  $S(\lambda)d\lambda'$  es definido como la respuesta del impulso óptico para el dominio espectral y  $S(\lambda)$  es la dispersión que ocurre dentro del espectrómetro. Para poder discretizar el dominio espectral, el rango espectral del espectrómetro es dividido en finitos números de subintervalos o canales. La discretización del eje espectral esta dada como  $\lambda_{(l)}$  para  $l = 1, \dots, L$  el rango de el canal  $l$  es  $[\lambda_{(l)}, \lambda_{(l+1)}]$  donde  $\lambda_{(l)}$  es la solución de la ecuación

$$S(\lambda_{(l+1)}) - S(\lambda_{(l)}) = \Delta, \quad l = 1, \dots, L \tag{4.6}$$

Este pixel es tomado por el espectrómetro para obtener las medidas por bandas espectrales como

$$y(l) = \int f_3(\lambda) \text{rect} \left( \frac{\lambda}{\Delta_{\lambda(l)}} - l - \frac{1}{2} \right) d\lambda \tag{4.7}$$

donde  $\Delta_{\lambda(l)} = \lambda_{l+1} - \lambda_l, l = 1, \dots, L$  es el rango de la banda espectral  $l$ , finalmente el modelo discreto para obtener las medidas está dado como la representación discreta del modelo mencionado

$$\begin{aligned}
y(l) &= \int \left( \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} f_{mnc}(\lambda) \right) \text{rect} \left( \frac{\lambda}{\Delta_{\lambda(l)}} - l \right) d(\lambda) \\
&= \sum_{m,n,c} u_{mnc} t_{mn} \left( \int f_{mnc}(\lambda) \text{rect} \left( \frac{\lambda}{\Delta_{\lambda(l)}} - l \right) d(\lambda) \right) \\
&= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{c=0}^3 u_{mnc} t_{mn} f_{mnlc}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $M, N$  es la resolución espacial y  $L$  es la cantidad de bandas espectrales de la escena adquirida. Viendo que en la ecuación 4.8 las medidas pueden ser

vectorizadas en  $\mathbf{Y}$ , y ordenando la escena en forma matricial tenemos que  $f_c$  y el problema puede ser descrito como

$$\bar{\mathbf{y}} = [\hat{\mathbf{H}}_0, \hat{\mathbf{H}}_1, \hat{\mathbf{H}}_2, \hat{\mathbf{H}}_3][\mathbf{F}_0^T, \mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T, \mathbf{F}_3^T]^T = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{F}, \quad (4.9)$$

donde  $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^L$  son las medidas comprimidas obtenidas por el espectrómetro,  $\mathbf{F}_c \in \mathbb{R}^{MN \times L}$  es la imagen en el ángulo  $c$  y  $\hat{\mathbf{H}}_c \in \mathbb{R}^{1 \times MN}$  es la matriz de muestreo en el ángulo de polarización  $c$ , para  $c = 0, \dots, 3$ .

Contemplando la posibilidad de aplicar múltiples capturas, el ruido presente en el sistema y conociendo el modelo matemático de mezclas lineales presente en el capítulo 2.1, el problema queda planteado como:

$$\bar{\mathbf{Y}} = [\bar{\mathbf{y}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{y}}_S^T]^T = \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{H}}_0^T, \bar{\mathbf{H}}_1^T, \dots, \bar{\mathbf{H}}_{S-1}^T]^T \mathbf{F} = \bar{\mathbf{H}}\mathbf{F} + \mathbf{R} \quad (4.10)$$

donde  $S$  es la cantidad de adquisiciones realizadas, la cual permite calcular el nivel de compresión,  $\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{S \times L}$  son las medidas compresas obtenidas por el espectrómetro en todas las capturas,  $\bar{\mathbf{H}}_i \in \mathbb{R}^{1 \times 4MN}$  es la matriz de muestreo para la captura  $i$  la cual esta compuesta por los cuatro ángulos de polarización como se vio en la ecuación 4.9 y  $\mathbf{R}$  es la representación del ruido en el sistema.

Debido a que diseñar un arreglo de polarizadores que cambie en cada adquisición es costoso, este trabajo propone diseñar uno con dimensiones más grandes  $M \times (N + S - 1)$  donde  $M$  y  $N$  son los tamaño vertical y horizontal del detector, respectivamente, y por cada captación el arreglo de polarizadores es movido horizontalmente en un pixel, matemáticamente, se puede ver  $\mathbf{U}$  como un arreglo 3D de elementos binarios, ver figura 4.3 en el que un ángulo  $c$  es representado como  $\tilde{\mathbf{u}}_c = [\tilde{u}_{c,0}, \tilde{u}_{c,1}, \dots, \tilde{u}_{c,K}]^T$  donde  $\mathbf{u}_c \in \{0, 1\}^K$  y  $K = M \times (N + S - 1)$  para  $c = 0, 1, 2, 3$ . Entonces para cada captación se tiene que

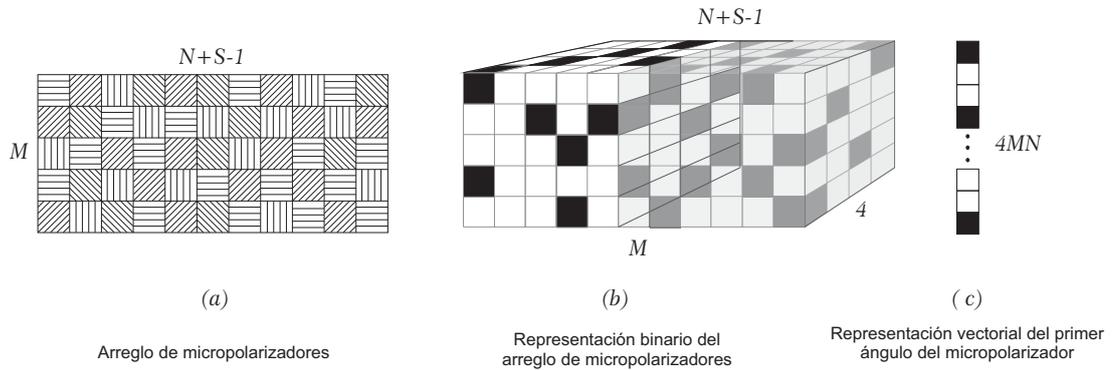
$$\tilde{\mathbf{U}}_{c,i} = [\tilde{u}_{Ni}, \tilde{u}_{i+1}, \dots, \tilde{u}_{MN-1+Ni}]^T \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, S - 1, \quad (4.11)$$

donde  $S$  es la cantidad de capturas realizadas, para mayor facilidad se expresa de manera matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_c = [\tilde{\mathbf{U}}_{c,0}, \tilde{\mathbf{U}}_{c,1}, \dots, \tilde{\mathbf{U}}_{c,s}]^T = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{c,0} & \cdots & \tilde{u}_{c,MN-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{u}_{c,NS-1} & \cdots & \tilde{u}_{c,MN+NS-2} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{U}_c \in \{0, 1\}^{S \times MN}$  para  $c = 0, \dots, 3$  que son los ángulos de polarización.

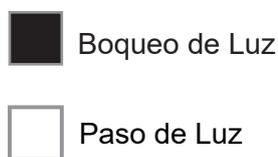
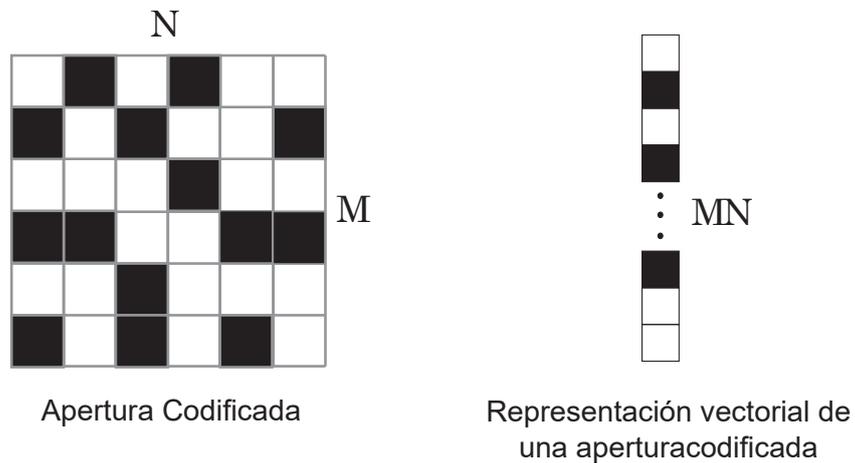
**Figura 4.3:** Representación del arreglo de micro-polarizadores



De manera similar ocurre con la apertura codificada, que modula espacial y espectralmente. La representación visual está en la figura 4.4 y matemáticamente expresada como  $\mathbf{t}_s = [t_0, t_1, \dots, t_{MN-1}]^T$  para  $s = 0, 1, \dots, S - 1$  donde  $S$  es el número de adquisiciones realizadas. Expresando el conjunto de aperturas codificadas y teniendo en cuenta el total de captaciones  $S$  se tiene que:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_{S-1}]^T \quad (4.13)$$

**Figura 4.4:** Representación de una apertura codificada, donde el pixel negro y blanco representa el bloqueo y paso de la luz, respectivamente



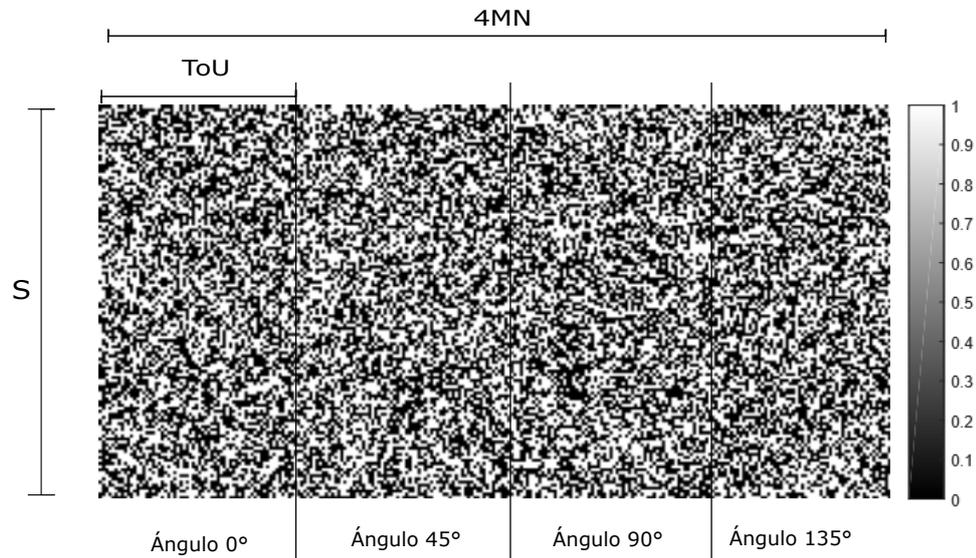
donde  $\mathbf{T} \in \{0,1\}^{S \times MN}$  representa el valor binario (paso o bloqueo). La matriz de muestreo  $\bar{\mathbf{H}}$  representa el muestreo, modulación y las diferentes capturas de las imágenes espectro-polarizadas. La información que posee esta matriz se muestra en un orden específico para el mejor manejo y entendimiento de los datos como :

$$\bar{\mathbf{H}} = [\mathbf{T} \circ \mathbf{U}_0, \mathbf{T} \circ \mathbf{U}_1, \mathbf{T} \circ \mathbf{U}_2, \mathbf{T} \circ \mathbf{U}_3] \quad (4.14)$$

donde  $\mathbf{T} \circ \mathbf{U}_c$  es el producto Hadamard entre las matrices  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{U}_c$  y la matriz de muestreo  $\bar{\mathbf{H}} \in \{0,1\}^{S \times 4MN}$ .

Una representación gráfica de la matriz de muestreo se muestra en la figura 4.5, para este ejemplo, se usa una imagen de  $8 \times 8$  de resolución espacial, 5 bandas espectrales, 4 ángulos de polarización y 50 % de compresión es decir 640 adquisiciones.

**Figura 4.5:** Matriz de muestreo



En esta representación se puede observar fácilmente cómo está distribuida la información. En los bloques horizontales se puede ver la información organizada por bandas en cada uno de los ángulos evaluados en el total de los shots  $S$ , Cada bloque de color amarillo que se observa en la figura 4.5 hace referencia al producto Hadamard entre  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{U}_c$  en cada banda y ángulo.

## 5. OPTIMIZACIÓN DE LAS APERTURAS CODIFICADAS USANDO MATRICES HADAMARD

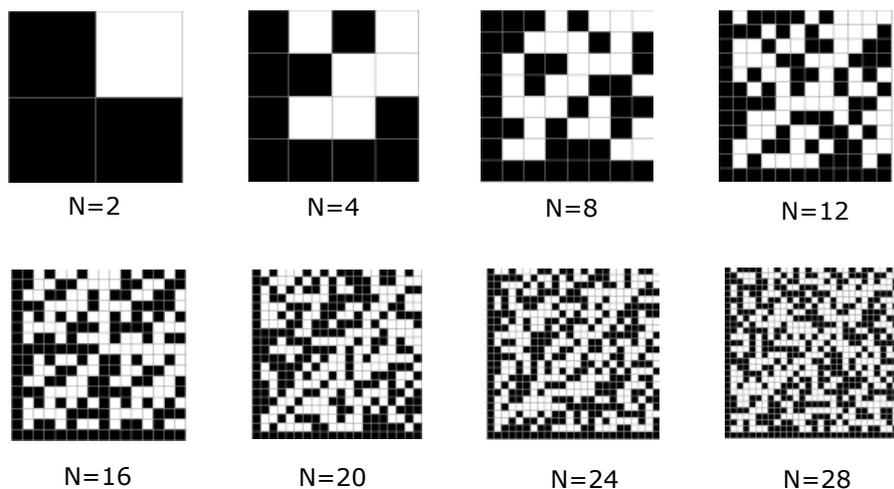
### 5.1. MATRIZ HADAMARD

Las matrices de Hadamard son estructuras cuadradas con entradas de +1 o -1, con orden necesariamente de 1, 2 o un múltiplo de 4 ver figura 5.1, y cuyas filas son mutuamente ortogonales. En términos geométricos, esto significa que cada par de filas de una matriz de Hadamard representa dos vectores perpendiculares, mientras que en términos de combinatorias, significa que cada par de filas de entradas coincidentes en exactamente la mitad de sus columnas y las entradas no coincidentes en las columnas restantes. Sin embargo, han sido estudiados activamente por más de 138 años pues, a pesar de su aparente simplicidad, presentan muchos problemas sin resolver [19]. Estas matrices se pueden construir mediante dos métodos, Sylvester, Walsh y la forma alternativa. Algunos ejemplos de esta matriz son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Figura 5.1:** Representación visual de matrices Hadamard con diferentes valores de  $n$ , el pixel negro y blanco representan el valor +1 y -1, respectivamente



---

**5.1.1 Propiedades** Las matrices Hadamard se han convertido en estructuras interesantes de estudiar, pues tienen propiedades particulares y de gran aplicabilidad práctica. Siendo  $M$  una matriz Hadamard de orden  $n$

- Cada fila, considerada como un vector de  $C_n$  tiene longitud de  $\sqrt{n}$ .
- El producto escalar de dos filas distintas cualesquiera es 0.
- La transpuesta de  $M$  está estrechamente relacionada con su inversa.  
 $MM^T = nI_n$ , siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ .
- Su determinante está dado por  $\det(M) = \pm n^{\frac{n}{2}}$

**5.1.2 Conjetura de Hadamard** La conjetura de Hadamard propone que una matriz de Hadamard de orden  $n = 4k$  existe para cada entero positivo  $k$ . Una generalización de la construcción de Sylvester demuestra que si  $M_m$  y  $M_n$  son dos matrices de Hadamard de orden  $m$  y  $n$ , respectivamente, se puede decir que  $M_m \otimes M_n$  es una matriz Hadamard de orden  $nm$ . Este resultado se utiliza para producir matrices de Hadamard de orden superior una vez que los valores más pequeños son conocidos, esto hace que la matriz Hadamard se pueda almacenar en dos matrices de menores dimensiones, lo cual facilita su utilización en diferentes aplicaciones[20].

**5.1.3 Aplicaciones** Las matrices de Hadamard tienen una variedad muy amplia de aplicaciones en comunicaciones y estadísticas modernas. Existe una estrecha relación entre las matrices de Hadamard construidas con la técnica de Sylvester y las funciones de Walsh que se usan con frecuencia en aplicaciones de ingeniería, incluyendo sistemas de comunicación y procesamiento de imágenes digitales [19]. Algunas aplicaciones específicas de matrices Hadamard:

- Modem FSK es un protocolo digital de aficionados por la radio, diseñado para trabajar en baja relación de señal a ruido más la propagación multitrajecto con condiciones en bandas de onda corta.
- Apertura codificada en espectrometría, es un instrumento para medir el espectro de la luz. El elemento de filtro utilizado en espectrómetros de apertura codificada es a menudo una variante de una matriz Hadamard.
- Muestreo compresivo para procesamiento de señales y sistemas lineales indeterminados en problemas inversos.

## 5.2. MATRIZ DE MUESTREO UTILIZANDO MATRICES HADAMARD

Como lo explicamos en el capítulo anterior la matriz Hadamard está compuesta por elementos  $\{-1, 1\}$ ; la matriz de muestreo es obtenida utilizando las propie-

dades de las matrices Hadamard, de la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}_1(\mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m)\mathbf{P}_2 \quad (5.1)$$

donde  $\mathbf{M}_m \in \{-1, 1\}^{2V_m \times M}$  es una matriz Hadamard con  $2V_m$  proyecciones que operan las columnas y  $\mathbf{M}_n \in \{-1, 1\}^{2V_n \times N}$  con  $2V_n$  proyecciones que opera las filas de cada banda espectral del cubo de datos  $\mathbf{F}$  expresado como una imagen 2-D. Las matrices  $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{V_n V_m \times V_n V_m}$  y  $\mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{MN \times MN}$  son matrices de permutación comúnmente usados como matrices de muestreo para mejor la reconstrucción. El número de captaciones a realizar está dado como  $S = 4V_m V_n$ .

Para implementar esta matriz, tenemos que  $(\mathbf{H}_i + \mathbf{I}/2) = \bar{\mathbf{H}}_i$  donde cada captación es expresada como matriz de muestreo  $\mathbf{H}_i$  para  $i = 0, 1, \dots, S-1$ , los valores que son  $-1$  ahora son representados como 0. Para realizar el proceso, debemos realizar una adquisición con  $\mathbf{T}_{i,j} = 1$  y  $\mathbf{U}_{c,i,j} = 1, \forall i,j,c$ , esto quiere decir que dejamos pasar toda la información de la escena en una adquisición, en la arquitectura propuesta, el costo no se ve afectado al realizar esta adquisición, debido a que hay múltiples captaciones en comparación con otras arquitecturas propuestas [3]. Tenemos  $\mathbf{D}$  una matriz de muestreo la cual deja pasar toda la información, esta es separada por el espectrómetro. La adquisición se puede expresar como  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{D}\mathbf{F}$  y las medidas codificadas obtenidas con  $\{-1, 1\}$  para cada captación son calculadas como

$$\mathbf{y} = 2\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0 = (2\bar{\mathbf{H}}_i - \mathbf{D})\mathbf{F} = \mathbf{H}_i\mathbf{F}, \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{H}_i$  es una fila de la matriz de muestreo expresada en la ecuación 5.1. El problema de obtener los datos de esta manera, es que el ruido aumenta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (2\bar{\mathbf{H}}_i + \boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{F} - (\mathbf{D}\mathbf{F} + \boldsymbol{\omega}_2) \\ &= (2\bar{\mathbf{H}}_i - \mathbf{D})\mathbf{F} + 2\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \\ &= \mathbf{H}_i\mathbf{F} + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde vemos que  $\mathbf{R} = 2\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$  Por consiguiente el ruido es mayor empleando esta forma, pero se obtienen los beneficios de medir con matrices Hadamard. Así, el problema con múltiples capturas queda expresado como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{F} + \mathbf{R} = \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E} + \mathbf{R} \quad (5.4)$$

donde  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{S \times L}$  son las medidas comprimidas obtenidas por el espectrómetro en todas las adquisiciones,  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{S \times 4MN}$  es la matriz de muestreo para la captación  $i$ ,  $S$  son las cantidad de adquisiciones realizadas, la cual me permite calcular el nivel de compresión,  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{N_e \times L}$  representan las firmas puras o diccionario de dimensiones  $N_e$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4MN \times N_e}$  son las abundancias o matriz de coeficientes y  $\mathbf{R}$  es la representación del ruido en el sistema.

## 6. PROBLEMA DE MINIMIZACIÓN Y ALGORITMOS DE RECONSTRUCCIÓN.

### 6.1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los métodos más utilizados para dar solución al problema inverso 5.4 es utilizar una estimación Bayesiana, la cual busca estimar los valores desconocidos  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$  basados en el Máximo Valor a Posteriori (MAP), que está estrechamente relacionado con la máxima verosimilitud (ML)<sup>(\*)</sup> de las medias obtenidas  $\mathbf{Y}$  en el proceso de muestreo compresivo. Sin embargo, dicha estimación emplea un objetivo de optimización que incorpora una distribución previa.

Utilizando las propiedades estadísticas de la matriz de ruido  $\mathbf{R}$ ,  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{A}, \mathbf{E}) = \mathcal{N}(\mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E}, \sigma^2\mathbf{I})$  se puede observar que tiene una distribución normal. El logaritmo negativo de la verosimilitud está dado como

$$-\log(p(\mathbf{Y}|\mathbf{A}, \mathbf{E})) = \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E}\|_F^2 + C \quad (6.1)$$

donde  $\|\cdot\|_F$  es la norma Frobenius y  $C$  es una constante. Tenemos ahora  $\mathbf{a}_{(n)} \in \mathbb{R}^{N_e \times 1}$  que representa la proporción de firmas puras en las  $n$  observaciones, estas proporciones deben satisfacer el (ANC) y tener una estructura escasa. Existen muchas formas estudiadas que estimulan la escasez existente y se ha demostrado tener resultados que produce soluciones escasas; en este trabajo es utilizada la norma  $l_1$ . Por otro lado, la probabilidad a priori de  $\mathbf{A}$  es

$$p(\mathbf{a}_{(n)}) = \begin{cases} \mathcal{E}(\lambda_a), & \mathbf{a}_{(n)} \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (6.2)$$

donde  $\mathbf{a}_{(n)}$  denota el  $n$ -ésima fila de  $\mathbf{A}$  y cada elemento  $(\mathbf{a}_{(n)})_{(n_e)}$  es una muestra independiente de la distribución exponencial  $\mathcal{E}(\lambda_a)$ . Adicionalmente, los valores de los coeficientes de la matriz  $\mathbf{E}$  también pueden asumirse que tienen una distribución aleatoria como

$$p(\mathbf{E}) = \begin{cases} \mathcal{N}(0, \sigma_e^2), & \mathbf{E} \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (6.3)$$

donde cada elemento de  $(\mathbf{E})_{(i,j)}$  es muestrado independientemente de la distribución Gaussiana  $\mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$ . Combinando la verosimilitud de las probabilidades a priori se obtiene la distribución de  $\mathbf{A}, \mathbf{E}$  como

$$p(\mathbf{A}, \mathbf{E}|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\mathbf{A}, \mathbf{E})p(\mathbf{A})p(\mathbf{E}) \quad (6.4)$$

<sup>(\*)</sup> La verosimilitud es una función de los parámetros utilizado en un modelo estadístico que permite realizar inferencias a partir de observaciones, esta es una versión inversa a la probabilidad condicional.

Tomando el logaritmo negativo de  $p(\mathbf{A}, \mathbf{E}|\mathbf{Y})$ , el MAP estimador de  $(\mathbf{A}, \mathbf{E})$  se puede obtener resolviendo un problema de optimización restringida. En este trabajo se utiliza la eliminación total del ruido de la variación (TV), aplicándolo a cada mapa de abundancia, respectivamente, para luego sumarlas. Esto se hace para remover el ruido presente en las abundancias. El problema es expresado como

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{E}} J(\mathbf{A}, \mathbf{E}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{E} \geq 0 \quad (6.5)$$

en el cual

$$J(\mathbf{A}, \mathbf{E}) = (1/2) \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E}\|_F^2 + \lambda_1 \|[\mathbf{L}_m; \mathbf{L}_n]\mathbf{A}\|_{1,1} + (\lambda_2/2) \|\mathbf{E}\|_F^2$$

donde  $\|\mathbf{A}\|_{1,1} = \sum_{n_e=1}^{N_e} \|\mathbf{a}_{(n_e)}\|_1$ , ( $\mathbf{a}_{(n_e)}$  expresa el  $n_e$ -ésima columna de  $\mathbf{A}$ ),  $\lambda_1 = \lambda_a \sigma^2$ ,  $\lambda_2 = \sigma^2 / \sigma_e^2$  son parámetros de regularización y  $[\mathbf{L}_m; \mathbf{L}_n]$  representa el operador lineal que calcula las diferencias horizontal y vertical entre los componentes de  $\mathbf{A}$  correspondientes al pixel vecino.

## 6.2. ALGORITMO PROPUESTO PARA LA RECONSTRUCCIÓN

La ecuación (6.5) es un problema no convexo respecto a las dos variables juntas  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$ , sin embargo, si se resuelven de manera separadas, dicho problema se vuelve convexo y por lo tanto converge a una solución. En este trabajo se propone resolver una matriz, mientras la otra es asumida como fija. Este procedimiento se puede observar en el algoritmo 1.

---

### Algoritmo 1 Reconstrucción de la imagen basado en desmezclado

---

**Entradas:** Medidas comprimidas  $\mathbf{Y}$  y matriz de muestreo  $\mathbf{H}$ .

- 1:  $\mathbf{E}^{(0)} = \text{inicialización}(\mathbf{Y})$
- 2: **para**  $t = 1$  hasta Máximo iteraciones **hacer**
- 3:      $\mathbf{A}^{(t)} = \min_{\mathbf{A}} J(\mathbf{A}, \mathbf{E}^{(t-1)}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{A} \geq 0$
- 4:      $\mathbf{E}^{(t)} = \min_{\mathbf{E}} J(\mathbf{A}^{(t)}, \mathbf{E}) \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{E} \geq 0$
- 5: **fin para**

**Salida:** Matriz de abundancias  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(t)}$  y Matriz de firmas puras  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(t)}$ .

---

Se puede notar que la complejidad computacional de estimar  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$  es menor comparada con estimar directamente  $\mathbf{F}$ , debido a las que las dimensiones de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{E}$  dependen del número de firmas puras presentes en la escena  $N_e$ ,  $\mathbf{F}$  del número de bandas y ángulos adquiridas  $\theta L$ .

Para notar la diferencia de dimensiones, las imágenes espectro-polarizadas pueden ser obtenidas con  $\theta = 4$  ángulos de polarización y cubriendo una región de longitud de onda entre 0.4 y 2.5  $\mu\text{m}$  usando más de  $L = 200$  canales espectrales [21]. Ahora una imagen presenta menos de  $N_e = 20$  firmas puras y lo más importante, usualmente en el orden de cuatro o cinco materiales en el pixel mezclado [22].

A continuación se muestra paso a paso cómo resolver el problema utilizando el método dirección alternante de multiplicadores (ADMM).

1) *Paso - A*: Teniendo fija la matriz  $\mathbf{E}$ , el problema de minimización (6.5) puede ser resuelto introduciendo una división de variable, el objetivo es para poder resolver el problema utilizando ADMM. El problema (6.5) con respecto a  $\mathbf{A}$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{A}, \mathbf{U}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - (\mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m) \mathbf{U}_1 \mathbf{E}\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{U}_2\|_{1,1} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{P}_2 \\ [\mathbf{L}_m; \mathbf{L}_n] \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$  es el lagrangiano aumentado asociado al problema de minimización de  $\mathbf{A}$  es escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{A}, \mathbf{U}, \mathbf{D}) = & 1/2 \|\mathbf{Y} - (\mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m) \mathbf{U}_1 \mathbf{E}\|_F^2 + \lambda_1 \|\mathbf{U}_1\|_{1,1} + \\ & \rho/2 (\|\mathbf{P}_2 \mathbf{A} - \mathbf{U}_1 + \mathbf{D}_1\|_F^2 + \|[ \mathbf{L}_m; \mathbf{L}_n ] \mathbf{A} - \mathbf{U}_2 + \mathbf{D}_2\|_F^2) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{D} = \{\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2\}$  es la Variable escalada dual utilizada para minimizar el error y  $\rho > 0$  es la ponderación del término lagrangiano aumentado [23]. La solución de  $\mathbf{A}$  es resumida en el Algoritmo 2 que consiste en minimizar  $\mathbf{A}, \mathbf{U}, \mathbf{D}$ , alternativamente (ver [23] para más detalles). Para calcular  $\mathbf{A}$  en el Algoritmo 2, el problema de minimización requiere resolver un problema cuadrático y puede ser resuelto eficientemente utilizando la diagonalización de la transformada de Fourier discreta. Para  $\mathbf{U}_1$  la optimización es mejorada resolviendo las siguientes ecuaciones

$$(\mathbf{M}_n^T \mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m) \mathbf{U}_1 (\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T) + \rho \mathbf{U}_1 = \mathbf{C}_3 \quad (6.7)$$

donde  $\mathbf{C}_3 = (\mathbf{M}_n^T \otimes \mathbf{M}_m^T) \mathbf{Y} \mathbf{E}^T + \rho (\mathbf{P}_2 \mathbf{A} + \mathbf{D}_1)$ . Esta es una ecuación de Sylvester clásica la cual puede ser resuelta usando descomposición espectral de matrices

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_n^T \mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_m) &= (\mathbf{Q}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{Q}_n^T \otimes \mathbf{Q}_m \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{Q}_m^T) \\ (\mathbf{E} \mathbf{E}^T) &= \mathbf{Q}_e \mathbf{\Lambda}_e \mathbf{Q}_e^T \end{aligned} \quad (6.8)$$

donde  $\mathbf{Q}_m, \mathbf{Q}_n, \mathbf{Q}_e$  son matrices ortogonales, y  $\mathbf{\Lambda}_m, \mathbf{\Lambda}_n, \mathbf{\Lambda}_e$  son matrices con unos en su diagonal. Expresando  $\bar{\mathbf{U}}_1 = (\mathbf{Q}_n^T \otimes \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{U}_1 \mathbf{Q}_e$  y  $\bar{\mathbf{C}}_3 = (\mathbf{Q}_n^T \otimes \mathbf{Q}_m^T) \mathbf{C}_3 \mathbf{Q}_e$  podemos resolver como

$$(\mathbf{\Lambda}_n \otimes \mathbf{\Lambda}_m) \bar{\mathbf{U}}_1 \mathbf{\Lambda}_e + \rho \bar{\mathbf{U}}_1 = \bar{\mathbf{C}}_3 \quad (6.9)$$

que se resuelve de manera fácil utilizando una base de entrada por entrada. La solución de  $\mathbf{U}_2$  es utilizada con un umbral suave [23].

2) *Paso - E*: La solución para  $\mathbf{E}$  está resumida en el algoritmo 3. Este busca minimizar (6.5) con respecto a  $\mathbf{E}$  fijando  $\mathbf{A}$  como constante. El siguiente problema

---

**Algoritmo 2** Iteraciones en ADMM para estimar  $\mathbf{A}$ .

---

**Entradas:** Medidas comprimidas  $\mathbf{Y}$ , matriz de muestreo  $\mathbf{H}$  y parámetros  $\lambda_1 > 0, \rho > 0$ .

- 1:  $\mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{D}^{(0)}$
- 2: **para**  $t = 1$  hasta Máximo iteraciones **hacer**
- 3:  $\mathbf{A}^{(t)} = \min_{\mathbf{A}} \mathcal{L}(\mathbf{A}, \mathbf{U}^{(t-1)}, \mathbf{D}^{(t-1)})$
- 4:  $\mathbf{U}^{(t)} = \min_{\mathbf{U}} \mathcal{L}(\mathbf{A}^{(t)}, \mathbf{U}, \mathbf{D}^{(t-1)})$
- 5:  $\mathbf{D}^{(t)} = \mathbf{D}^{(t-1)} + \mathbf{A}^{(t)} - \mathbf{U}^{(t)}$
- 6: **fin para**

**Salida:** Matriz de abundancias  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(t)}$ .

---

de minimización está planteado como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{E}, \mathbf{V}} \quad & \frac{1}{2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E}\|_F^2 + \frac{\lambda_2}{2} \|\mathbf{E}\|_F^2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{E} = \mathbf{V}, \quad \mathbf{V} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Para resolver el problema, se plantea el Lagrangiano aumentado asociado al problema (6.10) respecto a  $\mathbf{E}$  como

$$\mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{V}, \mathbf{G}) = 1/2 \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{E}\|_F^2 + i_+(\mathbf{V}) + (\rho/2) \|\mathbf{E} - \mathbf{V} + \mathbf{G}\|_F^2 \quad (6.11)$$

donde  $i_+(\cdot)$  es una función de indicador positiva. Calculando el  $\mathbf{E}$ -actualizado equivale a resolver un sistema lineal como

$$\mathbf{E} = ((\mathbf{H}\mathbf{A})^T \mathbf{H}\mathbf{A} + \rho \mathbf{I})^{-1} ((\mathbf{H}\mathbf{A})^T \mathbf{Y} + \rho(\mathbf{V} - \mathbf{G})) \quad (6.12)$$

Note que  $((\mathbf{H}\mathbf{A})^T \mathbf{H}\mathbf{A} + \rho \mathbf{I})^{-1}$  tiene dimensiones  $N_e \times N_e$  y puede ser fácilmente pre-calculada. La función del termino  $i_+(\mathbf{V})$  es proyectar la solución en un no-negativo ortonormal.

---

**Algoritmo 3** Iteraciones en ADMM para estimar  $\mathbf{E}$ .

---

**Entradas:** Medidas comprimidas  $\mathbf{Y}$ , matriz de muestreo  $\mathbf{H}$ , Matriz de abundancias  $\mathbf{A}$  y parámetros  $\lambda_2 > 0, \rho > 0$ .

- 1:  $\mathbf{V}^{(0)}, \mathbf{G}^{(0)}$
- 2: **para**  $t = 1$  hasta Máximo iteraciones **hacer**
- 3:  $\mathbf{E}^{(t)} = \min_{\mathbf{E}} \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{V}^{(t-1)}, \mathbf{G}^{(t-1)})$
- 4:  $\mathbf{V}^{(t)} = \min_{\mathbf{V}} \mathcal{L}(\mathbf{E}^{(t)}, \mathbf{V}, \mathbf{G}^{(t-1)})$
- 5:  $\mathbf{G}^{(t)} = \mathbf{G}^{(t-1)} + \mathbf{E}^{(t)} - \mathbf{V}^{(t)}$
- 6: **fin para**

**Salida:** Matriz de firmas representativas  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(t)}$ .

---

Se muestra que la inicialización  $\mathbf{E}^{(0)}$  es muy importante, debido a que la descomposición en abundancias y firmas representativas es un problema sobredeterminado, por lo que una inicialización errónea podría llevar a converger en un mínimo local y no a la solución real del problema.

---

Una forma rápida para estimar  $\mathbf{E}^{(0)}$  es aprovechar las propiedades de ortogonalidad de las matrices Hadamard para obtener una estimación de la imagen para luego calcular las firmas representativas utilizando el algoritmo análisis de componentes del vértice VCA (por su sigla en inglés) [24] para obtener la inicialización de las firmas. Dado que la matriz de muestreo tiene la forma dada en la ecuación 5.1 el algoritmo está dado en el algoritmo 4.

---

**Algoritmo 4** Inicialización de  $\mathbf{E}^{(0)}$ .

---

**Entradas:** Medidas compresas  $\mathbf{Y}$ , matriz de muestreo  $\mathbf{H} = \mathbf{P}_1(\mathbf{M}_n \otimes \mathbf{M}_m)\mathbf{P}_2$ .

1:  $\mathbf{T}_{em} = \mathbf{P}_2^T(\mathbf{M}_n^T \otimes \mathbf{M}_m^T)\mathbf{P}_1^T\mathbf{Y}$

2:  $\mathbf{E}^{(0)} = \text{VCA}(\mathbf{T}_{em})$

**Salida:** Primeras iteraciones de las firmas representativas  $\mathbf{E}^{(0)}$ .

---

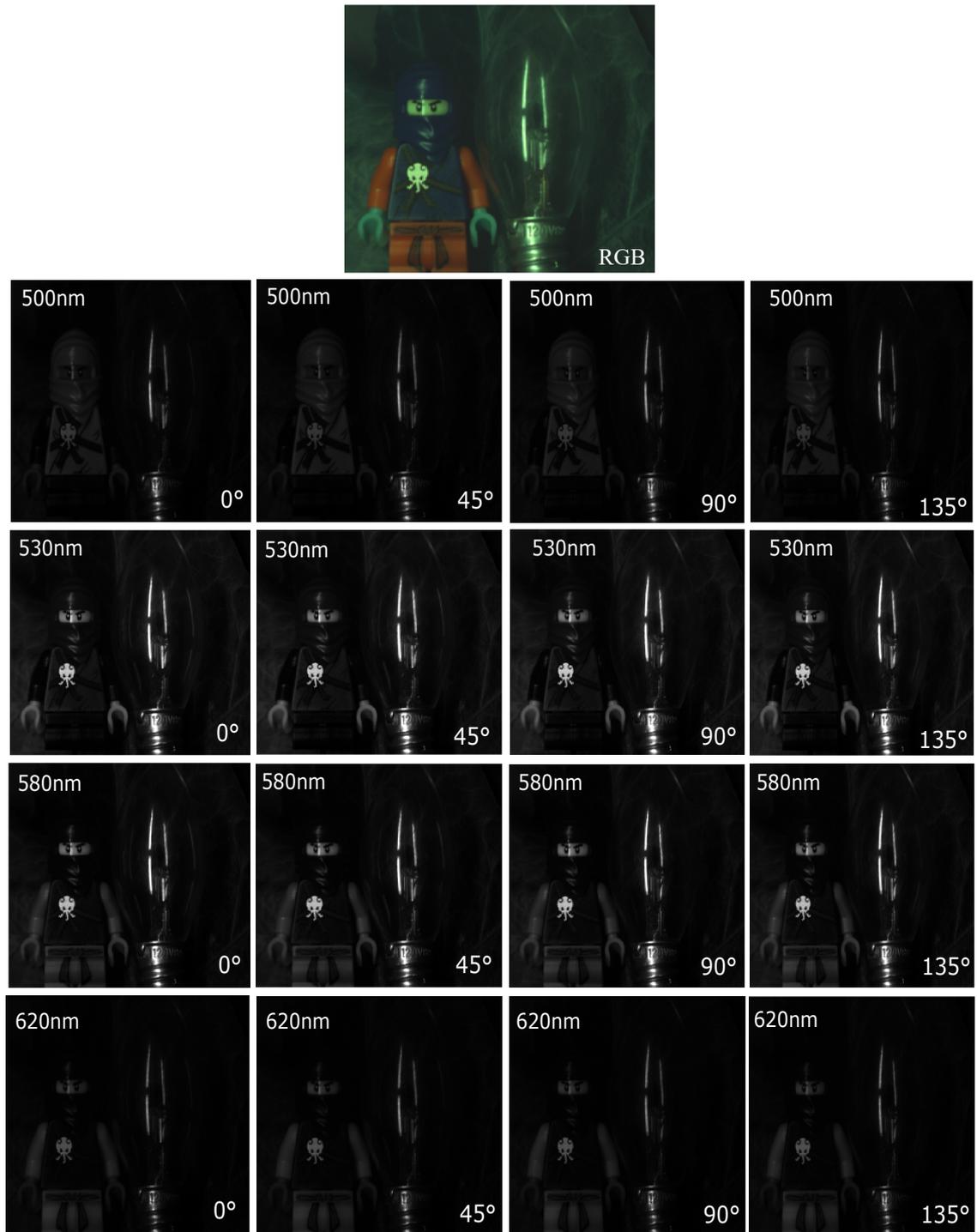
## 7. SIMULACIONES Y RESULTADOS

Para evaluar el desempeño y estudiar la arquitectura de muestreo compresivo para imágenes espectro-polarizadas propuesta, se realizaron simulaciones con un arreglo 4D de datos de prueba, el cual contiene cuatro cubos de intensidades de polarización que fueron adquiridos experimentalmente. Cada cubo con intensidad de polarización contiene catorce ( $L=14$ ) bandas espectrales que van desde los (500nm a 620 nm), con resolución espacial de 256 por 256. El arreglo 4D de datos fue obtenido con 14 filtros pasa banda combinados con cuatro ángulos ( $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $135^\circ$ ) de un polarizador lineal. La escena fue iluminada con luz no polarizada, en la figura 7.1 se puede ver la escena a color en escala RGB y el arreglo 4D de datos con las intensidades de polarización en cuatro canales espectrales. En la imagen se aprecian los cuatro diferentes ángulos de polarización en cuatro bandas espectrales diferentes, con el fin de tener una mejor noción de las cuatro dimensiones de la escena.

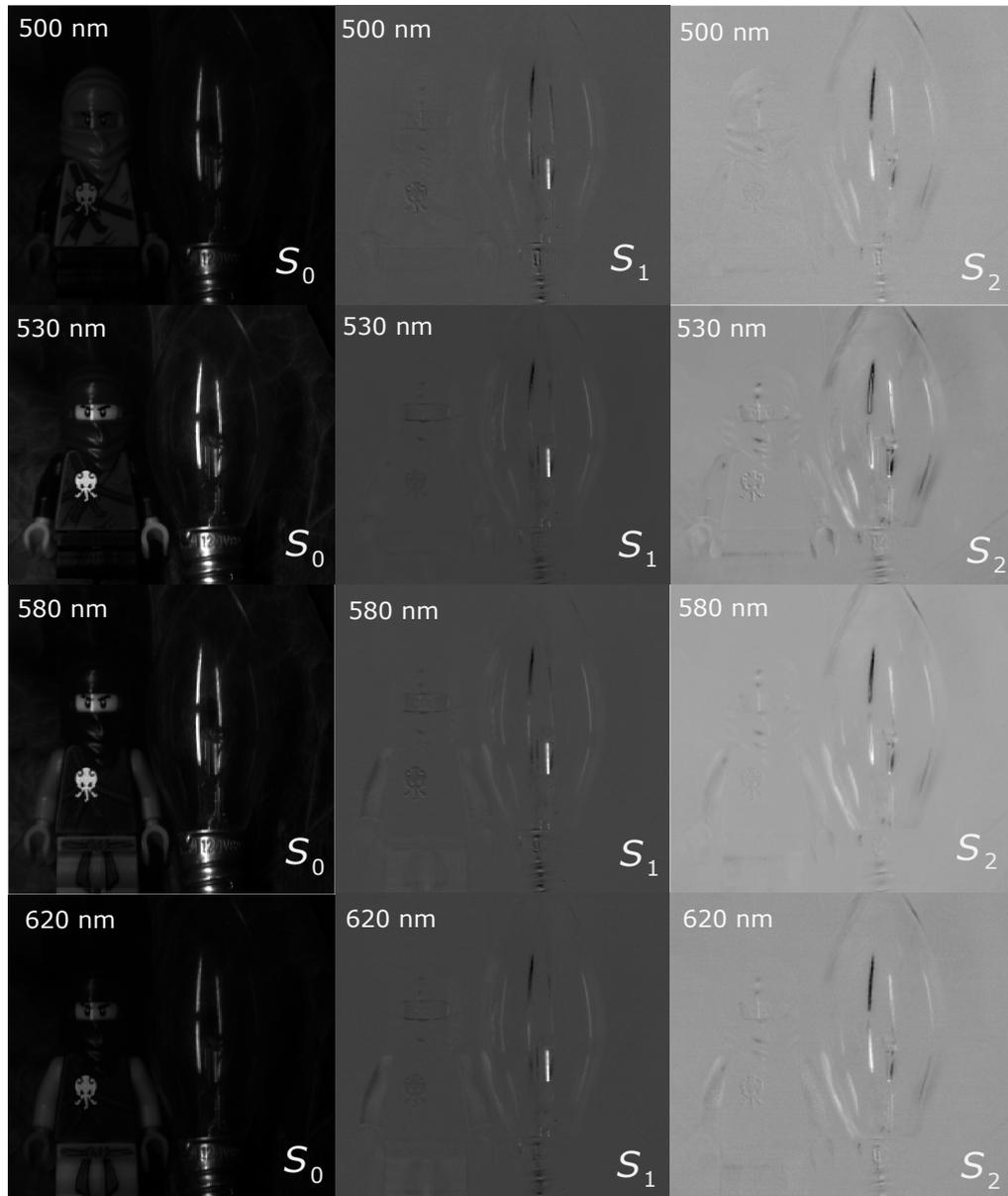
La información de polarización lineal es obtenida mediante las ecuaciones 1.1, 1.2 y 1.3. Los datos de referencia de los parámetros de Stokes se muestran sobre cuatro longitudes de onda en la Figura 7.2. El segundo y el tercer parámetro de Stokes representan el estado de polarización lineal. En el arreglo 4D de datos, se puede observar una figura Lego ninja y un bombillo, cada uno con texturas y formas diferentes para apreciar el cambio en los parámetros. Con este cubo de datos de cuatro dimensiones, se pueden realizar simulaciones mediante la ecuación 4.8, donde  $M$  y  $N$  son la resolución espacial del cubo de datos, en este caso  $256 \times 256$ ,  $L$  son las bandas espectrales ( $L=14$ ) y los tres parámetros de Stokes ( $S_0, S_1, S_2$ ).

La evaluación a la arquitectura propuesta se realiza en dos partes. En la primera, se compara la última arquitectura de adquisición de imágenes espectro-polarizadas en el estado del arte, CASSI, y la arquitectura de único pixel realizada. La comparación se hace reconstruyendo la escena mediante el algoritmo Proyección de gradiente para la reconstrucción escasa (GPSR por su sigla en inglés) para cada arquitectura y evaluar los resultados obtenidos para cada arquitectura cuantitativamente mediante la métrica Pico señal a ruido (PSNR). La segunda parte, busca evaluar el algoritmo de reconstrucción propuesto, ADMM para imágenes espectro-polarizadas. Esta evaluación se realiza comparando la calidad de las reconstrucciones con los algoritmos de reconstrucción GPSR y ADMM a los datos adquiridos con la arquitectura de único pixel propuesta.

Figura 7.1: Representación 4-D de una imagen espectro-polarizada



**Figura 7.2:** Datos de referencia de  $S_0$ ,  $S_1$  y  $S_2$  plano de imágenes, cada parámetro de Stokes es mostrado en 4 de los 14 canales de polarización: 500, 530, 580 y 620 nm.



## 7.1. RESULTADOS EN DIFERENTES ARQUITECTURAS

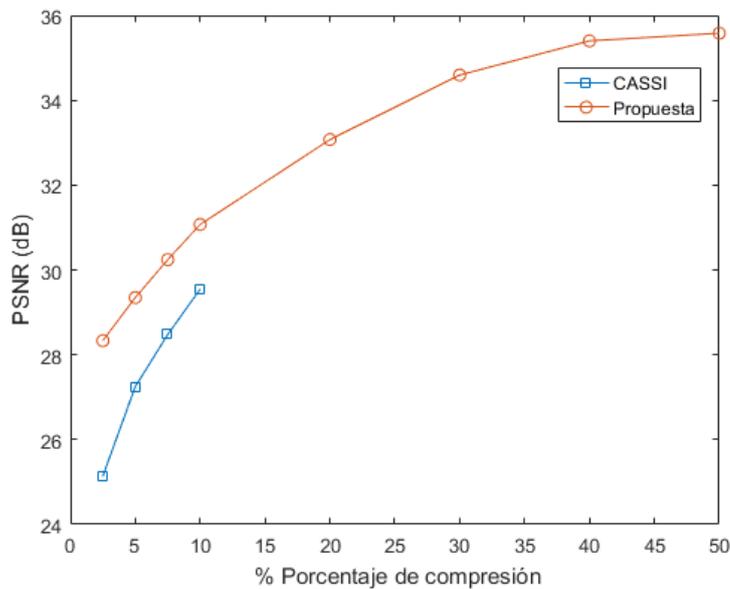
En la sección 3.1 se mostró una arquitectura para la adquisición compresiva de imágenes espectro-polarizadas, donde usan un polarizador pixelado y un detector de color. Con el objetivo de evaluar la arquitectura propuesta en el capítulo 4, se comparan estas dos arquitecturas. Para la reconstrucción de los parámetros de Stokes en las medidas comprimidas para las dos arquitecturas se utilizó el algoritmo de GPSR [16]. Para medir la calidad de la reconstrucción se utiliza la

relación pico señal a ruido (PSNR por su sigla en inglés) de los parámetros de Stokes reconstruidos y los datos de referencia mostrados anteriormente.

La razón de compresión para la arquitectura de la sección 3.1 está dada como  $k = SN_m/PNML$  donde  $P = 3$  son la cantidad de parámetros de Stoke,  $S$  es el número de adquisiciones y  $N_m = (M + L - 1)N$  es el numero de medidas en una sola adquisición, cabe aclarar que para esta arquitectura solo es posible realizar 4 capturas debido a que el prisma es rotado solo en 4 ángulos, por lo que para una captura su nivel de compresión es 2,5 % y el máximo nivel de compresión para esta arquitectura sería 10 % .

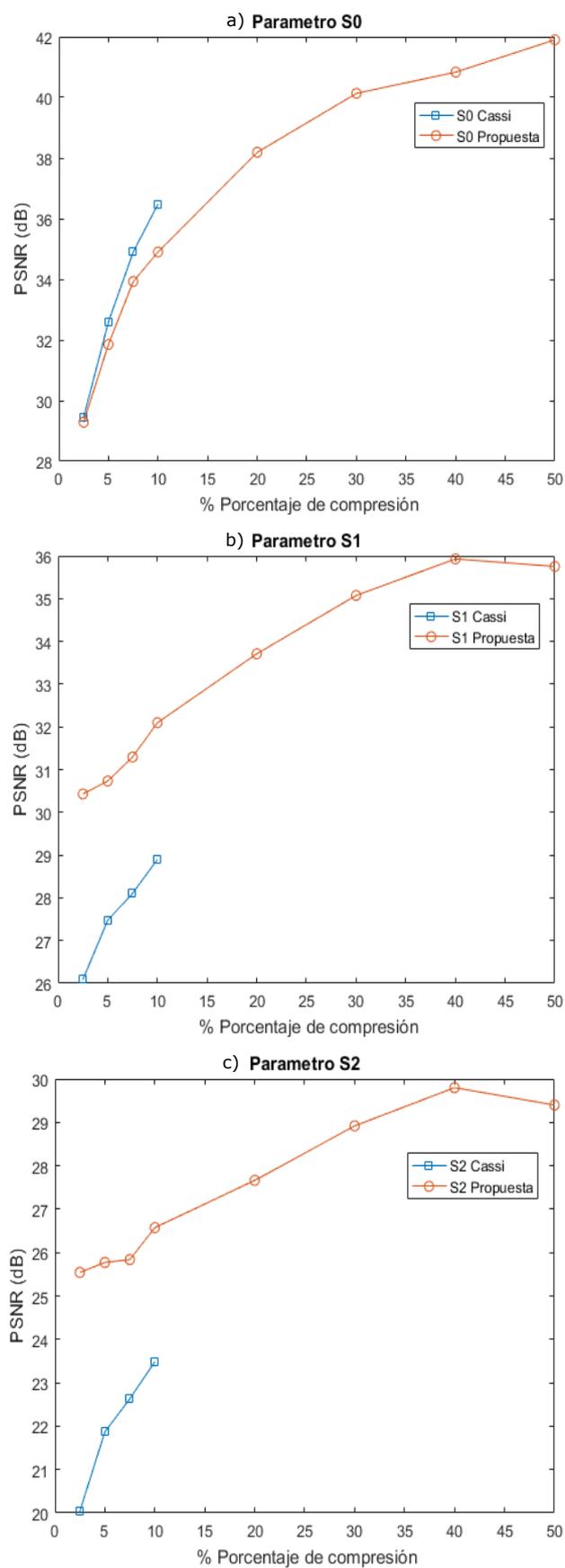
El nivel de compresión de la arquitectura propuesta esta dado como  $k = S/PMN$ , en esta arquitectura el número de capturas distintas depende del tamaño del micro-polarizador y debido a que hay una apertura codificada que varía con cada captación, el número de codificaciones de la escena solo están limitadas por las posibles combinaciones entre un  $\binom{MN}{2}$  .Permitiendo realizar múltiples adquisiciones.

**Figura 7.3:** Resultados en promedio comparando arquitecturas CASSI y Único Pixel propuesta, con el algoritmo de reconstrucción GPSR



En la gráfica 7.3, se puede observar que en general la arquitectura propuesta de Único pixel propuesto, proporciona una ganancia de hasta 4 dB en PSNR con respecto al sistema CASSI. Específicamente, si se compara para una compresión de 2,5 %, en promedio, se aprecia que el sistema Único pixel, tiene una ganancia de hasta 3 dB con respecto a CASSI. Sin embargo, en la arquitectura CASSI sólo se utilizan cuatro niveles de compresión, por esto, comparar las arquitecturas con una compresión mayor a 10 % no es posible.

**Figura 7.4:** Resultados de parámetros de Stokes con algoritmo de reconstrucción GPSR

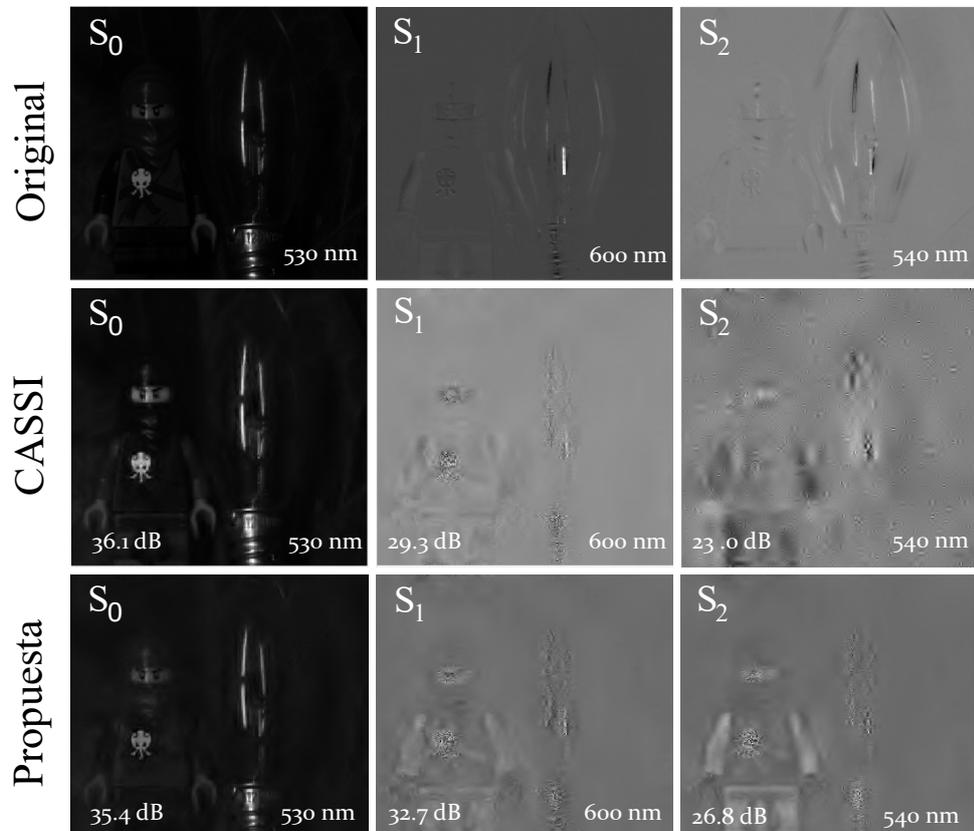


A continuación, se hace un análisis de resultados más detallado con respecto a los parámetros de Stokes. En la figura 7.4 se observan los resultados de la evaluación de calidad de la reconstrucción para las dos arquitecturas. La reconstrucción de cada arquitectura se compara con el cubo de datos original y usa la métrica PSNR para cuantificar la calidad.

En a) se observa que para compresiones pequeñas, el sistema CASSI tiene mayor PSNR, es decir mayor calidad en la reconstrucción. Sin embargo, la arquitectura propuesta no difiere en grandes valores a CASSI, pues en 2,5 % de compresión la diferencia es 0.15 dB; la mayor diferencia se da en el 10 % de compresión, siendo esta de 4.58 dB. Además, se puede apreciar el comportamiento de la arquitectura propuesta a través de los porcentajes de compresión, viendo que el mayor PSNR es de 42 dB con un 50 % de compresión, mientras que el mayor PSNR posible en CASSI es de 36.5 dB.

En las gráficas b) y c) se puede observar claramente que la arquitectura propuesta proporciona una ganancia de hasta 5 dB en PSNR con respecto a CASSI. Un ejemplo puntual en b), comparando para 2,5 % de compresión se tiene una diferencia de 4 dB en PSNR de ganancia de la arquitectura propuesta comparado con CASSI. En c) la ganancia para la arquitectura propuesta es mayor, pues con 2,5 % de compresión se obtiene 5 dB de diferencia entre la arquitectura propuesta y CASSI.

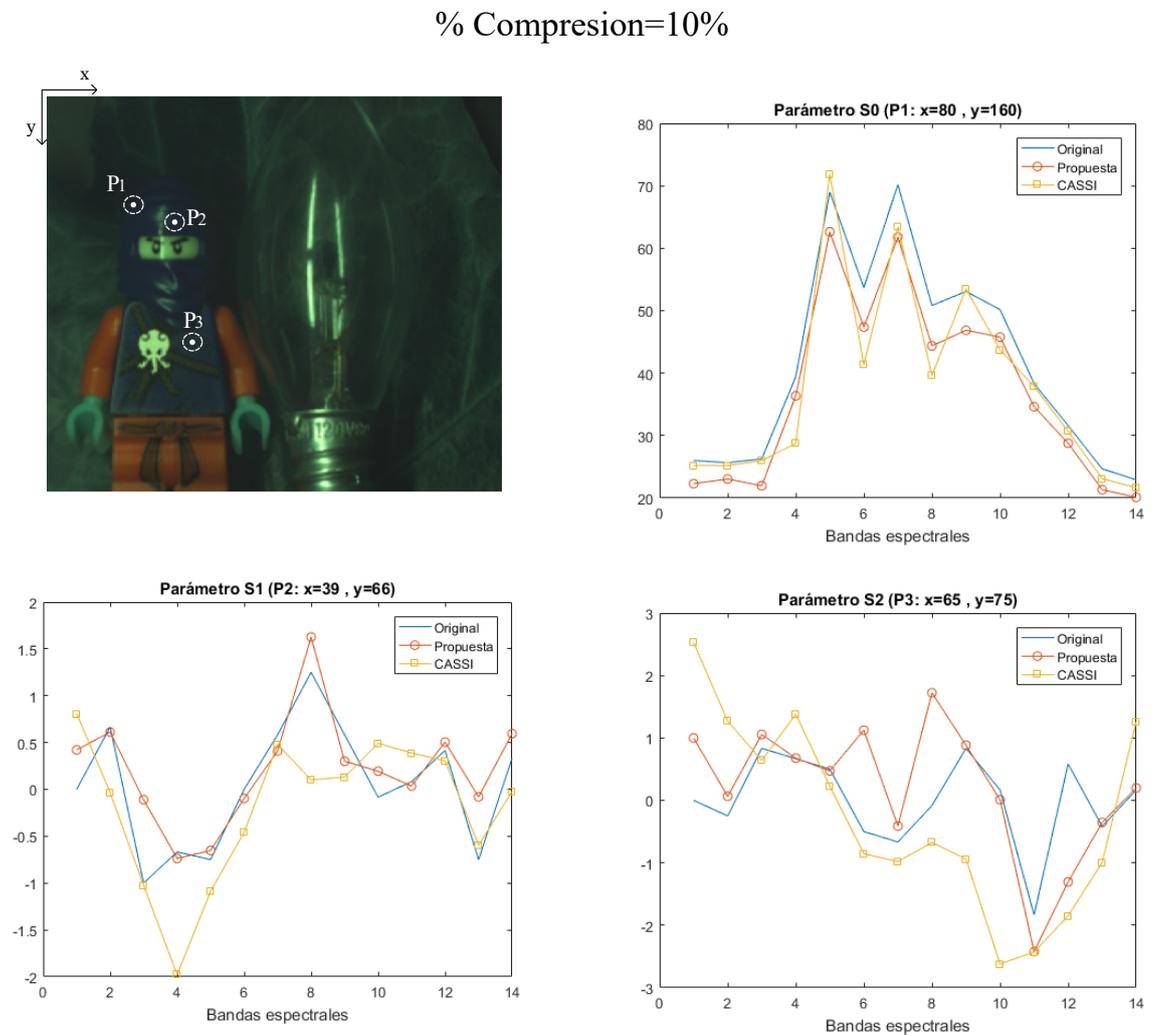
**Figura 7.5:** Comparación visual de la reconstrucción



La figura 7.5 muestra los parámetros de Stoke del cubo de datos reconstruido, en diferentes canales espectrales. Los resultados muestran una mejora significativa de la calidad de imagen reconstruida con 10% de compresión en las dos arquitecturas comparadas.

Con el objetivo de verificar la precisión de la arquitectura propuesta se comparan las firmas espectrales de las reconstrucciones obtenidas con el espectro original. En las figura 7.6 se presentan los resultados al comparar la firma espectral de tres puntos espaciales del cubo de datos con las reconstrucciones para el sistema CASSI y la arquitectura de único pixel propuesta. En general, los resultados muestran que la arquitectura propuesta presenta una mejor aproximación espectral que el sistema CASSI, teniendo mayor aproximación en el parámetro  $S_0$ .

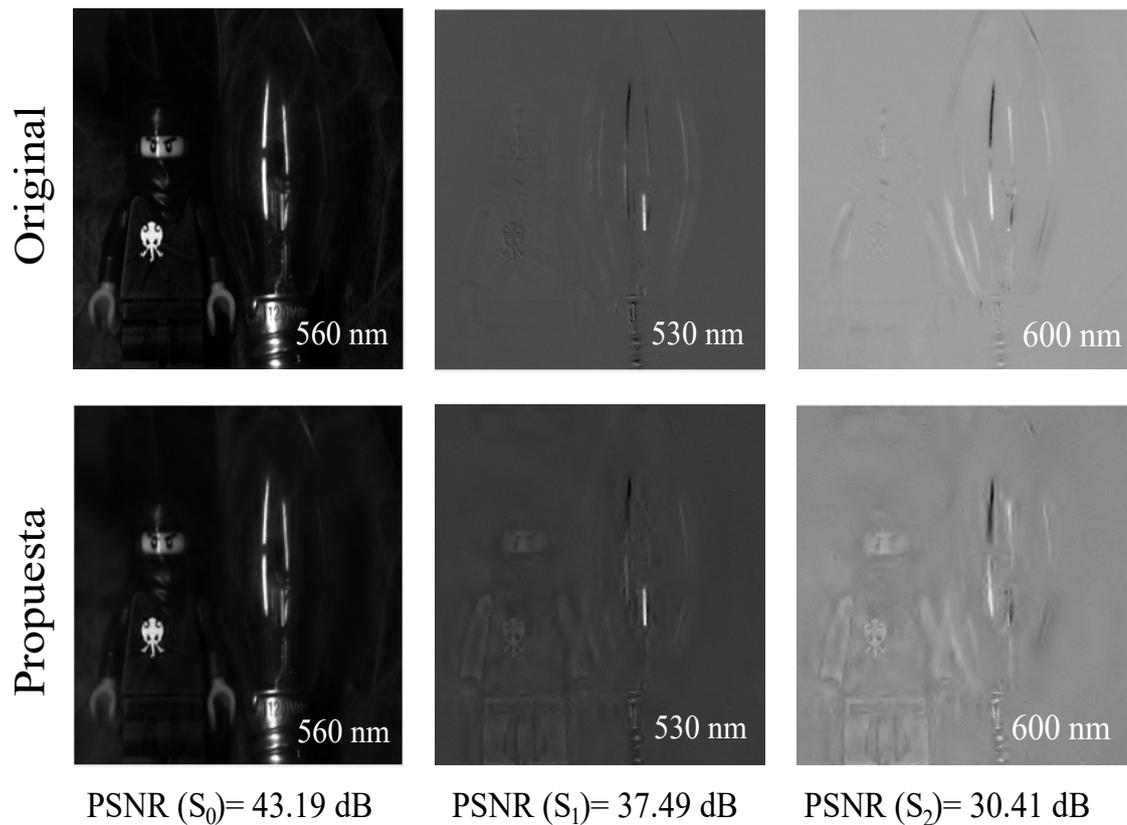
**Figura 7.6:** Firmas espectrales obtenidas en las reconstrucciones con las diferentes arquitecturas



En la figura 7.7 se muestra una comparación visual de la reconstrucción para

la arquitectura propuesta con un 50 % de compresión, y el cubo de datos original, presentado gran nivel de detalle de la escena. Una comparación importante, radica en la diferencia entre las mejores reconstrucciones posibles en cada arquitectura; para esto se puede observar en la figura 7.5, la mejor reconstrucción posible con 10 % de compresión para el sistema CASSI, y en la figura 7.7 la reconstrucción con 50 % de compresión para la arquitectura propuesta. Esto permite evidenciar que se tiene una mejora significativa en la calidad de la imagen en la arquitectura de único pixel propuesta.

**Figura 7.7:** Reconstrucción para el 50 % de compresión de la arquitectura propuesta

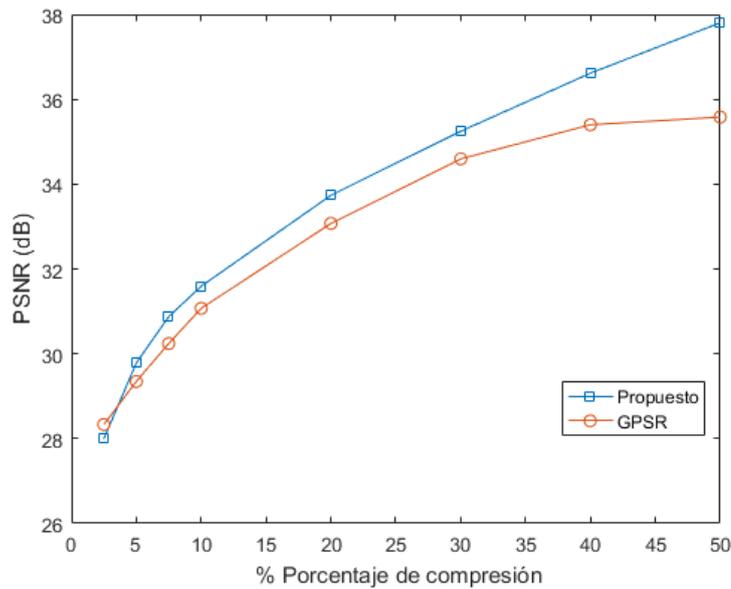


## 7.2. RESULTADOS EN DIFERENTES ALGORITMOS DE RECONSTRUCCIÓN

Los algoritmos de reconstrucción de imágenes se han convertido en un estudio importante en el área de adquisición y procesamiento de imágenes; estos pueden determinar el tiempo, calidad y detalle de la imagen reconstruida. En la sección 6 de este trabajo se propone un algoritmo de reconstrucción basado en mezclas lineales que mejora la calidad de la imagen. La medición de calidad se realiza mediante la relación pico señal a ruido (PSNR) de los parámetros de Stokes reconstruidos y los mostrados en la figura 7.2 referentes al cubo de datos original. Con el objetivo de evaluar el algoritmo propuesto, se realizan comparaciones con el algoritmo de reconstrucción GPSR, usado anteriormente en la

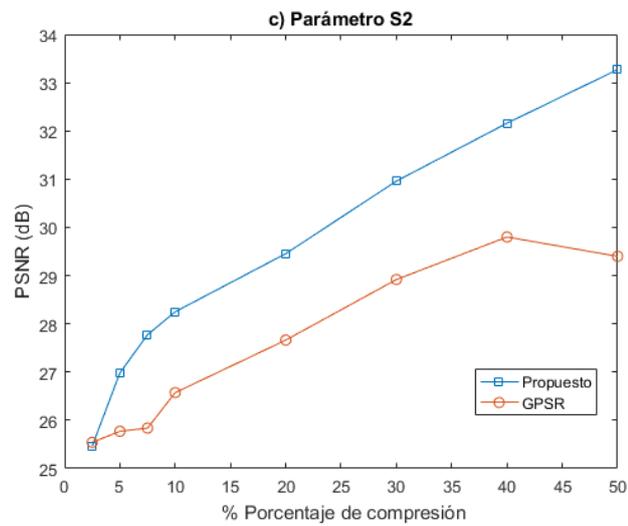
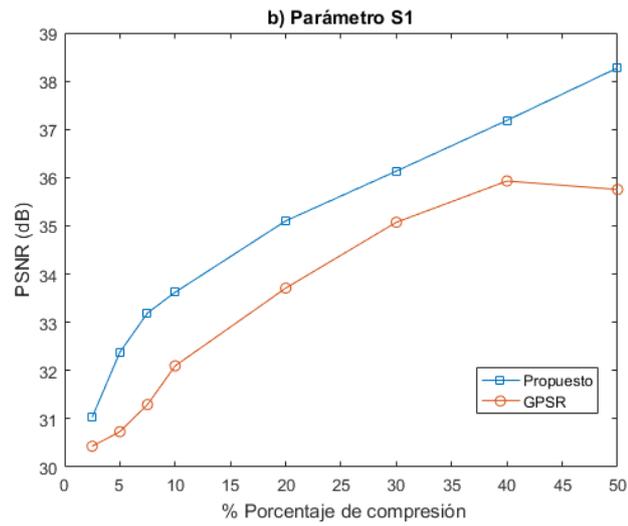
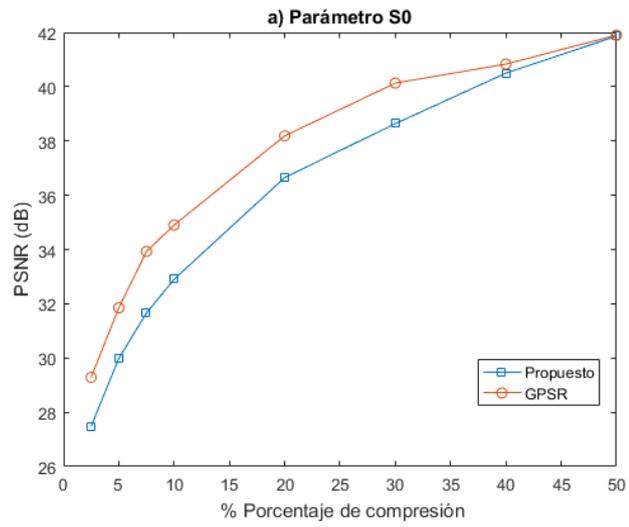
comparación de arquitecturas. Los niveles de compresión usados están entre el rango de 2,5 % y 50 %. En la gráfica 7.8 se puede observar que el algoritmo de reconstrucción propuesto provee una ganancia de 2 dB en PSNR en comparación con el algoritmo de GPSR. Puntualmente, se puede comparar los valores para 50 % de compresión, donde el algoritmo propuesto tiene 2 dB más que el algoritmo GPSR.

**Figura 7.8:** Resultados en promedio comparando algoritmos de reconstrucción GPSR y el propuesto.



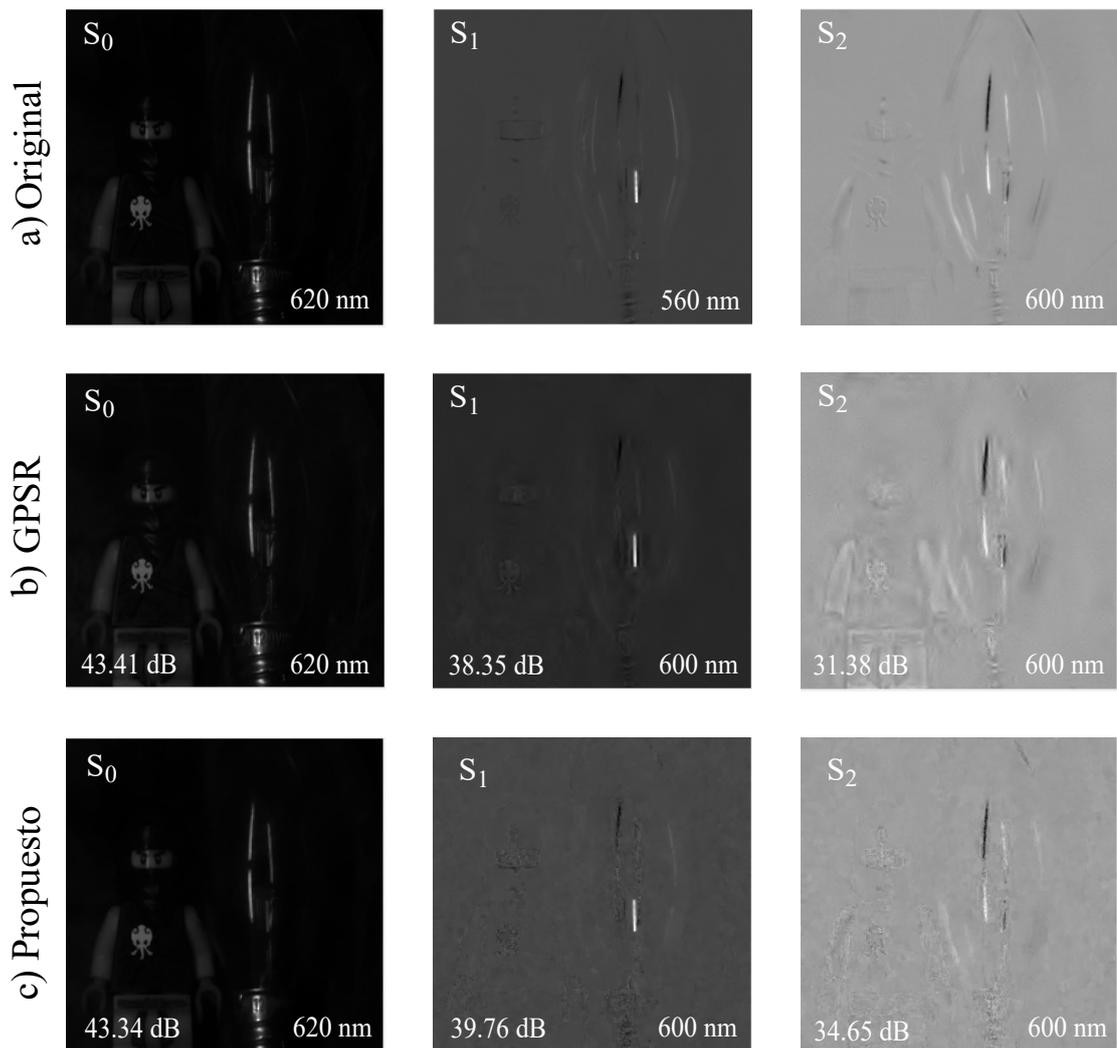
Realizando un análisis más detallado, se puede observar en la figura 7.9 la comparación de la calidad de reconstrucción entre el algoritmo GPSR y el propuesto para cada parámetro de Stoke usando la métrica PSNR. En a) se observa el parámetro de Stoke  $S_0$ , en este se puede apreciar que el algoritmo GPSR presenta mayor PSNR. Sin embargo, la diferencia entre este y el algoritmo propuesto no difiere en grandes valores, pues con el 10 % de compresión, se tiene la diferencia es de 2 dB, siendo esta la mayor desigualdad entre las métricas entre algoritmos. En el segundo parámetro de Stoke  $S_1$ , se aprecia que la ganancia esta dada en todos los niveles de compresión; con un porcentaje de compresión 50 %, se observa una ganancia de 3 dB al usar el algoritmo de reconstrucción propuesto. En la gráfica c), se observa que el algoritmo propuesto tiene una ganancia de hasta 4 dB con respecto al algoritmo de reconstrucción GPSR. Específicamente, con una compresión del 30 % se tiene una diferencia de 2dB de ganancia para el algoritmo de reconstrucción propuesto. Los parámetros  $S_1$  y  $S_2$  muestran el estado de polarización lineal, y en ellos se puede apreciar los cambios de texturas y superficies de los objetos, es decir, que la mejora en la reconstrucción obtenida en estos parámetros es importante para mejorar la detección de objetos y superficies en la escena.

**Figura 7.9:** Resultados de parámetros de Stoke con algoritmo de reconstrucción GPSR



En la figura 7.10 se muestra una comparación visual de los resultados obtenidos con 50% de compresión, usando los algoritmos de reconstrucción a comparar, GPSR y el propuesto en este trabajo. Se puede observar el nivel de detalle en cada parámetro de Stoke y compararlo con el cubo de datos original. Además el algoritmo de reconstrucciónn propuesto proporciona una ganancia de hasta 4 dB en PSNR respecto al algoritmo GPSR.

**Figura 7.10:** Reconstrucción para 50% de compresión para la arquitectura de único píxel propuesta. a) Cubo de datos original. b) Reconstrucción con GPSR. c) Reconstrucción algoritmo propuesto.

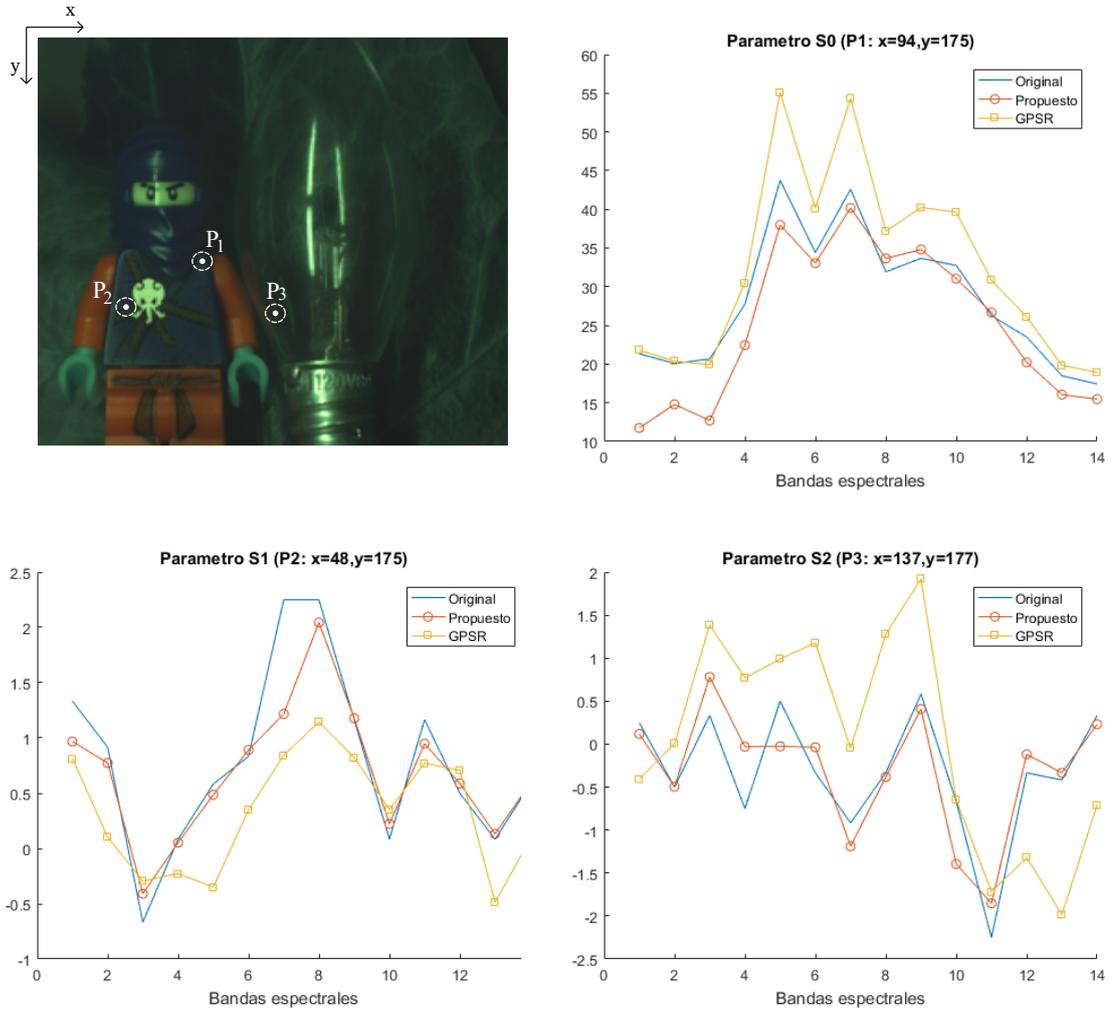


Para evaluar la precisión del algoritmo de reconstrucción propuesto, se realiza la comparación de las firmas espectrales obtenidas con los algoritmos de reconstrucción con el espectro original. En la figura 7.11 se presentan los resultados de la comparación de firmas espectrales en tres puntos espaciales del cubo de datos, en los diferentes parámetros de Stoke usando el algoritmo de reconstrucción GPSR y el propuesto. En general, los resultados muestran que el algoritmo de re-

construcción propuesto presenta mejor aproximación espectral que el algoritmo GPSR.

**Figura 7.11:** Firmas espectrales obtenidas con los diferentes algoritmos de reconstrucción

% Compresion=50%



## 8. CONCLUSIONES

El modelo matemático y matricial para la arquitectura de único pixel para la adquisición de imágenes espectro-polarizadas se desarrolló. La arquitectura presentada hace uso de un micropolarizador que permite o deniega el paso de los ángulos de polarización de la imagen, un código de apertura que permite la codificación espectral y espacial, el colimador modula la información a un pixel y este se clasifica en bandas espectrales con ayuda del espectrómetro. Se analizó la codificación de la escena producido por el micropolarizador y el código de aperturas, y se desarrolló un modelo matricial basado en este análisis. Se desarrolló el modelo matemático y se implementó un algoritmo computacional para el proceso de reconstrucción basado en mezclas lineales. Además, se desarrolló un procedimiento computacional para simular el proceso de adquisición de imágenes espectro-polarizadas, obteniendo diferentes medidas comprimidas para diferentes porcentajes de compresión, y se utilizó el algoritmo de reconstrucción propuesto para resolver el problema de minimización. Los resultados obtenidos fueron evaluados comparando la arquitectura propuesta con CASSI en el estado del arte y el algoritmo de reconstrucción propuesto con el algoritmo Proyección de gradiente para la reconstrucción escasa (GPSR).

Las simulaciones muestran un aumento significativo en la calidad de detalles de reconstrucción de una imagen espectro-polarizada, cuando se utiliza la arquitectura de único pixel y el algoritmo de reconstrucción propuestos. En la comparación por arquitecturas, se obtiene un ganancia de 4 dB cuando se compara el promedio de la arquitectura CASSI con la de único pixel propuesta. De igual forma, la ganancia es notoria en la comparación por parámetros de Stokes, pues se presenta un mejor nivel de detalle y aproximación espectral con respecto al sistema CASSI. Adicionalmente, en la comparación por algoritmos de reconstrucción, se obtiene una ganancia de 3 dB al comparar el promedio del algoritmo GPSR con el propuesto, comportándose de igual forma para los parámetros de Stokes reconstruidos, además la comparación visual permite afirmar que la calidad de la imagen reconstruida con el algoritmo implementado es significativa.

## Referencias

- [1] John B Adams and Alan R Gillespie. *Remote sensing of landscapes with spectral images: A physical modeling approach*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Yongqiang Zhao, Chen Yi, Seong G Kong, Quan Pan, and Yongmei Cheng. *Multi-band polarization imaging and applications*. Springer, 2016.
- [3] Chao Chen, Yong-qiang Zhao, Dan Liu, Quan Pan, and Yong-mei Cheng. Polarization and spectral information jointly utilization in targets classification under different weather conditions. In *Photonics and Optoelectronic (SOPO), 2010 Symposium on*, pages 1–4. IEEE, 2010.
- [4] Yang Pu, WB Wang, GC Tang, F Zeng, S Achilefu, JH Vitenson, I Sawczuk, S Peters, JM Lombardo, and RR Alfano. Spectral polarization imaging of human prostate cancer tissue using a near-infrared receptor-targeted contrast agent. *Technology in cancer research & treatment*, 4(4):429–436, 2005.
- [5] Chen Fu, Henry Arguello, Brian M Sadler, and Gonzalo R Arce. Compressive spectral polarization imaging by a pixelized polarizer and colored patterned detector. *JOSA A*, 32(11):2178–2188, 2015.
- [6] John R Valenzuela. *Polarimetric image reconstruction algorithms*. PhD thesis, Michigan Tech, 2010.
- [7] Aldo S Ramírez-Duverger and R García-Llamas. Diseño y construcción de un esparcímetero de luz. *Revista mexicana de física*, 50(5):541–548, 2004.
- [8] Yong-Qiang Zhao, Peng Gong, and Quan Pan. Object detection by spectropolarimetric imagery fusion. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46(10):3337–3345, 2008.
- [9] Marian-Daniel Iordache, José M Bioucas-Dias, and Antonio Plaza. Sparse unmixing of hyperspectral data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 49(6):2014–2039, 2011.
- [10] Chengbo Li, Ting Sun, Kevin F Kelly, and Yin Zhang. A compressive sensing and unmixing scheme for hyperspectral data processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 21(3):1200–1210, 2012.
- [11] John B Adams, Milton O Smith, and Paul E Johnson. Spectral mixture modeling: A new analysis of rock and soil types at the viking lander 1 site. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 91(B8):8098–8112, 1986.
- [12] R Glenn Sellar and Glenn D Boreman. Classification of imaging spectrometers for remote sensing applications. *Optical Engineering*, 44(1):013602–013602, 2005.

- 
- [13] Kenneth P Bishop, Harold D McIntire, Matthew P Fetrow, and Lenore J McMackin. Multispectral polarimeter imaging in the visible to near ir. In *AeroSense'99*, pages 49–57. International Society for Optics and Photonics, 1999.
- [14] Richard S Loe and Michael J Duggin. Hyperspectral imaging polarimeter design and calibration. In *International Symposium on Optical Science and Technology*, pages 195–205. International Society for Optics and Photonics, 2002.
- [15] Emmanuel J Candès and Michael B Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):21–30, 2008.
- [16] Gonzalo R Arce, David J Brady, Lawrence Carin, Henry Arguello, and David S Kittle. Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(1):105–115, 2014.
- [17] Éva Papp and Thomas Cudahy. Hyperspectral remote sensing. *Geophysical and Remote Sensing Methods for Regolith Exploration*, 144:13–21, 2002.
- [18] Richard G Baraniuk. Compressive sensing [lecture notes]. *IEEE signal processing magazine*, 24(4):118–121, 2007.
- [19] Jennifer Seberry, Beata JWyssocki, and Tadeusz AWyssocki. On some applications of hadamard matrices. *Metrika*, 62(2-3):221–239, 2005.
- [20] Eric Tressler. *A survey of the Hadamard conjecture*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2004.
- [21] Robert O Green, Michael L Eastwood, Charles M Sarture, Thomas G Chrien, Mikael Aronsson, Bruce J Chippendale, Jessica A Faust, Betina E Pavri, Christopher J Chovit, Manuel Solis, et al. Imaging spectroscopy and the airborne visible/infrared imaging spectrometer (aviris). *Remote Sensing of Environment*, 65(3):227–248, 1998.
- [22] Nirmal Keshava and John F Mustard. Spectral unmixing. *IEEE signal processing magazine*, 19(1):44–57, 2002.
- [23] Stephen Boyd, Neal Parikh, Eric Chu, Borja Peleato, and Jonathan Eckstein. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 3(1):1–122, 2011.
- [24] José MP Nascimento and José MB Dias. Vertex component analysis: A fast algorithm to unmix hyperspectral data. *IEEE transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 43(4):898–910, 2005.

## BIBLIOGRAFÍA

ADAMS, John y GILLESPIE, Alan. Remote sensing of landscapes with spectral images: A physical modeling approach. Cambridge University Press. 2006.

ADAMS, John. SMITH, Milton y JOHNSON, Paul. Spectral mixture modeling: A new analysis of rock and soil types at the Viking Lander. En: Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 1986. vol.91, no. B8, p. 8098-8112.

ARCE, Gonzalo. Compressive coded aperture spectral imaging: An introduction. En: IEEE Signal Processing Magazine. 2014. vol. 31, no. 1, p. 105-115

BAJANJUK, Richard. Compressive sensing. En: IEEE signal processing magazine. 2007. vol. 24, no. , p. 118-121.

CANDES, Emmanuel y WAKIN, Michael. An introduction to compressive sampling. En: IEEE signal processing magazine. 2008. vol. 25, no. 2, p. 21-30.

CHENBGO, Tung y SUN, Kelly. A compressive sensing and unmixing scheme for hyperspectral data processing. En: IEE Transactions on Image Processing. 2012. vol. 21, no. 3, p. 1200-1210.

FUENTES, Henry. Compressive spectral polarization imaging by a pixelized polarizer and colored patterned detector. En: JOSA A. 2015. vol.32, no. 11, p. 2178-2188

GREEN, Robert y CHRIEN, Thomas. Imaging spectroscopy and the airborne visible/infrared imaging spectrometer. En: Remote Sensing of Environment. 1998. vol. 65, no. 3, p. 227-248.

RAMIREZ, Aldo. Diseño y construcción de un esparcmetro de luz. En: Revista mexicana de física. 2004. vol. 50, no. 5, p. 541-548

SEBERRY, Jennifer. On some applications of Hadamard matrices. En: Metrika. 2005. vol.62, no. 2-3, p.221-239.

SELLA, Glenn y BOREMAN, Glenn. Classification of imaging spectrometers for remote sensing applications. En: Optical Engineering. 2005. vol. 44, no. 1, p. 13602-13608.

ZHAO, Chen y YONGGIANG, Kong. Multi-band polarization imaging and applications. 1 ed. Springer. 2016.