

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN SISTEMA TIPO ALLEN-CAHN-NAVIER-STOKES  
PARA FLUIDOS NO-ISOTÉRMICOS

ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2024

ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN SISTEMA TIPO ALLEN-CAHN-NAVIER-STOKES  
PARA FLUIDOS NO-ISOTÉRMICOS

ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ

Trabajo de Grado para optar al título de  
Magíster en matemáticas

Director

Diego Armando Rueda Gómez  
Ph.D en Matemáticas

Codirector

Élder Jesús Villamizar Roa  
Ph.D en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2024

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo de grado a las personas que han sido la fuerza detrás de mi éxito académico y personal. A mi amada madre y hermana, cuya dedicación, amor y constante apoyo me han inspirado a alcanzar mis metas.

A mi querida novia, quien ha sido mi roca durante este exigente proceso de investigación. Tu inquebrantable apoyo, comprensión y paciencia han sido mi refugio en los momentos más desafiantes. Gracias por creer en mí y estar a mi lado en cada paso del camino.

Este logro no solo es mío, sino también de ustedes. Su amor y respaldo han sido la brújula que me ha guiado hacia el éxito. Les estoy eternamente agradecido y les amo profundamente.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi agradecimiento a mi madre, Karoll E. Fernández, por su inquebrantable fe en mí y por el amor incondicional que siempre me ha brindado, y a mi hermana, Wendy V. Serrano, por ser un factor de apoyo y una fuente de confianza en mi vida.

Mi más profundo agradecimiento va dirigido a mi amada novia, Katherin Argüello, quien ha sido un pilar fundamental en mi vida durante todo el proceso de esta maestría. Tu apoyo incondicional, tu escucha atenta, tu constante motivación y tu amor inquebrantable han sido la fuerza que me impulsó a superar cada desafío en este camino académico.

Quiero extender mi agradecimiento a la familia Argüello Martínez, por ser un factor de apoyo invaluable durante mi proceso de maestría. Su cálida bienvenida, generosidad y apoyo constante han hecho que me sienta parte de su familia desde el primer día.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis distinguidos profesores, Diego A. Rueda y Élder J. Villamizar, por aceptar la responsabilidad de ser mi director y codirector de este trabajo de grado. Su compromiso, experiencia y orientación han sido esenciales en mi desarrollo académico y en la realización de este proyecto.

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>19</b>
1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES	19
1.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL	24
<b>2. ANÁLISIS TEÓRICO</b>	<b>30</b>
2.1. EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES	30
2.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUERTES PARA $N = 2$	36
2.3. UNA FORMULACIÓN EQUIVALENTE	46
<b>3. ANÁLISIS NUMÉRICO</b>	<b>49</b>
3.1. ESQUEMA NUMÉRICO	49
3.1.1. Definición del esquema.	52
3.1.2. Buen planteamiento, estabilidad energética y estimaciones uniformes del esquema (72)-(73).	54
3.2. ESTIMACIONES DE ERRORES	59
3.2.1. Estimaciones de error en normas débiles para $[u, \sigma, w, \theta]$ y normas fuertes para $\phi$ .	61
3.2.2. Estimaciones de error adicionales en normas fuertes para $[u, \sigma, p, \theta]$ .	77
<b>4. SIMULACIONES NUMÉRICAS</b>	<b>83</b>
4.1. ESTABILIDAD ENERGÉTICA	83
4.2. ESTIMACIONES DE ERRORES	85
4.3. DINÁMICA DEL MODELO	87

4.3.1. Efecto "diagonal".	87
4.3.2. Efecto "mariposa".	87
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>90</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>92</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>97</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Estabilidad energética del sistema (72).	84
Figura 2. Evolución en el tiempo de la función campo de fase $\phi$ .	88
Figura 3. Evolución en el tiempo de la función campo de fase $\phi$ tomando a $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ .	89

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Tasas de convergencia en espacio para $u_1$ .	85
Tabla 2. Tasas de convergencia en espacio para $u_2$ .	86
Tabla 3. Tasas de convergencia en espacio para $\phi$ .	86
Tabla 4. Tasas de convergencia en espacio para $\theta$ .	86

## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. Existencia y unicidad local del problema aproximado (19)	97

## RESUMEN

**TÍTULO:** ANÁLISIS NUMÉRICO DE UN SISTEMA TIPO ALLEN-CAHN-NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS NO-ISOTÉRMICOS \*

**AUTOR:** ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNÁNDEZ \*\*

**PALABRAS CLAVE:** CONVERGENCIA, ESTABILIDAD ENERGÉTICA, ESTIMACIONES ÓPTIMAS DE ERROR, ELEMENTOS FINITOS, SISTEMA DE ALLEN-CAHN NAVIER-STOKES NO ISOTÉRMICO.

### DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo se enfoca en el análisis numérico para un modelo no isotérmico de interfaz difusa, en dimensiones  $N = 2, 3$ , que describe el movimiento de una mezcla de dos fluidos viscosos incompresibles. Este modelo corresponde a un acoplamiento entre las ecuaciones de Navier-Stokes, una ecuación de campo de fase dada por el modelo de Allen-Cahn convectivo, y una ecuación de transporte de energía para la temperatura; este sistema admite una ley de energía disipativa. Proponemos un esquema numérico energéticamente estable basado en el método de los elementos finitos, y analizamos estimaciones óptimas de error en normas débiles y fuertes, así como la convergencia hacia soluciones regulares. Para construir el esquema numérico, introducimos dos variables auxiliares (dadas por el gradiente de la temperatura y la variación de la energía respecto a la función campo-fase) que permiten controlar la regularidad fuerte requerida por el modelo, que es una de las principales dificultades que aparecen desde el punto de vista numérico. Teniendo en cuenta la formulación equivalente, consideramos un esquema de aproximación completamente discreto (usando elementos finitos en espacio y diferencias finitas en tiempo) que está bien planteado, que es energéticamente estable (en el sentido de que satisface una ley de energía discreta disipativa) y que satisface un conjunto de estimaciones uniformes que permiten analizar la convergencia hacia las soluciones fuertes del sistema diferencial. Finalmente, presentamos algunas simulaciones numéricas para validar numéricamente los resultados teóricos.

---

\* Tesis de maestría

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Diego A. Rueda Gómez, Ph.D en Matemáticas. Codirector: Élder J. Villamizar Roa, Ph.D en Matemáticas.

## ABSTRACT

**TITLE:** NUMERICAL ANALYSIS OF AN ALLEN-CAHN-NAVIER-STOKES SYSTEM FOR NON-ISOTHERMAL FLUIDS \*

**AUTHOR:** ELIAN ESTEBAN RUEDA FERNANDEZ \*\*

**KEYWORDS:** CONVERGENCE, ENERGY STABILITY, OPTIMAL ERROR ESTIMATES, FINITE ELEMENTS, NON-ISOTHERMAL ALLEN-CAHN-NAVIER-STOKES SYSTEM.

### DESCRIPTION:

This work focuses on the numerical analysis for a non-isothermal diffuse-interface model, in dimension  $N = 2, 3$ , that describes the movement of a mixture of two incompressible viscous fluids. This model consists of the Navier-Stokes equations coupled with a phase-field equation given by a convective Allen-Cahn equation, and energy transport equation for the temperature; this system admits a dissipative energy inequality. We propose an energy stable numerical scheme based on the Finite Element Method, and we analyze optimal weak and strong error estimates, as well as convergence towards regular solutions. In order to construct the numerical scheme, we introduce two extra variables (given by the gradient of the temperature and the variation of the energy with respect to the phase-field function) which allows us to control the strong regularity required by the model, which is one of the main difficulties appearing from the numerical point of view. Considering an equivalent weak formulation, we consider a fully discrete Finite Element approximation which is well-posed, energy stable (in the sense that verifies a dissipative discrete energy inequality) and satisfies a set of uniform estimates which allow to analyze the convergence of the scheme. Finally, we present some numerical simulations to validate numerically the theoretical results.

---

\* Master Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Diego A. Rueda Gómez, Ph.D en Matemáticas. Codirector: Élder J. Villamizar Roa, Ph.D en Matemáticas.

## INTRODUCCIÓN

El sistema Allen-Cahn-Navier-Stokes corresponde a un modelo de campo de fases que se ha utilizado ampliamente para describir el movimiento de una mezcla de dos fluidos viscosos incompresibles. Cuando la mezcla está sujeta a efectos no isotérmicos, surge el siguiente sistema acoplado de EDP:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p &= (-\varepsilon \Delta \phi + F'(\phi)) \nabla \phi - \alpha \Delta \theta \nabla \theta, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi &= \gamma (\varepsilon \Delta \phi - F'(\phi)), \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \kappa \Delta \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

en  $\Omega \times (0, \infty)$ , donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , con frontera  $\partial\Omega$ . En (1) las incógnitas son  $\mathbf{u}, p, \phi$  y  $\theta$ , que denotan la velocidad media de la mezcla de fluidos, la presión del fluido, la función de campo de fase y la temperatura, respectivamente.  $\varepsilon > 0$  es un parámetro relacionado con el espesor interfacial, mientras que  $\alpha, \gamma$  y  $\kappa$  son parámetros positivos que denotan el coeficiente de dilatación térmica, el tiempo de relajación de la interfaz y la conductividad térmica, respectivamente. La función  $F(\phi)$  es la densidad de energía potencial de doble pozo, que representa las dos fases de la mezcla; la función  $F$  se define por  $F(s) = \frac{1}{4\varepsilon}(s^2 - 1)^2$ . El sistema (1) se completa con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \phi(0) = \phi_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, \infty), \end{aligned} \tag{2}$$

donde  $n$  denota el vector normal exterior unitario a  $\partial\Omega$ . Note que el potencial  $F$  satisface

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F'(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} F''(x) = \pm\infty, \quad (3)$$

$$F'(1) \geq 0 \text{ y } F'(-1) \leq 0. \quad (4)$$

En particular la condición (3) implica que existen algunas constantes positivas  $c_i$  con  $i = 1, 2, 3$  tales que

$$-c_1 \leq F''(x) \text{ y } -c_2 \leq F(x) \leq F'(x)x + c_3 \text{ para toda } x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

donde  $F(x) = \int_0^x F'(s)ds$ .

En su versión isotérmica, el sistema de Allen-Cahn-Navier-Stokes ha sido ampliamente analizado desde un punto de vista teórico y numérico. Sin ninguna pretensión de exhaustividad, remitimos a los siguientes trabajos que pueden proporcionar al

lector otro conjunto de bibliografía complementaria <sup>1,2,3,4,5,6,7,8,9</sup>. En particular, se conoce la existencia y unicidad de soluciones fuertes globales en dominios acotados bidimensionales para cualquier dato inicial, así como la existencia de soluciones débiles globales y la existencia y unicidad de soluciones fuertes locales en dimensión tres. Desde el punto de vista numérico, se han propuesto algunos esquemas numéricos (ver <sup>5,6,7,8,9</sup>). En particular, en <sup>9</sup> se desarrolló un modelo estable de orden reducido basado en un método de descomposición ortogonal, incluyendo un análisis de errores y experimentos numéricos.

- 
- <sup>1</sup> Ciprian G Gal y Maurizio Grasselli. “Longtime behavior for a model of homogeneous incompressible two-phase flows”. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 28.1 (2010), págs. 1-39.
  - <sup>2</sup> Ciprian G Gal y Maurizio Grasselli. “Trajectory attractors for binary fluid mixtures in 3D”. En: *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 31.5 (2010), págs. 655-678.
  - <sup>3</sup> Xiang Xu, Liyun Zhao y Chun Liu. “Axisymmetric solutions to coupled Navier–Stokes/ Allen–Cahn equations”. En: *SIAM J. Math. Anal.* 41.6 (2010), págs. 2246-2282.
  - <sup>4</sup> Xiaobing Feng, Yinnian He y Chun Liu. “Analysis of finite element approximations of a phase field model for two-phase fluids”. En: *Mathematics of computation* 76.258 (2007), págs. 539-571.
  - <sup>5</sup> Xiaobing Feng. “Fully Discrete Finite Element Approximations of the Navier–Stokes–Cahn–Hilliard Diffuse Interface Model for Two-Phase Fluid Flows”. En: *SIAM journal on numerical analysis* 44.3 (2006), págs. 1049-1072.
  - <sup>6</sup> Jie Shen y Xiaofeng Yang. “A phase-field model and its numerical approximation for two-phase incompressible flows with different densities and viscosities”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 32.3 (2010), págs. 1159-1179.
  - <sup>7</sup> Yongyong Cai, Heejun Choi y Jie Shen. “Error estimates for time discretizations of Cahn–Hilliard and Allen–Cahn phase-field models for two-phase incompressible flows”. En: *Numerische Mathematik* 137.2 (2017), págs. 417-449.
  - <sup>8</sup> Saifon Chaturantabut y Danny C Sorensen. “Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 32.5 (2010), págs. 2737-2764.
  - <sup>9</sup> Dongqin Chen, Qiuqi Li y Huailing Song. “Error analysis of a stable reduced order model based on the proper orthogonal decomposition method for the Allen–Cahn–Navier–Stokes system”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 401 (2022), pág. 115661.

Por otra parte, se ha demostrado que la inclusión de modelos de efecto térmico en la mezcla de fluidos es importante para modelizar la dinámica robusta de las interfaces en sistemas multifásicos. Un primer modelo de interfaz difusa para flujos incompresibles bifásicos con efecto Marangoni termoinducido se propuso en <sup>10</sup>. El modelo considerado en <sup>10</sup>, consiste de las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con ecuaciones convectivas de campo de fase y de transporte de energía. Los autores demostraron la existencia de soluciones débiles globales en 2D y 3D; la existencia y unicidad de una solución fuerte global en 2D, la existencia de soluciones fuertes locales en 3D, así como la existencia de soluciones fuertes globales en 3D siempre que la viscosidad sea suficientemente grande. Una ampliación de los resultados en <sup>10</sup> se obtuvo en <sup>11</sup> considerando un modelo más general en el que se permite que la viscosidad del fluido y la difusividad térmica sean funciones dependientes de la temperatura; también hacemos referencia a <sup>12,13</sup>, para modelos no isotérmicos de interfaz difusa para flujos bifásicos que contienen una ecuación de temperatura altamente no lineal para la que se obtienen soluciones débiles. En el modelo considerado en <sup>10,11</sup>, el tensor de tensiones incorporado en la ecuación de Navier-Stokes permite obtener una ley de energía disipativa, que sólo se verifica bajo una condición de pequeñez de la temperatura inicial. A diferencia de <sup>10,11</sup>, el

---

<sup>10</sup> Pengtao Sun, Chun Liu y Jinchao Xu. "Phase field model of thermo-induced marangoni effects in the mixtures and its numerical simulations with mixed finite element method". En: *Communications in Computational Physics* 6.5 (2009), págs. 1095-1117.

<sup>11</sup> Hao Wu. "Well-posedness of a diffuse-interface model for two-phase incompressible flows with thermo-induced Marangoni effect". En: *European Journal of Applied Mathematics* 28.3 (2017), págs. 380-434.

<sup>12</sup> Michela Eleuteri, Elisabetta Rocca y Giulio Schimperna. "On a non-isothermal diffuse interface model for two-phase flows of incompressible fluids". En: *arXiv preprint arXiv:1401.3244* (2014).

<sup>13</sup> Michela Eleuteri, Elisabetta Rocca y Giulio Schimperna. "Existence of solutions to a two-dimensional model for nonisothermal two-phase flows of incompressible fluids". En: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C* 33.6 (2016), págs. 1431-1454.

sistema (1)-(2) verifica una desigualdad de energía disipativa sin condición de pequeñez en los datos iniciales, que es crucial para obtener resultados de existencia de solución. En <sup>14</sup>, los autores demostraron la existencia de soluciones débiles para  $N = 2, 3$ , incluido el caso de un potencial no singular  $F$  para cualquier dato inicial. También demostraron la existencia de una solución fuerte global para  $N = 2$  y la existencia de soluciones locales fuertes para  $N = 3$ . En <sup>15</sup>, se analizó el sistema (1)-(2) en el caso general en el que tanto la viscosidad del fluido como la conductividad térmica dependen de la temperatura. Se demostró la existencia y unicidad de soluciones locales fuertes en dominios acotados 2D y 3D para cualquier dato inicial; además, se obtuvo la existencia de soluciones débiles globales y la existencia y unicidad de soluciones fuertes globales en dominios bidimensionales acotados cuando la temperatura inicial es convenientemente pequeña. Más recientemente, en <sup>16</sup>, los autores analizan el caso general en donde el espesor interfacial  $\varepsilon$  también depende de la temperatura. En ese caso, se obtuvo la existencia de soluciones locales débiles en dominios bidimensionales acotados.

Desde el punto de vista numérico, hasta donde sabemos, no existe literatura que trate el modelo no isotérmico de interfaz difusa (1)-(2). En este trabajo proponemos un esquema completamente discreto incondicionalmente estable energéticamente (es decir, que satisface una versión discreta de la ley de energía disipativa (18)) para aproximar las soluciones de (1)-(2), para el cual demostramos algunas propieda-

---

<sup>14</sup> Juliana Honda Lopes y Gabriela Planas. “Well-posedness for a non-isothermal flow of two viscous incompressible fluids”. En: *Communications on Pure & Applied Analysis* 17.6 (2018).

<sup>15</sup> Juliana Honda Lopes y Gabriela Planas. “On a non-isothermal incompressible Navier–Stokes–Allen–Cahn system”. En: *Monats. Math* 195.4 (2021), págs. 687-715.

<sup>16</sup> Juliana Lopes y Gabriela Planas. “Existence of solutions for a non-isothermal Navier-Stokes–Allen–Cahn system with thermo-induced coefficients”. En: (2022).

des cualitativas adicionales incluyendo su buen planteamiento, algunas estimaciones uniformes para las soluciones discretas, y estimaciones de error óptimas débiles y fuertes. La principal dificultad que aparece para desarrollar el análisis numérico es controlar la fuerte regularidad exigida por el modelo; por esta razón, construimos el esquema numérico basándonos en un sistema equivalente que se obtiene introduciendo dos variables extra (dadas por el gradiente de la temperatura y la variación de la energía con respecto a la función de campo de fase).

El documento está organizado de la siguiente manera: En el Capítulo 1, realizamos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Posteriormente, presentamos un repaso de algunos resultados conocidos del análisis funcional.

En el Capítulo 2, presentamos el análisis teórico del modelo, donde, recordamos un resultado relacionado con la existencia de soluciones débiles y fuertes para (1)-(2), resultado que se prueba a lo largo de este capítulo. Además, establecemos una formulación débil equivalente y deducimos una ley de energía disipativa, que es importante para definir y analizar el esquema numérico más adelante.

En el Capítulo 3, definimos el esquema numérico, demostramos que está bien (incondicionalmente), probamos una propiedad de estabilidad energética y deducimos algunas estimaciones uniformes; además, demostramos estimaciones óptimas de error en normas débiles y fuertes para el conjunto de soluciones discretas con respecto a una solución suficientemente regular del sistema continuo.

En el Capítulo 4, presentamos los resultados de algunas simulaciones numéricas realizadas con el objetivo de observar la dinámica del modelo (1)-(2), así como validar los resultados teóricos obtenidos.

Los resultados obtenidos en esta tesis están consignados en el manuscrito [Elian E. Rueda-Fernández, Diego A. Rueda-Gómez y Élder J. Villamizar-Roa, Numerical analysis for a non-isothermal incompressible Navier-Stokes-Allen-Cahn system, manuscrito, 2023 (sometido)].

## 1. PRELIMINARES

En este capítulo haremos una revisión de algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Iniciamos con una revisión sobre ciertos espacios de funciones, incluyendo principalmente los espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner. Posteriormente, presentamos una revisión de algunos resultados conocidos del análisis funcional.

### 1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con frontera  $\partial\Omega$  suficientemente regular. Para  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , el espacio de Banach  $L^p(\Omega)$  es definido como

$$L^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

con norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  definida por

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso  $p = 2$ , el espacio  $L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

y con norma definida por  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ . Se muestra fácilmente que si  $p \geq q$ , el espacio  $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ . Así mismo, el espacio  $L^\infty(\Omega)$  es definido como

$$L^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } |u(\mathbf{x})| \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\},$$

con norma definida por

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess } |u(\mathbf{x})|.$$

Para  $1 < p < \infty$ , el espacio dual de  $L^p(\Omega)$  denotado por  $(L^p(\Omega))'$  es dado por

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \text{ donde } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Así mismo, el dual de  $L^1(\Omega)$  es  $L^\infty(\Omega)$ . Para espacios  $L^p(\Omega)$  de funciones vectoriales de dimensión  $N$ , se usará la notación  $\mathbf{L}^p(\Omega) = (L^p(\Omega))^N$ , es decir,

$$\mathbf{L}^p(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) : u_i \in L^p(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N\},$$

y su norma asociada está dada por

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{L^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se define el espacio  $L^q(\partial\Omega)$  como

$$L^q(\partial\Omega) := \left\{ u : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ es medible y } \int_{\partial\Omega} |u|^q dS < \infty \right\},$$

con norma

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} = \left( \int_{\partial\Omega} |u|^q dS \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Los espacios  $C_0^\infty(\Omega)$  y  $L_{loc}^1(\Omega)$  se definen respectivamente como:

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \in C^\infty(\Omega) \text{ con soporte compacto en } \Omega\},$$

y

$$L_{loc}^1(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \int_K |f| < +\infty, \forall K \subset \Omega, K \text{ compacto} \right\}.$$

Partiendo de estos espacios, definiremos el concepto de derivada débil.

**Definición 1.1.1.** (Derivada débil). Suponga que  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$  y  $\alpha$  es multi-índice, la función  $v$  es la  $\alpha$ -ésima derivada débil de  $u$ , si

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , los espacios de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  son definidos por

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} v \in L^p(\Omega) \text{ para todo } 0 \leq |\alpha| \leq k\},$$

donde  $D^{\alpha}$  es el operador diferencial

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},$$

con  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$  y  $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ . El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty,$$

$$\|v\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} (\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess } |D^{\alpha} u(\mathbf{x})|), \quad p = \infty.$$

El espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  es separable para  $1 \leq p < \infty$  y reflexivo para  $1 < p < \infty$ . Además, cuando  $p = 2$ ,  $W^{k,2}(\Omega) := H^k(\Omega)$ , el cual es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(\mathbf{x}) D^{\alpha} v(\mathbf{x}) dx,$$

y cuya norma es definida por  $\|v\|_{H^m(\Omega)} = (u, u)_{H^m(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$ . De ahora en adelante  $(\cdot, \cdot)$  denota el producto escalar de  $L^2(\Omega)$ .

El espacio  $H_0^m(\Omega)$  es definido como la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en la norma  $H^m(\Omega)$ . En particular,  $H_0^1(\Omega)$  es caracterizado por

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Para espacios de Sobolev de dimensión  $N$ , se usará la notación  $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) = (W^{k,p}(\Omega))^N$  y  $\mathbf{H}^m(\Omega) = (H^m(\Omega))^N$ , es decir,

$$\mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := \{\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N) : v_i \in W^{k,p}(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N\},$$

$$\mathbf{H}^m(\Omega) := \{\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N) : u_i \in H^m(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, N\},$$

y sus respectivas normas asociadas están dadas por

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{W^{k,p}(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} = \left( \sum_{i=1}^N \|u_i\|_{H^m(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por simplicidad en la notación, a lo largo de este trabajo usamos  $\|\cdot\|_X$  para referirnos a la norma del espacio  $X(\Omega)$ . También se utilizan los siguientes espacios:

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Utilizamos las siguientes normas equivalentes en  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $\mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ , respectivamente

(véase <sup>17</sup> y <sup>18</sup>):

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1}^2 = \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad (6)$$

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{H^1}^2 = \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2}^2, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega). \quad (7)$$

**Observación 1.1.2.** *A menos que sea estrictamente necesario, para evitar ambigüedades, usaremos (para las normas en espacios de funciones vectoriales) la notación  $\|\mathbf{u}\|_X = \|\mathbf{u}\|_X$ , es decir, omitiremos la negrita en el espacio  $X$ .*

Motivado por la descomposición de Helmholtz, se tendrá en cuenta que podemos reescribir a  $-\Delta v$  como

$$-\Delta v = Av + \nabla q, \quad (8)$$

para  $v \in \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{V}$  y algún  $q \in H^1$ , con  $\int_\Omega q = 0$  y donde  $A$  es el operador de Stokes. Finalmente, definiremos los espacios de Bochner.

**Definición 1.1.3.** *(Espacios de Bochner) Sea  $X$  un espacio de Banach y  $a, b$  tales que  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Para  $1 \leq \alpha < +\infty$ , diremos que  $f \in L^\alpha(a, b, X)$  si  $f$  es medible y*

$$\|f\|_{L^\alpha(a,b;X)} = \left( \int_a^b \|f(t)\|_X^\alpha dt \right)^{1/\alpha} < +\infty.$$

En el caso  $\alpha = +\infty$

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;X)} = \sup_{t \in [a,b]} \text{ess } \|f(t)\|_X.$$

---

<sup>17</sup> Jindřich Nečas. “Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques”. En: *Academia* (1967).

<sup>18</sup> Chérif Amrouche y Nour El Houda Seloula. “Lp-theory for vector potentials and Sobolev’s inequalities for vector fields: application to the Stokes equations with pressure boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23.01 (2013), págs. 37-92.

## 1.2. DEFINICIONES Y RESULTADOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

En esta sección, se citarán algunas definiciones y resultados del área de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de los capítulos posteriores.

**Definición 1.2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach. Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  se dice que es acotado, si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Denotamos por  $\mathbf{B}(X, Y)$  el conjunto de todos los operadores lineales y acotados de  $X$  en  $Y$ .

**Definición 1.2.2.** Sean  $X$  y  $Y$  espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente, tales que  $X \subseteq Y$ . Diremos que  $X$  está inmerso continuamente en  $Y$ , y lo denotaremos por  $X \hookrightarrow Y$ , si el operador inclusión es continuo, es decir, si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Teorema 1.2.3.** (Teorema de las inmersiones de Sobolev<sup>19</sup>). Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^N$ ,  $p \geq 1$  y  $k \geq 0$ . Si  $kp \leq N$ , entonces

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega),$$

para todo  $r \in [p, \frac{Np}{N-kp}]$  si  $kp < N$ , y para todo  $r \in [p, \infty)$  si  $kp = N$ . En particular, existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  que dependen únicamente de  $k, p, r$  y  $N$ , tales que para todo  $u \in W^{k,p}(\Omega)$

---

<sup>19</sup> Giovanni Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.

$$\|u\|_{L^r} \leq c_1 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in [p, \frac{Np}{N-kp}], \text{ si } kp < N,$$

$$\|u\|_{L^r} \leq c_2 \|u\|_{W^{k,p}} \quad \text{para todo } r \in [p, \infty), \text{ si } kp = N.$$

Finalmente, si  $kp > N$ , cada  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  es igual en c.t.p. en  $\Omega$  a una única función en  $C^l(\bar{\Omega})$ , con  $0 \leq l < k - \frac{N}{p}$  y la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{C^l} \leq c_3 \|u\|_{W^{k,p}},$$

para alguna constante  $c_3 > 0$ .

**Teorema 1.2.4.** (Teorema de Lax-Milgram). Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  un operador bilineal continuo y coercivo, esto es, existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$|a(u, v)| \leq \alpha \|u\|_H \|v\|_H, \quad \text{para todo } u, v \in H$$

y

$$a(u, u) \geq \beta \|u\|_H^2, \quad \text{para todo } u \in H.$$

Entonces, para cada  $f \in H'$  existe un único elemento  $u \in H$  tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{para todo } v \in H.$$

**Lema 1.2.5.** Sea  $\Sigma$  un subconjunto de  $\partial\Omega$  de medida positiva. Entonces para todo  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q < \infty$ , la siguiente desigualdad se tiene

$$\|u\|_{L^q} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L^q} + \int_{\Sigma} |u| \right), \quad (9)$$

donde la constante  $C > 0$  depende de  $N, q, \Omega, \Sigma$ , es decir  $C = C(N, q, \Omega, \Sigma)$ .

*Demostración.* Véase <sup>19</sup>. □

**Observación 1.2.6.** Note que si  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ , es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  con medida positiva, entonces la desigualdad del

*Lema 1.2.5 se reduce a*

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|\nabla u\|_{L^q}, \quad (10)$$

con  $C = C(N, q, \Omega, \Sigma) > 0$ . Como consecuencia, se deduce que si  $u \in H^1(\Omega)$  es tal que  $u = 0$  sobre  $\Sigma$ , para algún subconjunto  $\Sigma$  de  $\partial\Omega$  de medida positiva, entonces

$$\|u\|_{L^2} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}, \quad (11)$$

y por lo tanto,

$$\|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (12)$$

**Lema 1.2.7.** Denotemos por

$$\langle u \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u \, d\mathbf{x},$$

lo cual se denomina como la media de  $u$ . Entonces, para todo  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < +\infty$ , se tiene que

$$\|u - \langle u \rangle\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p},$$

donde  $C = C(N, p) > 0$ .

**Observación 1.2.8.** En particular, el Lema 1.2.7 implica que para todo  $u \in H^1(\Omega)$ , con  $\langle u \rangle = 0$ , la estimación (12) también es válida.

A lo largo de este documento, usaremos las siguientes desigualdades de Sobolev y de interpolación:

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C_1 \|u\|_{H^2}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (13)$$

$$\|u\|_{L^4} \leq C_2 \|u\|_{L^2}^{1/4} \|u\|_{L^6}^{3/4} \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (14)$$

$$\|u\|_{L^3} \leq C_3 \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^6}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (15)$$

para algunas constantes  $C_1, C_2, C_3 > 0$ , en función de  $\Omega$ , pero independiente de  $u$ .

Así mismo, utilizaremos las desigualdades de interpolación de Ladyzhenskaya y de Gagliardo-Nirenberg: para cualquier  $v \in H^1$  que se anula en la frontera de  $\Omega$  se cumple que

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^4}^2 &\leq \sqrt{2} \|\nabla v\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \quad N = 2, \\ \|v\|_{L^4}^2 &\leq 2 \|\nabla v\|_{L^2}^{3/2} \|v\|_{L^2}^{1/2}, \quad N = 3, \end{aligned} \tag{16}$$

y para  $u \in L^q \cap W^{m,r}$ ,  $1 \leq q, r \leq \infty$ ,

$$\|\nabla^j u\|_{L^q} \leq C_4 \|u\|_{W^{m,r}}^\alpha \|u\|_{L^q}^{1-\alpha}, \tag{17}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \alpha \left( \frac{1}{r} - \frac{m}{N} \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1,$$

para alguna constante positiva  $C_4$  con la única excepción: si  $1 < r < \infty$  y  $m - j - \frac{N}{r}$  es un número entero no negativo, entonces la desigualdad anterior sólo se cumple para  $\frac{j}{m} \leq \alpha < 1$ .

Las dos desigualdades que se citan a continuación son usadas frecuentemente y sus respectivas demostraciones se encuentran en <sup>20</sup>.

**Lema 1.2.9.** (*Desigualdad de Young*). Sean  $a, b, p, q$  números reales positivos tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Lema 1.2.10.** (*Desigualdad de Hölder Generalizada*). Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  y las funciones  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ , con  $p_i, p \geq 1$  y satisfaciendo  $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$ . Entonces, para  $f = f_1 f_2 \cdots f_{k-1} f_k \in L^p(\Omega)$  se tiene

---

<sup>20</sup> Haim Brezis y Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011.

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

El siguiente resultado es utilizado en el Capítulo 3 para probar la existencia de solución del esquema numérico que se propondrá.

**Lema 1.2.11.** *Sea  $X$  un espacio de Hilbert de dimensión finita con producto escalar  $(\cdot, \cdot)$  y norma  $|\cdot|$ , y sea  $P$  una aplicación continua de  $X$  en sí mismo. Asuma que existe  $\rho > 0$  tal que  $(P(\xi), \xi) > 0$  para  $|\xi| = \rho > 0$ . Entonces, existe  $\xi \in X$ ,  $|\xi| < \rho$ , tal que  $P(\xi) = 0$ .*

**Teorema 1.2.12.** *(Fórmula de Green). Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$ . Sea  $w$  una función  $C^1(\bar{\Omega})$  con soporte acotado en la clausura  $\bar{\Omega}$ . Entonces  $w$  satisface la fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} w(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds,$$

donde  $n_i$  es el  $i$ -ésimo componente de un vector unitario normal hacia afuera de  $\bar{\Omega}$ .

**Corolario 1.2.13.** *(Integración por partes). Sea  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$ . Sean  $u$  y  $v$  dos funciones  $C^1(\bar{\Omega})$  con soporte acotado en el conjunto cerrado  $\bar{\Omega}$ . Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) ds.$$

*Demostración.* Es suficiente tomar  $w = uv$  en el Teorema 1.2.12. □

**Corolario 1.2.14.** *Sean  $\Omega$  un conjunto abierto de clase  $C^1$  y  $u$  una función de  $C^2(\bar{\Omega})$  y  $v$  una función de  $C^1(\bar{\Omega})$ , ambas con soporte acotado en el conjunto cerrado  $\bar{\Omega}$ . Entonces se satisface la fórmula de integración por partes*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) ds$$

donde  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq N}$  es el gradiente de  $u$ , y  $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ .

**Teorema 1.2.15.** *Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo y  $(x_n) \subseteq X$  una sucesión acotada en  $X$ . Entonces, existe una subsucesión  $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$  y  $\bar{x} \in X$  tal que  $x_{n_k}$  converge débilmente a  $\bar{x}$ .*

**Teorema 1.2.16.** *Sean  $X$  Banach separable,  $X'$  el espacio dual asociado a  $X$  y  $(x'_n) \subseteq X'$  una sucesión acotada en  $X'$ . Entonces, existe una subsucesión  $(x'_{n_k}) \subseteq (x'_n)$  y  $x' \in X'$  tal que  $x'_{n_k}$  converge débilmente\* a  $x'$ .*

**Teorema 1.2.17.** *Sean  $X_0, X$  y  $X_1$  espacios de Banach tales que  $X_0$  y  $X_1$  son reflexivos y  $X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_1$ , donde la primera inmersión es compacta y la segunda es continua. Asuma que  $1 < p_0, p_1 < +\infty$  y defina*

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) = \{z \in L^{p_0}(0, T; X_0) : z_t \in L^{p_1}(0, T; X_1)\},$$

*dotado de la norma natural*

$$\|z\|_{W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)} = \|z\|_{L^{p_0}(0, T; X_0)} + \|z_t\|_{L^{p_1}(0, T; X_1)}.$$

*Entonces  $W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1)$  es un espacio de Banach reflexivo y la inmersión*

$$W^{p_0, p_1}(0, T; X_0, X_1) \hookrightarrow L^{p_0}(0, T; X)$$

*es compacta.*

**Lema 1.2.18.** *Sean  $X \hookrightarrow B \hookrightarrow Y$  espacios de Banach con inmersiones continuas, siendo además la de  $X$  en  $B$  compacta. Entonces se tienen las siguientes inmersiones compactas:*

- $L^\infty(0, T; X) \cap \{\phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^r(0, T; Y)\} \hookrightarrow C([0, T]; B)$  si  $1 < r \leq +\infty$ ,
- $L^q(0, T; X) \cap \{\phi : \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^1(0, T; Y)\} \hookrightarrow L^q(0, T; B)$  si  $1 \leq q \leq +\infty$ .

## 2. ANÁLISIS TEÓRICO

En el presente capítulo nos enfocamos en el análisis de la existencia y unicidad de solución del sistema (1)-(2) tanto débil como fuerte, en dimensiones  $N = 2$  y  $N = 3$ . Los resultados de este capítulo son de tipo disertativo y corresponden a resultados de <sup>14</sup>.

### 2.1. EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES

Iniciamos esta sección dando la definición de solución débil para el sistema (1)-(2), y posteriormente recordamos un resultado, proporcionado en <sup>14</sup>, relativo a la existencia de soluciones débiles globales para (1)-(2).

**Definición 2.1.1.** *(Solución débil)* Se dice que una tripla  $[\mathbf{u}, \phi, \theta]$  es una solución débil (global) de (1)-(2) en  $(0, T)$  para  $T > 0$ , si

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \phi, \theta \in L^\infty(0, T; H^1 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T; H^2),$$

para  $N = 2$ ,

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; \mathbf{V}'), \quad \phi_t, \theta_t \in L^2(0, T; L^2),$$

para  $N = 3$ ,

$$\mathbf{u}_t \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbf{V}'), \quad \phi_t, \theta_t \in L^{\frac{4}{3}}(0, T; L^2),$$

y satisface c.t.p.  $t \in (0, T)$ ,

$$(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = -(\varepsilon \Delta \phi \nabla \phi, \mathbf{v}) - (\alpha \Delta \theta \nabla \theta, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},$$

$$\phi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \gamma(\varepsilon \Delta \phi - F'(\phi)), \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

$$\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = k \Delta \theta, \quad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

junto con las condiciones iniciales y de contorno (2).

**Teorema 2.1.2.** (<sup>14</sup>, Teorema 2.3) Sean  $\mathbf{u}_0, \phi_0, \theta_0 \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ , con  $\|\phi_0\|_{L^\infty} \leq 1$ . Entonces, el sistema (1)-(2) tiene al menos una solución débil global que satisface  $|\phi| \leq 1, |\theta| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$  c.t.p.  $\Omega \times (0, \infty)$ , y la siguiente desigualdad energética c.t.p.  $t \in [0, T]$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \theta\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} F(\phi) dx \\ & + 2 \int_0^t (\nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \gamma \|\varepsilon \Delta \phi - F'(\phi)\|_{L^2}^2 + k\alpha \|\Delta \theta\|_{L^2}^2) ds \quad (18) \\ & \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \phi_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} F(\phi_0) dx. \end{aligned}$$

*Demostración.* Para demostrar el Teorema 2.1.2, aplicamos el método semi-Galerkin (ver <sup>14</sup>). Es importante mencionar que, sin pérdida de la generalidad, tomaremos los siguientes valores para los parámetros en lo que queda del capítulo

$$\varepsilon = \alpha = \gamma = k = 1.$$

Sean  $s_i$  y  $\lambda_i$  las funciones propias y los valores propios del operador de Stokes. Para toda  $m \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $\mathbb{P}_m$  la proyección ortogonal de  $\mathbf{H}$  sobre  $\mathbf{H}_m = \text{gen}\{s_1, \dots, s_m\}$ .

Fijemos  $T > 0$ . Para cualquier  $m \in \mathbb{N}$  consideramos el siguiente problema aproximado: Encontrar

$$\mathbf{u}^m(t) = \sum_{i=1}^m g_i^m(t) s_i, \quad \phi^m \quad \text{y} \quad \theta^m$$

tales que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{v}) + (\nu \nabla \mathbf{u}^m, \nabla \mathbf{v}) \\ \quad = -(\Delta \phi^m \nabla \phi^m, \mathbf{v}) - (\Delta \theta^m \nabla \theta^m, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_m, \\ \phi_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \phi^m = \Delta \phi^m - F'(\phi^m) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \theta_t^m + \mathbf{u}^m \cdot \nabla \theta^m = \Delta \theta^m \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}^m(0) = P_m \mathbf{u}_0, \quad \phi^m(0) = \phi_0, \quad \theta^m(0) = \theta_0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \theta^m}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial \Omega \times (0, T) \end{array} \right. \quad (19)$$

La existencia y unicidad de la solución local definida sobre  $(0, T_m)$  para algún  $T_m > 0$  puede obtenerse mediante un argumento de punto fijo. La prueba se hace en la Proposición 5.0.3 de los Anexos. Note que  $\phi^m$  y  $\theta^m$  satisfacen el principio del máximo, más precisamente,  $|\phi^m| \leq 1$  y  $|\theta| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty}$  c.t.p en  $\Omega \times (0, T_m)$ . Además, tomando  $\mathbf{u}^m$  como función test en (19)<sub>1</sub>, multiplicando la ecuación (19)<sub>2</sub> por  $-\Delta \phi^m + F'(\phi^m)$ , y la ecuación (19)<sub>3</sub> por  $-\Delta \theta^m$ , integrando en  $\Omega$  y sumando las ecuaciones resultantes, encontramos que  $[\mathbf{u}^m, \phi^m, \theta^m]$  satisface

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta^m\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} F(\phi^m) dx \right) \\ + 2 \left( \nu \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi^m - F'(\phi^m)\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta^m\|_{L^2}^2 \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

donde hemos utilizado que  $(\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m) = 0$  y  $(\mathbf{u}^m \cdot \nabla \phi^m, F'(\phi^m)) = 0$ .

Por lo tanto, integrando en tiempo y utilizando que  $F'(x) \geq -c_2$ , y también que  $F(\phi_0) \leq \max_{x \in [-1, 1]} F(x)$ , y  $\|\mathbb{P}_m \mathbf{u}_0\|_{L^2} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}$ , obtenemos

$$\|\mathbf{u}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta^m(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \phi_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla \theta_0\|_{L^2}^2 + C |\Omega| \quad \forall t \in [0, T_m].$$

Por lo tanto, podemos tomar  $T_m = T$ . Además, de las estimaciones anteriores, tras la integración en el tiempo y utilizando estimaciones elípticas estándar, (ver Teorema

2.3.3.6 de <sup>21</sup>) obtenemos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}^m\}_m \text{ es acotada en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V}), \\ \{\phi^m\}_m, \{\theta^m\}_m \text{ están acotadas en } L^\infty(0, T; H^1 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T; H^2), \end{aligned} \quad (21)$$

independientemente de  $m$ .

De las estimaciones uniformes deducimos que existen funciones  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$  y  $\phi, \theta \in L^\infty(0, T; H^1 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T; H^2)$ , tales que, para alguna subseción de  $[\mathbf{u}^m, \phi^m, \theta^m]$ , denotada de la misma forma, las siguientes convergencias se tienen:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^m &\rightarrow \mathbf{u} \text{ débilmente en } L^2(0, T; \mathbf{V}), \text{ débilmente-}^* \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{H}), \\ \phi^m &\rightarrow \phi \text{ débilmente en } L^2(0, T; H^2), \text{ débilmente-}^* \text{ en } L^\infty(0, T; H^1), \\ \theta^m &\rightarrow \theta \text{ débilmente en } L^2(0, T; H^2), \text{ débilmente-}^* \text{ en } L^\infty(0, T; H^1). \end{aligned}$$

Para pasar al límite en los términos no lineales necesitamos algunas convergencias fuertes. Para ello, estimaremos la derivada con respecto a  $t$  de la solución aproximada.

Observe que por la identidad  $\nabla \cdot (\nabla \omega \otimes \nabla \omega) = \nabla \left( \frac{|\nabla \omega|^2}{2} \right) + \Delta \omega \nabla \omega$  donde  $\otimes$  es el producto de Kronecker ( $(a \otimes b)$  es la matriz con entradas  $(i, j)$  dadas por  $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$ ), podemos reescribir

$$-(\Delta \phi^m \nabla \phi^m, \mathbf{v}) - (\Delta \theta^m \nabla \theta^m, \mathbf{v}) = (\nabla \phi^m \otimes \nabla \phi^m, \nabla \mathbf{v}) + (\nabla \theta^m \otimes \nabla \theta^m, \nabla \mathbf{v}),$$

para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ ; por lo tanto, a partir de (19)<sub>1</sub> y utilizando el principio del máximo

---

<sup>21</sup> Pierre Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011.

para  $\theta_m$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_t^m\|_{\mathbf{V}'} &\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1}} \left( |(\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{v})| + |(\nu \nabla \mathbf{u}^m, \nabla \mathbf{v})| + |(\nabla \phi^m \otimes \nabla \phi^m, \nabla \mathbf{v})| \right. \\
&\quad \left. + |(\nabla \theta^m \otimes \nabla \theta^m, \nabla \mathbf{v})| \right) \\
&\leq \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \leq 1}} \left( \nu \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} + \|\mathbf{u}^m\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^4} \right. \\
&\quad \left. + \|\nabla \phi^m\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \phi^m\|_{L^4} + \|\nabla \theta^m\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2} \|\nabla \theta^m\|_{L^4} \right) \\
&\leq C \left( \|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{V}} + \|\mathbf{u}^m\|_{L^4}^2 + \|\nabla \phi^m\|_{L^4}^2 + \|\nabla \theta^m\|_{L^4}^2 \right).
\end{aligned}$$

Para estimar el lado derecho utilizamos la desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg (17) y el hecho de que  $\{\phi^m\}_m$  y  $\{\theta^m\}_m$  están acotadas en  $L^\infty(0, T; L^\infty)$ . En particular, podemos acotar

$$\|\nabla \phi^m\|_{L^4}^2 \leq C \|\phi^m\|_{H^2} \|\phi^m\|_{L^\infty} \leq C \|\phi^m\|_{H^2},$$

y similarmente,

$$\|\nabla \theta^m\|_{L^4}^2 \leq C \|\theta^m\|_{H^2}.$$

Utilizando la desigualdad de Ladyzhenskaya (16), cuando  $N = 3$  tenemos que

$$\|\mathbf{u}_t^m\|_{\mathbf{V}'} \leq C \left( \|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{V}} + \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{3/2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^{1/2} + \|\phi^m\|_{H^2} + \|\theta^m\|_{H^2} \right),$$

obteniendo

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}_t^m\|_{\mathbf{V}'}^p \leq C \left( \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}^m\|_{\mathbf{V}}^p + \int_{t_0}^{t_1} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{3p/2} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^{p/2} + \int_{t_0}^{t_1} \|\phi^m\|_{H^2}^p + \int_{t_0}^{t_1} \|\theta^m\|_{H^2}^p \right).$$

Dado que necesitamos un valor para  $p$  de tal manera que  $\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{u}_t^m\|_{\mathbf{V}'}^p < \infty$ , usando

(21), llegamos a que

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^{3p/2} < \infty$$

para  $p = 4/3$ , y consecuentemente  $\{\mathbf{u}_t^m\}_m$  está acotada, independientemente de  $m$ , en  $L^{\frac{4}{3}}(0, T; \mathbf{V})$ . De manera análoga, cuando  $N = 2$ , deducimos que  $\{\mathbf{u}_t^m\}_m$  está acotada en  $L^2(0, T; \mathbf{V})$ . Dado que la inmersión  $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}$  es compacta, se deduce del Corolario 4 de <sup>22</sup>, que la subsucesión

$$\mathbf{u}^m \rightarrow \mathbf{u} \text{ fuertemente en } L^2(0, T; \mathbf{H}).$$

De la ecuación (19)<sub>2</sub> se tiene

$$\|\phi_t^m\|_{L^2} \leq C (\|\mathbf{u}^m\|_{L^4}^2 + \|\nabla \phi^m\|_{L^4}^2 + \|\Delta \phi^m\|_{L^2} + \|F'(\phi^m)\|_{L^2}).$$

Como en el caso anterior, utilizando la desigualdad de Ladyzhenskaya (16), elevando a la  $p$  e integrando desde  $t_0$  a  $t_1$  obtenemos que  $\{\phi_t^m\}_m$  es acotada independientemente de  $m$  en  $L^{\frac{4}{3}}(0, T; L^2)$  para  $N = 3$  y en  $L^2(0, T; L^2)$  para  $N = 2$ . Utilizando de nuevo el Lema de compacidad, Corolario 4 de <sup>22</sup>, garantizamos la existencia de una subsucesión de  $\{\phi^m\}_m$ , denotada por simplicidad por  $\{\phi^m\}_m$ , tal que

$$\phi^m \rightarrow \phi \text{ fuertemente en } L^2(0, T; H^1).$$

Usando un argumento similar, se puede demostrar que existe una subsucesión de  $\{\theta^m\}_m$ , tal que

$$\theta^m \rightarrow \theta \text{ fuertemente en } L^2(0, T; H^1).$$

Por lo tanto, podemos pasar el límite en (19). Note que  $F'(\phi^m) \rightarrow F'(\phi)$  fuertemente

---

<sup>22</sup> Jacques Simon. "Compact sets in the space  $L^p(O, T; B)$ ". En: *Annali di Matematica pura ed applicata* 146 (1986), págs. 65-96.

en  $L^2(0, T; L^2)$  y concluimos que existe al menos una solución débil para el problema (1)-(2).

Mostremos la desigualdad de energía (18) que permite extender la solución a  $(0, \infty)$ . Integrando (20) en el tiempo, se deduce que

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi^m(t)\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta^m(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} F(\phi^m) d\mathbf{x} \\ & + 2 \int_0^t (\nu \|\nabla\mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi^m - F'(\phi^m)\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta^m\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla\phi_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2 + 2 \int_{\Omega} F(\phi_0) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Como el lado derecho no depende de  $t$ , tenemos que la solución aproximada está definida en  $(0, \infty)$ , y tomando el límite cuando  $m$  tiende a  $\infty$ , vemos que (18) se cumple. Cabe mencionar que, debido a las estimaciones elípticas para el problema de Neumann y las estimaciones de  $\phi$  y  $\theta$  en  $L^2_{loc}(0, \infty; L^2)$ , se deduce que  $\phi$  y  $\theta$  están en  $L^2_{loc}(0, \infty; H^2)$ .  $\square$

## 2.2. EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUERTES PARA $N = 2$

**Definición 2.2.1.** (Solución fuerte) Una tripla  $[\mathbf{u}, \phi, \theta]$  se dice solución fuerte del sistema (1)-(2) en  $(0, T)$ , para  $T > 0$ , si

$$\begin{aligned} \mathbf{u} & \in L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^2), \quad \phi, \theta \in L^\infty(0, T; H^2 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T; H^3), \\ \mathbf{u}_t & \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \phi_t, \theta_t \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1), \end{aligned}$$

verifica (1) c.t.p. en  $\Omega \times (0, T)$  y satisface las condiciones iniciales y de contorno (2).

**Teorema 2.2.2.** (<sup>14</sup>, Teorema 2.4) Bajo las hipótesis del Teorema 2.1.2, si además  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}, \phi_0, \theta_0 \in H^2(\Omega)$  con  $\|\phi_0\|_{L^\infty} \leq 1$  y  $\frac{\partial\phi_0}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\theta_0}{\partial\mathbf{n}} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces el sistema (1)-(2) tiene una única solución fuerte global para  $N = 2$ .

*Demostración.* Obtendremos una desigualdad diferencial para normas de orden superior para la solución aproximada. Para simplificar la notación, en lo que sigue omitiremos el superíndice  $m$ .

En primer lugar, tomamos  $A\mathbf{u} \in \mathbf{H}_m$ , donde  $A$  es el operador de Stokes, como función de prueba en  $(19)_1$  y obtenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 - (\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}), A\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u}) - (\Delta \phi \nabla \phi, A\mathbf{u}) - (\Delta \theta \nabla \theta, A\mathbf{u}).$$

Recordando que  $-\Delta \mathbf{u} = A\mathbf{u} + \nabla q$ , llegamos a

$$-(\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}), A\mathbf{u}) = (\nu A\mathbf{u}, A\mathbf{u}) + (\nu \nabla q, A\mathbf{u}),$$

con lo cual, utilizando el hecho de que  $A\mathbf{u} = 0$  sobre  $\partial\Omega$  y  $\nabla \cdot A\mathbf{u} = 0$ , obtenemos

$$-(\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}), A\mathbf{u}) = (\nu A\mathbf{u}, A\mathbf{u}).$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 \leq |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, A\mathbf{u})| + |(\Delta \phi \nabla \phi, A\mathbf{u})| + |(\Delta \theta \nabla \theta, A\mathbf{u})|. \quad (22)$$

Ahora, aplicando el gradiente a la ecuación  $(19)_2$  para  $\phi$  y a la ecuación  $(19)_3$  para  $\theta$ , multiplicando por  $-\nabla \Delta \phi$  y  $-\nabla \Delta \theta$  respectivamente, integrando en  $\Omega$ , llegamos a

$$\begin{aligned} -(\nabla \phi_t, \nabla \Delta \phi) - (\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi), \nabla \Delta \phi) &= -(\nabla \Delta \phi, \nabla \Delta \phi) + (\nabla(F'(\phi)), \nabla \Delta \phi), \\ -(\nabla \theta_t, \nabla \Delta \theta) - (\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla \theta), \nabla \Delta \theta) &= -(\nabla \Delta \theta, \nabla \Delta \theta). \end{aligned} \quad (23)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial \phi^m}{\partial n} = \frac{\partial \theta^m}{\partial n} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , y que  $-(\nabla \phi_t, \nabla \Delta \phi) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \phi\|_{L^2}^2$  (el mismo resultado se tiene para  $\theta$ ) y sumando las ecuaciones resultantes junto con

la ecuación (22), llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2) + \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq |(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u})| + |(\Delta \phi \nabla \phi, \mathbf{A}\mathbf{u})| + |(\Delta \theta \nabla \theta, \mathbf{A}\mathbf{u})| + |(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \nabla \Delta \phi)| \\
& \quad + |(\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \phi, \nabla \Delta \phi)| + |(F''(\phi) \nabla \phi, \nabla \Delta \phi)| + |(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \theta, \nabla \Delta \theta)| \\
& \quad + |(\mathbf{u} \cdot \nabla^2 \theta, \nabla \Delta \theta)| := \sum_{i=1}^8 J_i.
\end{aligned} \tag{24}$$

Estimaremos el lado derecho de (24) término a término. La demostración se divide en dos pasos. En el primer paso derivamos una desigualdad diferencial no lineal que permite demostrar la existencia de soluciones locales fuertes.

Denotamos por  $\epsilon$  una constante positiva que se elegirá más adelante. Recordemos que las soluciones aproximadas satisfacen (21). Observe que combinando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (17) y el hecho de que  $\|A \cdot\|_{L^2}$  es equivalente a la norma  $H^2$ , se cumple que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 \leq C \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}. \tag{25}$$

Además, la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (17) y estimaciones elípticas (ver <sup>21,23</sup>) dan las siguientes estimaciones para  $z$ , siendo  $z$  igual a  $\phi$  o  $\theta$ :

$$\|\nabla z\|_{L^4}^2 \leq C \|z\|_{H^2} \|z\|_{L^\infty} \leq C (\|\Delta z\|_{L^2} + 1), \tag{26}$$

---

<sup>23</sup> ME Taylor. *Partial Differential Equations I. Basic theory, vol. 115 of Applied Mathematical Sciences, edition.* 2011.

donde hemos utilizado que  $z$  está acotada en  $L^\infty(0, T; L^\infty)$ . Además

$$\begin{aligned} \|\Delta z\|_{L^4}^2 &\leq C \|z\|_{H^3} \|\Delta z\|_{L^2} \\ &\leq C (\|\nabla \Delta z\|_{L^2} + \|\Delta z\|_{L^2} + \|z\|_{L^2}) \|\Delta z\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

y

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 z\|_{L^4}^2 &\leq C \|z\|_{H^3} \|\nabla^2 z\|_{L^2} \\ &\leq (\|\nabla \Delta z\|_{L^2} \|\Delta z\|_{L^2} + \|\nabla \Delta z\|_{L^2} + \|\Delta z\|_{L^2}^2 + \|\Delta z\|_{L^2} + 1). \end{aligned} \quad (28)$$

**Paso 1: Solución local fuerte para  $N = 2$ .** Por las desigualdades de Hölder, Ladyzhenskaya (16), Young y (25), llegamos a

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 \\ &\leq 2\epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4, \end{aligned} \quad (29)$$

donde hemos utilizado que  $\mathbf{u}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ . De manera análoga, utilizando (26) y (27), obtenemos

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\Delta \phi\|_{L^4}^2 \|\nabla \phi\|_{L^4}^2 \\ &\leq \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} \|\Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}) (\|\Delta \phi\|_{L^2} + 1) \\ &\leq \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^3 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4), \end{aligned} \quad (30)$$

y

$$J_3 \leq \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \theta\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^3 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4). \quad (31)$$

Para  $J_4$  y  $J_7$ , empleamos (25) y (26) junto con las desigualdades de Hölder y Young, para obtener

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \|A\mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} (\|\Delta \phi\|_{L^2} + 1) \\ &\leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4), \end{aligned} \quad (32)$$

y

$$J_7 \leq \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4). \quad (33)$$

Para  $J_5$  y  $J_8$  utilizamos (28) y la desigualdad de Ladyzhenskaya (16) para llegar a

$$\begin{aligned} J_5 &\leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla^2 \phi\|_{L^4}^2 \\ &\leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\mathbf{u}\|_{L^2} (\|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} \|\Delta \phi\|_{L^2} + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + 1) \\ &\leq 3\epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + 1), \end{aligned} \quad (34)$$

y

$$J_8 \leq 3\epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1), \quad (35)$$

donde hemos vuelto a utilizar que  $\mathbf{u}$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$ .

Por último, dado que  $F \in C^2$  y  $|\phi| \leq 1$ , podemos obtener directamente que

$$J_6 \leq \|F''(\phi)\|_{L^\infty} \|\nabla \phi\|_{L^2} \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} \leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 \leq \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C, \quad (36)$$

donde se usó el hecho de que  $\phi$  está acotada en  $L^\infty(0, T; H^1)$ .

Ahora, reemplazando (29)-(36) en (24), llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2) + \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq 2\epsilon \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 \\
& + \epsilon \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^3 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4) \\
& + \epsilon \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \theta\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^3 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4) \\
& + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4) \\
& + 3\epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + 1) \\
& + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \\
& + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + \epsilon \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4) \\
& + 3\epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1).
\end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon$  lo suficientemente pequeño y organizando algunos términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2) + \nu \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1) + C (\|\Delta \phi\|_{L^2}^3 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^3) \quad (37) \\
& + C (\|\Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^2}) + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2),
\end{aligned}$$

por lo tanto, integrando la ecuación (37) de 0 a  $t$ , con  $t \in [0, T_m]$ , aplicando el Lema de Gronwall, podemos concluir que

$$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T_m; \mathbf{V}) \cap L^2(0, T_m; \mathbf{H}^2), \quad \phi, \theta \in L^\infty(0, T_m; H^2 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T_m; H^3).$$

Finalmente, no es difícil mostrar que se cumple

$$\mathbf{u}_t \in L^2(0, T_m; \mathbf{H}), \quad \phi_t, \theta_t \in L^\infty(0, T_m; L^2) \cap L^2(0, T_m; H^1).$$

Esto demuestra la existencia de soluciones locales fuertes para del problema (1)-(2).

**Paso 2: Solución global fuerte para  $N = 2$ .** Para extender la solución local basta con demostrar que  $[\mathbf{u}, \phi, \theta]$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{V}) \times (L^\infty(0, T; H^2))^2$  para cualquier  $T > 0$ . Seguiremos un argumento empleado en <sup>24</sup> para el sistema bidimensional de Boussinesq. El punto clave es combinar las estimaciones de energía con la regularidad del sistema de Stokes. Más concretamente, escribimos la ecuación (1)<sub>1</sub> como

$$-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = -\mathbf{u}_t - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + (-\Delta \phi + F'(\phi)) \nabla \phi - \Delta \theta \nabla \theta := \mathcal{H}.$$

Entonces, aplicando el Lema 2.1 de <sup>24</sup>, se tiene que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_{L^2} \leq C (\|\mathcal{H}\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}). \quad (38)$$

Ahora, estimamos  $\mathcal{H}$  utilizando la desigualdad de Ladyzhenskaya (16) y (25)-(27),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}\|_{L^2} &\leq C (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4} + \|\Delta \phi\|_{L^4} \|\nabla \phi\|_{L^4} + \|\nabla \phi\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^4} \|\nabla \theta\|_{L^4}) \\ &\leq \zeta \|A\mathbf{u}\|_{L^2} + C (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + 1), \end{aligned}$$

para cualquier  $\zeta > 0$ , donde hemos utilizado que  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H})$  y  $\phi \in L^\infty(0, T; H^1 \cap L^\infty)$ . Tomando  $\zeta$  lo suficientemente pequeño en (38), deducimos que

$$\|A\mathbf{u}\| \leq C (\|\mathbf{u}_t\|_{L^2} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2} + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2} + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + 1). \quad (39)$$

---

<sup>24</sup> Yongzhong Sun y Zhifei Zhang. "Global regularity for the initial–boundary value problem of the 2-D Boussinesq system with variable viscosity and thermal diffusivity". En: *Journal of Differential Equations* 255.6 (2013), págs. 1069-1085.

A continuación, estimaremos  $\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}$ . Para ello, se multiplica la ecuación (1)<sub>1</sub> por  $\mathbf{u}_t$ , se integra en  $\Omega$ , y se utiliza que

$$(\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}_t) = \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2,$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 = -(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}_t) - (\Delta \phi \nabla \phi, \mathbf{u}_t) - (\Delta \theta \nabla \theta, \mathbf{u}_t) := \sum_{i=1}^3 K_i. \quad (40)$$

Para estimar el lado derecho, procedemos de forma similar a como lo hicimos para acotar  $J_i$ , con  $i = 1, \dots, 3$  en el paso 1. Utilizando (39) para acotar  $\|A\mathbf{u}\|_{L^2}$ , llegamos a

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^2 \\ &\leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^4}^4 \\ &\leq 2\epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1), \end{aligned} \quad (41)$$

$$K_2 \leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + 1), \quad (42)$$

y

$$K_3 \leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C (\|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1). \quad (43)$$

Por otro lado, aplicamos el gradiente a la ecuación (1)<sub>3</sub> para  $\phi$  y a la ecuación (1)<sub>4</sub> para  $\theta$ , luego multiplicando por  $-\nabla \Delta \phi$  y  $-\nabla \Delta \theta$  a (1)<sub>3</sub> y (1)<sub>4</sub>, respectivamente, e integrando en  $\Omega$ , obtenemos (23). Aplicando las condiciones de contorno para  $\phi$  y para  $\theta$ , teniendo en cuenta que  $-(\nabla \phi_t, \nabla \Delta \phi) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta \phi\|_{L^2}^2$  (el mismo resultado se

tiene para  $\theta$ ) y sumando las ecuaciones resultantes, llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2) + \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla\Delta\theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq (\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\phi, \nabla\Delta\phi) + (\mathbf{u} \cdot \nabla^2\phi, \nabla\Delta\phi) + (F''(\phi)\nabla\phi, \nabla\Delta\phi) \\
& \quad + (\nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\theta, \nabla\Delta\theta) + (\mathbf{u} \cdot \nabla^2\theta, \nabla\Delta\theta) := \sum_{i=4}^8 J_i,
\end{aligned} \tag{44}$$

donde  $J_i$ , con  $i = 4, \dots, 8$  vienen dadas en (24) y pueden estimarse exactamente de la misma manera. Sin embargo, para  $J_4$  y  $J_7$  utilizamos la estimación (39) y obtenemos que

$$\begin{aligned}
J_4 & \leq \epsilon \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \epsilon\nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^4) \\
& \leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla\Delta\theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^4 + 1), \\
J_5 & \leq 3\epsilon \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^4 + 1), \\
J_6 & \leq \epsilon \|\nabla\Delta\phi\|^2 + C, \\
J_7 & \leq \epsilon \|\nabla\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \epsilon\nu \|A\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^4) \\
& \leq \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla\Delta\phi\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \|\nabla\Delta\theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^4 + 1), \\
J_8 & \leq 3\epsilon \|\nabla\Delta\theta\|_{L^2}^2 + C (\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta\theta\|_{L^2}^4 + 1).
\end{aligned} \tag{45}$$

Finalmente, sumando (44) y (40) y utilizando las estimaciones (41)-(43) y (45), llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 \right) + \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq 2\epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \left( \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \left( \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + 3\epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + C \\
& + \epsilon \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \epsilon \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + 2\epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + 3\epsilon \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right).
\end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño y organizando algunos términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 \right) + \|\mathbf{u}_t\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Delta \theta\|_{L^2}^2 \\
& \leq C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^4 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^4 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^4 + 1 \right) \\
& + C \left( \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \|\Delta \theta\|_{L^2}^2 + 1 \right),
\end{aligned}$$

por lo tanto, integrando y aplicando el Lema de Gronwall, podemos concluir

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} + \|\phi\|_{H^2} + \|\theta\|_{H^2} \leq C_T, \quad \forall t \leq T.$$

Esto permite extender la solución fuerte local a una global y así concluir la prueba del teorema para  $N = 2$ . La unicidad se deduce de manera directa.

□

### 2.3. UNA FORMULACIÓN EQUIVALENTE

Para diseñar un esquema completamente discreto y energéticamente estable asociado al modelo (1)-(2) y con el objetivo de controlar numéricamente los términos fuertemente no lineales  $(-\varepsilon\Delta\phi + F'(\phi))\nabla\phi - \alpha\Delta\theta\nabla\theta$  a la derecha de (1)<sub>1</sub>, introducimos las variables auxiliares

$$w := -\varepsilon\Delta\phi + F'(\phi) \quad \text{y} \quad \sigma = \nabla\theta.$$

Entonces, obtenemos la siguiente formulación variacional en las variables  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\phi$ ,  $w$ ,  $\theta$  y  $\sigma$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}_t, \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ \quad = (w \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma) \sigma, \bar{\mathbf{u}}), \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, \bar{p}) = 0, \quad \forall \bar{p} \in L_0^2(\Omega), \\ (\phi_t, \bar{w}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \bar{w}) = -\gamma (w, \bar{w}), \quad \forall \bar{w} \in H^1(\Omega), \\ (w, \bar{\phi}) = \varepsilon (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (F'(\phi), \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in H^1(\Omega), \\ (\theta_t, \bar{\theta}) + (\mathbf{u} \cdot \sigma, \bar{\theta}) - k(\nabla \cdot \sigma, \bar{\theta}) = 0, \quad \forall \bar{\theta} \in L^2(\Omega), \\ (\sigma, \bar{\sigma}) + (\theta, \nabla \cdot \bar{\sigma}) = 0, \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (46)$$

Tomando la derivada temporal en (46)<sub>6</sub>, utilizando (46)<sub>5</sub> con  $\bar{\theta} = \nabla \cdot \bar{\sigma}$  y añadiendo

el término  $k(\text{rot } \sigma, \text{rot } \bar{\sigma})$  (pues  $\text{rot}(\nabla\theta) = 0$ ), llegamos a

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}_t, \bar{\mathbf{u}}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ \quad = (w \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma) \sigma, \bar{\mathbf{u}}), \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, \bar{p}) = 0, \quad \forall \bar{p} \in L_0^2(\Omega), \\ (\phi_t, \bar{w}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \bar{w}) = -\gamma(w, \bar{w}), \quad \forall \bar{w} \in H^1(\Omega), \\ (w, \bar{\phi}) = \varepsilon (\nabla \phi, \nabla \bar{\phi}) + (F'(\phi), \bar{\phi}), \quad \forall \bar{\phi} \in H^1(\Omega), \\ (\theta_t, \bar{\theta}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \theta, \bar{\theta}) + k(\nabla \theta, \nabla \bar{\theta}) = 0, \quad \forall \bar{\theta} \in H^1(\Omega), \\ (\sigma_t, \bar{\sigma}) + k(\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k(\text{rot } \sigma, \text{rot } \bar{\sigma}) = (\mathbf{u} \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}), \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (47)$$

donde la condición inicial considerada para la variable  $\sigma$  es  $\sigma_0(x) = \nabla\theta_0(x)$ . En cuanto a la formulación (47), tenemos los siguientes resultados.

**Proposición 2.3.1.** *(Equivalencia entre problemas (1) y (47)) Si  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta]$  es una solución fuerte de (1), entonces  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta, w, \sigma]$  es una solución fuerte de (47), y recíprocamente.*

*Demostración.* Por una parte, si  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta]$  es una solución fuerte de (1), definiendo  $w := -\varepsilon\Delta\phi + F'(\phi)$  y  $\sigma = \nabla\theta$ , y procediendo como en (46)-(47), obtenemos que  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta, w, \sigma]$  es una solución fuerte de (47). Por otra parte, si  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta, w, \sigma]$  es una solución fuerte de (47), aplicando el Corolario 1.2.14 y el Corolario 1.2.13 en las ecuaciones (47)<sub>4</sub> y (47)<sub>5</sub>, obtenemos

$$w = -\varepsilon\Delta\phi + F'(\phi) \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \quad (48)$$

$$\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta - k\Delta\theta = 0 \quad \text{c.t.p. en } \Omega. \quad (49)$$

Por lo tanto, calculando el gradiente en (49), testeando por  $\bar{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$  y restando la ecuación resultante de (47)<sub>6</sub>, encontramos que  $\rho := \sigma - \nabla\theta$  satisface

$$(\rho_t, \bar{\sigma}) + k(\nabla \cdot \rho, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k(\text{rot } \rho, \text{rot } \bar{\sigma}) = (\mathbf{u} \cdot \rho, \nabla \cdot \bar{\sigma}) \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega),$$

de la cual, tomando  $\bar{\sigma} = \rho \in \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\rho\|_{L^2}^2 + k \|\nabla \cdot \rho\|_{L^2}^2 + k \|\text{rot } \rho\|_{L^2}^2 &= (\mathbf{u} \cdot \rho, \nabla \cdot \rho) \leq \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\rho\|_{L^3} \|\nabla \cdot \rho\|_{L^2} \\ &\leq \frac{k}{4} \|\nabla \cdot \rho\|_{L^2}^2 + \frac{C}{k} \|\mathbf{u}\|_{L^6}^2 \|\rho\|_{L^2} \|\rho\|_{H^1} \\ &\leq \frac{k}{2} (\|\nabla \cdot \rho\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \rho\|_{L^2}^2) + C(\|\mathbf{u}\|_{L^6}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^6}^4) \|\rho\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando el hecho de que  $\rho(0) = 0$ , deducimos que  $\rho = 0$  y por lo tanto,  $\sigma = \nabla \theta$ . Utilizando este hecho y (48) en (47)<sub>1</sub> y (47)<sub>3</sub>, obtenemos que  $[\mathbf{u}, p, \phi, \theta]$  es una solución fuerte de (1).  $\square$

**Lema 2.3.2.** *(Ley de la energía disipativa) El sistema (47) satisface la siguiente ley de energía disipativa:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\sigma\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} F(\phi) d\mathbf{x} \right) \\ + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \gamma \|w\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\nabla \cdot \sigma\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\text{rot } \sigma\|_{L^2}^2 = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

*Demostración.* Tomando  $[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{w}, \bar{\phi}, \bar{\sigma}] = [\mathbf{u}, p, w, -\phi_t, \alpha \sigma]$  en (47) y sumando las expresiones resultantes, los términos  $(p, \nabla \cdot \mathbf{u})$ ,  $(w \nabla \phi, \mathbf{u})$ ,  $\alpha((\nabla \cdot \sigma) \sigma, \mathbf{u})$  y  $(\phi_t, w)$  se cancelan, y llegamos a (50).  $\square$

### 3. ANÁLISIS NUMÉRICO

En el presente capítulo, proponemos un esquema completamente discreto para aproximar el modelo no isotérmico de interfaz difusa (1)-(2), que satisface una versión discreta de la ley de la energía disipativa (18). Probamos algunas propiedades para el esquema, incluyendo su buen planteamiento, estabilidad energética, algunas estimaciones uniformes y estimaciones óptimas de error en normas débiles y fuertes para el conjunto de soluciones discretas con respecto a una solución suficientemente regular del problema continuo.

#### 3.1. ESQUEMA NUMÉRICO

En esta sección, presentamos un esquema completamente discreto para aproximar el modelo no isotérmico de interfaz difusa (1)-(2), que satisface una versión discreta de la ley de la energía disipativa (18). Consideramos, para la discretización temporal, una partición uniforme de  $[0, T]$  con paso de tiempo  $\Delta t = T/N$  ( $t_m = m\Delta t$   $_{m=0}^{m=N}$ ); mientras que, para la discretización espacial, los siguientes espacios de elementos finitos:

$$\mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_\theta \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p \subset H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega),$$

correspondientes a una familia de triangulaciones regulares y cuasi-uniformes de  $\bar{\Omega}$ ,  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ , conformadas por símlices  $K$  (triángulos en  $2D$  y tetraedros en  $3D$ ), de modo que  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ , donde  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ , siendo  $h_K$  el diámetro de  $K$ . Asumimos que  $\mathcal{X}_u$  y  $\mathcal{X}_p$  satisfacen la condición *inf-sup*: Existe una constante  $\beta > 0$ ,

independiente de  $h$ , tal que

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{X}_u \setminus \{0\}} \frac{-(p, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{X}_u}} \geq \beta \|p\|_{\mathcal{X}_p}, \quad \forall p \in \mathcal{X}_p. \quad (51)$$

Es bien sabido que podemos elegir la aproximación de Taylor-Hood  $\mathbb{P}_r \times \mathbb{P}_{r-1}$  (para  $r \geq 2$ ) <sup>(25, 26)</sup>, o  $\mathbb{P}_1$ -bubble  $\times \mathbb{P}_1$  <sup>(25)</sup> (para  $r = 1$ ) para los espacios de elementos finitos  $[\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_p]$ ; mientras que, los espacios  $[\mathcal{X}_\phi, \mathcal{X}_w, \mathcal{X}_\sigma, \mathcal{X}_\theta]$  pueden aproximarse mediante  $\mathbb{P}_{r_1} \times \mathbb{P}_{r_2} \times \mathbb{P}_{r_3} \times \mathbb{P}_{r_4}$ -continuos, con  $r_i \geq 1$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). Además, consideramos el operador de Stokes  $(\mathbb{P}_u, \mathbb{P}_p) : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$  tal que

$$\begin{cases} \nu(\nabla(\mathbb{P}_u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbb{P}_p p - p, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0, & \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{X}_u, \\ (\nabla \cdot (\mathbb{P}_u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \bar{p}) = 0, & \forall \bar{p} \in \mathcal{X}_p, \end{cases} \quad (52)$$

que cumple las siguientes propiedades <sup>(27)</sup>:

$$\|\mathbf{u} - \mathbb{P}_u \mathbf{u}\|_{H^1} + \frac{1}{h} \|\mathbf{u} - \mathbb{P}_u \mathbf{u}\|_{L^2} \leq Kh^r \|\mathbf{u}\|_{H^{r+1}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^{r+1}(\Omega), \quad (53)$$

$$\|p - \mathbb{P}_p p\|_{L^2} \leq Kh^r \|p\|_{H^r}, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega) \cap H^r(\Omega), \quad (54)$$

$$\|\mathbb{P}_u \mathbf{u}\|_{W^{1,6}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^2} \quad \text{y} \quad \|\mathbb{P}_p p\|_{L^6} \leq C \|p\|_{H^1}. \quad (55)$$

---

<sup>25</sup> Vivette Girault y Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2012.

<sup>26</sup> Rolf Stenberg. "A technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow". En: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 11.6 (1990), págs. 935-948.

<sup>27</sup> Francisco Guillen-Gonzalez y María Victoria Redondo-Neble. "Spatial error estimates for a finite element viscosity-splitting scheme for the Navier-Stokes equations". En: *International Journal of Numerical Analysis & Modeling* 10.4 (2013).

También consideramos los operadores de proyección

$$\mathbb{P}_\phi : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\phi, \quad \mathbb{P}_\sigma : \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\sigma \quad \mathbf{y} \quad \mathbb{P}_\theta : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\theta,$$

verificando

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla(\mathbb{P}_\phi\phi - \phi), \nabla\bar{\phi}) + (\mathbb{P}_\phi\phi - \phi, \bar{\phi}) = 0, \quad \forall \bar{\phi} \in \mathcal{X}_\phi, \\ (\nabla \cdot (\mathbb{P}_\sigma\sigma - \sigma), \nabla \cdot \bar{\sigma}) + (\text{rot}(\mathbb{P}_\sigma\sigma - \sigma), \text{rot} \bar{\sigma}) + (\mathbb{P}_\sigma\sigma - \sigma, \bar{\sigma}) = 0, \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathcal{X}_\sigma, \\ (\nabla(\mathbb{P}_\theta\theta - \theta), \nabla\bar{\theta}) + (\mathbb{P}_\theta\theta - \theta, \bar{\theta}) = 0, \quad \forall \bar{\theta} \in \mathcal{X}_\theta, \end{array} \right. \quad (56)$$

respectivamente. A partir del Teorema 1.2.4, los operadores  $\mathbb{P}_\phi$ ,  $\mathbb{P}_\sigma$  y  $\mathbb{P}_\theta$  están bien definidos. Además, es bien sabido que se cumplen los siguientes errores de interpolación

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\phi - \mathbb{P}_\phi\phi\|_{L^2} + h\|\phi - \mathbb{P}_\phi\phi\|_{H^1} \leq Kh^{r_1+1}\|\phi\|_{H^{r_1+1}}, \quad \forall \phi \in H^{r_1+1}(\Omega), \\ \|\sigma - \mathbb{P}_\sigma\sigma\|_{L^2} + h\|\sigma - \mathbb{P}_\sigma\sigma\|_{H^1} \leq Ch^{r_3+1}\|\sigma\|_{H^{r_3+1}}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{H}^{r_3+1}(\Omega), \\ \|\theta - \mathbb{P}_\theta\theta\|_{L^2} + h\|\theta - \mathbb{P}_\theta\theta\|_{H^1} \leq Kh^{r_4+1}\|\theta\|_{H^{r_4+1}}, \quad \forall \theta \in H^{r_4+1}(\Omega), \end{array} \right. \quad (57)$$

y las siguientes propiedades de estabilidad

$$\|[\mathbb{P}_\phi\phi, \mathbb{P}_\sigma\sigma, \mathbb{P}_\theta\theta]\|_{H^1} \leq C\|[\phi, \sigma, \theta]\|_{H^1} \quad \mathbf{y} \quad \|[\mathbb{P}_\phi\phi, \mathbb{P}_\sigma\sigma, \mathbb{P}_\theta\theta]\|_{W^{1,6}} \leq C\|[\phi, \sigma, \theta]\|_{H^2}. \quad (58)$$

Para la variable auxiliar  $w$ , consideramos cualquier operador de interpolación  $\mathbb{P}_w$  verificando

$$\|w - \mathbb{P}_w w\|_{L^2} + h\|w - \mathbb{P}_w w\|_{H^1} \leq Kh^{r_2+1}\|w\|_{H^{r_2+1}}, \quad \forall w \in H^{r_2+1}(\Omega), \quad (59)$$

$$\|\mathbb{P}_w w\|_{H^1} \leq C\|w\|_{H^1} \quad \mathbf{y} \quad \|\mathbb{P}_w w\|_{W^{1,6}} \leq C\|w\|_{H^2}. \quad (60)$$

Por último, consideramos las siguientes formas trilineales que se utilizarán en la formulación del esquema numérico:

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right) - \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \right) \right], \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (61)$$

$$A(\mathbf{v}, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_1, w_2 \right) - \left( (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_2, w_1 \right) \right], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), w_1, w_2 \in H^1(\Omega). \quad (62)$$

No es difícil comprobar que

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}, \quad \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (63)$$

$$A(\mathbf{v}_1, w_1, w_2) = \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) w_1, w_2 \right), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{V}, \quad w_1, w_2 \in H^1(\Omega), \quad (64)$$

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (65)$$

$$A(\mathbf{v}, w, w) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad w \in H^1(\Omega). \quad (66)$$

**3.1.1. Definición del esquema.** Con el objetivo de construir un esquema totalmente discreto energéticamente estable asociado al problema (1), descomponemos  $F(\phi)$  de la siguiente manera:

$$F(\phi) = \frac{1}{4\varepsilon} (\phi^2 - 1)^2 = \frac{1}{4\varepsilon} \phi^4 - \frac{1}{2\varepsilon} \phi^2 + \frac{1}{4\varepsilon} := F_+(\phi) + F_-(\phi), \quad (67)$$

donde

$$F_+(\phi) = \frac{1}{4\varepsilon} (\phi^4 + 1) \quad \text{and} \quad F_-(\phi) = -\frac{1}{2\varepsilon} \phi^2. \quad (68)$$

Aproximamos  $F'_-(\phi)$  explícitamente, es decir,

$$F'_-(\phi_h^n) = f_-(\phi_h^n) = -\frac{1}{\varepsilon} \phi_h^n, \quad (69)$$

mientras que, para  $F'_+(\phi)$ , utilizamos la siguiente aproximación del punto medio

$$f_+(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n) = \frac{F_+(\phi_h^{n+1}) - F_+(\phi_h^n)}{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n} = \frac{1}{4\varepsilon} \left( (\phi_h^{n+1})^3 + (\phi_h^{n+1})^2 \phi_h^n + (\phi_h^n)^2 \phi_h^{n+1} + (\phi_h^n)^3 \right), \quad (70)$$

y así, tenemos la siguiente aproximación para el término del potencial

$$f(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n) = \frac{1}{4\varepsilon} \left( (\phi_h^{n+1})^3 + (\phi_h^{n+1})^2 \phi_h^n + (\phi_h^n)^2 \phi_h^{n+1} + (\phi_h^n)^3 \right) - \frac{1}{\varepsilon} \phi_h^n. \quad (71)$$

Entonces, consideramos el siguiente esquema numérico:

- **Inicialización:** Sea  $[\phi_h^0, w_h^0, \sigma_h^0, \mathbf{u}_h^0] = [\mathbb{P}_\phi \phi_0, \mathbb{P}_w w_0, \mathbb{P}_\sigma \sigma_0, \mathbb{P}_u \mathbf{u}_0] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u$ .
- **Paso de tiempo  $n + 1$ :** Dado  $[\phi_h^n, w_h^n, \sigma_h^n, \mathbf{u}_h^n] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u$ , encontrar  $[\phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$  tal que, para todo  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$ , se cumpla:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\delta_t \mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + B(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ \quad - (w_h^{n+1} \nabla \phi_h^n, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha ((\nabla \cdot \sigma_h^{n+1}) \sigma_h^n, \bar{\mathbf{u}}) = 0, \\ (\delta_t \phi_h^{n+1}, \bar{w}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \phi_h^n, \bar{w}) + \gamma (w_h^{n+1}, \bar{w}) = 0, \\ (w_h^{n+1}, \bar{\phi}) - \varepsilon (\nabla \phi_h^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) - (f(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n), \bar{\phi}) = 0, \\ (\delta_t \sigma_h^{n+1}, \bar{\sigma}) - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k (\nabla \cdot \sigma_h^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k (\text{rot } \sigma_h^{n+1}, \text{rot } \bar{\sigma}) = 0, \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{p}) = 0, \end{array} \right. \quad (72)$$

donde, en general, denotamos  $\delta_t a_h^{n+1} = \frac{a_h^{n+1} - a_h^n}{\Delta t}$ .

Una vez resuelto el esquema (72), podemos recuperar  $\theta_h^{n+1} \in \mathcal{X}_\theta$  resolviendo

$$(\delta_t \theta_h^{n+1}, \bar{\theta}) + A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \theta_h^{n+1}, \bar{\theta}) + k (\nabla \theta_h^{n+1}, \nabla \bar{\theta}) = 0, \quad \forall \bar{\theta} \in \mathcal{X}_\theta. \quad (73)$$

**3.1.2. Buen planteamiento, estabilidad energética y estimaciones uniformes del esquema (72)-(73).** En esta sección, demostraremos algunas propiedades cualitativas para el esquema numérico (72)-(73), tales como la existencia y unicidad de solución, estabilidad energética incondicional y algunas estimaciones uniformes para las soluciones discretas, que se requieren más adelante en el análisis de convergencia.

**Teorema 3.1.1.** *(Buen planteamiento de (72)) Existe  $[\phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$  única solución del esquema (72).*

*Demostración.* En primer lugar, demostramos la existencia de solución de (72) utilizando el Lema 1.2.11. Con este objetivo, denotamos  $\phi = \phi_h^{n+1} - \phi_h^n$ ,  $X = \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$  y consideramos  $P[\phi, w_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in X$  definido por

$$\begin{aligned} & \left( P[\phi, w_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}], [\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \right)_X = \\ & \left( \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n}{\Delta t}, \bar{\mathbf{u}} \right) + B(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ & - (w_h^{n+1} \nabla \phi_h^n, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha ((\nabla \cdot \sigma_h^{n+1}) \sigma_h^n, \bar{\mathbf{u}}) \\ & + \frac{1}{\Delta t} (\phi, \bar{w}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \phi_h^n, \bar{w}) + \gamma (w_h^{n+1}, \bar{w}) \\ & - \frac{1}{\Delta t} (w_h^{n+1}, \bar{\phi}) + \varepsilon \frac{1}{\Delta t} (\nabla(\phi + \phi_h^n), \nabla \bar{\phi}) + \frac{1}{\Delta t} (f(\phi + \phi_h^n, \phi_h^n), \bar{\phi}) \\ & + \alpha \left( \frac{\sigma_h^{n+1} - \sigma_h^n}{\Delta t}, \bar{\sigma} \right) - \alpha (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k\alpha (\nabla \cdot \sigma_h^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}) \\ & + k\alpha (\text{rot } \sigma_h^{n+1}, \text{rot } \bar{\sigma}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, \bar{p}), \end{aligned}$$

para todo  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \in X$ . Tomando  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] = [\phi, w_h^{n+1}, \sigma_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}]$  y utilizando la identidad  $(a + b, 2a) = a^2 - b^2 + (a + b)^2$ , algunos términos se cancelan

y luego, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
(f(\phi + \phi_h^n, \phi_h^n), \phi) &= (f_+(\phi + \phi_h^n, \phi_h^n), \phi) + (f_-(\phi_h^n), \phi) \\
&= \left( \frac{F_+(\phi + \phi_h^n) - F_+(\phi_h^n)}{\phi}, \phi \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left( -\left(\frac{1}{2}\phi + \phi_h^n\right) + \frac{1}{2}\phi, \phi \right) \\
&= \int_{\Omega} F_+(\phi + \phi_h^n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} F_+(\phi_h^n) d\mathbf{x} - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\phi^2 + 2\phi\phi_h^n) d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \|\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\Omega} F_+(\phi + \phi_h^n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} F_+(\phi_h^n) d\mathbf{x} - \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\phi + \phi_h^n)^2 d\mathbf{x} \\
&\quad + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} (\phi_h^n)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\phi\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\Omega} F(\phi + \phi_h^n) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} F(\phi_h^n) d\mathbf{x} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\phi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
\left( P[\phi, w_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}], [\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \right)_X &= \\
\frac{\varepsilon}{2\Delta t} (\|\nabla\phi\|_{L^2}^2 - \|\nabla\phi_h^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\phi + \phi_h^n)\|_{L^2}^2) + \gamma \|w_h^{n+1}\|_{L^2}^2 & \\
+ \frac{1}{2\Delta t} (\|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 & \\
+ \frac{\alpha}{2\Delta t} (\|\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \|\boldsymbol{\sigma}_h^n\|_{L^2}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_h^n\|_{L^2}^2) + k\alpha \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 & \\
+ k\alpha \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} F(\phi + \phi_h^n) d\mathbf{x} - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} F(\phi_h^n) d\mathbf{x} + \frac{1}{2\varepsilon\Delta t} \|\phi\|_{L^2}^2. &
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la hipótesis del Lema 1.2.11 se cumple para  $\rho$  suficientemente grande, por lo que concluimos la existencia de  $[\phi, w_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] \in X$  tal que  $P[\phi, w_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}] = \mathbf{0}$ , lo que implica que  $[\phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}]$  es una solución de (72).

Por otro lado, para demostrar la unicidad, consideramos  $[\phi_{h,1}^{n+1}, w_{h,1}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{h,1}^{n+1}, \mathbf{u}_{h,1}^{n+1}, p_{h,1}^{n+1}]$ ,  $[\phi_{h,2}^{n+1}, w_{h,2}^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_{h,2}^{n+1}, \mathbf{u}_{h,2}^{n+1}, p_{h,2}^{n+1}] \in \mathcal{X}_{\phi} \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathcal{X}_{\mathbf{u}} \times \mathcal{X}_p$  dos soluciones de (72). Entonces,  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}_{h,1}^{n+1} - \mathbf{u}_{h,2}^{n+1}$ ,  $w^{n+1} = w_{h,1}^{n+1} - w_{h,2}^{n+1}$ ,  $\phi^{n+1} = \phi_{h,1}^{n+1} - \phi_{h,2}^{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{h,1}^{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{h,2}^{n+1}$

y  $p^{n+1} = p_{h,1}^{n+1} - p_{h,2}^{n+1}$  satisfacen, para todo  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + B(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu (\nabla \mathbf{u}^{n+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (p^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) - (w^{n+1} \nabla \phi_h^n, \bar{\mathbf{u}}) \\
+ \alpha ((\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1}) \boldsymbol{\sigma}_h^n, \bar{\mathbf{u}}) = 0, \\
\frac{1}{\Delta t} (\phi^{n+1}, \bar{w}) + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla \phi_h^n, \bar{w}) + \gamma (w^{n+1}, \bar{w}) = 0, \\
(w^{n+1}, \bar{\phi}) - \varepsilon (\nabla \phi^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) - (f(\phi_{h,1}^{n+1}, \phi_h^n), \bar{\phi}) + (f(\phi_{h,2}^{n+1}, \phi_h^n), \bar{\phi}) = 0, \\
\frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^n, \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + k (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + k (\text{rot } \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \text{rot } \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = 0, \\
(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}, \bar{p}) = 0.
\end{aligned} \tag{74}$$

Tomando  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] = [-\phi^{n+1}, \Delta t w^{n+1}, \alpha \Delta t \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \Delta t \mathbf{u}^{n+1}, \Delta t p^{n+1}]$  en (74), sumando las expresiones resultantes y utilizando (65), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma \Delta t \|w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
+ \frac{1}{4\varepsilon} \left( (\phi_{h,1}^{n+1})^3 - (\phi_{h,2}^{n+1})^3, \phi^{n+1} \right) + \frac{1}{4\varepsilon} \left( (\phi_{h,1}^{n+1})^2 - (\phi_{h,2}^{n+1})^2 \right) \phi_h^n, \phi^{n+1} \\
+ \frac{1}{4\varepsilon} ((\phi_h^n)^2 \phi^{n+1}, \phi^{n+1}) + \alpha k \Delta t \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \Delta t \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma \Delta t \|w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
+ \frac{1}{4\varepsilon} \|\phi_h^n \phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,1}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,2}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
+ \alpha k \Delta t \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \Delta t \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
= -\frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (\phi^{n+1})^2 \phi_{h,1}^{n+1} \phi_{h,2}^{n+1} d\mathbf{x} - \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (\phi^{n+1})^2 \phi_h^n (\phi_{h,1}^{n+1} + \phi_{h,2}^{n+1}) d\mathbf{x} \\
\leq \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,1}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,2}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,1}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
+ \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_h^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi^{n+1} \phi_{h,2}^{n+1}\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

de lo que se obtiene

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \Delta t \|\nabla \mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma \Delta t \|w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + \alpha \|\boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \Delta t \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \Delta t \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

y así  $[\nabla \phi^{n+1}, w^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}] = [\mathbf{0}, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$ . Utilizando que  $[\nabla \phi^{n+1}, w^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}] = [0, 0, 0]$  en (74)<sub>2</sub>, deducimos que  $\phi^{n+1} = 0$ . Por último, aplicando la condición discreta *inf-sup* (51) concluimos que  $p^{n+1} = 0$ .  $\square$

**Lema 3.1.2.** (*Buen planteamiento de (73)*) Existe una única  $\theta_h^{n+1} \in \mathcal{X}_\theta$  solución de (73).

*Demostración.* Dado  $[\mathbf{u}_h^{n+1}, \theta_h^n] \in \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_\theta$ , (73) es un sistema lineal algebraico, basta demostrar la unicidad, que se deduce utilizando argumentos estándar (teniendo en cuenta la propiedad (66)).  $\square$

**Teorema 3.1.3.** (*Estabilidad energética*) El esquema (72) satisface la siguiente ley discreta de energía disipativa:

$$\begin{aligned} & \delta_t \left( \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} F(\phi_h^{n+1}) d\mathbf{x} \right) \\ & + \varepsilon \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t(\nabla \phi_h^{n+1})\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \|\delta_t \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + \gamma \|w_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + k\alpha \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0. \quad (75) \end{aligned}$$

*Demostración.* Tomando  $\bar{w} = w_h^{n+1}$  en (72)<sub>2</sub>, tenemos

$$(\delta_t \phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \phi_h^n, w_h^{n+1}) + \gamma \|w_h^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0. \quad (76)$$

Ahora, tomando  $\bar{\phi} = -\delta_t \phi_h^{n+1}$  en (72)<sub>3</sub>, obtenemos

$$(w_h^{n+1}, -\delta_t \phi_h^{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \delta_t \|\nabla \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon \Delta t}{2} \|\delta_t(\nabla \phi_h^{n+1})\|_{L^2}^2 + (f(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n), \delta_t \phi_h^{n+1}) = 0. \quad (77)$$

Observe que

$$\begin{aligned} f_-(\phi_h^n) &= -\frac{1}{\varepsilon}\phi_h^n = \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{\phi_h^n}{2} - \frac{\phi_h^n}{2} + \frac{\phi_h^{n+1}}{2} - \frac{\phi_h^{n+1}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{\phi_h^{n+1} + \phi_h^n}{2} + \frac{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n}{2}\right). \end{aligned} \quad (78)$$

A continuación, utilizando (69)-(70) y (78), obtenemos

$$\begin{aligned} (f(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n), \delta_t \phi_h^{n+1}) &= (f_+(\phi_h^{n+1}, \phi_h^n) + f_-(\phi_h^n), \delta_t \phi_h^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\Delta t} (F_+(\phi_h^{n+1}) - F_+(\phi_h^n), 1) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\left(-\frac{\phi_h^{n+1} + \phi_h^n}{2} + \frac{\Delta t}{2}\delta_t \phi_h^{n+1}\right), \delta_t \phi_h^{n+1}\right) \\ &= \delta_t \left(\int_{\Omega} F_+(\phi_h^{n+1}) d\mathbf{x}\right) - \frac{1}{2\varepsilon\Delta t} \int_{\Omega} \left((\phi_h^{n+1})^2 - (\phi_h^n)^2\right) d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \|\delta_t \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &= \delta_t \left(\int_{\Omega} F(\phi_h^{n+1}) d\mathbf{x}\right) + \frac{\Delta t}{2\varepsilon} \|\delta_t \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Además, tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h^{n+1}$  en (72)<sub>1</sub>,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}$  en (72)<sub>4</sub>,  $\bar{p} = p_h^{n+1}$  en (72)<sub>5</sub> y utilizando (65), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta_t \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \\ + \alpha ((\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}) \boldsymbol{\sigma}_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}) - (w_h^{n+1} \nabla \phi_h^n, \mathbf{u}_h^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}\delta_t \|\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha\Delta t}{2} \|\delta_t \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 - \alpha (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n, \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}) \\ + k\alpha \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + k\alpha \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 = 0, \end{aligned} \quad (81)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}) = 0. \quad (82)$$

Por último, sustituyendo (79) en (77), y sumando la expresión resultante con (76) y (80)-(82), concluimos (75).  $\square$

**Corolario 3.1.4.** (*Estimaciones uniformes*) Sea  $[\phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}]$  una solución del esquema (72). Entonces, se cumplen las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h^{n+1} &\text{ está acotada en } l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1), \\
\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1} &\text{ está acotada en } l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1), \\
w_h^{n+1} &\text{ está acotada en } l^2(L^2), \\
\nabla \phi_h^{n+1} &\text{ está acotada en } l^\infty(L^2), \\
\phi_h^{n+1} &\text{ está acotada en } l^\infty(L^4).
\end{aligned} \tag{83}$$

*Demostración.* La prueba de (83)<sub>1-4</sub> resulta de multiplicar la ley de energía discreta (75) por  $\Delta t$  y sumando desde  $n = 0$  hasta  $n = m$ . Además,

$$\int_{\Omega} F(\phi_h^{n+1}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{4\varepsilon} (\phi_h^{n+1})^4 - \frac{1}{2\varepsilon} (\phi_h^{n+1})^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \right) d\mathbf{x} \leq C_0,$$

donde la constante  $C_0 > 0$  es independiente de  $n$ ,  $\Delta t$  y  $h$ . Entonces, tenemos

$$\frac{1}{4\varepsilon} \|\phi_h^{n+1}\|_{L^4}^4 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} |\Omega| + C_0 \leq \frac{1}{8\varepsilon} \|\phi_h^{n+1}\|_{L^4}^4 + C,$$

con  $C > 0$  independiente de  $n$ ,  $\Delta t$  y  $h$ , lo que implica (83)<sub>5</sub>. □

### 3.2. ESTIMACIONES DE ERRORES

En esta sección, obtendremos estimaciones de error óptimas para cualquier solución  $[\phi_h^{n+1}, w_h^{n+1}, \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}, \mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \theta_h^{n+1}]$  del esquema (72)-(73), con respecto a una solución suficientemente regular  $[\phi, w, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, p, \theta]$  de (47). Denotando el error total para una variable general  $z$  en  $t = t^{n+1}$  por  $e_z^{n+1} = z(t^{n+1}) - z_h^{n+1}$ , considerando la siguiente descomposición

$$e_z^{n+1} = (z(t^{n+1}) - \mathbb{P}_z z(t^{n+1})) + (\mathbb{P}_z z(t^{n+1}) - z_h^{n+1}) = \Theta_z^{n+1} + \xi_z^{n+1}, \tag{84}$$

para un operador de interpolación general  $\mathbb{P}_z$ ; restando (72)-(73) a (47) en  $t = t^{n+1}$  y usando (52) y (56), obtenemos que los errores discretos  $\xi^{n+1}$  satisfacen la siguiente formulación, para todo  $[\bar{\phi}, \bar{w}, \bar{\sigma}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{p}, \bar{\theta}] \in \mathcal{X}_\phi \times \mathcal{X}_w \times \mathcal{X}_\sigma \times \mathcal{X}_u \times \mathcal{X}_p \times \mathcal{X}_\theta$ :

$$\begin{aligned} (\delta_t \xi_\phi^{n+1}, \bar{w}) + (\xi_u^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \bar{w}) + (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \xi_\phi^n, \bar{w}) + \gamma(\xi_w^{n+1}, \bar{w}) &= (R_\phi^{n+1}, \bar{w}) \\ - (\delta_t \Theta_\phi^{n+1}, \bar{w}) - (\Theta_u^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \bar{w}) - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \Theta_\phi^n, \bar{w}) - \gamma(\Theta_w^{n+1}, \bar{w}), \end{aligned} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} (\xi_w^{n+1}, \bar{\phi}) - \varepsilon(\nabla \xi_\phi^{n+1}, \nabla \bar{\phi}) - (G^{n+1}, \bar{\phi}) - (G_h^{n+1}, \bar{\phi}) \\ = -\frac{1}{\varepsilon}(\xi_\phi^n, \bar{\phi}) - (\Theta_w^{n+1}, \bar{\phi}) - \frac{1}{\varepsilon}(\Theta_\phi^n, \bar{\phi}) + (R_w^{n+1}, \bar{\phi}) - \varepsilon(\Theta_\phi^{n+1}, \bar{\phi}), \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t \xi_\sigma^{n+1}, \bar{\sigma}) - (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \xi_\sigma^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k(\nabla \cdot \xi_\sigma^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k(\text{rot } \xi_\sigma^{n+1}, \text{rot } \bar{\sigma}) \\ = (R_\sigma^{n+1}, \bar{\sigma}) + (\xi_u^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) - (\delta_t \Theta_\sigma^{n+1}, \bar{\sigma}) + (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \Theta_\sigma^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) \\ + (\Theta_u^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + k(\Theta_\sigma^{n+1}, \bar{\sigma}), \end{aligned} \quad (87)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t \xi_u^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + B(\xi_u^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \bar{\mathbf{u}}) + B(\mathbf{u}_h^n, \xi_u^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + \nu(\nabla \xi_u^{n+1}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\xi_p^{n+1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\ - (\xi_w^{n+1} \nabla \phi(t^n), \bar{\mathbf{u}}) - (w_h^{n+1} \nabla \xi_\phi^n, \bar{\mathbf{u}}) + \alpha((\nabla \cdot \xi_\sigma^{n+1}) \sigma_h^n, \bar{\mathbf{u}}) \\ + \alpha((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \xi_\sigma^n, \bar{\mathbf{u}}) = (R_u^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) - (\delta_t \Theta_u^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) - B(\Theta_u^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \bar{\mathbf{u}}) \\ - B(\mathbf{u}_h^n, \Theta_u^{n+1}, \bar{\mathbf{u}}) + (\Theta_w^{n+1} \nabla \phi(t^n), \bar{\mathbf{u}}) + (w_h^{n+1} \nabla \Theta_\phi^n, \bar{\mathbf{u}}) - \alpha((\nabla \cdot \Theta_\sigma^{n+1}) \sigma_h^n, \bar{\mathbf{u}}) \\ - \alpha((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \Theta_\sigma^n, \bar{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (88)$$

$$(\bar{p}, \nabla \cdot \xi_u^{n+1}) = 0, \quad (89)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t \xi_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) + k(\nabla \xi_\theta^{n+1}, \nabla \bar{\theta}) = -(\delta_t \Theta_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) + k(\Theta_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) - A(\xi_u^{n+1}, \theta(t^{n+1}), \bar{\theta}) \\ - A(\Theta_u^{n+1}, \theta(t^{n+1}), \bar{\theta}) - A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \xi_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) - A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \Theta_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) + (R_\theta^{n+1}, \bar{\theta}), \end{aligned} \quad (90)$$

donde

$$(R_\phi^{n+1}, \bar{w}) = (\delta_t \phi(t^{n+1}) - \phi_t(t^{n+1}), \bar{w}) - (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla (\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)), \bar{w}), \quad (91)$$

$$\begin{aligned}
(R_w^{n+1}, \bar{\phi}) &= -\frac{1}{\varepsilon}(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n), \bar{\phi}), \\
(G^{n+1}, \bar{\phi}) &= (f_+(\phi(t^{n+1})), \bar{\phi}) - \left( \frac{F_+(\phi(t^{n+1})) - F_+(\phi(t^n))}{\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)}, \bar{\phi} \right), \\
(G_h^{n+1}, \bar{\phi}) &= \left( \frac{F_+(\phi(t^{n+1})) - F_+(\phi(t^n))}{\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)}, \bar{\phi} \right) - \left( \frac{F_+(\phi_h^{n+1}) - F_+(\phi_h^n)}{\phi_h^{n+1} - \phi_h^n}, \bar{\phi} \right),
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
(R_u^{n+1}, \bar{u}) &= (\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_t(t^{n+1}), \bar{u}) - B(\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n), \mathbf{u}(t^{n+1}), \bar{u}) \\
&\quad + (w(t^{n+1}) \nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)), \bar{u}) - \alpha(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) (\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)), \bar{u}),
\end{aligned} \tag{93}$$

$$(R_\sigma^{n+1}, \bar{\sigma}) = (\delta_t \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}_t(t^{n+1}), \bar{\sigma}) + (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)), \nabla \cdot \bar{\sigma}), \tag{94}$$

y

$$(R_\theta^{n+1}, \bar{\theta}) = (\delta_t \theta(t^{n+1}) - \theta_t(t^{n+1}), \bar{\theta}). \tag{95}$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
(G_h^{n+1}, \bar{\phi}) &= \frac{1}{4\varepsilon} \left( 3(\phi(t^{n+1}))^2 e_\phi^{n+1} - 3\phi(t^{n+1})(e_\phi^{n+1})^2 + (e_\phi^{n+1})^3, \bar{\phi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon} \left( 3(\phi(t^n))^2 e_\phi^n - 3\phi(t^n)(e_\phi^n)^2 + (e_\phi^n)^3, \bar{\phi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon} (e_\phi^{n+1}(\phi(t^{n+1}) + \phi_h^{n+1})\phi_h^n + (\phi(t^{n+1}))^2 e_\phi^n, \bar{\phi}) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon} (e_\phi^{n+1}(\phi_h^n)^2 + \phi(t^{n+1})e_\phi^n(\phi(t^n) + \phi_h^n), \bar{\phi}).
\end{aligned} \tag{96}$$

Además, utilizando la fórmula de Taylor podemos deducir que, para algún  $\beta \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned}
(G^{n+1}, \bar{\phi}) &= \frac{1}{2}(f'_+(\alpha\phi(t^{n+1}) + (1-\alpha)\phi(t^n))(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)), \bar{\phi}) \\
&= \frac{3}{2\varepsilon} \left( (\beta\phi(t^{n+1}) + (1-\beta)\phi(t^n))^2 (\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)), \bar{\phi} \right).
\end{aligned} \tag{97}$$

**3.2.1. Estimaciones de error en normas débiles para  $[u, \sigma, w, \theta]$  y normas fuertes para  $\phi$ .** En esta parte, obtenemos estimaciones óptimas del error en normas débiles-fuertes asociadas al esquema (72)-(73). Para ello, hacemos la siguiente hi-

pótesis inductiva: existe una constante positiva  $C > 0$ , independiente de  $n$ , tal que

$$\|\phi_h^n\|_{W^{1,4}} \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (98)$$

Al final de esta sección, verificamos la validez de (98). Además, introducimos, para una variable general  $z$ , el operador  $A_h^z : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_z$  definido por

$$(A_h^z z, \bar{z}) = (\nabla z, \nabla \bar{z}) + (z, \bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in \mathcal{X}_z, \quad (99)$$

que satisface (ver <sup>28</sup>, Lema 3.1)

$$\|z_h\|_{W^{1,6}} \leq C \|A_h^z z_h\|_{L^2}, \quad \forall z_h \in \mathcal{X}_z. \quad (100)$$

Entonces, podemos demostrar los siguientes resultados:

**Teorema 3.2.1.** *Asuma (98) y  $\mathcal{X}_\phi \subseteq \mathcal{X}_w$ . Existe una constante  $C > 0$  (dependiendo de los datos del problema (47)) tal que si  $\Delta t C < \frac{1}{2}$ , se cumple la siguiente estimación para los errores discretos*

$$\begin{aligned} & \|\xi_\phi^{n+1}\|_{l^\infty(H^1)} + \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{l^2(L^2)}^2 + \|\xi_w^{n+1}\|_{l^2(L^2)} + \|\xi_\theta^{n+1}\|_{l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)} \\ & + \|[\xi_u^{n+1}, \xi_\sigma^{n+1}]\|_{l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} \right), \end{aligned} \quad (101)$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $n, \Delta t$  y  $h$ .

**Teorema 3.2.2.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1, la siguiente estimación para*

---

<sup>28</sup> Francisco Guillén-González, María A. Rodríguez-Bellido y Diego Armando Rueda-Gómez. "Study of a chemo-repulsion model with quadratic production. Part II: analysis of an unconditionally energy-stable fully discrete scheme". En: *Computers & Mathematics with Applications* 80.5 (2020), págs. 636-652.

el error discreto  $\xi_\phi^{n+1}$  se cumple

$$\|A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}\|_{l^2(L^2)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} \right), \quad (102)$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $n, \Delta t$  y  $h$ .

A partir de la descomposición (84), el Teorema 3.2.1 y los errores de interpolación (53), (57) y (59), podemos deducir:

**Corolario 3.2.3.** *Bajo las suposiciones del Teorema 3.2.1, se tienen las siguientes estimaciones para los errores totales*

$$\| [e_{\mathbf{u}}^{n+1}, e_{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}, e_{\theta}^{n+1}] \|_{l^\infty(L^2)} + \| e_w^{n+1} \|_{l^2(L^2)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} \right), \quad (103)$$

$$\| [e_{\mathbf{u}}^{n+1}, e_{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}, e_{\theta}^{n+1}] \|_{l^2(H^1)} + \| e_\phi^{n+1} \|_{l^\infty(H^1)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3}, h^{r_4}, h^r\} \right), \quad (104)$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $n, \Delta t$  y  $h$ .

**Estimaciones para  $\phi$  y  $w$ .** Tomando  $\bar{w} = \xi_w^{n+1}$ ,  $\bar{w} = \delta_t \xi_\phi^{n+1}$  y  $\bar{w} = \xi_\phi^{n+1}$  en (85) (las dos últimas son posibles gracias a la hipótesis  $\mathcal{X}_\phi \subseteq \mathcal{X}_w$ ), obtenemos

$$\begin{aligned} (\delta_t \xi_\phi^{n+1}, \xi_w^{n+1}) + \gamma \| \xi_w^{n+1} \|_{L^2}^2 &= - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \xi_\phi^n, \xi_w^{n+1}) - (\delta_t \Theta_\phi^{n+1}, \xi_w^{n+1}) \\ &\quad - (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \xi_w^{n+1}) - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \Theta_\phi^n, \xi_w^{n+1}) - \gamma (\Theta_w^{n+1}, \xi_w^{n+1}) + (R_\phi^{n+1}, \xi_w^{n+1}) \\ &\quad - (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \xi_w^{n+1}) = \sum_{i=1}^7 K_i, \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned}
\|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma (\xi_w^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) &= - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \xi_\phi^n, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) - (\delta_t \Theta_\phi^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) \\
&- (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \delta_t \xi_\phi^{n+1}) - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \Theta_\phi^n, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) - \gamma (\Theta_w^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) \\
&+ (R_\phi^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) - (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \delta_t \xi_\phi^{n+1}) = \sum_{i=1}^7 T_i,
\end{aligned} \tag{106}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \delta_t \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 &= - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \xi_\phi^n, \xi_\phi^{n+1}) - (\delta_t \Theta_\phi^{n+1}, \xi_\phi^{n+1}) \\
&- (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \xi_\phi^{n+1}) - (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \Theta_\phi^n, \xi_\phi^{n+1}) - \gamma (\Theta_w^{n+1}, \xi_\phi^{n+1}) \\
&+ (R_\phi^{n+1}, \xi_\phi^{n+1}) - (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \phi(t^n), \xi_\phi^{n+1}) - \gamma (\xi_w^{n+1}, \xi_\phi^{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^8 Z_i.
\end{aligned} \tag{107}$$

Observe que, usando las desigualdades de Hölder y Young, (53), (55)<sub>1</sub>, (57), (58)<sub>2</sub> y (59), tenemos

$$\begin{aligned}
|K_1| &= |(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla \xi_\phi^n, \xi_w^{n+1}) - (\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla \xi_\phi^n, \xi_w^{n+1})| \\
&\leq \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^4} \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^4} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty} \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^2} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 (\|\phi(t^n)\|_{H^2}^8 + \|\nabla \phi_h^n\|_{L^4}^8) \\
&+ C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}
|K_2 + K_5| &\leq \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} (\|(\mathcal{I} - \mathbb{P}_\phi) \delta_t \phi(t^{n+1})\|_{L^2} + \gamma \|\Theta_w^{n+1}\|_{L^2}) \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma} h^{2(r_1+1)} \|\delta_t \phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 + C \gamma h^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \frac{h^{2(r_1+1)}}{\gamma \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\phi(t)\|_{H^{r_1+1}}^2 dt \\
&+ C \gamma h^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2,
\end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
|K_3 + K_7| &\leq \|\nabla\phi(t^n)\|_{L^\infty} (\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2} + \|\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}) \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma} \|\nabla\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2), \quad (110)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|K_4| &= |(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \nabla\Theta_{\phi}^n, \xi_w^{n+1}) - (\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \nabla\Theta_{\phi}^n, \xi_w^{n+1})| \\
&\leq \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^3} \|\nabla\Theta_{\phi}^n\|_{L^6} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty} \|\nabla\Theta_{\phi}^n\|_{L^2} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{24} \|\nabla\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma^2\nu} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 \\
&\quad + \frac{C}{\gamma} h^{2r_1} \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2, \quad (111)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|K_6| &\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma} \|\delta_t\phi(t^{n+1}) - \phi_t(t^{n+1})\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\gamma} \|\nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma} \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\phi_{tt}(t)\|_{L^2}^2 dt \\
&\quad + \frac{C}{\gamma} \|\nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2. \quad (112)
\end{aligned}$$

Similarmente, los términos  $T_i$  y  $Z_i$  ( $1 \leq i \leq 7$ ) se controlan como en (108)-(112).

Para  $Z_8$ , obtenemos

$$|Z_8| \leq \gamma \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \|\xi_{\phi}^{n+1}\|_{L^2} \leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \gamma C \|\xi_{\phi}^{n+1}\|_{L^2}^2. \quad (113)$$

Por lo tanto, sumando (105)-(107) y utilizando (108)-(113) así como la hipótesis

inductiva (98), llegamos a

$$\begin{aligned}
& (1+\gamma)(\delta_t \xi_\phi^{n+1}, \xi_w^{n+1}) + \frac{\gamma}{2} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& \leq C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + C \frac{h^{2(r_1+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\phi_t(t)\|_{H^{r_1+1}}^2 dt \\
& \quad + Ch^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 \\
& \quad + C \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 (\|\phi(t^n)\|_{H^2}^8 + 1) + Ch^{2r_1} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& \quad + C \|\nabla \phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2) \\
& \quad + C \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 + C \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\phi_{tt}(t)\|_{L^2}^2 dt \\
& \quad + C \|\nabla (\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2. \tag{114}
\end{aligned}$$

Ahora, tomando  $\bar{\phi} = -(1+\gamma)\delta_t \xi_\phi^{n+1}$  en (86), obtenemos

$$\begin{aligned}
& -(1+\gamma)(\xi_w^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) + \frac{\varepsilon(1+\gamma)}{2} \delta_t \|\nabla \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \varepsilon(1+\gamma) \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \nabla \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& = -(1+\gamma)(G_h^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) - (1+\gamma)(G^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} (\xi_\phi^n, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) \\
& \quad + (1+\gamma) (\Theta_w^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} (\Theta_\phi^n, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) + \frac{1+\gamma}{\varepsilon} (\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n), \delta_t \xi_\phi^{n+1}) \\
& \quad + \varepsilon(1+\gamma) (\Theta_\phi^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) = \sum_{i=1}^7 J_i. \tag{115}
\end{aligned}$$

Observe que usando las desigualdades de Hölder y Young, (57), (59) y (97), tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=2}^7 J_i \right| & \leq \frac{1}{8} \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + C (\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 + \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 + 1) \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{L^2}^2 \\
& \quad + C \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 \\
& \quad + Ch^{2(r_1+1)} (\|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2). \tag{116}
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta (96) y utilizando las desigualdades de Hölder y Young,

obtenemos

$$\begin{aligned}
|J_1| \leq & \frac{1}{8} \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^2}^2) \\
& + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \left( (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^3}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^3}^2) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^\infty}^2 \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \right) \\
& + C (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^4 + \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^6}^4) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 + C \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^\infty}^4 \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^2}^2) \\
& + C \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 \left( (\|\xi_\phi^n\|_{L^3}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^3}^2) \|\xi_\phi^n\|_{L^6}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^\infty}^2 \|\Theta_\phi^n\|_{L^2}^2 \right) \\
& + C (\|\xi_\phi^n\|_{L^6}^4 + \|\xi_\phi^n\|_{L^6}^2 \|\Theta_\phi^n\|_{L^6}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^6}^4) \|\xi_\phi^n\|_{L^6}^2 + C \|\Theta_\phi^n\|_{L^\infty}^4 \|\Theta_\phi^n\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2) + C \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^2 \|\phi_h^{n+1}\|_{L^3}^2 \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 \\
& + C \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^2 \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^3}^2 \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^6}^2 + C \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^2 \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\mathbb{P}_\phi \phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \\
& + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^n\|_{L^2}^2) (\|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 + \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^2) \\
& + C \|\phi_h^n\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\Theta_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2). \tag{117}
\end{aligned}$$

Así pues, utilizando(116)-(117) en (115), y teniendo en cuenta las estimaciones uniformes para la solución discreta obtenidas en el Corolario 3.1.4, así como (57), (58)

y la hipótesis inductiva (98), obtenemos

$$\begin{aligned}
& -(1+\gamma)(\xi_w^{n+1}, \delta_t \xi_\phi^{n+1}) + \frac{\varepsilon(1+\gamma)}{2} \delta_t \|\nabla \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{1}{4} \|\delta_t \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + C(\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 + \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 + 1) \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{L^2}^2 + C \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 \\
& \quad + Ch^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 + Ch^{2(r_1+1)} (\|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2) \\
& \quad + C\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} (\|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2)) \\
& \quad + C\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \left( (1 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \right) \\
& \quad + C(1 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^4) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^4 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& \quad + C\|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2) \\
& \quad + C\|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 \left( (1 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^2) \|\xi_\phi^n\|_{H^1}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \right) \\
& \quad + C(1 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^2 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^4) \|\xi_\phi^n\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& \quad + C\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2) + C\|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 \\
& \quad + C\|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& \quad + C\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 + 1) (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2) \\
& \quad + C(\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2). \tag{118}
\end{aligned}$$

**Estimaciones para  $\mathbf{u}$ .** Tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}$  en (88),  $\bar{p} = \xi_p^{n+1}$  en (89), utilizando (65) y sumando las expresiones resultantes, obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha ((\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) \sigma_h^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
&= (\xi_w^{n+1} \nabla \phi(t^n), \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (w_h^{n+1} \nabla \xi_{\phi}^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \xi_{\sigma}^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
&- B(\xi_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) - (\delta_t \Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) - B(\Theta_{\mathbf{u}}^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
&- B(\mathbf{u}_h^n, \Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (\Theta_w^{n+1} \nabla \phi(t^n), \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (w_h^{n+1} \nabla \Theta_{\phi}^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
&- \alpha ((\nabla \cdot \Theta_{\sigma}^{n+1}) \sigma_h^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \Theta_{\sigma}^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) + (R_{\mathbf{u}}^{n+1}, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{12} S_i,
\end{aligned} \tag{119}$$

Observe que, usando las desigualdades de Hölder y Young, (53), (57) y (59), tenemos

$$\begin{aligned}
|S_1 + S_3 + S_8 + S_{11}| &\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma} \|\nabla \phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&+ \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})\|_{L^3}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|\sigma(t^n)\|_{H^{r_3+1}}^2) \\
&+ \frac{C}{\nu} h^{2(r_2+1)} \|\nabla \phi(t^n)\|_{L^3}^2 \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2,
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
|S_5| &\leq \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2} \|(\mathcal{I} - \mathbb{P}_{\mathbf{u}}) \delta_t \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^2} \leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} h^{2(r+1)} \|\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 \\
&\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu \Delta t} h^{2(r+1)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{H^{r+1}}^2 dt,
\end{aligned} \tag{121}$$

$$\begin{aligned}
|S_4 + S_6| &\leq (\|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{L^2} + \|\Theta_{\mathbf{u}}^n\|_{L^2}) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1} \\
&\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} (h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^{r+1}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{L^2}^2) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2.
\end{aligned} \tag{122}$$

Además, utilizando (53), (55), (57), (58) y (60)<sub>1</sub>, encontramos

$$\begin{aligned}
|S_2| &= |(\xi_w^{n+1} \nabla \xi_\phi^n, \xi_u^{n+1}) - (\mathbb{P}_w w(t^{n+1}) \nabla \xi_\phi^n, \xi_u^{n+1})| \\
&\leq \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^4} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^4} + \|\mathbb{P}_w w(t^{n+1})\|_{L^3} \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^2} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^6} \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^4}^8 + C \|w(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\nabla \xi_\phi^n\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
|S_7| &= |B(\xi_u^n, \Theta_u^{n+1}, \xi_u^{n+1}) - B(\mathbb{P}_u \mathbf{u}(t^n), \Theta_u^{n+1}, \xi_u^{n+1})| \\
&\leq \|\xi_u^n\|_{L^2} \|\Theta_u^{n+1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1} + \|\mathbb{P}_u \mathbf{u}(t^n)\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\Theta_u^{n+1}\|_{L^2} \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1} \\
&\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\xi_u^n\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2,
\end{aligned} \tag{124}$$

$$\begin{aligned}
|S_9| &= |(\xi_w^{n+1} \nabla \Theta_\phi^n, \xi_u^{n+1}) - (\mathbb{P}_w w(t^{n+1}) \nabla \Theta_\phi^n, \xi_u^{n+1})| \\
&\leq \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \Theta_\phi^n\|_{L^6} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^3} + \|\mathbb{P}_w w(t^{n+1})\|_{L^3} \|\nabla \Theta_\phi^n\|_{L^2} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^6} \\
&\leq \frac{\gamma}{12} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\gamma^2 \nu} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 \\
&\quad + \frac{C}{\nu} h^{2r_1} \|w(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2,
\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
|S_{10}| &= |\alpha((\nabla \cdot \Theta_\sigma^{n+1}) \xi_\sigma^n, \xi_u^{n+1}) - \alpha((\nabla \cdot \Theta_\sigma^{n+1}) \mathbb{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}(t^n), \xi_u^{n+1})| \\
&\leq \alpha \|\xi_\sigma^n\|_{L^2} \|\nabla \cdot \Theta_\sigma^{n+1}\|_{L^3} \|\xi_u^{n+1}\|_{L^6} + \alpha \|\mathbb{P}_\sigma \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\Theta_\sigma^{n+1}\|_{L^2} \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1} \\
&\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\xi_\sigma^n\|_{L^2}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} h^{2(r_3+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{H^2}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2,
\end{aligned} \tag{126}$$

$$\begin{aligned}
|S_{12}| &\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} \|\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_t(t^{n+1})\|_{(H^1)'}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\nu} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\nu} \|w(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \frac{\nu}{32} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{\nu} \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}_{tt}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt \\
&\quad + \frac{C}{\nu} \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + \frac{C}{\nu} \|w(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\alpha^2}{\nu} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^2}^2. \tag{127}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando (120)-(127) en (119), y teniendo en cuenta (58) y la hipótesis inductiva (98), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{3\nu}{4} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha ((\nabla \cdot \xi_{\boldsymbol{\sigma}}^{n+1}) \boldsymbol{\sigma}_h^n, \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}) \leq \frac{\gamma}{4} \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C \|\nabla \phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{L^3}^2 (\|\xi_{\boldsymbol{\sigma}}^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{H^{r_3+1}}^2) \\
&\quad + Ch^{2(r_2+1)} \|\nabla \phi(t^n)\|_{L^3}^2 \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 + C \frac{h^{2(r+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}_t(t)\|_{H^{r+1}}^2 dt \\
&\quad + C (h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^{r+1}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{L^2}^2) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 (\|\phi(t^n)\|_{H^2}^8 + 1) + C \|w(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\nabla \xi_{\phi}^n\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{L^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 + C \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 \\
&\quad + Ch^{2r_1} \|w(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + C \|\xi_{\boldsymbol{\sigma}}^n\|_{L^2}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r_3+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{H^2}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2 + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\mathbf{u}_{tt}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt \\
&\quad + C \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + C \|w(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\nabla(\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n))\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{L^3}^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^2}^2. \tag{128}
\end{aligned}$$

**Estimaciones para  $\sigma$ .** Tomando  $\bar{\sigma} = \alpha \xi_{\sigma}^{n+1}$  en (87), llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2} \delta_t \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\text{rot } \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& - \alpha (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) = \alpha (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \xi_{\sigma}^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& + \alpha (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \Theta_{\sigma}^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) - \alpha (\delta_t \Theta_{\sigma}^{n+1}, \xi_{\sigma}^{n+1}) + \alpha (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& + \alpha k (\Theta_{\sigma}^{n+1}, \xi_{\sigma}^{n+1}) + \alpha (R_{\sigma}^{n+1}, \xi_{\sigma}^{n+1}) = \sum_{i=1}^6 L_i.
\end{aligned} \tag{129}$$

De nuevo, utilizando las desigualdades de Hölder y Young, la norma equivalente en  $\mathbf{H}_{\sigma}^1(\Omega)$  dada en (7), y también (53) y (57), controlamos los términos de la parte derecha de (129) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
|L_1 + L_2| & \leq \alpha \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^{\infty}} \|\xi_{\sigma}^n + \Theta_{\sigma}^n\|_{L^2} \\
& \leq \frac{\alpha k}{6} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C\alpha}{k} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{H^{r_3+1}}^2),
\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
|L_3 + L_5| & \leq \alpha \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2} (\|(\mathcal{I} - \mathbb{P}_{\sigma}) \delta_t \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{L^2} + k \|\Theta_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}) \\
& \leq \frac{\alpha}{2} \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} C h^{2(r_3+1)} (\|\delta_t \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2 + k^2 \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2) \\
& \leq \frac{\alpha}{2} \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \frac{h^{2(r_3+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\boldsymbol{\sigma}_t(t)\|_{H^{r_3+1}}^2 dt \\
& + C h^{2(r_3+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2,
\end{aligned} \tag{131}$$

$$\begin{aligned}
|L_4| & = |\alpha (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \xi_{\sigma}^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) - \alpha (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbb{P}_{\sigma} \boldsymbol{\sigma}(t^n), \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1})| \\
& \leq \alpha \|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2} \|\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^{\infty}} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2} + \alpha \|\mathbb{P}_{\sigma} \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^{\infty}} \|\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2} \\
& \leq \frac{\alpha k}{6} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{C\alpha}{k} \|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \frac{C\alpha}{k} h^{2(r+1)} \|\boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{H^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2,
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}
|L_6| &\leq \frac{\alpha k}{4} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\text{rot } \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\alpha}{k} \|\delta_t \sigma(t^{n+1}) - \sigma_t(t^{n+1})\|_{(H^1)'}^2 + \frac{C\alpha}{k} \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \\
&\leq \frac{\alpha k}{6} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\text{rot } \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{C\alpha}{k} \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\sigma_{tt}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt + \frac{C\alpha}{k} \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2. \quad (133)
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando (130)-(133) en (129), tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{2} \delta_t \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha k}{2} \|\text{rot } \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 - \alpha (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
&\leq C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|\sigma(t^n)\|_{H^{r_3+1}}^2) + Ch^{2(r+1)} \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 \\
&\quad + C \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \frac{h^{2(r_3+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\sigma_t(t)\|_{H^{r_3+1}}^2 dt + Ch^{2(r_3+1)} \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2 \\
&\quad + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\sigma_{tt}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt + C \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C \|\xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2. \quad (134)
\end{aligned}$$

**Estimaciones para  $\theta$ .** Tomando  $\bar{\theta} = \xi_{\theta}^{n+1}$  en (90), y utilizando las desigualdades Hölder y Young, (53), (55), (57), (58), (66) y (95), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \delta_t \|\xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 + k \|\nabla \xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 = -(\delta_t \Theta_{\theta}^{n+1}, \xi_{\theta}^{n+1}) + k (\Theta_{\theta}^{n+1}, \xi_{\theta}^{n+1}) \\
&\quad - A(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} + \Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}, \theta(t^{n+1}), \xi_{\theta}^{n+1}) - A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \Theta_{\theta}^{n+1}, \xi_{\theta}^{n+1}) + (R_{\theta}^{n+1}, \xi_{\theta}^{n+1}) \\
&\leq \frac{1}{2} \|\xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2} \|\nabla \xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \frac{h^{2(r_4+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\theta_t(t)\|_{H^{r_4+1}}^2 dt \\
&\quad + Ch^{2(r_4+1)} \|\theta(t^{n+1})\|_{H^{r_4+1}}^2 + C \left( \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 \right) \|\theta(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r_4+1)} \|\theta(t^{n+1})\|_{H^{r_4+1}}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_{\theta}^{n+1}\|_{L^2}^2 \|\theta(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\theta_{tt}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt. \quad (135)
\end{aligned}$$

**Demostración del Teorema 3.2.1.** Añadiendo (114), (118), (128), (134) y (135), multiplicando la expresión resultante por  $\Delta t$ , sumando desde  $k = 0$  hasta  $k = n + 1$ , asumiendo una regularidad suficiente para la solución exacta de (47), recordando que  $[\xi_\phi^0, \xi_u^0, \xi_\sigma^0, \xi_\theta^0] = [0, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0]$ , y utilizando las siguientes estimaciones clásicas

$$\Delta t \sum_{m=1}^r \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{H^1}^2 \leq C(\Delta t)^2 \|\phi_t\|_{L^2(H^1)}^2$$

y

$$\Delta t \sum_{n=1}^r \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n), \boldsymbol{\sigma}(t^{n+1}) - \boldsymbol{\sigma}(t^n)\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta t)^2 \|\mathbf{u}_t, \boldsymbol{\sigma}_t\|_{L^2(L^2)}^2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} & \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\sigma^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ & + \Delta t \sum_{k=1}^n \left( \|\nabla \xi_u^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \xi_\sigma^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \xi_\sigma^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^{k+1}\|_{L^2}^2 \right. \\ & \left. + \|\delta_t \xi_\phi^{k+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \xi_\theta^{k+1}\|_{L^2}^2 \right) \\ & \leq C_1(\Delta t)^2 + C_2(h^{2r_1} + h^{2(r_1+1)} + h^{2(r_2+1)} + h^{2(r_3+1)} + h^{2(r_4+1)} + h^{2(r+1)}) \\ & + C_3 \Delta t \sum_{k=1}^n \left( \|\xi_\phi^k\|_{H^1}^2 + \|\xi_u^k\|_{L^2}^2 + \|\xi_\sigma^k\|_{L^2}^2 + \|\xi_\theta^k\|_{L^2}^2 \right) \\ & + C_4 \Delta t \left( \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + \|\xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\sigma^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (136)$$

Por lo tanto, si  $\Delta t$  es lo suficientemente pequeño como para que  $\frac{1}{2} - C_4 \Delta t > 0$ , aplicando el Lema de Gronwall discreto a (136), concluimos (101).

**Demostración del Teorema 3.2.2.** Ahora, demostraremos (102). Tomando  $\bar{\phi} = -\gamma A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}$  en (86) y teniendo en cuenta la definición de  $A_h^\phi$  dada en (99), obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon \|A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 &= \gamma \varepsilon \left( \xi_\phi^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1} \right) - \gamma (G^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) \\ &\quad - \gamma (G_h^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) + \frac{\gamma}{\varepsilon} (\xi_\phi^n, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) + \gamma \left( \Theta_w^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1} \right) + \frac{\gamma}{\varepsilon} (\Theta_\phi^n, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) \\ &\quad + \frac{\gamma}{\varepsilon} (\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n), A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) + \varepsilon \gamma (\Theta_\phi^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}) + \gamma \left( \xi_w^{n+1}, A_h^\phi \xi_\phi^{n+1} \right). \end{aligned} \quad (137)$$

Entonces, acotando el lado derecho de (137) de la misma forma que se hizo en (115) (ver (116)-(118)), llegamos a

$$\begin{aligned} \gamma \varepsilon \|A_h^\phi \xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\gamma \varepsilon}{2} \left\| A_h^\phi \xi_\phi^{n+1} \right\|_{L^2}^2 + C (\|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 + \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 + 1) \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_2+1)} \|w(t^{n+1})\|_{H^{r_2+1}}^2 + Ch^{2(r_1+1)} (\|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2) \\ &\quad + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} (\|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2)) \\ &\quad + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \left( (1 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \right) \\ &\quad + C (1 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2 + \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^4) \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^4 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \\ &\quad + C \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^4 (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2) \\ &\quad + C \|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 \left( (1 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^2) \|\xi_\phi^n\|_{H^1}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^2}^2 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \right) \\ &\quad + C (1 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^2 + \|\phi(t^n)\|_{H^1}^4) \|\xi_\phi^n\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^2}^4 \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2 \\ &\quad + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2) + C \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 \\ &\quad + C \|\phi(t^{n+1})\|_{H^1}^2 \|\xi_\phi^{n+1}\|_{H^1}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2 \\ &\quad + C \|\phi(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\phi(t^n)\|_{L^\infty}^2 + 1) (\|\xi_\phi^n\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^n)\|_{H^{r_1+1}}^2) \\ &\quad + C (\|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|\phi(t^{n+1})\|_{H^{r_1+1}}^2) + C \|\xi_\phi^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (138)$$

Por lo tanto, multiplicando (138) por  $\Delta t$ , sumando desde  $k = 0$  hasta  $k = n + 1$  y utilizando las estimaciones de error en normas débiles obtenidas en el Teorema 3.2.1, concluimos (102).

**Validez de la hipótesis inductiva (98).** Por último, comprobaremos que (98) es verdadera utilizando una estrategia inductiva. Primero, observe que se cumple  $\|\mathbb{P}_\phi \phi(t^n)\|_{W^{1,4}} \leq \|\phi\|_{L^\infty(W^{1,4})} := C_0$  para todo  $n \geq 0$ ; y por lo tanto, tenemos que

$$\|\phi_h^0\|_{W^{1,4}} = \|\mathbb{P}_\phi \phi_0\|_{W^{1,4}} \leq C_0 \leq C_0 + 1 := K. \quad (139)$$

Ahora, demostraremos que, si  $\Delta t$  y  $h$  son lo suficientemente pequeños, (139) implica que

$$\|\phi_h^1\|_{W^{1,4}} \leq K. \quad (140)$$

Observe que  $\|\phi_h^1\|_{W^{1,4}} \leq \|\xi_\phi^1\|_{W^{1,4}} + \|\mathbb{P}_\phi \phi(t^1)\|_{W^{1,4}}$ , y entonces, sólo tenemos que demostrar que  $\|\xi_\phi^1\|_{W^{1,4}} \leq 1$ . Para ello, consideramos dos casos: Primero, si  $\frac{(\Delta t)^{1/2}}{h^{3/4}} \leq C$ , podemos utilizar la desigualdad inversa  $\|\xi_c^1\|_{W^{1,4}} \leq h^{-3/4} \|\xi_c^1\|_{H^1}$ , definiendo  $h_{\text{máx}} := \text{máx}\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} = h^k$  (para algún  $k \geq 1$ ), y del cálculo de la norma  $l^\infty(H^1)$  en (101) para  $n = 0$  (en el que sólo hemos utilizado  $\|\phi_h^0\|_{W^{1,4}} \leq K$ , es decir, (139)), obtenemos

$$\|\xi_\phi^1\|_{W^{1,4}} \leq \frac{1}{h^{3/4}} \|\xi_\phi^1\|_{H^1} \leq C(T, \|\phi_h^0\|_{W^{1,4}}) \frac{1}{h^{3/4}} (\Delta t + h_{\text{máx}}) \leq C(T, K) (C(\Delta t)^{1/2} + h^{k-3/4}). \quad (141)$$

En caso contrario, si  $\frac{(\Delta t)^{1/2}}{h^{3/4}}$  no está acotada, entonces  $\frac{h_{\text{máx}}^{3/2}}{\Delta t} \leq \frac{h^{3/2}}{\Delta t} \leq C$ ; por lo tanto, de (102) para  $n = 0$  (utilizando la estimación (100)), tenemos

$$\|\xi_\phi^1\|_{W^{1,4}}^2 \leq \|A_h \xi_\phi^1\|_{L^2}^2 \leq C(T, \|\phi_h^0\|_{W^{1,4}}) \frac{1}{\Delta t} ((\Delta t)^2 + h_{\text{máx}}^2) \leq C(T, K) (\Delta t + C h_{\text{máx}}^{1/2}). \quad (142)$$

En cualquier caso, suponiendo  $\Delta t$  y  $h$  suficientemente pequeños, concluimos que  $\|\xi_\phi^1\|_{W^{1,4}} \leq 1$ , lo que implica (140). Análogamente, utilizando  $\|\phi_h^1\|_{W^{1,4}} \leq K$ , podemos obtener  $\|\xi_\phi^2\|_{W^{1,4}} \leq 1$ , y así,  $\|\phi_h^2\|_{W^{1,4}} \leq K$ . Argumentando recursivamente concluimos que  $\|\phi_h^n\|_{W^{1,4}} \leq K$ , para todo  $n \geq 0$ .

**3.2.2. Estimaciones de error adicionales en normas fuertes para  $[u, \sigma, p, \theta]$ .** Aquí, obtenemos algunas estimaciones de error óptimas adicionales en normas fuertes asociadas al esquema (72)-(73). En este caso, planteamos la siguiente hipótesis inductiva: existe una constante positiva  $C > 0$ , independiente de  $n$ , tal que

$$\|\phi_h^n\|_{W^{1,\infty}} \leq C, \quad \forall n \geq 1. \quad (143)$$

Además, consideramos el operador  $B_h : \mathbf{H}_\sigma^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\sigma$  definido por

$$(B_h \sigma, \bar{\sigma}) = (\nabla \cdot \sigma, \nabla \cdot \bar{\sigma}) + (\text{rot } \sigma, \text{rot } \bar{\sigma}) + (\sigma, \bar{\sigma}), \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathcal{X}_\sigma, \quad (144)$$

que satisface (ver Lema 3.1 <sup>28</sup>)

$$\|\sigma_h\|_{W^{1,6}} \leq C \|B_h \sigma_h\|_{L^2}, \quad \forall \sigma_h \in \mathcal{X}_\sigma. \quad (145)$$

Así, podemos demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.2.4.** *Asuma (143). Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.1, se cumple la siguiente estimación para los errores discretos*

$$\|[\xi_u^{n+1}, \xi_\sigma^{n+1}, \xi_\theta^{n+1}]\|_{l^\infty(H^1) \cap l^2(W^{1,6})} + \|\xi_p^{n+1}\|_{l^2(L^6)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3}, h^{r_4}, h^r\} \right), \quad (146)$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $n, \Delta t$  y  $h$ .

*Demostración.* En primer lugar, obtendremos las siguientes estimaciones fuertes uniformes preliminares:

$$\|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^4 \leq C, \quad \|\xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^4 \leq C \quad \text{y} \quad \|\xi_\sigma^{n+1}\|_{H^1}^4 \leq C, \quad \forall n \geq 0. \quad (147)$$

De hecho, recordando que  $h_{max} := \max\{h^{r_1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\}$ , de la estima-

ción (101) tenemos

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^4 \leq C(T) \left( \Delta t + \frac{1}{\Delta t} h_{max}^2 \right)^2,$$

y por lo tanto, concluimos (147)<sub>1</sub> bajo la hipótesis

$$\frac{h_{max}^2}{\Delta t} \leq C. \quad (148)$$

Por otro lado, de (101) también tenemos que  $\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq C(T) \left( (\Delta t)^2 + h_{max}^2 \right)$  para cada  $n$ . Por lo tanto, utilizando la desigualdad inversa  $\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1} \leq h^{-1} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}$  obtenemos

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^4 \leq C(T) \frac{1}{h^4} \left( (\Delta t)^4 + h_{max}^4 \right).$$

Por lo tanto, concluimos (147)<sub>1</sub> bajo la hipótesis

$$\frac{(\Delta t)^4}{h^4} \leq C. \quad (149)$$

Por tanto, si  $\Delta t$  y  $h$  son menores o iguales que 1, concluimos (147)<sub>1</sub> porque para cualquier elección de  $[\Delta t, h]$  ya sea (148) o (149) se tiene. Análogamente, podemos deducir (147)<sub>2,3</sub>.

Ahora, tomando  $\bar{\sigma} = B_h \xi_{\sigma}^{n+1}$  in (87), utilizando la definición del operador  $B_h$  dada en (144), teniendo en cuenta (53), (57), y procediendo como en los apartados

anteriores, tenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{H^1}^2 + k \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 = k (\xi_{\sigma}^{n+1}, B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& + (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \xi_{\sigma}^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) - (\delta_t \Theta_{\sigma}^{n+1}, B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) + (\mathbf{u}(t^{n+1}) \cdot \Theta_{\sigma}^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& + (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) + k(\Theta_{\sigma}^{n+1}, B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) + (R_{\sigma}^{n+1}, B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& + (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) \\
& \leq \frac{k}{4} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{L^{\infty} \cap W^{1,3}}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 + h^{2r_3} \|\sigma(t^n)\|_{H^{r_3+1}}^2) \\
& + C \frac{h^{2(r_3+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\sigma_t(t)\|_{H^{r_3+1}}^2 dt + C h^{2(r_3+1)} \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^{r_3+1}}^2 \\
& + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\sigma_{tt}(t)\|_{L^2}^2 dt + C \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
& + |(\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})| + |(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})|. \tag{150}
\end{aligned}$$

Acotamos los dos últimos sumandos en (150) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& |(\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})| = |(\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \xi_{\sigma}^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) - (\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbb{P}_{\sigma} \sigma(t^n), \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})| \\
& \leq \frac{k}{4} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 + C h^{2r} \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 \\
& \tag{151}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& |(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})| = |(\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \xi_{\sigma}^n, \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1}) - (\xi_{\mathbf{u}}^{n+1} \cdot \mathbb{P}_{\sigma} \sigma(t^n), \nabla \cdot B_h \xi_{\sigma}^{n+1})| \\
& \leq \frac{k}{4} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 + C \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{W^{1,6}} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1} \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 \\
& + C \|\xi_{\sigma}^n\|_{W^{1,6}} \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 \\
& \leq \frac{k}{4} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{k}{16} \|B_h \xi_{\sigma}^n\|_{L^2}^2 + \frac{\tau_1}{3} \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{W^{1,6}}^2 + C \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 \\
& + C \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^4 + C \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^4. \tag{152}
\end{aligned}$$

Además, al tomar  $\bar{\theta} = A_h^{\theta} \xi_{\sigma}^{n+1}$  en (90), utilizando la definición del operador  $A_h^{\theta}$  dada

en (99), teniendo en cuenta (53), (57), y procediendo como arriba, llegamos a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^2 + k \|A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 = k (\xi_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) \\
& \quad - (\delta_t \Theta_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) + k (\Theta_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) - A(\xi_u^{n+1} + \Theta_u^{n+1}, \theta(t^{n+1}), A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) \\
& \quad - A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \xi_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) - A(\mathbf{u}_h^{n+1}, \Theta_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) + (R_\theta^{n+1}, A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}) \\
& \leq \frac{k}{2} \|A_h^\theta \xi_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \|\xi_\theta^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\tau_1}{3} \|\xi_u^{n+1}\|_{W^{1,6}}^2 + C \frac{h^{2(r_4+1)}}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\theta_t(t)\|_{H^{r_4+1}}^2 dt \\
& \quad + C h^{2(r_4+1)} \|\theta(t^{n+1})\|_{H^{r_4+1}}^2 + C (h^{2r} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^{r+1}}^2 + \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2) \|\theta(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
& \quad + C \|\theta(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 + C (\|\xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^2 + h^{2r_4} \|\theta(t^{n+1})\|_{H^{r_4+1}}^2) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
& \quad + C \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 \|\xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^4 + C \|\xi_\theta^{n+1}\|_{H^1}^2 \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^4 + C \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\theta_{tt}(t)\|_{L^2}^2 dt. \quad (153)
\end{aligned}$$

Por otra parte, sustrayendo (89) en el tiempo  $t = t^n$  de (89) en el tiempo  $t = t^{n+1}$ , obtenemos

$$(\bar{p}, \nabla \cdot \delta_t \xi_u^{n+1}) = 0 \quad \forall \bar{p} \in \mathcal{X}_p. \quad (154)$$

Entonces, tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \delta_t \xi_u^{n+1}$  en (88),  $\bar{p} = \xi_p^{n+1}$  en (154) y sumando las expresiones resultantes, los términos  $(\xi_p^{n+1}, \nabla \cdot \delta_t \xi_u^{n+1})$  se cancelan y obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2} \delta_t \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 + \nu \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 + \|\delta_t \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 = -\alpha ((\nabla \cdot \xi_\sigma^{n+1}) \sigma_h^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) \\
& \quad + (\xi_w^{n+1} \nabla \phi_h^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) + (w(t^{n+1}) \nabla \xi_\phi^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \xi_\sigma^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) \\
& \quad - B(\xi_u^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \delta_t \xi_u^{n+1}) - (\delta_t \Theta_u^{n+1}, \delta_t \xi_u^{n+1}) - B(\Theta_u^n, \mathbf{u}(t^{n+1}), \delta_t \xi_u^{n+1}) \\
& \quad - B(\mathbf{u}_h^n, \xi_u^{n+1}, \delta_t \xi_u^{n+1}) - B(\mathbf{u}_h^n, \Theta_u^{n+1}, \delta_t \xi_u^{n+1}) + (\Theta_w^{n+1} \nabla \phi_h^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) \\
& \quad + (w(t^{n+1}) \nabla \Theta_\phi^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) - \alpha ((\nabla \cdot \Theta_\sigma^{n+1}) \sigma_h^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) - \alpha ((\nabla \cdot \sigma(t^{n+1})) \Theta_\sigma^n, \delta_t \xi_u^{n+1}) \\
& \quad + (R_u^{n+1}, \delta_t \xi_u^{n+1}) := (g, \delta_t \xi_u^{n+1}) \leq \frac{1}{2} (\|\delta_t \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2). \quad (155)
\end{aligned}$$

Argumentando como en las secciones anteriores, podemos acotar  $\|g\|_{L^2}$  de la si-

guiente manera: observe que, para todo  $\varphi \in L^2$ , tenemos

$$\begin{aligned}
|(g, \varphi)| \leq & C \left( \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{W^{1,6}}^{1/2} \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{H^1}^{1/2} \|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1} + (\|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2} + \|\nabla \cdot \Theta_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}) \|\sigma(t^n)\|_{H^2} \right. \\
& + (\|\xi_w^{n+1}\|_{L^2} + \|\Theta_w^{n+1}\|_{L^2}) \|\nabla \phi_h^n\|_{L^\infty} + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty} (\|\nabla \xi_{\phi}^n\|_{L^2} + \|\nabla \Theta_{\phi}^n\|_{L^2}) \\
& + (\|\xi_u^n\|_{H^1} + \|\Theta_u^n\|_{H^1}) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2} + \|\delta_t \Theta_u^{n+1}\|_{L^2} \\
& + \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^2} (\|\xi_u^{n+1}\|_{H^1} + \|\Theta_u^{n+1}\|_{H^1}) + \|\xi_u^n\|_{H^1} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2} \\
& + \|\xi_u^n\|_{W^{1,6}}^{1/2} \|\xi_u^n\|_{H^1}^{1/2} \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1} + \|\xi_u^{n+1}\|_{W^{1,6}}^{1/2} \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^{1/2} \|\xi_u^n\|_{H^1} \\
& + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2} (\|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1} + \|\Theta_{\sigma}^n\|_{H^1}) + \|\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_t(t^{n+1})\|_{L^2} \\
& + \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{H^1} \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2} + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty} \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{H^1} \\
& \left. + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2} \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{H^1} \right) \|\varphi\|_{L^2}. \tag{156}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando  $\|g\|_{L^2} = \sup\{|(g, \varphi)| : \varphi \in L^2(\Omega), \|\varphi\|_{L^2} \leq 1\}$ , de (155)-(156) (teniendo en cuenta (143), (145) y (147)), llegamos a

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{2} \delta_t \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq & \frac{1}{2} \|g\|_{L^2}^2 \leq \frac{k}{8} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + C \left( \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{H^1}^2 \right. \\
& + \|\delta_t \Theta_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + (\|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \Theta_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2) \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 + \|\Theta_w^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\nabla \xi_{\phi}^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Theta_{\phi}^n\|_{L^2}^2) + (\|\xi_u^n\|_{H^1}^2 + \|\Theta_u^n\|_{H^1}^2) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \\
& + \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^2}^2 (\|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 + \|\Theta_u^{n+1}\|_{H^1}^2) + \|\xi_u^n\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \Big) \\
& + \frac{\tau_1}{3} (\|\xi_u^n\|_{W^{1,6}}^2 + \|\xi_u^{n+1}\|_{W^{1,6}}^2) + C \left( \|\xi_u^n\|_{H^1}^2 + \|\xi_u^{n+1}\|_{H^1}^2 \right. \\
& + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 + \|\Theta_{\sigma}^n\|_{H^1}^2) + \|\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_t(t^{n+1})\|_{L^2}^2 \\
& + \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{H^1}^2 \\
& \left. + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{H^1}^2 \right). \tag{157}
\end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 11 de <sup>27</sup> a (88)-(89), obtenemos

$$\|[\xi_u^{n+1}, \xi_p^{n+1}]\|_{W^{1,6} \times L^6}^2 \leq C (\|\delta_t \xi_u^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2), \tag{158}$$

y así, sumando (157) con (158)  $\times \tau_2$  (para  $0 < \tau_2 < 1$ ), obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\nu}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \tau_2 \|[\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}, \xi_p^{n+1}]\|_{W^{1,6} \times L^6}^2 \leq \frac{k}{8} \|B_h \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& + C \left( \tau_2 \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_{\sigma}^{n+1}\|_{H^1}^2 + (\|\nabla \cdot \xi_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \Theta_{\sigma}^{n+1}\|_{L^2}^2) \|\sigma(t^n)\|_{H^2}^2 \right. \\
& + \|\Theta_w^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 (\|\nabla \xi_{\phi}^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla \Theta_{\phi}^n\|_{L^2}^2) \\
& + (\|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{H^1}^2 + \|\Theta_{\mathbf{u}}^n\|_{H^1}^2) \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \|\mathbf{u}(t^n)\|_{H^2}^2 (\|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 + \|\Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2) \\
& + \|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \Big) + \frac{\tau_1}{3} (\|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{W^{1,6}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{W^{1,6}}^2) + C \left( \|\xi_{\mathbf{u}}^n\|_{H^1}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{H^1}^2 \right. \\
& + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2}^2 (\|\xi_{\sigma}^n\|_{H^1}^2 + \|\Theta_{\sigma}^n\|_{H^1}^2) + \|\delta_t \mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}_t(t^{n+1})\|_{L^2}^2 \\
& + \|\mathbf{u}(t^{n+1}) - \mathbf{u}(t^n)\|_{H^1}^2 \|\mathbf{u}(t^{n+1})\|_{H^2}^2 + \|\delta_t \Theta_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^{n+1}\|_{L^2}^2 \\
& \left. + \|w(t^{n+1})\|_{L^\infty}^2 \|\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)\|_{H^1}^2 + \|\sigma(t^{n+1})\|_{H^2}^2 \|\sigma(t^{n+1}) - \sigma(t^n)\|_{H^1}^2 \right). \quad (159)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando (151)-(152) en (150), sumando la expresión resultante con (153) y (159), considerando  $\tau_2 > 0$  lo suficientemente pequeño como para absorber el término  $C\tau_2 \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^{n+1}\|_{L^2}^2$  a la derecha, y  $\tau_1 > 0$  suficientemente pequeño con respecto a  $\tau_2$ , y usando (53), (57), (59), (100), (101), (145) y (147), podemos concluir (146).

□

## 4. SIMULACIONES NUMÉRICAS

El objetivo de esta sección es verificar numéricamente la propiedad de estabilidad energética del esquema numérico, las estimaciones de error demostradas en el análisis teórico y observar la dinámica del modelo (1)-(2). El esquema numérico (72) es un sistema algebraico no lineal, por lo que utilizamos un método tipo punto fijo para aproximarlo. Todos los resultados numéricos se computan utilizando el software **Freefem++**. En todas las simulaciones hemos considerado espacios de elementos finitos para  $\phi, w, \theta, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$  y  $p$  generados por  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1 - \text{bubble}, \mathbb{P}_1$  y  $\mathbb{P}_1$ , respectivamente; y el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ .

### 4.1. ESTABILIDAD ENERGÉTICA

Recordemos que se demostró que el esquema (72) es energéticamente estable en el sentido de que se cumple la ley de la energía discreta disipativa (75). Por tanto, en este primer experimento comprobaremos numéricamente el comportamiento de la energía discreta

$$\mathcal{E}^{n+1} := \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \phi_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} F(\phi_h^{n+1}) d\mathbf{x}, \quad (160)$$

y el correspondiente residuo discreto

$$RE^{n+1} = \delta_t \mathcal{E}^{n+1} + \gamma \|w_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + k\alpha \|\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \alpha k \|\text{rot } \boldsymbol{\sigma}_h^{n+1}\|_{L^2}^2. \quad (161)$$

Con este fin, consideramos los siguientes valores para los parámetros  $\nu = 0.05, \alpha = 0.5, k = 0.3, \gamma = 0.2, \varepsilon = 0.02, \Delta t = 0.001$  y  $h = 1/100$ , y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0 &= [22\pi \cos(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5)), -22\pi \sin(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5))], \\ \theta_0 &= 100\pi \sin(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)), \\ \boldsymbol{\sigma}_0 &= [100\pi^2 \cos(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)), -100\pi^2 \sin(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5))], \\ \phi_0 &= 1 - \phi_1 - \phi_2,\end{aligned}$$

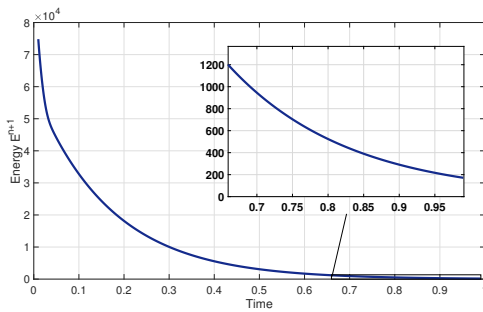
con

$$\phi_1 = \tanh\left(\frac{\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.3)^2} - 0.18}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)$$

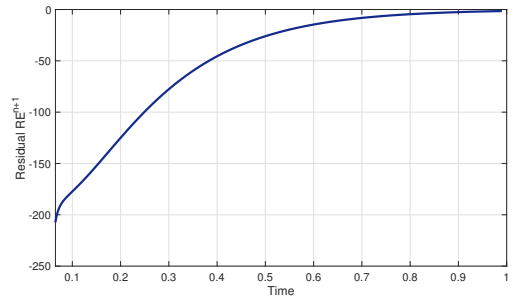
y

$$\phi_2 = \tanh\left(\frac{\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.7)^2} - 0.18}{\varepsilon\sqrt{2}}\right).$$

Observamos que el esquema (72) satisface la propiedad de energía decreciente en el tiempo  $\mathcal{E}^{n+1} \leq \mathcal{E}^n$  para todo  $n \geq 0$  (ver Figura 1(a)), y la desigualdad de energía discreta  $RE^{n+1} \leq 0$  para  $RE^{n+1}$  definido en (161) (ver Figura 1(b)), que concuerdan con los resultados obtenidos en el Teorema 3.1.3.



(a) Comportamiento de la energía  $\mathcal{E}^{n+1}$ .



(b) Comportamiento del residuo discreto  $RE^{n+1}$ .

Figura 1. Estabilidad energética del sistema (72).

## 4.2. ESTIMACIONES DE ERRORES

En esta prueba, consideramos el esquema (72)-(73) con segundos miembros adecuados correspondientes a la solución exacta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= e^{-t}[\sin(2\pi y)(-\cos(2\pi x + \pi) - 1), \sin(2\pi x)(\cos(2\pi y + \pi) + 1)], \\
 \theta &= e^{-t}(\sin(2\pi y) + \cos(2\pi x) - 2\pi y + 9), \\
 \boldsymbol{\sigma} &= 2\pi e^{-t}[-\sin(2\pi x), \cos(2\pi y) - 1], \\
 \phi &= \cos(2\pi y) \sin(2\pi x + \pi/2) \cos(t), \\
 p &= e^{-t}(\cos(2\pi x) + \sin(2\pi y)),
 \end{aligned} \tag{162}$$

y los siguientes valores para los parámetros:  $\varepsilon = 0.01$  y el resto de parámetros en (72)-(73) iguales a 1. Note que  $\mathbf{u} = 0$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$  y  $\int_{\Omega} p = 0$ . Además, utilizamos una partición uniforme con  $m + 1$  nodos en cada dirección.

Los resultados numéricos de las tasas de convergencia espacial se presentan en las Tablas 1-4 para  $\Delta t = 5 \times 10^{-7}$  con respecto al tiempo final  $T = 0.001$ . Observamos tasas de convergencia óptimas para los errores totales  $e_{\mathbf{u}}^{n+1}$ ,  $e_{\theta}^{n+1}$  y  $e_{\phi}^{n+1}$ , es decir, convergencia de orden 2 en norma  $l^{\infty}(L^2)$  y convergencia de orden 1 en norma  $l^{\infty}(H^1)$ , lo que concuerda con nuestro análisis teórico.

$m \times m$	$\ e_{\mathbf{u}_1}^{n+1}\ _{l^{\infty}(L^2)}$	Orden	$\ e_{\mathbf{u}_1}^{n+1}\ _{l^{\infty}(H^1)}$	Orden
$16 \times 16$	$9.3874 \times 10^{-3}$	-	1.2437	-
$20 \times 20$	$5.8734 \times 10^{-3}$	2.1015	$9.4777 \times 10^{-1}$	1.2181
$26 \times 26$	$3.4086 \times 10^{-3}$	2.0739	$7.3603 \times 10^{-1}$	0.9637
$32 \times 32$	$2.2550 \times 10^{-3}$	1.9898	$5.9693 \times 10^{-1}$	1.0088

Tabla 1. Tasas de convergencia en espacio para  $\mathbf{u}_1$ .

$m \times m$	$\ e_{u_2}^{n+1}\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ e_{u_2}^{n+1}\ _{l^\infty(H^1)}$	Orden
$16 \times 16$	$9.3320 \times 10^{-3}$	-	1.1930	-
$20 \times 20$	$5.9420 \times 10^{-3}$	2.0229	$9.6154 \times 10^{-1}$	0.9667
$26 \times 26$	$3.4284 \times 10^{-3}$	2.0961	$7.2320 \times 10^{-1}$	1.0857
$32 \times 32$	$2.2503 \times 10^{-3}$	2.0277	$5.8479 \times 10^{-1}$	1.0231

Tabla 2. Tasas de convergencia en espacio para  $u_2$ .

$m \times m$	$\ e_\phi^{n+1}\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ e_\phi^{n+1}\ _{l^\infty(H^1)}$	Orden
$16 \times 16$	$1.2326 \times 10^{-2}$	-	$6.8601 \times 10^{-1}$	-
$20 \times 20$	$8.0325 \times 10^{-3}$	1.9192	$5.4996 \times 10^{-1}$	0.9906
$26 \times 26$	$4.6776 \times 10^{-3}$	2.0609	$4.1986 \times 10^{-1}$	1.0288
$32 \times 32$	$3.0357 \times 10^{-3}$	2.0823	$3.3632 \times 10^{-1}$	1.0685

Tabla 3. Tasas de convergencia en espacio para  $\phi$ .

$m \times m$	$\ e_\theta^{n+1}\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ e_\theta^{n+1}\ _{l^\infty(H^1)}$	Orden
$16 \times 16$	$1.2462 \times 10^{-2}$	-	$6.8587 \times 10^{-1}$	-
$20 \times 20$	$8.0613 \times 10^{-3}$	1.9524	$5.4520 \times 10^{-1}$	1.0286
$26 \times 26$	$4.7445 \times 10^{-3}$	2.0204	$4.2069 \times 10^{-1}$	0.9882
$32 \times 32$	$3.0589 \times 10^{-3}$	2.1138	$3.4104 \times 10^{-1}$	1.0108

Tabla 4. Tasas de convergencia en espacio para  $\theta$ .

### 4.3. DINÁMICA DEL MODELO

En esta sección presentamos los resultados de dos experimentos numéricos realizados con el objetivo de observar la dinámica de separación de fases del sistema (1)-(2).

**4.3.1. Efecto "diagonal".** Para este experimento, consideramos los siguientes valores para los parámetros:  $\nu = 0.05$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.001$  y  $h = 1/100$ , y las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0 &= [22\pi \cos(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5)), -22\pi \sin(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5))], \\ \theta_0 &= 100\pi \sin(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)), \\ \boldsymbol{\sigma}_0 &= [100\pi^2 \cos(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)), -100\pi^2 \sin(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5))], \\ \phi_0 &= 1 - \phi_1 - \phi_2,\end{aligned}$$

con

$$\phi_1 = \tanh\left(\frac{\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.3)^2} - 0.18}{\varepsilon\sqrt{2}}\right)$$

y

$$\phi_2 = \tanh\left(\frac{\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.7)^2} - 0.18}{\varepsilon\sqrt{2}}\right).$$

En la representación gráfica proporcionada en la Figura 2, se puede observar de manera clara el dinámico comportamiento de las fases en un intervalo temporal. Específicamente, se destaca la transición progresiva adquiriendo una peculiar forma diagonal.

**4.3.2. Efecto "mariposa".** Para este experimento, consideramos los siguientes valores para los parámetros:  $\nu = 0.05$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 0.3$ ,  $\gamma = 0.2$ ,  $\varepsilon = 0.02$ ,  $\Delta t = 0.005$

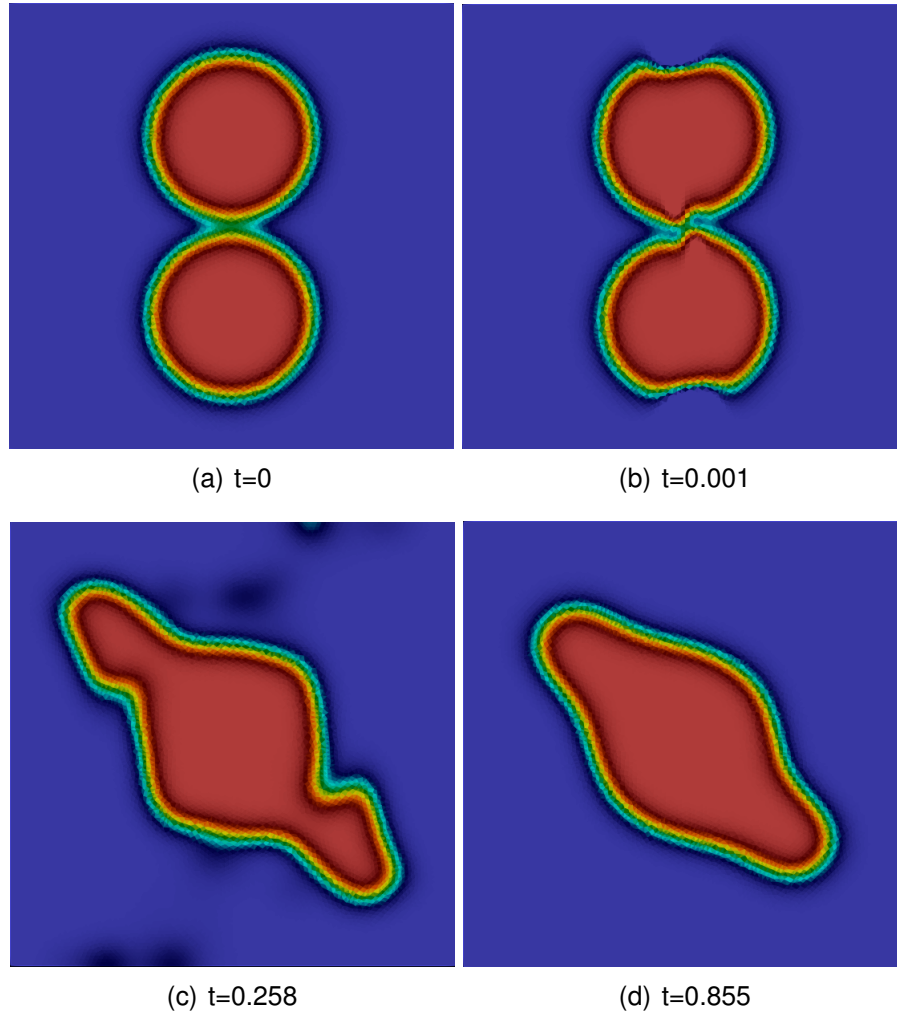


Figura 2. Evolución en el tiempo de la función campo de fase  $\phi$ .

y  $h = 1/100$ , y las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}_0 = [0, 0],$$

$$\theta_0 = 100\pi \sin(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)),$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = [100\pi^2 \cos(\pi(x - 0.5)) \cos(\pi(y - 0.5)), -100\pi^2 \sin(\pi(x - 0.5)) \sin(\pi(y - 0.5))],$$

$$\phi_0 = 1 - \phi_1,$$

con

$$\phi_1 = \tanh \left( \frac{\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} - 0.18}{\varepsilon\sqrt{2}} \right).$$

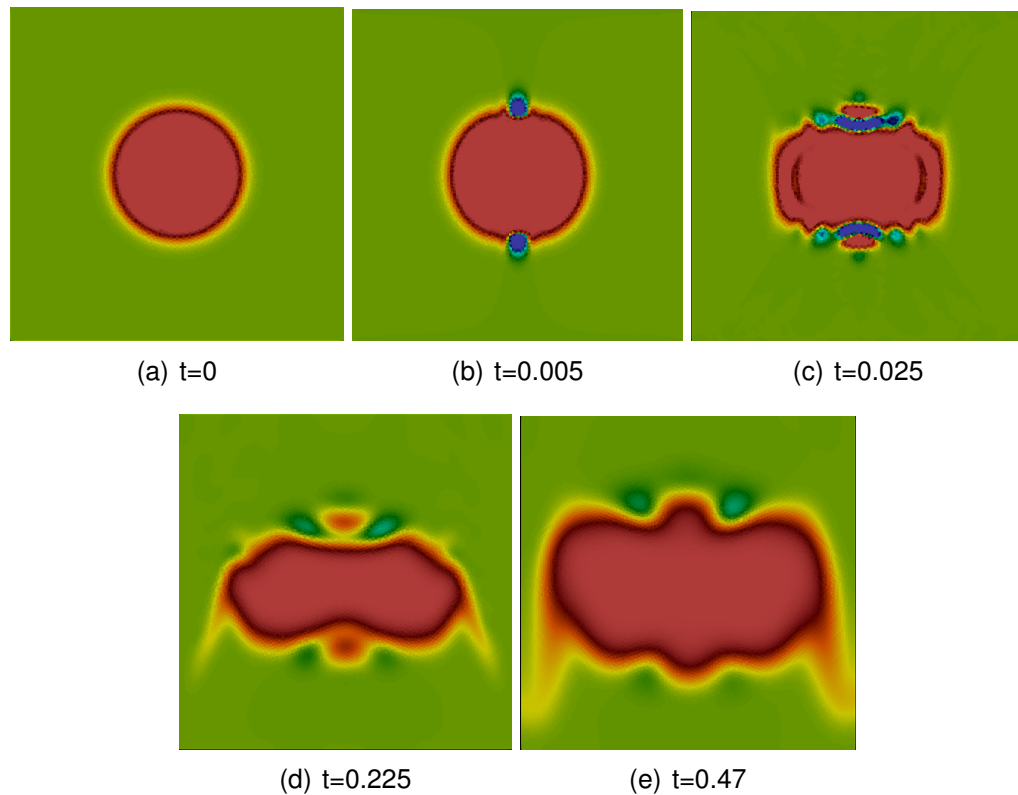


Figura 3. Evolución en el tiempo de la función campo de fase  $\phi$  tomando a  $u_0 = 0$ .

Observe detenidamente el patrón de comportamiento exhibido por las fases en la Figura 3. Es evidente cómo una de estas fases experimenta una transformación notable, adoptando una intrigante forma semejante a la de una mariposa a medida que progresa el tiempo.

## 5. CONCLUSIONES

A partir de los resultados obtenidos en el presente trabajo, es posible enunciar las siguientes conclusiones:

- Se realizó un estudio teórico y numérico de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales tipo Allen-Cahn-Navier-Stokes para fluidos no isotérmicos.
- Se diseñó un esquema completamente discreto para la aproximación de las soluciones del modelo bajo estudio, usando los métodos de diferencias finitas en tiempo y elementos finitos en espacio, considerando un sistema de EDP equivalente.
- Se probó el buen planteamiento del esquema numérico, la propiedad de estabilidad energética (proveniente del problema continuo) y algunas estimaciones uniformes para las variables discretas (independientes de los parámetros discretos). Así mismo, se realizó el correspondiente análisis de convergencia hacia soluciones regulares del problema continuo bajo estudio, probando estimaciones de error óptimas (en normas débiles y fuertes) en tiempo y en espacio.
- Se presentaron los resultados de tres experimentos numéricos realizados para validar el buen comportamiento del esquema numérico estudiado. El primer experimento valida la propiedad de estabilidad energética demostrada para el esquema, el segundo experimento corrobora numéricamente las tasas de convergencia probadas teóricamente, y el tercer experimento permite observar la dinámica del modelo bajo estudio.

- Los resultados obtenidos en esta tesis están consignados en el manuscrito <sup>29</sup>.

---

<sup>29</sup> Elian E. Rueda-Fernández, Diego A. Rueda-Gómez y Élder J. Villamizar-Roa. “Numerical analysis for a non-isothermal incompressible Navier-Stokes-Allen-Cahn system”. En: *manuscrito* (2023).

## BIBLIOGRAFÍA

- Amrouche, Chérif y Nour El Houda Seloula. “Lp-theory for vector potentials and Sobolev’s inequalities for vector fields: application to the Stokes equations with pressure boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 23.01 (2013), págs. 37-92 (vid. pág. 23).
- Brezis, Haim y Haim Brézis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Vol. 2. 3. Springer, 2011 (vid. pág. 27).
- Cai, Yongyong, Heejun Choi y Jie Shen. “Error estimates for time discretizations of Cahn–Hilliard and Allen–Cahn phase-field models for two-phase incompressible flows”. En: *Numerische Mathematik* 137.2 (2017), págs. 417-449 (vid. pág. 14).
- Chaturantabut, Saifon y Danny C Sorensen. “Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 32.5 (2010), págs. 2737-2764 (vid. pág. 14).
- Chen, Dongqin, Qiuqi Li y Huailing Song. “Error analysis of a stable reduced order model based on the proper orthogonal decomposition method for the Allen–Cahn–Navier–Stokes system”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 401 (2022), pág. 115661 (vid. pág. 14).
- Climent-Ezquerria, Blanca, Francisco Guillén-González y M Jesus Moreno-Iraberte. “Regularity and time-periodicity for a nematic liquid crystal model”. En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.1-2 (2009), págs. 539-549 (vid. pág. 97).

- Eleuteri, Michela, Elisabetta Rocca y Giulio Schimperna. “Existence of solutions to a two-dimensional model for nonisothermal two-phase flows of incompressible fluids”. En: *Annales de l’Institut Henri Poincaré C* 33.6 (2016), págs. 1431-1454 (vid. pág. 15).
- “On a non-isothermal diffuse interface model for two-phase flows of incompressible fluids”. En: *arXiv preprint arXiv:1401.3244* (2014) (vid. pág. 15).
- Feng, Xiaobing. “Fully Discrete Finite Element Approximations of the Navier–Stokes–Cahn–Hilliard Diffuse Interface Model for Two-Phase Fluid Flows”. En: *SIAM journal on numerical analysis* 44.3 (2006), págs. 1049-1072 (vid. pág. 14).
- Feng, Xiaobing, Yinnian He y Chun Liu. “Analysis of finite element approximations of a phase field model for two-phase fluids”. En: *Mathematics of computation* 76.258 (2007), págs. 539-571 (vid. pág. 14).
- Gal, Ciprian G y Maurizio Grasselli. “Longtime behavior for a model of homogeneous incompressible two-phase flows”. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 28.1 (2010), págs. 1-39 (vid. pág. 14).
- “Trajectory attractors for binary fluid mixtures in 3D”. En: *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 31.5 (2010), págs. 655-678 (vid. pág. 14).
- Galdi, Giovanni. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations: Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011 (vid. págs. 24, 25).
- Girault, Vivette y Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*. Vol. 5. Springer Science & Business Media, 2012 (vid. pág. 50).

- Grisvard, Pierre. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. SIAM, 2011 (vid. págs. 33, 38).
- Guillen-Gonzalez, Francisco y María Victoria Redondo-Neble. “Spatial error estimates for a finite element viscosity-splitting scheme for the Navier-Stokes equations”. En: *International Journal of Numerical Analysis & Modeling* 10.4 (2013) (vid. págs. 50, 81).
- Guillén-González, Francisco, María A. Rodríguez-Bellido y Diego Armando Rueda-Gómez. “Study of a chemo-repulsion model with quadratic production. Part II: analysis of an unconditionally energy-stable fully discrete scheme”. En: *Computers & Mathematics with Applications* 80.5 (2020), págs. 636-652 (vid. págs. 62, 77).
- Honda Lopes, Juliana y Gabriela Planas. “On a non-isothermal incompressible Navier–Stokes–Allen–Cahn system”. En: *Monats. Math* 195.4 (2021), págs. 687-715 (vid. pág. 16).
- Lin, Fang-Hua y Chun Liu. “Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 48.5 (1995), págs. 501-537 (vid. pág. 97).
- Lopes, Juliana y Gabriela Planas. “Existence of solutions for a non-isothermal Navier-Stokes-Allen-Cahn system with thermo-induced coefficients”. En: (2022) (vid. pág. 16).
- Lopes, Juliana Honda y Gabriela Planas. “Well-posedness for a non-isothermal flow of two viscous incompressible fluids”. En: *Communications on Pure & Applied Analysis* 17.6 (2018) (vid. págs. 16, 30, 31, 36).

- Nečas, Jindřich. “Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques”. En: *Academia* (1967) (vid. pág. 23).
- Rueda-Fernández, Elian E., Diego A. Rueda-Gómez y Élder J. Villamizar-Roa. “Numerical analysis for a non-isothermal incompressible Navier-Stokes-Allen-Cahn system”. En: *manuscrito* (2023) (vid. pág. 91).
- Shen, Jie y Xiaofeng Yang. “A phase-field model and its numerical approximation for two-phase incompressible flows with different densities and viscosities”. En: *SIAM Journal on Scientific Computing* 32.3 (2010), págs. 1159-1179 (vid. pág. 14).
- Simon, Jacques. “Compact sets in the space  $L^p(O, T; B)$ ”. En: *Annali di Matematica pura ed applicata* 146 (1986), págs. 65-96 (vid. pág. 35).
- Stenberg, Rolf. “A technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow”. En: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 11.6 (1990), págs. 935-948 (vid. pág. 50).
- Sun, Pengtao, Chun Liu y Jinchao Xu. “Phase field model of thermo-induced marangoni effects in the mixtures and its numerical simulations with mixed finite element method”. En: *Communications in Computational Physics* 6.5 (2009), págs. 1095-1117 (vid. pág. 15).
- Sun, Yongzhong y Zhifei Zhang. “Global regularity for the initial–boundary value problem of the 2-D Boussinesq system with variable viscosity and thermal diffusivity”. En: *Journal of Differential Equations* 255.6 (2013), págs. 1069-1085 (vid. pág. 42).
- Taylor, ME. *Partial Differential Equations I. Basic theory, vol. 115 of Applied Mathematical Sciences, edition*. 2011 (vid. pág. 38).

Wu, Hao. “Well-posedness of a diffuse-interface model for two-phase incompressible flows with thermo-induced Marangoni effect”. En: *European Journal of Applied Mathematics* 28.3 (2017), págs. 380-434 (vid. pág. 15).

Wu, Hao y Xiang Xu. “Analysis of a diffuse-interface model for the binary viscous incompressible fluids with thermo-induced Marangoni effects”. En: *arXiv preprint arXiv:1204.6013* (2012) (vid. pág. 97).

Xu, Xiang, Liyun Zhao y Chun Liu. “Axisymmetric solutions to coupled Navier–Stokes/Allen–Cahn equations”. En: *SIAM J. Math. Anal* 41.6 (2010), págs. 2246-2282 (vid. pág. 14).

## ANEXOS

### Anexo A. Existencia y unicidad local del problema aproximado (19)

En esta sección probamos la existencia y unicidad de la solución local del problema aproximado (19).

Primero recordamos algunos hechos relativos a las ecuaciones de campo de fase y temperatura con coeficientes regulares.

Dado  $\mathbf{v}^m \in C([0, T]; \mathbf{H}_m)$  considere el siguiente problema

$$\begin{cases} \phi_t^m + \mathbf{v}^m \cdot \nabla \phi^m = \Delta \phi^m - F'(\phi^m) & \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \phi^m(0) = \phi_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \phi^m}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (163)$$

La existencia y unicidad de la solución a este problema se obtiene mediante un método estándar de Galerkin. Además, se cumple el principio del máximo (véase, por ejemplo, <sup>30, 31, 32</sup>). Resumimos estos resultados en el siguiente lema.

**Lema 5.0.1.** *Sea  $\phi_0 \in H^1 \cap L^\infty$  tal que  $\|\phi_0\|_{L^\infty} \leq 1$ . Entonces, el problema (163) tiene única solución  $\phi^m \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2)$ , con  $\phi_t^m \in L^2(0, T; L^2)$  y satisface el principio del máximo*

$$|\phi^m(\mathbf{x}, t)| \leq 1 \text{ c.t.p. en } \Omega \times (0, T).$$

<sup>30</sup> Fang-Hua Lin y Chun Liu. “Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals”. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 48.5 (1995), págs. 501-537.

<sup>31</sup> Hao Wu y Xiang Xu. “Analysis of a diffuse-interface model for the binary viscous incompressible fluids with thermo-induced Marangoni effects”. En: *arXiv preprint arXiv:1204.6013* (2012).

<sup>32</sup> Blanca Climent-Ezquerro, Francisco Guillén-González y M Jesus Moreno-Iraberte. “Regularity and time-periodicity for a nematic liquid crystal model”. En: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71.1-2 (2009), págs. 539-549.

Adicionalmente, si  $\phi_0 \in H^2$ ,  $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces  $\phi^m \in C([0, T]; H^2) \cap L^2(0, T; H^3)$  y  $\phi_t^m \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ .

Análogamente, para la ecuación de temperatura

$$\begin{cases} \theta_t^m + \mathbf{v}^m \cdot \nabla \theta^m = \Delta \theta^m \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \theta^m(0) = \theta_0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial \theta^m}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (164)$$

tenemos el siguiente resultado:

**Lema 5.0.2.** Sea  $\theta_0 \in H^1 \cap L^\infty$ . Entonces, el problema (164) tiene única solución  $\theta^m \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2)$ , con  $\theta_t^m \in L^2(0, T; L^2)$  y se satisface el principio del máximo

$$|\theta^m(\mathbf{x}, t)| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \text{ c.t.p. en } \Omega \times (0, T).$$

Adicionalmente, si  $\theta_0 \in H^2$ ,  $\frac{\partial \theta_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces  $\theta^m \in C([0, T]; H^2) \cap L^2(0, T; H^3)$  y  $\theta_t^m \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ .

Enunciamos ahora el resultado sobre la existencia y unicidad de la solución local del problema aproximado (19).

**Proposición 5.0.3.** Sean  $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ ,  $\phi_0, \theta_0 \in H^1 \cap L^\infty$ , con  $\|\phi_0\|_{L^\infty} \leq 1$ . Para cualquier  $m > 0$ , existe  $T_m > 0$  tal que el problema aproximado (19) admite una solución única

$$\mathbf{u}^m \in H^1(0, T_m; \mathbf{H}_m),$$

$$\phi^m, \theta^m \in L^\infty(0, T_m; H^1 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T_m; H^2),$$

$$|\phi^m(\mathbf{x}, t)| \leq 1, \quad |\theta^m(\mathbf{x}, t)| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \text{ c.t.p. en } \Omega \times (0, T_m).$$

Adicionalmente, si  $\phi_0, \theta_0 \in H^2$ ,  $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \theta_0}{\partial \mathbf{n}}$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces  $\phi^m, \theta^m \in C([0, T_m]; H^2) \cap L^2(0, T_m; H^3)$  y  $\phi_t^m, \theta_t^m \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ .

*Demostración.* Demostramos la proposición utilizando el Teorema del punto fijo de Schauder. Para ello, sea  $T > 0$  y fije  $\mathbf{v}^m \in C([0, T]; \mathbf{H}_m)$  tal que

$$\mathbf{v}^m(t) = \sum_{i=1}^m g_i^m(t) s_i \quad \text{y} \quad \left( \sum_{i=1}^m |g_i^m(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M, \quad (165)$$

donde  $M$  es una constante suficientemente grande que se elegirá más adelante.

Ahora, dado que  $\mathbf{v}^m \in C([0, T]; \mathbf{H}_m)$ , usando el Lema 5.0.1, existe una solución única  $\phi^m$  del problema (163) que satisface  $|\phi^m(\mathbf{x}, t)| \leq 1$  c.t.p. en  $\Omega \times (0, T_m)$ . Por otra parte, multiplicando la ecuación (163) por  $-\Delta\phi^m$  e integrando en  $\Omega$  obtenemos la siguiente estimación

$$\frac{d}{dt} \|\nabla\phi^m\|_{L^2}^2 + \|\Delta\phi^m\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla\phi_0\|_{L^2}^2 + C (\|\mathbf{v}^m\|_{L^\infty}^2 \|\nabla\phi^m\|_{L^2}^2 + 1),$$

donde hemos utilizado que  $\|F'(\phi^m)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C$ . Dado que  $\mathbf{H}_m$  es de dimensión finita, de (165) se deduce que  $\|\mathbf{v}^m\|_{L^\infty(0, T; L^\infty)} \leq C_m M$ . Por lo tanto, el lema de Gronwall proporciona

$$\|\nabla\phi^m\|_{L^2}^2 \leq e^{C_m M T} (\|\nabla\phi_0\|_{L^2}^2 + C). \quad (166)$$

Análogamente, por el Lema 5.0.2, existe una única solución  $\theta^m$  al problema (164) que satisface

$$\|\nabla\theta^m\|_{L^2}^2 \leq e^{C_m M T} \|\nabla\theta_0\|_{L^2}^2. \quad (167)$$

Una vez determinados  $\phi^m$  y  $\theta^m$ , pasamos a buscar una solución  $\mathbf{u}^m(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{g}_i^m(t) s_i$  a la ecuación (19)<sub>1</sub>, que es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \tilde{g}_k^m(t) = - \sum_{i=1}^m \tilde{g}_i^m(t) (\nu \nabla s_i, \nabla s_k) - \sum_{i,j=1}^m \tilde{g}_i^m(t) \tilde{g}_j^m(t) (s_i \cdot \nabla s_j, s_k) \\ \quad - (\Delta\phi^m \nabla\phi^m, s_k) - (\Delta\theta^m \nabla\theta^m, s_k), \quad k = 1, \dots, m, \\ \tilde{g}_k^m(0) = (u_0, s_k), \quad k = 1, \dots, m. \end{array} \right.$$

A partir del teorema de existencia local de la teoría clásica de EDO, existe una solución única  $(\tilde{g}_k^m(t))_{1 \leq k \leq m}$  definida en  $[0, \tilde{T}_m)$ , para algún  $\tilde{T}_m > 0$  en función de  $m$ , y  $\tilde{g}_k^m \in H^1(0, \tilde{T}_m)$ .

Demostraremos que  $\tilde{T}_m = T^m$ . Para ello, tomando  $\mathbf{u}^m$  como función de prueba en (19)<sub>1</sub>, tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \leq |(\Delta \phi^m \nabla \phi^m, \mathbf{u}^m)| + |(\Delta \theta^m \nabla \theta^m, \mathbf{u}^m)|. \quad (168)$$

Para estimar el lado derecho, utilizamos la identidad  $\nabla \cdot (\nabla \omega \otimes \nabla \omega) = \nabla \left( \frac{|\nabla \omega|^2}{2} \right) + \Delta \omega \nabla \omega$  donde  $\otimes$  es el producto de Kronecker, que es la matriz con entradas  $(i, j)$  dada por  $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$ , podemos reescribir

$$-(\Delta \phi^m \nabla \phi^m, \mathbf{u}^m) - (\Delta \theta^m \nabla \theta^m, \mathbf{u}^m) = (\nabla \phi^m \otimes \nabla \phi^m, \nabla \mathbf{u}^m) + (\nabla \theta^m \otimes \nabla \theta^m, \nabla \mathbf{u}^m).$$

Dado que  $\mathbf{H}_m$  es un espacio de dimensión finita, se cumple que  $\|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^\infty} \leq C_m \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}$  para una constante  $C_m$  en función de  $m$ . Así, obtenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} (\nabla \phi^m \otimes \nabla \phi^m, \nabla \mathbf{u}^m) &\leq \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + C_m \|\nabla \phi^m\|_{L^2}^4, \\ (\nabla \theta^m \otimes \nabla \theta^m, \nabla \mathbf{u}^m) &\leq \frac{1}{4} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + C_m \|\nabla \theta^m\|_{L^2}^4. \end{aligned}$$

Introduciendo las estimaciones anteriores en (168) y utilizando las estimaciones (166)-(167) de  $\phi^m$  y  $\theta^m$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 + \nu_0 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}_m.$$

Integrando de 0 a  $t \leq \tilde{T}_m$ , llegamos a

$$\|\mathbf{u}^m(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^2}^2 dt \leq \tilde{C}_m \tilde{T}_m + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2. \quad (169)$$

Por lo tanto, concluimos que  $\tilde{T}^m = T^m$  y que  $\mathbf{u}_m$  está acotada en  $L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \cap L^2(0, T; \mathbf{V})$  por una constante que depende de  $m$  y  $M$ . A partir del sistema de EDO, vemos que  $\frac{d}{dt}\tilde{g}_i^m$  está acotada en  $L^2(0, T)$  y por tanto  $\mathbf{u}^m$  está acotada en  $H^1(0, T; \mathbf{H}_m)$ .

Para demostrar que  $\mathbf{v}^m = \mathbf{u}^m$  aplicamos el Teorema del punto fijo de Schauder. Definamos el siguiente operador

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_T^m : C([0, T]; \mathbf{H}_m) & \mapsto & (L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2))^2 & \mapsto & H^1(0, T; \mathbf{H}_m) \\ \mathbf{v}^m & & (\phi^m, \theta^m) & & \mathbf{u}^m \end{array}$$

donde  $\phi^m$ ,  $\theta^m$  y  $\mathbf{u}^m$  son las soluciones de (163), (164) y (19)<sub>1</sub>, respectivamente.

Observe que  $\Phi_T^m$  es un operador continuo, pues  $\phi^m$  y  $\theta^m$  son continuas con respecto a  $\mathbf{v}^m$ , y  $\mathbf{u}^m$  es continua con respecto a  $\phi^m$  y  $\theta^m$ . Dado que  $\mathbf{H}_m$  es un espacio de dimensión finita,  $H^1(0, T; \mathbf{H}_m)$  es compacto en  $C([0, T]; \mathbf{H}_m)$ . Además, como  $\Phi_T^m$  es un operador acotado de  $C([0, T]; \mathbf{H}_m)$  sobre  $H^1(0, T; \mathbf{H}_m)$ , concluimos que  $\Phi_T^m$  es un operador compacto de  $C([0, T]; \mathbf{H}_m)$  sobre el mismo.

Finalmente, de (169), tenemos que

$$\sum_{i=1}^m |\tilde{g}_i^m(t)|^2 = \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}_m T + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto, tomando  $M > 0$  tal que  $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{M^2}{2}$  y  $T_m > 0$  lo suficientemente pequeño  $\left(T_m = \frac{M^2}{2\tilde{C}_m}\right)$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^m |\tilde{g}_i^m(t)|^2 \leq M^2, \quad \forall t \in [0, T_m].$$

Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Schauder, existe un punto fijo  $\mathbf{u}_m$  de

$\Phi_T^m$  y el problema (19) tiene una solución local  $(\mathbf{u}^m, \phi^m, \theta^m)$  que satisface

$$\mathbf{u}^m \in H^1(0, T_m; \mathbf{H}_m),$$

$$\phi^m, \theta^m \in L^\infty(0, T_m; H^1 \cap L^\infty) \cap L^2(0, T_m; H^2).$$

La prueba de la unicidad de la solución es estándar, por lo que omitimos los detalles. La regularidad adicional para  $\phi^m$  y  $\theta^m$  se deduce de los Lemas 5.0.1 y 5.0.2. Esto completa la prueba. □