Acercamiento al proceso de demostración en el Grado Noveno en un ambiente de Geometría Dinámica

Sergio Andrés Martínez Aparicio

Trabajo de Grado Presentado para Optar al Título de Magíster en Educación Matemática

Director

Jorge Enrique Fiallo Leal

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2020

Dedicatoria

A Cecilia López, ayuda idónea dada por Dios para iluminar mi camino, encauzar mis proyectos y rodear de amor y sueños mi vida. Por darme la mayor alegría y motivación: “Mi hijo(a),” a quien también dedico este logro.

Agradecimientos

En este apartado, quiero agradecer a todas las personas que han sido parte de tan importante proyecto en mi vida, sin lugar a duda, sin su participación no hubiese sido posible su exitosa culminación.

A Dios, por su fidelidad, renovar mis fuerzas e infundir su aliento y gracia día tras día.

A mi esposa, por su obstinada insistencia y motivación en la ejecución de este sueño y su apoyo incondicional.

A mi familia, por ser motivo de mi superación y crecimiento.

A mi director Dr. Jorge Enrique Fiallo Leal, por su comprensión, por siempre estar dispuesto a compartir su amplio conocimiento y experiencia con fruición, por sus orientaciones, observaciones e instrucción en la ejecución de esta investigación, por disponer de su valioso tiempo en la revisión de mis escritos y dar siempre su cardinal dirección.

A los docentes de la maestría, por tan valiosos aportes, por su inmensa paciencia, por guiarme y compartirme sus saberes y experiencia.

A los estudiantes del grado noveno del Instituto Técnico Aquileo Parra que participaron en esta investigación, por su disposición, entusiasmo y cooperación.

A mis compañeros de Maestría, por los momentos compartidos y por luchar a la par por cumplir esta meta profesional.

A todas aquellas personas que han creído en mí y me han apoyado con su amistad, consejo y motivación.

Contenido

Lista de Figuras

LISTA DE TABLAS

Resumen

TÍTULO: ACERCAMIENTO AL PROCESO DE DEMOSTRACIÓN EN EL GRADO NOVENO EN UN AMBIENTE DE GEOMETRÍA DINÁMICA *

AUTOR: Sergio Andrés Martínez Aparicio **

PALABRAS CLAVE: Proceso de demostración, Geometría dinámica, Argumentación, Resolución de Problemas.

DESCRIPCIÓN

El estudio que se realizó tuvo como objetivo diseñar e implementar una secuencia de problemas de construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica, enfocándola al desarrollo de habilidades de demostración en estudiantes de noveno grado. La metodología empleada fue cualitativa por cuanto fue un estudio elaborado directamente en un aula virtual de clase, en el que se analizaron y categorizaron los argumentos que usaron los estudiantes de noveno grado al realizar problemas de construcciones geométricas un ambiente de geometría dinámica mediado por el software GeoGebra. El estudio se llevó a cabo con 10 estudiantes del Instituto Técnico Aquileo Parra, ubicado en el municipio de Barichara. El desarrollo de esta investigación se dio en tres fases: la fase diagnostica, la fase de diseño e implementación de la propuesta didáctica y la fase referente al procesamiento de la información recolectada.

En cada una de las fases del diseño se pudo evidenciar tanto fortalezas como debilidades de los estudiantes al tener que justificar sus planteamientos en la fase diagnóstica inicial, construcciones correctas en la que no se justificaba el porqué estaba bien o con argumentos que hacían referencia a la función de arrastre del software. Se evidenció la importancia del papel que desempeña el software como mediador interactivo e inteligente, puesto que permite una exploración de propiedades invariantes que redunda en el desarrollo del pensamiento deductivo.

Finalmente se concluyó que es posible potenciar el desarrollo de las habilidades de demostración en estudiantes de noveno grado, cuando solucionan problemas de construcción geométrica en un software de geometría dinámica.

* Trabajo de grado
** Facultad de Ciencias Exactas. Escuela de Matemáticas. Director: Jorge Enrique Fiallo Leal. Doctor en Didáctica de las Matemáticas.

Abstract

TITLE: APPROACH TO THE DEMONSTRATION PROCESS IN THE NINTH GRADE IN AN ENVIRONMENT OF DYNAMIC GEOMETRY *

AUTHOR: Sergio Andrés Martínez Aparicio **

KEY WORDS: Demonstration process, Dynamic geometry, Argumentation, Problem Solving.

DESCRIPTION

The objective of this study is to design and implement a sequence of geometric construction problems in a dynamic geometry environment, focusing it on the development of demonstration skills in ninth grade students. The methodology is qualitative in that it is a study done directly in a virtual classroom, it is intended to analyze and categorize the arguments used by ninth grade students when carrying out geometric construction problems in a dynamic geometry environment mediated by GeoGebra software. The study is carried out with 10 students from the Aquileo Parra Technical Institute, located in the municipality of Barichara. The project is developed through the diagnostic phase, the design phase and the implementation of the didactic proposal and the phase related to the processing of the collected information.

In each of the design phases, it was possible to show both strengths and weaknesses of the students by having to justify their approaches in the initial diagnostic phase, correct constructions in which the reason why it was right was not justified or with the arguments that had reference to the drag function of the software. You can see the importance of the role that software plays as an interactive and intelligent mediator, since it allows an exploration of invariant properties those results in the development of deductive thinking.

Finally, concluded that it is possible to enhance the development of demonstration skills in ninth grade students, when solving geometric construction problems in dynamic geometry software.

* Graduation paper
** Faculty of Exact Sciences. School of Mathematics. Jorge Enrique Fiallo Leal. PhD in Didactics of Mathematics

Introducción

Mediante este estudio se buscó potenciar las habilidades del proceso de demostración en los estudiantes de noveno grado, mediante la resolución de problemas de construcción en un entorno de geometría dinámica.

El desarrollo del estudio se llevó a cabo mediante un enfoque cualitativo, con el fin de analizar y categorizar los argumentos que usan los estudiantes de noveno grado al realizar problemas de construcciones geométricas en un ambiente de geometría dinámica mediado por el software GeoGebra.

Su desarrollo comprendió de tres etapas, la primera es la fase diagnostica la cual comprende el diseño de la prueba mediante el cual se adaptaron cuatro problemas de construcciones geométricas del proyecto "pensamiento geométrico y tecnologías computacionales" para determinar los argumentos usados por los estudiantes al solucionarlos usando GeoGebra. En la segunda fase se diseñó e implementó la propuesta didáctica, la cual se realizó mediante una intervención didáctica y comprendió una serie de problemas de construcción geométrica del proyecto "pensamiento geométrico y tecnologías computacionales" adaptados para evidenciar los argumentos de los estudiantes al solucionarlos usando GeoGebra, pero manteniendo la forma de validación del arrastre. Y la tercera fase consistió en analizar la información recolectada.

Los resultados de la investigación se presentan en cinco capítulos; en el primer capítulo se presentan los principales antecedentes del estudio, el segundo capítulo está compuesto por el marco teórico en el cual se presentan temas como la enseñanza y aprendizaje de la geometría, la demostración en geometría y la geometría dinámica. En el tercer capítulo se presenta la problemática y el objetivo que se propone para el desarrollo del estudio. El cuarto capítulo hace referencia a la metodología mediante el cual se especifica el método de investigación, contexto, población en estudio, diseño metodológico y los instrumentos que se utilizaron para la recolección de información. El quinto y último capítulo comprende las conclusiones, las cuales hacen referencia a los principales resultados y hallazgos obtenidos.

1. Antecedentes

Algunas investigaciones sobre el tema de estudio, en la literatura científica son las siguientes:

"La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticos", investigación desarrollada por Arellano (2013), el objetivo del estudio es analizar y comparar el discurso argumentativo que realizan los estudiantes para la justificación de los procedimientos y de los resultados al resolver problemas de geometría, y categorizar los tipos de argumentos producidos.

Como problemática que da origen a la investigación se menciona que la experiencia de trabajar con estudiantes de bachillerato, el tema de resolución de problemas ha permitido observar que son una minoría de los educandos que argumentan coherentemente y con sentido lógico, mostrando conocimientos y habilidades comunicativas (simbólicas y verbales); y que la mayoría que fracasan en esto es porque no han tenido acercamientos dirigidos hacia la argumentación.

Metodológicamente la investigación constituye un estudio de caso, en donde participaron estudiantes de bachillerato; las argumentaciones de los estudiantes, su análisis y categorización se realizaron con los esquemas de prueba de (Harel & Sowder, 1998).

Los resultados reportan que la mayoría de los estudiantes esperan la aprobación del docente ante cada procedimiento que hacen y perciben los problemas como algo para resolver y no para justificar; se considera importante valorar los esfuerzos argumentativos de los estudiantes porque reflejan ese trabajo hacia el ir formalizando y mejorando los razonamientos.

Otro estudio relacionado con la enseñanza de la demostración se titula "procesos de prueba en los alumnos de matemática", el cual fue desarrollado por Balacheff (2000) este autor señala como problemática diferentes estudios procedentes de Francia y Estados Unidos en donde se constata un fracaso generalizado de los estudiantes para formular una demostración, particularmente en geometría.

Este fracaso se les imputa a los estudiantes o al tipo de enseñanza que se imparte; señalando en los primeros, su debilidad y falta de madurez del razonamiento lógico; lo cual exige delimitar la naturaleza de los problemas encontrados; mientras que, para el tipo de enseñanza, hay que revisar los métodos utilizados y los elementos coercitivos en los cuales se quiere imponer la demostración como tarea escolar.

Balacheff (2000) considera que no se debe obligar al estudiante a demostrar como algo coercitivo; más bien propone al docente ubicarse en el terreno mismo de la evidencia, partiendo de los argumentos que da el estudiante; se trata de conducirlo a una situación paradójica, de duda, en donde él nuevamente pone en tela de juicio sus argumentos iniciales. No se trata de refutar lo que propone el estudiante; sino de hacer que este tome conciencia de que no siempre es posible atenerse a los argumentos de evidencia iniciales.

Dice el autor que la experiencia ha demostrado que los estudiantes manifiestan su conciencia de la necesidad de hacer explícito un procedimiento, pero tienen gran dificultad para comprenderlo como articulación de operaciones elementales.

Este estudio es pertinente para la investigación porque propone una perspectiva interesante, que es no forzar al estudiante a demostrar sino interactuar con él, de modo que ponga en duda sus argumentos iniciales, los cuestione y revise a la luz del razonamiento lógico.

Otro artículo pertinente para este estudio se titula "Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas", propuesta por Fiallo, Camargo, & Gutiérrez (2013), cuyo objetivo radica en realizar una recopilación bibliográfica de las principales investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración, que sirva como fuente de consulta a docentes interesados en el tema.

El artículo menciona que en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM (2000), se considera al razonamiento y la demostración como uno de los cinco estándares de procesos en que los estudiantes deben mostrar competencia, a medida que avanza su ciclo de escolarización. En este sentido, la publicación sugiere que los programas de enseñanza en todos los niveles deben capacitar a los estudiantes para: reconocer el razonamiento y demostración como aspecto esencial en las matemáticas; formular conjeturas matemáticas; desarrollar argumentación y demostraciones; utilizar distintos tipos de razonamiento y de demostración.

La revisión documental realizada se organiza en cinco líneas de trabajo inscritas en perspectivas diferentes: histórica, epistemológica, psicológica, cognitiva, curricular y didáctica; concepciones de los profesores sobre la comprensión y las competencias necesarias en el proceso de demostrar; y sobre la demostración vista como una práctica sociocultural que está condicionada por la comunidad en la que se inscribe metodológicamente.

Dado a que el estudio se relaciona con tres de estas líneas, a continuación, se sintetizan lo concerniente a ellas.

1.1 Enseñanza y aprendizaje de la demostración en el aula de clase

En los últimos años ha crecido el interés por abordar la problemática de la enseñanza del proceso de demostración en el aula, en el campo de la educación matemática. Esto se evidencia al entrar a la revista electrónica sobre la demostración "La lettre de la preuve" editada por Bettina Pedemonte y Maria Alessandra Mariotti - International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof ISSN 1292-8763 se encuentra en la siguiente dirección http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/01Ete.html y ver la cantidad de documentos que abordan el tema.

A nivel nacional se pueden precisar diversos trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el aula, como es el caso de los lineamientos curriculares (MEN, 1998) dados por el Ministerio de Educación Nacional en los que se indica que razonar tiene que ver con formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos, y añade que deben existir situaciones problema que motiven y desencadenen razonamientos hacia la construcción de hipótesis y la intuición de conjeturas, además de incentivar los procesos de verificación y demostración.

En este documento también se señala la importancia de la enseñanza de la geometría cuando dice:

La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación. (MEN, 1998, pág. 17).

Así mismo en el documento titulado "Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales" se señala la importancia de enseñar geometría haciendo referencia un método para presentar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra o el cálculo, o de otras ciencias naturales y sociales (MEN, 2004)

En los estándares curriculares para el área de matemáticas se afirma que "usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, permite avanzar en el camino hacia la demostración" (MEN, 2006, pág. 51).

Junto con el planteamiento de los lineamientos curriculares (MEN, 1998) surgió el proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia, el cual inició en el año 2000 y se extendió hasta el 2004, año en el que fueron publicados sus primeros resultados en el documento Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Con la asesoría del Dr. Luis Moreno Armella, este trabajo tuvo como objetivo principal mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y la capacidad de aprendizaje mediante los recursos expresivos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas colombianas y a su vez consolidar una comunidad de docentes comprometidos con la diseminación de la cultura informática (Castiblanco, 2002). Una de las metodologías usadas por los docentes participantes en las experiencias de aula, fue la resolución de problemas de

Construcciones Geométricas en un ambiente de geometría dinámica con el uso del software Cabri Géometrè.

Entendidas como un dibujo técnico en el que la utilización apropiada de ciertos instrumentos asegura la adecuación del dibujo a determinadas propiedades (MEN, 2004, pág. 17), éstas construcciones obligan al estudiante a usar sus conocimientos teóricos de geometría, para realizar una construcción correcta y al lograrlo le permite explorar y encontrar propiedades que él no había usado, lo cual puede llevarlo a deducir las relaciones de implicación entre las propiedades que él usó y las que luego encontró. Es precisamente este divagar entre lo perceptual y lo teórico el gran potencial de la construcción geométrica como puente hacia el pensamiento deductivo. Dicho en palabras (De Villiers, 1993) citado por el MEN (2004), "el alumno puede descubrir en la construcción propiedades que él no puso allí, lo cual le permite descubrir que hay alguna relación de implicación entre las propiedades que él puso y las que descubrió después" (p. 17).

Es por esto que este trabajo toma relevancia para nuestra investigación, pues al usarse como un campo de exploración y reflexión, la construcción geométrica puede dar paso al pensamiento deductivo, y al poner en evidencia las propiedades geométricas en juego, así como las relaciones de implicación existentes entre ellas, da la posibilidad al estudiante de avanzar en su procesos de argumentación, la cual, entendida como un mecanismo para validar afirmaciones dentro de un contexto, a partir de la formulación de inferencias de carácter deductivo, da pie a la demostración (MEN, 2004; p. 18).

Conjuntamente con estos trabajos, y movidos por el interés compartido de reestablecer la enseñanza de la demostración en el aula de clase, se han realizado algunas investigaciones con distintos enfoques, entre las que cabe resaltar:

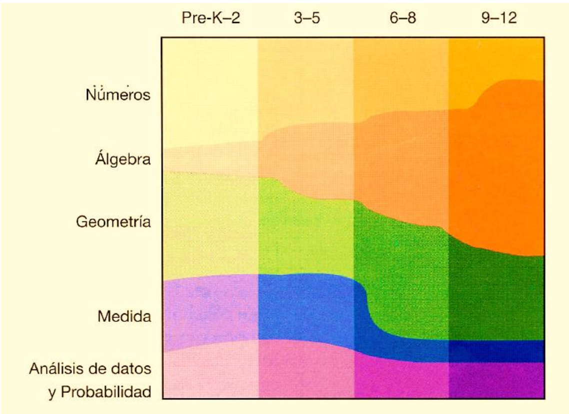
Fiallo (2006), en esta investigación se plantea una unidad de enseñanza que pretende acercar a los estudiantes de 10° de tres instituciones de Santander, Colombia al estudio de la trigonometría y la demostración, usando como mediador un software de geometría dinámica; analizar los tipos de demostración que emergen al usar este software en la demostración de propiedades trigonométricas, así como los procedimientos, las estrategias de razonamiento, errores y dificultades de los estudiantes al desarrollar las actividades de la unidad de enseñanza. Para realizar este análisis se usó la estructura planteada por Marrades y Gutiérrez (2000) que permite analizar las conjeturas y demostraciones producidas por estudiantes de secundaria, la cual contempla dos tipos de demostraciones, empíricas y deductivas y seis subclases las cuales ampliaremos en el marco teórico.

Por otra parte, Fiallo (2011) realiza un análisis de la distancia cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de conceptos y propiedades de las razones trigonométricas usando como apoyo un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), teniendo en cuenta las demostraciones inductivas o empíricas de estudiantes de décimo grado de una institución privada de Bucaramanga. En esta investigación se define la demostración como “el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (Fiallo, 2011, p. 85). Es preciso mencionar que esta será la concepción de demostración que se tendrá en cuenta en nuestra investigación.

A pesar de las discrepancias de los diferentes investigadores sobre la definición de demostración y su papel en el proceso de enseñanza, este proceso permea el quehacer matemático pues es un recurso vigente de validación, de comunicación y de ampliación del horizonte conceptual del universo matemático (Camargo, 2010). Sin embargo, la dificultad de su enseñanza y por ende su aprendizaje, ha promovido la realización de diversas investigaciones. Al realizar una mirada en el ámbito internacional se encuentra que para el Consejo Nacional de Profesionales de Matemáticas de los estados Unidos NTCM (2003), la geometría es el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, culminando en la enseñanza secundaria con el trabajo con demostraciones.

Figura 1

Intervención de los diferentes estándares a través de los diferentes grados (NCTM, 2000; p. 32)



En la figura 1, se observa que la geometría debe estar presente durante todo el proceso de formación de cada estudiante, con un nivel de atención similar en todos los niveles de escolaridad.

*"*Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real; por eso, la Geometría debería integrase, cuando sea posible, con otras áreas*"* (NCTM, 2003, p. 45).

Respecto a la Geometría dinámica, se tienen en cuenta estudios tales como "Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la geometría dinámica" (Sua, 2019) mediante el cual se muestra que un conjunto de conocimientos de un individuo y su grado de instrumentalización del software no son los únicos aspectos relevantes en el proceso de resolución o en la naturaleza de la respuesta obtenida. Es por ello que la autora demuestra que hay aspectos metacognitivos como el control, la regulación y la evaluación de las acciones ejecutadas se convierten en elementos que pueden llevar a un grupo, con un conocimiento matemático reducido, a obtener mejores resultados que un grupo con un conocimiento profundo de la disciplina. Así mismo, el trabajo grupal y el uso de la geometría dinámica inciden positivamente en el proceso de resolución y favorecen aspectos de orden metacognitivo (Sua, 2019).

Otro estudio se titula Reseña de la Tesis Doctoral "La demostración en ambientes de geometría dinámica: Un estudio con futuros docentes de matemática" (González, 2017), en este escrito las Competencias Didáctico-Matemáticas remiten a los que pudieran ser concebidos como Macro Procesos propios de la dinámica misma de la Matemática como disciplina, asociados con procesos de índole cognitiva que son activados cuando se realiza una tarea matemática; aquí también se incluyen los que tienen que ver con la gestión de los compromisos habituales de todo profesor como planificador, desarrollador, ejecutor, de la Evaluación.

Mediantes esta tesis (González, 2017) considera que es un trabajo que logra; confirmar, validar, ensayar, ratificar, reiterar resultados de investigación; con ello se podría atender a una petición justa que es que la investigación en Educación Matemática llegue al aula de clases.

1.2 Investigaciones sobre las concepciones y dificultades de los estudiantes al aprender a demostrar

En esta línea los autores incluyen aquellas investigaciones cuyo fin es identificar los procesos relacionados con el aprendizaje de la demostración y propenden por establecer las concepciones que los estudiantes tienen de la demostración (Harel & Sowder, 2007), las dificultades que enfrentan al tratar de demostrar y el posible origen de estas dificultades (Mariotti, 2006); (Harel & Sowder, 2007).

Uno de los estudios se titula “Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas” (Lárez, 2014) mediante el cual se hace hincapié en que los encuentros presenciales de trabajo en donde la actividad fundamental sea la demostración geométrica en un ambiente cooperativo y reflexivo, formarán en el estudiante un espíritu crítico que le permitirá reconocer los problemas, superar dificultades, discutir con argumentos, entender mejor su entorno, propiciando el desarrollo de su autonomía y pensamiento liberador.

Concluye que la formación exige del docente un compromiso mayor, debe ser un acompañante constante en el proceso de construcción del conocimiento por parte del estudiante, facilitándole espacios de discusión, argumentación, reflexión, cooperación que le permita adquirir conocimientos tanto teóricos, procedimentales como actitudinales (Lárez, 2014).

También se tiene en cuenta la investigación titulada “Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea” (Morales & Samper, 2015) se basa en la descripción y ejemplificación de dos tipos de dificultades en los estudiantes de un curso de geometría euclídea del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Física, en la Universidad de la Amazonia. Esas dificultades afectan la posibilidad de construir demostraciones.

Para determinar las dificultades, los autores analizaron las producciones escritas y la interacción entre los maestros en formación cuando intentaban producir una demostración. Utilizaron las categorías creadas, definidas y ejemplificadas por el equipo de investigación "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría" de la Universidad Pedagógica Nacional.

Principalmente concluyen que el uso de la geometría dinámica puede incidir en la comprensión de la necesidad de las condiciones establecidas en la hipótesis de un teorema o de un problema para que la tesis se cumpla y sugieren que antes de iniciar el proceso de demostración, el estudiante identifique y dé a conocer a los coequiperos y al profesor, los datos válidos que se infieren de la hipótesis dada en el enunciado (Morales & Samper, 2015).

1.3 Investigaciones sobre propuestas didácticas

La investigación reportada en la literatura científica titulada "Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica", desarrollada por Larios y González (2010), el objetivo es presentar reflexiones sobre la demostración geométrica en el ciclo escolar de nivel medio; los aspectos influyentes en la construcción utilizando el software de geometría dinámica; las representaciones de los objetos geométricos, y las justificaciones que se pueden utilizar.

Se hace énfasis en el significado que se le otorga a la demostración geométrica *y el uso de la herramienta informática*, conocida como software para geometría dinámica (SGD).

Se parte del hecho de que la demostración como medio de validación del conocimiento matemático, tiene un significado bien determinado en la comunidad matemática, el cual no puede ser reproducido tal cual en la escuela, particularmente en el ciclo medio.

Las diferencias entre la concepción de la demostración en la comunidad matemática y las que se maneja en el entorno de aula, permite proponer un significado acorde con el ambiente escolar de demostración, teniendo en cuenta ciertas características específicas del contexto específico.

Las conclusiones apuntan a que se manejan en diferentes niveles cognitivos distintos significados relacionados con la demostración; lo que permite retomar la idea de prácticas institucionales, propuestas por Godino y Batanero (1994), en la cual la demostración se adecúa a los saberes y particularidades del entorno, en su aproximación a la comprensión del objeto. Es necesario hacer mayores esfuerzos para la divulgación sobre el tema, pues persisten serias dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en todos los niveles educativos, pero principalmente en la formación de maestros.

Una investigación centrada en la enseñanza de elementos geométricos se titula “Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas”, fue propuesta por (Gualdrón, 2011), como trabajo de doctorado en matemáticas, en la Universidad de Valencia, España. La investigación surge como un aporte de solución a las serias dificultades que enfrentan los estudiantes cuando tratan de resolver problemas sobre semejanzas de figuras, y ese desconocimiento o la incomprensión del concepto, lleva a que se dificulte el aprendizaje de otros conceptos matemáticos.

Las causas de las deficiencias que presentan los estudiantes de educación básica en el tema de semejanza de figuras geométricas se relacionaron, según el autor, con el modo de cómo se realiza la enseñanza, restringida a la noción intuitiva; presentación de condiciones matemáticas para que exista la semejanza y algunos criterios para establecer semejanzas.

En la línea de hacer aportes desde la investigación para el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y particularmente de la semejanza de figuras planas, se propone que en la enseñanza el profesor debe elegir muy bien los materiales curriculares apropiados; técnicas en enseñanzas pertinentes y comprometerse con una práctica reflexiva y autoformativa; en el aprendizaje se propone que la geometría sea más que definiciones, que sirva para describir relaciones y razonar.

En este sentido se siguen los lineamientos y principios propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), de los Estados Unidos, en el documento "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática"; mediante el cual se busca el mejoramiento sistemático de la educación matemática, en ésta tarea pretende construir el conocimiento geométrico en una estructura que sigue los niveles propuestos por Van Hiele (1957) Van Hiele (1957), que va del pensamiento informal al formal, lógica y accesible por un proceso cognitivo; darle importancia a la visualización como medio para la construcción mental de objetos de dos o tres dimensiones, además de ingresar el conocimiento geométrico con problemáticas significativas que viva el estudiante.

En concordancia con estos criterios, la investigación de Gualdrón (2011), propone una secuencia de enseñanza que sigue la estructura de Van Hiele (1957); que promueve el uso de elementos de visualización; y que permite establecer conexiones con temas relacionados con semejanzas (homotecia, teorema de Thales de Mileto, escalas) lo cual favorece el razonamiento.

Las conclusiones del estudio reportan que los estudiantes tienen distintas maneras de razonar al tratar de resolver el problema, que el uso de las imágenes mentales y habilidades de visualización son componentes importantes de la actividad matemática que desarrolla.

La aplicación de un modelo de enseñanza ajustado a lo que propone el NTCM, de los Estados Unidos, permitió constatar progresos en los estudiantes en el tema de las semejanzas de triángulos; al inicio de la experiencia la mayoría de los estudiantes exhibían razonamiento del primer nivel del Van Hiele y solo unos pocos del segundo nivel; pero después de la intervención, los estudiantes exhibieron razonamiento del segundo nivel y algunos alcanzaron un tercer nivel.

Otro de los antecedentes a tener en cuenta se titula “Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo” (Toro, 2014), en este estudio se propone estudiar la argumentación de estudiantes de grado octavo, al realizar un trabajo en la temática concerniente a sistemas de la geometría dinámica, la metodología que utiliza para su desarrollo es de corte cualitativo, mediante la cual el investigador observa la realidad en el contexto mismo que sucede en el aula de clase. El proyecto se categoriza como experimento de enseñanza, pues se elaboró una propuesta de enseñanza orientada desde la actividad demostrativa que favoreciera la argumentación.

De esta propuesta Toro (2014) principalmente concluye que los estudiantes avanzaron en la capacidad de argumentar matemáticamente y esto no había sido parte de la cultura previamente de clase. Recomienda la importancia de usar metodologías diferentes a las tradicionales que ofrezcan formas alternativas para favorecer un mejor aprendizaje y argumentación, como el uso de la geometría dinámica con el fin de formar estudiantes críticos, reflexivos y transformadores de su propia realidad.

2. Marco teórico

2.1 Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría

La geometría se define como la parte de las matemáticas que se encarga de estudiar las propiedades y medidas de una figura en un plano o en un espacio, para representar distintos aspectos de la realidad, utiliza símbolos las nociones y las operaciones.

Ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural de la persona; por su amplia aplicación en distintos contextos, y por su capacidad para el desarrollo del razonamiento lógico (Báez & Iglesias, 2007), también por su contribución al desarrollo de capacidades y habilidades para visualizar, pensar críticamente; abstraer, resolver problemas; establecer hipótesis y conjeturas; razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba y demostración (Jones, 2002).

Hernández & Villalba (2001), conciben a la geometría como:

- Una ciencia del espacio, como herramienta para describir y medir figuras, construir y estudiar modelos del mundo físico y fenómenos del mundo real.

- Un método, para representar visualmente los conceptos y procesos a través de gráficos, histogramas.

- Un modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.

- Una herramienta en aplicaciones, para generar gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes e investigación de operaciones.

Báez e Ibáñez (2008), señalan seis (6) principios didácticos fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

- Principio globalizador e interdisciplinar, como acercamiento holístico a la realidad.

- Integración del conocimiento, como saber integrado de objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

- Contextualización del conocimiento. Estos son adaptados a las necesidades y características de los estudiantes.

- Aprendizaje por descubrimiento, a través de un proceso cognitivo.

- Principio de flexibilidad de acuerdo a necesidades del estudiante.

- Innovación de estrategias metodológicas, de acuerdo con el ritmo de aprendizaje de los estudiantes.

Por su parte, la enseñanza de la geometría en Colombia ha venido incorporando las herramientas tecnológicas desde el año 2000, con la implementación del proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación básica secundaria y media de Colombia*, dirigido por el Ministerio de Educación Nacional con la asesoría del Dr. Luis Moreno Armella y la coordinación regional de los departamentos de matemáticas de las facultades educación y ciencia de universidades y algunas secretarías de educación. Este proyecto puso en práctica una experiencia tecnológica en el aula de algunas instituciones de educación básica secundarias y media y escuelas normales superiores del país. Sus objetivos generales fueron mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas y la capacidad de aprendizaje mediante los recursos expresivos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas, y consolidar una comunidad de docentes comprometidos con la diseminación de la cultura informática.

Los resultados de esta experiencia fueron publicados en abril de 2004 con el documento Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Conformado por cinco capítulos, el texto hace una reflexión sobre a la importancia de la enseñanza de la geometría en la escuela; da una mirada a la evolución de la de la geometría, mostrando la interacción continua entre lo visual y lo discursivo; hace un análisis del proceso de aprendizaje de la geometría, sus obstáculos y dificultades. En el capítulo 4 se desarrollan algunas ideas sobre los ambientes tecnológicos de aprendizaje, se ejemplifica la forma en que se podría abordar el proceso de enseñanza a través del SGD Cabri Géometrè y se proponen algunas actividades de construcción. Son precisamente algunas de estas actividades las que hemos tomado para nuestra investigación, tanto para la evaluación diagnóstica como para la de intervención, puesto que, al establecer conexiones entre los procesos de justificación y los procesos de visualización, el razonamiento deductivo adquiere sentido para los alumnos como posibilidad de explicación, de comprensión y de argumentación (MEN, 2004).

En el capítulo 5, se recogen algunas de las experiencias de aula de los docentes participantes en el proyecto. El documento termina dando una serie de conclusiones sobre la experiencia, entre las que se destacan las siguientes:

- Durante la experiencia se pudo ver un manejo cada vez más depurado del lenguaje matemático, el uso de la generalización, la transferencia de los conceptos aprendidos en actividades anteriores y la explotación de la potencia que proporciona la calculadora para escudriñar en otros ámbitos. (p. 87)

- La Geometría Dinámica se coloca a medio camino entre el mundo sensible (perceptible por los sentidos), en este caso esencialmente visual, y el mundo matemático, esencialmente abstracto. (p. 89)
- La Geometría Dinámica cambia la forma de la enseñanza de la geometría. Las herramientas tecnológicas pueden transformar la práctica docente permitiendo la producción de actividades radicalmente nuevas. (p. 89)
- La dinámica entre la exploración y la sistematización, generada al trabajar con un software como Cabri Géomètre, favorece en los estudiantes el desarrollo de una mayor capacidad expresiva que conlleva mayores niveles de argumentación. (p. 89)
- La exploración en un medio dinámico se convierte en un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariante. (p. 89)
- Un uso innovativo de la tecnología incluye un primer nivel de comprensión de un problema que es el visual, pero acompañado de instrumentos de control que suministran el medio dinámico como son la medición y verificación de propiedades. Esto es muy importante pues inicia el camino hacia la sistematización y verificación sistemática de los hechos geométricos. Todo esto desemboca, en una segunda etapa, en la construcción de demostraciones cada vez con un mayor nivel de formalización. (p. 89)

2.2 La Demostración en Geometría

Como se ha mostrado en los antecedentes teóricos, la concepción de demostración es un factor importante en las investigaciones que en Educación matemática se realizan sobre este tema, pues incide en la caracterización y análisis de los datos recogidos en la experimentación. En nuestro caso, una demostración “es el proceso que incluye todos los argumentos planteados por los estudiantes para explicar, verificar, justificar o validar con miras a convencerse a sí mismo, a otros estudiantes y al profesor de la veracidad de una afirmación matemática” (Fiallo, 2011).

La caracterización y posterior análisis de las demostraciones hechas por los estudiantes al realizar los problemas de construcción planteados en nuestra secuencia didáctica, será realizada mediante la estructura planteada por Marrades y Gutiérrez (2000), analizada en Fiallo (2006) y depurada en Fiallo (2011), en la que se identifican dos tipos de demostraciones: la demostración empírica, la cual se da cuando el estudiante usa ejemplos específicos para convencerse de la veracidad de sus conclusiones y las demostraciones deductivas en las cuales el estudiante emplea deducciones abstractas para sustentar sus afirmaciones.

A continuación, se hace una breve descripción, que puede ser un parafraseo o una cita textual de Fiallo (2011), de estos tipos de demostración y sus subclases:

Demostraciones empíricas

Este tipo de demostración se caracteriza porque el estudiante usa solo ejemplos para convencerse o convencer a los demás de la veracidad de sus deducciones. Los estudiantes aceptan la veracidad de las conjeturas después de que han observado regularidades en uno o más ejemplos; ellos usan los propios ejemplos, o relaciones observadas en los ejemplos para justificar la verdad de su conjetura (Marrades y Gutiérrez, 2000; citado por Fiallo, 2011).

Dependiendo de la forma en que los estudiantes seleccionan los ejemplos para el planteamiento de conjeturas, en las demostraciones empíricas se identifican tres subclases:

Empirismo Ingenuo Inductivo: se da cuando el ejemplo que usa el estudiante en la conjetura o demostración es escogido sin ningún criterio y puede ser de tipo perceptivo si sus argumentos se basan en elementos visuales o táctiles o inductivo si los argumentos son elementos matemáticos o relaciones detectados en el ejemplo.

Experimento Crucial: este tipo de demostración se da si para demostrar su conjetura el estudiante hace uso de un ejemplo escogido cuidadosamente y su escogencia se basa en la presunción de que en cualquier otro caso va a dar el mismo resultado. Se determinan dos tipos de experimentos cruciales, dependiendo de la forma en que los estudiantes escojan su ejemplo:

Experimento Crucial Basado en el Ejemplo: Cuando los estudiantes se basan en la existencia de un único ejemplo o en la ausencia de contraejemplos para su demostración. En este caso se trata de una generalización inductiva sobre los enunciados y ejemplo genérico (Fiallo, 2011; p. 91).

Experimento Crucial Constructivo: cuando los estudiantes sustentan sus demostraciones en las construcciones realizadas sobre el ejemplo o en la forma de conseguir el ejemplo (Fiallo, 2011; p. 92).

Ejemplo Genérico: Cuando en la demostración se usa un ejemplo específico que es representante de una clase y la demostración incluye la producción de razonamientos abstractos. Balacheff destaca la importancia del ejemplo genérico como una forma de romper la discontinuidad epistemológica entre los procesos de producción de demostraciones por parte de los estudiantes, señalando que esta ruptura se supera cuando ellos puedan pasar de un empirismo ingenuo a mirar las afirmaciones matemáticas con un enfoque más formal a través del descubrimiento del ejemplo genérico (Fiallo, 2011; p. 92).

Se tendrán en cuenta los siguientes dos tipos de ejemplos genéricos:

Ejemplo Genérico Analítico: cuando en la demostración, el estudiante usa un ejemplo representante de una clase, y sus justificaciones están basadas en propiedades y relaciones descubiertas en este.

Ejemplo Genérico Intelectual: se da cuando en la demostración o en la conjetura, el estudiante usa un ejemplo representante de una clase, pero sus argumentos o justificaciones se basan en propiedades matemáticas aceptadas, pero estas no son producto de observaciones o propiedades encontradas en el ejemplo, sino que al trabajar sobre el proceso se recuerdan.

Demostraciones deductivas

Se caracterizan por la descontextualización de los argumentos, se basan en los aspectos genéricos del problema, operaciones mentales y deducciones lógicas, que apuntan a validar la conjetura de manera general (Marrades y Gutiérrez, 2000; citado por Fiallo, 2006).

Dependiendo de si el estudiante usa o no ejemplos para organizar sus deducciones, este tipo de demostración se dividen en las subclases experimento mental y deducción formal, respectivamente.

Experimento Mental: se da cuando el estudiante usa un ejemplo para ayudar a organizar su demostración. Se pueden distinguir dos tipos de experimento mental:

Experimento Mental Transformativo: Cuando las demostraciones se basan en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente. Los ejemplos ayudan a prever qué transformaciones (imágenes mentales espaciales, manipulaciones simbólicas o construcciones de objetos) son convenientes para la justificación (Fiallo, 2011; p. 88).

Experimento Mental Estructural: Cuando las demostraciones están basadas en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados, y, si se usan ejemplos, son para ayudar a organizar o entender los pasos de las deducciones (Fiallo, 2011; p. 88).

Deductiva Formal: este tipo de demostración se caracteriza porque el estudiante se basa en ningún tipo de ejemplo para realizarla, solo en operaciones mentales. Es básicamente el tipo de demostración formal que se encuentra en el mundo de los investigadores de las matemáticas. Se pueden definir dos tipos de deducción formal:

Deducción Formal Transformativa: se da cuando la demostración del estudiante, se basa en operaciones mentales que transforman el problema inicial en otro equivalente.

Deductiva Formal Estructural: estas demostraciones se basan en secuencias lógicas derivadas de los datos del problema, de los axiomas, las definiciones o teoremas aceptados (Fiallo, 2011; p. 90).

2.3 La Geometría Dinámica

La geometría ha encontrado apoyos en las herramientas virtuales para fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje; particularmente ha recibido un impulso desde la Geometría dinámica, que ha puesto de manifiesto el carácter estructural de los dibujos en una pantalla de computadora.

Una de las potencialidades de la Geometría está relacionada con el estatus de dependencia y orden de los componentes de una representación; en la GD el orden en el que se dibujan los componentes de un objeto y la dependencia entre ellos es determinante; por otro lado en la resolución de problemas abiertos, la GD fomenta la producción y validación de conjeturas, ya que pone énfasis en los aspectos teóricos del dibujo y hace que los estudiantes sean conscientes de que existe una teoría detrás de los dibujos. (Furinghetti, 2001).

Sin embargo, es el profesor el encargado de motivar al estudiante no solo a descubrir la teoría que valida sus construcciones, sino a realizar conjeturas y a encontrar los argumentos para demostrarlas. Sobre esto, Fiallo (2006) afirma que si el profesor no motiva a los estudiantes a encontrar por qué una conjetura es verdadera, es posible que las justificaciones dadas por ellos se queden en un nivel perceptivo-empírico, en el que asumen que la proposición es verdadera porque las propiedades de la figura se conservan al someterlas a la prueba del arrastre. En este punto, el SGD puede convertirse en un obstáculo en la transición del conocimiento empírico al teórico, al permitir la validación de una proposición sin la necesidad de una teoría. No obstante, si el profesor hace explícito el papel de la demostración en justificar, entonces los estudiantes se verán motivados a demostrar por qué una proposición es verdadera, después de comprobar su validez desde el software.

Por supuesto que el éxito de la construcción sigue dependiendo, en gran medida, de la pericia del estudiante al manejar las herramientas de construcción. Sin embargo, con un SGD el estudiante puede liberar su atención de la precisión de los trazados y fijarla en la reflexión teórica de los mismos (MEN, 2004).

En nuestra investigación, el SGD que usaremos será GeoGebra, el cual es un software de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo (GeoGebra, 2018).

GeoGebra, tiene libre agilidad de uso, congrega a una comunidad vital y en crecimiento, debido a que reúne gráfica y dinámicamente álgebra y geometría análisis y hojas de cálculo

(GeoGebra, 2018). En todo el mundo, millones de entusiastas lo adoptan y comparten diseños y aplicaciones de GeoGebra. Dinamiza el estudio mediante potentes herramientas con una interfaz intuitiva y ágil (GeoGebra, 2018).

Además de la posibilidad de descargar de manera gratuita las aplicaciones que GeoGebra ofrece, en su página oficial geogebra.org, es posible crear una cuenta personal mediante la cual se puede crear grupos para interactuar con los estudiantes, profesores o con cualquier persona que también posea una cuenta. Estos grupos se tornan relevantes para nuestra investigación debido a la imposibilidad de realizar clases presenciales por la emergencia del COVID-19, pues a través de ellos, es posible proponer a los estudiantes los problemas de construcción que componen nuestra propuesta didáctica y estos podrán plasmar sus soluciones en un applet cuya interfaz corresponde al software clásico de GeoGebra. Los trabajos realizados por los miembros del grupo quedan guardados y disponibles para que el propietario pueda revisarlos en cualquier momento a través de la opción devolución. Al dar clic en esta opción se despliega una lista de los miembros del grupo que muestra, a través de algunos símbolos, cuáles actividades ha trabajado cada uno de ellos. De esta manera se posibilita la recolección de los datos de investigación.

3. Problema de investigación y objetivo

A medida que la tecnología avanza, se crean nuevas herramientas que permiten abordar de diferentes maneras el estudio de un objeto matemático y su enseñanza. El éxito en este último aspecto no depende de la herramienta que se use, sino de la forma en que el docente la utilice para acercar a sus estudiantes al conocimiento. Este es el caso del software de geometría dinámica, la cual permite un mejor conocimiento de los objetos geométricos al darles movimiento. Con esta herramienta, una persona con nociones básicas de geometría puede acceder a resultados y conocimientos avanzados, como el de la recta de Euler (Moreno, 2014). Mediante el uso de esta herramienta, el estudiante también puede realizar una exploración pragmática de las propiedades de un teorema, hasta llegar a conclusiones de carácter general.

A pesar de su potencial, el software no siempre es usado por los docentes en el aula de clase, y particularmente en la enseñanza del proceso de demostración, concretamente en el caso personal, en el ejercicio de la enseñanza de la matemática, han sido muy pocas las oportunidades en que he enseñado la geometría, debido a factores como: la baja intensidad horaria que se le asigna al área, el planteamiento vertical del plan de área; las reiteradas pérdidas de horas de clase, que luego no se reponen.

Desde el 2013, ejerzo como docente del Instituto Técnico Aquileo Parra de Barichara, en el año 2015 integré el grupo de Geometría del Colectivo de Investigación Edumat-UIS, en donde tuve conocimiento del software dinámico Geogebra, como herramienta informática de apoyo a la enseñanza de la Geometría.

En mi experiencia de uso del Software, con estudiantes de séptimo grado, constaté que los estudiantes eran muy receptivos; los conceptos y propiedades definidos con esta herramienta, no solo eran comprendidos y aplicados mejor, sino que el estudiante los recordaba con mayor facilidad. Sin embargo, hay que precisar que con mis compañeros de área coincidimos que a los estudiantes no solo les resulta muy difícil hacer una demostración, por su carácter abstracto, que precisa razonamientos lógicos para llegar a conclusiones, competencias que por lo general no dominan, sino que no ven la necesidad de hacerlo.

En el pensum académico de la Institución, el estudio de la demostración se propone para el grado noveno, y la enseñanza gira en torno a teoremas básicos, en donde se establecen propiedades y relaciones geométricas dentro de un enfoque constructivista. Sin embargo, el curso se da de una manera tradicional: se les da a los estudiantes un listado de propiedades que el docente usa para demostrar algunos teoremas y se les pide demostrar otros. De esta manera, la mayoría de los estudiantes terminan repitiendo los pasos usados por su profesor en su afán de construir la demostración pedida sin que ello implique un verdadero aprendizaje.

A partir de esta situación problemática, se propone una investigación orientada a dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cómo potenciar las habilidades del proceso de demostración en los estudiantes de noveno grado, mediante la resolución de problemas de construcción en un entorno de geometría dinámica? Para responder a esta pregunta nos planteamos el siguiente objetivo:

Diseñar e implementar una secuencia de problemas de construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica, enfocándola al desarrollo de habilidades de demostración en estudiantes de noven grado.

4. Aspectos metodológicos

Esta investigación se basó en la metodología cualitativa por cuanto es un estudio hecho directamente en un aula virtual de clase. Con el trabajo de aplicación se quiso analizar y categorizar los argumentos que usan los estudiantes de noveno grado al realizar problemas de construcciones geométricas un ambiente de geometría dinámica mediado por el software GeoGebra. Para ello, se establecieron tres etapas, las cuales detallamos en este apartado.

4.1 Contexto de la Investigación

Este estudio se llevó a cabo con 10 estudiantes del Instituto Técnico Aquileo Parra, ubicado en el municipio de Barichara, Santander los cuales cursan el grado noveno de educación básica secundaria (14 – 16 años). Teniendo en cuenta la situación de aislamiento y por ende las clases no presenciales, que generó el COVID-19, se escogieron los estudiantes que pudieran trabajar GeoGebra ya sea desde un computador o un celular y que puedan participar de las videoconferencias que se realizaran. Algunos de los estudiantes residen en zonas rurales, por lo tanto, la conectividad no fue del todo buena en el desarrollo de las actividades.

4.2 Recolección de Datos

Debido a que el enfoque de investigación es cualitativo, se tuvo en cuenta las prácticas escritas y orales expresadas por los estudiantes a través de plataformas digitales como Edmodo.com, WhatsApp, grupos en GeoGebra y aquellas que permiten video conferencias como Skype.com, Zoom.us, entre otras. En particular, la plataforma geogebra.org fue usada para aplicar la secuencia didáctica, pues como anteriormente se mencionó, a través de ella es posible crear un grupo con los estudiantes que serán parte de la investigación. De esta manera tuvimos acceso a las construcciones que plantearon como solución a los problemas de construcción propuestos en la secuencia didáctica. Esta forma de aplicación de actividades y recolección de datos se debe a la imposibilidad de realizar clases presenciales, consecuencia de la emergencia causada por el COVID-19. Para ello se requirió una cantidad prudente de información, es por tanto que los instrumentos que se utilizaron para la recolección de los datos fueron las guías del trabajo virtual realizado por los estudiantes como muestra de sus producciones, videoconferencias y entrevistas virtuales con el fin de realizar las transcripciones de las actividades para el análisis de los procesos de argumentación. También se tuvo en cuenta las construcciones hechas por los estudiantes en el grupo de GeoGebra, cuyo análisis se realizó con el apoyo de la opción vista de protocolos de construcción que ofrece el applet y que permitió visualizar el paso a paso de la construcción hecha.

4.3 Fases del Experimento

A continuación, describimos cada una de las fases de las que constó nuestra investigación.

4.3.1 Primera fase o fase diagnostica

Para el diseño de esta prueba se adaptaron cuatro problemas de construcciones geométricas del proyecto Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales (MEN, 2004) con el fin de determinar los argumentos usados por los estudiantes al solucionarlos usando el SGD GeoGebra.

Se trabajó mediante el grupo creado en la página GeoGebra.org y se realizó de manera asincrónica, se escogió una fecha para que los estudiantes presentaran su actividad y contaron con dos horas para su solución, sin que el docente estuviese pendiente de su desarrollo.

Algunos de los estudiantes no pudieron realizar estas actividades a tiempo por cuestiones referentes a la conectividad, y otros estudiantes no presentaron las actividades porque al realizar la implementación se estaba entrando en la cuarentena debida a la pandemia derivada del Covid-19 y también se estaban iniciando las evaluaciones bimestrales, es por ello que las actividades que no se realizaron se categorizan como fallidas.

4.3.2 Segunda fase: Diseño e implementación de la propuesta didáctica

En esta segunda fase se realizó una intervención didáctica que constó de una serie de problemas de construcción geométrica del proyecto pensamiento geométrico y tecnologías computacionales (MEN, 2004), adaptados para evidenciar los argumentos de los estudiantes al solucionarlos usando GeoGebra, pero manteniendo la forma de validación del arrastre.

Se trabajaron cuatro encuentros semanales de aproximadamente ciento veinte (120) minutos divididos en dos sesiones de 45 minutos, en horarios diferentes a los de la clase, debido a las restricciones de la plataforma Zoom en su versión gratuita, o en una sola sesión en caso de que la calidad de la conectividad de los participantes fue óptima. Estas sesiones se dividieron en tres momentos: en un primer momento, a través de una videoconferencia, se explicó a los estudiantes la actividad a realizar y su objetivo. En un segundo momento, los estudiantes se enfrentaron de manera individual a la actividad, teniendo como medio el programa de geometría dinámica GeoGebra. En este momento, a través de las plataformas virtuales ya mencionadas, el docente no fue más allá de responder algunas preguntas sencillas que permitieran al estudiante avanzar en su exploración, pero sin dar la solución del problema. Sin embargo, parte de los estudiantes en algunas ocasiones optaron por conformar grupos de máximo tres estudiantes mediante video llamadas, por iniciativa propia e iniciaron a trabajar en equipo. Se esperaba que el estudiante conjeturara, verificara a través del software y nuevamente conjeturara si era necesario. Finalmente, en el momento de cierre, se abrió un espacio en el que algunos estudiantes, de manera voluntaria, mostraron sus construcciones y sus métodos a través de la videoconferencia con la opción de compartir pantalla, con el fin de permitirles argumentar y justificar sus acciones, siendo ahora sus compañeros quienes validen o refuten sus argumentos y no el software. Como estas construcciones se hicieron en un applet dispuesto en el grupo de GeoGebra, posteriormente se pudo acceder a todas ellas y realizar su respectivo análisis.

4.3.3 Tercera fase: Procesamiento de la información recolectada

Se procedió a transcribir y analizar la información recolectada, es decir, las producciones de los estudiantes durante el proceso. Para ello se tuvo en cuenta las acciones verbales y no verbales de los estudiantes, capturadas en los videos, en sus producciones escritas y en las construcciones hechas en el grupo de GeoGebra. El análisis de estas construcciones se realizó usando la herramienta protocolos de construcción, con la cual se puede ver el paso a paso que el estudiante realizó en su construcción y de esta manera entender o inferir su razonamiento y argumentos usados en la búsqueda de la solución del problema. En ocasiones fue necesario entrevistar a algunos estudiantes a través de la plataforma WhatsApp con el fin de identificar los argumentos que tuvieron en cuenta al escoger las herramientas que usaron en su construcción.

Caracterización de los argumentos. En este apartado presentamos el análisis de los datos recolectados a través de la implementación de las actividades diagnósticas inicial y final y de la secuencia de problemas de construcción geométrica. Para este análisis se adoptó la definición de demostración de Fiallo (2011) y se usó la estructura usada por Fiallo (2011), que presentamos en el marco teórico.

Sin embargo, fue necesario adoptar la categoría Fallida, planteada por Marrades y Gutiérrez (2000) y usada por Fiallo (2006), la cual incluye los casos de los estudiantes que no son capaces de seguir un camino de solución que los lleve al planteamiento de una conjetura o una demostración, o a aquellos que no hacen nada, no ven la conjetura o no se puede inferir nada de sus respuestas. En esta categoría Fallida se pueden considerar los estudiantes que intentan demostraciones tanto inductivas como deductivas.

Es pertinente aclarar que cuando se menciona las palabras acción o acciones del estudiante, se hace referencia a las exploraciones, los pasos o las construcciones que éste ha ejecutado en el software con miras a solucionar un problema. Estas acciones en muchos casos se interpretan como argumentos, pues suponen el uso de alguna propiedad matemática que el estudiante conoce o que descubrió a través de una exploración, con la cual se permite dar el siguiente paso hacia la solución de un problema.

Fase diagnóstica. Para esta fase se planteó una actividad de 4 problemas de construcción geométrica. Se les indicó a los estudiantes que trabajaran de manera individual el grupo GeoGebra, en un tiempo de 2 horas.

A continuación, presentamos los problemas de construcción planteados para esta fase, una posible solución y el análisis y caracterización de las soluciones presentadas por los estudiantes.

Problema N° 1. Dados tres segmentos AB, CD y EF, construye un triángulo de forma que AB y CD sean dos lados y EF sea la mediana sobre el lado AB.

1. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.
2. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

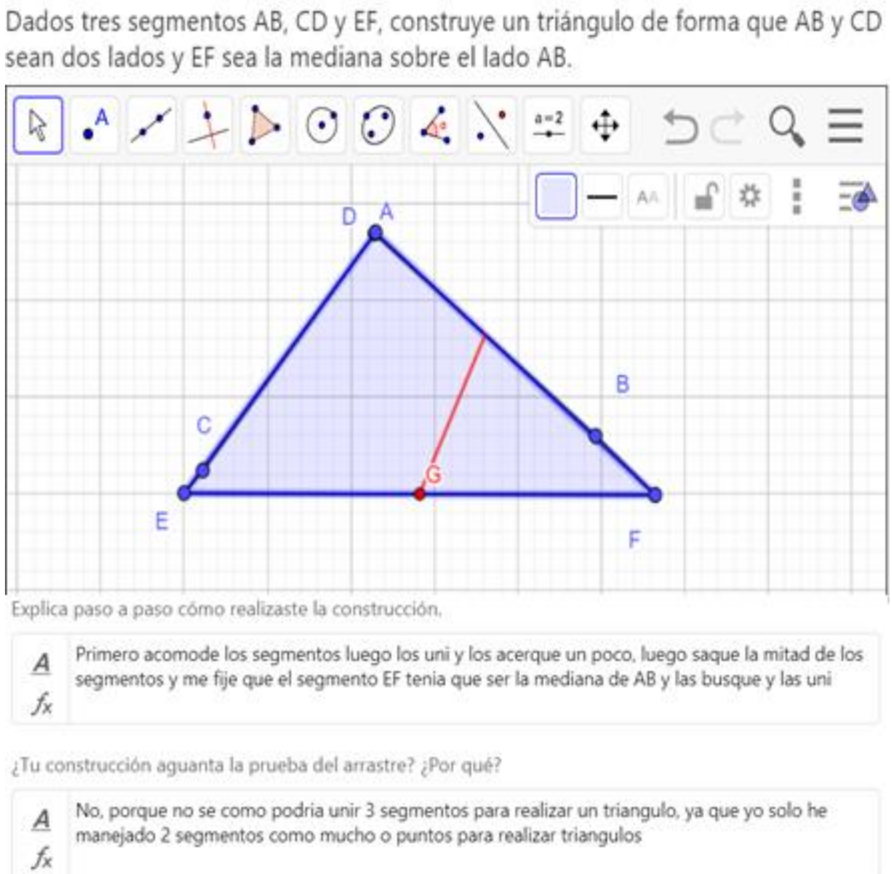
***Posible solución*.** Se espera que el estudiante encuentre el punto medio del segmento AB y desde allí transporte el segmento EF con la ayuda del compás. Luego, con esta misma herramienta, transporte el segmento CD pero desde A o desde B. El punto de intersección entre las circunferencias trazadas será el tercer punto que junto con A y B forman el triángulo buscado.

Estudiante A. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante B. El estudiante acomoda los segmentos dados mediante la función de arrastre, buscando formar un triángulo, lo cual indica un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** siendo su gráfica un ejemplo arbitrario como solución del problema, basado en lo que ve en la pantalla.

Figura 2

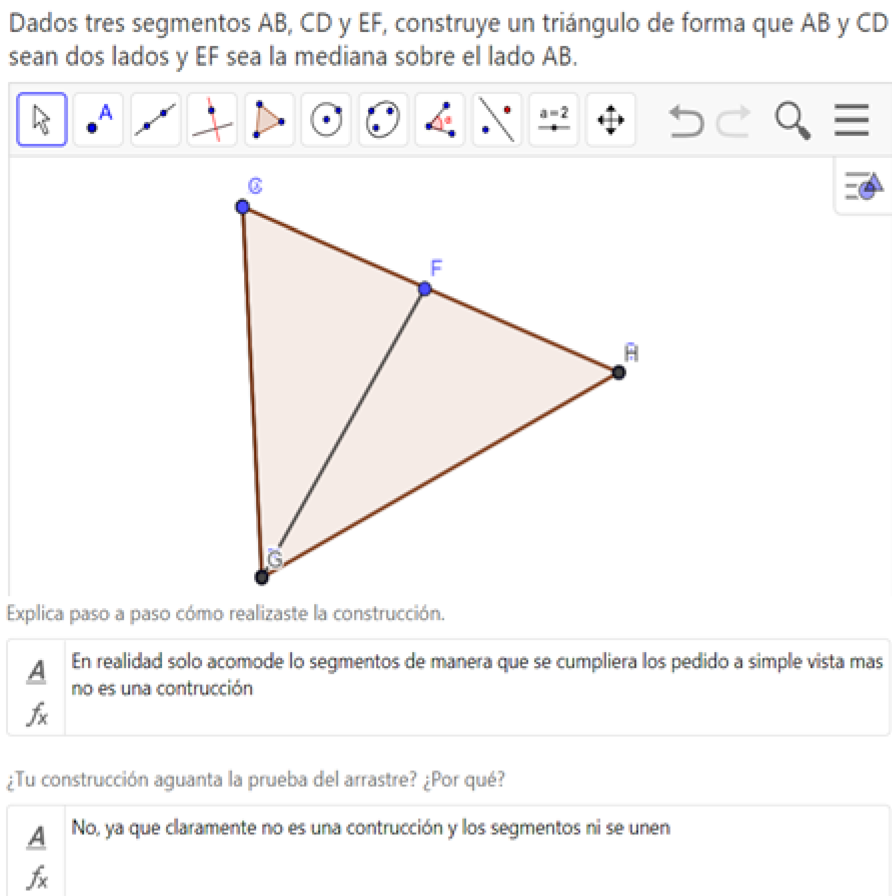
Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante B



Estudiante C. El estudiante acomoda los segmentos dados mediante la función de arrastre, buscando formar un triángulo, lo cual indica un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** siendo su gráfica un ejemplo arbitrario como solución del problema, basada en lo que ve en su pantalla.

Figura 3

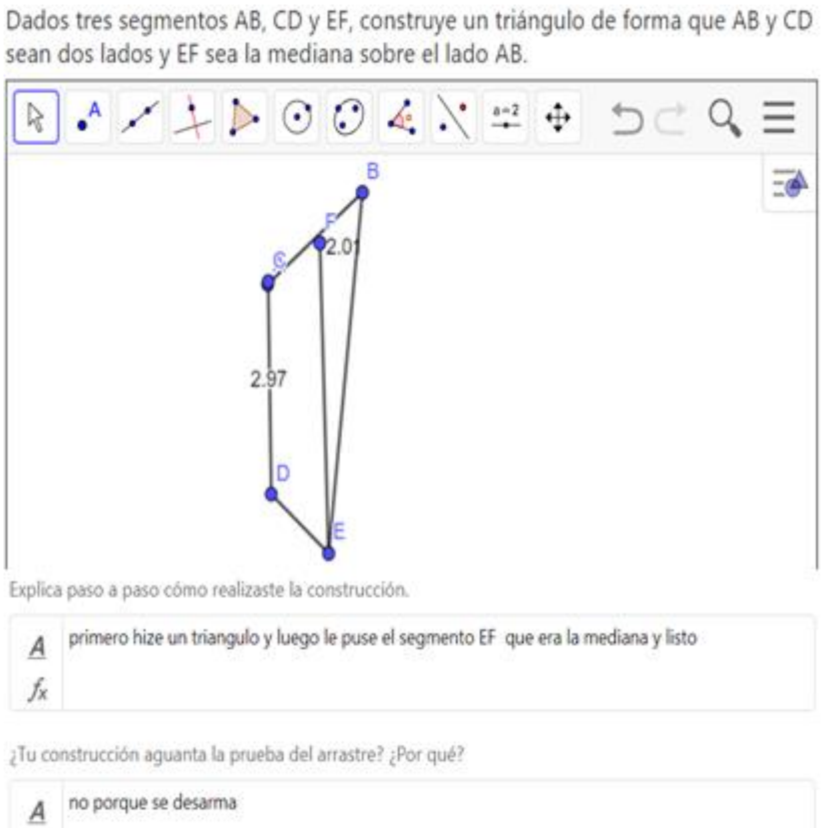
Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante C



Estudiante D. Usando los segmentos dados y la función de arrastre, el estudiante intenta formar un triángulo, y aunque no lo logra, su acción connota un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** pues propone un ejemplo arbitrario como solución del problema, basada en lo que ve en su pantalla.

Figura 4

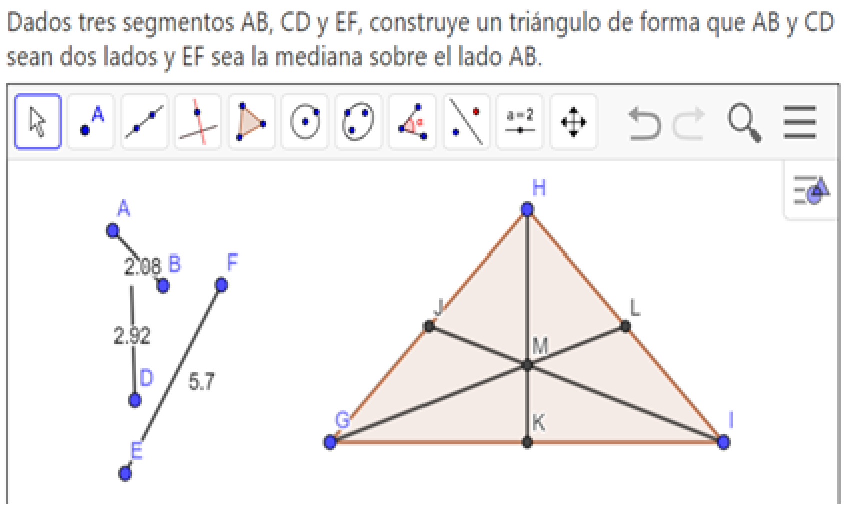
Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante D



Estudiante E. El estudiante no da ningún argumento de la solución que plantea. Sin embargo, al mirar el protocolo de construcción, se puede ver que ubicó tres puntos cualesquiera y construyó un triángulo. Luego encontró los puntos medios de los segmentos y trazó las medianas. Finalmente, encontró el baricentro. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema, pero se puede inferir desde su construcción un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** debido a que plantea un ejemplo arbitrario como solución al problema basado en aspectos visuales de su gráfica, en la que ve, no una sino las tres medianas del triángulo.

Figura 5

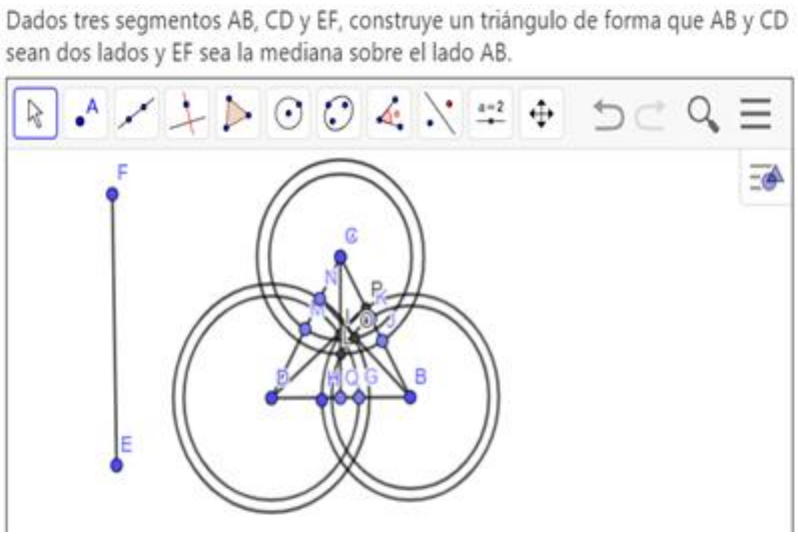
Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante E



Estudiante F. El estudiante no da ningún argumento de la solución que plantea. Sin embargo, al mirar el protocolo de construcción, se puede observar que usa $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ para formar un triángulo y deja aparte a $\overline{EF}$. Luego, ubica un punto G en $\overline{BD}$ tratando que quede más cerca de B que de D y traza una circunferencia que pasa por G con centro en D. Repite este proceso, pero ubicando un punto H sobre el segmento $\overline{BD}$ más cerca de D que de B y traza una circunferencia que pasa por H con centro en B. Esto lo hace para determinar el punto de corte I de las circunferencias, con lo que luego traza un segmento desde el vértice opuesto a $\overline{BD}$ que pase por I cuyo extremo final esté sobre $\overline{BD}$. Repite este proceso con los tres lados del triángulo. Se intuye que esto lo hace para encontrar las medianas del triángulo, aunque no es correcto. Según lo anterior, el estudiante no tiene en cuenta todas las condiciones iniciales del problema y trata de construir un ejemplo arbitrario que visualmente parezca la solución, por lo que se connota un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 6

Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante F

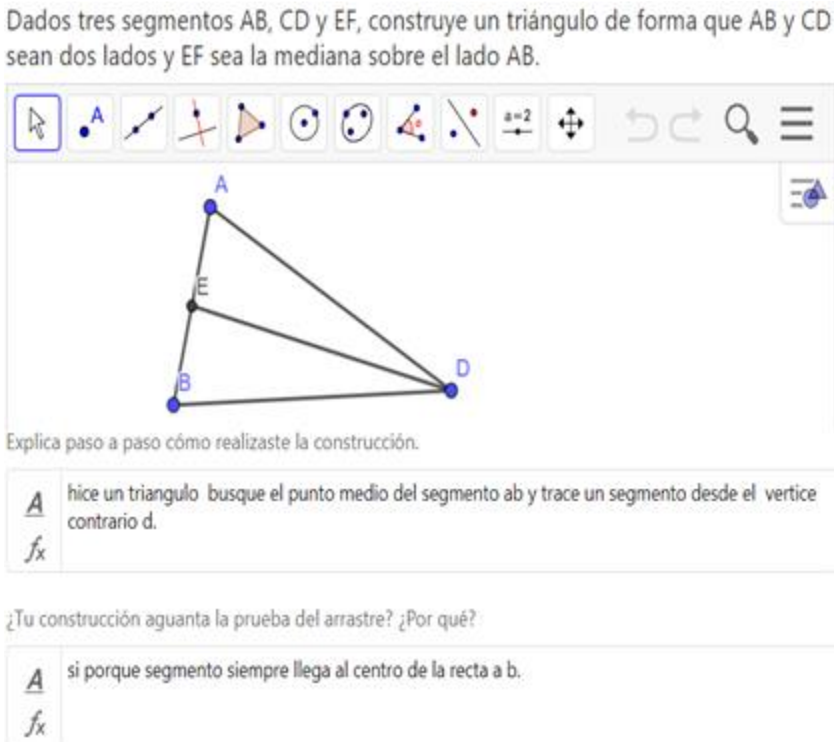


Estudiante G. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante H. El estudiante omite las condiciones iniciales del problema, construye un triángulo cualquiera y sobre uno de sus lados determina el punto medio para luego trazar la mediana. Lo anterior configura un **Empirismo Ingenuo Inductivo,** por cuanto el estudiante toma un ejemplo arbitrario como solución y argumenta con definiciones y propiedades matemáticas, como la mediana o el punto medio, que se destacan en su construcción, aunque esta no sea la solución del problema.

Figura 7

Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante H



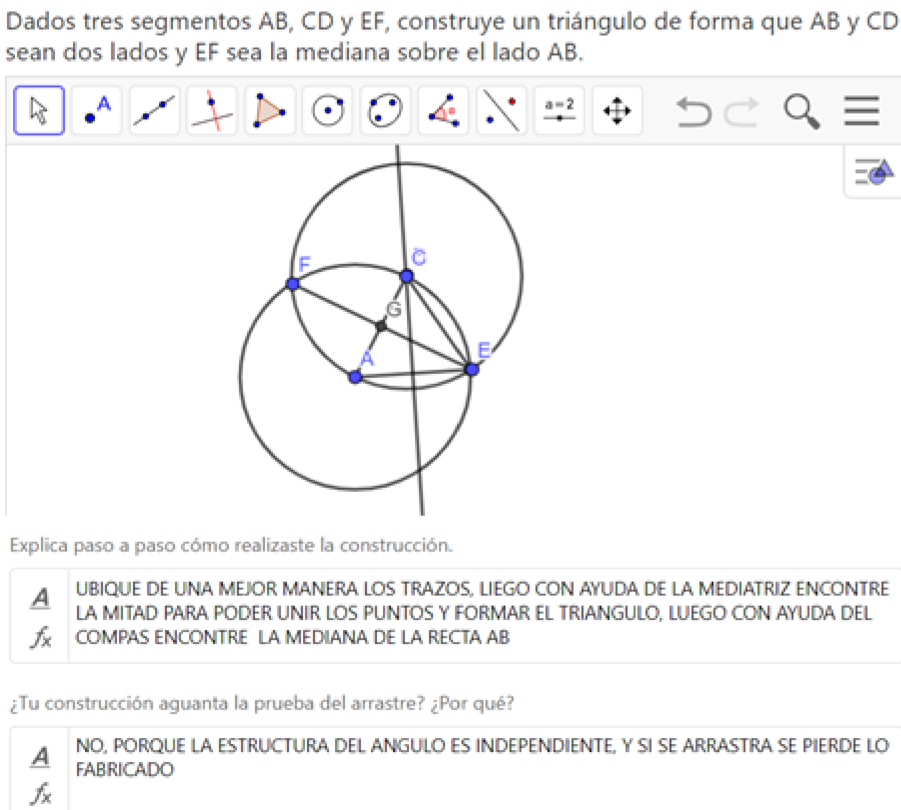
Estudiante I. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante J. El estudiante acomoda los segmentos dados AB y CD usando la función de arrastre y los dispone como los lados del triángulo buscado. Luego traza un segmento AE para completarlo. Usando circunferencias encuentra el punto medio G de $\overline{AB}$ y ubica $\overline{EF}$ desde el vértice E pasando por G tratando de cumplir la condición del problema que pide que $\overline{EF}$ sea la mediana sobre $\overline{AB}$. Las acciones del estudiante configuran un **Experimento Crucial**

Constructivo, por cuanto su construcción se puede ver como un ejemplo particular tomado cuidadosamente y sus argumentos están basados en la forma en como construyó su ejemplo.

Figura 8

Fase diagnóstica inicial, Problema 1 Estudiante J



Problema N° 2. Dado un segmento AB y un punto M construye un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

c. ¿Al mover alguno de los vértices del triángulo, el punto M sigue siendo el corte de las mediatrices? ¿Por qué?

d. ¿Encuentra alguna relación entre el punto M y los vértices del triángulo construido?

e. Demuestra que la relación encontrada se cumple para cualquier triángulo.

Posible solución. Se espera que el estudiante trace una recta m por M y que encuentre el punto medio C del segmento AB. Luego transporte el segmento AC sobre la recta m haciendo centro en un punto D de esta y trace una perpendicular a m por D, encontrando con esto los puntos E y F intersecciones entre la perpendicular y la circunferencia trazada. Por último, haciendo centro en M trazar una circunferencia con radio ME o MF y ubicar un punto G sobre esta. El triángulo buscado tendrá vértices EFG.

En el literal c, se espera que el estudiante se dé cuenta que los vértices del triángulo se encuentran en una misma circunferencia cuyo centro es M por lo que equidistan de él. Esto último se espera que lo expresen en el literal d.

Estudiante A. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante B. Aunque el estudiante no da argumentos escritos, el protocolo de construcción permite ver el paso a paso de su solución:

Usando la función del arrastre y apoyado en la cuadrícula dispone de manera horizontal y con una longitud determinada al segmento dado AB.

Luego ubica el punto dado M de tal manera que dé sobre la mediatriz de $\overline{AB}$ y luego la traza.

Ubica un punto C sobre la mediatriz de tal manera que M quede entre C y $\overline{AB}$.

Traza los segmentos AC y BC y una paralela a $\overline{AB}$ por M, pensando quizás en la mediatriz sobre $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Por último, mide los ángulos de la base y traza el triángulo ABC con la herramienta polígono. Finaliza trazando una elipse con focos C y M, quizás pensando en la circunferencia circunscrita al triángulo.

El proceso anterior connota un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** por cuanto el estudiante acomoda de manera arbitraria los elementos dados en el problema y basa en elementos visuales para dar su solución.

Figura 9

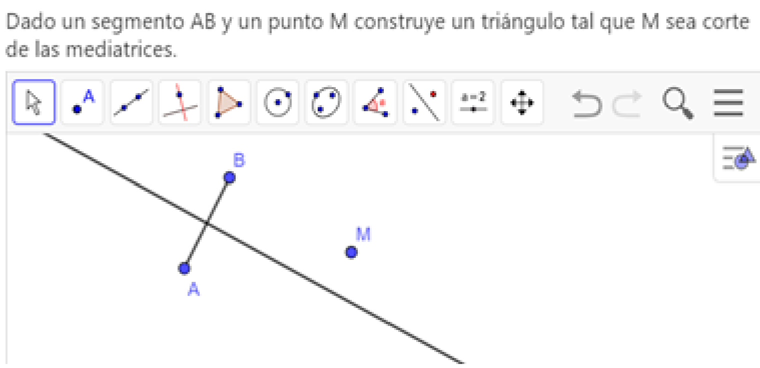
Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante B

Estudiante C. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante D. El estudiante solo traza la mediatriz del segmento AB acción que por sí sola no permite inferir nada, por lo que se categoriza como **Fallida.**

Figura 10

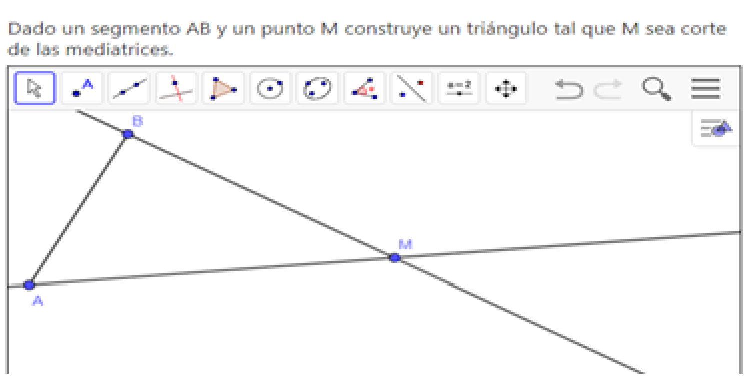
Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante D



Estudiante E. El estudiante traza las rectas AM y BM para, quizás, establecer como solución el triángulo ABM. Teniendo en cuenta que no hay elementos matemáticos en su construcción diferentes a una recta, y que el estudiante no da ningún argumento escrito, se connota la categoría **Fallida.**

Figura 11

Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante E



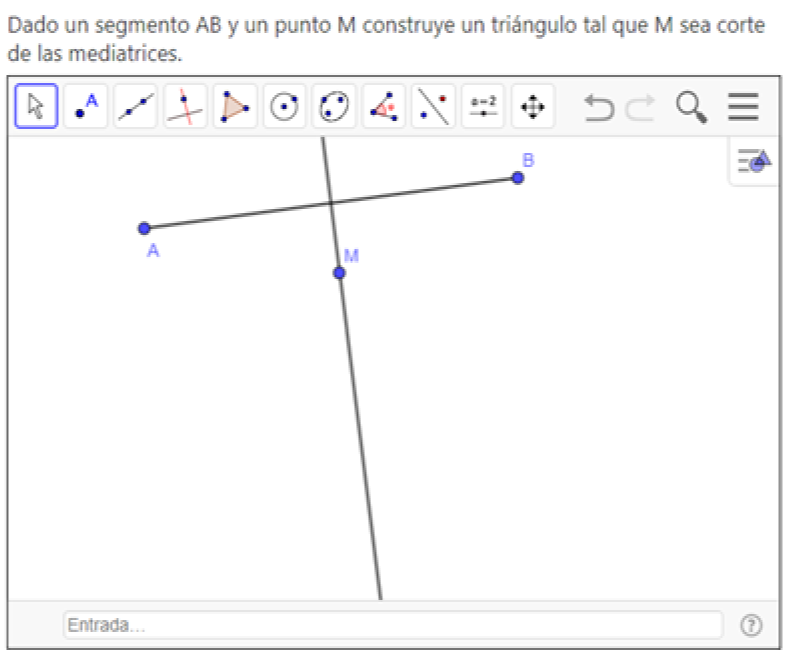
Estudiante F. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante G. El estudiante toma el punto M dado y con la función de arrastre lo ubica de tal manera que esté sobre la mediatriz del segmento AB, la cual traza enseguida.

Esta acción podría configurar un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto el estudiante toma un ejemplo cuidadosamente al mover el punto M al lugar por donde pasará la mediatriz que va a trazar.

Figura 12

Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante G



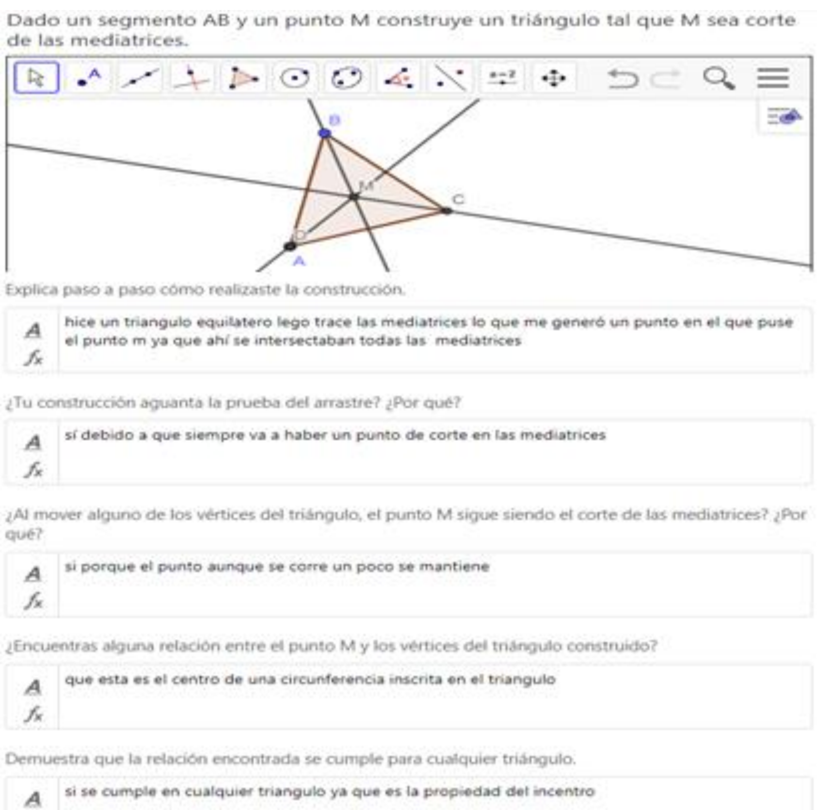
Estudiante H. El estudiante toma $\overline{AB}$ dado en los datos del problema y con la ayuda de circunferencias construye un triángulo equilátero; luego traza sus mediatrices y encuentra su punto de intersección al que llama M, con lo cual está dejando de lado las condiciones del problema, pues M es un dato inicial.

En sus argumentos, el estudiante hace referencia a la existencia del circuncentro, aunque en respuestas posteriores lo confunde con el incentro.

A pesar de que su solución no es correcta, los argumentos del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto escoge un ejemplo de manera cuidadosa al construir el triángulo equilátero y realiza su argumentación a partir de su construcción.

Figura 13

Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante H

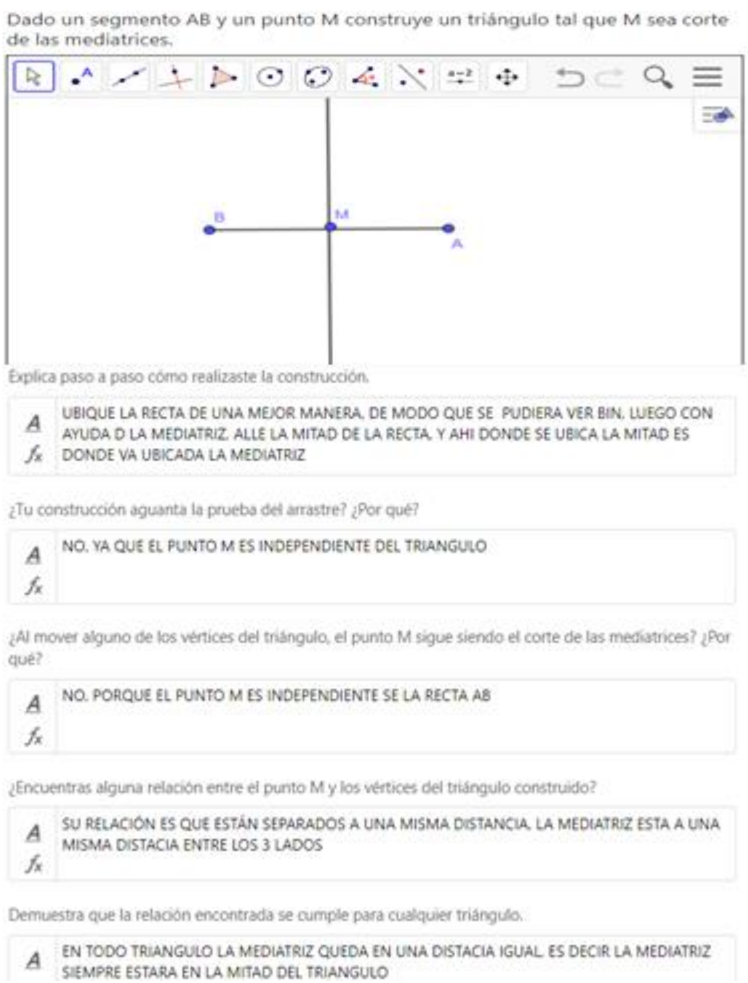


Estudiante I. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante J. El estudiante toma el punto M dado y con la función de arrastre lo ubica de tal manera que esté sobre la mediatriz del segmento AB, la cual traza enseguida. Esta acción podría configurar un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto el estudiante mueve toma un ejemplo cuidadosamente al mover el punto M al lugar por donde pasará la mediatriz que va a trazar.

Figura 14

Fase diagnóstica inicial, Problema 2 Estudiante J



Problema N° 3. Dados dos segmentos AB y PQ, construye un triángulo rectángulo de forma que PQ sea la hipotenusa y AB un cateto.

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

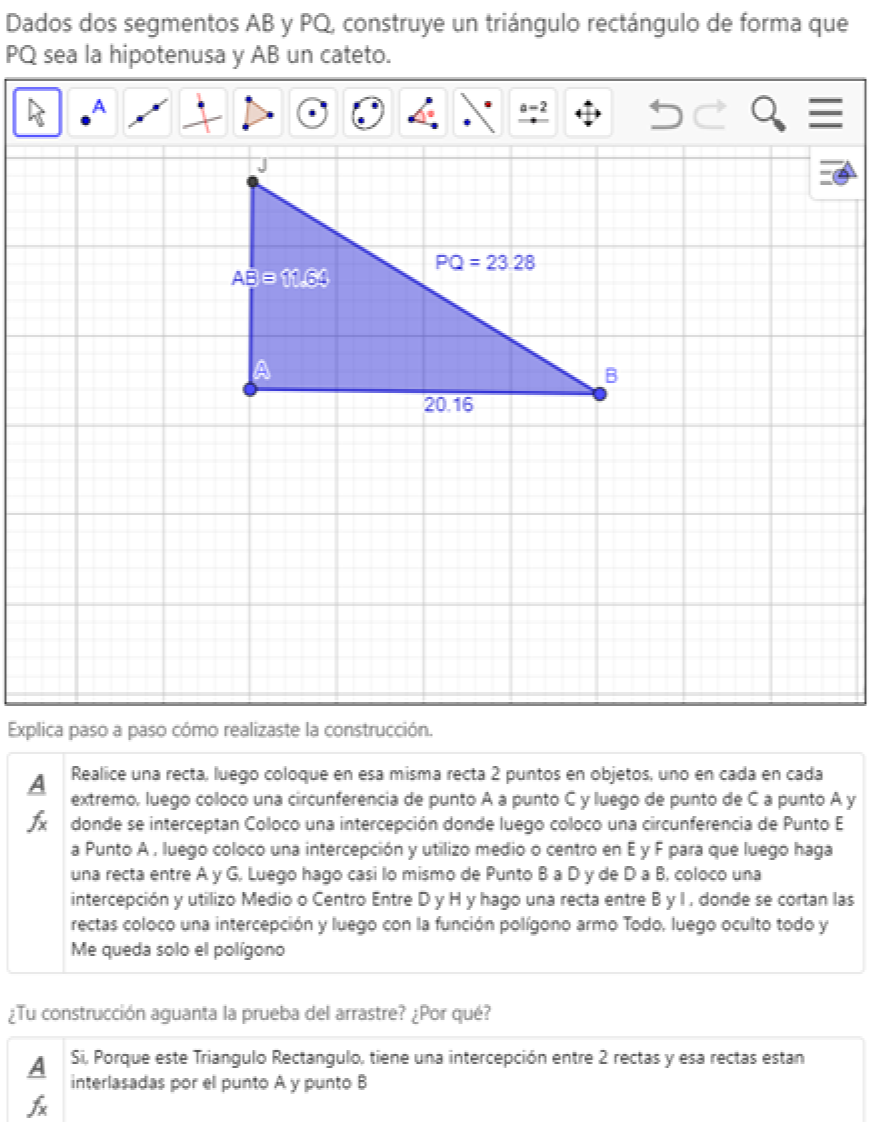
Posible solución. Se espera que el estudiante recuerde que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es el diámetro de una circunferencia y que el vértice común de los catetos es un punto de esta última. Que de esta manera determine el punto medio C de PQ y haciendo centro en él, trace la circunferencia de radio CP. Que luego, con el compás, transporte el segmento AB centro en P o en Q. Que ubique el punto de intersección D entre las circunferencias. El triángulo buscado será PDQ.

Estudiante A. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante B. Aunque el estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y por lo tanto no lo soluciona, construye un triángulo rectángulo representante de una clase, específicamente aquellos cuyos ángulos agudos miden 60° y 40° y basa su argumentación en su construcción, por lo que se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 15

Fase diagnóstica inicial, Problema 3 Estudiante B



Estudiante C. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

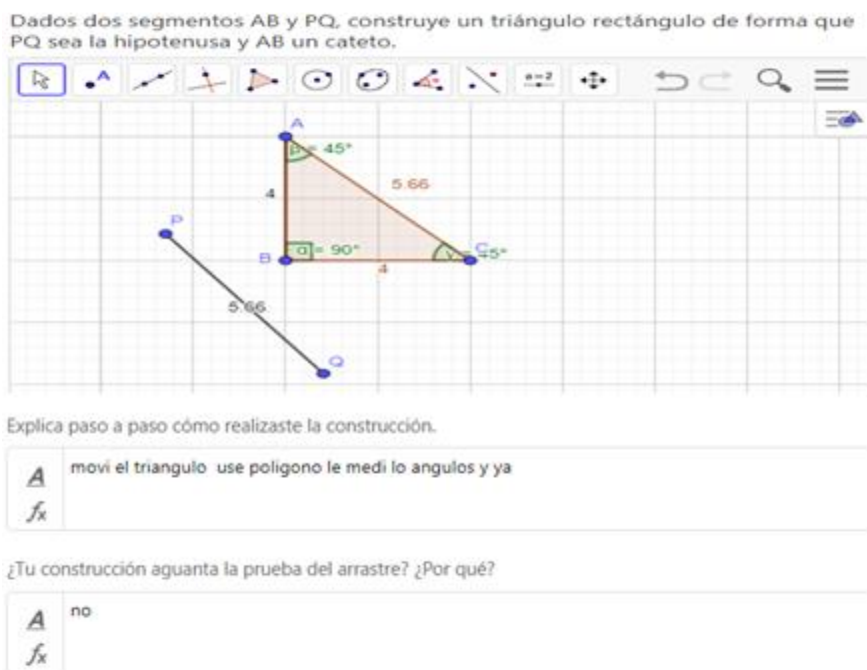
Estudiante D. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante E. Usando el arrastre, el estudiante dispone de manera vertical el segmento dado AB. Luego mide el segmento PQ y, ayudado por la cuadrícula, alarga el segmento AB a 4 unidades, de tal manera que al trazar un segmento BC horizontal, la longitud del segmento AC sea aproximadamente la misma del segmento PQ.

Las acciones del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** puesto que elige cuidadosamente el triángulo que va a construir y los argumentos que usa para sustentar su solución están basados en el mismo ejemplo.

Figura 16

Fase diagnóstica inicial, Problema 3 Estudiante E

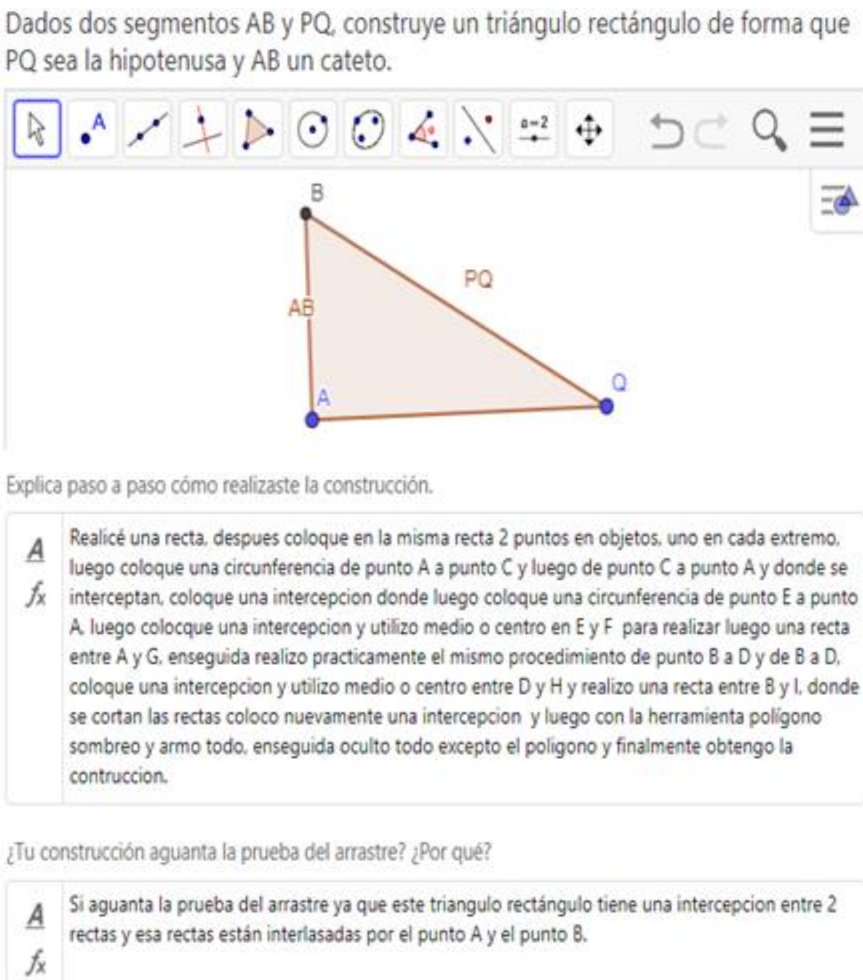


Estudiante F. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante G. La solución planteada por el estudiante es la idéntica a la que planteó el estudiante B por lo tanto se configura la misma categoría, un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 17

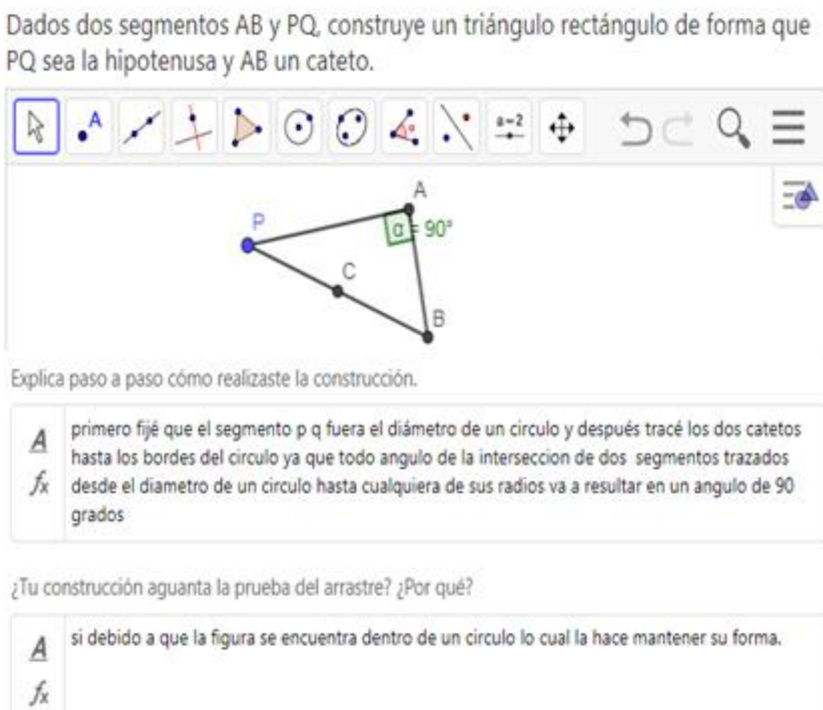
Fase diagnóstica inicial, Problema 3 Estudiante G



Estudiante H. Para resolver el problema, el estudiante utiliza un teorema para convertir su problema en otro equivalente el cual es construir una circunferencia cuyo radio sea PQ. De esta manera se constituye un **Experimento Mental Transformativo,** puesto que además de su construcción, sus argumentos se basan en operaciones mentales y deducciones lógicas.

Figura 18

Fase diagnóstica inicial, Problema 3 Estudiante H



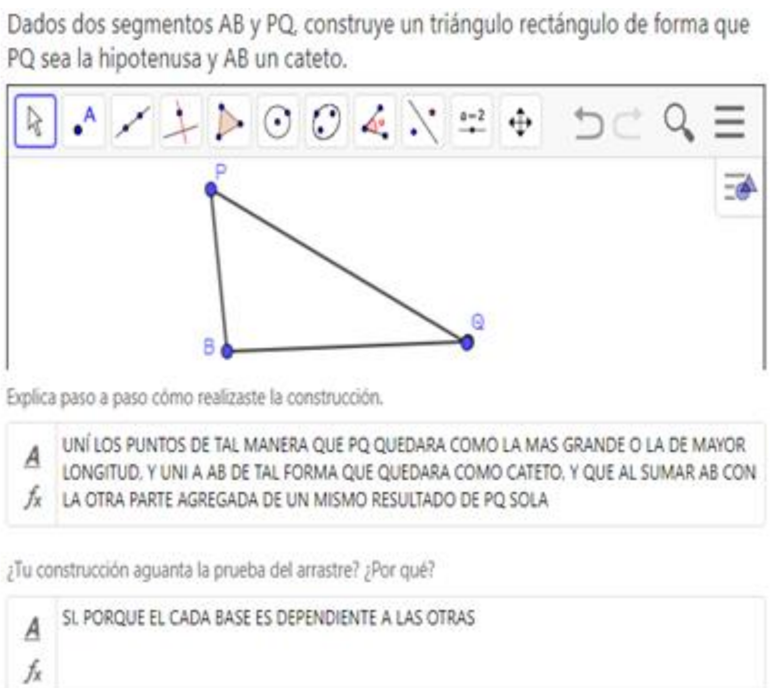
Estudiante I. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante J. El estudiante usa la función de arrastre para, con los segmentos dados, formar un triángulo que a simple vista parece rectángulo. Esta acción configura un **Empirismo Ingenuo**

Perceptivo, por cuanto el estudiante escoge un ejemplo de manera arbitraria y argumenta su solución con elementos visuales.

Figura 19

Fase diagnóstica inicial, Problema 3 Estudiante J



Problema N° 4. Dados dos segmentos AB y CD, construye un triángulo isósceles de forma que AB sea la base del triángulo y CD sea su perímetro.

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Cuál es la medida de los segmentos congruentes del triángulo? ¿Por qué?

c. ¿Cuánto es lo mínimo que deben medir los lados congruentes del triángulo? ¿Por qué?

d. ¿Es posible construir un triángulo equilátero con estas mismas indicaciones? ¿Por qué?

Posible solución. Con ayuda del compás se traslada el segmento AB sobre $\overline{CD}$, haciendo centro en uno de los extremos, A para este caso. De esta manera se obtiene el punto E que es la intersección entre $\overline{CD}$ y la circunferencia trazada con el compás. Luego se determina el punto medio del segmento EB y con el compás se transporta esa medida sobre el segmento AB haciendo centro en A y luego haciendo centro en B. El punto de corte F de estas dos circunferencias será el vértice buscado, de modo que el triángulo pedido será ABF.

En el literal b se espera que los estudiantes respondan $\frac{CD-AB}{2}$

La respuesta que se espera en el literal c es: $\frac{CD}{4}$

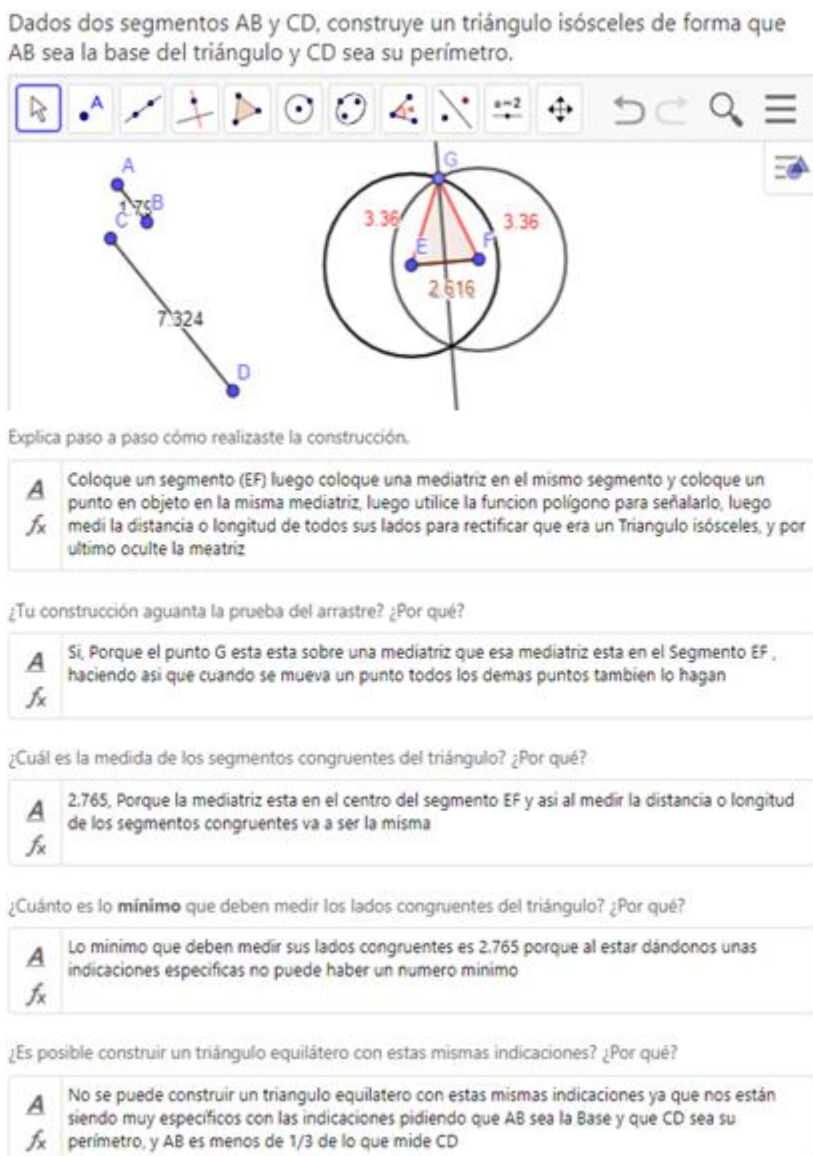
La respuesta que se espera en el literal d es que sí es posible, siempre y cuando $AB = \frac{CD}{3}$

Estudiante A. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante B. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema para realizar su construcción. Sin embargo, construye un triángulo isósceles con la ayuda de una mediatriz. Esta construcción puede verse como un ejemplo representante de una clase y como los argumentos del estudiante para justificar la veracidad de su solución se basan en éste, se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 20

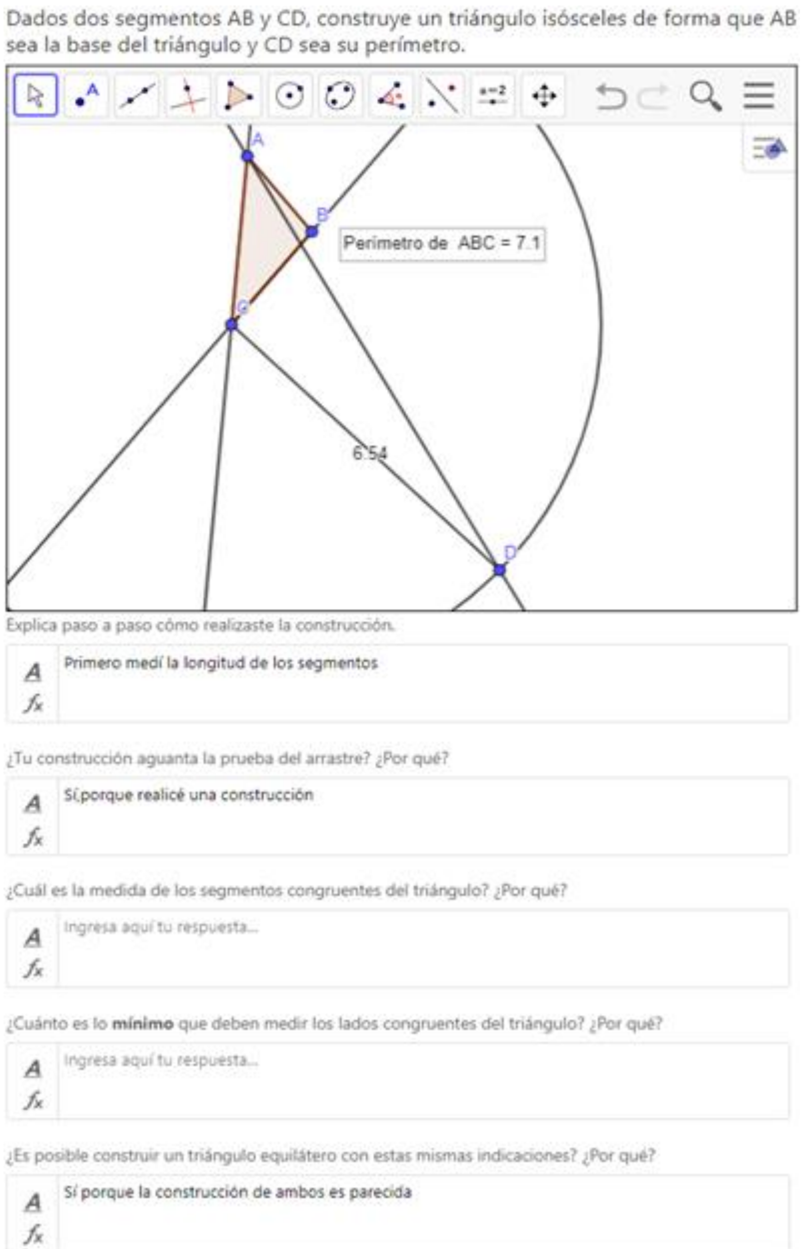
Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante B



Estudiante C. Para solucionar el problema, el estudiante mide el segmento CD e intenta, con el segmento AB y rectas, formar un triángulo cuyo perímetro sea esa medida. De esta manera se configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** pues el triángulo formado es un ejemplo arbitrario tomado por el estudiante y sus argumentos se basan en elementos visuales.

Figura 21

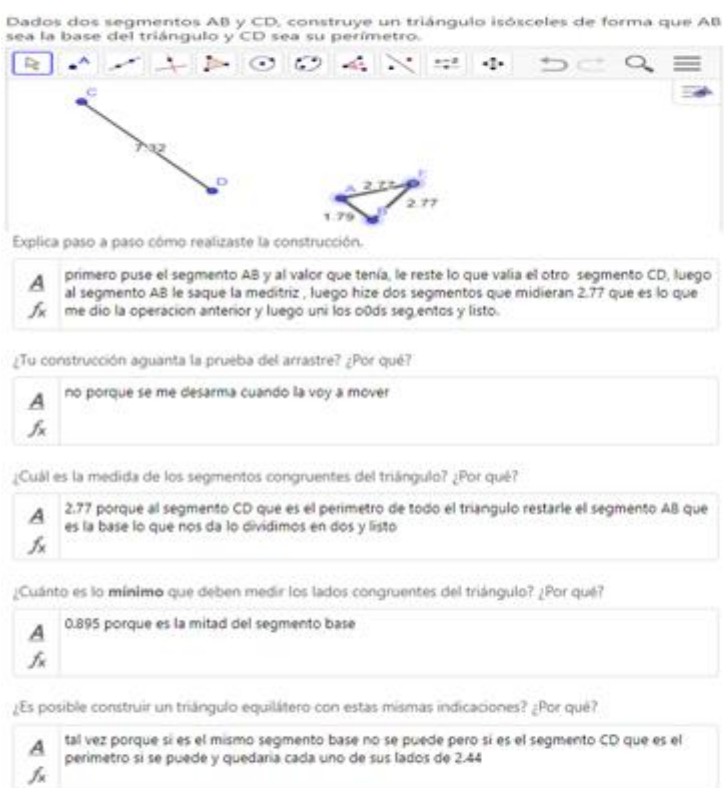
Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante C



Estudiante D. El estudiante toma la medida del segmento CD y con base en esta intenta construir un triángulo isósceles cuyo perímetro sea la medida del segmento CD, así como lo pide el problema. Para ello, toma un segmento AB, lo mide y resta esta medida de la medida del segmento CD. La diferencia la parte en dos, medida que toma para los lados congruentes del triángulo. El estudiante afirma haber trazado la mediatriz de AB, pero con la vista del protocolo de construcción se pudo determinar que esto no fue verdad. El triángulo que formó el estudiante es un ejemplo arbitrario y particular de la solución del problema y sus argumentos se basan en las medidas de los segmentos, es decir en las relaciones observadas en el ejemplo, por lo tanto, se configura un **Empirismo Ingenuo Inductivo.**

Figura 22

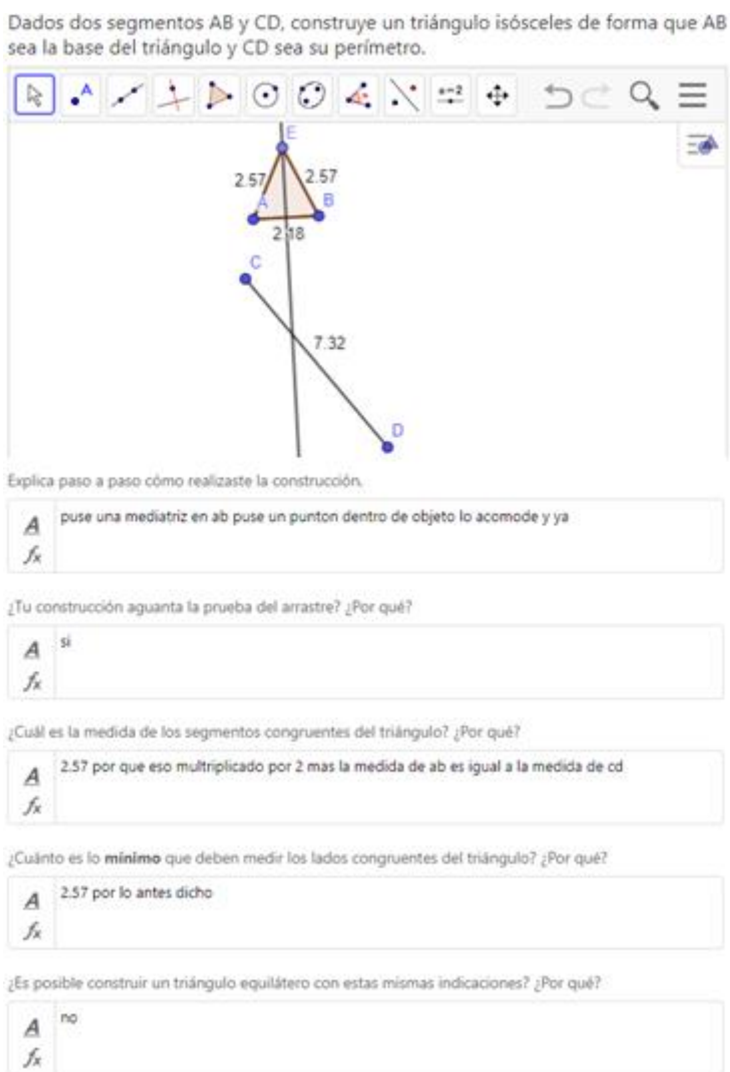
Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante D



Estudiante E. El estudiante midió el segmento dado CD y construyó, usando la mediatriz de $\overline{AB}$, un triángulo isósceles cuyo perímetro es igual a la medida de $\overline{CD}$. El triángulo construido es un ejemplo tomado cuidadosamente por el estudiante, quien está seguro de que es la solución del problema y basa sus argumentos en la forma en que obtuvo el ejemplo. Esto configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 23

Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante E

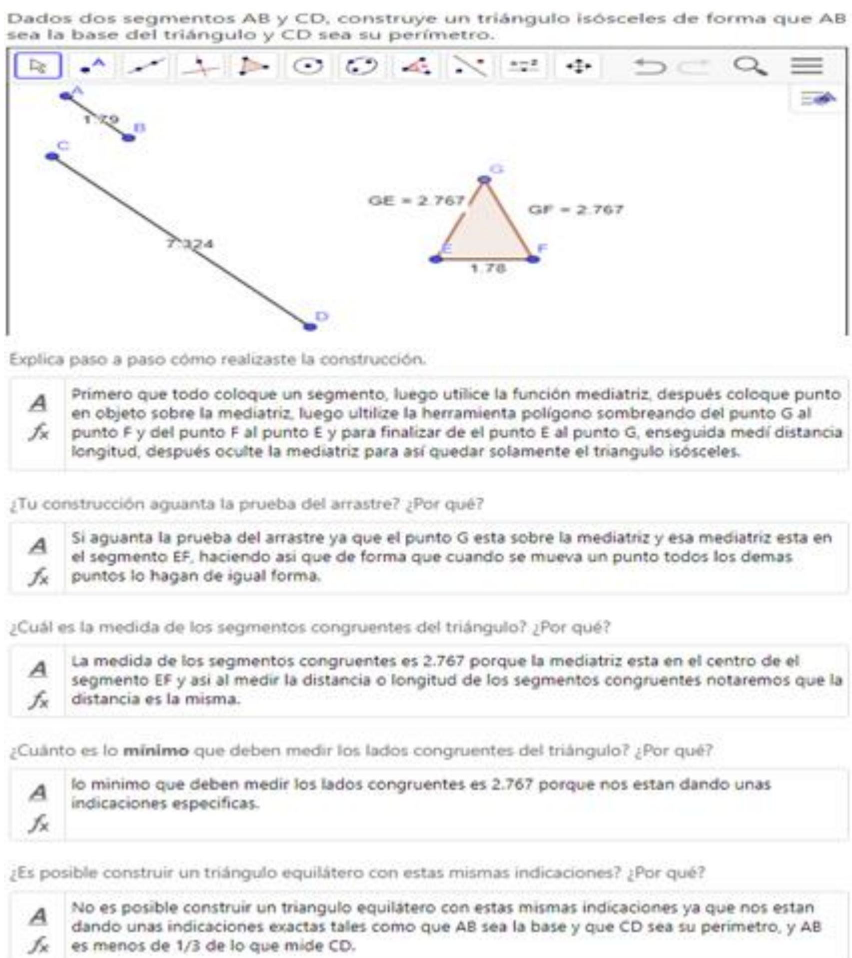


Estudiante F. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante G. El estudiante midió el segmento dado CD y construyó, usando la mediatriz de $\overline{EF}$, un triángulo isósceles cuyo perímetro es igual a la medida de $\overline{CD}$. El triángulo construido es un ejemplo tomado cuidadosamente por el estudiante, quien está seguro que es la solución del problema y basa sus argumentos en la forma en que obtuvo el ejemplo. Esto configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 24

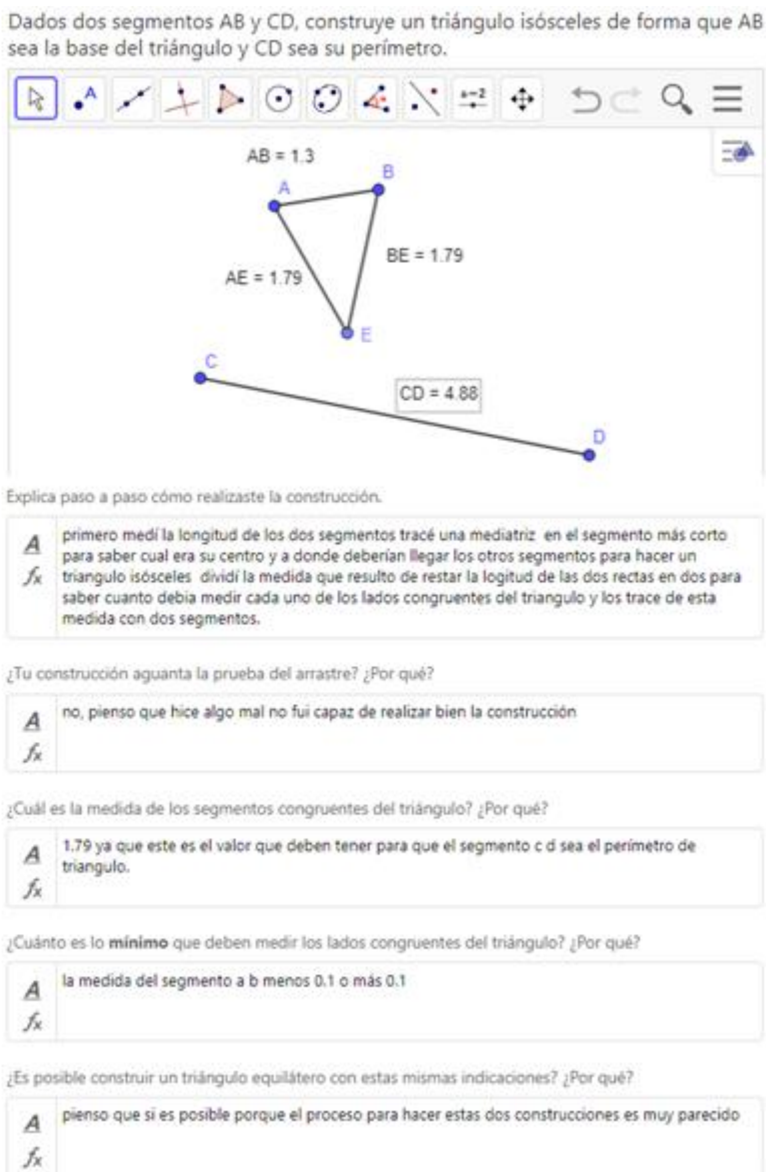
Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante G



Estudiante H. El estudiante midió el segmento dado CD y construyó, usando la mediatriz de $\overline{AB}$, un triángulo isósceles cuyo perímetro es igual a la medida de $\overline{CD}$. El triángulo construido es un ejemplo tomado cuidadosamente por el estudiante, quien está seguro de que es la solución del problema y basa sus argumentos en la forma en que obtuvo el ejemplo. Esto configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 25

Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante H

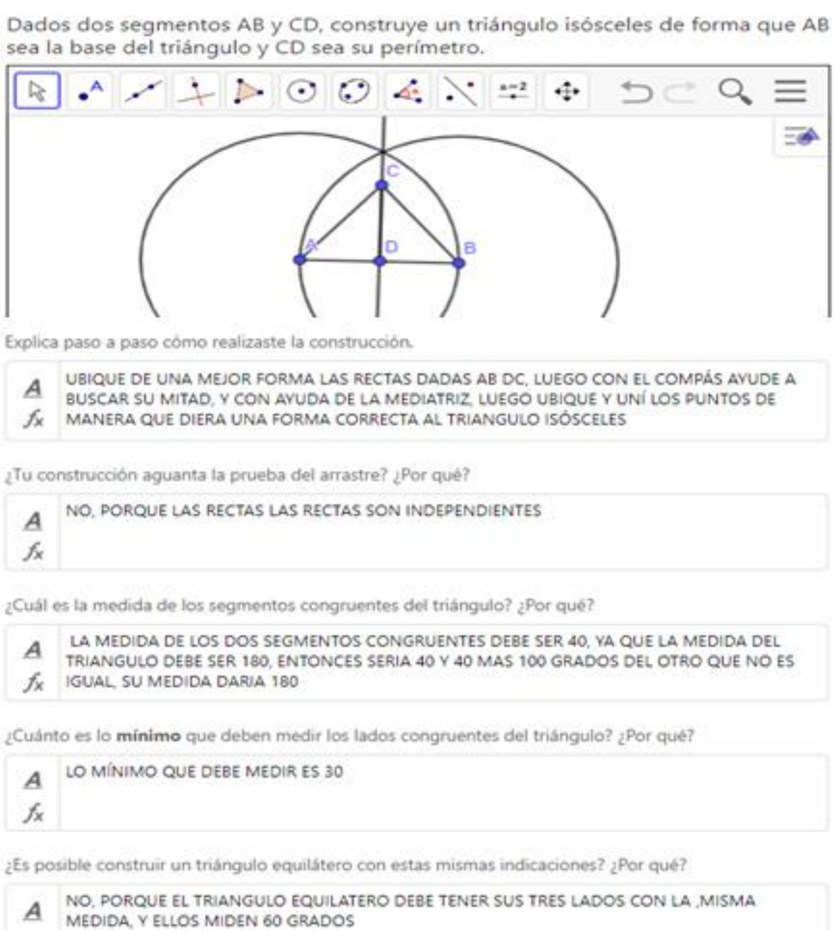


Estudiante I. El estudiante no realizó la actividad por lo que se categoriza como **Fallida.**

Estudiante J. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema para realizar su construcción. Sin embargo, construye un triángulo isósceles con la ayuda de una mediatriz. Esta construcción puede verse como un ejemplo representante de una clase y como los argumentos del estudiante para justificar la veracidad de su solución se basan en éste, se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 26

Fase diagnóstica inicial, Problema 4 Estudiante J



En las siguientes tablas se presentan de manera concreta las categorías pertenecientes a la solución que cada uno de los estudiantes dio a los problemas propuestos en la fase de diagnóstico inicial. Para ello se usan las iniciales de cada categoría detectada. A saber:

F: Fallida; **EIP:** Empirismo Ingenuo Perceptivo; **EII:** Empirismo Ingenuo Inductivo; **ECBE:** Experimento Crucial Basado en el Ejemplo; **ECC:** Experimento Crucial Constructivo; **EGA:** Ejemplo Genérico Analítico; **EGI:** Ejemplo Genérico Intelectual; **EMT:** Experimento Mental Transformativo; **EME:** Experimento Mental Estructural; **DFT:** Decuctiva Formal Transformativa; **DFE:** Deductiva Formal Estructural.

Tabla 1

Actividad diagnóstica, problemas 1 a 4

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
A	F	F	F	F
B	EIP	EIP	ECC	ECC
C	EIP	F	F	EIP
D	EIP	F	F	EII
E	EIP	F	ECC	ECC
F	EIP	F	F	F
G	F	ECC	ECC	ECC
H	EII	ECC	EMT	ECC
I	F	F	F	F
J	ECC	ECC	EIP	ECC

Fase de implementación experiencia en el aula. Habiendo terminado la fase diagnóstica, fue necesario esperar alrededor de dos semanas para iniciar la fase de implementación, pues, como se expresó en la descripción del método, los estudiantes estaban presentando evaluaciones bimestrales y posteriormente actividades de nivelación, lo cual podría interferir con su participación en esta fase. Es importante aclarar que no hubo una retroalimentación o discusión de las soluciones de los problemas del diagnóstico, puesto que se tenía previsto aplicarlo nuevamente como actividad final.

Esta fase se dividió en dos momentos: la intervención en la cual se plantearon cuatro problemas de construcción geométrica tomados del documento Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales MEN (2004), y adaptados para evidenciar los argumentos de los estudiantes al resolverlos usando GeoGebra. Y la actividad final, en la cual se plantearon los cuatro problemas aplicados en la fase diagnóstica y dos problemas más, uno adaptado del documento Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales MEN (2004) y el otro propuesto por nosotros.

Es importante resaltar que, al inicio de cada clase, el docente realizaba la solución del problema trabajado el día anterior a manera de retroalimentación, procurando mostrar una solución distinta a la presentada por los estudiantes y luego se daba un espacio para la discusión, si fuese necesario.

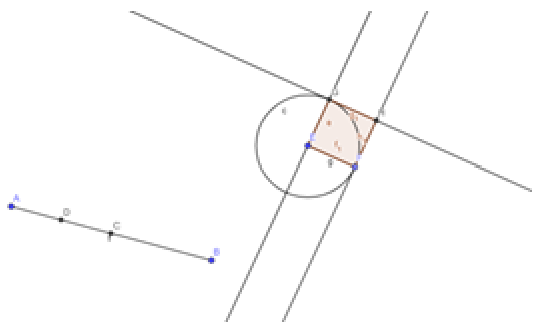
A continuación, presentamos los problemas de construcción planteados para esta fase, una posible solución y el análisis y caracterización de las soluciones presentadas por los estudiantes.

Problema N° 1. Dado un segmento, construye un cuadrado cuyo perímetro sea ese segmento.

Posible solución. Se espera que el estudiante tome un segmento cualquiera y lo divida en cuatro partes iguales usando la herramienta punto medio. Luego traslade la medida de una de esas partes usando el compás y construya ayudado de perpendiculares, paralelas y compás el cuadrado pedido.

Figura 27

Posible solución del problema N° 1 de la implementación

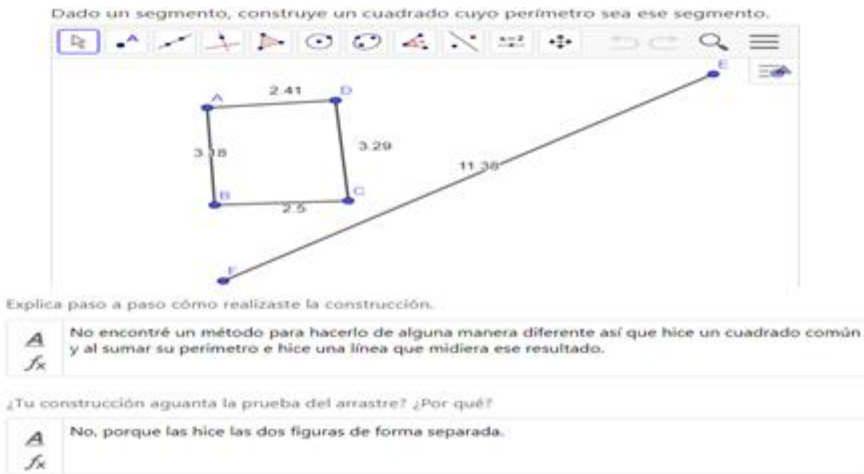


Estudiante A. El estudiante indica no haber encontrado ninguna forma diferente a la que usó para resolver el problema y aunque el estudiante expresa haber construido un cuadrado claramente no lo es. Tampoco se cumple que el perímetro del cuadrado sea la longitud del segmento.

Como el estudiante no identificó un camino para resolver el problema ni propuso una solución válida basada en por lo menos un ejemplo correcto, se categoriza como **Fallida**.

Figura 28

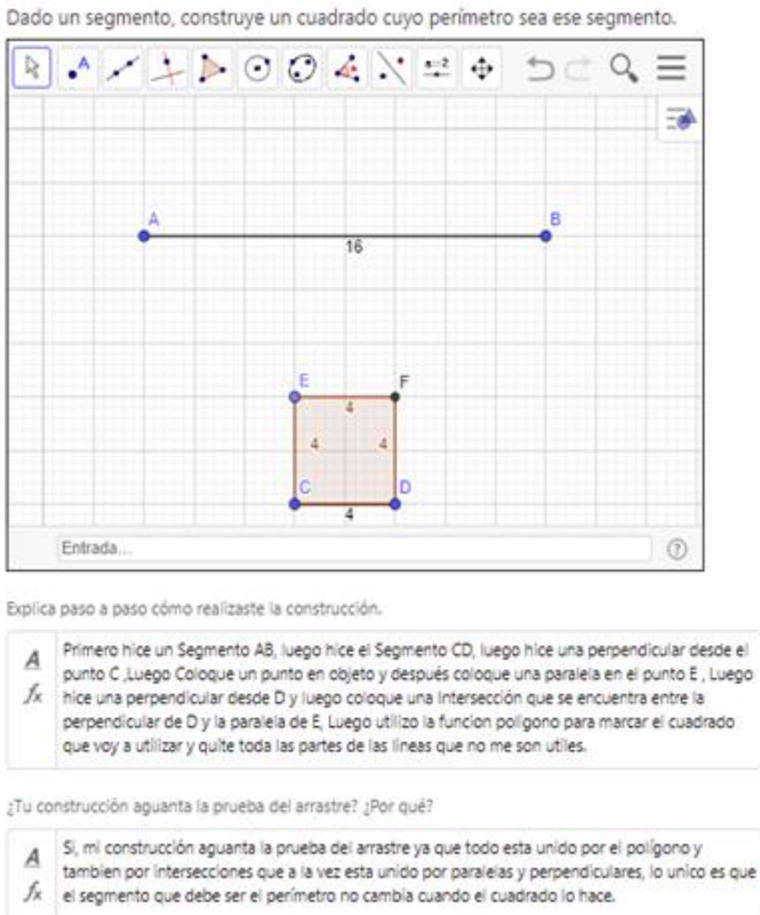
Implementación Problema 1 Estudiante A



Estudiante B. La solución del estudiante se basa en un ejemplo tomado sin ningún criterio (AB=16) y la construcción de un cuadrado cuyo lado mide un cuarto del segmento AB. Teniendo en cuenta que Toma un único ejemplo para argumentar su solución, la categoría a la cual corresponde su argumentación es al **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo**.

Figura 29

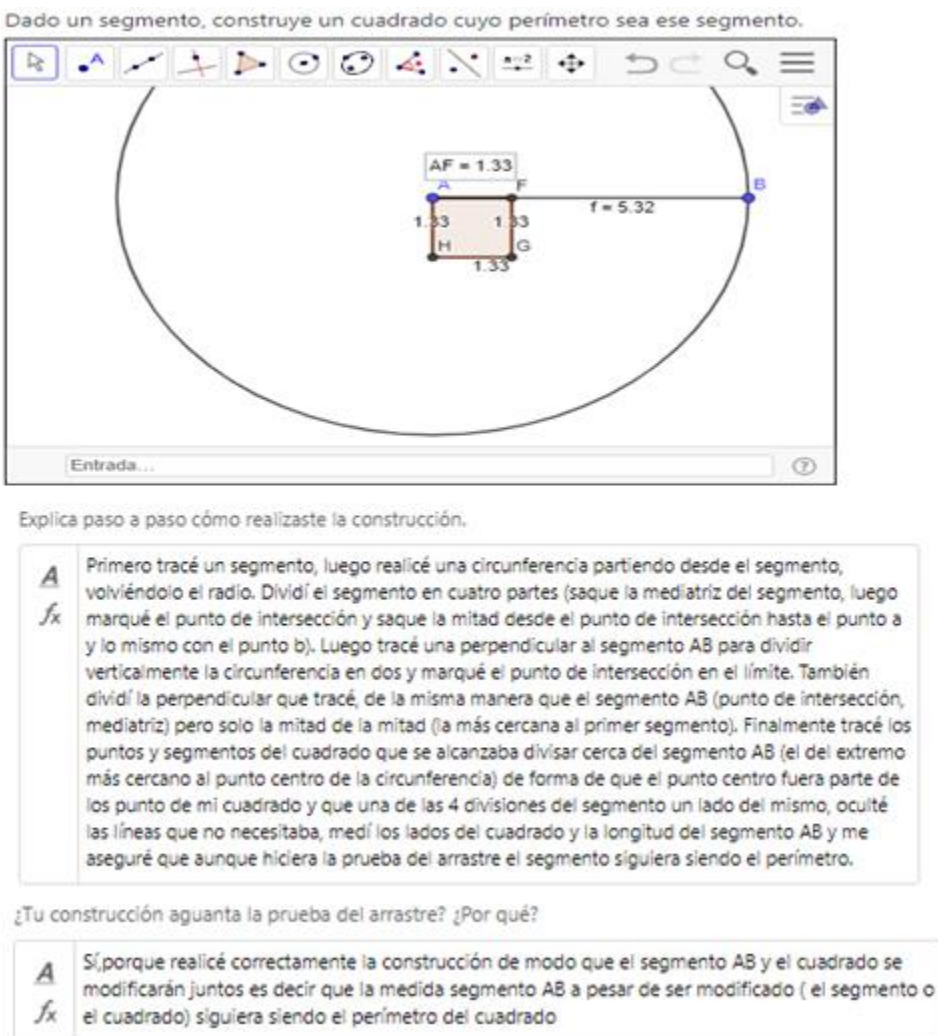
Implementación Problema 1 Estudiante B



Estudiante C. Para realizar su construcción, las estudiantes C y H hicieron equipo y se compartieron ideas, según lo expresaron ellas mismas. Por lo tanto, hay mucha similitud en las soluciones que proponen. En su construcción, el estudiante utiliza una secuencia lógica basada en definiciones y propiedades como lo son la perpendicularidad y el paralelismo en el cuadrado, también la definición de mediatriz y la equidistancia de los puntos de una circunferencia y su centro. Dado que no toma en cuenta la medida del segmento que usa, por lo que con él no se refiere a un ejemplo sino a una generalidad, su argumentación se caracteriza como un **Experimento Mental Estructural.**

Figura 30

Implementación Problema 1 Estudiante C



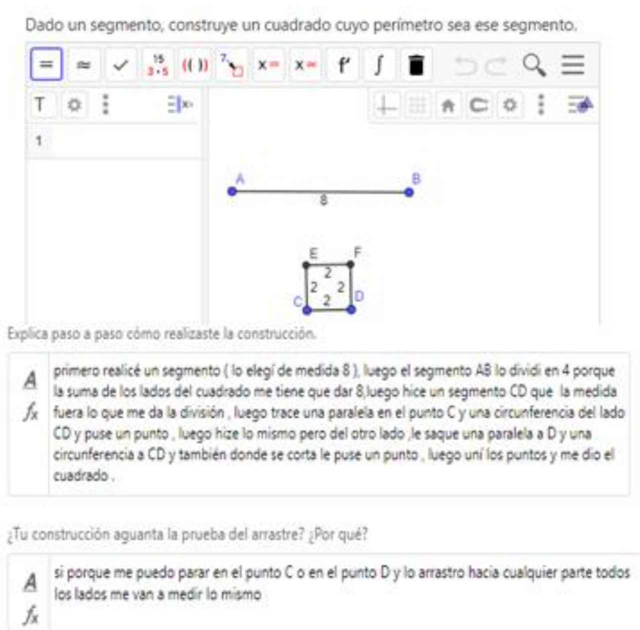
Estudiante D. La primera acción que realiza el estudiante es tomar un segmento AB de 8 unidades de longitud, es decir un ejemplo arbitrario. Sin embargo, construye un cuadrado cuyo lado es la cuarta parte del segmento que escogió, con el fin de que su perímetro coincida con la longitud de este. Su construcción es correcta por cuanto usa paralelas y perpendiculares para realizarla, aunque en su explicación solo menciona paralelas.

El estudiante escoge este ejemplo y realiza su construcción con la convicción de que en cualquier otro ejemplo también va a suceder lo mismo: El perímetro del cuadrado es igual a la longitud del segmento, lo que se evidencia en su respuesta a la pregunta si la construcción aguanta el arrastre

Según lo anterior, la argumentación del estudiante se categoriza en un **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo**.

Figura 31

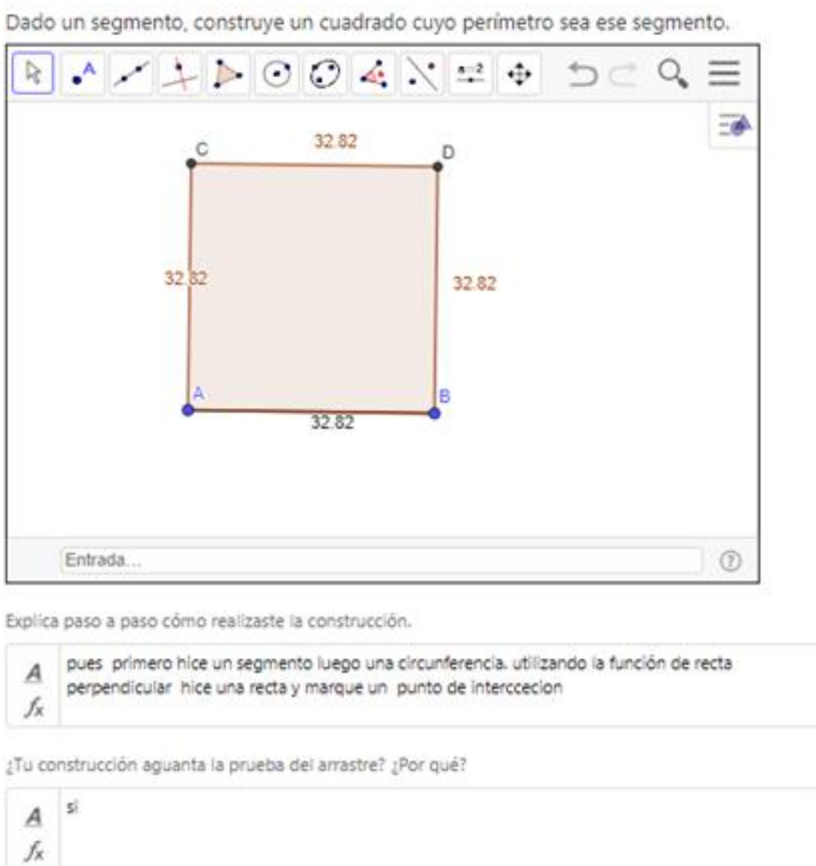
Implementación Problema 1 Estudiante D



Estudiante E. El estudiante no tiene en cuenta los datos iniciales del problema. Para su construcción, toma un segmento cualquiera AB y usando perpendiculares y circunferencias, construye un cuadrado de lado AB. Aunque este no sea la solución del problema, se puede ver un ejemplo particular tomado de manera arbitraria, que el estudiante toma y justifica como solución con elementos matemáticos como las perpendiculares, por lo que se configura un **Empirismo Ingenuo Inductivo.**

Figura 32

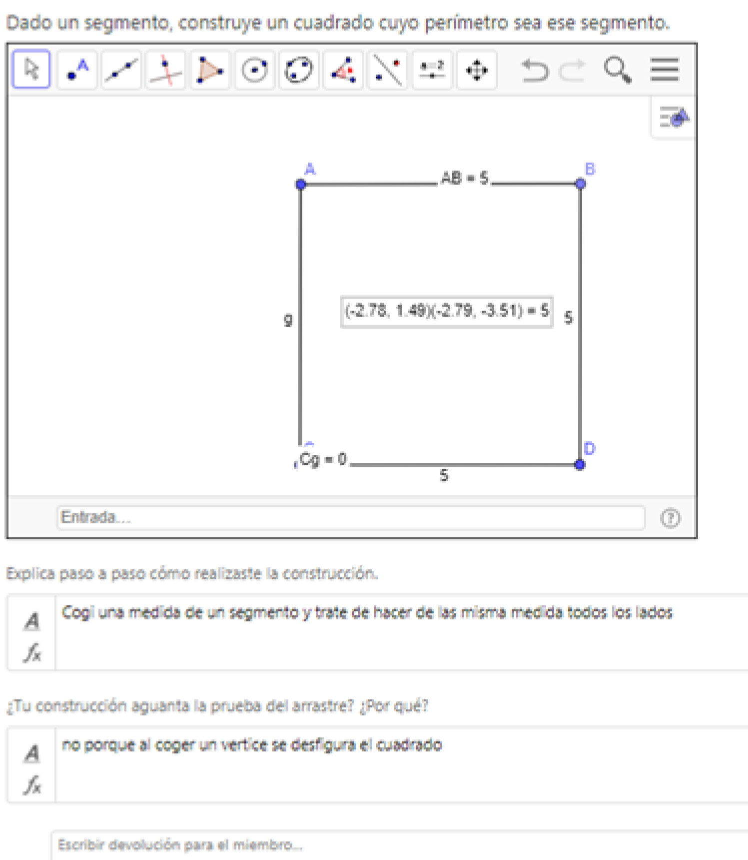
Implementación Problema 1 Estudiante E



Estudiante F. El estudiante toma un segmento cualquiera y realiza un dibujo semejante a un cuadrado. Aunque es consciente de que su construcción no es correcta porque no resiste la prueba del arrastre, no propone ninguna otra solución. No puede ubicarse en un Empirismo Ingenuo Perceptivo porque su construcción no apunta a la solución del problema planteado. Por lo anterior, la argumentación del estudiante se ubica en la categoría **Fallida,** por cuanto no es posible inferir nada de su respuesta.

Figura 33

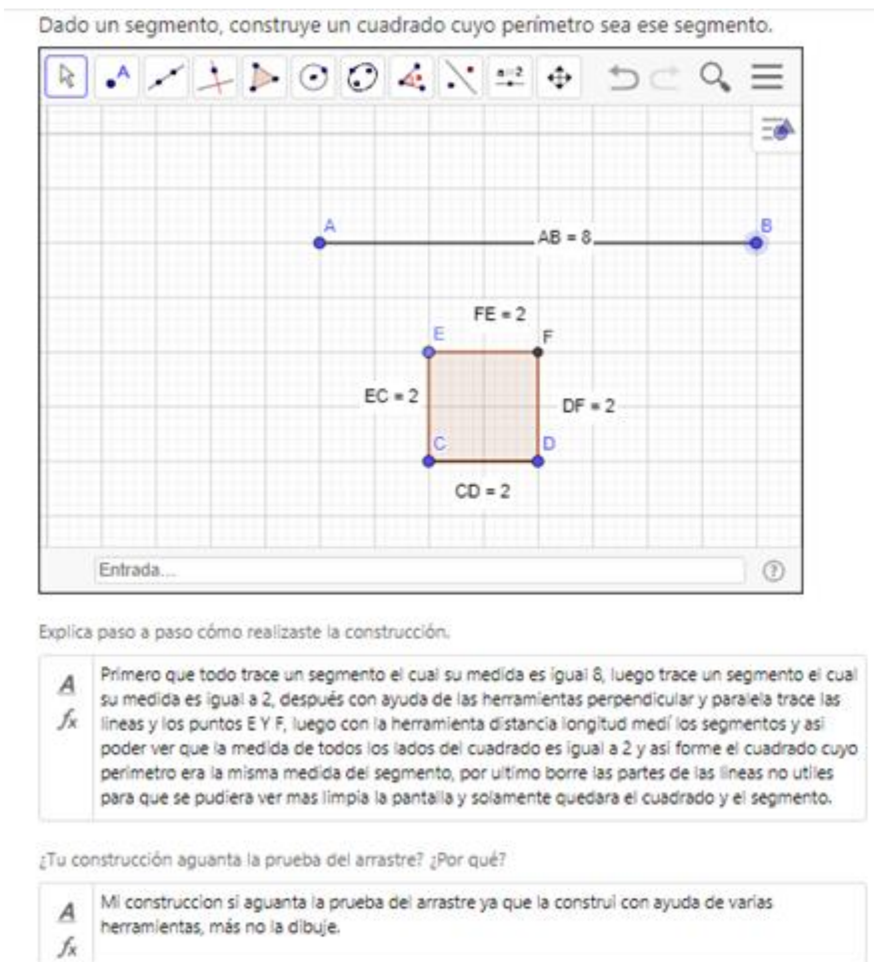
Implementación Problema 1 Estudiante F



Estudiante G. El estudiante toma un segmento AB de 8 unidades de longitud y otro EF de 2 unidades. Con este último construye un cuadrado cuyo perímetro es del segmento AB, con lo que asegura haber resuelto el problema. Con esto se infiere que está convencida de que lo que sucede en este ejemplo, sucederá en cualquier otro caso por lo que se denota un **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo.**

Figura 34

Implementación Problema 1 Estudiante G

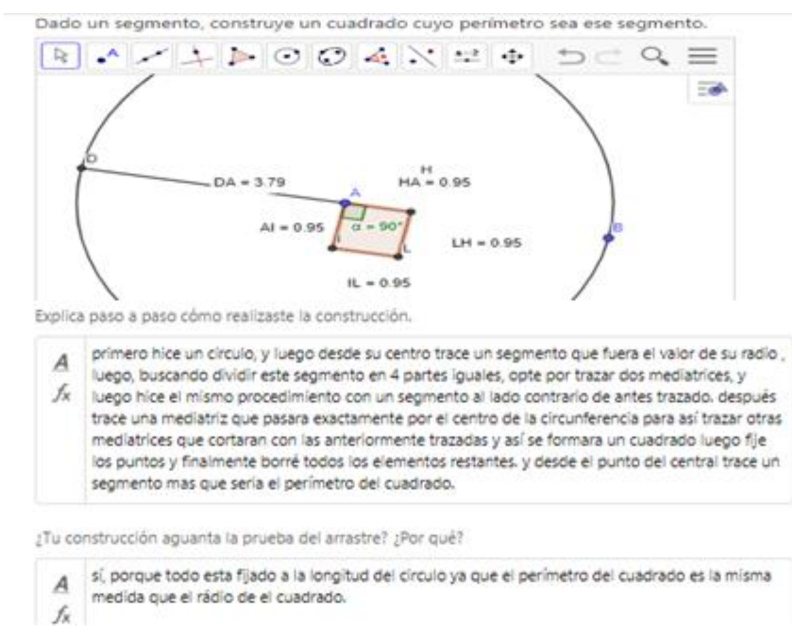


Estudiante H. El estudiante toma un segmento AB sin importar su longitud y usando mediatrices lo divide en cuatro segmentos congruentes. Luego usa una circunferencia de radio AB para encontrar otro segmento perpendicular y congruente al anterior y lo divide en cuatro segmentos congruentes usando mediatrices. Con lo que encuentra los vértices del cuadrado buscado. En la exposición que hace a sus compañeros comenta que con este procedimiento "tenía varios cuadrados para elegir" refiriéndose a los cuatro cuadrados que formaron las mediatrices que trazó.

Por cuanto el estudiante usa una secuencia lógica basada en definiciones (mediatriz, paralelismo, perpendicularidad, equidistancia, etc.) y datos del problema para argumentar la solución del problema, su argumentación se categoriza como un **Experimento Mental Estructural**.

Figura 35

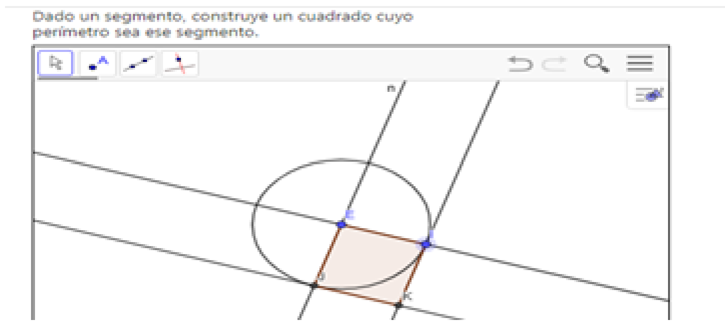
Implementación Problema 1 Estudiante H



Estudiante I. El estudiante no da ninguna justificación o argumento sobre la solución planteada, Por lo que no se puede inferir nada de ella. De modo que se ubica en una categoría **Fallida.**

Figura 36

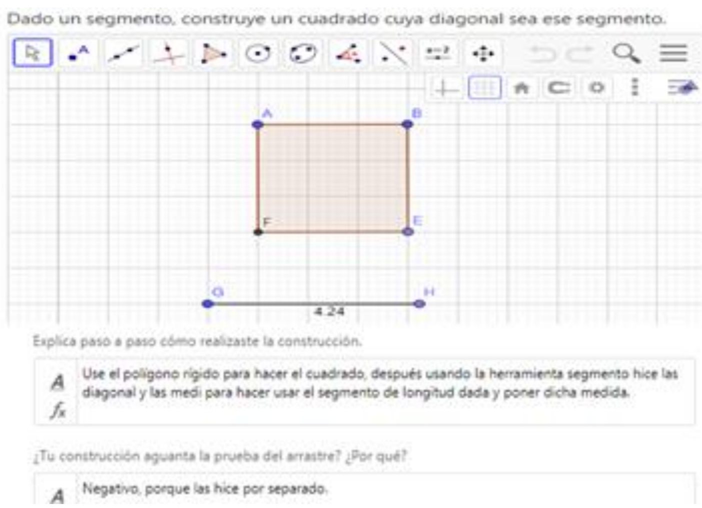
Implementación Problema 1 Estudiante I



Estudiante J. El estudiante toma un segmento cualquiera y realiza un dibujo semejante a un cuadrado. Al parecer no tiene claro en qué consiste la prueba del arrastre, pues asegura que su construcción sí la resiste. No puede ubicarse en un Empirismo Ingenuo Perceptivo porque su construcción no apunta a la solución del problema planteado. Por lo anterior, la argumentación del estudiante se ubica en la categoría **Fallida,** por cuanto no es posible inferir nada de su respuesta.

Figura 37

Implementación Problema 1 Estudiante J

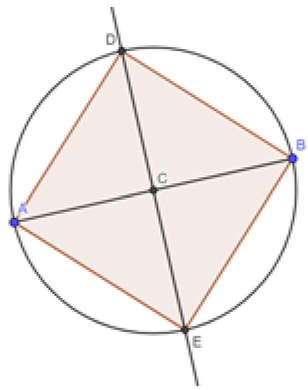


Problema N° 2. Dado un segmento, construye un cuadrado cuya diagonal sea ese segmento.

***Posible solución*.** El estudiante puede construir un segmento y su mediatriz, y desde el punto de intersección una circunferencia hasta uno de los extremos del segmento. Con los extremos del segmento trazado y los puntos de intersección entre la circunferencia y la mediatriz podrá construir el cuadrado pedido.

Figura 38

Posible solución del problema N° 2 de la implementación



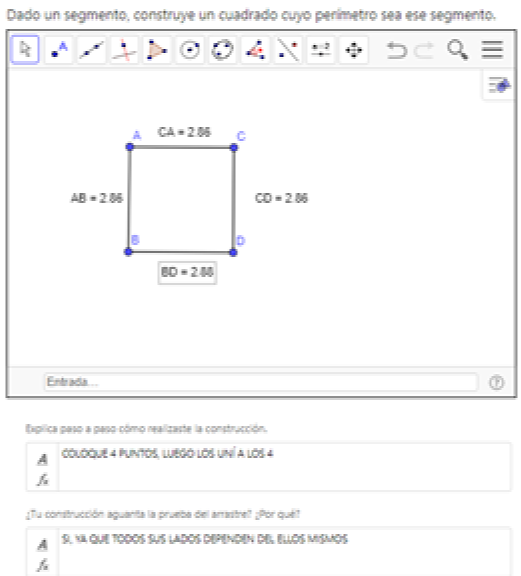
Estudiante A. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema, y construye su cuadrado usando la cuadrícula del software para lograr segmentos congruentes y ángulos rectos, y se asegura de que no se deforme con la prueba del arrastre al usar la herramienta polígono rígido, la cual solo crea un polígono que solo acepta dos transformaciones: rotación y traslación, conservando invariantes propiedades como la longitud de los lados, el área o el perímetro. Con esta acción el estudiante toma un único ejemplo para solucionar el problema y usando la herramienta de medición del software calcula la longitud de la diagonal para luego construir el segmento GH con lo que concluye su construcción.

Ante la pregunta ¿tu construcción aguanta la prueba del arrastre? El estudiante responde que no la aguanta y argumenta que se debe a que hizo las construcciones (el cuadrado y el segmento) por separado, es decir que entiende que no existe una relación o dependencia entre los dos.

Debido a que ni su construcción ni sus argumentos escritos apuntan a la solución del problema, se categoriza como **Fallida.**

Figura 39

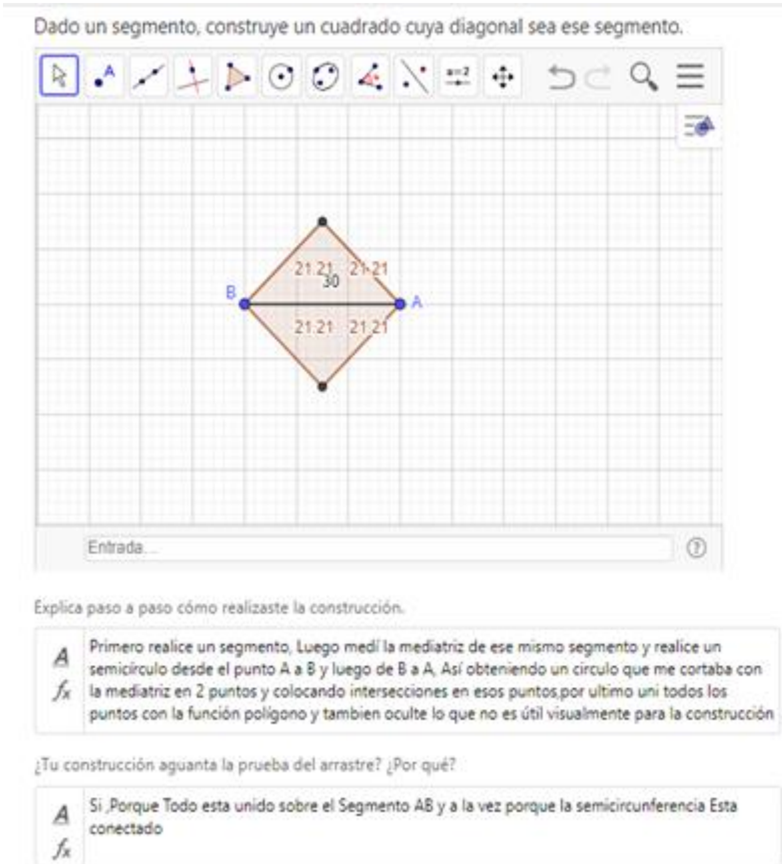
Implementación Problema 2 Estudiante A



Estudiante B. En su construcción el estudiante usa elementos generales como un segmento AB, su mediatriz, semicircunferencias y puntos de intersección, con lo cual se configura como un ejemplo representante de una clase y escogido cuidadosamente. Lo que quiere decir que se presenta un **Ejemplo Genérico Analítico,** pues el estudiante lo justifica como solución al problema basándose en propiedades observadas en la construcción misma, como la equidistancia entre los vértices del cuadrado y el centro de las semicircunferencias.

Figura 40

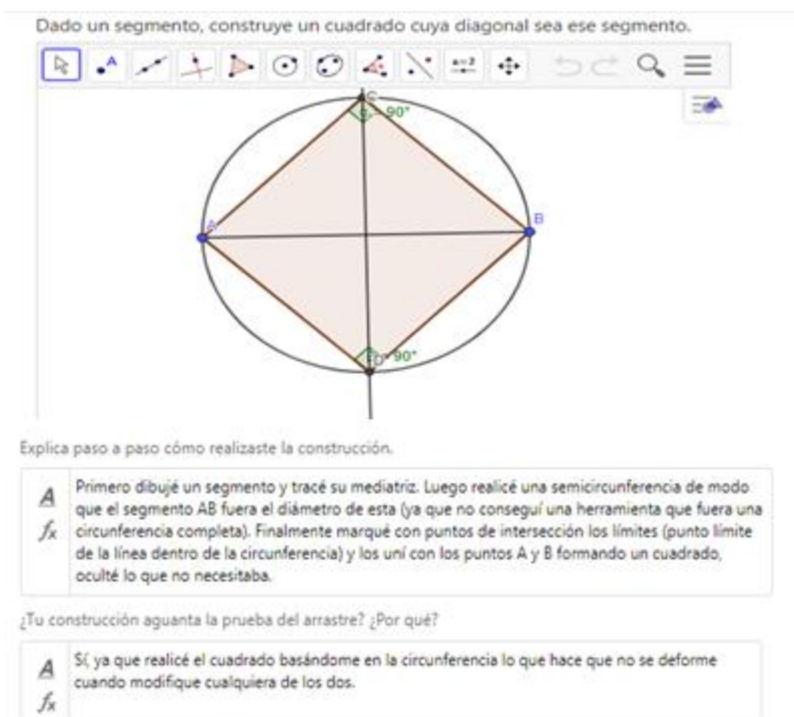
Implementación Problema 2 Estudiante B



Estudiante C. El estudiante solucionó el problema de construcción de manera correcta usando la mediatriz del segmento dado y dos semicircunferencias de diámetro AB. Decide usar semicircunferencias al no encontrar la forma de trazar una circunferencia a partir de su diámetro, lo que ella llama una "circunferencia completa." Sin embargo, entre sus argumentos escritos no expresa porqué decide usar la mediatriz y una circunferencia. Aunque se intuye que ella entiende que los puntos encontrados serán equidistantes, y de hecho habla de la equidistancia de los puntos de una circunferencia al centro, no usa la mediatriz para argumentar la equidistancia entre los vértices. Los argumentos usados para la solución del problema se categorizan como un **Experimento Mental Estructurado** por cuanto los elementos usados por el estudiante para su construcción representan una categoría (mediatriz y circunferencia), y usa propiedades que encontró en su exploración.

Figura 41

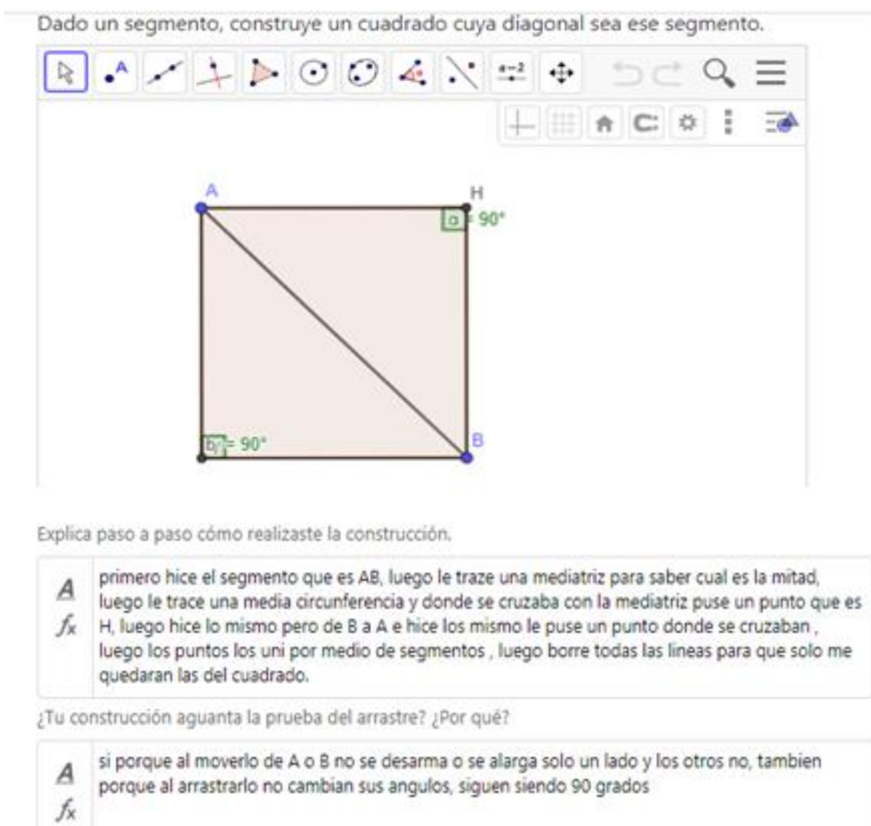
Implementación Problema 2 Estudiante C



Estudiante D. El estudiante soluciona el problema correctamente tomando un segmento cualquiera y hallando su mediatriz con el fin de determinar su punto medio, aunque no lo usa, pues traza semicircunferencias y no una circunferencia punto centro. Con esto encuentra los vértices del cuadrado pedido. Teniendo en cuenta que en sus argumentos escritos no indica por qué decidió usar la mediatriz y las semicircunferencias, fue necesario hablar con el estudiante vía WhatsApp, pero no pudo responder de manera coherente. Por lo anterior, se establece la categoría **Experimento Mental Estructurado,** por cuanto la construcción es un ejemplo representante de una clase, tomado cuidadosamente y los argumentos que justifican que sea la solución son las propiedades y relaciones que el estudiante observa o descubre en ella.

Figura 42

Implementación Problema 2 Estudiante D

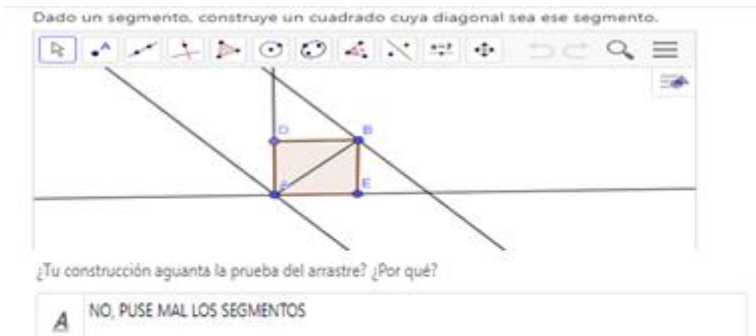


Estudiante E. El estudiante pidió compartir su construcción con sus compañeros e inicia trazando un segmento AB y construye una perpendicular por cada extremo. Después traza un segmento AC, y dice: "puse un segmento recto, seguí rectificando el segmento hasta que yo pensé que fuera lo más recto posible." Según su construcción, al decir que es un segmento recto, el estudiante se refiere a un segmento vertical. Después traza el segmento BD para encontrar el punto D. Cuando se le pregunta si el punto D podía estar en cualquier parte, el estudiante responde: "No porque como un cuadrado es... pues todos sus lados son rectos por decirlo así, entonces yo lo medí lo más recto que pude." En esta acción el estudiante busca la perpendicularidad de los segmentos AC y BD basado en elementos visuales. Después traza una paralela a BD por A y traza un segmento BE. Cuando se le pregunta si ese segmento tenía alguna característica particular, el estudiante dice "es un segmento normal que une estos dos puntos (se refiere a BE), que era lo que yo estaba buscando, unir estos dos puntos, porque aquí hay una brecha, por decirlo así, entonces tenía que unirla." Por último, une los puntos A, B, D y E para finalizar su construcción.

Los argumentos que da el estudiante al construir su solución están, en su mayoría, basados en ejemplos específicos y en elementos visuales, por lo que se categorizan en un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 43

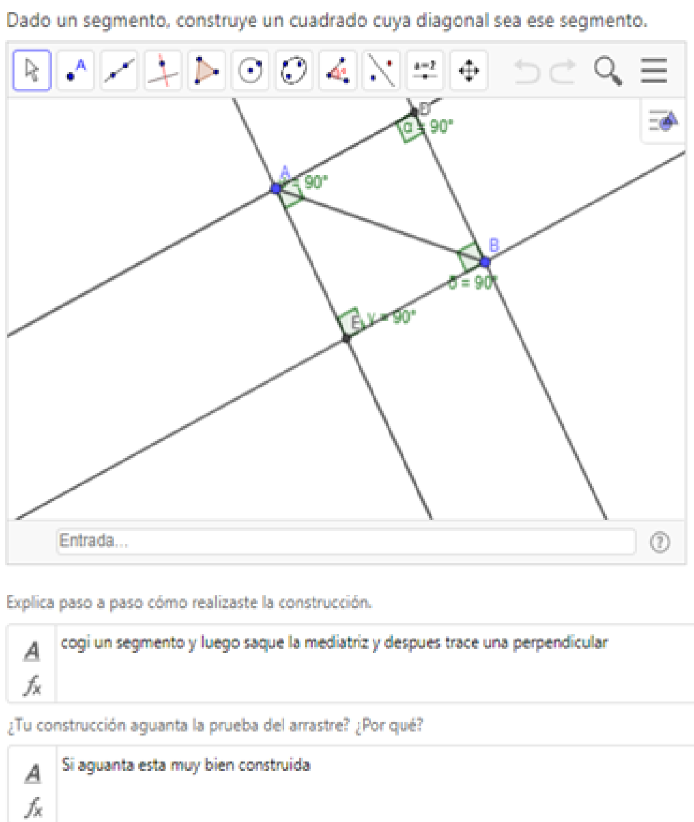
Implementación Problema 2 Estudiante E



Estudiante F. El estudiante soluciona correctamente el problema, trazando un segmento inicial y su mediatriz, con lo cual determina su punto de corte. Luego traza una circunferencia con centro en este último punto y diámetro el segmento inicial. Tomando como vértices los extremos del segmento inicial y los puntos de corte de la circunferencia y la mediatriz, construye el cuadrado pedido. Sin embargo, en la explicación del paso a paso de su construcción, solo menciona el segmento, la mediatriz y una perpendicular. Esta explicación débil junto con el hecho de que en el cierre de la clase esta construcción había sido expuesta por otra compañera, indican que el estudiante imitó lo que su compañera realizó. Al verificar la última fecha de modificación se comprueba que la construcción se terminó al día siguiente de la clase, por lo que se procede a solicitar al estudiante sus argumentos sobre la construcción a través de una conversación WhatsApp. Cuando se le pregunta por el uso de la mediatriz en su construcción dice que la usó para hallar el punto medio del segmento y así poder construir una circunferencia con centro en ese punto, y luego encontrar los puntos de corte entre la circunferencia y la mediatriz. Hasta ahí sus argumentos parecen pertenecer a un **Experimento Mental Estructural,** por cuanto ha usado una secuencia lógica basada en definiciones y propiedades matemáticas. Sin embargo, no pudo argumentar de la misma manera porqué los puntos de corte hallados debían ser los vértices del cuadrado, como si no entendiera la equidistancia de la mediatriz a los extremos del segmento. Al preguntarle por la distancia entre un par de puntos ubicados en la mediatriz y los extremos del segmento, tuvo que medir para determinar que eran iguales. Con lo anterior se infiere que los argumentos del estudiante configuran un **Ejemplo Genérico Analítico** pues se basa en ejemplos (elementos) representantes de una clase y usa propiedades descubiertas en estos.

Figura 44

Implementación Problema 2 Estudiante F

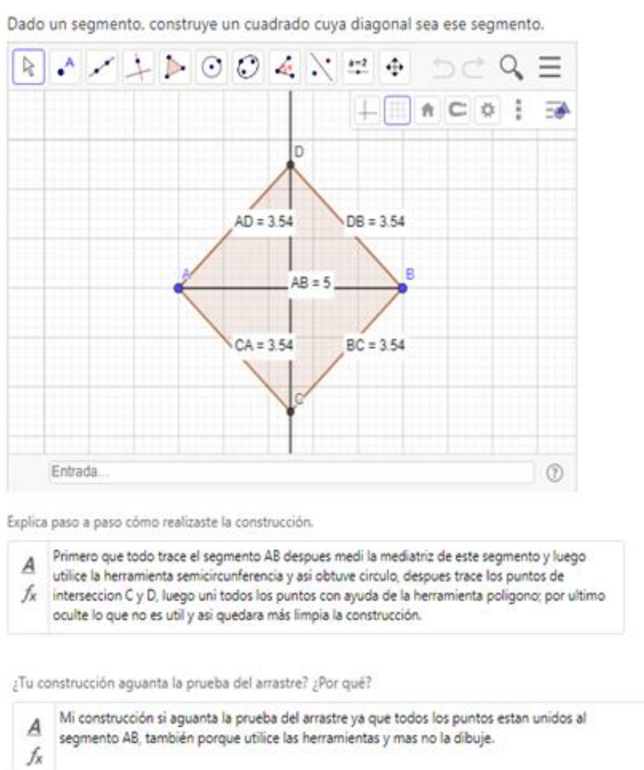


Estudiante G. La solución del estudiante es correcta e igual a la expuesta en el cierre de la clase. Sin embargo, su argumento sobre el porqué aguanta la prueba del arrastre no son precisos y se basan en el uso de las herramientas del software. Fue necesario entonces dialogar con ella a través de WhatsApp, y al preguntarle sobre el uso de la mediatriz en su construcción respondió que lo había hecho para hallar los puntos de corte, pero que no sabía por qué esos puntos eran los que necesitaba para su cuadrado. Expresó, además, haber solucionado el problema, guiándose por la construcción que expuso una de sus compañeras.

Por lo tanto, su argumento se caracteriza en un **Empirismo Ingenuo Perceptivo**, por cuanto al medir tomaría solo un arbitrario ejemplo y elementos visuales.

Figura 45

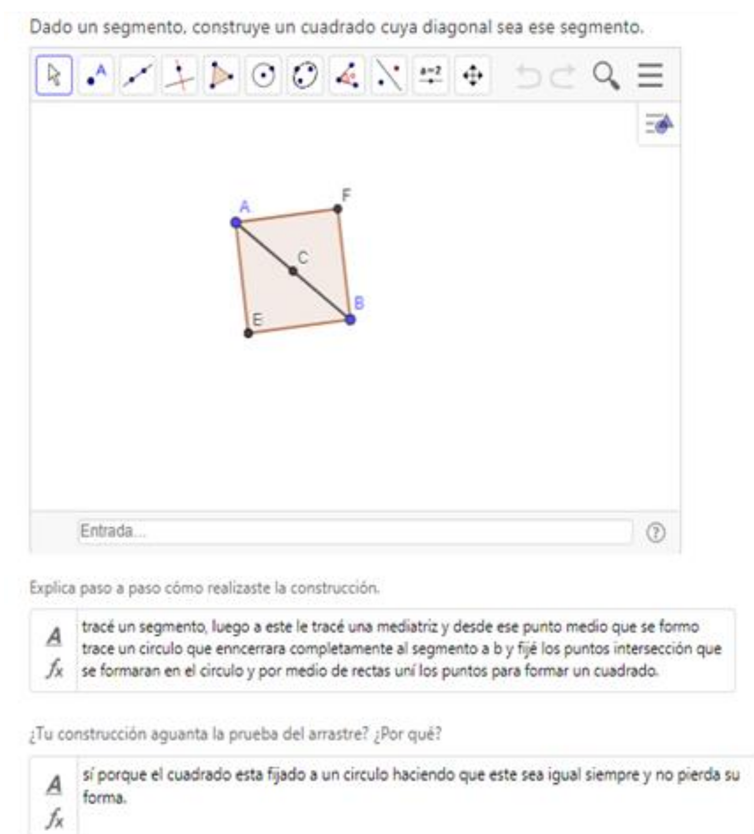
Implementación Problema 2 Estudiante G



Estudiante H. El estudiante fue una de las primeras en terminar y exponer su solución. Trazó un segmento AB y su mediatriz; desde el punto de corte trazó una circunferencia hasta A y tomó las intersecciones con la mediatriz junto con los extremos del segmento AB para construir el cuadrado pedido. Aunque en las respuestas a las preguntas no lo expresa, en su exposición el estudiante deja claro que existe una equidistancia entre los puntos por el uso de la mediatriz y también de los puntos al centro, por el uso de la circunferencia. Podemos caracterizar los argumentos del estudiante como un **experimento mental intelectual,** por cuanto usa una secuencia lógica basada en datos del problema, definiciones, axiomas o teoremas aceptados.

Figura 46

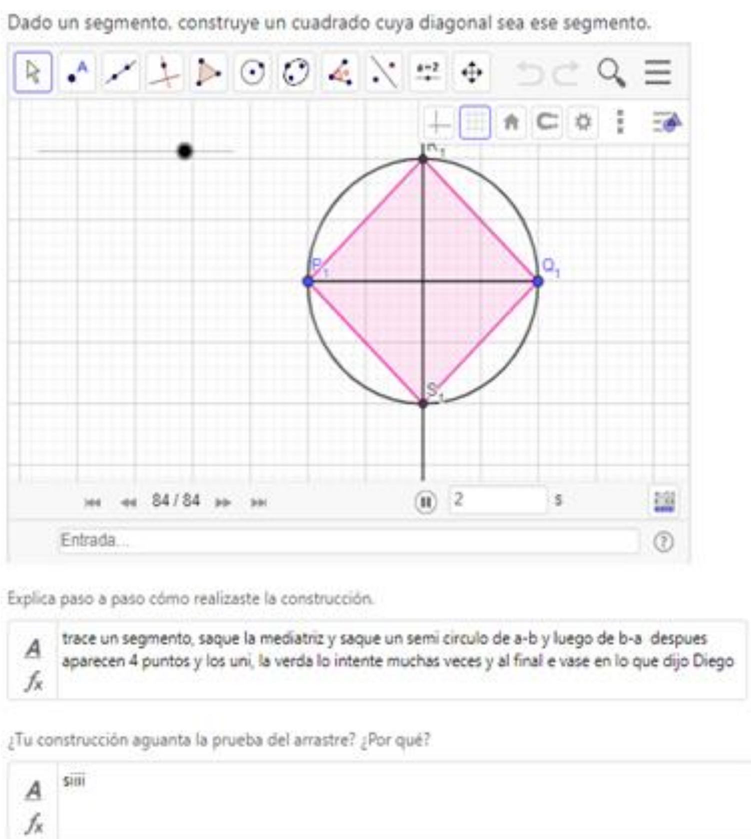
Implementación Problema 2 Estudiante H



Estudiante I. Para su construcción el estudiante realizó una exploración previa en la que usó puntos, segmentos, rectas y circunferencias sin ningún criterio, buscando construir el cuadrado pedido. Sin embargo, como ella misma lo expresa, al final imitó la construcción de uno de sus compañeros para lograr la suya. Las acciones del estudiante en su construcción pueden tomarse como un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** pues en su búsqueda solo usa ejemplos arbitrarios y elementos visuales.

Figura 47

Implementación Problema 2 Estudiante I



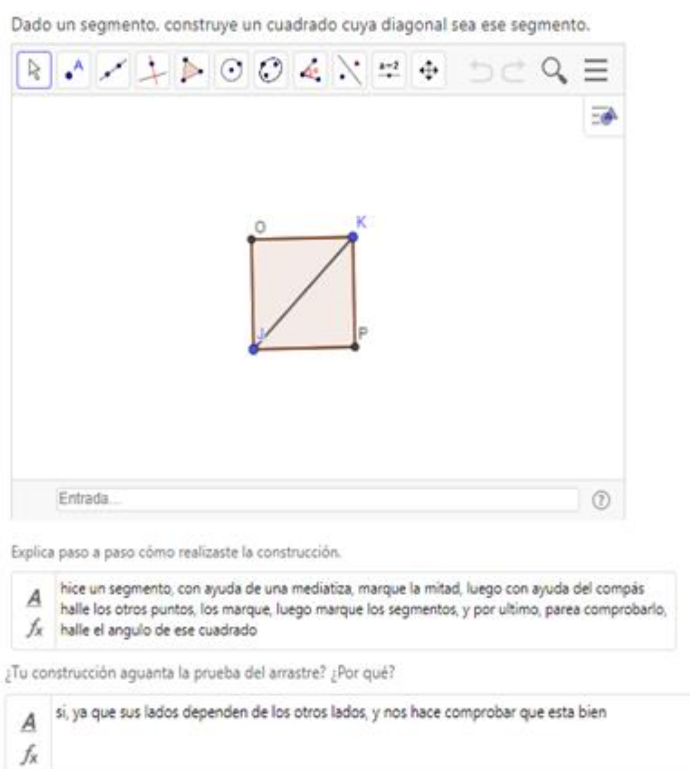
Estudiante J. Para su construcción el estudiante realizó una exploración previa en la que usó puntos, segmentos, rectas y circunferencias sin ningún criterio, buscando construir el cuadrado pedido. Al final logró solucionar el problema al realizar una construcción igual a la de sus compañeros. Como en sus argumentos no expresa las razones de los objetos matemáticos que usó en su construcción, fue necesario dialogar con ella vía WhatsApp.

Las acciones del estudiante en su construcción pueden tomarse como un Empirismo Ingenuo Perceptivo, pues en su búsqueda solo usa ejemplos arbitrarios y elementos visuales.

Las acciones del estudiante en su construcción pueden tomarse como un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** pues en su búsqueda solo usa ejemplos arbitrarios y elementos visuales.

Figura 48

Implementación Problema 2 Estudiante J

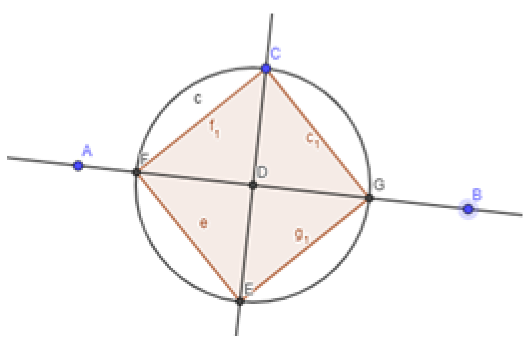


Problema N° 3. A partir de una recta y un punto A, construye un cuadrado tal que A sea un vértice del cuadrado y la recta contenga su diagonal.

Posible solución. se espera que los estudiantes tracen una recta AB y un punto C cualquiera. Si ubican el punto sobre la recta, deberían deducir que se trata del mismo problema anterior. En caso de escoger un punto exterior, deberían trazar una perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ por C y encontrar el punto de intersección D. Luego trazar una circunferencia con centro en D por C. Los vértices del cuadrado pedido serán el punto C y los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas trazadas.

Figura 49

Posible solución del problema N° 3 de la implementación



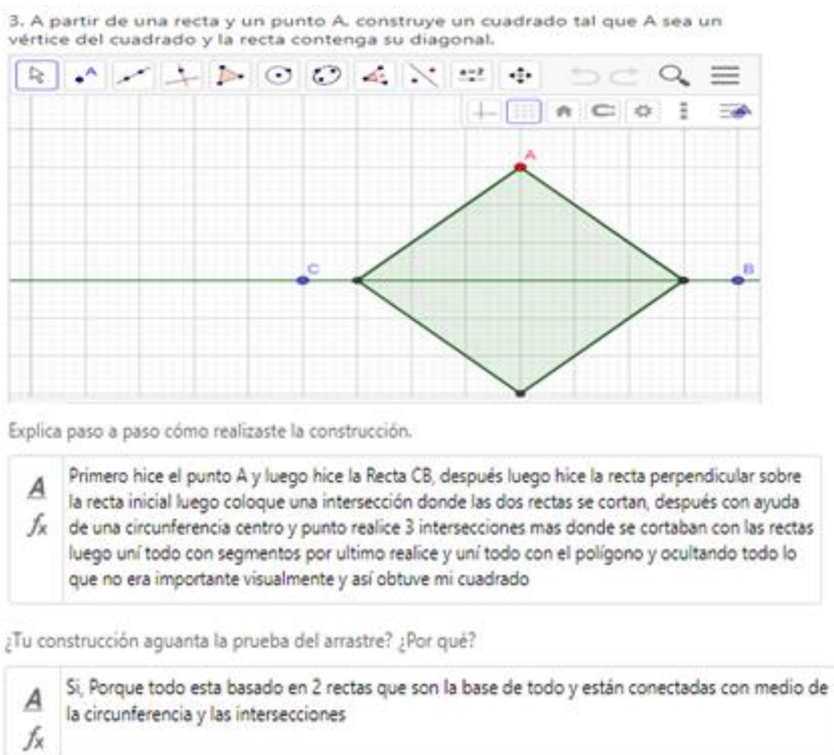
Estudiante A. No realizó la actividad luego se toma como categoría **Fallida.**

Estudiante B. Para su construcción el estudiante traza un punto A y una recta BC y usa elementos generales como rectas perpendiculares y circunferencias. Sin embargo, debido a que esta solución fue socializada por una compañera en el cierre de la clase, fue necesario hablar con él vía WhatsApp sobre sus acciones. El estudiante dice haber trazado la perpendicular y la circunferencia puesto que los puntos de intersección entre ellos estarían a la misma distancia del centro de la circunferencia y que por ello, tanto la recta inicial como la perpendicular serían mediatrices de los segmentos definidos por los puntos encontrados.

Los argumentos del estudiante se caracterizan como un **Ejemplo Genérico Analítico** por cuanto toma cuidadosamente un ejemplo representante de una clase y lo justifica como solución mediante propiedades y relaciones que encuentra en él.

Figura 50

Implementación Problema 3 Estudiante B



Estudiante C. En su construcción el estudiante usa elementos generales como perpendiculares y circunferencias. Sin embargo, en su paso a paso no argumenta por qué los puntos de intersección entre la circunferencia y las rectas son los vértices del cuadrado. Por lo que se le indaga vía WhatsApp:

Profesor: quisiera saber cómo dedujo que los puntos de intersección de las rectas con la circunferencia eran los vértices del cuadrado pedido.

Estudiante: Porque dividí la circunferencia en 4 y pues los puntos equidistantes al centro

Profesor: ¿Y los puntos son equidistantes entre sí?

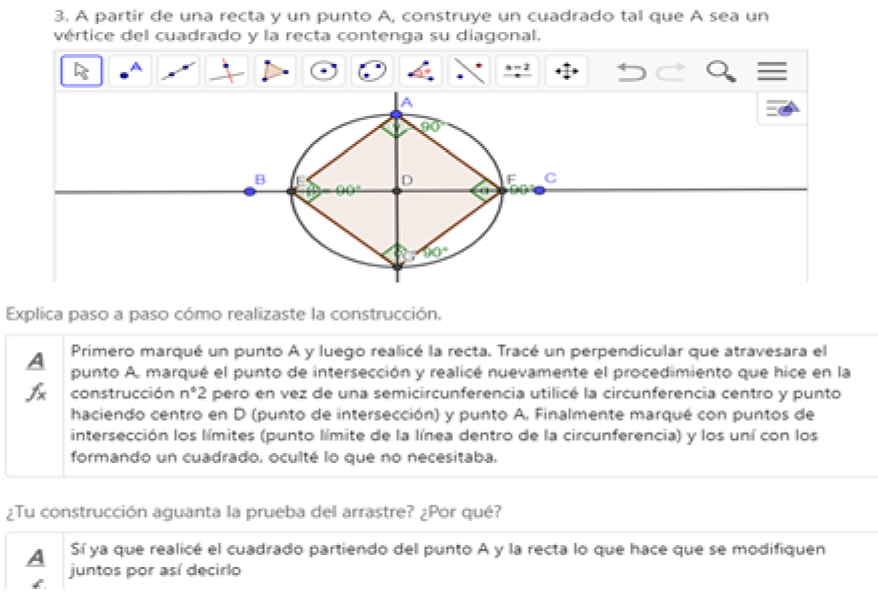
Estudiante: Sí porque dividí la circunferencia en 4 partes iguales

Profesor: Porque me basé en su centro y en la propiedad que ya le mencioné o no sé jaja.

Como sus argumentos incluyen elementos abstractos y propiedades y relaciones descubiertas en su construcción, además de transformar el problema en uno ya realizado, se categorizan en un **Experimento Mental Transformativo.**

Figura 51

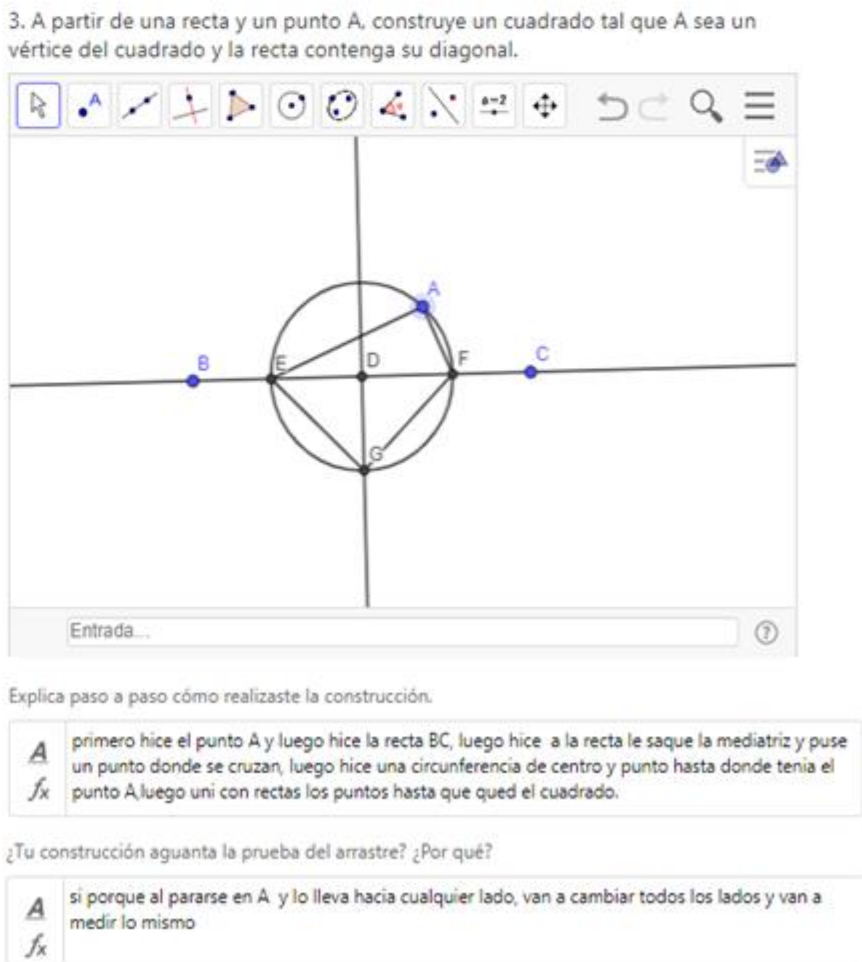
Implementación Problema 3 Estudiante C



Estudiante D. El estudiante ubica el punto A buscando que esté a la misma distancia de B que de C, es decir sobre la mediatriz del $\overline{BC}$. Sin embargo, no lo logra, aunque en apariencia sí. Luego traza la circunferencia y construye su cuadrado sobre los puntos de corte E, G, F y el punto A. Es claro que el estudiante hace una selección cuidadosa de su ejemplo (la recta y el segmento iniciales) y basa sus argumentos en la construcción, por lo que se caracterizaría como un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 52

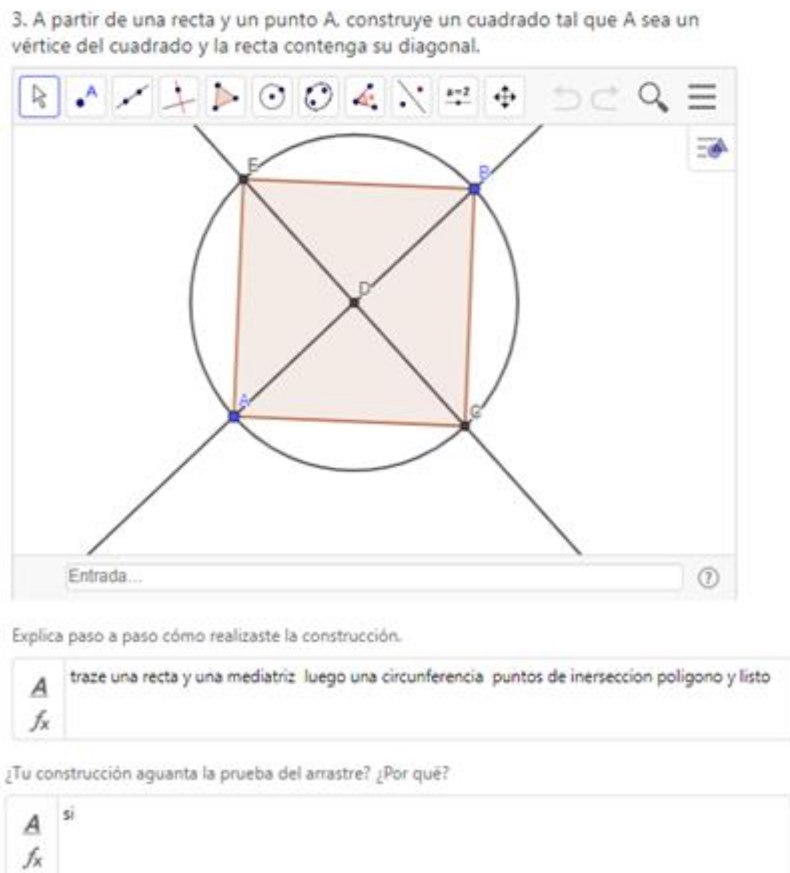
Implementación Problema 3 Estudiante D



Estudiante E. El estudiante toma la recta AB y realiza su construcción con la mediatriz del segmento AB y una circunferencia con centro en D que es punto de intersección entre la recta y la mediatriz. A parecer toma el caso en el que el punto A está sobre la recta lo cual lo lleva a resolver el problema N° 2 (ver anexo). Como el estudiante se basan en un ejemplo tomado cuidadosamente convencido que en cualquier caso la construcción es correcta, y sus argumentos se basan en la ausencia de contraejemplos, pues su construcción aguanta la prueba del arrastre, se configura un **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo.**

Figura 53

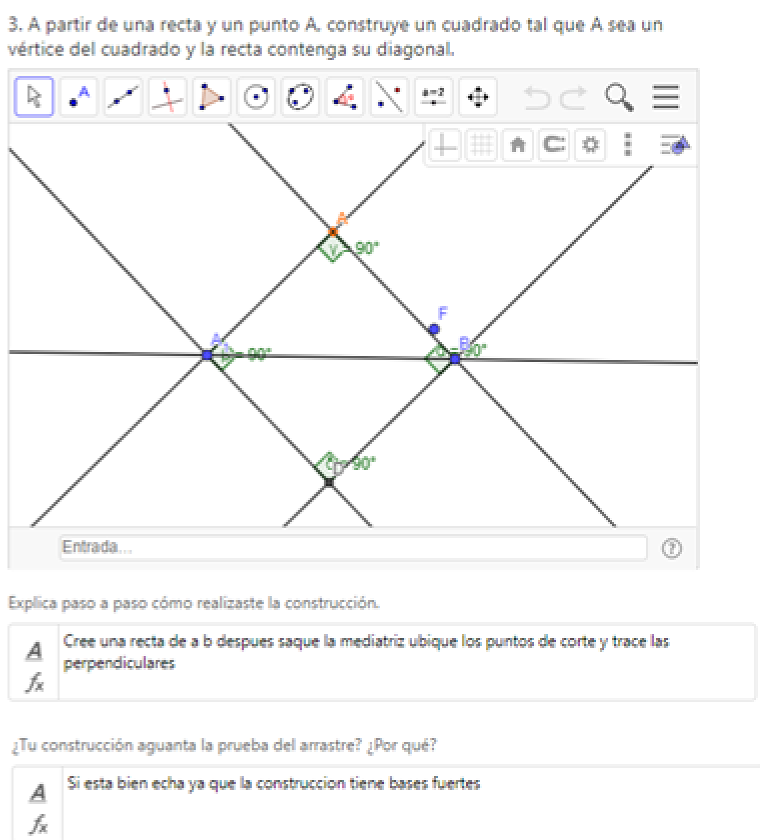
Implementación Problema 3 Estudiante E



Estudiante F. El estudiante toma la recta AB y realiza su construcción con la mediatriz del segmento AB y una circunferencia con centro en C (aunque lo oculta y no menciona la circunferencia en su paso a paso, en el protocolo de construcción se evidencia su uso), que es punto de intersección entre la recta y la mediatriz. A parecer toma el caso en el que el punto A está sobre la recta lo cual la lleva a resolver el problema N° 2 (ver anexo). Como el estudiante se basan en un ejemplo tomado cuidadosamente convencida que en cualquier caso la construcción es correcta, y sus argumentos se basan en la ausencia de contraejemplos, pues su construcción aguanta la prueba del arrastre, se configura un **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo.**

Figura 54

Implementación Problema 3 Estudiante F

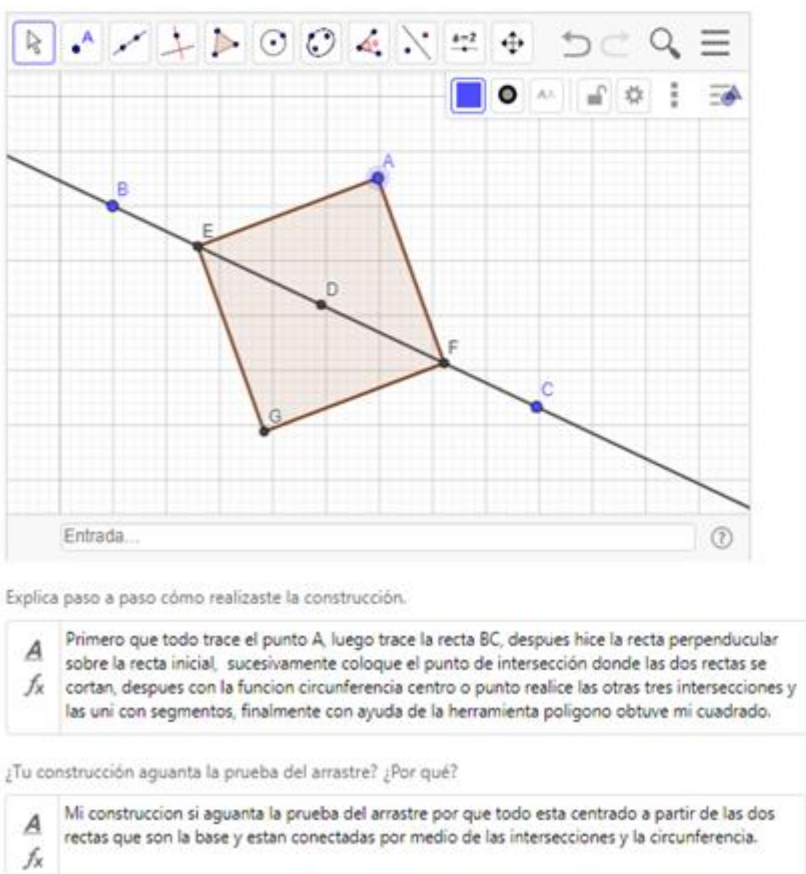


Estudiante G. La construcción del estudiante es igual a la de las compañeras que participaron en el cierre de la clase, por lo que fue necesario dialogar con ella vía WhatsApp.

Al preguntarle porqué los puntos de corte de la circunferencia y las rectas son los vértices del cuadrado, el estudiante dice que los puntos de la circunferencia están a la misma distancia del centro. Sin embargo, no logró explicar por qué los lados del cuadrado serían iguales. Por lo anterior, se categoriza en un **Ejemplo Genérico Analítico,** pues usa relaciones y propiedades descubiertas en este.

Figura 55

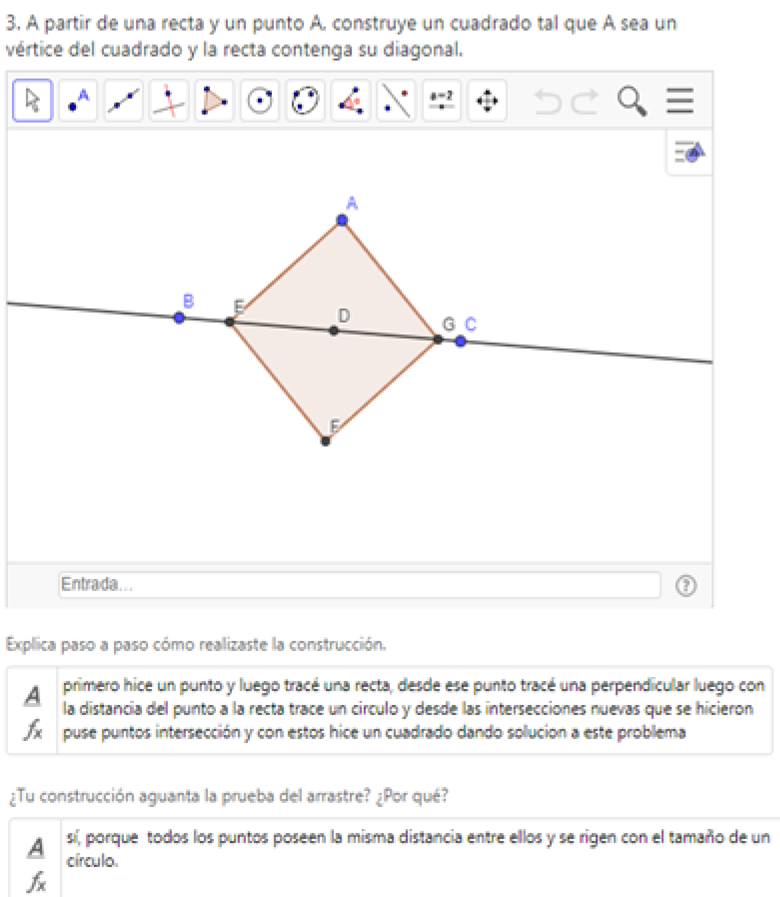
Implementación Problema 3 Estudiante G



Estudiante H. En su construcción, el estudiante usa una secuencia lógica de datos del problema, definiciones, axiomas y teoremas como la perpendicularidad, la equidistancia entre los puntos de una circunferencia y su centro, la simetría de un cuadrado tomando como ejes de simetría las diagonales. Aunque esto último no lo menciona en sus argumentos, si lo hace en el cierre de la clase. Por lo anterior, se concluye que la categoría que se da es el **Experimento Mental Estructural.**

Figura 56

Implementación Problema 3 Estudiante H

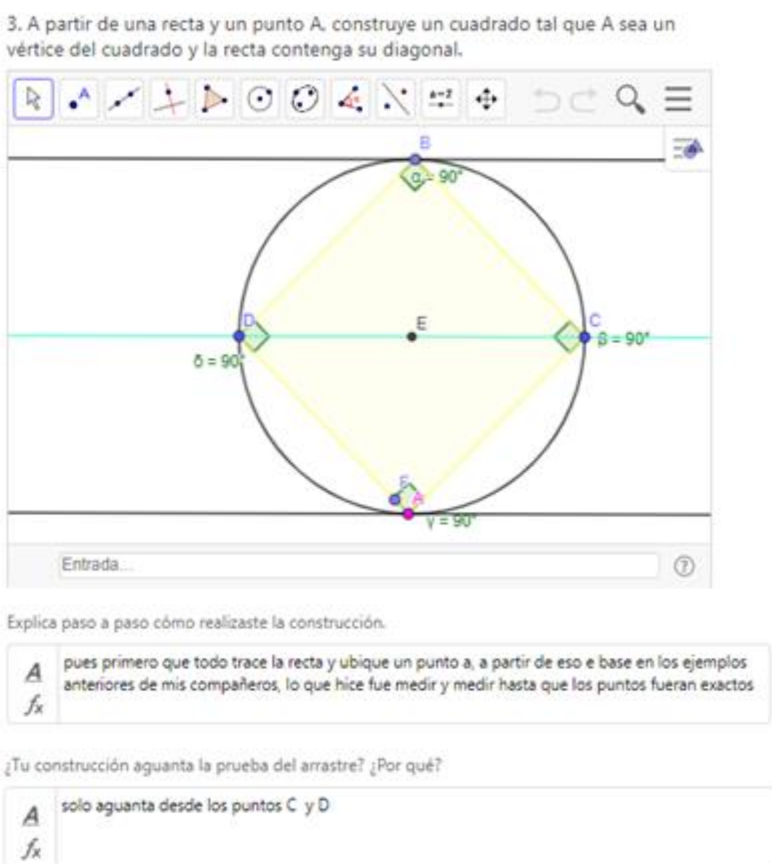


Estudiante I. Para su construcción, el estudiante traza la recta CD, dos semicircunferencias por CD y halla el punto medio de $\overline{CD}$. Luego ubica los puntos A y B sobre la circunferencia y traza paralelas a $\overrightarrow{CD}$ por ellos. Luego comienza a moverlos hasta que en ellos se forme un ángulo recto.

De esta manera el estudiante cree haber solucionado el problema. Sin embargo, la construcción no pasa la prueba del arrastre. Por cuanto los puntos A y B son tomados sin ningún criterio, y acomodados para dar la solución, se configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 57

Implementación Problema 3 Estudiante I



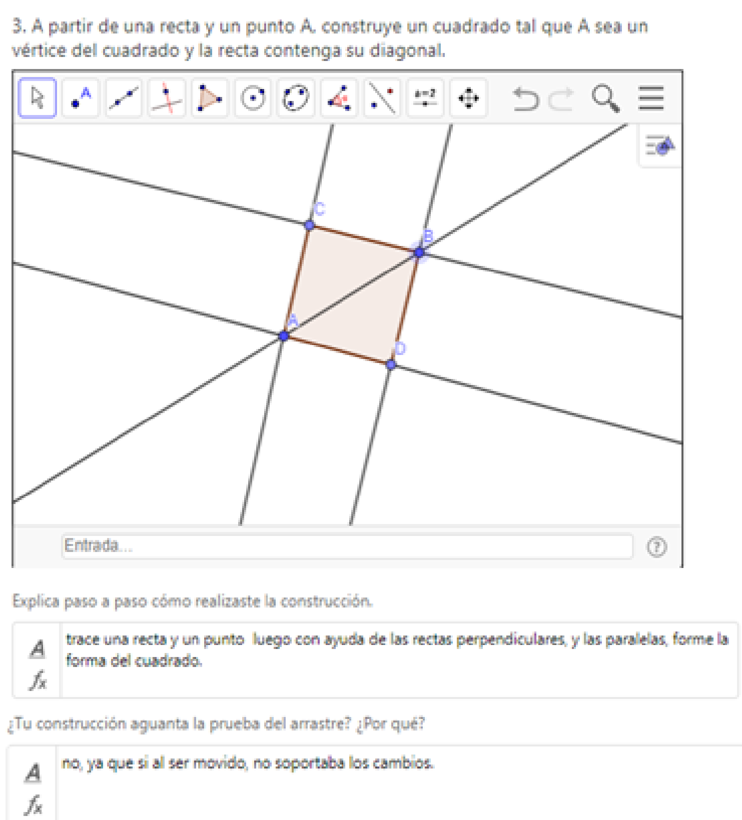
Estudiante J. Aunque el estudiante lo afirme, en su construcción no hay ni paralelas ni perpendiculares. Toma una recta AB y traza dos semicircunferencias de diámetro AB. Luego ubica sobre la circunferencia dos puntos C y D de tal forma que en ellos se forme un ángulo recto. Luego usa rectas para construir su cuadrado ABCD.

Dado que los puntos C y D Fueron puestos de manera arbitraria, la construcción no aguanta la prueba del arrastre.

La escogencia de un ejemplo arbitrario y usar elementos visuales en su construcción indican un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 58

Implementación Problema 3 Estudiante J

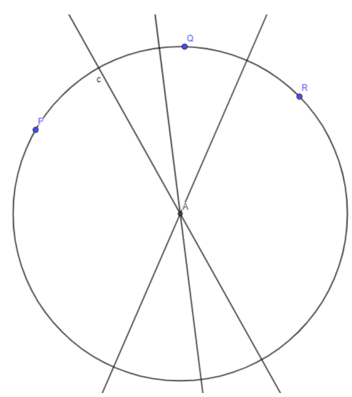


Problema N° 4. Dados tres puntos P, Q y R, construye una circunferencia que pase por los tres puntos.

Posible solución. Se espera que el estudiante ubique tres puntos cualesquiera y busque un punto que equidiste a estos tres. En su búsqueda, el estudiante puede notar que con los primeros tres puntos puede formar un triángulo y por lo tanto recuerde que el punto equidistante no es más que el circuncentro del triángulo. Que luego trace por lo menos dos mediatrices ubique el circuncentro y trace la circunferencia buscada.

Figura 59

Posible solución del problema N°4 de la implementación

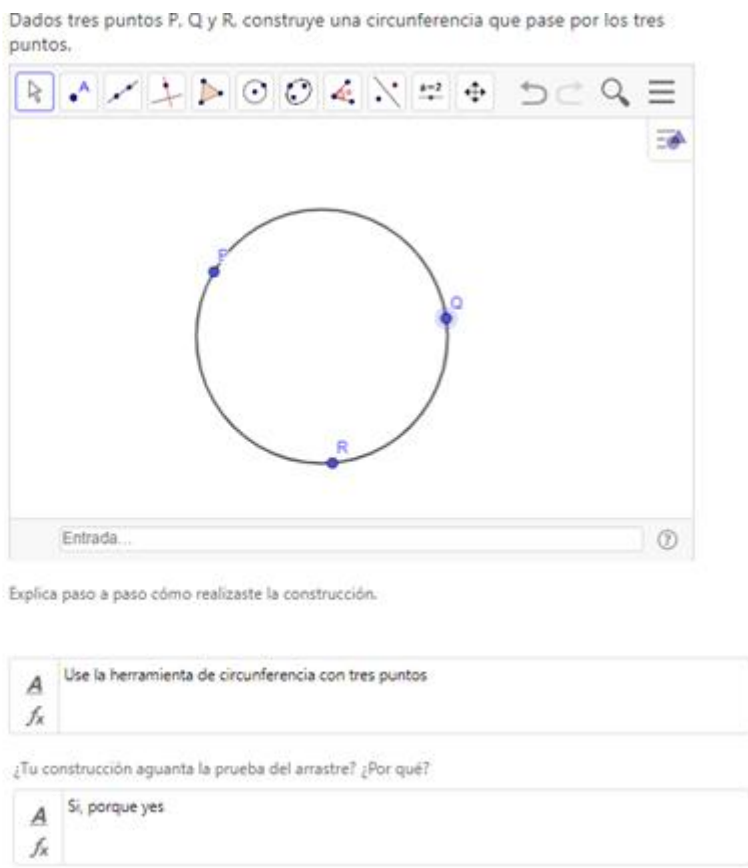


Estudiante A. Para su construcción el estudiante usa la herramienta **circunferencia por tres puntos** de GeoGebra, a pesar de que en el primer momento de la clase se les pidió que solucionaran el problema sin usarla. El argumento del estudiante es solo porque sí, no realiza ninguna conjetura.

Por lo anterior, la categoría en este caso sería **Fallida.**

Figura 60

Implementación Problema 4 Estudiante A

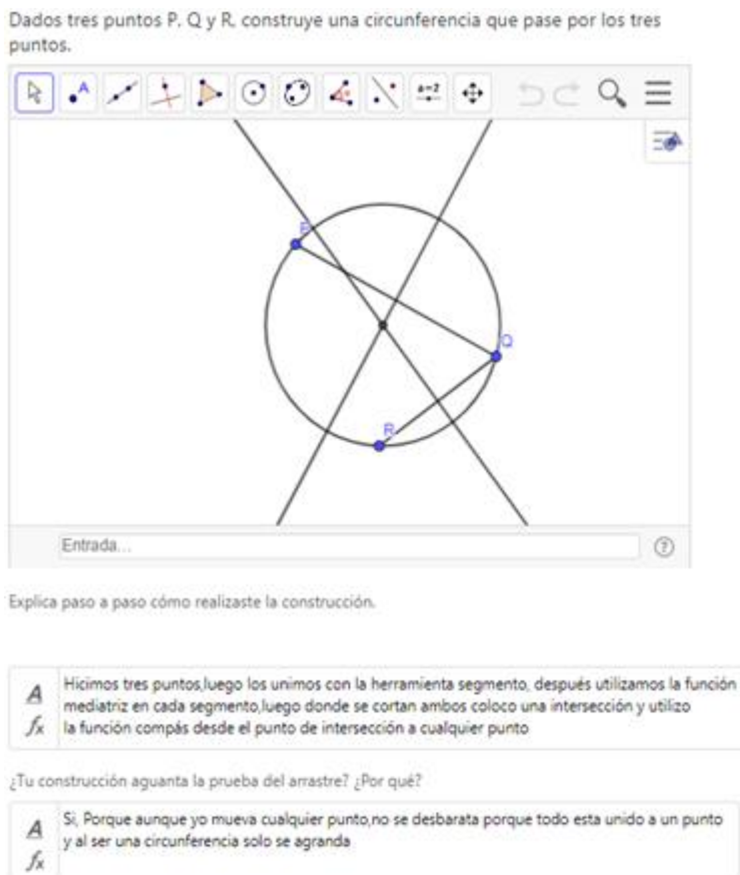


Estudiantes B, G e I. Los tres estudiantes decidieron trabajar en equipo y construyeron satisfactoriamente su solución. Sus argumentos están basados en las propiedades observadas en dicha construcción lo cual configura un **Ejemplo Genérico Analítico.**

A pesar de que realizan una buena argumentación en la construcción basada en propiedades matemáticas, no se puede ver como una demostración deductiva estructurada porque no explica por qué aguanta la prueba del arrastre.

Figura 61

Implementación Problema 4 Estudiantes B, G e I

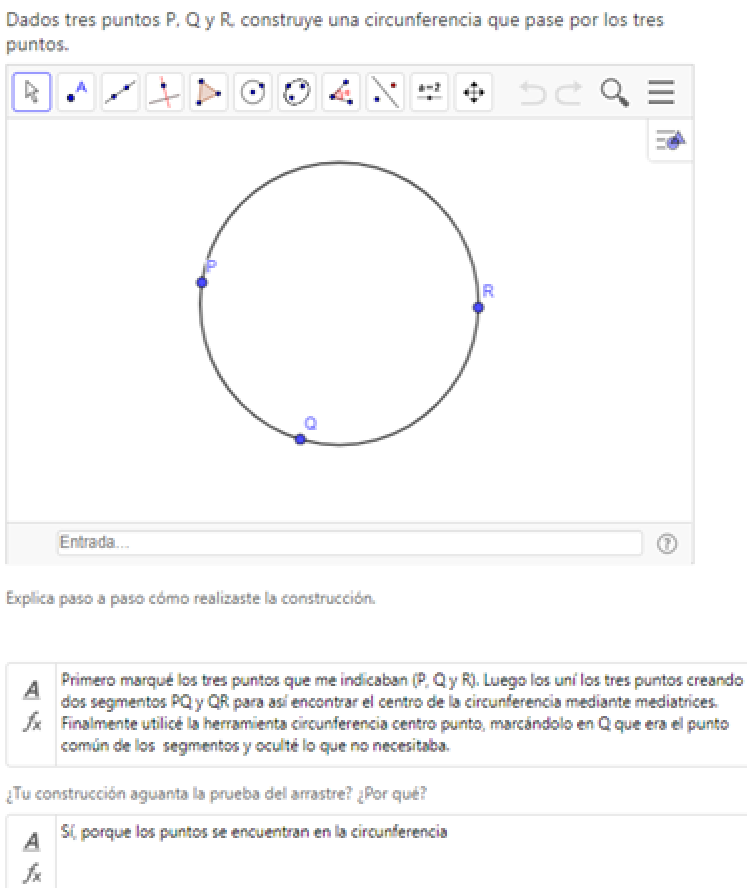


Estudiante C. Los argumentos del estudiante para construir la circunferencia pedida connotan un **Ejemplo Genérico Intelectual** por cuanto usa propiedades matemáticas aceptadas que recuerda durante su construcción. Esto se infiere del cierre de la clase en la que el estudiante dice haberse apoyado en la solución del problema N° 2 (ver anexo) en el que encontró el centro de la circunferencia usando mediatrices.

A pesar de que realiza una buena argumentación en la construcción basada en propiedades matemáticas, no se puede ver como una demostración deductiva estructurada porque no explica por qué aguanta la prueba del arrastre.

Figura 62

Implementación Problema 4 Estudiante C

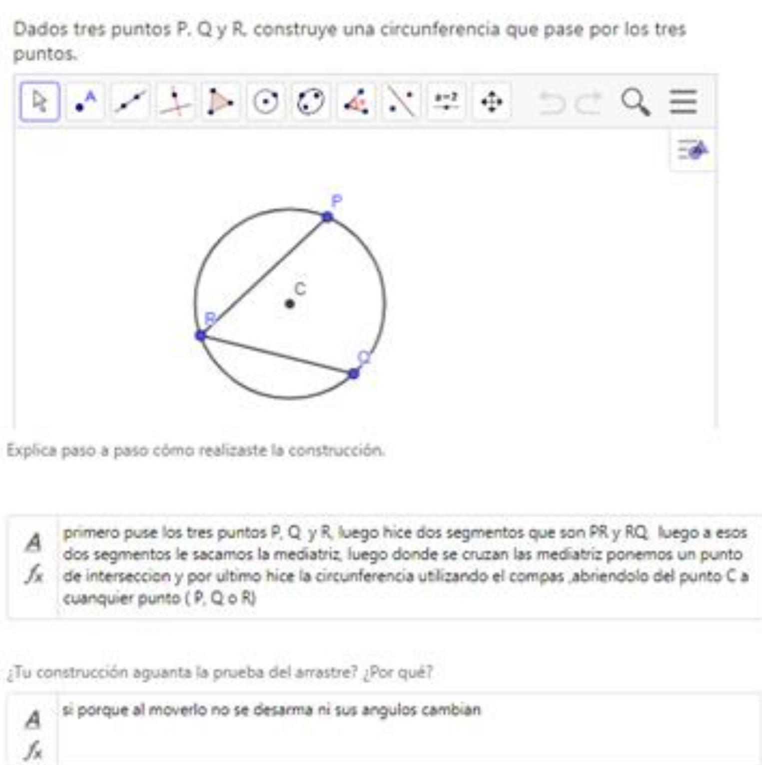


Estudiante D. La argumentación usada por el estudiante configura un **Ejemplo Genérico Analítico,** por cuanto usa las mediatrices de los segmentos PR y PQ para hallar el centro de la circunferencia pedida. Al pedirle, vía WhatsApp, la razón para el uso de esta herramienta, expresó haber visto en su construcción que las mediatrices son la mitad de un segmento y pues cuando se cruzan dos o más iba a tener el punto medio de la circunferencia, es decir usa propiedades encontradas en su construcción para argumentar.

A pesar de que realizan una buena argumentación en la construcción basada en propiedades matemáticas, no se puede ver como una demostración deductiva estructurada porque no explica por qué aguanta la prueba del arrastre.

Figura 63

Implementación Problema 4 Estudiante D



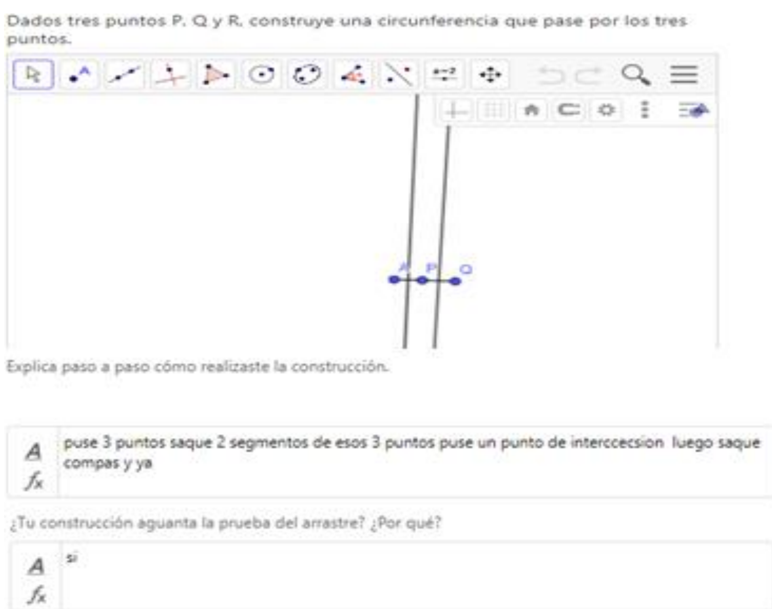
Estudiante E. Luego de realizar su exposición frente a sus compañeros, el estudiante borró su construcción para probar o refutar una conjetura que propuso. Es por esto que lo que muestra la figura no es la construcción del estudiante, sino un contraejemplo que encontró sobre su conjetura.

En el cierre de la clase él expuso su construcción en la que halló las mediatrices de los segmentos PQ y QR, luego construyó la circunferencia pedida haciendo centro en el punto de intersección de las mediatrices (E) y tomó como radio EP. Aunque expresó que no sabía por qué la intersección de las mediatrices eran el centro de la circunferencia, con lo cual se configura un **Ejemplo Genérico Analítico.**

En su exposición el estudiante mencionó su conjetura y como devolución, el docente le pidió que la demostrara y le sugirió mirar si se cumple para tres puntos cualesquiera. En la figura se ve que el estudiante encuentra un contraejemplo y concluye que su conjetura no es válida.

Figura 64

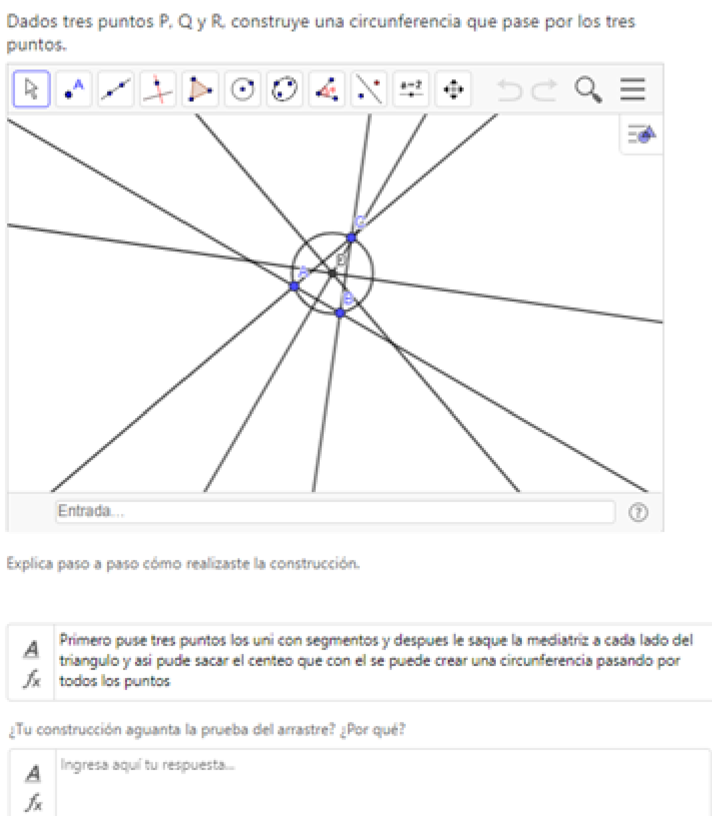
Implementación Problema 4 Estudiante E



Estudiante F. El estudiante realiza la misma construcción que sus compañeros, pero no da ningún argumento, ni escrito, ni en el cierre de la clase ni por WhatsApp. Tampoco escribe ninguna conjetura, por lo que se categoriza como **Fallida.**

Figura 65

Implementación Problema 4 Estudiante F

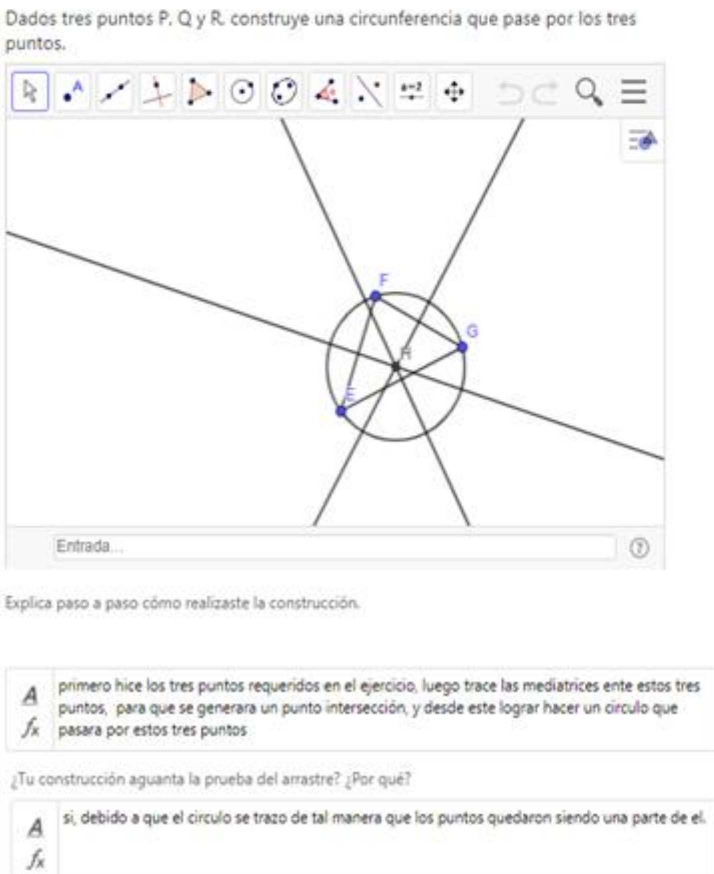


Estudiante H. El estudiante no vio la necesidad de trazar segmentos entre los puntos para poder trazar las mediatrices. Realizó su construcción correctamente y en su exposición de cierre indicó que había recordado de las clases presenciales, que el punto de corte de las mediatrices es el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo.

Sus argumentos configuran un **Ejemplo Genérico Intelectual,** por cuanto usa propiedades matemáticas que recuerda durante su construcción.

Figura 66

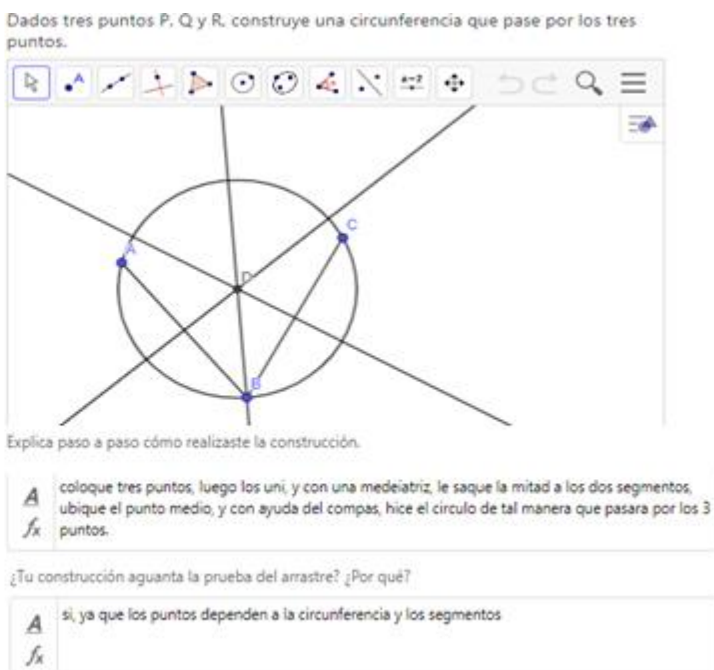
Implementación Problema 4 Estudiante H



Estudiante J. El estudiante realiza su construcción correctamente usando mediatrices y circunferencia, al igual que los demás compañeros. Sin embargo, en su justificación no hay argumentos sobre el uso de estos objetos matemáticos, y al preguntarle vía WhatsApp por qué usó mediatrices y por qué usó el punto de intersección de estas para trazar la circunferencia, no pudo explicar de manera coherente. Esto denota un **Ejemplo Genérico Analítico**, puesto que la construcción es un ejemplo representante de una categoría escogido cuidadosamente, y el estudiante lo justifica como su solución basado en propiedades y relaciones observadas en la construcción.

Figura 67

Implementación Problema 4 Estudiante J



En las siguientes tablas se presentan de manera concreta las categorías pertenecientes a la solución que cada uno de los estudiantes dio a los problemas propuestos en la fase de implementación. Para ello se usan las iniciales de cada categoría detectada. A saber:

F: Fallida; **EIP:** Empirismo Ingenuo Perceptivo; **EII:** Empirismo Ingenuo Inductivo; **ECBE:** Experimento Crucial Basado en el Ejemplo; **ECC:** Experimento Crucial Constructivo; **EGA:** Ejemplo Genérico Analítico; **EGI:** Ejemplo Genérico Intelectual; **EMT:** Experimento Mental Transformativo; **EME:** Experimento Mental Estructural; **DFT:** Decuctiva Formal Transformativa; **DFE:** Deductiva Formal Estructural.

Tabla 2

Implementación, problemas 1 a 4

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
A	F	F	F	F
B	ECBE	EGA	EGA	EGA
C	EMT	EME	EMT	EGI
D	ECBE	EME	ECC	EGA
E	EII	EIP	ECBE	EGA
F	F	EGA	ECBE	F
G	ECBE	EIP	EGA	EGA
H	EME	EME	EME	EGI
I	F	EIP	EIP	EGA
J	F	EIP	EIP	EGA

Actividad final. Esta actividad se realizó de manera sincrónica, iniciando con un encuentro en la plataforma de videollamadas Zoom, para dar las indicaciones pertinentes. Inicialmente dispondría de dos horas para realizar actividad, pero se fue un poco flexible con este tiempo teniendo en cuenta la baja calidad de la conectividad de la mayoría de los estudiantes. Debido a esto, algunos finalizaron sobre las 7:30 pm.

Teniendo en cuenta que en el apartado de la fase diagnóstica se presenta una posible solución de los primeros cuatro problemas de esta actividad, a continuación se presenta una posible solución de los problemas 5 y 6. Luego se realiza el análisis y la caracterización de los datos recogidos con esta actividad, esta vez, organizado por estudiante y no por problema. Es pertinente aclarar que se omitieron aquellos problemas en los que el estudiante no realizó ningún tipo de solución.

Problema N° 5. Construye un segmento AB. Encuentra la posición de un punto P tal que ΔAPB es isósceles y rectángulo.

Posible solución. Se espera que el estudiante trace el segmento AB y su mediatriz, con lo que encontraría el punto medio C del segmento. Que luego trace una circunferencia con centro en C y que pase por A y defina uno de los puntos de intersección P entre la mediatriz y la circunferencia, este será el punto buscado. También se espera que el estudiante recuerde que, si un triángulo está inscrito en una circunferencia y uno de sus lados es el diámetro de esta, entonces el triángulo es rectángulo.

Problema N° 6. Dados dos puntos A y B, sin hacer uso de rectas perpendiculares o paralelas, construye un cuadrado talque AB sea uno de sus lados.

Posible solución. Se espera que el estudiante ubique dos puntos A y B, trace su mediatriz y una semicircunferencia de diámetro AB. Que luego determine el punto de intersección B entre la mediatriz y la semicircunferencia y que mediante simetría central refleje los puntos A y B obteniendo así los puntos A' y B'. Por último, que trace el cuadrado ABA'B'.

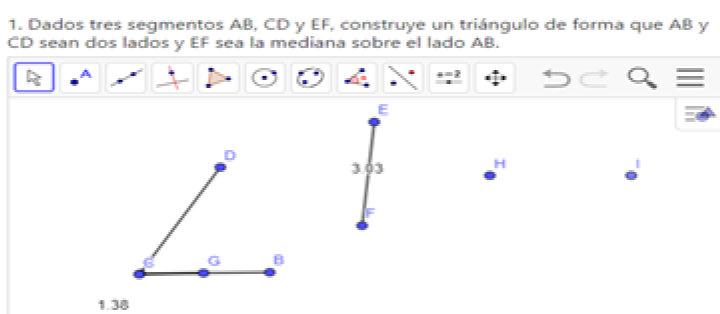
Estudiante A.

Problema 1. El estudiante usa la función de arrastre para hacer coincidir los segmentos en los puntos A y C y luego agrega los puntos H e I.

Además, no da ningún argumento escrito, por lo que no es posible inferir nada, de modo que se configura la categoría **Fallida.**

Figura 68

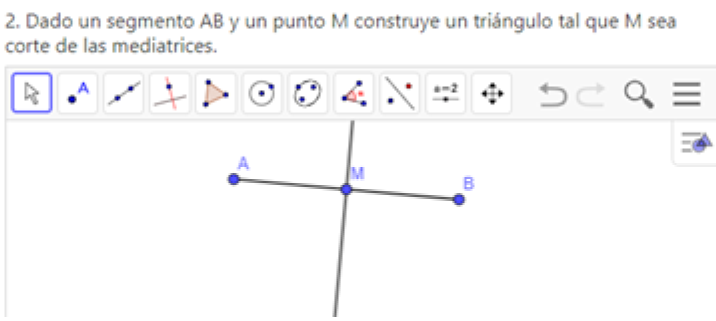
Actividad final Estudiante A Problema 1



Problema 2. Usando la función del arrastre, el estudiante lleva el punto M al centro del segmento AB y luego traza la mediatriz de este último. Aunque no da argumentos escritos, se infiere que su acción podría configurar un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto el estudiante toma un ejemplo cuidadosamente al mover el punto M al lugar por donde pasará la mediatriz que va a trazar.

Figura 69

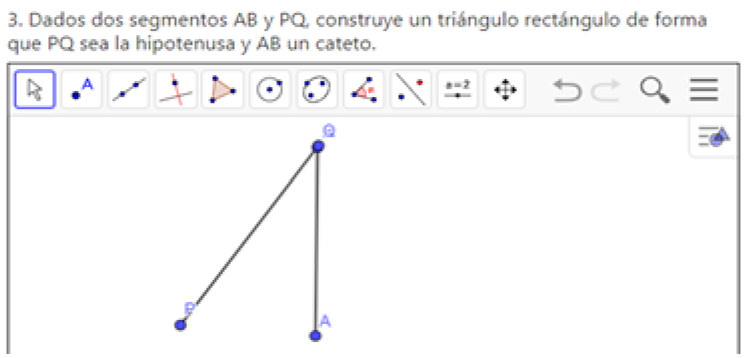
Actividad final Estudiante A Problema 2



Problema 3. La única acción del estudiante es usar la función de arrastre para hacer coincidir los segmentos dados en uno de sus extremos. Además, no da argumentos escritos, por lo que no se puede inferir nada, configurando así una categoría **Fallida.**

Figura 70

Actividad final Estudiante A Problema 3

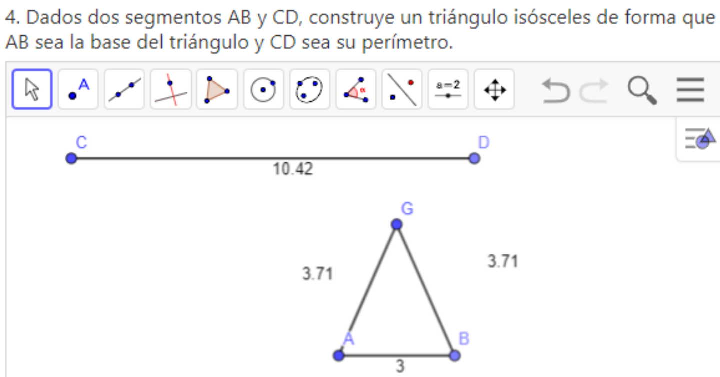


Problema 4. El estudiante traza el segmento AB de 3 unidades usando la herramienta "segmento de longitud dada." Luego ubica un punto G y traza los segmentos AG y BG, los mide y usando la función de arrastre mueve G hasta que sean congruentes. Por último, traza un segmento CD de longitud dada, el cual mide lo que el perímetro del triángulo que construyó.

Las acciones en la construcción de su solución muestran un **Experimento Crucial Constructivo,** dado que escoge su ejemplo cuidadosamente y basa su argumento en su construcción.

Figura 71

Actividad final Estudiante A Problema 4



Estudiante B.

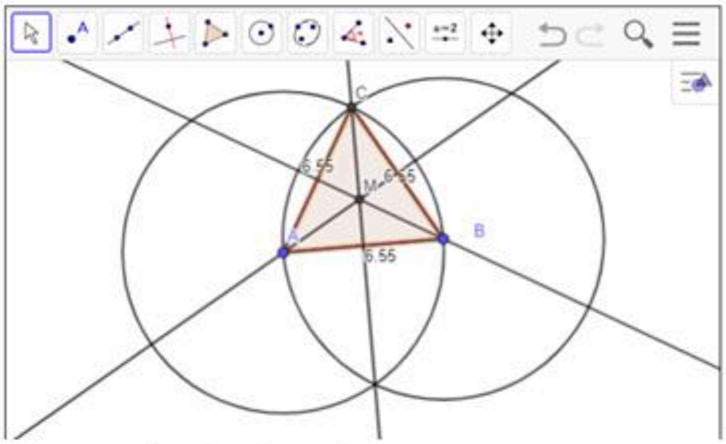
Problema 2. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y construye un triángulo equilátero usando circunferencias, aunque en su argumento afirma haber puesto un punto en objeto sobre la mediatriz a cualquier altura, insinuando con esto haber construido un triángulo isósceles. Luego traza las otras dos mediatrices del triángulo y ubica el punto M que para él es el mencionado por el problema.

Los argumentos del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto selecciona cuidadosamente su ejemplo y lo ve como la solución del problema basado en la forma cómo lo obtuvo.

Figura 72

Actividad final Estudiante B Problema 2

2. Dado un segmento AB y un punto M construye un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.



Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

Primero realice un segmento,luego hice 2 circunferencia de centro y punto de A a B y de B a A, luego realice la mediatriz del segmento AB, Luego ubique un punto en objeto en la meadiatriz en cualquier altura , luego los uní con segmentos y le saque la mediatriz a esos segmentos y donde se cortaban coloque una intersección y la nombre M por ultimo construi el poligono

¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

Si,Porque, todo esta sujeto al Segmento AB y al solo ser un Segmento al moverlo no afectara si esta colocada una intersección en la parte de arriba del triangulo

¿Al mover alguno de los vértices del triángulo, el punto M sigue siendo el corte de las mediatrices? ¿Por qué?

Si, Sigue siendo porque al estar moviendo el segmento y al resistir la prueba del arrastre todos los puntos se mueven ya que estan todos sujetos a todos

¿Encuentra alguna relación entre el punto M y los vértices del triángulo construido?

Que a todos los puntos son traspasados por una mediatriz de el segmento contrario

Demuestra que la relación encontrada se cumple para cualquier triángulo.

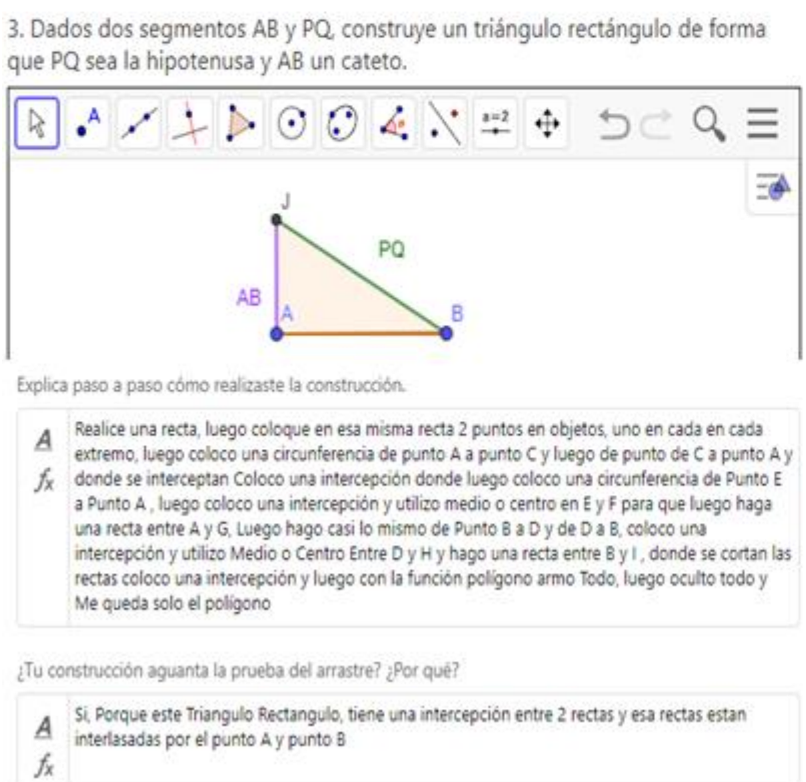
Porque al tener las mediatrices podemos hallar el punto Medio y que las mediatrices parte del medio y van bajando o subiendo hasta encontrarse con un Angulo

Problema 3. El estudiante realiza la misma construcción que realizó en el problema 2 de la actividad diagnóstica y su argumento escrito no varía, por lo que se configura la misma categoría:

Aunque el estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y por lo tanto no lo soluciona, construye un triángulo rectángulo representante de una clase, específicamente aquellos cuyos ángulos agudos miden 60° y 30° y basa su argumentación en su construcción, por lo que se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 73

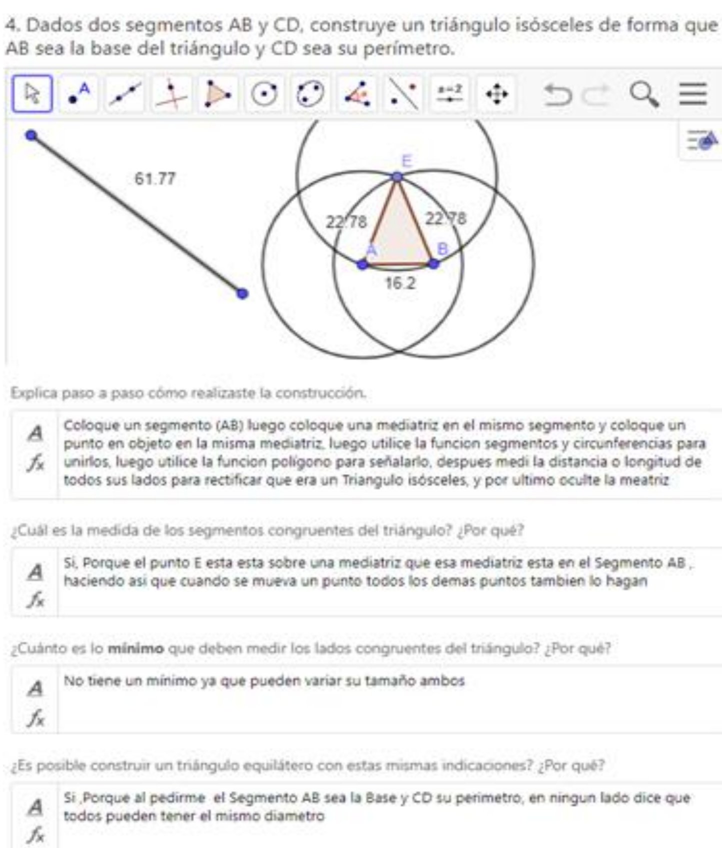
Actividad final Estudiante B Problema 3



Problema 4. El estudiante plantea la misma solución que construyó en problema 4 de la actividad diagnóstica solo que agrega dos circunferencias que pasan por el punto E y centro en A y en B. Según sus argumentos escritos, lo hizo para unir los puntos, refiriéndose, quizás, a los vértices del triángulo. A pesar de este cambio, se configura la misma categoría que en la actividad diagnóstica, es decir un **Experimento Crucial Constructivo,** puesto que el estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema para realizar su construcción y su construcción puede verse como un ejemplo representante de una clase y como los argumentos del estudiante para justificar la veracidad de su solución se basan en éste.

Figura 74

Actividad final Estudiante B Problema 4

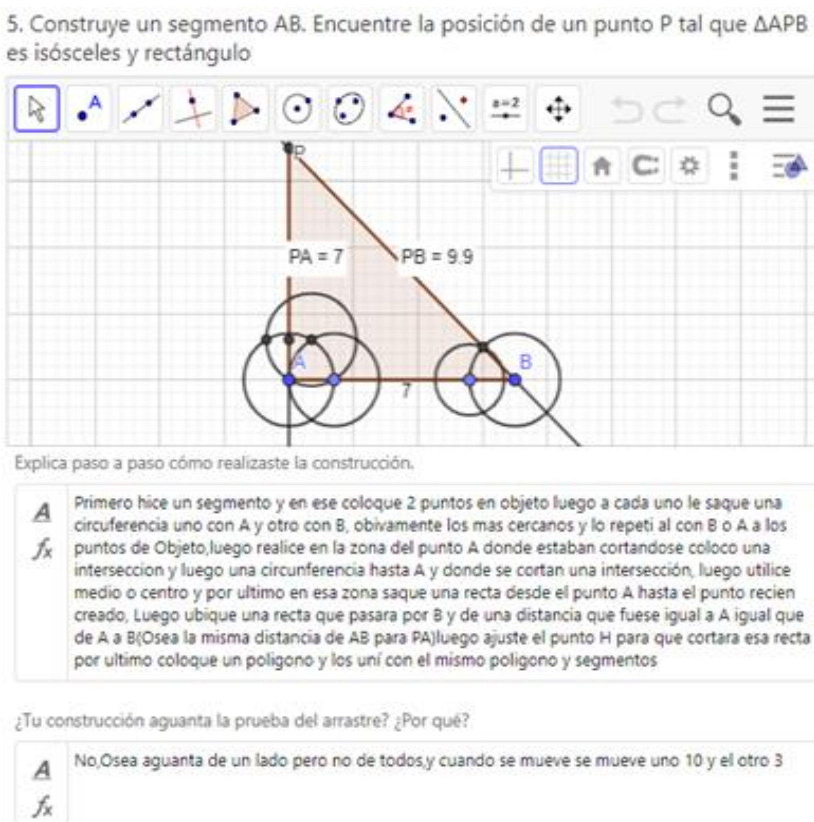


Problema 5. El estudiante traza un segmento AB y en el extremo A traza una perpendicular utilizando para ello circunferencias y puntos medios. Luego ubica de manera arbitraria un punto I y traza la recta BI para después marcar el punto de intersección P entre la perpendicular y la recta BI. Con la herramienta polígono traza el triángulo BAP, el cual no es isósceles pero sí rectángulo.

Las acciones del estudiante configuran un **Ejemplo Genérico Intelectual,** por cuanto el triángulo rectángulo que construye constituye un ejemplo representante de una clase y usa argumentos y propiedades matemáticas que tiene presente o recuerda mientras lo elabora.

Figura 75

Actividad final Estudiante B Problema 5

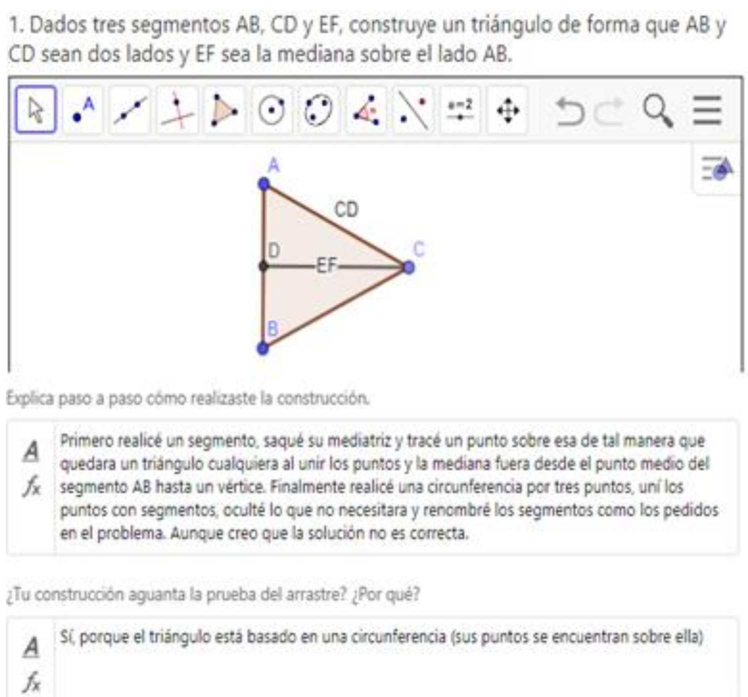


Estudiante C.

Problema 1. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y en vez de tomar tres segmentos y realizar la construcción busca estos segmentos mientras realiza su construcción, lo cual puede verse como un ejemplo tomado cuidadosamente, pues usa la mediatriz para hallar el punto medio del segmento AB y lo toma como la solución del problema basado en la forma como lo construyó. De esto da cuenta su respuesta sobre la prueba del arrastre, pues dice que los vértices del triángulo están sobre una circunferencia. Según lo anterior, los argumentos del estudiante se categorizan como un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 76

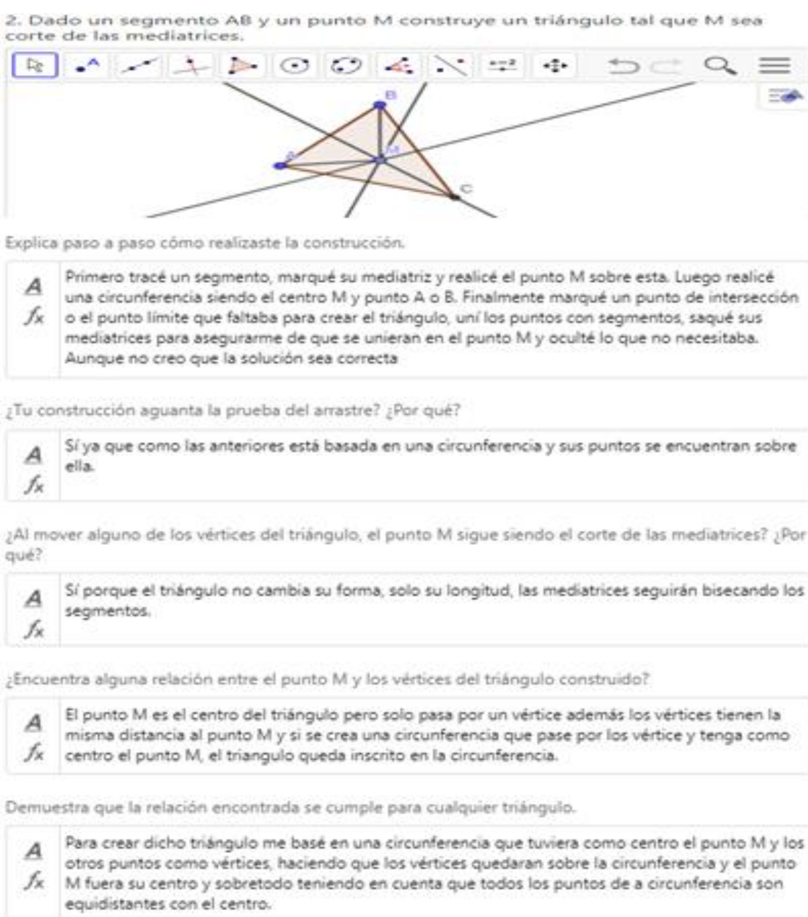
Actividad final Estudiante C Problema 1



Problema 2. Las acciones del estudiante configuran un **Experimento Mental Estructurado,** porque al ubicar el punto M dado como dato inicia del problema, sobre la mediatriz del segmento AB, sus argumentos se basan en propiedades que tiene presentes o recuerda durante su construcción. El estudiante tiene presente y lo expresa de manera escrita, conceptos como la equidistancia de los vértices de un triángulo a su circuncentro, la propiedad de que todo triángulo se puede inscribir en una circunferencia o la equidistancia entre cualquier punto de la mediatriz de un segmento y sus vértices.

Figura 77

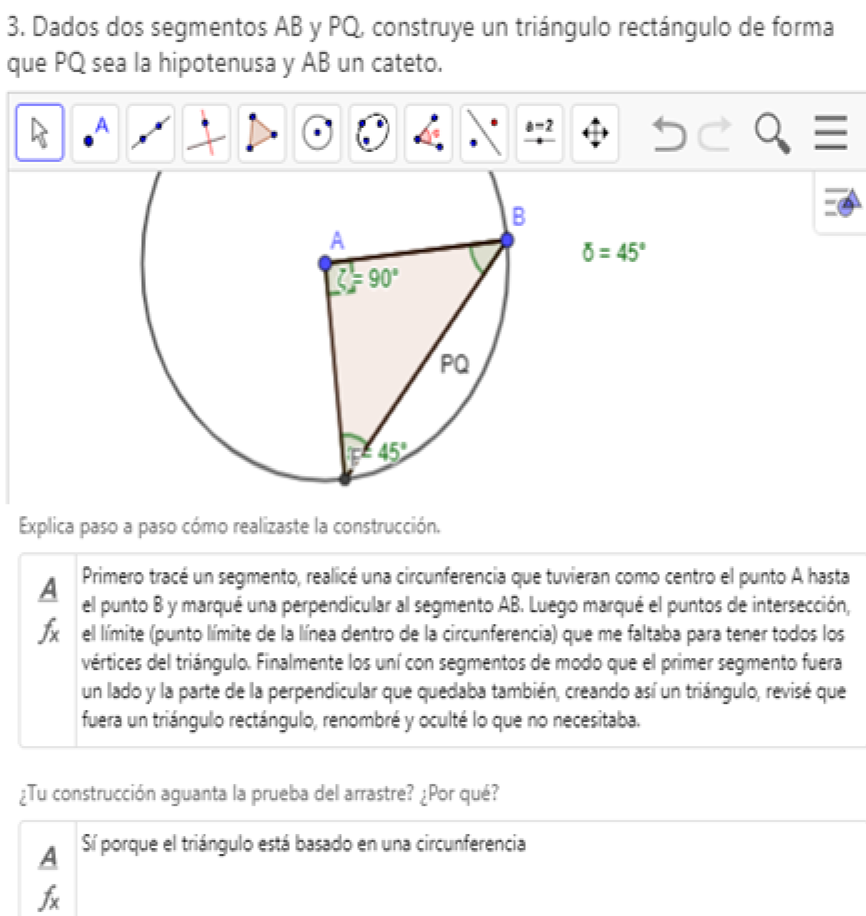
Actividad final Estudiante C Problema 2



Problema 3. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y a partir de un segmento AB dado construye un triángulo rectángulo usando una recta perpendicular y una circunferencia. Las acciones del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** puesto que escoge cuidadosamente un ejemplo particular y lo toma como solución basado la forma en que lo obtuvo, es decir en su construcción, lo cual se evidencia al decir que su construcción aguanta la prueba del arrastre porque está basada en una circunferencia.

Figura 78

Actividad final Estudiante C Problema 3



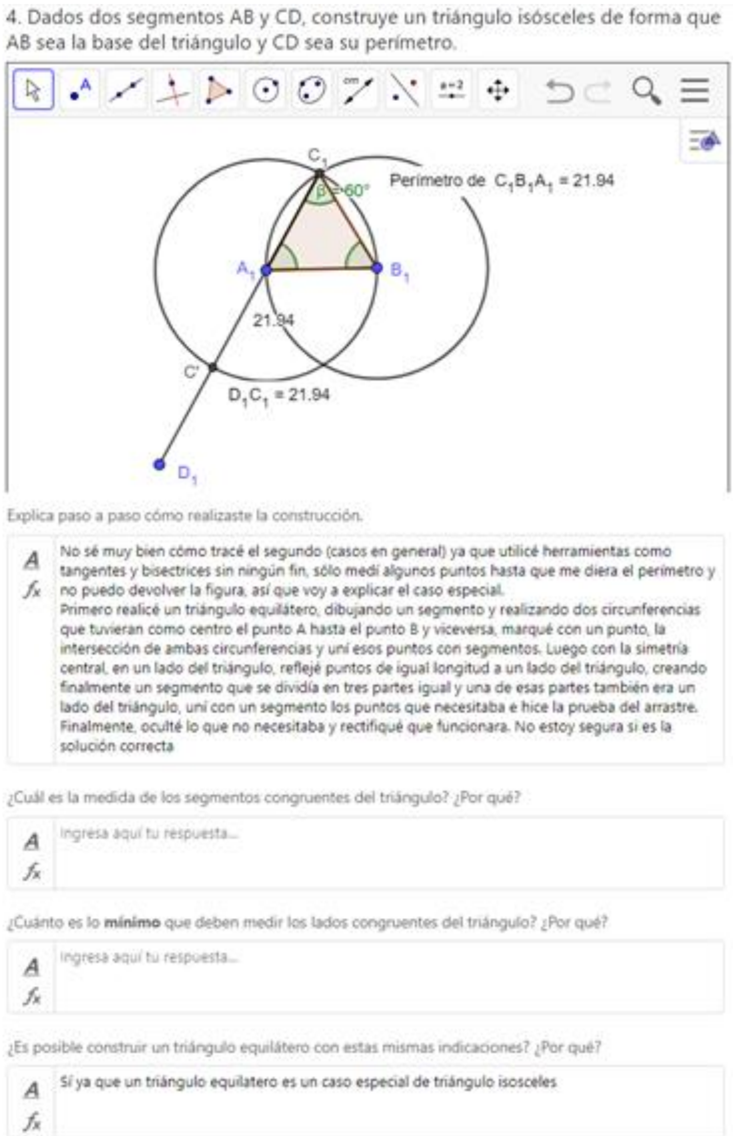
Problema 4. El estudiante plantea dos soluciones. Al primero lo llama caso especial que describe en su paso a paso y al segundo caso general del cual dice haber encontrado al explorar distintas herramientas del software con el objetivo de encontrar el segmento CD.

Caso especial. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y partiendo de un segmento AB construye un triángulo equilátero y un segmento CD cuya longitud es igual al perímetro del triángulo. Se configura entonces un **Ejemplo Genérico Intelectual,** por cuanto el triángulo construido es un ejemplo representante de una clase, seleccionado de manera cuidadosa y los argumentos usados para darlo como solución no se basan en la construcción sino en propiedades que el estudiante tiene presentes o recuerda durante su elaboración,

A pesar de que realizan una buena argumentación en la construcción basada en propiedades matemáticas, no se puede ver como una demostración deductiva estructurada porque no explica por qué aguanta la prueba del arrastre.

Figura 79

Actividad final Estudiante C Problema 4 Caso Especial



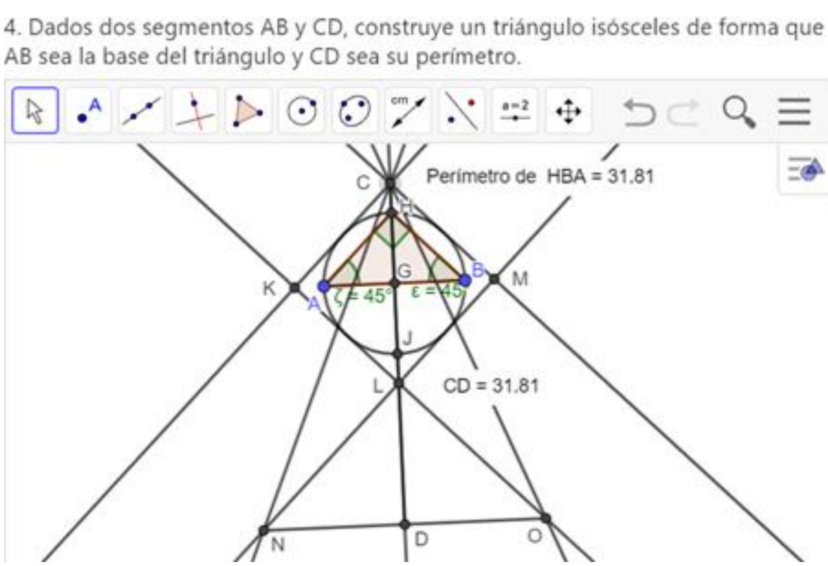
Caso general. Nuevamente el estudiante traza un segmento AB y traza su mediatriz, con lo que ubica su punto medio G. luego traza una circunferencia desde G hasta A y marca el punto

H intersección con la mediatriz. De esa manera traza el triángulo isósceles ABH. Luego traza dos tangentes a la circunferencia y paralelas al uno de los lados congruentes del triángulo y repite el proceso con el otro lado congruente del triángulo. Con los puntos de intersección de las tangentes construye el cuadrado CKLM y traza las bisectrices de los ángulos KAL y LCM. Después marca los puntos N y O intersecciones entre las bisectrices y las tangentes. Y por último traza el punto D intersección entre el segmento NO y la mediatriz.

El estudiante omite las condiciones iniciales del problema y mediante la exploración construye lo que para él es una solución. Esta construcción es un ejemplo particular escogido cuidadosamente, pues toma un triángulo isósceles y a partir de él construye el segmento CD dado en los datos del problema. El argumento para ver como solución su construcción se basa en las medidas del segmento encontrado y el perímetro del triángulo, es decir en elementos de su construcción, de modo que se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 80

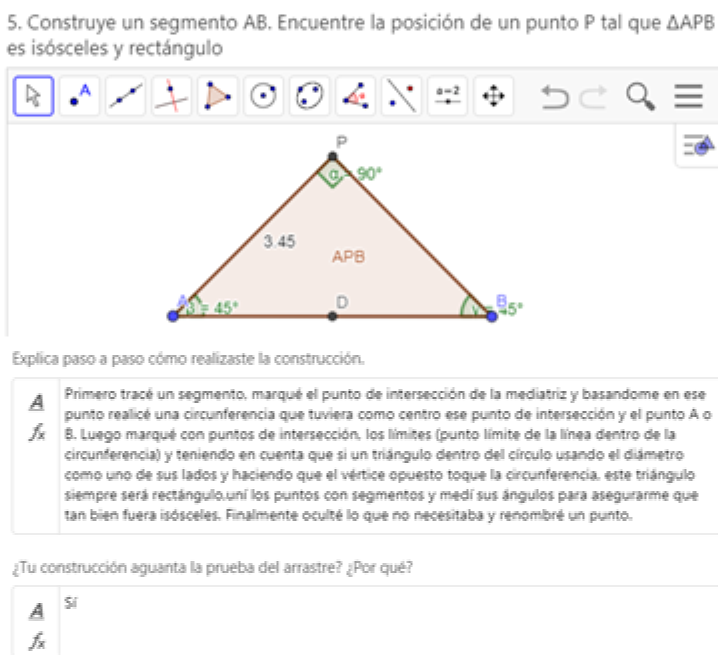
Actividad final Estudiante C Problema 4 Caso General



Problema 5. Los argumentos plasmados en la construcción del estudiante sugieren la categoría **Deductiva Formal Transformativa,** por cuanto se basa en definiciones, propiedades y deducciones lógicas que transformaron el problema inicial en uno equivalente el cual consistió en encontrar un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, teniendo como uno de sus lados el diámetro de esta.

Figura 81

Actividad final Estudiante C Problema 5



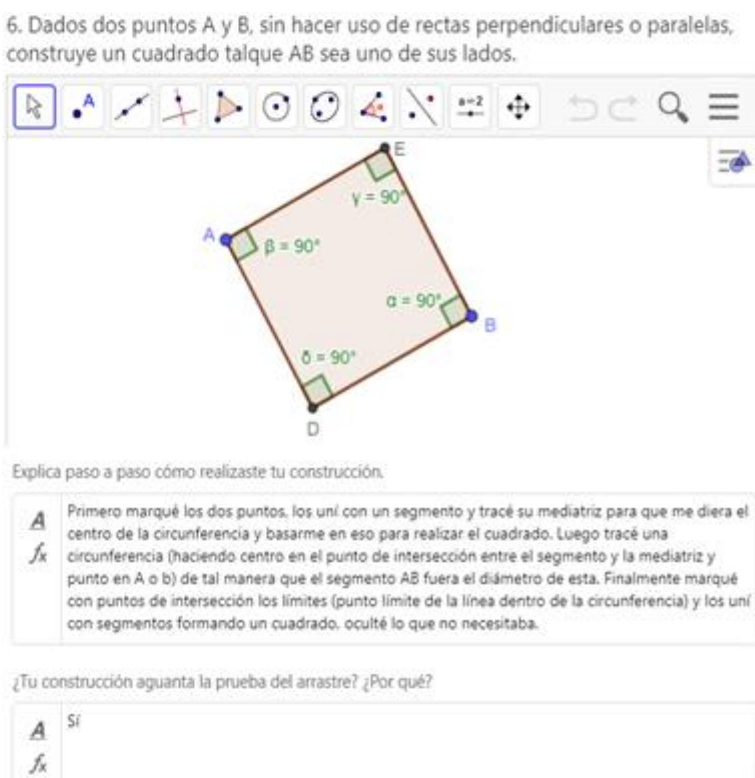
Problema 6. El estudiante no tiene en cuenta los datos iniciales del problema y realiza una construcción similar a la del problema N° 2 de la secuencia de problemas de construcción (ver anexo), usando la mediatriz del segmento formado por los puntos dados y una circunferencia con

centro en el punto de intersección entre el segmento y la mediatriz. A pesar de que su construcción no sea la solución del problema, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Ejemplo Genérico Analítico,** por cuanto escoge cuidadosamente un ejemplo representante de una clase y los argumentos con los que lo valida como su solución se basan en propiedades que tiene presentes o recuerda durante su construcción.

A pesar de que realizan una buena argumentación en la construcción basada en propiedades matemáticas, no se puede ver como una demostración deductiva estructurada porque no explica por qué aguanta la prueba del arrastre.

Figura 82

Actividad final Estudiante C Problema 6

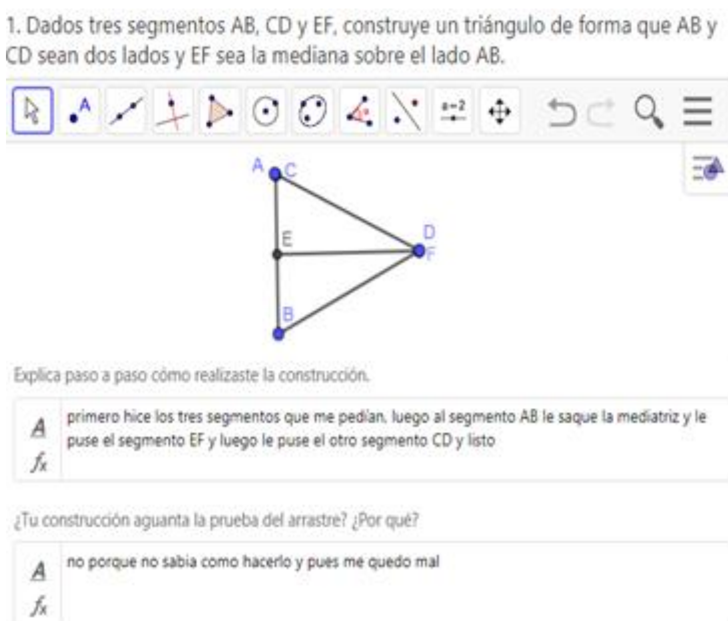


Estudiante D.

Problema 1. El estudiante traza el segmento AB dado en los datos del y traza su mediatriz para ubicar el punto medio E del segmento. Luego, mediante la función de arrastre, ubica los segmentos CD y EF dados en los datos del problema, de tal manera que formaran un triángulo. Esto configura un **Empirismo Ingenuo Inductivo,** pues el estudiante plantea un ejemplo arbitrario al ubicar los segmentos mediante el arrastre, pero al trazar la mediatriz está aduciendo a un argumento matemático

Figura 83

Actividad final Estudiante D Problema 1

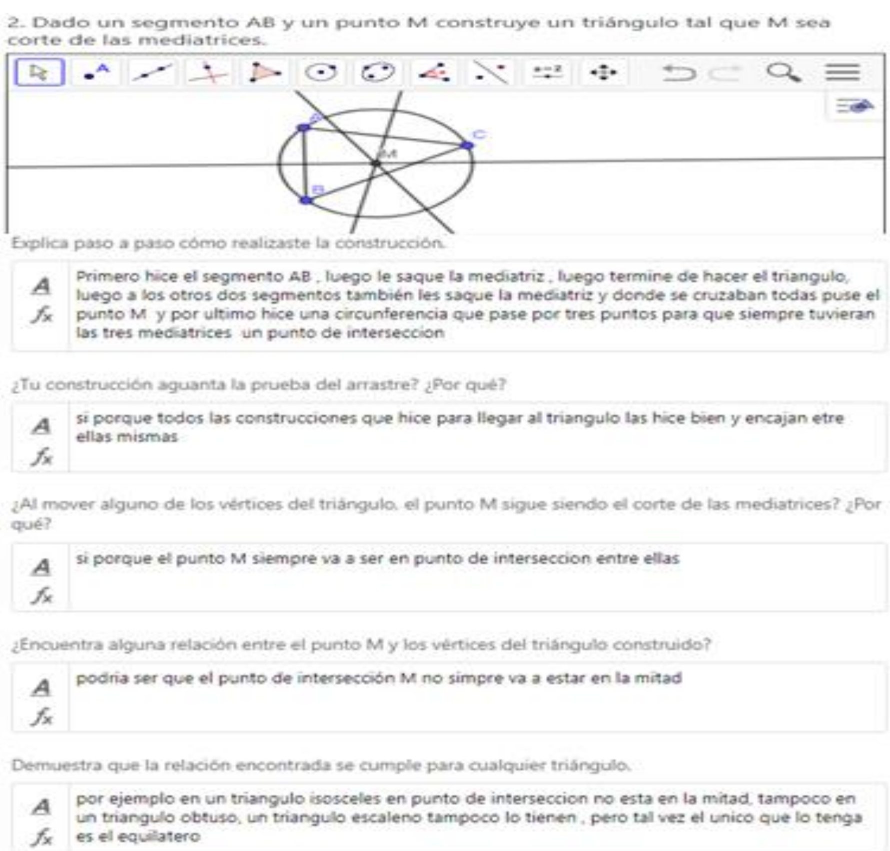


Problema 2. Para su construcción, el estudiante no toma en cuenta que el punto M es un dato inicial del problema. Traza el segmento AB dado y ubica un punto C de manera arbitraria para construir un triángulo cualquiera, al que luego le traza sus mediatrices y así ubica el punto M.

Los argumentos expresados en la construcción connotan un **Empirismo Ingenuo Inductivo,** por cuanto el estudiante toma un ejemplo arbitrario y lo justifica como solución al usar los argumentos matemáticos que tuvo en cuenta en su construcción. No puede ser un Experimento Crucial Constructivo puesto que el ejemplo lo toma de manera arbitraria al ubicar C sin ningún criterio.

Figura 84

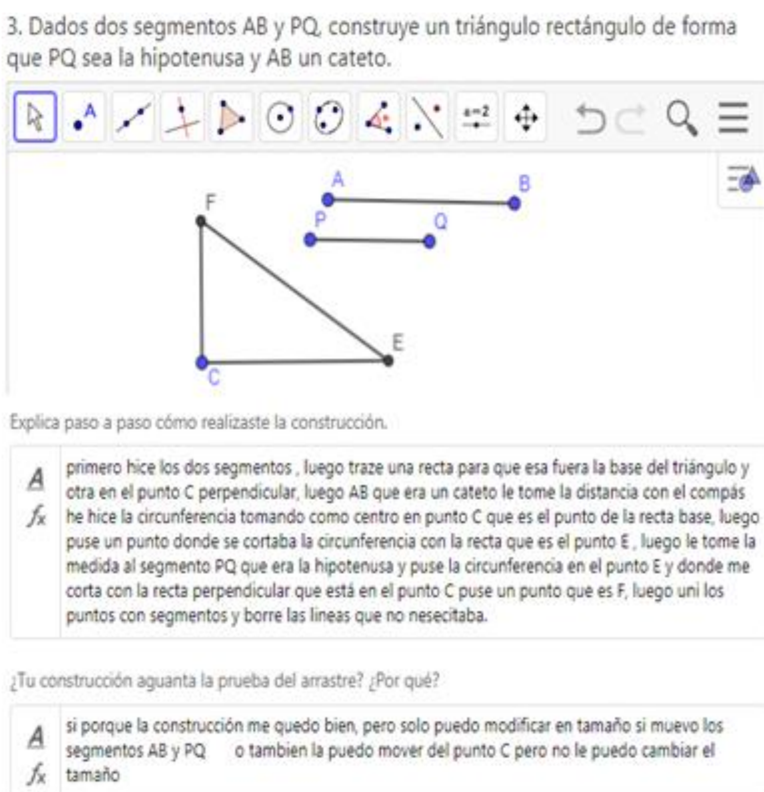
Actividad final Estudiante D Problema 2



Problema 3. Aunque su construcción no es correcta debido al tamaño del segmento PQ, menor que AB, siendo el primero la hipotenusa, el estudiante establece una secuencia lógica de argumentos para los que usa propiedades matemáticas que tiene presentes o recuerda durante su construcción. Por lo tanto, se configura un **Ejemplo Genérico Intelectual.**

Figura 85

Actividad final Estudiante D Problema 3



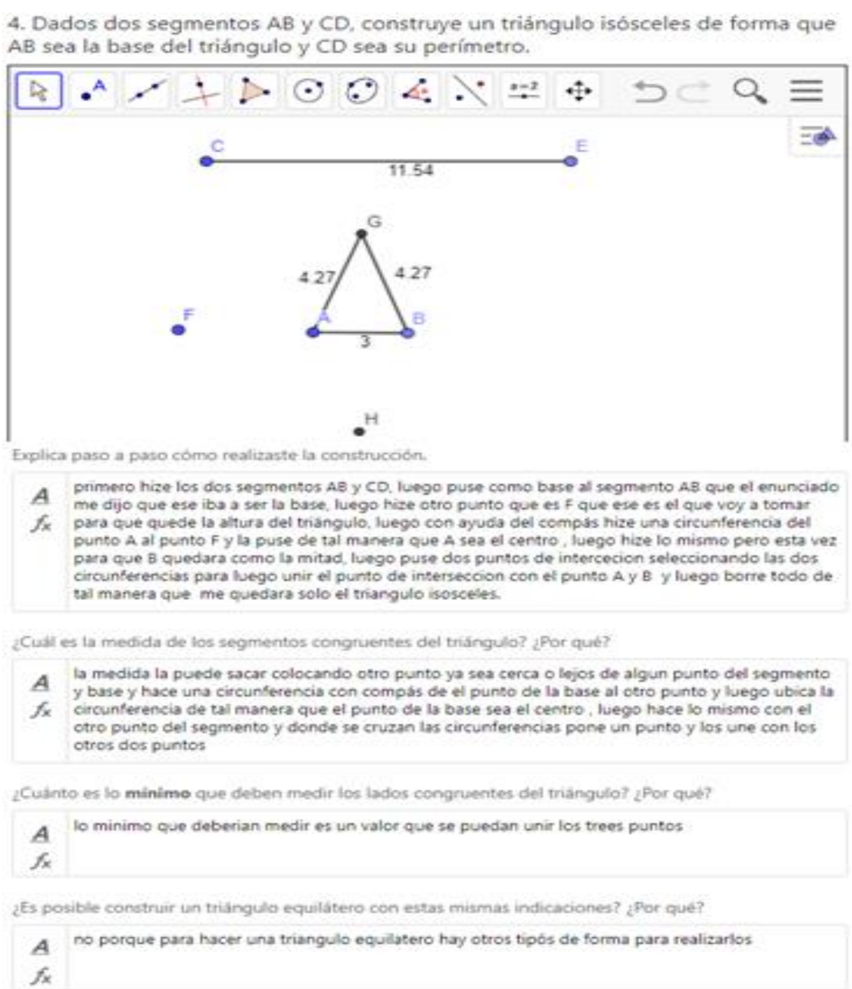
Problema 4. El estudiante traza el segmento AB de 3 unidades con la herramienta "segmento de longitud dada." Luego ubica un punto F de manera arbitraria y usando

circunferencias de radio AF por A y por B encuentra el punto G, intersección de las circunferencias. Después construye un triángulo ABG, mide los lados congruentes y construye un segmento de longitud dada CE cuya longitud es el perímetro del triángulo construido.

Las acciones en la construcción de su solución muestran un **Experimento Crucial Constructivo,** dado que escoge un ejemplo particular al ubicar F en cualquier parte y basa su argumento en su construcción.

Figura 86

Actividad final Estudiante D Problema 4



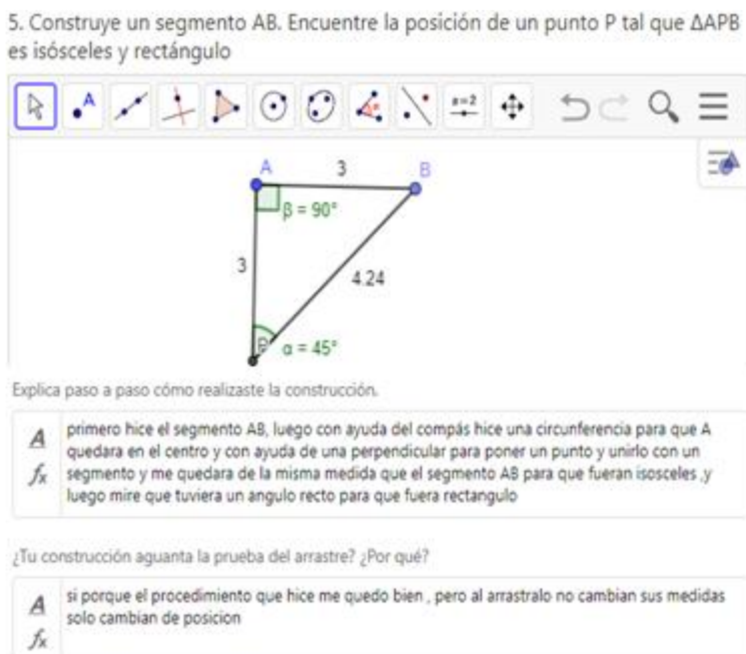
Problema 5. El estudiante traza un segmento AB de longitud dada con la intención de que sus medidas no cambien al arrastrarlo, lo cual es un ejemplo particular de la solución del problema.

Luego construye un triángulo rectángulo apoyado en una perpendicular y una circunferencia de centro A y radio AB, con lo que asegura también que el triángulo es isósceles.

Al tomar un ejemplo particular y justificarlo como solución basado en su construcción, se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 87

Actividad final Estudiante D Problema 5

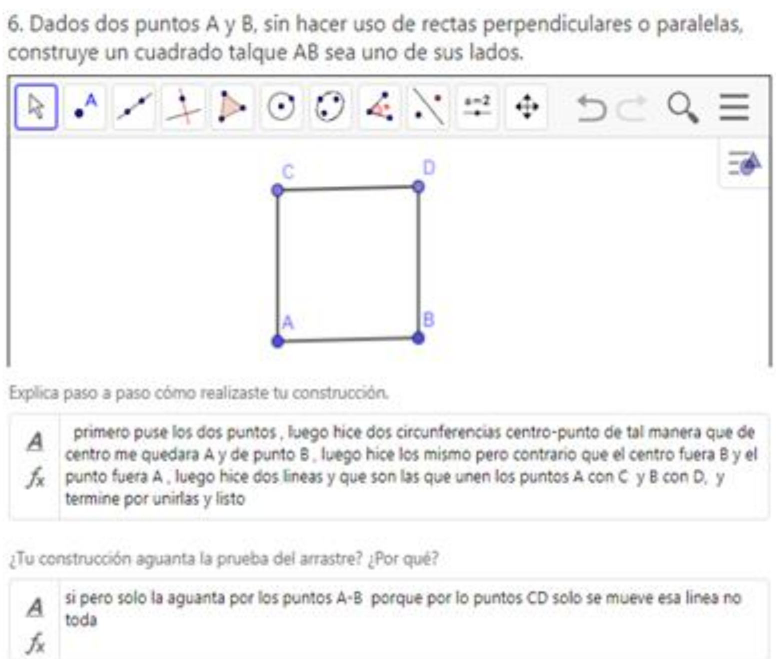


Problemas 6. La construcción del estudiante configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** por cuanto toma un ejemplo particular sin criterio alguno, lo cual se ve al trazar dos

circunferencias de radio AB con centro en A y en B y escoger puntos sobre ellas, de tal manera que a simple vista los segmentos AC y BD sean perpendiculares con AB.

Figura 88

Actividad final Estudiante D Problema 6

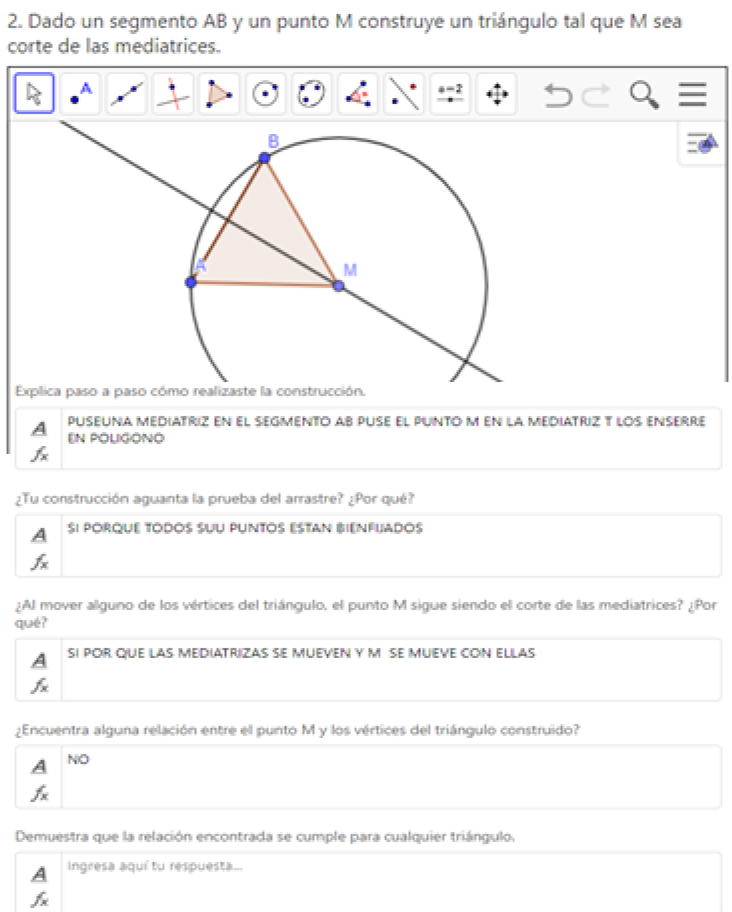


Estudiante E.

Problema 2. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y ubica el punto M sobre la mediatriz del segmento AB para luego trazar el triángulo ABM. Teniendo en cuenta que su construcción no apunta a la solución del problema y que en sus argumentos escritos el estudiante no argumenta sus acciones, se denota una categoría **Fallida.**

Figura 89

Actividad final Estudiante E Problema 2

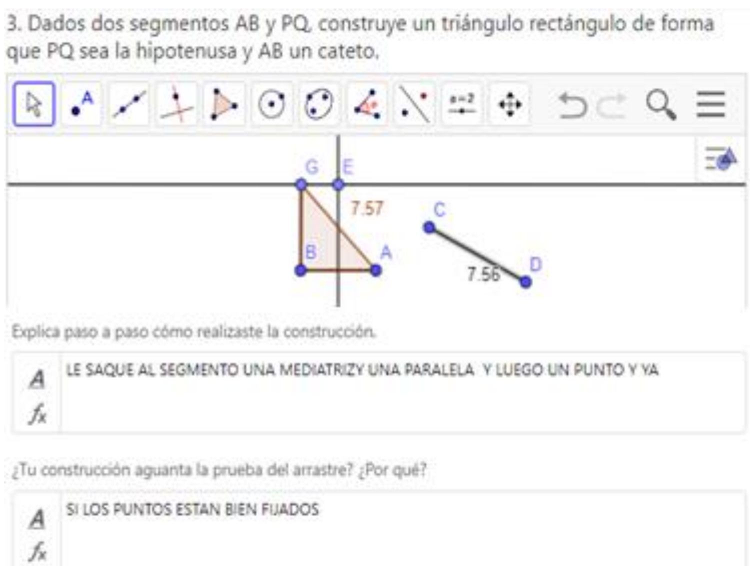


Problema 3. El estudiante traza la mediatriz del segmento dado AB y ubica sobre ella el punto E. traza el segmento CD el cual representa al PQ dado en los datos del problema y toma su medida. Luego traza una paralela a AB por E y sobre esta paralela ubica el punto G de tal manera que a simple vista el ángulo ABG sea recto. Por último, traza el triángulo ABG y mide el segmento BG cuya medida se aproxima a la del segmento CD. Al ubicar el punto G tratando de que el ángulo

BAG fuese recto, el estudiante muestra un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** siendo su triángulo un ejemplo particular y se toma como solución del problema usando elementos visuales.

Figura 90

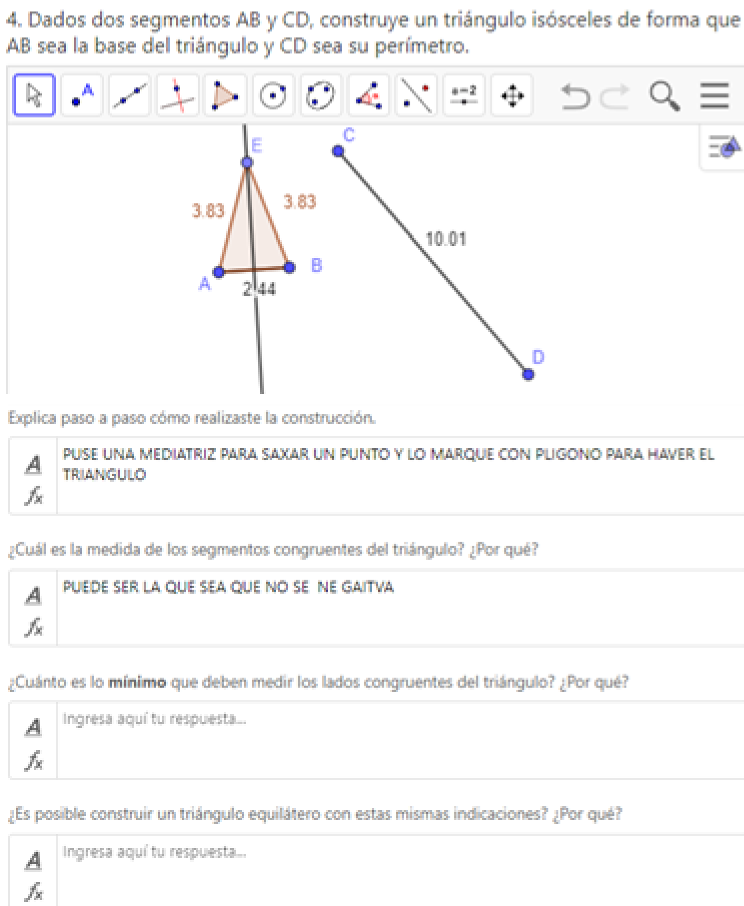
Actividad final Estudiante E Problema 3



Problema 4. El estudiante traza los segmentos dados en los datos del problema y los mide. Luego traza la mediatriz del segmento AB y ubica un punto E sobre ella. Por último, traza el triángulo ABE, mide los lados congruentes del triángulo y con la función de arrastre, mueve el punto E hasta encontrar el triángulo cuyo perímetro es la medida del segmento CD. Por cuanto el estudiante toma cuidadosamente un ejemplo particular al ubicar el punto E sobre la mediatriz, y verlo como una solución, siendo este un único ejemplo, se configura un **Experimento Crucial Basado en el Ejemplo.**

Figura 91

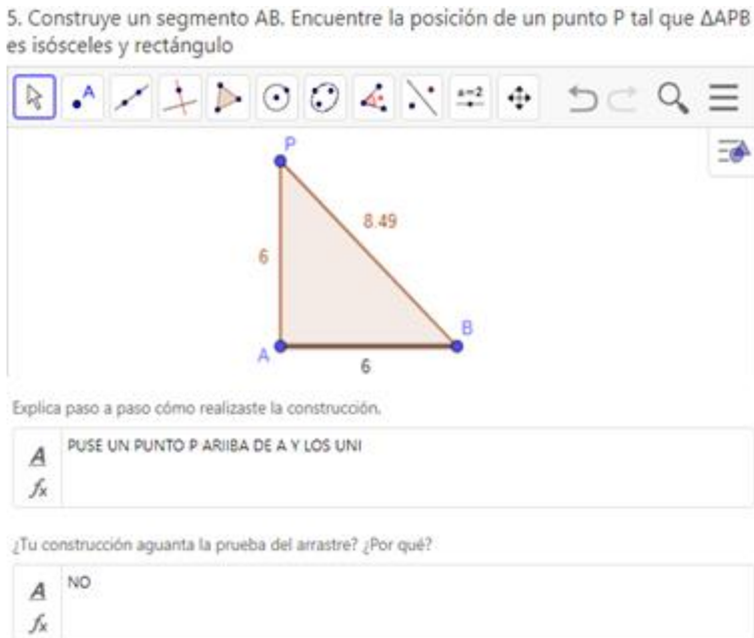
Actividad final Estudiante E Problema 4



Problema 5. El estudiante traza el segmento dado AB y ubica un punto P de tal manera que al trazar el triángulo BAP parezca rectángulo. Luego de trazar el triángulo, mide los segmentos AB y AP y arrastra el punto P hasta que sean congruentes. Las acciones del estudiante configuran un **Empirismo Ingenuo Inductivo,** por cuanto escoge un ejemplo particular y lo justifica como respuesta basado en elementos visuales, al ubicar P solo con criterios perceptivos.

Figura 92

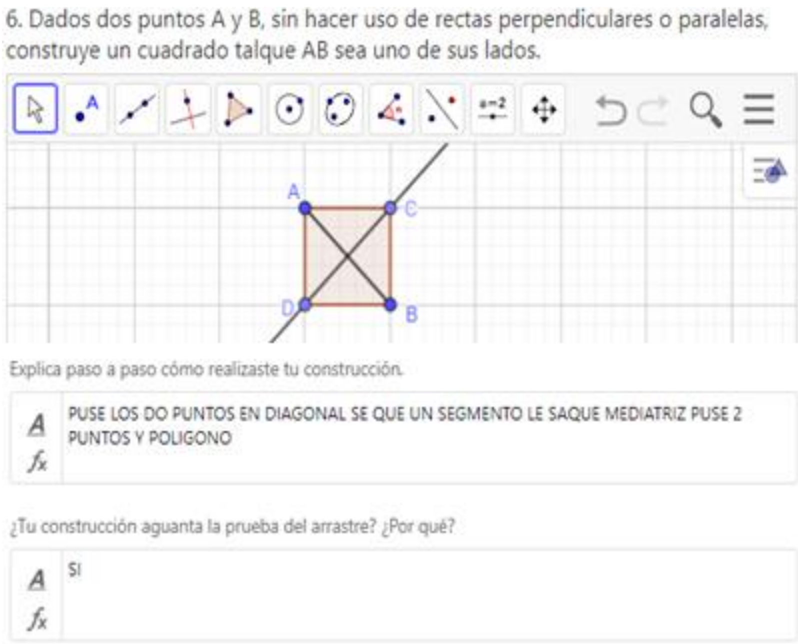
Actividad final Estudiante E Problema 5



Problema 6. El estudiante ubica los puntos A y B dados en el problema y traza el segmento entre ellos. Luego traza su mediatriz, y ayudado por la cuadrícula, ubica dos puntos C y D sobre la mediatriz de tal manera que junto con A y B parecen ser los vértices de un cuadrado. Luego traza el cuadrado ABCD. Al ubicar de manera visual los puntos C y D, se configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo,** pues la construcción es un ejemplo particular el cual se toma como solución basado en elementos visuales.

Figura 93

Actividad final Estudiante E Problema 6



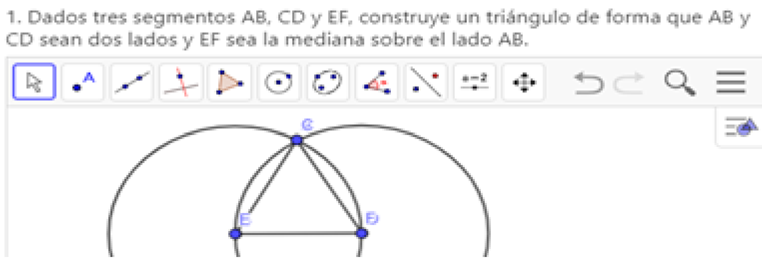
Estudiante F.

Problema 1. El estudiante traza los segmentos dados de tal manera que formen un triángulo, lo cual indica que no toma en cuenta las condiciones dadas en el problema. Luego traza dos circunferencias de radio BD, con centro en B y en D.

Teniendo en cuenta que su construcción no apunta a la solución del problema y que el estudiante no da argumentos escritos, se configura una categoría **Fallida,** pues no es posible inferir nada.

Figura 94

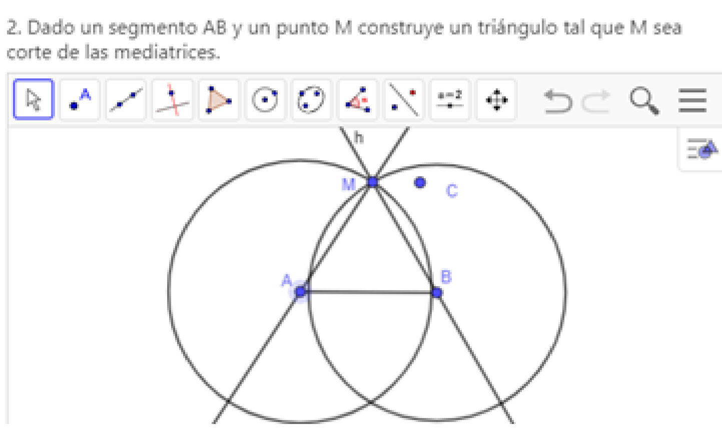
Actividad final Estudiante F Problema 1



Problema 2. El estudiante traza el segmento AB y el punto M dados en el problema. Luego traza una circunferencia con centro en A que pasa por M y una circunferencia con centro en B que pasa por M. Por último, traza las rectas AM y BM. Puesto que la construcción del estudiante no apunta a la solución del problema y no da argumentos escritos, se configura una categoría **Fallida,** pues no es posible inferir nada.

Figura 95

Actividad final Estudiante F Problema 2

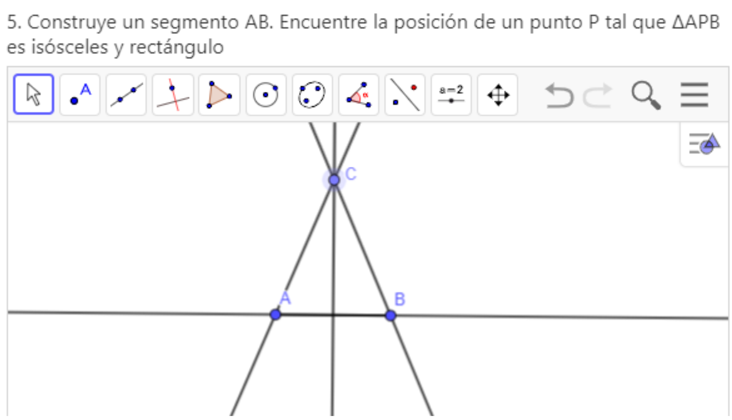


Problema 5. El estudiante traza el segmento AB dado en los datos del problema y traza su mediatriz. Luego ubica un punto C sobre esta y construye el triángulo isósceles ABC.

Aunque su construcción no es la solución, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto ubica un punto C sobre la mediatriz trazada y justifica su solución basado en la forma en que realizó la construcción.

Figura 96

Actividad final Estudiante F Problema 5



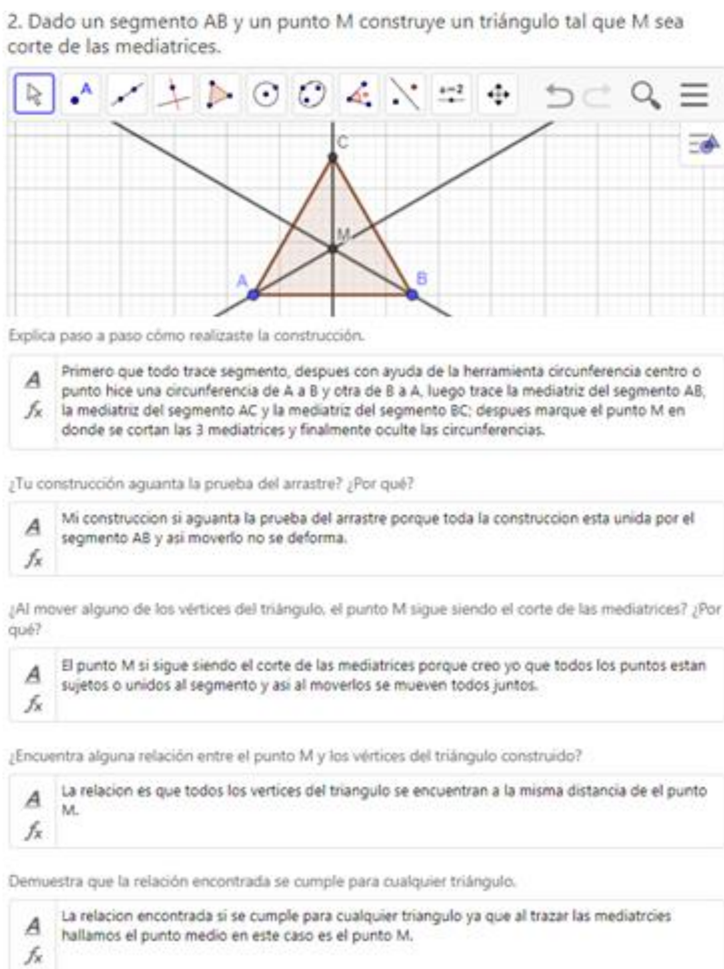
Estudiante G.

Problema 2. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y construye un triángulo equilátero usando circunferencias. Luego traza mediatrices del triángulo y ubica el punto M que para él es el mencionado por el problema.

Los argumentos del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto selecciona cuidadosamente su ejemplo y lo ve como la solución del problema basado en la forma cómo lo obtuvo.

Figura 97

Actividad final Estudiante G Problema 2

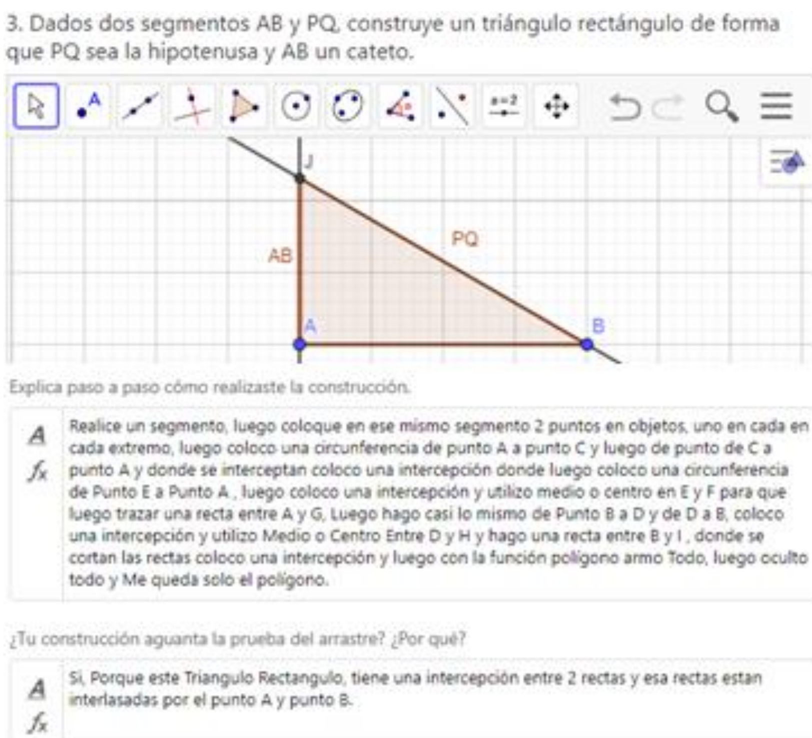


Problema 3. El estudiante realiza la misma construcción que realizó en el problema 2 de la actividad diagnóstica y su argumento escrito no varía, por lo que se configura la misma categoría:

Aunque el estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y por lo tanto no lo soluciona, construye un triángulo rectángulo representante de una clase, específicamente aquellos cuyos ángulos agudos miden 60° y 30° y basa su argumentación en su construcción, por lo que se configura un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 98

Actividad final Estudiante G Problema 3

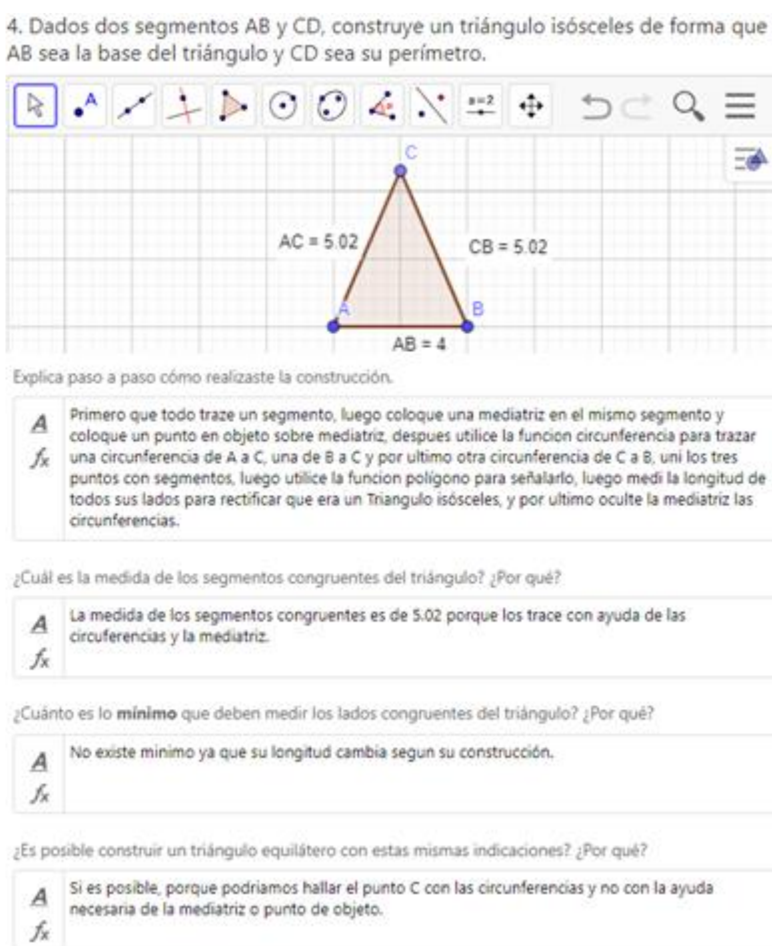


Problema 4. El estudiante no tiene en cuenta los datos iniciales del problema y construye un triángulo isósceles usando la mediatriz del segmento AB. Luego traza tres circunferencias innecesarias en su construcción.

Aunque su construcción no es la solución, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto ubica un punto C sobre la mediatriz trazada y justifica su solución basado en la forma en que realizó la construcción.

Figura 99

Actividad final Estudiante G Problema 4

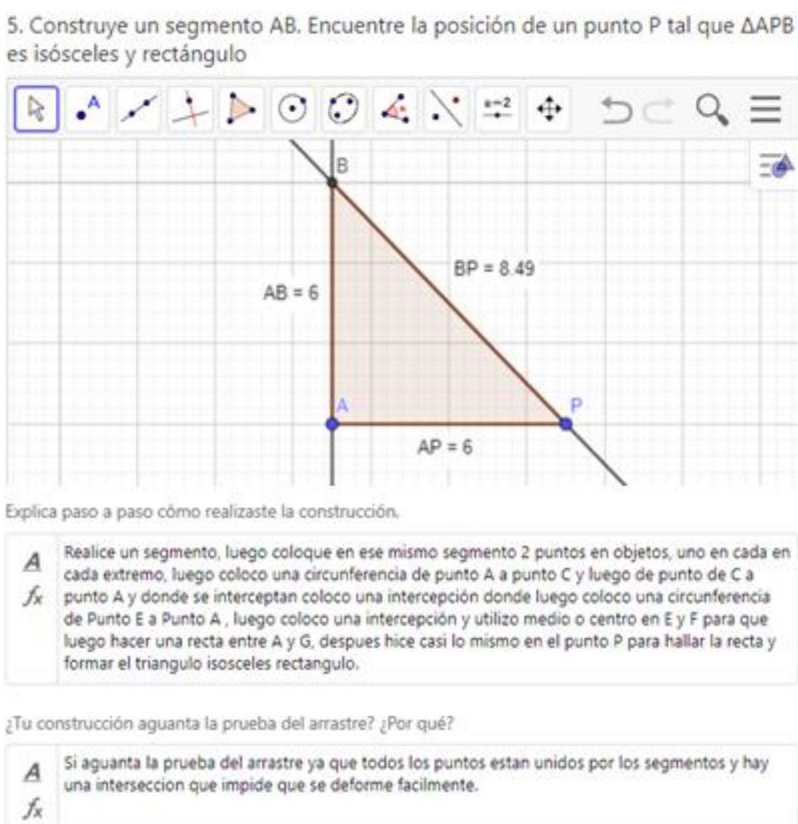


Problema 5. El estudiante realiza la misma construcción que el estudiante B. Traza un segmento AB y en el extremo A traza una perpendicular utilizando para ello circunferencias y puntos medios. Luego ubica de manera arbitraria un punto I y traza la recta BI para después marcar el punto de intersección P entre la perpendicular y la recta BI. Con la herramienta polígono traza el triángulo BAP, el cual no es isósceles pero sí rectángulo.

Las acciones del estudiante configuran un **Ejemplo Genérico Intelectual,** por cuanto el triángulo rectángulo que construye constituye un ejemplo representante de una clase y usa argumentos y propiedades matemáticas que tiene presente o recuerda mientras lo elabora.

Figura 100

Actividad final Estudiante G Problema 5

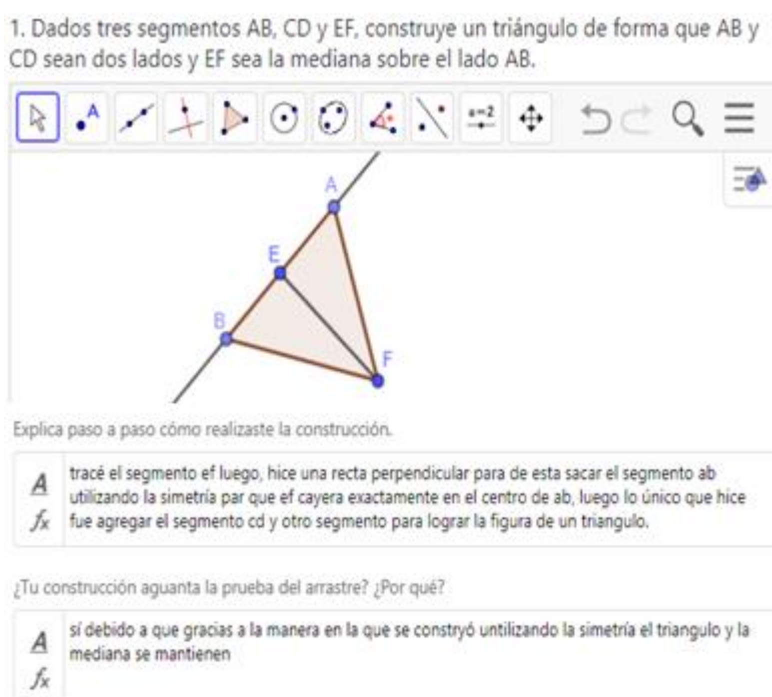


Estudiante H.

Problema 1. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y en vez de tomar tres segmentos y realizar la construcción busca estos segmentos mientras realiza su construcción, lo cual puede verse como un ejemplo tomado cuidadosamente, pues usa la mediatriz para hallar el punto medio del segmento AB y lo toma como la solución del problema basado en la forma como lo construyó. De esto da cuenta su respuesta sobre la prueba del arrastre, pues dice que soporta el arrastre debido a la manera en la que se construyó utilizando la simetría. Según lo anterior, los argumentos del estudiante se categorizan como un **Experimento Crucial Constructivo.**

Figura 101

Actividad final Estudiante H Problema 1

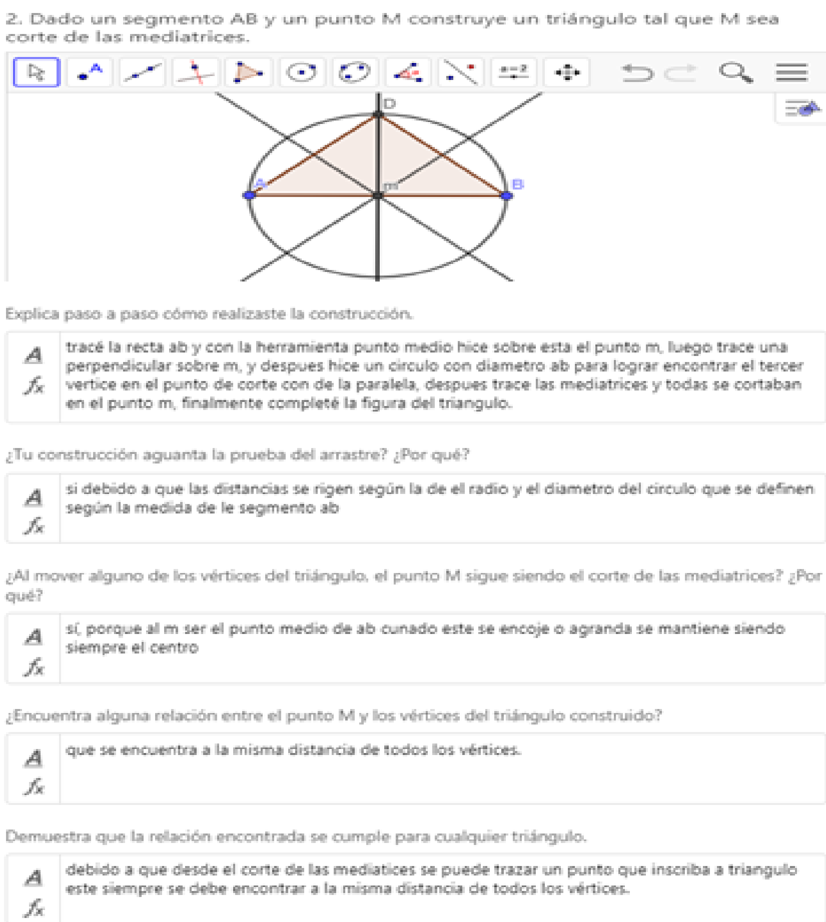


Problema 2. El estudiante toma el segmento dado AB y ubica en su punto medio al punto M. Luego, usando una circunferencia con centro en M y radio AM, y una perpendicular a AB por M encuentra el punto D que es el tercer vértice del triángulo buscado.

El estudiante parte de los datos del problema, pero ubica al punto M en el punto medio del segmento AB, lo que significa que toma, cuidadosamente, un ejemplo represente de una clase y toma su construcción como solución, basado en propiedades que tiene claras o recuerda mientras la realiza, por lo que se configura un **Ejemplo Genérico Intelectual.**

Figura 102

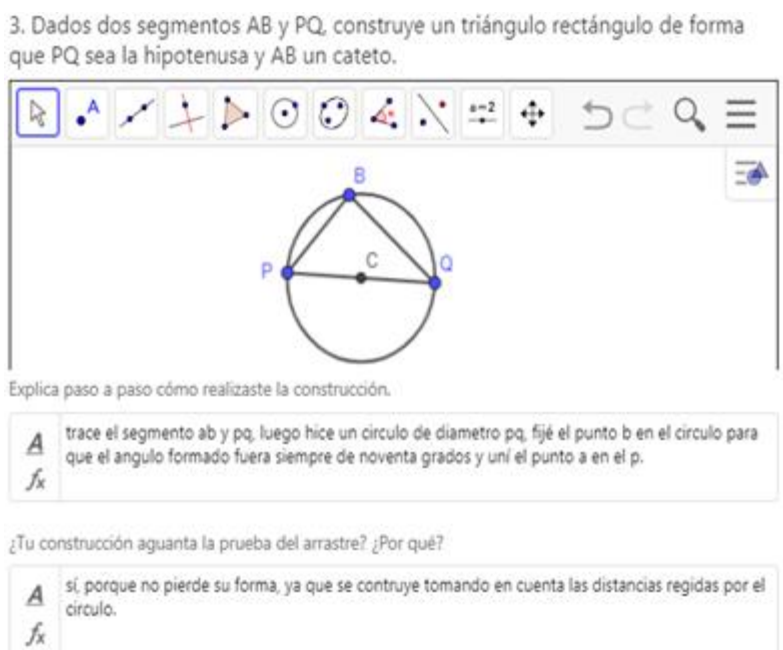
Actividad final Estudiante H Problema 2



Problema 3. El estudiante ubica los puntos P y Q y encuentra el punto medio C. Desde allí traza una circunferencia de radio PC. Por último, ubica el segmento AB desde uno de los extremos de PQ y el otro extremo sobre la circunferencia, asegurando con esto que sea un triángulo rectángulo. Aunque construye el segmento AB por el camino, los argumentos del estudiante configuran una secuencia lógica basada en datos del problema, teoremas o axiomas, con lo cual se categorizan como un **Experimento Mental Estructural.**

Figura 103

Actividad final Estudiante H Problema 3

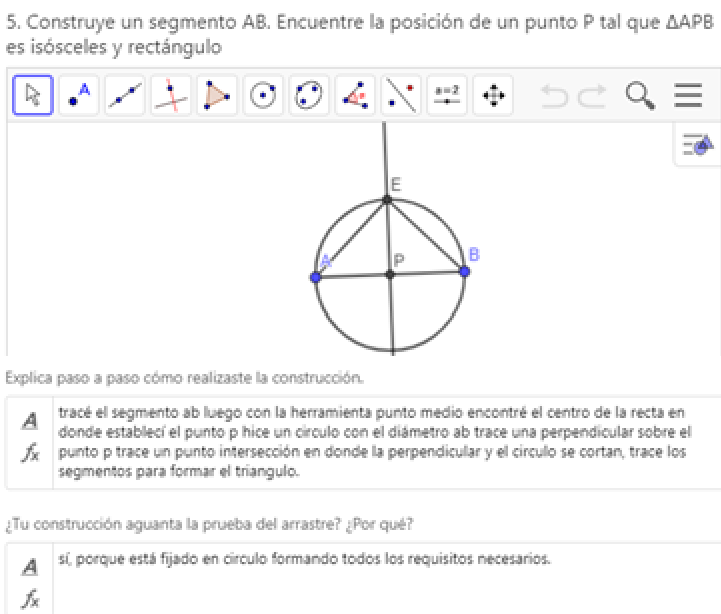


Problema 5. El estudiante construye el triángulo pedido, pero establece el punto P de manera incorrecta. Si toma el punto E como P, la solución sería correcta. De cualquier modo, los

argumentos del estudiante establecen un **Experimento Mental Transformativo,** por cuanto se basa en definiciones, propiedades y deducciones lógicas que transformaron el problema inicial en uno equivalente el cual consistió en encontrar un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia, teniendo como uno de sus lados el diámetro de esta.

Figura 104

Actividad final Estudiante H Problema 5

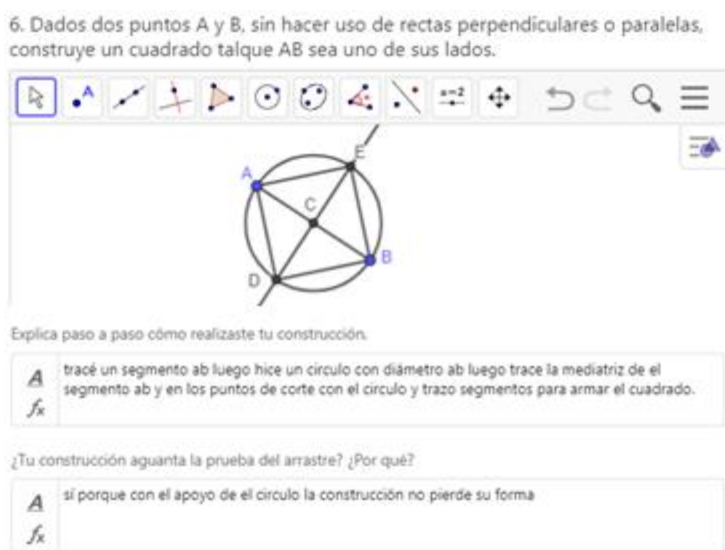


Problema 6. El estudiante no tiene en cuenta los datos iniciales del problema y realiza una construcción similar a la del problema N° 2 de la secuencia de problemas de construcción (ver anexo), usando la mediatriz del segmento formado por los puntos dados y una circunferencia con centro en el punto medio del segmento. A pesar de que su construcción no sea la solución del problema, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Ejemplo Genérico Analítico,** por

cuanto escoge cuidadosamente un ejemplo representante de una clase y los argumentos con los que lo valida como su solución se basan en propiedades que tiene presentes o recuerda durante su construcción.

Figura 105

Actividad final Estudiante H Problema 6

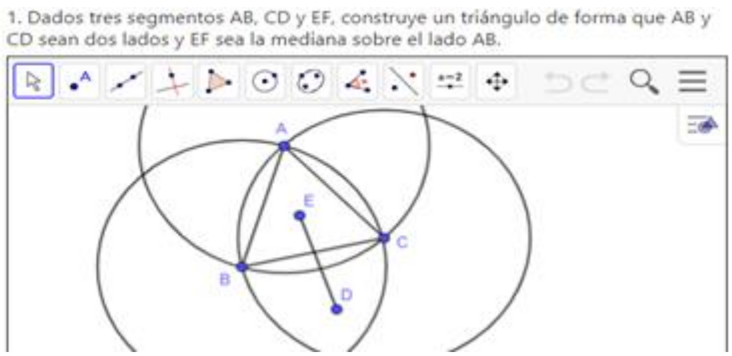


Estudiante I.

Problema 1. El estudiante traza los segmentos AB y CD compartiendo uno de sus vértices y traza un triángulo al unir con un segmento A y C. parece que ubica al segmento ED sobre el segmento BC y traza tres circunferencias con centros en los vértices A, B y C, sin especificar ningún fin. Teniendo en cuenta que la construcción del estudiante no apunta a resolver y problema y no da argumentos escritos, se configura una categoría **Fallida.**

Figura 106

Actividad final Estudiante I Problema 1

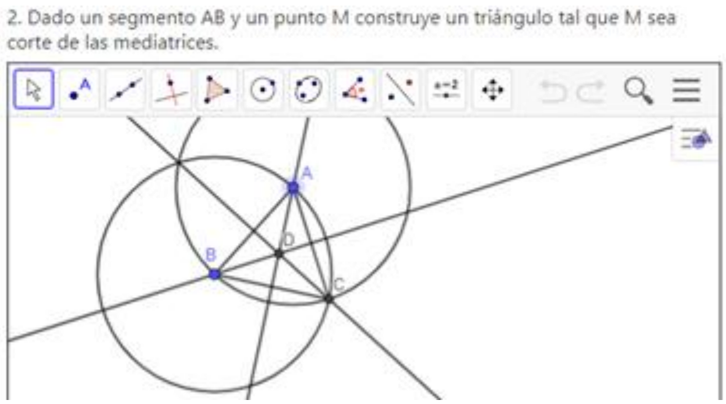


Problema 2. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema ni da argumentos escritos. Construye un triángulo equilátero usando circunferencias. Luego traza mediatrices del triángulo y ubica el punto M que para él es el mencionado por el problema.

Los argumentos del estudiante configuran un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto selecciona cuidadosamente su ejemplo y lo ve como la solución del problema basado en la forma cómo lo obtuvo.

Figura 107

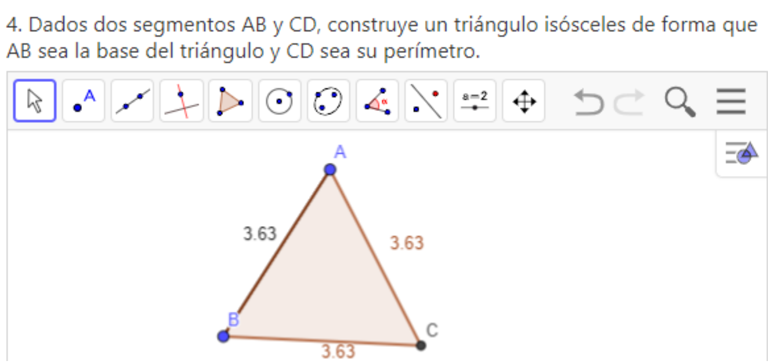
Actividad final Estudiante I Problema 2



Problema 4. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y a partir del segmento AB construye un triángulo equilátero usando circunferencias. Teniendo en cuenta que la construcción del estudiante no apunta a solucionar el problema y que no da argumentos escritos, se ubica en la categoría **Fallida.**

Figura 108

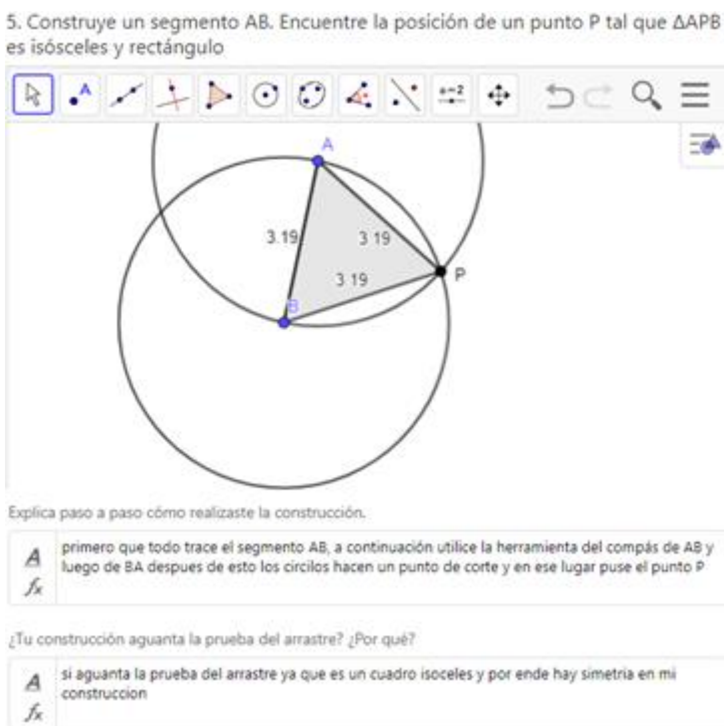
Actividad final Estudiante I Problema 4



Problema 5. El estudiante no tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema y a partir del segmento AB construye un triángulo equilátero usando circunferencias. Teniendo en cuenta que la construcción del estudiante no apunta a solucionar el problema y que no da argumentos escritos, se ubica en la categoría **Fallida.**

Figura 109

Actividad final Estudiante I Problema 5



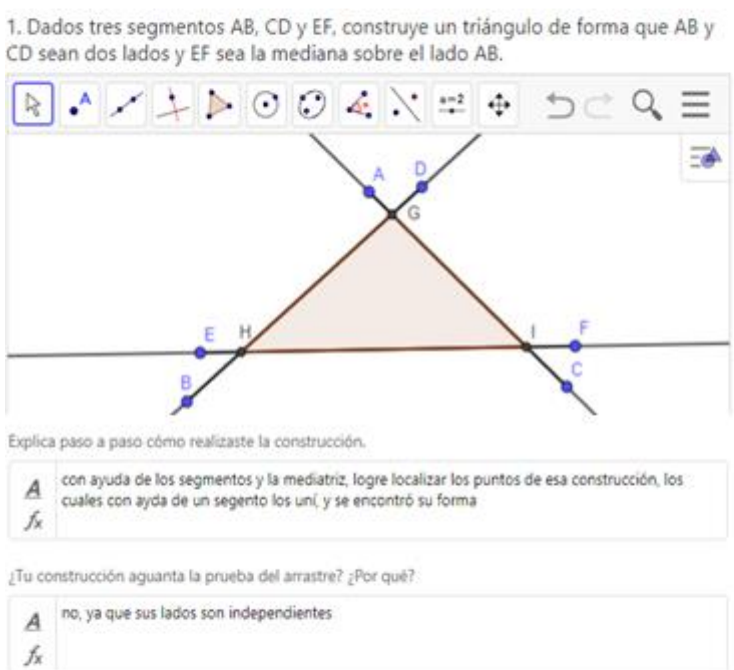
Estudiante J.

Problema 1. El estudiante ubica los puntos A, B, C, D, E y F de manera arbitraria. Luego, traza los segmentos EF, BD y AC, y ubica los puntos de intersección G, H, I. Por último, traza el triángulo GHI y las rectas AC, BD y EF.

Dado que la construcción del estudiante no apunta a resolver el problema y en sus argumentos escritos dice usar elementos que en realidad no están en su construcción, se establece una categoría **Fallida.**

Figura 110

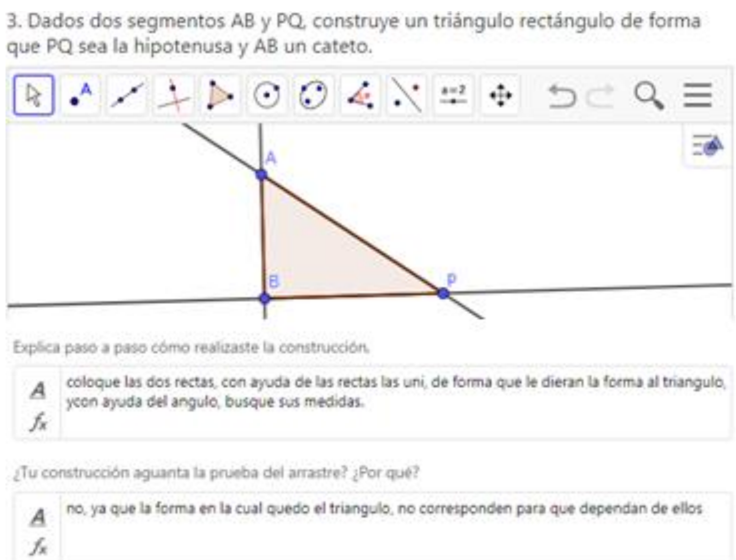
Actividad final Estudiante J Problema 1



Problema 3. El estudiante ubica los segmentos dados de tal manera que a simple vista parecen perpendiculares. Luego traza el segmento AP y con la herramienta polígono traza el triángulo PBA. Por último, traza las rectas AB, BP y PA. Este triángulo se puede ver un ejemplo particular tomado de manera arbitraria, que el estudiante toma y justifica como solución con elementos visuales, por lo que se configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 111

Actividad final Estudiante J Problema 3

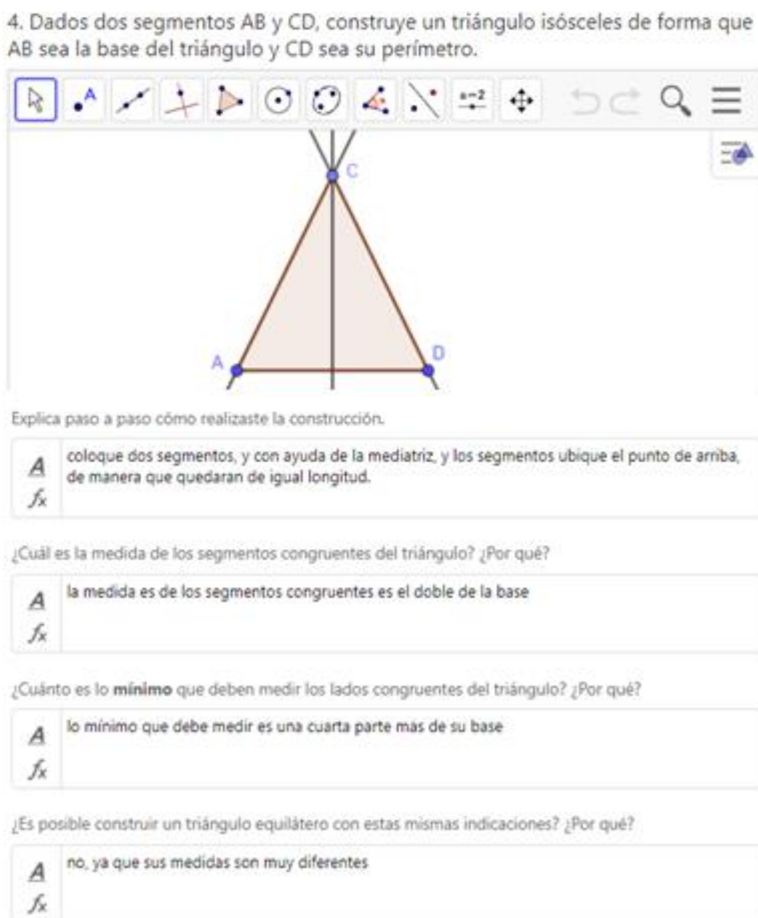


Problema 4. El estudiante no tiene en cuenta los datos iniciales del problema y construye un triángulo isósceles usando la mediatriz del segmento AD.

Aunque su construcción no es la solución, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto ubica un punto C sobre la mediatriz trazada y justifica su solución basado en la forma en que realizó la construcción.

Figura 112

Actividad final Estudiante J Problema 4

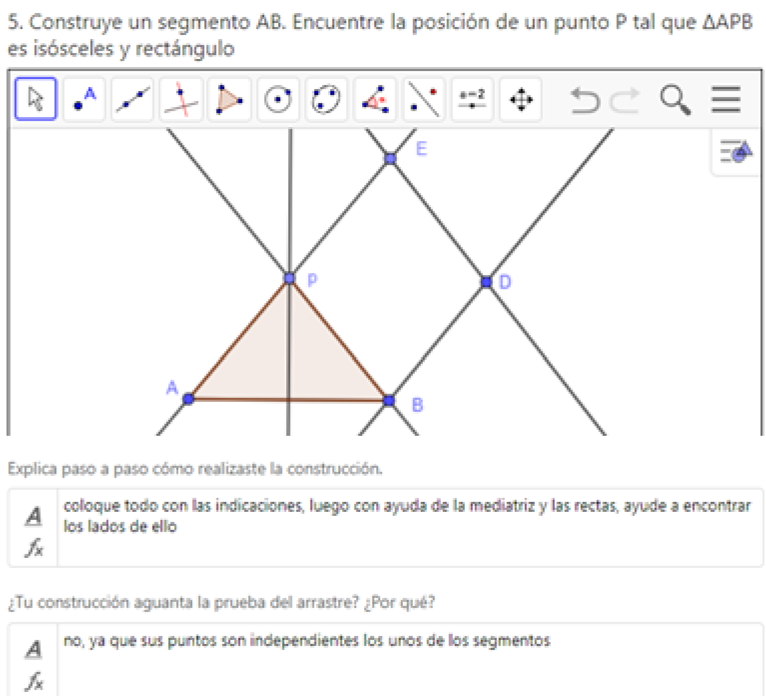


Problema 5. El estudiante traza la mediatriz del segmento AB dado en los datos del problema. Luego ubica el punto P sobre la mediatriz y traza el triángulo PBA. Por último, ubica los puntos D y E en un lugar arbitrario y traza las rectas DB y EP.

Aunque su construcción no es la solución, los argumentos usados por el estudiante connotan un **Experimento Crucial Constructivo,** por cuanto ubica un punto C sobre la mediatriz trazada y justifica su solución basado en la forma en que realizó la construcción.

Figura 113

Actividad final Estudiante J Problema 5

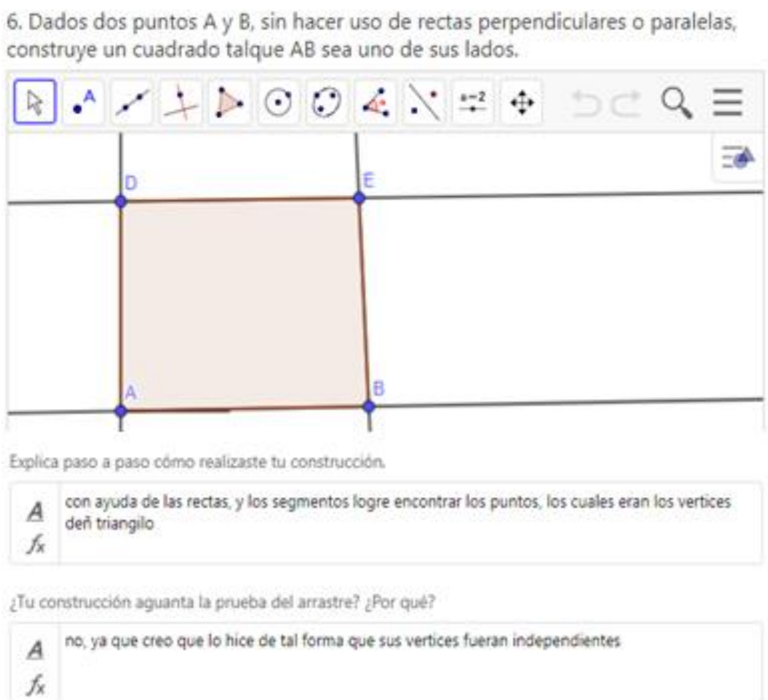


Problema 6. El estudiante toma los puntos A y B dados en los datos del problema y traza el segmento AB. Luego ubica los puntos D y E procurando que los segmentos DA y AB fueran

perpendiculares al igual que los segmentos EB y AB. Por último, traza el cuadrado ABDE, el cual se puede ver un ejemplo particular tomado de manera arbitraria, que el estudiante toma y justifica como solución con elementos visuales, por lo que se configura un **Empirismo Ingenuo Perceptivo.**

Figura 114

Actividad final Estudiante J Problema 6



En la siguiente tabla se presentan de manera concreta las categorías pertenecientes a la solución que cada uno de los estudiantes dio a los problemas propuestos en la actividad final. Para ello se usan las iniciales de cada categoría detectada. A saber:

F: Fallida; **EIP:** Empirismo Ingenuo Perceptivo; **EII:** Empirismo Ingenuo Inductivo; **ECBE:** Experimento Crucial Basado en el Ejemplo; **ECC:** Experimento Crucial Constructivo; **EGA:** Ejemplo Genérico Analítico; **EGI:** Ejemplo Genérico Intelectual; **EMT:** Experimento Mental Transformativo; **EME:** Experimento Mental Estructural; **DFT:** Decuctiva Formal Transformativa; **DFE:** Deductiva Formal Estructural.

Tabla 3

Actividad final, problemas 1 a 6

Estudiante	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 5	Problema 6
A	F	ECC	F	ECC	F	F
B	F	ECC	ECC	ECC	EGI	F
C	ECC	EME	ECC	Caso especial: EGI Caso general: ECC	DFT	EGA
D	EII	EII	EGI	ECC	ECC	EIP
E	F	F	EIP	ECBE	EII	EIP
F	F	F	F	F	ECC	F
G	F	ECC	ECC	ECC	EGI	F
H	ECC	EGI	EME	F	EMT	EGA
I	F	ECC	F	F	F	F
J	F	F	EIP	ECC	ECC	EIP

En las siguientes figuras se muestra el porcentaje de los tipos de demostración detectados en las fases diagnóstica inicial, la implementación de la secuencia de problemas y la actividad diagnóstica final. En la figura 115 se discrimina por subclases, mientras que en la 116 se hace por clases.

Figura 115

Diagrama de barras de los tipos de demostración detectados en cada actividad, por subclases

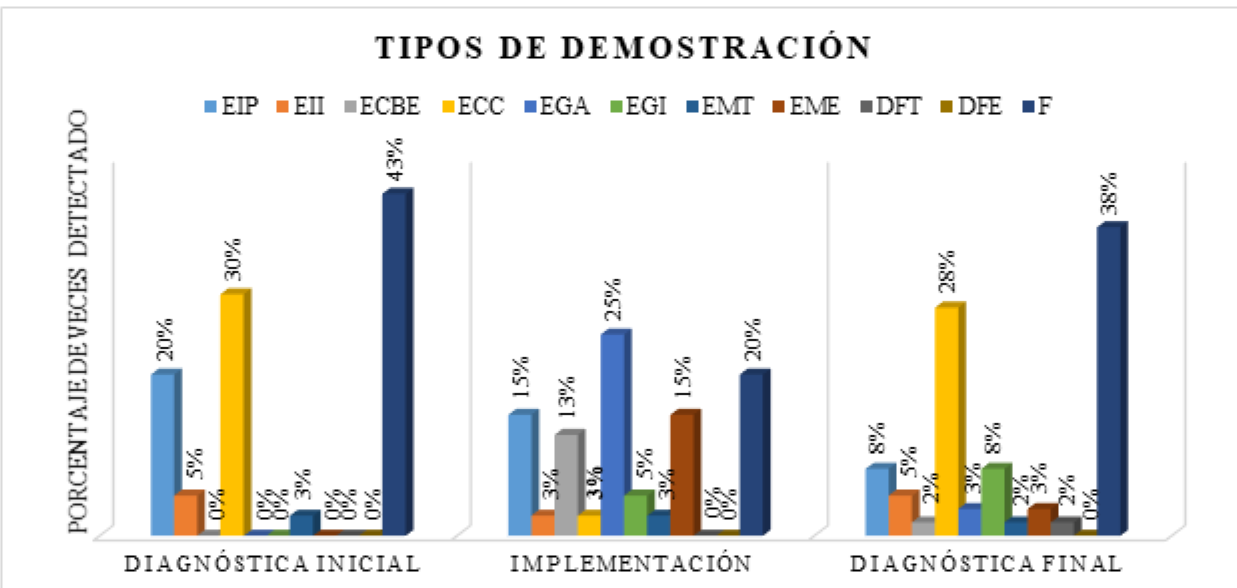
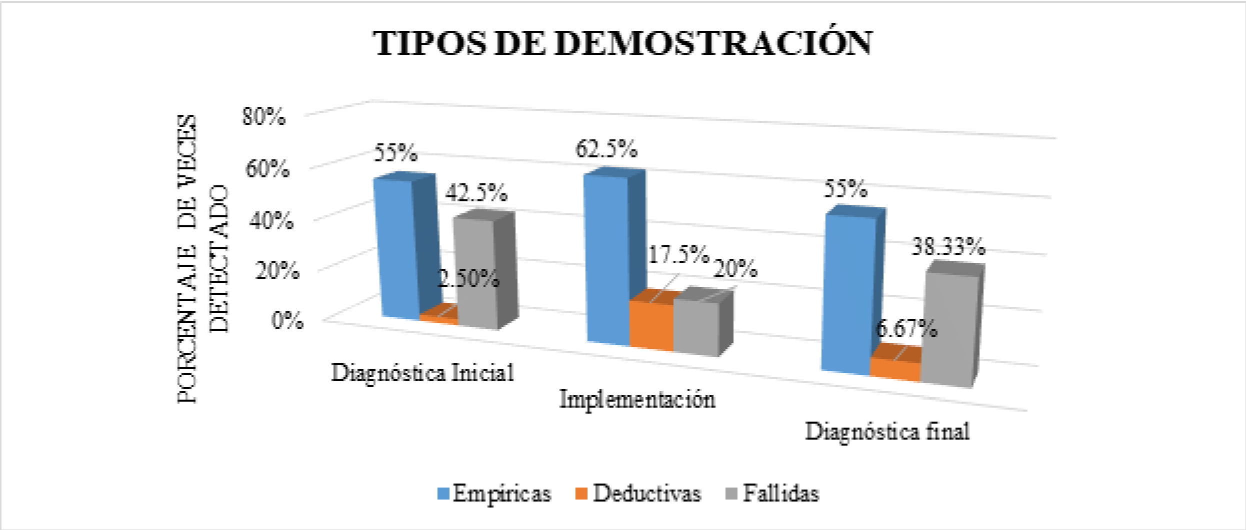


Figura 116

Diagrama de barras de los tipos de demostración detectados en cada actividad, por clases



En figura 115 se puede observar que la cantidad de demostraciones deductivas detectadas durante la intervención fue mayor a las detectadas en la fase diagnóstica inicial.

También se puede ver que en la diagnóstica final la cantidad de demostraciones fallidas detectadas disminuyó un 15% con respecto a las detectadas en la diagnóstica inicial mientras que la cantidad de demostraciones de tipo ejemplo genérico y demostraciones deductivas aumentó.

En cuanto a la cantidad de demostraciones empíricas, deductivas y fallidas, en la figura 116 se observa que la cantidad de demostraciones fallidas disminuyó considerablemente en la intervención con respecto a la diagnóstica inicial y también disminuyó, aunque en menor cantidad, en la diagnóstica final.

Por su parte, las demostraciones deductivas detectadas aumentaron tanto en la intervención como en la diagnóstica final con respecto a la diagnóstica inicial.

5. Conclusiones

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el proceso de investigación frente a la identificación, análisis y caracterización de los tipos de demostración de estudiantes de noveno grado cuando resuelven problemas de construcción geométrica en un entorno de geometría dinámica.

En cada una de las fases de nuestro diseño se pudo evidenciar tanto fortalezas como debilidades de los estudiantes al tener que justificar sus planteamientos. Fue común encontrar en la fase diagnóstica inicial construcciones correctas en la que no se justificaba el porqué estaba bien o con argumentos que hacían referencia a la función de arrastre del software. Esto ratifica lo dicho por Arellano (2013) sobre la falta de necesidad de justificación que tienen los estudiantes al enfrentar un problema, el cual ven como algo para resolver y no para justificar. Sin embargo, durante la fase de implementación de la secuencia de problemas de construcción, las justificaciones de la mayoría de los estudiantes fueron volviéndose espontáneas y mostraron una mayor complejidad y fortaleza al incluir propiedades y relaciones matemáticas que ya conocían o que encontraron en la exploración hecha con el software.

Durante la fase de implementación se pudo ver la importancia de dos momentos que identificamos como trabajo autónomo y puesta en común. El primero se refiere al momento en el que el estudiante se enfrenta al problema solo con sus presaberes y el software como ayuda. Es posible que en este momento surja en el estudiante la necesidad de justificar sus acciones en el software, pues al permitirle verificar su solución y que esta sea incorrecta, el estudiante tendrá que analizar lo que ha hecho y recurrir a la teoría para encontrar el error y la posible solución. Es por esto por lo que el docente debe tomar un rol pasivo, respondiendo solo a preguntas que direccionen el trabajo del estudiante mas no que lo resuelva. La puesta en común, por su parte, favoreció el desarrollo de las habilidades de argumentación tanto en el estudiante que exponía su trabajo, pues se veía obligado a hacerse entender y a convencer a sus compañeros sobre la legitimidad de su solución, como en los compañeros de clase, pues si querían refutar lo expuesto, debían usar argumentos válidos, ejemplos o contraejemplos.

En esta misma fase se evidencia la importancia del papel que desempeña el software como mediador interactivo e inteligente, puesto que permite una exploración de propiedades invariantes que redunda en el desarrollo del pensamiento deductivo. Muestra de ello es la solución que plantea el estudiante C en el problema N° 4 y que mostramos en el capítulo de análisis de datos. En su argumentación escrita, el estudiante expresa haber encontrado dos soluciones, una a la que llama caso especial y otra que llama caso particular. Solo los nombres dan cuenta del proceso argumentativo desarrollado en parte durante la exploración del problema y en parte durante la verificación de la solución a través de la función de arrastre. Al ver su incapacidad de justificar la obtención del caso general, decide hablar solo del particular, y a pesar de que dice entender que es necesaria una demostración, fue pertinente que el docente reforzara esta necesidad invitándolo a revisar y encontrar una teoría matemática que sustentara sus acciones en esta construcción. Cabe recordar que como bien lo dice Fiallo (2011), el software puede convertirse en un obstáculo si el docente permite que los argumentos de los estudiantes se basen solo en la verificación que este ofrece.

Otro caso que muestra el acercamiento que permite el software cuando se resuelven problemas de construcción, es el del estudiante E quien, al tratar de resolver el problema de construcción N° 4 de la fase de implementación, planteó que “si pongo dos mediatrices en 2 segmentos que un punto comparten, dará un punto de intersección.” El estudiante fue motivado por el docente a que demostrara este postulado y utilizando el software encontró y explicó un contraejemplo que le permitió convencerse de la invalidez de su afirmación, en ese caso particular.

El análisis de los datos recolectados en las tres fases metodológicas permite evidenciar el progreso de cada uno de los estudiantes en el proceso demostrativo. Si bien es cierto que algunos no mostraron progresos individuales, la información plasmada en las tablas de la 1 a la 9, muestra que mientras que en la fase diagnóstica se determinó que un 2,5% de las demostraciones fueron deductivas, en la fase de implementación este porcentaje fue del 20% y en la diagnóstica final del 6,67%.

Las demostraciones de tipo empírico tuvieron un 55% en la fase diagnóstica inicial, un 60% en la implementación y un 45% en la diagnóstica final.

En cuanto a los tipos de demostración Fallida, en la fase diagnóstica inicial fue del 42,25%, en la implementación fue del 20% y en la diagnóstica final de 38,33%

A partir de estos valores, podemos afirmar que es posible potenciar el desarrollo de las habilidades de demostración en estudiantes de noveno grado, cuando solucionan problemas de construcción geométrica en un software de geometría dinámica.

Debido a la emergencia sanitaria, económica y social causada por el COVID-19, las clases se vieron suspendidas. Al respecto se resalta la utilidad de la página geogebra.org, al permitir a los estudiantes trabajar desde sus celulares o computadores sin tener que descargar la aplicación y mediante la opción de crear grupos de trabajo se realizó un seguimiento continuo de su avance.

Además, la vista de protocolos de construcción nos permitió observar el paso a paso de cada solución propuesta y de esta manera analizar y categorizar los tipos de demostraciones de los estudiantes. Por lo anterior, podemos sugerir el uso de esta herramienta no solo a los investigadores sino a la comunidad matemática en general.

Referencias Bibliográficas

Arellano, C. (2013). *La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas matemáticas.* Querétaro: Universidad Autónoma de Querétaro.

Báez, R., & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática, 12*, 67-87.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Universidad de los Andes.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Valencia: Universitat de Valencia.

Castiblanco, A. (2002). *Proyecto "Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia" y sus avances.* Bogotá.

De Villiers. (1993). *El papel y la función de la demostración en matemáticas.* Epsilon.

Fiallo, J. (2011). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica.* Valencia, España.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2006). *Unidad de enseñanza de las razones trigonométricas en un ambiente cabri para el desarrollo de las habilidades de la demostración.* España.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, A. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración, Escuela de Matemáticas, 31*(2), 181-205.

Furinghetti, F. (2001). Students approaching proof through conjectures: Snapshots in a classroom. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. *32*(3), 319.

GeoGebra. (2018). *¿Qué es GeoGebra?* Obtenido de https://www.geogebra.org/about

González, F. (2017). Reseña de la Tesis Doctoral "La demostración en ambientes de geometría dinámica: Un estudio con futuros docentes de matemática". *Revista Paradigma, XXXVIII*,(1), 381-403.

Gualdrón, E. (2011). *Análisis y Caracterización de la Enseñanza y aprendizaje de la Semejanza de figuras planas* . España: Universitat de Valencia.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En J. K. A. Schoenfeld, *Research in collegiate mathematics education III* (págs. 234-282). EEUU: AMS.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 805-842.

Healy, L., & Hoyler, C. (2001). Software touls for geometrical problem sulving: patentials and pitfalls In International Jovinal of Computers mathematical. *Learning P.*

Hernández, V., & Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Obtenido de Documento de discusión para estudio ICMI: www.eclides.org/men/articles

Ibañez, M., & Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos del primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(1), 49-63.

Jones, K. (2002). *El docente en la enseñanza de la geometría.* Londres: Routlege Falmer.

Lárez, J. (2014). Las demostraciones geométricas como instancias de resolución de problemas. *Paradigma*, *XXXV*(2), 183-198.

Mariotti, M. (2006). Proof and Proving in Mathematics Education. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 173-204.

MEN. (1998). *Serie Lineamientos Currículares. Matemáticas.* Santa Fe de Bogotá, D.C.

MEN. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales.* Bogotá D.C.

MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* Bogotá.

Morales, S., & Samper, C. (2015). Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea. *Amazonia Investiga, 4*(6).

Moreno, L. (2014). Parte III. NUEVOS APORTES AL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. En *Educación Matemática.* México.

NCTM. (2000). *Principales and Standars for shool Mathematics.* EE UU: V.A.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 6*(3), 21-36.

Sua, C. (2019). Saber suficiente no es suficiente: comportamientos metacognitivos al resolver problemas de demostración con el apoyo de la genometría dinámica. *TED*(45), 121-142. doi: ISSN 2323-0126

Toro, J. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo.* Medellín: Universidad de Medellín.

Van Hiele, G. (1957). *The didactics of geometry in the lowert class of secundary shool*, *Tesis doctoral*. Holanda: University of Utiech.

Anexos

ANEXO 1. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA INICIAL

INSTITUCIÓN: ____

NOMBRE: ____

EDAD: ______________________________ **FECHA:** _____________________

1. Dados tres segmentos AB, CD y EF, construye un triángulo de forma que AB y CD sean dos lados y EF sea la mediana sobre el lado AB.

    a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____

    b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

    ____
    ____
    ____

2. Dado un segmento AB y un punto M construye un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.

    a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

    ____
    ____
    ____
    ____
    ____
    ____

    b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

c. ¿Al mover alguno de los vértices del triángulo, el punto M sigue siendo el corte de las mediatrices? ¿Por qué?

d. ¿Encuentra alguna relación entre el punto M y los vértices del triángulo construido?

e. Demuestra que la relación encontrada se cumple para cualquier triángulo.

3. Dados dos segmentos AB y PQ, construye un triángulo rectángulo de forma que PQ sea la hipotenusa y AB un cateto.

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

4. Dados dos segmentos AB y CD, construye un triángulo isósceles de forma que AB sea la base del triángulo y CD sea su perímetro.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   b. ¿Cuál es la medida de los segmentos congruentes del triángulo? ¿Por qué?

   c. ¿Cuánto es lo **mínimo** que deben medir los lados congruentes del triángulo? ¿Por qué?

   d. ¿Es posible construir un triángulo equilátero con estas mismas indicaciones? ¿Por qué?

ANEXO 2. CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS

INSTITUCIÓN: ____

NOMBRE: ____

EDAD: ______________________ **FECHA:** ____________________

1. Dado un segmento, construye un cuadrado cuyo perímetro sea ese segmento.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   ____
   ____
   ____
   ____

   b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____
   ____

2. Dado un segmento, construye un cuadrado cuya diagonal sea ese segmento.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   ____
   ____
   ____
   ____

   b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____
   ____

3. A partir de una recta y un punto A, construye un cuadrado tal que A sea un vértice del cuadrado y la recta contenga su diagonal.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   ____

   ____

   ____

   ____

   b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

   ____

4. Dados tres puntos P, Q y R, construya una circunferencia que pase por los tres puntos.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   ____

   ____

   ____

   ____

   b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

   ____

   ____

   ____

   ____

ANEXO 3. EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA FINAL

INSTITUCIÓN: ____

NOMBRE: ____

EDAD: ______________________________ **FECHA:** ______________________

1. Dados tres segmentos AB, CD y EF, construye un triángulo de forma que AB y CD sean dos lados y EF sea la mediana sobre el lado AB.

    a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

    ____

    ____

    ____

2. Dado un segmento AB y un punto M construye un triángulo tal que M sea corte de las mediatrices.

    a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    ____

    b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

c. ¿Al mover alguno de los vértices del triángulo, el punto M sigue siendo el corte de las mediatrices? ¿Por qué?

d. ¿Encuentra alguna relación entre el punto M y los vértices del triángulo construido?

e. Demuestra que la relación encontrada se cumple para cualquier triángulo.

3. Dados dos segmentos AB y PQ, construye un triángulo rectángulo de forma que PQ sea la hipotenusa y AB un cateto.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

4. Dados dos segmentos AB y CD, construye un triángulo isósceles de forma que AB sea la base del triángulo y CD sea su perímetro.

   a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   b. ¿Cuál es la medida de los segmentos congruentes del triángulo? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

   c. ¿Cuánto es lo **mínimo** que deben medir los lados congruentes del triángulo? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

   d. ¿Es posible construir un triángulo equilátero con estas mismas indicaciones? ¿Por qué?

   ____
   ____
   ____

5. Construye un segmento AB. Encuentre la posición de un punto P tal que ΔAPB es isósceles y rectángulo

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?

6. Dados dos puntos A y B, sin hacer uso de rectas perpendiculares o paralelas, construye un cuadrado talque AB sea uno de sus lados.

a. Explica paso a paso cómo realizaste la construcción.

b. ¿Tu construcción aguanta la prueba del arrastre? ¿Por qué?