

**UN PROBLEMA INVERSO PARA UN
SISTEMA SEMI-LINEAL DE
ECUACIONES DE PRIMER ORDEN**

ELBIS ENRIQUE GÁMEZ MONTERO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

UN PROBLEMA INVERSO PARA UN SISTEMA SEMI-LINEAL DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

ELBIS ENRIQUE GÁMEZ MONTERO

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director

HENRY LAMOS DÍAZ

Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

*A Dios todo poderoso, quien acompaña e ilumina
siempre mis caminos.*

A mi familia; Heriberto, Ana y Hermanos

A Marleny

A mi hijo

Agradecimientos

A mis padres, Heriberto y Ana, por su sacrificio y constante lucha para ayudarme a conquistar mis metas.

A mis hermanos, por el gran apoyo moral y económico que me brindaron.

A Marleny (mi gran amor), quien me ha dado nuevos motivos para seguir adelante.

A Henry Lamos Díaz, por su valiosa paciencia y dedicación en la dirección de este trabajo.

A los profesores de la Escuela de Matemáticas, por su orientación.

A los compañeros de la carrera, y todas las demás personas que de alguna manera me apoyaron para escalar este peldaño.

TITULO: UN PROBLEMA INVERSO PARA UN SISTEMA SEMI-LINEAL DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN*

AUTOR: GÁMEZ MONTERO Elbis Enrique**

PALABRAS CLAVES

Ecuaciones integrales, isoterma de sorción, método de parametrización, modelamiento matemático, problemas inversos, resolvente, sorción dinámica, teorema de existencia y unicidad.

DESCRIPCIÓN

Generalmente es muy común que el investigador modele problemas de tipo causa-efecto, pero hoy en día un círculo cada vez más amplio de técnicos, ingenieros, licenciados y especialistas, deben enfrentarse con problemas de tipo efecto-causa, que son los llamados problemas inversos.

Los métodos de modelamiento matemático permiten resolver una gran cantidad de problemas que están relacionados con el manejo de los residuos del medio ambiente. El modelamiento matemático juega un papel fundamental en las investigaciones de fenómenos de sorción, los cuales se emplean extensamente en los problemas actuales de contaminación y en muchos otros. Los primeros trabajos para la descripción matemática de los procesos de absorción dinámica se realizaron a principios de este siglo y los desarrollos posteriores se han basado fundamentalmente en la construcción de modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El presente trabajo esta dedicado a la investigación de un problema inverso el cual consiste en determinar la isoterma de absorción a través de los resultados

* Monografía

** Facultad de Ciencias: Escuela de Matemáticas. Programa: Licenciatura en Matemáticas. Director: Ph.D. Henry Lamos Díaz.

de un experimento dinámico. El trabajo consta de cuatro capítulos. El primero está dedicado a una breve descripción sobre el modelamiento matemático de los procesos de sorción dinámica. En el segundo capítulo se estudian las propiedades del problema directo y se demuestra el teorema de existencia y unicidad de la solución del modelo matemático de sorción dinámica. En el tercero se discute la solución numérica del problema inicial de contorno describiendo brevemente lo que es una malla y funciones de malla y luego el planteamiento de los problemas en diferencias, Aproximación y Convergencia. El cuarto capítulo plantea el problema inverso y se discute una solución aproximada de éste a través del método de parametrización de dimensión finita.

TITLE: AN INVERSE PROBLEM FOR A SEMI-LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS OF FIRST ORDER*

AUTHOR: GÁMEZ MONTERO Elbis Enrique**

KEY WORDS

Integral equations, isotherm of absorption, parametrization method, mathematical modeling, inverse problems, resolvent, sorption dynamics, existence theorem and unicidad.

DESCRIPTION

It is generally very common that the investigator models problems of type cause-effect, but today in day a more and more large circle of technicians, engineers, graduates and specialists, they should face with problems of type effect-cause that are the calls inverse problems.

The mathematical modeling methods allow to solve a great quantity of problems that you/they are related with the handling of the residuals of the environment. The mathematical modeling plays a main roll in the sorption phenomenon researches, which are widely used in the current contamination problems and in many others. The first works for the mathematical descripción of the processes of dynamic absorption were carried out at the beginning of this century and the later developments have been based fundamentally on the construction of mathematical models by means of differential equations in having derived partial.

This work is devoted to the research of an inverse problem which consists on determining the isotherm of absorption through the results of a dynamic

*Monograph

**Faculty of Sciences: School of Mathematics. Programs: Degree in Mathematics. Director: Ph.D. Henry Lamos Díaz.

experiment. The work consists of four (4) chapters. The first one is dedicated to a brief description on the mathematical modeling of the processes of dynamic sorption. In the second chapter it is studied the properties of the direct problem and it is demonstrated the existence theorem and uniqueness of the solution of the mathematical model of dynamic sorption. In the third you the numeric solution of the initial problem of contour discusses describing what is a mesh and mesh functions shortly and then the position of the problems in differences, Approach and Convergence. The fourth chapter outlines the inverse problem and you discusses an approximate solution of this through the method of parametrization of finite extent.

Índice general

Introducción	1
1. Modelamiento matemático de los procesos de sorción dinámica.	4
2. Investigación de las propiedades de la solución del problema inicial de contorno	7
2.1. Propiedades de la solución del problema inicial de contorno . .	7
2.2. Teorema de existencia y unicidad del problema directo	9
3. Solución numérica del problema directo	30
3.1. Mallas y funciones de mallas	31
3.2. Planteamiento de los problemas en diferencias. Aproximación y Convergencia	33
4. Problema inverso y una solución	37
4.1. Planteamiento del problema inverso	37
4.2. Método de parametrización de dimensión finita para la solu- ción del problema inverso	39

Introducción

A medida que el tiempo transcurre, la ciencia y la tecnología le han proporcionado a la humanidad mejores expectativas, el nivel y la calidad de vida se han incrementado considerablemente trayendo como consecuencia mayores riesgos de enfermedades y deterioro de la salud humana, debido a la aparición de residuos industriales que deben ser tratados urgentemente para eliminarlos o reciclarlos.

Los métodos de modelamiento matemático permiten resolver una gran cantidad de problemas que están relacionados con el manejo de los residuos del medio ambiente; el modelamiento matemático juega un papel fundamental en las investigaciones de fenómenos de sorción, los cuales se emplean extensamente en los problemas actuales de contaminación y en muchos otros.

Uno de los principales campos de aplicación de los modelos matemáticos para el estudio de los procesos de sorción dinámica es la identificación de sus parámetros (características del sistema de sorción), mediante la solución de problemas inversos bajo un modelo matemático seleccionado con anticipación.

El desarrollo intensivo de técnicas numéricas para la solución de problemas de

procesamiento e interpretación de resultados obtenidos experimentalmente, han hecho aparecer un nuevo campo de la matemática aplicada, la teoría de los problemas inversos y sus métodos de solución.

El presente trabajo, está dedicado a la investigación de un problema inverso para un sistema semi-lineal de ecuaciones de primer orden propuesto en [2], el cual consiste en determinar la isoterma de sorción a través de los resultados de un experimento dinámico.

El trabajo consta de cuatro capítulos. En el primer capítulo se hace una breve descripción sobre el modelamiento matemático de los procesos de sorción dinámica, escogiendose el siguiente problema inicial de contorno:

$$\nu u_x + a_t = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a], \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

Donde $a(x, t)$, es la concentración de la sustancia absorbida por unidad de volumen de la columna, $u(x, t)$, es la concentración de la sustancia en el flujo por unidad de volumen libre, ν , es la velocidad del flujo, $\mu(t)$ es la concentración de la sustancia absorbida a la entrada de la columna, $\varphi(\xi)$ es la isoterma de sorción.

El segundo capítulo, está dividido en dos párrafos. En el primer párrafo se hace un estudio de algunas propiedades del problema directo, y en el segundo párrafo, se demuestra el teorema de existencia y unicidad de la

solución del modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

En el tercer capítulo se discute la solución numérica del problema directo, el capítulo está dividido en dos párrafos. En el primer párrafo se describe brevemente lo que es una malla y funciones de malla, y en el segundo párrafo se describe el planteamiento de los problemas en diferencias, Aproximación y Convergencia.

El cuarto capítulo está dedicado al problema inverso y una solución numérica, éste a su vez consta de dos párrafos.

En el primer párrafo se considera el planteamiento del problema inverso, y en el segundo párrafo, buscaremos una solución aproximada del problema inverso, a través del método de parametrización de dimensión finita.

Capítulo 1

Modelamiento matemático de los procesos de sorción dinámica.

Los métodos de sorción se emplean en diferentes procesos tecnológicos, investigaciones científicas y especialmente en la solución de problemas del medio ambiente.

La sorción es el proceso por medio del cual un componente, la sustancia contaminante absorbida, se traslada de una fase a otra atravesando una barrera.

La sorción es debida a la interacción de tres diferentes tipos de moléculas:

Moléculas sorbentes, como el carbono activado.

Moléculas absorbidas, la sustancia contaminante en su proceso de eliminación.

Moléculas disolventes, como el agua.

En el proceso de absorción la sustancia absorbida es captada por la sustancia absorbente (fase absorbente). El proceso de absorción es un proceso de tipo superficial.

Los procesos de sorción se realizan primordialmente de manera dinámica, esto es, en condiciones de movimiento dirigido y relativo a las fases sólidas y líquidas del sistema heterogéneo. Un papel fundamental juega la estática y la cinética en los procesos de sorción dinámica.

La sorción estática tiene en cuenta la dependencia entre la concentración de la sustancia y la concentración de ella en la solución cuando se alcanza el equilibrio termodinámico para una temperatura constante, y se describe mediante la isoterma de sorción.

La sorción cinética describe el traslado de masas en las fases y entre las fases, como también ciertos factores que influyen en ella, lo que permite tener en cuenta la redistribución de la sustancia que aparece como resultado de las condiciones de no equilibrio en el transcurso del proceso.

Los primeros trabajos para la descripción matemática de los procesos de absorción dinámica se realizaron a principios de este siglo y los desarrollos posteriores se han basado fundamentalmente en la construcción de modelos matemáticos mediante ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Los modelos matemáticos de la sorción dinámica tienen una característica especial. Por un lado, los modelos suponen la posibilidad de describir el sistema heterogéneo que incluye tanto el sorbato como el sorbente por medio de la mecánica de los medios continuos, lo que es físicamente factible siempre

y cuando las dimensiones del grano del sorbente sea sustancialmente menor que las dimensiones de todo el sistema de absorción. Por otro lado, los modelos consideran el caracter macroscópico de la dimensión del grano; por esto la introducción del volumen elemental de los medios continuos que contienen una gran cantidad de partículas elementales (un volumen físico pequeño) en los modelos de sorción dinámica no es posible.

Capítulo 2

Investigación de las propiedades de la solución del problema inicial de contorno

2.1. Propiedades de la solución del problema inicial de contorno

Consideremos el siguiente problema inicial de contorno:

$$\nu u_x + a_t = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a], \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

Donde $Q_T = \{(x, t) : 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$, $u(x, t)$, es la concentración de la sustancia en el flujo por unidad de volumen libre y $a(x, t)$ es la concentración de la sustancia absorbida por unidad de volumen de la columna, ν es la velocidad del flujo, $\mu(t)$ es la concentración de la sustancia absorbida a la entrada de la columna, $\varphi(\xi)$ es la isoterma de absorción.

Tenemos que ν, γ son constantes positivas.

Dividiendo la ecuación (2.1) por ν y luego haciendo sustitución de (2.2) en (2.1) nos queda el sistema así:

$$\begin{aligned} u_x - \frac{\gamma a}{\nu} + \frac{\gamma}{\nu} \varphi(u) &= 0 \\ a_t &= \gamma \varphi(u) - \gamma a \\ u(0, t) &= \mu(t) \\ a(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}$$

Ahora haciendo $\frac{\gamma}{\nu} = \beta$ obtenemos el sistema así:

$$u_x - \beta a + \beta \varphi(u) = 0 \tag{2,1}$$

$$a_t = \gamma \varphi(u) - \gamma a \tag{2,2}$$

$$u(0, t) = \mu(t) \tag{2,3}$$

$$a(x, 0) = \psi(x) \tag{2,4}$$

Supongamos que las funciones $\psi(x)$, $\mu(t)$ y $\varphi(\xi)$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}\mu &\in C^1[0, T], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0, \\ \psi &\in C^1[0, l], \quad \psi'(x) \geq 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\varphi \in C^1(-\infty, \infty), \quad \varphi(0) = 0; \quad 0 < \varphi'(\xi) < c_1, \quad \text{para } \xi \in (-\infty, \infty), \quad c_1 = \text{const.}\tag{2.6}$$

2.2. Teorema de existencia y unicidad del problema directo

Las condiciones de existencia y unicidad del problema (2.1)-(2.4) pueden ser formuladas de la siguiente manera.

Teorema 2.1. *Suponga que las funciones $\psi(x), \mu(t)$ y $\varphi(\xi)$ satisfacen las condiciones (2.5) y (2.6) respectivamente. Entonces existe una solución única del problema (2.1)-(2.4).*

Demostración. Suponga que se cumplen las condiciones del teorema, y las funciones $a(x, t), u(x, t)$ son continuas en Q_T , las cuales tienen en Q_T derivadas continuas $a_t(x, t), u_x(x, t)$ y satisfacen a (2.1)-(2.4).

Integrando el sistema (2.1)-(2.4), lo transformaremos en un sistema equivalente.

Integrando la ecuación (2.1) desde 0 hasta x obtenemos:

$$\int_0^x u_x(\xi, t) d\xi = \beta \int_0^x a(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi,$$

luego

$$u(x, t) - u(0, t) = \beta \int_0^x a(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi,$$

despejando $u(x, t)$ tenemos

$$u(x, t) = u(0, t) + \beta \int_0^x a(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi,$$

reemplazando la condición (2.3)

$$u(x, t) = \mu(t) + \beta \int_0^x a(\xi, t) d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi \quad (2.7)$$

La ecuación (2.2) es una ecuación lineal de primer orden que se puede resolver mediante un factor integrante apropiado. Calculemos el factor integrante:

$$\rho(x, t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \gamma dt} = e^{\gamma t}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.2) por el factor integrante $e^{\gamma t}$ nos queda:

$$a_t(x, t)e^{\gamma t} + \gamma a(x, t)e^{\gamma t} = \gamma e^{\gamma t} \varphi(u(x, t))$$

Como podemos observar, el lado izquierdo de la ecuación se puede representar como la derivada de un producto, luego:

$$\frac{d}{dt}(a(x, t)e^{\gamma t}) = \gamma e^{\gamma t} \varphi(u(x, t))$$

Ahora si integramos esta ecuación desde 0 hasta t obtenemos:

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}(a(x, \tau)e^{\gamma \tau}) d\tau = \int_0^t \gamma e^{\gamma \tau} \varphi(u(x, \tau)) d\tau,$$

por lo tanto

$$a(x, t)e^{\gamma t} - a(x, 0) = \int_0^t \gamma e^{\gamma \tau} \varphi(u(x, \tau)) d\tau,$$

reemplazando la condición inicial (2.4)

$$a(x, t)e^{\gamma t} = \psi(x) + \int_0^t \gamma e^{\gamma \tau} \varphi(u(x, \tau)) d\tau,$$

despejando la función $a(x, t)$ tenemos:

$$a(x, t) = \psi(x)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma t} e^{\gamma \tau} \varphi(u(x, \tau)) d\tau,$$

luego

$$a(x, t) = \psi(x)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(x, \tau)) d\tau \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.8) en (2.7) obtenemos:

$$u(x, t) = \mu(t) + \beta \int_0^x [\psi(\xi)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau] d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi$$

luego,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \mu(t) + \beta \int_0^x \psi(\xi)e^{-\gamma t} d\xi + \\ & \beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esta manera, si $u(x, t)$ y $a(x, t)$ son soluciones del problema (2.1)-(2.4), entonces ellas satisfacen a (2.8) - (2.9). Ya que éstos sistemas son equivalentes. Demostremos que el sistema de ecuaciones integrales (2.8) y (2.9) tiene una única solución.

Empleando el método de las sucesiones aproximadas, mostremos que la ecuación (2.9) tiene solución $u(x, t) \in C[Q_T]$.

Consideremos en el rectángulo Q_T la sucesión de funciones

$u_n(x, t), n = 0, 1, 2, \dots$, tales que

$$u_0(x, t) = 0$$

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x, t) &= \mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\
&\beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_n(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u_n(\xi, t)) d\xi
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
|u_1(x, t) - u_0(x, t)| &= |u_1(x, t)| \\
&= |\mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\
&\beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_0(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u_0(\xi, t)) d\xi| \\
&\leq |\mu(t)| + |\beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi| + \\
&|\beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_0(\xi, \tau)) d\tau d\xi| + |\beta \int_0^x \varphi(u_0(\xi, t)) d\xi| \\
&\leq |\mu(t)| + |\beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi| \\
&\leq \max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_2(x, t) - u_1(x, t)| &= |(\mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\
&\gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u_1(\xi, t)) d\xi) - \\
&(\mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_0(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\
&- \beta \int_0^x \varphi(u_0(\xi, t)) d\xi)| \\
&= |\beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \\
&\beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_0(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \\
&- \beta \int_0^x \varphi(u_1(\xi, t)) d\xi + \beta \int_0^x \varphi(u_0(\xi, t)) d\xi|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} |\varphi(u_1(\xi, \tau)) - \varphi(u_0(\xi, \tau))| d\tau d\xi \\
&+ |\beta| \int_0^x |\varphi(u_1(\xi, t)) - \varphi(u_0(\xi, t))| d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 |u_1(\xi, \tau) - u_0(\xi, \tau)| d\tau d\xi + \\
&|\beta| \int_0^x c_1 |u_1(\xi, t) - u_0(\xi, t)| d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) d\tau d\xi \\
&+ |\beta| \int_0^x c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau d\xi \\
&+ |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \int_0^x d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) x \\
&+ |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) x \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \frac{L}{\gamma} + \\
&|\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) L \\
&\leq |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) L \left(\frac{\gamma}{\gamma} + 1 \right) \\
&\leq 2L|\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|u_3(x, t) - u_2(x, t)| &= |(\mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\
&\quad \beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta \int_0^x \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi - (\mu(t) + \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\
& + \beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u_1(\xi, t)) d\xi) | \\
\\
& = | \beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \gamma \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\
& - \beta \int_0^x \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi + \beta \int_0^x \varphi(u_1(\xi, t)) d\xi | \\
\\
& \leq \gamma |\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} |\varphi(u_2(\xi, \tau)) - \varphi(u_1(\xi, \tau))| d\tau d\xi \\
& + |\beta| \int_0^x |\varphi(u_2(\xi, t)) - \varphi(u_1(\xi, t))| d\xi \\
\\
& \leq \gamma |\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 |u_2(\xi, \tau) - u_1(\xi, \tau)| d\tau d\xi + \\
& |\beta| \int_0^x c_1 |u_2(\xi, t) - u_1(\xi, t)| d\xi \\
\\
& \leq \gamma |\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 2L |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) d\tau d\xi \\
& + |\beta| \int_0^x c_1 2L |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) d\xi \\
\\
& \leq \gamma |\beta| c_1 2L |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau d\xi \\
& + |\beta| c_1 2L |\beta| c_1 (\max_{t \in (0, T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0, l]} |\psi(x)|) \int_0^x d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma|\beta|c_1 2L|\beta|c_1 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right) \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) x \\
&+ |\beta|c_1 2L|\beta|c_1 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right) x \\
&\leq \gamma|\beta|c_1 2L|\beta|c_1 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right) \frac{L}{\gamma} \\
&+ |\beta|c_1 2L|\beta|c_1 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right) L \\
&\leq |\beta|c_1 2L|\beta|c_1 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right) L \left(\frac{\gamma}{\gamma} + 1 \right) \\
&\leq 2^2 L^2 |\beta|^2 c_1^2 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right)
\end{aligned}$$

$$|u_4(x, t) - u_3(x, t)| \leq 2^3 L^3 |\beta|^3 c_1^3 \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right)$$

Por lo tanto, podemos proponer la siguiente relación de recurrencia:

$$|u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)| \leq 2^{n-1} L^{n-1} |\beta|^{n-1} c_1^{n-1} \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right)$$

Mostremos que para cualquier $n \geq 1$ en Q_T es válida la siguiente cota:

$$|u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)| \leq p 2^{n-1} L^{n-1} |\beta|^{n-1} c_1^{n-1} \quad (2.11)$$

Donde $p = \left(\max_{t \in (0,T]} |\mu(t)| + \beta \max_{x \in (0,l]} |\psi(x)| \right)$ Demostraremos la desigualdad (2.11)

por inducción matemática. Ya que $u_0(x, t) = 0$, entonces:

$|u_1(x, t) - u_0(x, t)| \leq p$ y para $n = 1$ la desigualdad (2.11) es válida. Supongamos que (2.11) es válida para $n = k$, mostraremos que se cumple para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
|u_{k+1}(x, t) - u_k(x, t)| &\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} |\varphi(u_k(\xi, \tau)) - \varphi(u_{k-1}(\xi, \tau))| d\tau d\xi \\
&\quad + |\beta| \int_0^x |\varphi(u_k(\xi, t)) - \varphi(u_{k-1}(\xi, t))| d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 |u_k(\xi, \tau) - u_{k-1}(\xi, \tau)| d\tau d\xi + \\
&\quad + |\beta| \int_0^x c_1 |u_k(\xi, t) - u_{k-1}(\xi, t)| d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) d\tau d\xi + \\
&\quad + |\beta| \int_0^x c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau d\xi + \\
&\quad + |\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) \int_0^x d\xi \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) x + \\
&\quad + |\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) x \\
&\leq \gamma|\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) \\
&\quad \frac{L}{\gamma} + |\beta| c_1 (p2^{k-1} L^{k-1} |\beta|^{k-1} c_1^{k-1}) L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\beta|c_1(p2^{k-1}L^{k-1}|\beta|^{k-1}c_1^{k-1})L[\frac{\gamma}{\gamma} + 1] \\
&\leq 2L|\beta|c_1(p2^{k-1}L^{k-1}|\beta|^{k-1}c_1^{k-1}) \\
&= 2^k L^k |\beta|^k c_1^k \cdot p
\end{aligned}$$

Así que la cota (2.11) queda demostrada, ahora observemos que:

$$u_n(x, t) = \sum_{i=1}^n [u_i(x, t) - u_{i-1}(x, t)],$$

entonces la convergencia de la sucesión de funciones $u_n(x, t)$ en Q_T es equivalente a la convergencia de la serie funcional

$$\sum_{i=1}^{\infty} [u_i(x, t) - u_{i-1}(x, t)].$$

De la cota (2.11) se desprende, que la serie converge absolutamente y uniformemente en Q_T , de acuerdo al criterio de **Weierstrass**. Consecuentemente, la sucesión de funciones $u_n(x, t)$ converge en Q_T uniformemente hacia la función $\bar{u}(x, t)$. Dado que las funciones $u_n(x, t)$ son continuas en Q_T , entonces la función $\bar{u}(x, t)$ será continua en Q_T . Pasando al límite en (2.10) para $n \rightarrow \infty$, obtenemos, que la función $\bar{u}(x, t)$ satisface la ecuación (2.9) en Q_T . Definiendo la función $\bar{a}(x, t)$ de la siguiente manera:

$$\bar{a}(x, t) = \psi(x)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(\bar{u}(x, \tau)) d\tau \quad (2.12)$$

Obtenemos, que las funciones $\bar{a}(x, t), \bar{u}(x, t) \in C[Q_T]$ y satisfacen a (2.8) y (2.9).

Demostremos, que el sistema (2.8) y (2.9) tiene solución única.

Sean $a_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, y $a_2(x, t)$, $u_2(x, t)$ soluciones del sistema (2.8) y (2.9).

Ya que $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ son soluciones de la ecuación integral (2.9), entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
\max_{0 < t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &= \max_{0 < t \leq T} \left| \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \beta \int_0^x \varphi(u_1(\xi, t)) d\xi \right. \\
&\quad \left. - \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \right. \\
&\quad \left. - \beta \int_0^x \varphi(u_2(\xi, t)) d\xi \right| \\
&\leq \max_{0 < t \leq T} \left| \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} [\varphi(u_1(\xi, \tau)) - \varphi(u_2(\xi, \tau))] d\tau d\xi \right. \\
&\quad \left. + \beta \int_0^x [\varphi(u_1(\xi, t)) - \varphi(u_2(\xi, t))] d\xi \right| \\
&\leq \max_{0 < t \leq T} \left[\gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} |\varphi(u_1(\xi, \tau)) - \varphi(u_2(\xi, \tau))| d\tau d\xi \right. \\
&\quad \left. + \beta \int_0^x |\varphi(u_1(\xi, t)) - \varphi(u_2(\xi, t))| d\xi \right] \\
&\leq \max_{0 < t \leq T} \left[\gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1 |u_1(\xi, \tau) - u_2(\xi, \tau)| d\tau d\xi \right. \\
&\quad \left. + \beta \int_0^x c_1 |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi \right] \\
&\leq \gamma |\beta| c_1 \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, \tau) - u_2(\xi, \tau)| d\tau d\xi \\
&\quad + |\beta| c_1 \int_0^x \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma |\beta| c_1 \int_0^x \left(\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma} \right) \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi \\
&+ |\beta| c_1 \int_0^x \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi \\
&\leq 2. |\beta|. c_1 \int_0^x \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi
\end{aligned}$$

Entonces, para $0 < x \leq l, 0 < t \leq T$, es válida la desigualdad:

$$\max_{0 < t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq 2. |\beta|. c_1. \int_0^x \max_{0 < t \leq T} |u_1(\xi, t) - u_2(\xi, t)| d\xi$$

Introduciendo la función

$$W(x) = \max_{0 < t \leq T} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|$$

Entonces de la desigualdad anterior tenemos

$$W(x) \leq B \int_0^x W(\xi) d\xi, 0 < x \leq l$$

donde $B = 2. |\beta|. c_1$

Por el **Lema de Gronwall** se desprende, que $W(x) = 0$ para $0 < x \leq l$.

Por lo tanto, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ en Q_T .

La igualdad $a_1(x, t) = a_2(x, t)$ en Q_T se desprende de (2.8) y de la igualdad $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ en Q_T .

Sean:

$$a_1(x, t) = \psi(x) e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(x, \tau)) d\tau \quad (2.13)$$

$$a_2(x, t) = \psi(x) e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(x, \tau)) d\tau \quad (2.14)$$

restando (2.14) de (2.13) tenemos:

$$\begin{aligned}
a_1(x, t) - a_2(x, t) &= \psi(x)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(x, \tau)) d\tau - \psi(x)e^{-\gamma t} - \\
&\quad - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(x, \tau)) d\tau \\
&= \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_1(x, \tau)) d\tau - \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u_2(x, \tau)) d\tau \\
&= \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} [\varphi(u_1(x, \tau)) - \varphi(u_2(x, \tau))] d\tau \\
&= \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} c_1[u_1(x, \tau) - u_2(x, \tau)] d\tau
\end{aligned}$$

$$a_1(x, t) - a_2(x, t) = 0$$

de donde

$$a_1(x, t) = a_2(x, t)$$

en Q_T .

El teorema (2.1) queda demostrado.

Teorema 2.2. Sean las funciones $\psi(x), \mu(t)$ y $\varphi(\xi)$ que satisfacen las condiciones (2.5) y (2.6) respectivamente y $\{a(x, t), u(x, t)\}$ soluciones del problema (2.1)-(2.4). Entonces las funciones $a, u \in C^1[Q_T]$, y

$$a_t(x, t) > 0, \quad u_t(x, t) > 0; \quad (x, t) \in Q_{T^0} \quad (2.15)$$

$$a_x(x, t) < 0, \quad u_x(x, t) < 0; \quad (x, t) \in Q_{T^0} \quad (2.16)$$

Donde $Q_{T^0} = \{(x, t), 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$.

Demostración. Ya que las funciones $a(x, t), u(x, t)$ son una solución de (2.1)-(2.4), entonces las derivadas u_x, a_t existen y son continuas en Q_T .

Mostremos, que en el conjunto Q_T existe la derivada continua $u_t(x, t)$.

La función $u(x, t + \Delta t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} u(x, t + \Delta t) = & \mu(t + \Delta t) + \beta e^{-\gamma(t+\Delta t)} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\ & + \gamma \beta \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t+\Delta t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t + \Delta t)) d\xi \end{aligned} \quad (2.17)$$

Representado por

$$\bar{\omega}(x, t, \Delta t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}.$$

Restando (2.9) de (2.17) y dividiendo por Δt , obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(x, t, \Delta t) = & [\mu(t + \Delta t) + \beta e^{-\gamma(t+\Delta t)} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\ & + \gamma \beta \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t+\Delta t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \\ & \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t + \Delta t)) d\xi - \mu(t) - \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \\ & - \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\ & + \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi] / \Delta t. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^{b+c} f dx = \int_0^b f dx + \int_b^{b+c} f dx, \quad \text{entonces } \int_0^b f dx = \int_0^{b+c} f dx - \int_b^{b+c} f dx,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x, t, \Delta t) = & [\mu(t + \Delta t) + \beta e^{-\gamma(t+\Delta t)} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\ & \gamma\beta \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t+\Delta t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi - \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t + \Delta t)) d\xi - \\ & \mu(t) - \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \gamma\beta \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\ & + \gamma\beta \int_0^x \int_t^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi + \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi] / \Delta t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x, t, \Delta t) = & \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\ & + \gamma\beta \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t-\tau)} - e^{-\gamma(t-\tau)}}{\Delta t} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\ & - \beta \int_0^x \frac{[\varphi(u(\xi, t + \Delta t)) - \varphi(u(\xi, t))]}{\Delta t} d\xi + \\ & + \frac{\gamma\beta}{\Delta t} \int_0^x \int_t^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi.\end{aligned}$$

Introduciendo las funciones

$$P(x, t, \Delta t) = \int_0^1 \varphi'[u(x, t) + \theta(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))] d\theta, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}Q_1(x, t, \Delta t) = & \gamma\beta \frac{e^{-\gamma\Delta t} - 1}{\Delta t} \int_0^x \int_0^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi \\ & + \frac{\gamma\beta}{\Delta t} \int_0^x \int_t^{t+\Delta t} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi.\end{aligned} \quad (2.19)$$

Y si $m = u(x, t) + \theta(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))$, entonces la diferencial de m respecto a θ es

$$dm = (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) d\theta$$

luego,

$$\frac{dm}{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)} = d\theta, \text{ de donde}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'[u(x, t) + \theta(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))] d\theta &= \frac{1}{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)} \int_{u(x, t)}^{u(x, t + \Delta t)} \varphi'(m) dm \\ &= \frac{1}{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)} \varphi(m) \Big|_{u(x, t)}^{u(x, t + \Delta t)} \\ &= \frac{\varphi(u(x, t + \Delta t)) - \varphi(u(x, t))}{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}, \end{aligned}$$

de lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} P(x, t, \Delta t) &= \int_0^1 \varphi'[u(x, t) + \theta(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))] d\theta \\ &= \frac{\varphi(u(x, t + \Delta t)) - \varphi(u(x, t))}{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)} \end{aligned}$$

Ahora obtenemos la siguiente ecuación para $\bar{\omega}(x, t, \Delta t)$.

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(x, t, \Delta t) &= \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t + \Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\ &\quad - \beta \int_0^x \frac{[\varphi(u(\xi, t + \Delta t)) - \varphi(u(\xi, t))]}{\Delta t} d\xi + Q_1(x, t, \Delta t) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(x, t, \Delta t) &= \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t + \Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\ &\quad - \beta \int_0^x \frac{[\varphi(u(\xi, t + \Delta t)) - \varphi(u(\xi, t))]}{\Delta t} \cdot \frac{(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))}{(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))} d\xi \\ &\quad + Q_1(x, t, \Delta t), \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x, t, \Delta t) &= \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\ &\quad - \beta \int_0^x \frac{[\varphi(u(\xi, t + \Delta t)) - \varphi(u(\xi, t))]}{(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))} \cdot \frac{(u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t))}{\Delta t} d\xi \\ &\quad + Q_1(x, t, \Delta t),\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x, t, \Delta t) &= \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi \\ &\quad - \beta \int_0^x P(\xi, t, \Delta t) \bar{\omega}(\xi, t, \Delta t) d\xi + Q_1(x, t, \Delta t)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Observemos que (2.20), es una ecuación integral de segunda clase de Volterra, respecto a la función $\bar{\omega}(x, t, \Delta t)$.

Tomando a $f(x, t) = \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + Q_1(x, t, \Delta t)$, y el núcleo $K(x, t, \Delta t) = -\beta P(\xi, t, \Delta t)$; entonces, la solución de la ecuación integral (2.20) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(x, t, \Delta t) &= \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} + \beta g(t, \Delta t) \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \\ &\quad + Q_1(x, t, \Delta t) + \int_0^x \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} R(x, \xi, t, \Delta t) d\xi + \\ &\quad + \beta g(t, \Delta t) \int_0^x R(x, \xi, t, \Delta t) \int_0^\xi \psi(\theta) d\theta d\xi + \\ &\quad + \int_0^x R(x, \xi, t, \Delta t) \cdot Q_1(\xi, t, \Delta t) d\xi,\end{aligned}\tag{2.21}$$

donde $g(t, \Delta t) = \frac{e^{-\gamma(t+\Delta t)} - e^{-\gamma t}}{\Delta t}$, $R(x, \xi, t, \Delta t)$ es la resolvente del núcleo

$$K(x, \xi, t, \Delta t) = -\beta P(\xi, t, \Delta t) \quad (2.22)$$

Como $K(x, \xi, t, \Delta t)$ es una función continua respecto a todos sus argumentos, entonces la función $R(x, \xi, t, \Delta t)$ es continua respecto a todos sus argumentos. Pasando al límite en la parte derecha de (2.21), para $\Delta t \rightarrow 0$ y teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(x, \xi, t, \Delta t) &= R(x, \xi, t, 0); \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} g(t, \Delta t) &= -\gamma e^{-\gamma t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Q_1(\xi, t, \Delta t) &= Q_1(\xi, t, 0) \\ &= \gamma^2 \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi(u(\xi, \tau)) d\tau d\xi + \gamma \beta \int_0^x \varphi(u(\xi, t)) d\xi \end{aligned}$$

Obtenemos, que existe la derivada:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \mu'(t) - \gamma \beta e^{-\gamma t} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + Q_1(x, t, 0) + \mu'(t) \int_0^x R(x, \xi, t, 0) d\xi - \\ &\quad - \gamma \beta e^{-\gamma t} \int_0^x R(x, \xi, t, 0) \int_0^\xi \psi(\theta) d\theta d\xi + \\ &\quad + \int_0^x R(x, \xi, t, 0) \cdot Q_1(\xi, t, 0) d\xi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

La continuidad de la función $u_t(x, t)$ en Q_T se desprende de ésta representación.

La existencia y continuidad de la función $a_x(x, t)$ en Q_T se desprende de la continuidad de $u_x(x, t)$ en Q_T y de la representación (2.8), por lo tanto $a, u \in C^1[Q_T]$.

Demostremos ahora las desigualdades (2.15) y (2.16).

Observación 2.1. *Para demostrar la siguiente propiedad del problema directo tomemos a $\psi(x) = 0$. Considerando de nuevo el problema inicial de contorno*

$$\nu u_x + a_t = 0 \quad (2.24)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a] \quad (2.25)$$

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (2.26)$$

$$a(x, 0) = \psi(x) = 0 \quad (2.27)$$

Como $a, u \in C^1[Q_T]$, entonces de (2.24)-(2.25) se desprende que en Q_T existen las derivadas continuas $a_{tt}(x, t), u_{xt}(x, t)$.

Ya que de (2.25), $a_{tt} = \gamma\varphi'(u)u_t - a_t$ consideremos las funciones

$$q(x, t) = u_t(x, t), z(x, t) = a_t(x, t);$$

observemos que éstas funciones son soluciones del siguiente problema:

$$q_x + \frac{z_t}{\nu} = 0 \quad (2.28)$$

$$z_t = \gamma[\varphi'(u)q - z] \quad (2.29)$$

$$q(0, t) = \mu'(t) \quad (2.30)$$

$$z(x, 0) = 0 \quad (2.31)$$

Multiplicando ecuación (2.29) por el factor integrante $e^{\gamma t}$ e integrando y aplicando luego la condición (2.31) obtenemos:

$$z(x, t) = \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi'(u(x, \tau)) q(x, \tau) d\tau \quad (2.32)$$

De (2.28), (2.29) y (2.32) tenemos:

$$q_x(x, t) + \beta \varphi'(u(x, t))q(x, t) = \beta \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi'(u(x, \tau))q(x, \tau) d\tau.$$

Multiplicando ésta ecuación por $e^{\beta \int_0^x \varphi'(u(s, t)) ds}$ para integrar con la condición (2.30) y cambiando el orden de integración, obtenemos la siguiente ecuación de Volterra de segundo orden:

$$q(x, t) = \mu'(t) e^{-\beta \int_0^x \varphi'(u(s, t)) ds} + \gamma \beta \int_0^x \int_0^t e^{-\beta \int_\xi^x \varphi'(u(s, t)) ds} e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi'(u(\xi, \tau)) q(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (2.33)$$

La solución de ésta ecuación puede ser escrita en forma explícita con la ayuda de la resolvente $R(x, t, \xi, \tau)$ de la ecuación (2.33)

$$q(x, t) = f(x, t) + \gamma \beta \int_0^x \int_0^t R(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (2.34)$$

donde $f(x, t) = \mu'(t) e^{-\beta \int_0^x \varphi'(u(s, t)) ds}$.

Ya que el núcleo de (2.33) $e^{-\beta \int_\xi^x \varphi'(u(s, t)) ds - \gamma(t-\tau)} \varphi'(u(\xi, \tau))$ es positivo, entonces para $0 \leq \xi \leq x \leq l$, y para $0 \leq \tau \leq t \leq T$, $R(x, t, \xi, \tau)$ es positivo en la ecuación (2.34).

Entonces, teniendo en cuenta que $f(x, t) > 0$ para $0 < x \leq l, 0 < t \leq T$ de la ecuación (2.34) tenemos que $q(x, t) > 0$ para $0 < x \leq l, 0 < t \leq T$ por consiguiente la desigualdad (2.15) $u_t(x, t) > 0$ $a_t(x, t) > 0$ queda demostrada.

La desigualdad (2.16) se demuestra de manera semejante.

Consideremos las funciones $q(x, t) = u_x(x, t), z(x, t) = a_x(x, t)$; las cuales son soluciones del siguiente problema:

$$q_x + \frac{z_t}{\nu} = 0 \quad (2.35)$$

$$z_t = \gamma[\varphi'(u)q - z] \quad (2.36)$$

$$q(0, t) = 0 \quad (2.37)$$

$$z(x, 0) = \psi'(x) \quad (2.38)$$

De la ecuación (2.1) tenemos que $u_x(x, t) + \frac{a_t(x, t)}{\nu} = 0$ luego, $u_x(x, t) = -\frac{a_t(x, t)}{\nu}$ pero por la desigualdad (2.15) tenemos que $a_t(x, t) > 0$ y como $\nu > 0$ entonces $\frac{a_t(x, t)}{\nu} > 0$ luego $u_x(x, t) < 0$.

Resolviendo ecuación (2.36) con la condición (2.38) tenemos:

$$z(x, t) = \psi'(x)e^{-\gamma t} + \gamma \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \varphi'(u(x, \tau))q(x, \tau) d\tau \quad (2.39)$$

Multiplicando ecuación (2.35) por el factor integrante $e^{\beta \int_0^x \varphi'(u(s, t)) ds}$ e integrando con la condición (2.37) y cambiando el orden de integración obtenemos:

$$q(x, t) = \beta \int_0^x e^{\beta \int_x^\xi \varphi'(u(s, t)) ds} z(\xi, t) d\xi \quad (2.40)$$

Como $\beta > 0$, $e^{\beta \int_x^\xi \varphi'(u(s, t)) ds} > 0$, $x > 0$. Si $z(\xi, t) > 0$, entonces, $\beta \int_0^x e^{\beta \int_x^\xi \varphi'(u(s, t)) ds} z(\xi, t) d\xi > 0$, pero como $q(x, t) < 0$, entonces, $\beta \int_0^x e^{\beta \int_x^\xi \varphi'(u(s, t)) ds} z(\xi, t) d\xi < 0$, luego $z(\xi, t) < 0$.

De donde la desigualdad (2.16) $a_x(x, t) < 0$ $u_x(x, t) < 0$ queda demos-

trada.

El teorema (2.2) queda demostrado

Capítulo 3

Solución numérica del problema directo

Un método universal para la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales es el método de las diferencias finitas o método de las mallas.

Veamos en que consiste: la región de variación continua de los argumentos (por ejemplo (x, t)), se sustituye por un conjunto finito de puntos (nodos), este conjunto lo llamaremos malla o red; ahora en lugar de las funciones de argumento continuo definimos las funciones de argumento discreto definidas en los nodos de la malla y las cuales las llamaremos funciones de malla.

Las derivadas que figuran en la ecuación diferencial se sustituyen (se aproximan) por los respectivos cocientes de diferencias, es decir, combinaciones lineales de valores de la función de malla en varios nodos de la red; así que la ecuación diferencial se transforma en un sistema de ecuaciones en diferencias. Las condiciones iniciales y de contorno se convierten en ecuaciones en

diferencias para la función de malla.

Es natural exigir que el problema de contorno en diferencias obtenido de esta manera tenga solución y que su solución se aproxime (converja) a la solución del problema original, al aumentar el número n de puntos de la malla.

3.1. Mallas y funciones de mallas

Supongamos que la región de variación del argumento de la función $u(x)$ es el segmento $0 \leq x \leq 1$. Dividamos este segmento mediante los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $h > 0$, en N partes de longitud $h = \frac{1}{N}$ cada una.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 0 & - & - & - & l & - & - & - & l & - & - & - & l & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 1 \\
 x_0 & & & & x_1 & & & & x_2 & & & & x_3 & & \dots & & & & x_j
 \end{array}$$

El conjunto $W_h = \{x_i = ih, i = 1, \dots, N-1\}$ se denomina una malla o red de diferencias en $0 < x < 1$. Denotemos por $W'_h = \{x_i = h_i, i = 0, 1, \dots, N\}$; el valor h es la distancia entre dos nodos de W_h , o paso de la malla; el valor $u_i = u(x_i)$ es la función de argumento discreto, o función de malla definida en la red W'_h .

A cualquier función continua $f(x)$ sobre el segmento $[0, l]$ se le hace corresponder la función de malla f_h , haciendo por ejemplo, en algunos casos $(f_h)_i = f(x_i)$, anotemos que existen aproximaciones diferentes.

Veamos algunas fórmulas sencillas para aproximar las derivadas que aparecen en las ecuaciones diferenciales. Denotaremos la derivada f' como Af y la sustituiremos por

$$Af \simeq \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = A_h f_i$$

Esta aproximación recibe el nombre de diferencia hacia adelante. Al escribir Af en esta forma, se admite el error

$$\begin{aligned} A_h f_i - (Af)_i &= e_i \\ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'(x_i) &= e_i \end{aligned}$$

llamado error de aproximación del operador A por el operador en diferencias A_h . Cuando $h \rightarrow 0$ entonces es natural exigir que $e_i \rightarrow 0$.

También podemos hablar de diferencia hacia atrás

$$Af \simeq \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$$

y diferencia central

$$Af \simeq \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

Para evaluar los errores e_i se procede de la siguiente manera. Supóngase que $f \in C^m$, donde $m \geq 2$.

Desarrollemos $f(x)$ en el punto $x = x_i$ en una serie de Taylor,

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x_i - x)/1! + O(x_i - x)^2$$

Por lo tanto

$$f(x) - f(x_i) - f'(x_i)(x_i - x) = O(x_i - x)^2$$

haciendo en la anterior ecuación $x = x_{i+1}$, $h = x_{i+1} - x_i$, tenemos

$$\begin{aligned} f_{i+1} - f_i - f'(x_i)h &= O(h)^2 \\ \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f'(x_i) &= O(h) \end{aligned}$$

por lo tanto si $h \rightarrow 0$ entonces $\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - f' \rightarrow 0$. En este caso se dice que el operador A_h aproxima al operador A con el primer orden.

3.2. Planteamiento de los problemas en diferencias. Aproximación y Convergencia

Cuando resolvemos una ecuación diferencial $Au = -f$, donde A es un operador diferencial, con ciertas condiciones complementarias (bien sea condiciones iniciales o con valores en la frontera) no solo se debe construir el operador en diferencias finitas sino que además es necesario aproximar sobre la red W_h el segundo miembro $f(x)$ y las condiciones complementarias, después de lo cual es posible plantear el problema en diferencias.

Sea $Q_T = \{(x, t); 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$ hagamos una partición del rectángulo Q_T .

El conjunto de nodos

$W'_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih, t_j = j\tau, i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N\}$ es una malla en el rectángulo Q_T .

Definimos la función de red en $W'_{h\tau}$ como:

$$u_i^j = u(x_i, t_j)$$

Consideremos el problema inicial de contorno:

$$\nu u_x + a_t = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.1)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a], \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.4)$$

Aproximemos el problema (3.1)-(3.4) sobre la malla $W'_{h\tau}$; entonces tenemos:

$$u(x_i, t_j) = u_i^j \quad h = x_i - x_{i-1}; \quad k = t_j - t_{j-1}$$

Hagamos una prueba de escritorio, tomemos por ejemplo $N = 3$, $M = 4$ y veamos:

$$\nu \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h} + \gamma[\varphi(u_i^j) - a_i^j] = 0 \quad i = 0, 1, \dots, N-1; j = 0, 1, \dots, M \quad (3.5)$$

$$\frac{a_i^{j+1} - a_i^j}{k} = \gamma[\varphi(u_i^j) - a_i^j] \quad j = 0, 1, \dots, M-1; i = 0, 1, \dots, N \quad (3.6)$$

$$u_0^j = \mu(t_j) \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (3.7)$$

$$a_i^0 = \psi(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (3.8)$$

Para $i = 0, j = 0$

$$\nu \frac{u_1^0 - u_0^0}{h} + \gamma[\varphi(u_0^0) - a_0^0] = 0 \quad \text{entonces,}$$

$$\nu \frac{u_1^0 - 0}{h} + \gamma[\varphi(0) - \psi(0)] = 0 \quad \text{entonces,} \quad u_1^0 = \beta h \psi(0).$$

$$\frac{a_0^1 - a_0^0}{k} = \gamma[\varphi(u_0^0) - a_0^0] \quad \text{entonces,}$$

$$a_0^1 - \psi(0) = -\gamma\psi(0)k \quad \text{entonces,} \quad a_0^1 = \psi(0)[1 - \gamma k]$$

Para $i = 1, j = 0$

$$\nu \frac{u_2^0 - u_1^0}{h} + \gamma[\varphi(u_1^0) - a_1^0] = 0 \quad \text{entonces,}$$

$$\nu \frac{u_2^0 - \beta h \psi(0)}{h} + \gamma[\varphi(\beta h \psi(0)) - \psi(1)] = 0 \quad \text{entonces,}$$

$$u_2^0 - \beta h \psi(0) = \beta h[\psi(1) - \varphi(\beta h \psi(0))] \quad \text{entonces,}$$

$$u_2^0 = \beta h[\psi(1) - \varphi(\beta h \psi(0)) + \psi(0)]$$

$$\frac{a_1^1 - a_1^0}{k} = \gamma[\varphi(u_1^0) - a_1^0] \quad \text{entonces,}$$

$$a_1^1 - \psi(1) = \gamma k[\varphi(\beta h \psi(0)) - \psi(1)] \quad \text{entonces,}$$

$$a_1^1 = \gamma k \varphi(\beta h \psi(0)) + \psi(1)[1 - \gamma k].$$

Para $i = 2, j = 0$

$$\nu \frac{u_3^0 - u_2^0}{h} + \gamma[\varphi(u_2^0) - a_2^0] = 0 \quad \text{entonces,}$$

$$u_3^0 - \beta h[\psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)] = \beta h[\psi(2) - \varphi(\beta h(\psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)))]$$

entonces,

$$u_3^0 = \beta h[\psi(2) - \varphi(\beta h(\psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)) + \psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)]$$

$$\frac{a_2^1 - a_2^0}{k} = \gamma[\varphi(u_2^0) - a_2^0] \quad \text{entonces,}$$

$$a_2^1 - \psi(2) = \gamma k[\varphi(\beta h[\psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)]) - \psi(2)] \quad \text{entonces,}$$

$$a_2^1 = \gamma k[\varphi(\beta h[\psi(1) - \varphi(\beta h\psi(0)) + \psi(0)])] + \psi(2)[1 - \gamma k].$$

De lo anterior vemos que el sistema (3.5)-(3.8) nos permite determinar a_i^j, u_i^j ; a partir del sistema:

$$u_{i+1}^j = \beta h[a_i^j - \varphi(u_i^j)] + u_i^j; \quad i = 1, 2, \dots, N-1, j = 1, 2, \dots, M \quad (3.9)$$

$$a_i^{j+1} = \gamma k[\varphi(u_i^j) - a_i^j] + a_i^j; \quad j = 1, 2, \dots, M-1, i = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

$$u_0^j = \mu^j; \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (3.11)$$

$$a_i^0 = \psi_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.12)$$

Observación 3.1. *No se realizó un estudio sobre la convergencia de la solución aproximada hacia la solución exacta del problema (3.9) ya que está fuera de los objetivos de éste trabajo.*

Capítulo 4

Problema inverso y una solución

4.1. Planteamiento del problema inverso

Una de las principales direcciones de aplicación de los métodos matemáticos cuando se investigan los procesos de absorción es el análisis y la solución de problemas inversos, cuyo objetivo es identificar las características desconocidas del proceso u objeto bajo estudio sobre la base de la información experimental que se tiene.

En este capítulo, se considera el problema inverso el cual consiste en la determinación de la isoterma de absorción a través de los resultados de un experimento dinámico. En calidad de información complementaria para la determinación de la isoterma de absorción se emplea la curva dinámica de salida, esto es, la concentración de la mezcla o sustancia a la salida de la

columna.

El problema inverso se plantea para el modelo matemático de sorción dinámica con cinética de difusión mixta.

Consideremos el problema inicial de contorno:

$$\nu u_x + a_t = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.1)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a], \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.4)$$

Supongamos que la función $\varphi(\xi)$ que aparece en el sistema (4.6)-(4.7) es desconocida; el problema consiste en determinarla a través de la información complementaria sobre la solución del problema.

Sean las constantes ν, γ conocidas y para $x \in [0, l], t \in [0, T]$; se conocen las funciones $\psi(x), \mu(t)$ y

$$g(t) = u(l, t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.5)$$

Se debe determinar las funciones $\varphi(\xi), a(x, t), u(x, t)$, las cuales satisfacen las ecuaciones (4.6)-(4.10).

Uno de los problemas principales que aparece cuando se resuelve el problema inverso que consiste en la determinación de la función $\varphi(\xi)$ que aparece en (4.6)-(4.7) depende de la solución del problema por lo tanto es necesario determinar al mismo tiempo la función $\varphi(\xi)$ y el valor de su argumento.

Un método lo suficientemente difundido para la solución de estos problemas inversos es el método de parametrización de dimensión finita.

4.2. Método de parametrización de dimensión finita para la solución del problema inverso

Suponemos que los coeficientes buscados se representan por cierta función en forma analítica, la cual depende de un conjunto finito de parámetros que deben ser determinados. En este caso por regla general, el problema inverso se convierte en la minimización de cierta función de n variables.

En este párrafo, consideraremos la aplicación de este método para encontrar la solución del problema inverso.

Consideremos el problema inicial de contorno:

$$\nu u_x + a_t = 0, \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.6)$$

$$a_t = \gamma[\varphi(u) - a], \quad 0 < x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \quad (4.7)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.8)$$

$$a(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.9)$$

Donde $Q_T = \{(x, t) : 0 < x \leq l, 0 < t \leq T\}$, ν, γ son constantes positivas, la función $\varphi(\xi)$ es la isoterma de sorción. Las funciones $\psi(x), \mu(t)$ y $\varphi(\xi)$ satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}\mu &\in C^1[0, T], \quad \mu(0) = 0, \quad \mu'(t) > 0, \\ \psi &\in C^1[0, l], \quad \psi'(x) \geq 0,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\varphi \in C^1(-\infty, \infty), \quad \varphi(0) = 0; \quad 0 < \varphi'(\xi) < c_1, \quad \text{para } \xi \in (-\infty, \infty), \quad c_1 = \text{const.}\tag{4.11}$$

Supongamos que el vector $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de parámetros numéricos pertenece a W , donde W es un conjunto acotado y cerrado en el espacio euclídeo E^n .

Buscaremos la solución aproximada del problema inverso como la función $\varphi(\xi, c)$ que minimiza la funcional:

$$\phi(c) = \int_0^T [u(l, t; c) - g_\delta(t)]^2 dt$$

sobre el conjunto W^0 .

Para la solución del problema, se puede considerar los métodos del gradiente; así que nosotros calcularemos la derivada de la funcional, siguiendo la metodología expuesta en el libro [6] (Alifanov).

Representemos por $a(x, t; c)$ y $u(x, t; c)$ la solución del problema (4.6)-(4.9), correspondiente al conjunto de parámetros $(\nu, \gamma, \psi(x), \mu(t), \varphi(\xi, c))$, así que escribiremos (4.6)-(4.9) de la siguiente forma y lo llamaremos problema (I):

$$\nu u_x(x, t; c) + a_t(x, t; c) = 0; \quad 0 < x \leq l, 0 < t \leq T, \quad (4.12)$$

$$a_t(x, t; c) = \gamma[\varphi(u(x, t; c)) - a(x, t; c)]; \quad 0 < x \leq l, 0 < t \leq T, \quad (4.13)$$

$$u(0, t; c) = \mu(t) \quad 0 < t \leq T, \quad (4.14)$$

$$a(x, 0; c) = 0 \quad 0 < x \leq l, \quad (4.15)$$

De la misma manera denotemos por $a(x, t; c + \Delta c)$ y $u(x, t; c + \Delta c)$ las soluciones del mismo problema pero ahora correspondiente al conjunto de parámetros $(\nu, \gamma, \psi(x), \mu(t), \varphi(\xi, c + \Delta c))$. Llamemos a este problema (II)

$$\nu u_x(x, t; c + \Delta c) + a_t(x, t; c + \Delta c) = 0; \quad 0 < x \leq l, 0 < t \leq T,$$

$$a_t(x, t; c + \Delta c) = \gamma[\varphi(u(x, t; c + \Delta c)) - a(x, t; c + \Delta c)]; \quad 0 < x \leq l, 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t; c + \Delta c) = \mu(t) \quad 0 < t \leq T,$$

$$a(x, 0; c + \Delta c) = 0 \quad 0 < x \leq l,$$

Introduciendo las funciones:

$$q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) = u(x, t; \tilde{c} + \Delta c) - u(x, t; \tilde{c})$$

$$z(x, t; \tilde{c}, \Delta c) = a(x, t; \tilde{c} + \Delta c) - a(x, t; \tilde{c})$$

El incremento de la función $\phi(c)$ es igual a

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{c} + \Delta c) - \phi(\tilde{c}) &= \int_0^T [u(l, t; \tilde{c} + \Delta c) - g_\delta(t)]^2 dt - \int_0^T [u(l, t; \tilde{c}) - g_\delta(t)]^2 dt \\ &= 2 \int_0^T [u(l, t; \tilde{c}) - g_\delta(t)][u(l, t; \tilde{c} + \Delta c) - u(l, t; \tilde{c})] dt \\ &\quad + \int_0^T [u(l, t; \tilde{c} + \Delta c) - u(l, t; \tilde{c})]^2 dt \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^T [u(l, t; \tilde{c}) - g_\delta(t)] q(l, t; \tilde{c}, \Delta c) dt + \int_0^T [q(l, t; \tilde{c}, \Delta c)]^2 dt \quad (4.16)$$

Las funciones $q(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ y $z(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$, son soluciones del siguiente problema:

$$\nu q_x(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + z_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) = 0; \quad (4.17)$$

$$z_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) = \gamma[\varphi(u(x, t; \tilde{c} + \Delta c), \tilde{c} + \Delta c) - \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}) - z(x, t; \tilde{c}, \Delta c)]; \quad (4.18)$$

$$q(0, t; \tilde{c}, \Delta c) = 0; \quad (4.19)$$

$$z(x, 0; \tilde{c}, \Delta c) = 0; \quad (4.20)$$

El problema (4.17)-(4.20) se obtiene simplemente restando el problema (I) del problema (II).

Consideremos la diferencia

$$\begin{aligned} \varphi(u(x, t; \tilde{c} + \Delta c), \tilde{c} + \Delta c) - \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}) &= \varphi(u(x, t; \tilde{c} + \Delta c), \tilde{c} + \Delta c) - \\ &- \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c) + \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c). \end{aligned}$$

Donde

$$\alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) = \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c} + \Delta c) - \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}).$$

Empleando la fórmula de Taylor, obtenemos la siguiente representación para la diferencia

$$\begin{aligned} \varphi(u(x, t; \tilde{c} + \Delta c), \tilde{c} + \Delta c) - \varphi(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}) &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(u(x, t; \tilde{c}), \tilde{c}) q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \\ &+ \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + L(x, t; \tilde{c}, \Delta c), \end{aligned}$$

donde $R(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ es una función de términos de orden superior respecto a $q(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ y Δc .

Por consiguiente el problema para las funciones $q(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ y $z(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ puede ser escrito así:

$$\nu q_x + \gamma \varphi_\xi q + \gamma \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \gamma L - \gamma z = 0 \quad (4.21)$$

$$z_t = \gamma \varphi_\xi q + \gamma \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + \gamma L - \gamma z \quad (4.22)$$

$$q(0, t; \tilde{c}, \Delta c) = 0 \quad (4.23)$$

$$z(x, 0; \tilde{c}, \Delta c) = 0 \quad (4.24)$$

Transformemos la integral

$$J = 2 \int_0^T [u(l, t; \tilde{c}) - g_\delta(t)] q(l, t; \tilde{c}, \Delta c) dt$$

que aparece en (4.16)

De las condiciones (4.23) y (4.24) e introduciendo las funciones $w(x, t; \tilde{c})$ y $y(x, t; \tilde{c})$ que más adelante serán definidas escribiremos a J como:

$$\begin{aligned} J &= \nu \int_0^T [w(l, t; \tilde{c}) q(l, t; \tilde{c}, \Delta c) - w(0, t; \tilde{c}) q(0, t; \tilde{c}, \Delta c)] dt \\ &\quad + \int_0^l [y(x, T; \tilde{c}) z(x, T; \tilde{c}, \Delta c) - y(x, 0; \tilde{c}) z(x, 0; \tilde{c}, \Delta c)] dx \\ &= \int_0^T \int_0^l \{ \nu [w(x, t; \tilde{c}) q_x(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + q(x, t; \tilde{c}, \Delta c) w_x(x, t; \tilde{c})] \\ &\quad + y(x, t; \tilde{c}) z_t(x, t; \tilde{c}, \Delta c) + z(x, t; \tilde{c}, \Delta c) y_t(x, t; \tilde{c}) \} dx dt \end{aligned}$$

Ahora, si introducimos el siguiente problema para w, y :

$$\nu u_x = \gamma \varphi_\xi(w - y) \quad (4.25)$$

$$y_t = \gamma(y - w) \quad (4.26)$$

$$w(l, t, \tilde{c}) = \frac{2}{\nu}(u(l, t; \tilde{c}) - g_\delta(t)) \quad (4.27)$$

$$y(x, T, \tilde{c}) = 0 \quad (4.28)$$

Llamado problema dual de (4.6)-(4.9), ya que las funciones $q(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$, $z(x, t; \tilde{c}, \Delta c)$ y $w(x, t, \tilde{c})$, $y(x, t; \tilde{c})$ satisfacen las ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.21), (4.22) entonces, tenemos que la funcional J se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J &= \gamma \int_0^T \int_0^l (y(x, t; \tilde{c}) - w(x, t; \tilde{c})) \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) dx dt + \\ &+ \gamma \int_0^T \int_0^l (y(x, t; \tilde{c}) - w(x, t; \tilde{c})) L(x, t; \tilde{c}, \Delta c) dx dt. \end{aligned}$$

Por consiguiente de (4.16) tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{c} + \Delta c) - \phi(\tilde{c}) &= \gamma \int_0^T \int_0^l (y(x, t; \tilde{c}) - w(x, t; \tilde{c})) \alpha(x, t; \tilde{c}, \Delta c) dx dt \\ &+ \gamma \int_0^T \int_0^l (y(x, t; \tilde{c}) - w(x, t; \tilde{c})) L(x, t; \tilde{c}, \Delta c) dx dt \\ &+ \int_0^T (q(l, t; \tilde{c}, \Delta c))^2 dt \end{aligned}$$

De esta representación concluimos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial c_i}(\tilde{c}) = \gamma \int_0^T \int_0^l \frac{\partial \varphi}{\partial c_i}(u(x, t; \tilde{c}); \tilde{c})(y(x, t; \tilde{c}) - w(x, t; \tilde{c})) dx dt,$$

cuando $\Delta c \rightarrow 0$.

La fórmula obtenida para el gradiente de la función $\phi(c)$ puede ser empleada cuando usemos un método de aproximación de descenso exhaustivo; por ejemplo el método de la proyección del gradiente u otros.

Existen diferentes métodos de solución para este tipo de problemas, en el presente trabajo no se implementó ningún método numérico, pero para trabajos futuros sería bueno tenerlos en cuenta.

Referencias bibliográficas

1. ANGER G. Inverse Problems in Differential Equations. Akademie-Verlag, Berlin, 1990, Plenum Press.
2. DENISOV A. M., LAMOS H. “An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics.” J. Inv. ill-posed problems (1996).
3. LAMOS H. “Numerical solution of the inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics.” Inverse and Ill-Posed Problems Abstracts of International conference dedicated to the memory of academician A. N. Tikhonov). Moscow, (1996).
4. LUKSHIN A. V. “Sobre un modelo de sorción dinámica” (en ruso). Dokl A.N. URSS, 1973.
5. TÍJONOV A., SAMARSKYA. Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, Moscú, 1972.
6. ALIFANOV O. M., ARTYUKHIN E. A., RUMYANTSEU S. V. “Extreme Methods for solving Ill-Posed Problems with Applications to Inverse Heat Transfer Problems.” Copyright © 1995 by begell house, inc., publishers. All rights reserved.
7. ORELLANAH. Y. R. “Solución tipo onda viajera para un modelo matemático de sorción dinámica.” Tesis de maestría en matemáticas, UIS, 1998.

8. MENDOZA S. R. “Un problema inverso para un modelo matemático no lineal en derivadas parciales.” Tesis de maestría en matemáticas, UIS, 1999.