

Razonamiento Deductivo a Través de Problemas de Construcción Utilizando DGPad Como
Medio

Jennifer Carol Guarín Delgado

Dilan Manuel Malaver Guarín

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas

Director

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	9
1. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN	11
2. TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)	14
2.1. Primera tipología de las situaciones.....	16
2.2 Situaciones didácticas y adidácticas	17
2.3. Roles del profesor y del alumno	17
2.4. DGPad como medio	20
3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	23
4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.....	25
4.1. Ingeniería didáctica.....	26
4.1.1 Análisis preliminar:.....	26
4.1.2. Análisis a priori.....	27
4.1.3. Experimentación	27
4.1.4. Análisis a posteriori	28
4.2. Población de estudio	28
5. DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES.....	28
5.1. Análisis preliminar.....	28
5.1.1 Análisis epistemológico	28
5.1.2 Análisis cognitivo	31

5.1.3 Análisis didáctico.....	34
5.2 Análisis a priori.....	43
5.3 Análisis a posteriori.....	82
Actividad 1:.....	83
Primera secuencia:	83
Segunda secuencia	100
Tercera secuencia.....	110
Actividad 2.....	123
Primera secuencia	124
Segunda secuencia	134
Tercera secuencia.....	140
6. CONCLUSIONES	154
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	160
ANEXOS	162
Anexo1.....	162
Anexo 2.....	247

Lista de figuras

Figura 2-1, Apariencia del software DGPAd.....	21
Figura 2-2, Botones bases de DGPAd	21
Figura 2-3, Herramientas a partir de puntos, rectas o segmentos	22
Figura 2-4, Construcción de un triángulo equilátero e isósceles	23
Figura 5-1, Problema de visualización.....	36
Figura 5-2, Ejemplo de diagrama-definición	36
Figura 5-3, Ejemplo de problema de construcción	37
Figura 5-4, Ejemplo de protocolo de construcción	37
Figura 5-5, Libro "Geometría"	38
Figura 5-6, Actividad de visualización del libro "Geometría"	38
Figura 5-7, Catálogo de construcción en el libro "Geometría"	39
Figura 5-8, Problemas de construcción en el libro "Geometría"	39
Figura 5-9, Demostración usando solo una definición	40
Figura 5-10, Esquema a completar con varias reglas teóricas	40
Figura 5-15, Ubica el punto medio perceptivamente.....	48
Figura 5-16, Punto medio perceptivamente ubicado en el segmento AB.....	48
Figura 5-17, Uso de la herramienta mediatriz	49
Figura 5-18, Uso de la herramienta punto medio	49
Figura 5-19, No considerar los puntos Dados.....	50
Figura 5-20, Círculo con centro en M que pasa por A.....	51
Figura 5-21, Construcción adecuada de la tarea 3 de la 1° Secuencia.....	51

Figura 5-22, Construcción de las medianas	53
Figura 5-23, Confusión de la relación $AB=2AM$	53
Figura 5-24, AM colineal con AB	54
Figura 5-25, Considera que la mediana pedida parte de B	54
Figura 5-26, No considerar M como punto medio de BC.....	55
Figura 5-27, Construcción adecuada de la tarea 2 de la 2° Secuencia.....	56
Figura 5-28, Confusión de la relación $2AB=AM$	56
Figura 5-29, Ubican M colineal a A y a B.....	57
Figura 5-30, Ubicar un punto M en el círculo con diámetro 2AB.....	57
Figura 5-31, Aseguran la relación, pero M no es punto medio.....	58
Figura 5-32, Construcción adecuada de la tarea 3 de la 2° secuencia	59
Figura 5-33, Confundir mediatriz con altura	60
Figura 5-34, Construcción basada en los segmentos de los lados	61
Figura 5-35, Construcción adecuada de la tarea 1 de la 3° Secuencia.....	62
Figura 5-36, Considerar que la altura pasa por el punto medio	63
Figura 5-37, Construir el ortocentro cuando está dado.....	63
Figura 5-38, M debe estar en AP, pero confunde altura con mediana.....	64
Figura 5-39, Ubicar C en cualquier parte de r	65
Figura 5-40, Construcción idónea de la tarea 2 de la 3° Secuencia.....	65
Figura 5-41, Ubicar r y s de manera paralela.....	67
Figura 5-42, Construir s de manera perpendicular a r	67
Figura 5-43, Ubica A, L, B y M de manera aleatoria en r y s.....	68
Figura 5-44, Construcción idónea de la tarea 3 de la 3° Sección	69

Figura 5-45, Construcción por medio de la herramienta recta perpendicular.....	71
Figura 5-46, Catálogo de construcción en DGPAd.....	71
Figura 5-47, La relación construida es $AD=3AB$	73
Figura 5-48, Construcción adecuada del rectángulo con la relación $BC=3AB$	74
Figura 5-49, Rectángulo ABCD tal que $6AB=BC$	75
Figura 5-50, Primera construcción idónea	76
Figura 5-51, Segunda construcción idónea	76
Figura 5-52, Descubriendo el teorema de Tales	78
Figura 5-53, C en la recta MP	79
Figura 5-54, Uso de la simetría central	80
Figura 5-55, Construcción adecuada de la tarea de bisectrices	81

Resumen

Título: Razonamiento Deductivo a Través de Problemas de Construcción Utilizando DGPad Como Medio *

Autor: Jennifer Carol Guarín Delgado y Dilan Manuel Malaver Guarín **

Palabras Clave: Razonamiento deductivo, construcción geométrica, software de geometría dinámica, DGPad, teoría de las situaciones didácticas.

Descripción: El presente trabajo de investigación tiene como propósitos crear y analizar una secuencia didáctica basada en construcciones geométricas, usando DGPad como medio, para determinar cómo las construcciones geométricas contribuyen al desarrollo del razonamiento deductivo. Para cumplir con los objetivos se utilizó como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), en la cual el profesor analiza el saber matemático para crear situaciones que contribuyen al aprendizaje de los estudiantes mediante su interacción con un medio. Aunado a ello, como metodología de investigación se utilizó la ingeniería didáctica, la cual contempla 4 fases: *análisis preliminar*, en la cual se investigó acerca de las propiedades del software de geometría dinámica, de las características cognitivas de los estudiantes y de la enseñanza de la geometría; *análisis a priori*, en el que se presentaron los objetivos de las actividades, las posibles acciones de los estudiantes junto con sus retroacciones y actos de devolución; *experimentación*, en la cual se llevó a cabo el pilotaje con cuatro estudiantes de primer nivel de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, y *un análisis a posteriori*, en el cual se contrastaron los resultados obtenidos con el análisis a priori. En los resultados de investigación se observa una evolución en el discurso deductivo, en la forma de validar las construcciones geométricas y un avance en el uso de diferentes reglas teóricas para resolver los problemas dados.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Magister en Educación Matemática.

Abstract

Title: Deductive Reasoning Through Construction Problems Using DGPad as a Medium*

Author(s): Jennifer Carol Guarín Delgado y Dilan Manuel Malaver Guarín ¹

Key Words: Deductive reasoning, geometric construction, dynamic geometry software, DGPad, theory of didactic situations.

Description: The present research work aims to create and analyze a didactic sequence based on geometric constructions, using DGPad as a *milieu*, to determine how geometric constructions contribute to the development of deductive reasoning. To meet the objectives, the Theory of Didactic Situations (TDS) was used as a theoretical reference, in which the teacher analyzes mathematical knowledge to create situations that contribute to student learning through their interaction with a *milieu*. In addition to this, as a research methodology, didactic engineering was used, which includes 4 phases: *preliminary analysis*, in which the properties of dynamic geometry software, the cognitive characteristics of students and the teaching of geometry were investigated; *a priori analysis*, in which the objectives of the activities were presented, the possible actions of the students together with their feedback and acts of return; *experimentation*, in which the pilot was carried out with four first-level students of Bachelor's Degree in Mathematics of the Universidad Industrial de Santander, and *a posteriori analysis*, in which the results obtained were contrasted with the a priori analysis. In the research results there is an evolution in the deductive discourse, in the way of validating geometric constructions and an advance in the use of different theoretical rules to solve the given problems.

* Degree Work

¹Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Magister en Educación Matemática

INTRODUCCIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004) expone la utilidad de trabajar la geometría en la escuela por los diferentes elementos que puede desarrollar, entre ellos, la creación de un entorno en el que se puede trabajar el razonamiento y la demostración (Geometría teórica) y; de herramientas para resolver problemas en un plano físico (Geometría física), lo que relacionamos en este trabajo con el razonamiento deductivo y el razonamiento visual respectivamente. El MEN (2004) determina la existencia de una ruptura entre ambos tipos de razonamiento, mostrando las dificultades que tienen los estudiantes al realizar el tránsito entre la visualización y la deducción. Sugiriendo también, que la manipulación y la construcción en entornos dinámicos de geometría ofrecen herramientas que favorecen el vínculo entre estos dos tipos de razonamiento. Esta idea ha sido reforzada en trabajos como los de Acosta y Cardozo (2021), el MEN (2004), entre otros. En aras de exponer estrategias que atiendan a esta problemática, con fundamentos tanto teóricos como empíricos, este trabajo tiene como propósitos crear y analizar una secuencia didáctica basada en construcciones geométricas, para determinar **¿Cómo a través de problemas de construcción en DGPad se puede establecer un puente entre la geometría física y la geometría teórica, favoreciendo el desarrollo del razonamiento deductivo?**

Para estudiar el problema se utilizó como referente teórico la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) propuesta por Guy Brousseau que se fundamenta en el aprendizaje por adaptación. En esta teoría el profesor analiza el saber matemático para organizar situaciones didácticas que propician el aprendizaje de los alumnos, los cuales interactúan con un medio para desarrollar aprendizaje por adaptación. Como metodología de investigación empleamos la

ingeniería didáctica que se lleva a cabo en cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y un análisis a posteriori.

Con este trabajo se logró diseñar una micro ingeniería didáctica que sugiere estrategias de enseñanza que promueven el razonamiento deductivo en el contexto de la geometría, a partir de problemas de construcción en el SGD. Para esto, se realizó un pilotaje con estudiantes de recién ingreso del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

El trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se exponen los antecedentes de investigación que lo fundamentan. A continuación, se presentan los rudimentos que sustentan la Teoría de las Situaciones Didácticas, la cual usaremos como marco teórico de investigación. En el capítulo siguiente, se explicita el problema de investigación presentar los elementos teóricos concernientes a la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Seguido a ello se presenta el análisis a priori, el preliminar y el a posteriori para finalmente mostrar los resultados de la investigación.

1. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Los documentos revisados y discutidos a continuación dan cuenta de los elementos clave en la investigación, los cuales son: el razonamiento geométrico, en especial el deductivo, la construcción en geometría y el software de geometría dinámica.

Samper, Leguizamón y Camargo (2001), en las reflexiones iniciales de su trabajo de investigación, muestran cómo a partir de un problema propuesto en clase, el cual fue, probar o refutar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° , surgieron diferentes razonamientos y argumentos por parte de los estudiantes, que van desde el uso de ejemplos específicos como forma de argumentación, hasta una demostración formal usando propiedades matemáticas. Debido a ello, se planteó como propósitos de investigación la creación de una posible clasificación de razonamiento geométrico y una caracterización especial del razonamiento visual. Las investigadoras describieron el razonamiento geométrico como un proceso en el que se generan relaciones entre objetos geométricos; se argumenta y se comunica de manera válida propiedades o relaciones existentes; y en el que se les da sentido a los conceptos y procedimientos realizados. Lo clasificaron en tres tipos:

- *Razonamiento visual*: se consiguen conclusiones enlazando la percepción visual de representaciones de los objetos matemáticos con características, relaciones y propiedades de estos.
- *Razonamiento intuitivo*: se obtiene al comunicar en un léxico natural las primeras ideas que surgen, ya sea describiendo o explicando el argumento que surgió después de realizar asociaciones.
- *Razonamiento inferencial*: es el que evidencia el uso de un sistema axiomático formal. Este último tipo de razonamiento incluye procesos de inducción, abducción y deducción.

Cabe recalcar que estos tipos de razonamientos “no son excluyentes y, dependiendo de la complejidad cognitiva subyacente a la tarea, se complementan unos a otros” (p. 150)

Relativo al razonamiento inferencial, Acosta y Cardozo (2021) realizaron una investigación con el objetivo de descubrir estrategias de enseñanza que puedan beneficiarse del potencial de los Softwares de Geometría Dinámica para favorecer los procesos deductivos de los estudiantes. El estudio se centró en problemas de construcción concernientes a las propiedades de equidistancia y perpendicularidad, el cual fue aplicado a dos estudiantes de séptimo y octavo grado que no tenían noción de lo que era demostrar. Se concluyó que, por medio de la interacción con el SGD, los estudiantes se convencen del carácter incuestionable de los hechos geométricos (HG), entendiéndose el término hecho geométrico como “una afirmación ‘necesariamente verdadera’ que se refiere a la implicación lógica entre propiedades; así, un HG puede constatarse, verificarse y experimentarse, puede convertirse en un teorema, si se hace una demostración que lo vincula a un sistema teórico” (p. 257).

En este orden de ideas, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004) en su proyecto, *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*, propone generar claridad en la multiplicidad de posibilidades didácticas que otorgan las tecnologías computacionales y pautas para los profesores de cómo planear situaciones que conlleven a la ejecución de dichas posibilidades. En el documento *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales* nos atañe el capítulo tres debido a que plantean la construcción geométrica como la conexión entre el razonamiento visual y el razonamiento deductivo.

Según el MEN “el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo que pone en tensión ciertos polos del desarrollo cognitivo: los procesos cognitivos de visualización y los procesos de

justificación de carácter informal o formal” (2004, p. 9). El razonamiento visual tiene que ver con todos los procesos que se realizan al observar y manipular representaciones o construcciones geométricas para obtener conclusiones. Este pasa por tres niveles; inicialmente un nivel global, en el que la persona asocia una figura con un objeto real o en el que se da valor a aspectos no matemáticos como la posición o el tipo de trazo; seguidamente un nivel constitutivo, en el que se reconocen las partes que constituyen a la figura, bi o tridimensional y finalmente, un nivel operativo en el cual aparte de reconocer las subconfiguraciones de la figura, también las manipula para obtener resultados útiles. Por otra parte, los procesos de justificación se clasifican en dos, uno informal, en el que la persona usa un lenguaje natural para enlazar proposiciones a partir de la visualización de una figura; y uno formal o deductivo, en el cual se relacionan proposiciones del estilo “si, entonces”. Entre estos dos polos, visualización y justificación formal, existe algo entre medio, la exploración y la creatividad, procesos que se pueden abordar a través de problemas de construcción.

La construcción en Geometría, según el MEN (2004), se puede considerar como un dibujo técnico en el que, al asegurar propiedades, se logra una generalización y se garantiza la reproductibilidad del dibujo. Este proceso parece conectar los dos polos mencionados debido a que “añade elementos conceptuales que ayudan a los estudiantes a reconocer y a conectar las diferentes propiedades matemáticas necesarias para obtener, por ejemplo, una figura correcta” (MEN, 2004, p. 17) y porque las propiedades que construye el estudiante se vuelven premisas del resultado esperado e incluso de resultados que no había previsto, por lo que se puede apreciar la relación de dichas premisas con los nuevos resultados.

En nuestro trabajo entenderemos como construcción geométrica lo expuesto por Acosta y Cardozo (2021), los cuales comentan que una construcción es exacta, en el contexto del SGD,

cuando ciertas propiedades geométricas se mantienen al arrastrar los objetos geométricos que la conforman. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema, “dado un segmento AB, construir un triángulo equilátero ABC”, las acciones que pueden realizar los alumnos son variadas, entre ellas, situar un punto C en la pantalla y trasladarlo hasta que, perceptivamente, el triángulo ABC se perciba equilátero; claramente tal acción no soportaría la acción de arrastre, por lo que no sería considerado como construcción. Por otra parte, una acción que se valoraría como construcción, sería si el estudiante crea un círculo con centro en A que pase por B, un círculo con centro en B que pase por A, y marca la intersección de los círculos como el punto C, de tal forma, se genera el triángulo equilátero ABC, que soporta la prueba de arrastre. En el primer caso, el alumno se vale de la percepción visual y del carácter global de la figura para garantizar que el triángulo es equilátero, mientras que en el segundo caso podemos evidenciar un proceso instrumental que incluso, podría obedecer a un razonamiento teórico.

Por otro lado, vamos a adoptar la clasificación del razonamiento geométrico como lo propone el MEN (2004), en la cual, el razonamiento deductivo es considerado como un proceso de justificación formal con el esquema “si... entonces”. Considerándolo como parte del razonamiento inferencial propuesto por Samper et. al (2001).

2. TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS (TSD)

Desarrollada en los años 70 por Guy Brousseau, como oposición a la corriente transmisiva protagonista en esos años, describe la interacción entre el *alumno*, el cual tiene un papel activo y gran parte de la responsabilidad en el aprendizaje, el *profesor*, quien organiza las situaciones que propician el aprendizaje y el *saber*; tiene sus bases en la creación de conocimientos matemáticos por medio del aprendizaje por adaptación.

Brousseau (2007) menciona que existe una tendencia natural de los sujetos a adaptarse a medios que producen dificultades o desequilibrios; durante ese proceso de adaptación el individuo reorganiza sus esquemas y los nuevos conocimientos se manifiestan en las acciones que realizan los estudiantes. Por ejemplo, cuando anticipan el resultado de las acciones o cuando formulan el conocimiento verbalmente.

En el contexto escolar el estudiante construye su conocimiento a partir de una interacción con el medio generador de problemas. Estévez (2022) propone que esta interacción se da cuando el alumno tiene la *intención* de resolver el problema, realiza *acciones* en busca de la solución, *interpreta* las consecuencias de dichas acciones (retroacciones) y finalmente, *valida* o decide si las acciones realizadas le condujeron a su objetivo.

La TSD tiene como objeto de estudio las *situaciones*, que son aquellas que modelan la acción recíproca entre el sujeto y el *medio*, este último entendido como los entornos pertinentes en los que ciertos conocimientos adquieren sentido por su necesaria utilización. Para determinar tales entornos, es necesario un análisis reflexivo del saber matemático.

Según Acosta, Monroy y Rueda (2010, p. 175), las características principales que deben tener los medios son:

1. **Ser exterior al alumno:** el alumno debe reconocerle una existencia objetiva.
2. **Ser material:** el alumno puede interactuar con él por medio de acciones.
3. **No debe tener ninguna intención:** no debe ser percibido como una persona.
4. **Reaccionar:** las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. **Imponer restricciones a la acción:** no cualquier acción es posible.

Diseñar situaciones de aprendizaje pasa entonces por modelar el medio en el que los conocimientos que le dan sentido al saber se manifiestan en el alumno luego de interactuar con el medio que ha sido modelado atendiendo a las características propuestas por Acosta et al. (2010). A continuación, exponemos los diferentes tipos de situaciones según la TSD.

2.1. Primera tipología de las situaciones

Brousseau (2007) plantea que las formas en que se manifiestan los conocimientos de los alumnos son variadas, una primera tipología de estas situaciones es la siguiente:

- *Situación de acción:* En estas situaciones los estudiantes interactúan directamente con el medio, el cual genera retroacciones que el estudiante analiza para validar la funcionalidad de la acción realizada, las retroacciones suelen orientar a los alumnos acerca de las estrategias utilizadas, de tal forma, los estudiantes pueden decidir si es preciso continuar, abandonar o modificar la estrategia realizada.

- *Situación de formulación:* En estas situaciones el estudiante debe explicitar las acciones; debe retomar el conocimiento, para reconocerlo, descomponerlo, analizarlo y restaurarlo en un sistema lingüístico. El medio que se ajusta será uno que permita al estudiante comunicar el conocimiento a un sujeto, ya sea de manera gráfica o verbal; o uno que posibilite al alumno recordar los elementos indispensables del conocimiento.

- *Situación de validación:* Se basan en trabajar en justificaciones matemáticas que logren argumentar el por qué las estrategias formuladas y realizadas conllevaron a los resultados obtenidos.

2.2 Situaciones didácticas y adidácticas

El aprendizaje por adaptación postula que el estudiante es capaz de construir sus propios conocimientos por las experiencias percibidas. De tal forma, se habla de *situaciones adidácticas* cuando los problemas que se seleccionan se adecúan para que, en el momento en el que el estudiante realice acciones en vía de solucionar el problema, logren que él hable, reflexione y evolucione. Durante el tiempo en el que el alumno tiene la intención de resolver el problema y produce una respuesta, el profesor debe limitarse a no proponer soluciones ni a comentar los conocimientos que se involucran en la resolución del problema.

Las *situaciones didácticas*, por otra parte, son situaciones que se dan generalmente en clase entre el profesor y los alumnos y que giran en torno a un saber que se enseña. Las situaciones didácticas se rigen por el contrato didáctico, es decir, por las obligaciones implícitas frente al saber que existen entre el profesor y el alumno. En estas situaciones, la intención de enseñar y de aprender es explícita. (Margolinas, 2009)

Así pues, las situaciones adidácticas son parte de las situaciones didácticas. En tanto que, el profesor antes de interactuar con los alumnos y el saber de manera directa propone un problema para que los estudiantes, a través de una situación adidáctica, construyan los conocimientos que le darán sentido al saber que se desea enseñar.

2.3. Roles del profesor y del alumno

El rol del estudiante durante la situación adidáctica está determinado por un comportamiento específico; según Brousseau (2007), el alumno es plenamente consciente de que el problema elegido por el docente tiene como objetivo hacerle adquirir un nuevo conocimiento, además de asimilar que el encargado de la construcción de dicho conocimiento es él mismo con ayuda de la lógica interna de la situación. Así pues, los estudiantes tienen un papel activo durante

la construcción de su aprendizaje mediante la resolución de un problema. Rueda y Niño (2013) destacan cinco aspectos importantes que el alumno debe poner en juego durante su interacción con el problema.

- **Aceptar el problema:** el educando asume la responsabilidad de resolver la tarea dada por el profesor.
- **Comprender el problema:** el alumno analiza y entiende los requisitos del problema.
- **Emplear una estrategia de solución:** posteriormente a la aceptación y comprensión del problema, el estudiante aplica una estrategia que lo ayude a encontrar una solución a la situación propuesta.
- **Controlar los procesos intermedios:** se refiere al dominio de las operaciones lógico-matemáticas que el educando debe realizar como parte de la estrategia que ha elegido utilizar.
- **Validar la solución del problema:** el alumno decide si la estrategia utilizada para resolver el problema, y la solución del problema en sí mismo, fue correcta o no.

Margolinas (2009) sostiene que, durante este proceso de interacción con el medio, el alumno debería comportarse como un sujeto matemático y por lo tanto utilizar únicamente lo matemáticamente pertinente.

El papel del profesor antes y durante el desarrollo la situación a-didáctica es esencial, ya que se encarga de elegir cuidadosamente el medio, que genere las retroacciones pertinentes, y el problema relacionado al saber matemático. Como ya comentamos anteriormente, durante la situación adidáctica el docente se abstiene de comunicar posibles soluciones al problema o de transmitir el saber matemático. Sin embargo, no implica que el docente no intervenga en este tipo

de situaciones, ya que él realiza un acompañamiento para reforzar el ciclo de interacción del estudiante con el medio y así lo guía a la validación de sus acciones; todo aquello que el docente realiza durante dicho acompañamiento se llama proceso de devolución.

Rueda y Niño (2013, p.30) presentan los siguientes tipos de actos de devolución:

- **Hacer comprender el problema:** el profesor brinda herramientas por las cuales el estudiante podrá comprender el problema.
- **Solicitar una estrategia de solución:** el profesor observa el comportamiento matemático del estudiante y si considera que se limita a dar respuestas al azar le solicita justificar de manera razonada sus acciones.
- **Hacer controlar los procesos intermedios:** el profesor le pide al estudiante que controle los pasos que debe seguir para llegar a la solución del problema según la estrategia que haya decidido llevar a cabo.

Cuando finaliza la situación adidáctica, el docente asume nuevamente la responsabilidad de enseñar y explicar las conexiones entre el conocimiento construido, en la situación adidáctica, y el saber que quiere transferir. Al anterior proceso se le conoce como institucionalización y debe considerar que:

“oficialmente” el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización (Brousseau, 2007, p.98)

2.4. DGPad como medio

El software de geometría dinámica (SGD) es un programa que permite realizar construcciones geométricas y manipularlas directamente. Las características de un software de geometría dinámica, según el Ministerio de Educación (MEN, 2004), son las siguientes:

- a. La capacidad de arrastre de construcciones geométricas que beneficia la identificación de rasgos o patrones que permanecen invariantes durante alguna transformación.
- b. El uso extensivo del lugar geométrico y la capacidad de visualizar la traza, huella que deja un objeto geométrico al ser desplazado, para identificar hechos geométricos.
- c. La animación de figuras, la cual permite visualizar el proceso de construcción de un hecho geométrico.

DGPad es un software de geometría dinámica y puede considerarse, desde la perspectiva de la TSD, como un medio con el cual los estudiantes pueden interactuar, ya que permite realizar construcciones, manipular de manera directa de objetos involucradas en estas, ofreciendo un conjunto retroacciones que obedecen a los principios de la geometría. Por ejemplo, cuando se arrastran objetos contruidos, estos se desplazan o alteran manteniendo las relaciones geométricas utilizadas para su construcción. En efecto, si se construye una recta paralela a un segmento y se mueve el segmento entonces la recta se desplazará por la pantalla para mantener el paralelismo.

DGPad-Colombia es un programa libre que se puede ejecutar en línea a través del siguiente enlace: dgpad-colombia.udistrital.edu.co o sin conexión. Su apariencia es como se muestra en la

Figura 2-1

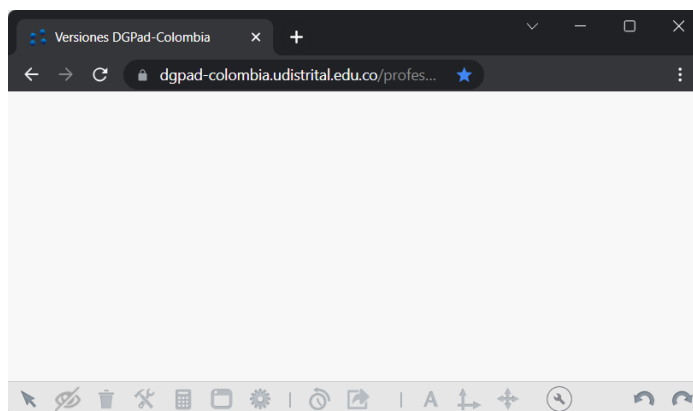


Figura 2-1, Apariencia del software DGPAD

La ventana de DGPAD-Colombia representa al plano, sobre el cual se pueden construir objetos geométricos: puntos, segmentos, rectas, círculos, polígonos, etc. En la parte inferior se aprecian botones que al situar el cursor sobre ellos muestra el nombre de cada uno, como se muestra en la Figura 2-2. El primer botón permite construir objetos y moverlos, el segundo ocultarlos y el tercero borrarlos. También cuenta con una calculadora dinámica y otras herramientas que para nuestro propósito no consideramos necesario exponer con detalle.

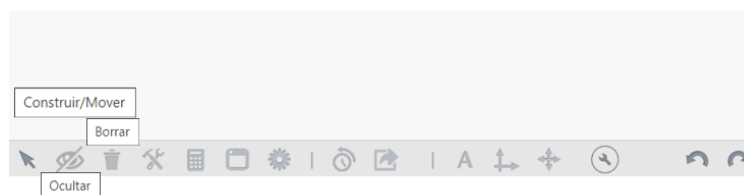


Figura 2-2, Botones bases de DGPAD

Para construir puntos basta hacer clic en el botón *Construir/Mover* y luego hacer clic en el lugar de la pantalla donde se quiera ubicar el punto. Al hacer clic en un punto, se muestran las herramientas que aparecen en la parte izquierda de la Figura 2-3, permitiendo construir segmentos, rectas, círculos, entre otros. Al hacer clic sobre una recta o un segmento, se muestran las herramientas que aparecen al lado derecho, permitiendo trazar rectas perpendiculares y paralelas a la seleccionada.

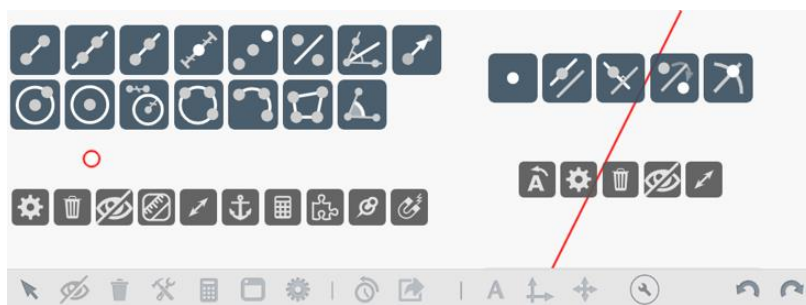


Figura 2-3, Herramientas a partir de puntos, rectas o segmentos

Consideremos la construcción que se muestra en la Figura 2-4: los puntos A y B son libres (se pueden arrastrar libremente por la pantalla), los círculos c1 y c2 dependen de A y B, así mismo los puntos C y D dependen de estos dos círculos. En este caso, D es un punto sobre el círculo c2. Por lo tanto, su movimiento está restringido a c2, mientras que el punto C es de intersección y no se puede arrastrar, pero sí se puede mover al arrastrar los puntos A y B de los cuales dependen los círculos que determinan a C. Entonces en el medio distinguimos las acciones de arrastrar y mover, porque esto da cuenta de la dependencia entre los objetos, la cual se manifiesta en la pantalla al alterar la figura. Así pues, este dibujo representa por un lado la construcción de un triángulo equilátero ABC y por otro la de un triángulo isósceles ABD. Propiedades que son consecuencia de otras más simples como la equidistancia entre los puntos de un círculo y su centro.

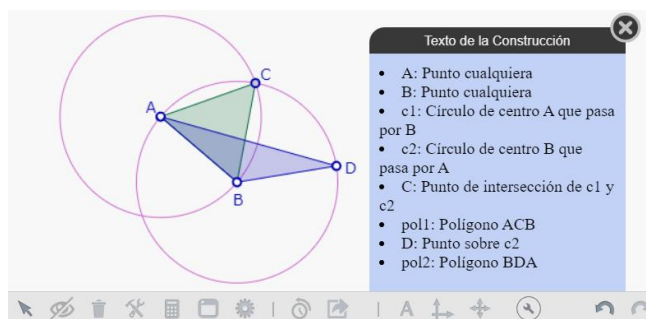


Figura 2-4, Construcción de un triángulo equilátero e isósceles

Esta naturaleza de los objetos que se producen en DGPAd-Colombia, propia de los SGD, es lo que nos permitirá establecer un puente entre la percepción y la teoría, a partir de problemas de construcción seleccionados cuidadosamente, de modo que se requiera de acciones por parte del alumno, que les permita desarrollar pequeños razonamientos deductivos que paulatinamente se espera sean más robustos.

3. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Existen diversos motivos por los que se enseña geometría en la escuela. Por ejemplo, Mathé, Barrier & Perrin (2020), sugieren que los tres más relevantes son:

- Propicia un entorno en el que se puede trabajar el razonamiento y la demostración en matemáticas.
- Proporciona herramientas para resolver problemas que se encuentran en un plano físico.
- Ofrece formas de representación de objetos de diferentes campos del conocimiento.

Al primero, los autores lo enmarcan dentro de la *Geometría teórica*, en esta, la forma de validación de enunciados se da por medio del discurso lógico, basado en propiedades y en relaciones entre ellas. El segundo en la *Geometría física*, su forma de validación se da por la percepción asistida por el uso de instrumentos de medición o de trazado. Además, los autores

manifiestan una ruptura entre la geometría física y la teórica, precisamente por la forma como se validan las proposiciones.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2004), siendo consciente de las múltiples dimensiones de la geometría, indica que la enseñanza de esta debe preocuparse por generar actividades que den cuenta de las diferentes razones antes expuestas, para así generar un conocimiento geométrico útil. No obstante, expone la tensión y la ruptura existente entre razonamiento visual y deductivo, y entre el ámbito empírico y teórico de la geometría. Esta última ruptura concuerda con la comentada por Mathé et.al (2020).

Ambos autores dejan en evidencia la tensión entre los elementos empíricos y teóricos de la geometría. Sin embargo, consideramos que dicha tensión mantiene una estrecha relación con la ruptura entre el razonamiento visual y el deductivo. Debido a que la forma de validación de la geometría física, que tiene que ver con la percepción y con las relaciones encontradas por medio de instrumentos de trazado y de medición, está vinculada con la visualización, que involucra los procesos de observar y manipular representaciones o construcciones. Mientras que, la forma de validación en la geometría teórica está ligada con el razonamiento deductivo al basarse en un discurso lógico fundamentado en propiedades.

Hay un cambio conceptual cuando se realiza el paso de la geometría física a la teórica, es un salto que no es natural en los estudiantes y el proceso se dificulta debido a la ruptura mencionada. Según el MEN (2004), esta ruptura se debe gestionar estudiando lo que hay en medio de la geometría física y la teórica, entre la visualización y el razonamiento deductivo, que es un espacio de exploración y de creatividad, que da cabida a la construcción geométrica.

Acosta y Cardozo (2021) evidencian que los SGD favorecen el paso de la geometría física a la geometría teórica, ya que permiten diferenciar de forma práctica una construcción exacta de una construcción aproximada. Dicha diferenciación permite al estudiante reconocer las implicaciones lógicas involucradas en la construcción y, por ende, desarrolla los procesos del razonamiento deductivo. Además, consideramos que la TSD ofrece los elementos teóricos necesarios para contribuir a la evolución de razonamientos intuitivos a razonamientos deductivos simples y luego a razonamientos deductivos más elaborados utilizando como medio DGPad, el cual, como ya expusimos antes en los antecedentes, ofrece un conjunto de retroacciones al manipular o arrastrar los objetos en pantalla.

Por lo anterior, este trabajo de investigación busca responder a **¿Cómo a través de problemas de construcción en DGPad se puede establecer un puente entre la geometría física y la geometría teórica, favoreciendo el desarrollo del razonamiento deductivo?**

Con el propósito de encontrar elementos que permitan elaborar una posible respuesta a esta pregunta, nos proponemos los siguientes objetivos.

- Diseñar situaciones adidácticas para el fomento del razonamiento deductivo mediante problemas de construcción en DGPad como medio.
- Elaborar un análisis a priori del diseño de las situaciones adidácticas propuestas a la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas.
- Realizar un análisis a posteriori a partir de un pilotaje de las situaciones diseñadas.

4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En interés de cumplir con los objetivos de la investigación y con ello responder a la pregunta de investigación, se planteó la ingeniería didáctica como metodología de investigación.

A continuación, se expondrán los elementos fundamentales que caracterizan a la ingeniería didáctica junto con su aplicación en el proyecto.

4.1. Ingeniería didáctica

La característica principal de esta metodología, según Artigue (1995), es que se basa en las intervenciones didácticas realizadas en clase, en otras palabras, en la elaboración, ejecución, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Otro elemento por resaltar es su carácter validativo, al realizar una confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Este proceso está determinado por cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori. Sin embargo, en nuestro trabajo ponderaremos más el análisis a priori, dado que el análisis a posteriori se hará mediante un pilotaje con dos parejas de estudiantes, de modo que no pretendemos con él garantizar la validez de los resultados, sino evaluar el diseño en busca de elementos que permitan reflexionar sobre las hipótesis planteadas en el análisis a priori, por medio de la puesta en escena de las situaciones diseñadas.

4.1.1 Análisis preliminar:

Busca profundizar sobre un cuadro teórico didáctico general (Artigue,1995), para ello se realiza un análisis a partir de tres dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. Estas se asocian respectivamente con las características de los conocimientos implicados en el proceso educativo, las características cognitivas de los estudiantes y con las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Esta fase permite determinar las variables didácticas que estarán presentes en la investigación.

En esta fase, se indagó en elementos que corresponden a cada una de las dimensiones mencionadas previamente. En el ámbito *didáctico*, se examinó, el tipo de problemas que se seleccionarían, la cantidad de situaciones que se presentarían, la organización de los problemas, el

rol que tendrá el profesor durante las situaciones y las preguntas que pueden tener cabida en cada situación. En la dimensión *cognitiva*, las preguntas están enfocadas en las dificultades que pueden tener los estudiantes en cada situación planteada, en las preguntas que posiblemente surgirán por parte de los alumnos y en las estrategias o acciones que puedan realizar en cada problema. En la dimensión *epistemológica*, se respondió a ¿Qué conocimientos se movilizan en las situaciones determinadas? ¿Cómo los estudiantes van a construir tales conocimientos?

Con el análisis preliminar se identificaron los elementos que nos permitieron definir una secuencia de problemas de construcción que posibilite el desarrollo de conocimientos relativos al razonamiento deductivo.

4.1.2. Análisis a priori

En esta etapa se tomó en cuenta lo realizado en el análisis preliminar para la organización de situaciones adidácticas. Además, se realizaron hipótesis de lo que podría ocurrir a la luz de la TSD: acciones que pueden realizar los estudiantes, retroacciones que ofrecerá el medio ante dichas acciones, tipos de actos de devolución que podrían emerger, por parte del docente, y momentos de la intervención en que los estudiantes posiblemente presentaran dificultades y como abordarlas. En sí, este elemento de la ingeniería didáctica busca analizar “lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone” (Artigue, 1995, p.45)

4.1.3. Experimentación

Durante esta etapa se realizó un pilotaje con la puesta en escena de las situaciones adidácticas realizadas en la anterior fase, y se llevó a cabo la recolección de datos por medio de capturas de pantalla y audios del trabajo realizado por los alumnos.

4.1.4. Análisis a posteriori

Se realizó la confrontación entre las hipótesis planteadas en el análisis a priori con los resultados del pilotaje aplicado. Artigue (1995) comenta que, durante esta fase, se busca rechazar o confirmar las hipótesis de acuerdo con lo expuesto en la fase de experimentación, por lo que dicha confrontación determina los resultados de investigación.

4.2. Población de estudio

Se realizó un pilotaje con cuatro estudiantes de recién ingreso del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, que se ubicaron en dos parejas para llevar a cabo las situaciones adidácticas propuestas, mediante el uso del software de geometría dinámica.

5. DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES

5.1. Análisis preliminar

Este análisis lo hicimos desde tres perspectivas: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica, para ello se indagó acerca de las características de las construcciones geométricas en el SGD, de las dificultades que podrían tener los estudiantes al trabajar con ellas y de las características de la enseñanza de la geometría euclidiana. Este análisis permitirá establecer las distintas variables didácticas de las situaciones que se estudiarán en el análisis a priori y proponer una serie de tareas que las constituyen.

5.1.1 Análisis epistemológico

En este apartado se expondrán las razones, encontradas en la literatura, por las cuales trabajamos las construcciones geométricas utilizando como medio el software de geometría dinámica DGPd para contribuir al desarrollo del razonamiento deductivo y se exponen algunos

elementos que constituyen el proceso de construcción de definiciones y cómo estos influyen en el razonamiento geométrico.

La enseñanza de la geometría euclidiana en la universidad busca, entre otras cosas, que los estudiantes utilicen las propiedades de las figuras geométricas para construirlas. Por ello, descartamos la idea de utilizar lápiz y papel para resolver los problemas que se plantearon puesto que, con el problema ya resuelto, no se puede evidenciar si el estudiante utilizó un razonamiento visual o uno deductivo (MEN, 2004). Por ejemplo, si planteamos el problema “Construir un triángulo rectángulo” el estudiante puede realizar 2 acciones: recordar prototípicamente como luce un triángulo rectángulo y trazarlo perceptivamente, o tener en cuenta la característica del ángulo recto y trazar una perpendicular a un segmento AB que pase por A y en ella ubicar el punto C. Se debe privilegiar la segunda acción, que corresponde a una interpretación matemática; por otra parte, para el maestro sería difícil identificar el primer procedimiento si no estuvo durante el desarrollo de este, por ende, no podría persuadir al estudiante de la invalidez de su acción porque el resultado visualmente sería equivalente. Si estas acciones se llevan a cabo en un SGD se podría discriminar la primera estrategia de la segunda porque al arrastrar los objetos en la primera, las propiedades que no han sido solicitadas con herramientas de construcción o aquellas que no se deducen de estas, se pierden al arrastrar los objetos. Desde el punto de vista de la TSD, esta retroacción favorece la validación de las acciones por parte del alumno. Así pues, podemos establecer un contrato didáctico con los estudiantes, en el que las producciones en el SGD que conserven las propiedades al arrastrar los objetos involucrados constituyen una construcción, mientras que aquellas que no, serán solamente un dibujo.

El MEN (2004) propone que, para realizar construcciones en el SGD se necesita garantizar propiedades de manera explícita, ya sea construyéndolas con herramientas de manera directa o

usando una serie de reglas teóricas para conseguirlas; esto ayuda a superar las limitaciones de la percepción y a pasar a una generalización, para lo cual se utiliza el razonamiento deductivo. En este sentido, el razonamiento deductivo surge al establecer conexiones lógicas entre distintos objetos de la construcción y sus propiedades, reconociendo relaciones de causalidad de manera perceptiva y discursiva. A medida que los estudiantes comprenden que hay propiedades de la construcción que se deducen de una regla teórica asociada a una herramienta de construcción y otras que no, se propicia la necesidad de hacer razonamientos deductivos conectando más de una regla teórica. Por ejemplo, los alumnos al disponer de la definición de rectas perpendiculares pueden justificar teóricamente que un ángulo es recto porque las dos rectas que lo forman son perpendiculares y, en general, podrían justificar muchas propiedades a través del uso de una definición que caracteriza a un objeto construido en la pantalla. Sin embargo, algunas propiedades que se perciben en la pantalla al realizar una construcción son consecuencias teóricas de otras propiedades, así pues, justificar estas discursivamente requiere de razonamientos deductivos. Por tanto, “la construcción puede constituirse en campo de exploración y reflexión, de donde la deducción puede nacer y organizarse. Pone en evidencia propiedades geométricas en juego y las relaciones entre ellas, constituyéndose en la semilla de la argumentación” (MEN, 2004, p.18).

Algunas de las reglas teóricas que se utilizan para realizar construcciones o para garantizar propiedades son las definiciones, dado que estas enuncian propiedades que describen objetos matemáticos y los incluye en un sistema axiomático. En efecto,

El paso de las aproximaciones preliminares implícitas de los estudiantes a las definiciones matemáticas requiere del mismo proceso desarrollado por la humanidad a lo largo de la historia, esto es, desde la construcción de definiciones en contextos empíricos al establecimiento de una

definición formal mediante aproximaciones por refinamiento (Samper; Aya y Echeverry, 2014, p.65).

Es decir, que la construcción conceptual de las definiciones debe ir acompañada con un trabajo empírico para pasar desde las concepciones iniciales, que tienen los estudiantes del objeto matemático, a una estructura más formal y completa. Dentro de las concepciones iniciales se encuentra la “imagen conceptual” definida por Vinner (2002), la cual es el esquema mental que tiene el estudiante asociado a un objeto, este incluye las imágenes mentales. Muchas veces en geometría, las imágenes mentales priman sobre el concepto teórico del objeto, lo que genera errores en el razonamiento geométrico. Por ejemplo, el estudiante puede tener como imagen mental que las alturas de los triángulos siempre deben estar dentro de este, lo que puede generar conflicto al observar las alturas de un triángulo obtusángulo, otro ejemplo es que los estudiantes tengan la concepción errónea de que las alturas de un triángulo coinciden con sus medianas y bisectrices por la representación mental de estos elementos en un triángulo equilátero.

5.1.2 Análisis cognitivo

A continuación, exponemos algunas dificultades que los estudiantes pueden presentar al usar las reglas teóricas de manera general, al trabajar con las definiciones de mediana, altura y bisectriz y al utilizar el SGD.

En lo que respecta a las reglas teóricas, algunas de las dificultades que se pueden presentar, según Morales y Samper (2015), son las siguientes: Teniendo dos reglas teóricas con el mismo consecuente, pero con premisas distintas para garantizarlo, los estudiantes no tienen en cuenta las propiedades de los antecedentes para considerar cuál de las dos es viable utilizar, sino que solo se fijan en el consecuente, es decir, en el producto que resulta al utilizar las reglas teóricas. También consideran que a los alumnos les genera conflicto no tener explícitamente dadas las condiciones

del antecedente, por lo que no dan cuenta que con los elementos dados se pueden garantizar esas condiciones para utilizar la regla teórica. Otra de las dificultades se basa en el hecho de poder particularizar un hecho geométrico general para poder usarlo en su discurso deductivo.

Ahora expondremos las dificultades que podrían tener los estudiantes al trabajar con las definiciones de los objetos geométricos afines a la secuencia de actividades diseñada:

- *Mediana:* Según Chávez y Parraguez (2014) los estudiantes pueden confundir las medianas de un triángulo con las bisectrices o las mediatrices de este, o considerar que al trazar una mediana se divide el triángulo en dos triángulos congruentes.
- *Altura:* Según Ortega y Pecharromán (2015) los estudiantes confunden las alturas de un triángulo con otros objetos y les asocian propiedades espaciales producto del uso reiterado de dibujos prototipo donde un lado es horizontal al cual llaman base. Por esto, consideran que el triángulo solo tiene una altura y que esta es vertical. También el uso excesivo de dibujos de triángulos isósceles, como representante de un triángulo cualquiera, propicia que a los estudiantes les cueste diferenciar las alturas de las medianas, bisectrices y mediatrices. Por este mismo fenómeno, los alumnos generan la concepción de que las alturas son siempre internas al triángulo.
- *Bisectriz:* Ortega y Pecharromán (2015) comentan que los alumnos confunden las bisectrices de un triángulo con sus medianas. Consideran la congruencia de ángulos como la igualdad de áreas, lo que genera que los estudiantes perciban la bisectriz como cualquier semirrecta que divida al triángulo en dos regiones de igual área y no utilizan los elementos que caracterizan la bisectriz según su definición.

Por otra parte, con respecto al uso del SGD, hay que tener cuenta que existen 2 tipos de objetos que se pueden construir: objetos libres y dependientes. Los primeros, son los que se pueden

desplazar sin ninguna restricción sobre el plano, mientras que los objetos dependientes se construyen a partir de uno o más objetos previos. Por ejemplo, se pueden construir dos puntos A y B que se pueden desplazar libremente sobre la pantalla, luego el punto medio de A y B con la herramienta punto medio. Este último no se podrá desplazar libremente ya que debe cumplir la condición de ser punto medio de A y B, por lo tanto, depende de estos dos. Esta dependencia nos permitirá proponer tareas en las que se solicitan objetos que cumplan ciertas propiedades, a partir de otros objetos dados como iniciales y así imponer restricciones al medio para favorecer el razonamiento deductivo dada la necesidad de encontrar estrategias que permitan garantizar las propiedades, favoreciendo el uso de reglas teóricas para tal propósito.

En este sentido, una de las primeras dificultades que enfrentarán los estudiantes es comprender que los objetos iniciales imponen restricciones al problema y que cambiar estos implica otro problema distinto al propuesto. Por ejemplo, no es lo mismo construir el punto medio de un segmento dado, que construir el extremo de un segmento, dado su punto medio y el otro extremo. Aunque ambas construcciones involucren la misma definición, se necesita realizar procesos de razonamiento y de construcción distintos.

Consideramos que a medida que se trabajen los problemas y haya más interacción con el medio, este ofrecerá los elementos necesarios para que los alumnos comprendan esta dependencia y a partir de la validación perceptiva a través del arrastre, se espera que se vaya resolviendo esta dificultad, ya que,

El arrastre, desde un punto de vista técnico enfatiza la jerarquía de los objetos geométricos, pone de manifiesto las relaciones entre dibujo y figura, altera el “carácter relacional” de los objetos geométricos, distinguiendo objetos que, desde un punto de vista teórico, son indistinguibles (Dal Maso, 2007, p. 35)

Otra dificultad que se espera en el transcurso de la experimentación es el paso de razonamientos meramente intuitivos con argumentos del lenguaje natural, a procesos discursivos deductivos. El MEN (2004), afirma que en esencia los 2 tipos de discursos no son lo mismo y hay que diferenciarlos, más aún en los casos en que los argumentos utilizados por los estudiantes pueden ser considerados como un razonamiento matemáticamente correcto. Para ayudar a realizar el tránsito entre el lenguaje natural a uno formal se les dará a los estudiantes un documento, ver Anexo 2 , que exponga definiciones, postulados y teoremas de la forma si-entonces, ya que una de las dificultades encontradas acerca del uso de las reglas teóricas consiste en “interpretar afirmaciones expresadas en lenguaje natural como una condicional en la que se establece una dependencia” (Morales y Samper, 2015, p.64). Por ejemplo, una de las propiedades del paralelogramo es la siguiente: “las diagonales de un paralelogramo se bisecan” como el enunciado no está de la forma si-entonces, algunos estudiantes tienen dificultades en reconocer la relación causal implícita de esta, por lo que difícilmente expresan la propiedad como: Si ABCD es un paralelogramo entonces sus diagonales se bisecan. Por lo tanto, esperamos que al proponer a los alumnos problemas que involucren objetos geométricos cuya caracterización está descrita de la forma sí entonces en el documento ofrecido, les invitará a reconocer las definiciones como relaciones de causalidad y paulatinamente a reconocer que la dependencia entre las propiedades observadas en la pantalla tiene también relaciones discursivas.

5.1.3 Análisis didáctico

La geometría es una rama de las matemáticas que tiene amplias dimensiones, esta se puede ver como una ciencia empírica del espacio que tiene sus fundamentos en la medición y descripción de figuras, un método para modelar situaciones cotidianas o de otras ramas de las matemáticas, un

punto de encuentro entre la matemática empírica y teórica y como un recurso para desarrollar el pensamiento deductivo (MEN, 2004).

Debido a la cantidad de dimensiones que posee la geometría, es necesario involucrar a los estudiantes en cada una de ellas a lo largo del estudio de esta rama de las matemáticas. Según el MEN (2004), se puede privilegiar alguna dimensión dependiendo del nivel escolar en el que se encuentre el alumno, de tal forma que vaya desde la exploración, descripción y clasificación de objetos concretos hasta una geometría deductiva y axiomática. Por tanto, las carreras universitarias que continúan con el estudio de la geometría tienen un enfoque que privilegia o que va dirigido a la geometría teórica.

Para constatar lo anterior, se realizó una revisión del libro *Elementos de geometría*, escrito por Carmen Samper, Óscar Molina y Armando Echeverry, este es un texto guía para el curso de mismo nombre de la Universidad Pedagógica Nacional del pregrado de licenciatura en matemáticas. En la introducción del libro queda claro que el curso de elementos de geometría pretende llenar vacíos conceptuales y dar herramientas para cursos posteriores en los que se estudia la geometría de manera formal.

Este documento no presenta un listado de temas para trabajar en clase, sino de situaciones que fomentan habilidades matemáticas alrededor de objetos geométricos; en el capítulo 1, el objetivo es desarrollar la visualización, esa capacidad de desconfigurar y reconfigurar figuras para determinar la validez de información a partir de imágenes de figuras en papel y lápiz o en el SGD, como se ve en la Figura 5-1.

1. Para cada una de las figuras que se presentan a continuación, escriba afirmaciones de las que puede estar seguro son ciertas.

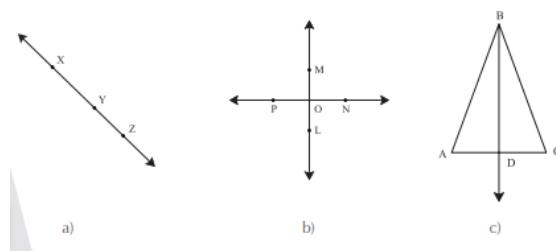


Figura 5-1, Problema de visualización

En el capítulo 2, los objetivos son desarrollar un lenguaje geométrico a través de definiciones y enseñar una estructura axiomática de las reglas teóricas; con esto se enseñan las propiedades que surgen a partir del cumplimiento de otras.

1. Usando la definición establecida para cuadrado y rectángulo, complete el diagrama-definición con la información requerida.

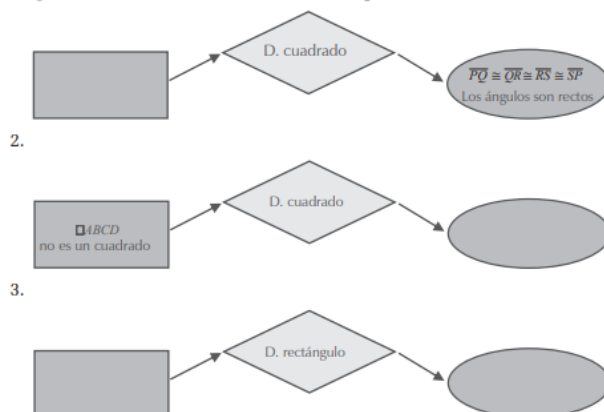


Figura 5-2, Ejemplo de diagrama-definición

En el tercer capítulo, se introducen las construcciones geométricas como “el instrumento que permite relacionar lo teórico con lo empírico. Particularmente, las construcciones contribuyen a dar el paso de la geometría de los dibujos a la geometría de los entes abstractos” (Samper et.al., 2013). En este capítulo se presentan situaciones en las que se le pide al estudiante que construya objetos geométricos o que siga protocolos de construcción que describen paso por paso las acciones que hay que realizar.

1. ¿Cómo se construye, en geometría dinámica, un ángulo congruente a otro?

Figura 5-3, Ejemplo de problema de construcción

5. Las instrucciones que se dan indican cómo usar las construcciones anteriores para construir un segmento de longitud $1/3$. Realice el proceso.

Paso 1. Construya el $\overline{AB}$ cuya longitud es la unidad.

Paso 2. Por un punto W exterior a $\overline{AB}$ dibuje $\overline{AW}$.

Paso 3. Sobre $\overline{AW}$ usando el compás y a partir del punto A , marque tres segmentos consecutivos de igual longitud, con cualquier medida. Denote los puntos de intersección por X_1 , X_2 y X_3 .

Paso 4. Trace $\overline{BX_3}$.

Paso 5. Construya los segmentos paralelos a $\overline{BX_3}$ que contengan, respectivamente, a X_1 y X_2 . Marque con Y_1 y Y_2 a los puntos de intersección de las paralelas con $\overline{AB}$, respectivamente. El $\overline{AY_1}$ mide $1/3$.

Figura 5-4, Ejemplo de protocolo de construcción

las actividades que se proponen tienen el objetivo de contribuir al desarrollo del pensamiento deductivo y tienen un enfoque de geometría formal. Para cumplir con el mismo, las tareas de construcción planteadas contribuyen a que los estudiantes observen que, no por tener una representación en la que aparentemente se cumplen las propiedades requeridas, en realidad se cumplan. Adicionalmente, estas tareas requieren el uso de una o más reglas teóricas dentro de las cuales se encuentran las definiciones de los objetos geométricos, por lo que es necesario que el estudiante determine la estructura lógica de las mismas y reconozca la necesidad de cumplir con las propiedades del antecedente para obtener el consecuente, esto mismo ayudará al alumno para justificar el cumplimiento de propiedades a partir del uso de herramientas y de reglas teóricas.

Aunado a lo anterior, desde una perspectiva local, se hizo una revisión del plan de estudios de geometría euclidiana, materia ofrecida a estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. En él muestran la geometría euclidiana como la asignatura que da las oportunidades para introducir a los estudiantes en el mundo de las definiciones, postulados, teoremas, axiomas, corolarios, etc. Este curso tiene como objetivo que los estudiantes

comprendan intuitivamente y demuestren formalmente propiedades de las figuras geométricas y utilicen para ello el método axiomático, con esto, se evidencia que el enfoque que se le da a la geometría prioriza la formalización y axiomatización de esta.

Uno de los recursos bibliográficos que utilizan los profesores en este curso es el libro *Geometría* de Stanley Clemmens, Phares O'Daffer y Thomas Cooney, ver Figura 5-5. Dicho libro consta de 14 capítulos, que van desde la definición de punto hasta la geometría de coordenadas.

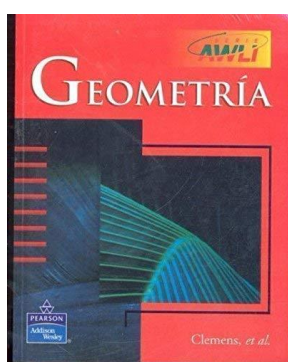


Figura 5-5, Libro "Geometría"

En el primer capítulo se trabajan con definiciones esenciales de lo que es punto, recta y plano; los ejercicios que se plantean atienden más al razonamiento visual, ya que a partir de un dibujo se les pide que realicen ciertas actividades, ver Figura 5-6

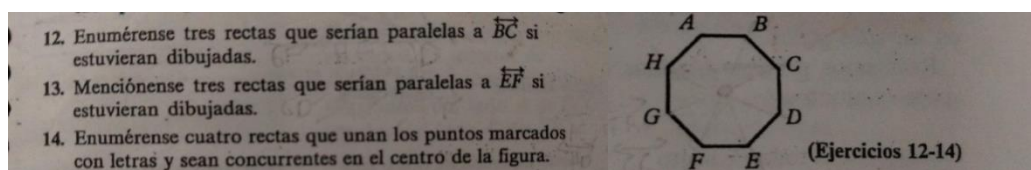


Figura 5-6, Actividad de visualización del libro "Geometría"

En el primer capítulo también se sugieren algunas construcciones, aunque el libro no da una definición de construcción geométrica si otorga unos protocolos para la construcción de congruencia de ángulos y segmentos, estas se realizan con lápiz y papel usando el compás y la

regla sin graduar, ver Figura 5-7. Adicionalmente, los ejercicios de construcción que se proponen en el libro requieren del uso repetitivo de las acciones descritas en los protocolos, ver Figura 5-8

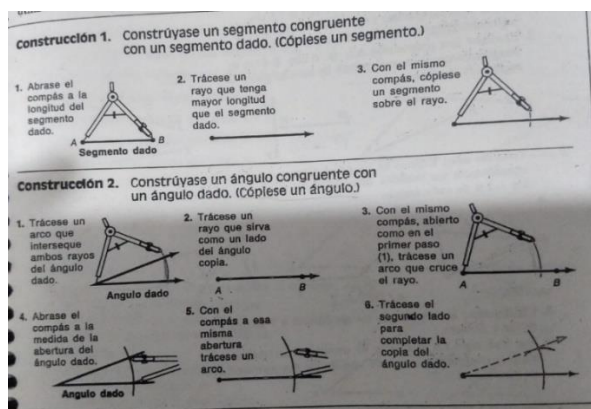


Figura 5-7, Catálogo de construcción en el libro "Geometría"

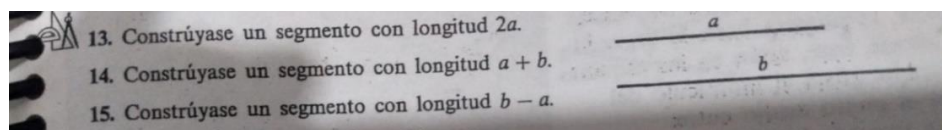


Figura 5-8, Problemas de construcción en el libro "Geometría"

En el segundo capítulo se definen y se dan ejemplos de lo que es el razonamiento deductivo, los contraejemplos, el razonamiento inductivo, de proposiciones si-entonces, recíproca, inversa y contrarrecíproca. En el capítulo 3 se estudian los triángulos, se presentan definiciones y postulados de congruencia, además, se muestra un esquema a dos columnas para la demostración de proposiciones, aquí se evidencia el razonamiento deductivo. Inicialmente se muestra un esquema usando directamente una definición, ver Figura 5-9, a medida que avanza el tema se presentan esquemas que requieren el uso de dos o más reglas teóricas, ver Figura 5-10. Durante los próximos capítulos, se trabajan otros objetos geométricos como rectas, planos, cuadriláteros, polígonos, semejanza, círculos, etc. En cada sección se ve el progreso en las demostraciones usando diferentes reglas teóricas.

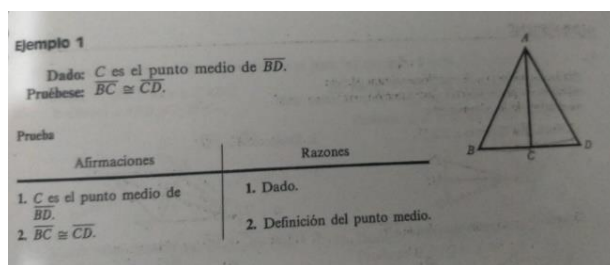


Figura 5-9, Demostración usando solo una definición

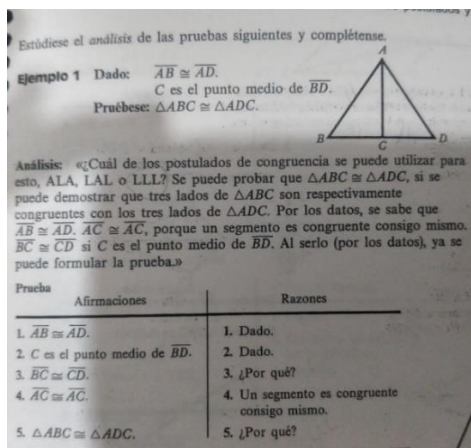


Figura 5-10, Esquema a completar con varias reglas teóricas

En el análisis de los textos guía se puede evidenciar un tránsito muy rápido y somero sobre la visualización y un paso apresurado a la demostración formal.

Como conclusión del análisis preliminar, consideramos que, antes de utilizar varias reglas teóricas a fin de solucionar problemas de construcción y demostración, conviene que el alumno realice una serie de acciones para hacer construcciones que involucren un razonamiento más simple e ir avanzando paulatinamente a un razonamiento más elaborado como exponemos a continuación:

1. Usar herramientas para construir objetos

El usar una herramienta en el programa implica que el objeto construido permanezca siendo ese objeto. Es decir, el estudiante reconoce que, al construir un objeto usando una herramienta en

DGPad, este se mantiene a pesar del arrastre. Por ejemplo, los estudiantes utilizan la herramienta “Punto medio” para construir el punto medio de dos puntos A y B o utilizan la herramienta “Perpendicular” para construir una recta perpendicular a otra. Además, reconocen que, al arrastrar los objetos iniciales de las construcciones, el punto medio y la perpendicular se mantienen.

2. Usar herramientas para construir unos objetos a fin de crear uno nuevo

Para construir un objeto que está conformado por distintos objetos, el estudiante usa herramientas que permiten construir esos objetos constitutivos. Es decir, enlazan dos o más acciones descritas en el primer ítem para conseguir el objeto requerido. Por ejemplo, si se quiere construir las medianas de un triángulo se deben construir los puntos medios de cada lado, utilizando la herramienta “punto medio”, y con la herramienta “segmento” construir los segmentos que van desde los puntos medios de los lados hasta los vértices opuestos correspondientes.

3. Usar herramientas para construir objetos que tienen propiedades que necesitan ver reflejadas en la pantalla

Recorre a la construcción de objetos que, por su definición, permiten garantizar propiedades. Por ejemplo, por la definición de círculo se sabe que si dos o más puntos están en un círculo entonces equidistan del centro. Por tanto, si se necesita equidistancia de puntos o segmentos congruentes resulta útil recurrir a la construcción de círculos. Otro caso sería el de garantizar ángulos rectos por medio de la construcción de rectas perpendiculares, ya que estas por definición forman ángulos rectos al intersectarse.

4. Usar herramientas para construir varios objetos que garantizan varias propiedades que son suficientes para obtener otra propiedad

Las reglas teóricas, en especial los teoremas, pueden contar con varias propiedades en el antecedente para conseguir el consecuente, posiblemente algunas de esas propiedades están asociadas con distintos objetos. Por tanto, los alumnos pueden usar las herramientas de DGPad para construir los diferentes objetos que aseguran las propiedades requeridas en el antecedente de un teorema a fin de obtener otra propiedad. Por ejemplo, el segundo Teorema de Tales requiere como antecedente un triángulo inscrito en un círculo con un lado diámetro. En este sentido, se requiere construir varios objetos para garantizar estas propiedades y obtener un ángulo recto.

5. *Utilizar varias reglas teóricas para concatenarlas en razonamientos deductivos y producir propiedades más elaboradas por medio de la construcción de varios objetos*

Los estudiantes usan herramientas para construir objetos que garantizan varias propiedades a fin de conseguir las propiedades del consecuente, estas funcionan a su vez como antecedente de otra regla teórica para cumplir con otra propiedad. Por ejemplo, si se solicita construir, a partir de una recta dada, un ángulo tal que dicha recta sea su bisectriz, se necesita garantizar la congruencia de ángulos; luego se podrían construir dos triángulos congruentes y para ello usar el postulado de congruencia LLL.

Este proceso se incorporó en el diseño de las actividades propuestas, de tal forma que el estudiante transite entre las acciones mencionadas, empezando por razonamientos sencillos que privilegian el razonamiento visual llevándolo paulatinamente hacia el razonamiento deductivo. Las actividades fueron diseñadas en el marco de la teoría de las situaciones didácticas y proyectadas para utilizarlas durante las clases de geometría euclidiana. La secuencia didáctica tiene como objetivo lograr un avance en el razonamiento deductivo de los estudiantes, por ello, durante la solución de las tareas se va a necesitar cierto tipo de comportamiento por parte de ellos y del

maestro. En este sentido, en nuestro diseño es importante tener en cuenta el contrato didáctico, ya que

La ilusión de que hay un contrato es indispensable para que la relación se dé y, eventualmente, tenga éxito. Cada uno, el maestro y el alumno, se hacen una idea de lo que el otro espera de él... esta idea crea las posibilidades de intervención, de devolución de la parte adidáctica de las situaciones y de la institucionalización (Brousseau, 2007, p.70)

Se espera que los estudiantes asuman un papel protagónico durante la clase y cada vez que sientan la necesidad de usar las herramientas de construcción para garantizar las propiedades de los objetos geométricos recurran al documento de las reglas teóricas y que hagan uso del discurso para explicitar la relación entre la herramienta de construcción y una regla teórica. Cabe aclarar que “la existencia del contrato didáctico no excluye la existencia de espacios en los que el alumno debe actuar como sujeto matemático y a-didáctico” (Margolinas, 2009, p.61).

Por parte del profesor, se tiene contemplado que convide a los estudiantes a utilizar el documento de reglas teóricas cada vez que haya un término desconocido o cuando hayan utilizado una herramienta, para explicitar la conexión entre esta y una regla teórica y que invite a los alumnos a justificar los pasos de la construcción. De esta manera, esperamos que los estudiantes vayan formalizando sus producciones en la pantalla, a través de un tránsito suave entre la percepción y la teoría.

5.2 Análisis a priori

En esta sección se expondrán los propósitos de las actividades propuestas en la secuencia didáctica y se describirán las acciones de los estudiantes y las retroacciones pertinentes que pueden surgir en cada una de las tareas.

Las tareas planteadas se dividieron en dos actividades y a su vez, cada actividad se dividió en tres secuencias, a continuación, se presentará cada actividad y cada secuencia para posteriormente realizar el debido análisis de las tareas expuestas.

ACTIVIDAD 1:

1° Secuencia

1. Dados dos puntos A y B, construir un punto M, tal que M sea el punto medio de A y B.
2. Dado un segmento AB, construir un punto M, tal que M sea el punto medio del segmento AB.
3. Dados dos puntos A y M, construir un punto B, tal que M sea el punto medio de A y B.

2° Secuencia

1. Dado un triángulo ABC, construir las medianas AL, BM y CN.
2. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $2AM=AB$.
3. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $AM=2AB$.

3° Secuencia

1. Dado un triángulo ABC, construir las alturas AL, BM y CN.
2. Dados un segmento AB y un punto P, construir un triángulo ABC, tal que las alturas pasen por P.
3. Dadas dos rectas r y s, construir un triángulo ABC con alturas AL y BM, tal que A y L estén en r y, B y M estén en s.

ACTIVIDAD 2**1° Secuencia**

1. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD.
2. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $BC=3AB$.
3. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $2BC=3AB$.

2° Secuencia

1. Realice la siguiente tarea exploratoria:
 - i. Ubique dos puntos A y B fijos.
 - ii. Ubique un punto C cualquiera y halle la medida del ángulo ACB. (No nombre al punto)
 - iii. Arrastre el punto C hasta que el ángulo ACB aproximadamente sea de 90° .
 - iv. Oculte la medida del ángulo ACB.
 - v. Repita desde el paso ii.
2. Dados dos puntos P y Q construir todos los puntos R tal que $\angle PRQ$ sea de 90°
3. Enunciar una proposición de la forma si-entonces que describa el hecho descubierto en 1.

3° Secuencia

1. Dadas dos rectas r_1 y r_2 , construir un triángulo ABC tal que la bisectriz del ángulo BAC esté contenida en r_1 y la bisectriz del ángulo ABC esté contenida en r_2

La primera actividad tiene como objetivo que los estudiantes usen las de definiciones de objetos geométricos, tales como punto medio, mediana y altura, para resolver las situaciones presentadas; para ello, se requiere que reconozcan la relación causal de las definiciones, que basta garantizar unas propiedades para obtener el objeto solicitado; en otras palabras, que el estudiante comprenda que los objetos geométricos son caracterizados por sus propiedades y muchas de estas se pueden obtener a partir de herramientas de construcción, de manera directa.

La segunda actividad tiene como propósito el uso de las definiciones de rectángulo, los postulados de perpendicularidad y paralelismo, y de congruencia de triángulos para que, por medio del uso de estas relaciones causales, puedan argumentar el manejo de herramientas o la presencia de propiedades no construidas directamente con alguna herramienta del software. Con lo anterior se espera la consolidación de las relaciones de causalidad y las habilidades discursivas de los estudiantes para así desarrollar razonamientos deductivos.

Para cada tarea planteada, se propondrán hipótesis sobre las posibilidades de acción por parte de los alumnos, las retroacciones del medio y actos de devolución por parte del profesor. A continuación, se presenta cada tarea con su respectivo análisis.

ACTIVIDAD 1:

El objetivo de esta actividad es que los alumnos reconozcan la relación causal de las definiciones y utilicen las herramientas de construcción de DGPad para garantizar las propiedades involucradas, en tanto que, una definición tiene como propósito caracterizar a un objeto para distinguirlo de otros, a partir de condiciones (propiedades) precisas y específicas que cumple. Así pues, le ofrecemos a los alumnos una lista de definiciones enunciadas de la forma si-entonces, de modo que usen estas relaciones discursivas entre un “nombre” y unas propiedades asociadas a él

para empezar a utilizar razonamientos deductivos simples e irlos movilizandohacia otros cada vez más elaborados. Este último objetivo lo pretendemos lograr a través de problemas de construcción en los que se modifican los objetos dados, de modo que se requieran distintos razonamientos deductivos, aunque se trata de la misma definición.

A continuación, se presentarán las secuencias en las cuales se ponen en juego las definiciones de punto medio, mediana y altura de triángulos. Para ello, los estudiantes tendrán a su disposición una lista de reglas teóricas que incluye las definiciones que se requieren para resolver los problemas pero que no son las únicas con las que cuentan. De modo que, el estudiante tiene que discriminar las que considere pertinentes entre las definiciones y postulados disponibles, con el fin de desarrollar las construcciones.

1° Secuencia:

Las tareas que se proponen en esta secuencia tienen como base el uso directo de la definición de punto medio: un punto equidista de otros dos y está alineado con ellos si y solo si, es punto medio de esos dos puntos.

- **Tarea 1:** *Dados dos puntos A y B, construir un punto M, tal que M sea el punto medio de A y B.*

En este problema las posibles acciones que pueden llevar a cabo los estudiantes son las siguientes:

- Crear un punto M y ubicarlo de tal forma que perceptivamente parezca el punto medio de A y B, es decir, que luzca alineado y equidistante a los puntos dados. Observe la Figura 5-11.

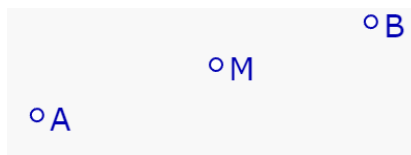


Figura 5-11, Ubica el punto medio perceptivamente

Esta acción no soporta la prueba de arrastre, por lo que el profesor puede devolver el problema a los alumnos con preguntas como ¿M sigue siendo el punto medio si arrastro B? Haciendo énfasis en la necesidad de que las propiedades deben cumplirse aún después de arrastrar los objetos, esperamos que los alumnos invaliden las acciones perceptivas en esta y las siguientes tareas.

- Crear el segmento AB, ubicar un punto M en él y acomodarlo hasta que, perceptivamente, parezca equidistar de los extremos. Note la Figura 5-12

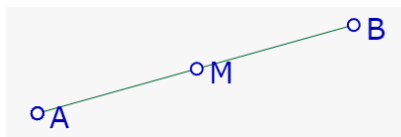


Figura 5-12, Punto medio perceptivamente ubicado en el segmento AB

Esta acción solo asegura que el punto creado está alineado con los puntos dados, pero no mantiene la característica necesaria de equidistar de los extremos; para que el estudiante se percate de tal dificultad se podrán solicitar a los estudiantes arrastrar el punto M y preguntarle: ¿Sigue siendo M el punto medio luego de arrastrarlo? O ¿Qué propiedades deben cumplirse para que M sea punto medio? ¿Se cumplen estas al arrastrar? De esta manera los alumnos pueden empezar a reconocer el arrastre en el medio como un factor importante para la validación.

- Utilizar la herramienta mediatriz, ubicar un punto M en ella y hacerlo parecer alineado con los puntos A y B. Como se ve en la Figura 5-13



Figura 5-13, Uso de la herramienta mediatriz

Aunque la definición de mediatriz no haya sido discutida en clase, la tienen a disposición en el documento compartido por el profesor y entre las herramientas que ofrece DGPad está la mediatriz, por ende, al observar el ícono de la herramienta “mediatriz”, pueden intuir que el punto medio está en dicha recta. Como el punto M no se encuentra alineado con los puntos dados, se puede reiterar las preguntas planteadas anteriormente ¿Cuáles características son necesarias para que M sea punto medio? ¿Cuáles características se mantienen al arrastrar todos los puntos? ¿Cuáles características se pierden al arrastrar todos los puntos?

A partir de los actos de devolución el estudiante puede crear el segmento AB y construir el punto M como la intersección del segmento y la mediatriz, lo cual generaría una construcción válida. Sin embargo, la construcción de la mediatriz se daría no de manera consciente sino por la intuición.

- Crear el segmento AB y usar la herramienta punto medio o usarla directamente sin necesidad de construir el segmento. Ambas opciones se pueden ver en la Figura 5-14



Figura 5-14, Uso de la herramienta punto medio

Esta acción soporta la prueba de arrastre cumpliendo con las dos propiedades del punto medio.

Consideramos que la tarea 2, la cual es “dado un segmento AB, construir un punto M, tal que M sea el punto medio del segmento AB”, podría presentar las mismas posibles acciones por parte de los estudiantes que las expuestas en la tarea 1, no se explicitan aquí.

- **Tarea 3:** *Dado dos puntos A y M, construir un punto B tal que M sea el punto medio de A y B.*

Las posibles acciones que pueden realizar los estudiantes son las siguientes:

- Construir el punto medio de AM y luego cambiar sus nombres, es decir, al punto medio colocarle M y a los extremos A y B. Observe la Figura 5-15



Figura 5-15, No considerar los puntos Dados

Esta acción, por parte el alumno, daría cuenta de que no tiene claro que los objetos dados deben ser independientes de los otros objetos. Por tanto, se le puede pedir al estudiante que arrastre M; también se le puede requerir que elimine el punto B y podrá apreciar que el punto M desaparecerá. De esta manera, el estudiante notará que M es un punto dependiente y no un punto dado como lo indica el enunciado, de esta manera podrá invalidar su estrategia.

- Crea un círculo con centro en M que pase por A, ubica un punto B en él y lo arrastra tal que visualmente parezca alineado con A y M. Como se observa en la Figura 5-16

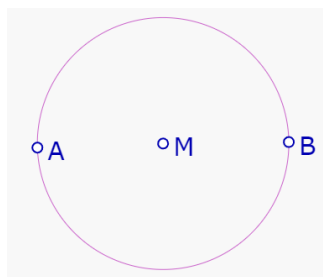


Figura 5-16, Círculo con centro en M que pasa por A

El alumno, por medio de la definición, reconoce que el círculo le permite garantizar distancias iguales, por tanto, que A y B deben estar en un círculo con centro M. Sin embargo, no estaría teniendo en cuenta que es necesario que A, B y M estén alineados. Como actos de devolución planteamos los siguientes cuestionamientos, ¿Qué características necesarias se mantienen cuando se arrastra M o el punto A? ¿M sigue siendo el punto medio de A y B luego de arrastrar?

- Crear un círculo M que pase por A y trazar la recta AM, el punto B será la intersección entre el círculo y la recta. Note la Figura 5-17

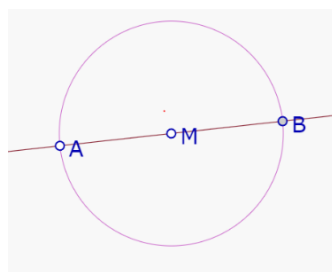


Figura 5-17, Construcción adecuada de la tarea 3 de la 1° Secuencia

Esta sería una solución que garantiza las propiedades de equidistancia y colinealidad.

Esperamos que los alumnos empiecen a utilizar el arrastre espontáneamente como una estrategia para determinar perceptivamente si las propiedades se conservan y validar sus producciones. En este sentido, de ahora en adelante el énfasis estará en reconocer que los objetos

dados imponen restricciones a las acciones y que la construcción debe elaborarse a partir de ellos y no ellos a partir de otros objetos previos.

2° Secuencia:

Las tareas que se proponen en esta secuencia tienen como base el uso directo de la definición de mediana: un segmento es una mediana de un triángulo si y solo si, va desde un vértice del triángulo hasta el punto medio del lado opuesto. Para las tareas que se plantean se requiere el uso de las construcciones de la 1° *secuencia*, de modo que los razonamientos que realicen sean más robustos que los anteriores, desarrollándolos con base en otros que tienen más consolidados, favoreciendo el refuerzo de las acciones mediante la formulación de estas a través de herramientas de construcción.

- **Tarea 1:** *Dado un triángulo ABC, construir las medianas AL, BM y CN*

Debido a los problemas anteriores, se espera que los alumnos construyan el punto medio de cada lado del triángulo, por tanto, se considera que este problema de construcción lo realicen satisfactoriamente trazando los segmentos que van desde los vértices A, B y C hasta los puntos medios de los lados opuestos correspondientes, como se observa en la Figura 5-18. Sin embargo, en caso de que los alumnos recurran a estrategias perceptivas, se espera que arrastren los objetos y puedan invalidarlas. También es posible que no recurran a la definición de mediana que tienen en el documento, sino que acudan a sus concepciones de mediana y podrían confundirlas con las alturas u otros objetos. En este caso, se requiere de un acto de devolución por parte del profesor, quien podría invitarlos a enunciar las propiedades que debe cumplir AM par ser mediana del triángulo, y de no manifestarlas, recomendarles acudir al documento.

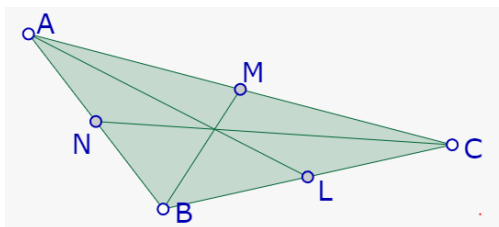


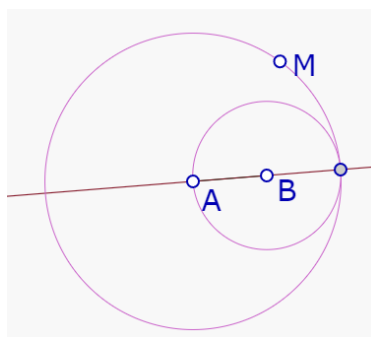
Figura 5-18, Construcción de las medianas

- **Tarea 2:** Dado un segmento AB , construir un triángulo ABC con mediana AM , tal que $2AM = AB$

En esta situación el estudiante podrá colocar y arrastrar un punto C y un punto M tal que cumplan las condiciones solo perceptivamente; sin embargo, con el progreso y el desarrollo de los problemas anteriores, se espera que esto no ocurra. Otras de las acciones que podrían realizar los alumnos son:

- Considerar AM como el doble de AB y trazar un círculo con centro en A y radio $2AB$.

Note la Figura 5-19


 Figura 5-19, Confusión de la relación $AB=2AM$

Esto sucede cuando el estudiante considera que tener $2AM=AB$ indica que es más grande AM que AB . Para que el estudiante reconozca la verdadera relación se podría preguntar ¿Cuál segmento tiene mayor longitud AM o AB ? ¿Cuántos segmentos de longitud AM necesito para completar AB ? ¿Se ve reflejado eso en la construcción?

- Construir el punto medio de AB y considerar este como M. Así como se ve la Figura 5-20.

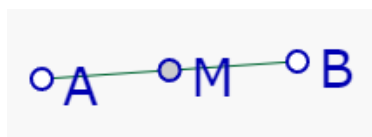


Figura 5-20, AM colineal con AB

Esta acción cumple que $2AM=AB$, sin embargo, no es posible que M esté alineado con A y B, puesto que M es punto medio del lado BC, opuesto a A. Para que los alumnos reconozcan tal imposibilidad, el profesor podría sugerir hacer un dibujo imaginando el problema resuelto, convidándolos a enunciar las propiedades que deben cumplirse y preguntar por la posición del punto M. Consideramos que, con estos actos de devolución y las retroacciones del medio al arrastrar, los alumnos invalidarán sus acciones.

- Construir un círculo con centro en B que pase por el punto medio de AB y ubicar en él cualquier punto M. Vea la Figura 5-21

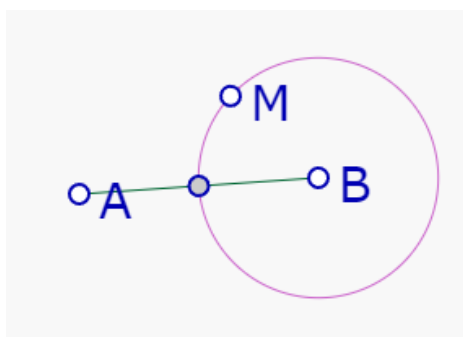


Figura 5-21, Considera que la mediana pedida parte de B

Con dicha acción, la relación que se cumple es que $2BM=AB$, por tanto, el estudiante debe reconocer que la mediana deseada va desde el vértice A hasta el punto medio de BC y que lo conveniente es que el círculo tenga centro en A. Se le puede pedir al estudiante que mueva el punto

M y preguntarle ¿Se cumple que $2AM=AB$? o ¿Con el círculo creado que relación se cumple? ¿Es la deseada?

- Construir un círculo con centro en A que pase por el punto medio AB, ubicar un punto M en él y un punto cualquiera C en la recta AM. Esto se observa en la Figura 5-22

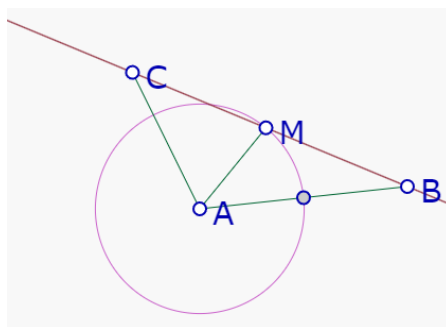


Figura 5-22, No considerar M como punto medio de BC

Con el círculo construido se garantiza la relación deseada, además reconocen que M debe estar en el lado opuesto a A, en BC. Sin embargo, no cumple con la propiedad de ser punto medio de tal lado. Para ello, los actos de devolución se realizarían por medio de preguntas como, ¿Según la definición de mediana, qué propiedades se deben garantizar para que AM sea una mediana? ¿Se están cumpliendo? ¿Cómo garantizarías cada una de ellas?

- Construir un círculo C_1 con centro en A que pase por el punto medio AB, ubicar un punto M en él, luego construir un círculo C_2 con centro en M que pase por B, el punto de intersección de BM y el círculo C_2 , será el punto C. Vea la Figura 5-23

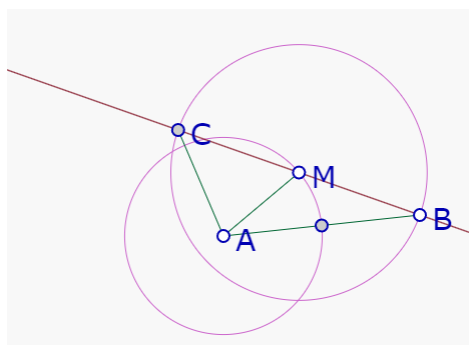


Figura 5-23, Construcción adecuada de la tarea 2 de la 2° Secuencia

Esta sería una solución que garantizaría que $2AM=AB$ y que M sea punto medio de BC.

- **Tarea 3:** Dado un segmento AB , construir un triángulo ABC con mediana AM , tal que $AM=2AB$

Al hacer el contraste de este problema con el anterior podrán comprender que no solamente podemos dividir un segmento en dos partes sino también duplicarlo, las acciones que posiblemente lleven a cabo los estudiantes al tratar el problema son las siguientes:

- Construir un círculo c_1 con centro en A que pase por N, tal que N sea el punto medio de AB y ubicar el punto M en cualquier parte de c_1 . Note la Figura 5-24

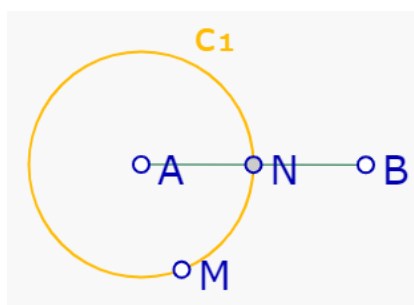


Figura 5-24, Confusión de la relación $2AB=AM$

Esta acción puede surgir de la idea de que AB es más grande que AM, exactamente la mitad, se espera que esta esta situación no se presente por lo trabajado en el anterior problema. En

caso de suceder se podría manejar con preguntas como ¿Cuál segmento es mayor, AB o AM? ¿Se ve reflejado en la construcción?

- Construir un círculo c_1 con centro en B que pase por A y construir M tal que M es el punto de intersección entre la recta AB y c_1 . Esto lo puede observar en la Figura 5-25

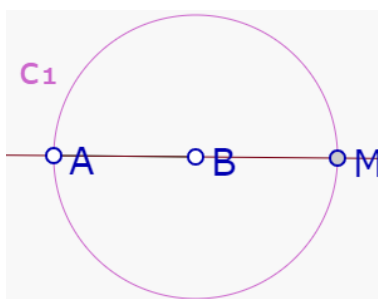


Figura 5-25, Ubican M colineal a A y a B

En dicha situación los estudiantes garantizan la relación $2AB = AM$, sin embargo, solo considerarían un punto que cumple la relación, el cual no es el indicado para resolver el problema por la definición de mediana, para que el estudiante evidencie este obstáculo se le podría preguntar ¿Dónde ubicarías el punto C? ¿La intersección del círculo c_1 y la recta AB es el único punto que cumple la relación?

- Construir un círculo c_1 con centro en B que pase por A y ubicar el punto M en cualquier parte de c_1 . Lo anterior se contempla en la Figura 5-26

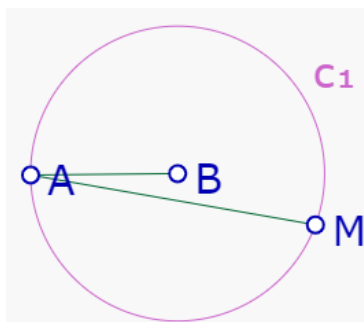


Figura 5-26, Ubicar un punto M en el círculo con diámetro 2AB

Los alumnos podrían considerar que la relación $2AB = AM$ se cumple debido a que los puntos A y M equidistan del centro del círculo c1 cuyo radio es AB. Sin embargo, la afirmación sería verdadera únicamente si los puntos A, B y M estuvieran alineados. Lo que se cumple con la construcción es que $2AB = AB + BM$. Las preguntas que se le podrían hacer a los estudiantes para que noten que no se cumple la relación son ¿Qué regla teórica usaste para garantizar que $2AB = AM$?; Si ubicas otro punto R en c1 ¿Cumple que $2AB = AR$?; ¿La relación se mantiene cuando se arrastran los puntos libres? En este caso lo que perciben los estudiantes al arrastrar, les ofrece una evidencia de que la propiedad que buscan no se da, de manera que invalidarán estas acciones.

- Construir el círculo c1 con centro en B que pase por A y construir el punto D tal que D sea el punto de intersección entre la recta AB y el círculo c1. Posteriormente construir el círculo c2 con centro en A que pase por D y ubicar un punto M cualquiera en el círculo. Por último, ubicar el punto C en cualquier parte de la recta BM. Para comprender estas acciones observe la Figura 5-27

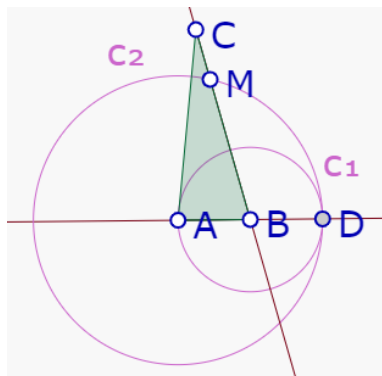


Figura 5-27, Aseguran la relación, pero M no es punto medio

Con esta construcción se garantiza la relación $2AB = AM$, además de tomar en cuenta que M, al ser punto medio del lado opuesto al vértice A, es colineal con B y C, por lo que C está en la recta BM. Sin embargo, el estudiante al ubicar cualquier punto sobre la recta BM está ignorando que M es el punto medio de B y C, por lo que AM no sería mediana, para que los estudiantes

evidencien este hecho el profesor debe invitar a los alumnos a comprobar las propiedades una a una, mediante el arrastre.

- Construir el círculo c_1 con centro en B que pase por A y construir el punto D tal que D sea el punto de intersección entre la recta AB y el círculo c_1 . Posteriormente construir el círculo c_2 con centro en A que pase por D y ubicar un punto M cualquiera en c_2 . Por último, construir el círculo c_3 con centro en M que pase por B y construir el punto C , tal que C es la intersección de la recta BM y c_3 . Estas acciones están planteadas en la Figura 5-28

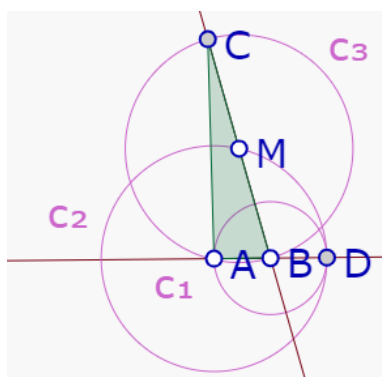


Figura 5-28, Construcción adecuada de la tarea 3 de la 2° secuencia

Esta sería la construcción que se espera de los estudiantes, luego de lograr los aprendizajes necesarios gracias a la interacción con el medio y a los actos de devolución por parte del profesor.

Esta secuencia, a diferencia de las anteriores, implica garantizar más de una propiedad de manera directa con herramientas de construcción (punto medio y círculo), asociadas al uso de dos definiciones. En cuanto a la primera, la de punto medio, esperamos ya se haya afianzado en la secuencia anterior. En cuanto a la definición de mediana, requiere de procesos de razonamientos un poco más elaborados, así que en este caso esperamos evidenciar esta evolución en el reconocimiento de las restricciones que imponen los objetos dados, que podrían ser formuladas

verbalmente o a través de acciones que den cuenta de esto de manera explícita. También esperamos que recurran, con mayor insistencia, a las definiciones de las que disponen, para justificar sus acciones y no simplemente a la intuición.

3° Secuencia:

Las tareas que se proponen en esta secuencia tienen como base el uso directo de la definición de altura de un triángulo la cual se registra en el documento como sigue: “si un segmento es una altura de un triángulo entonces va desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto en dirección perpendicular a este”.

- **Tarea 1:** *Dado un triángulo construir las alturas AL , BM y CN*

Para esta tarea se requiere que el estudiante lea la definición de altura y construya las perpendiculares pertinentes, no obstante, pueden surgir algunas dificultades al construir las alturas, entre ellas se podrían mencionar las siguientes:

- Construir perpendiculares que pasen por el punto medio de cada lado del triángulo. Es decir, construir las mediatrices. Observe la Figura 5-29

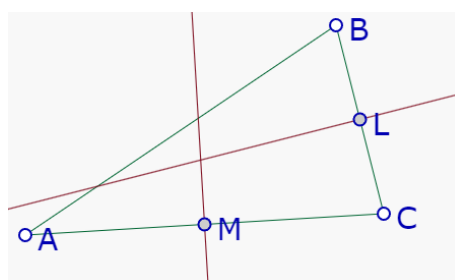


Figura 5-29, Confundir mediatriz con altura

En este caso el estudiante considera que la altura va necesariamente hasta el punto medio del lado opuesto al vértice, esto tal vez surge por la definición de mediana utilizada previamente. Como actos de devolución el profesor puede pedir que lea la definición de altura de un triángulo

y que cuestione ¿Cuáles condiciones se deben concretar para que un segmento sea altura de un triángulo? ¿En la construcción se cumplen? ¿Es necesario que la altura vaya hasta el punto medio?

- Trazar perpendiculares a los segmentos AB, AC y BC que pasen por los puntos C, B y A respectivamente. Las intersecciones entre las perpendiculares y el segmento serán los puntos N, M y L correspondientemente. Lo anterior se evidencia en la Figura 5-30

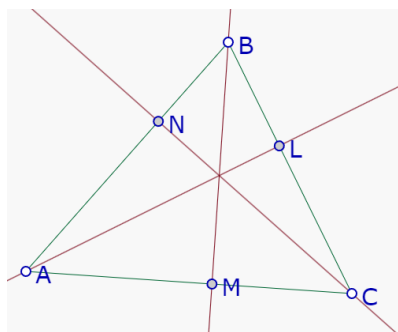


Figura 5-30, Construcción basada en los segmentos de los lados

Aunque esta construcción va del vértice al lado opuesto de manera perpendicular, se tiene la idea que la altura siempre estará dentro del triángulo; por tanto, se le puede pedir al estudiante que arrastre los puntos dados y observará cómo los puntos M, N y L desaparecen cuando el triángulo que se forma es obtuso. Como actos de devolución se le puede pedir al estudiante que lea de nuevo la definición, ¿Qué significa “va desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto”?, si dibujas un triángulo obtuso, ¿Cuáles son las alturas de ese triángulo?

- Trazar perpendiculares a las rectas que contienen los segmentos AB, AC y BC que pasen por los puntos C, B y A respectivamente. Las intersecciones entre las perpendiculares y las rectas serán los puntos N, M y L correspondientemente. Ver Figura 5-31

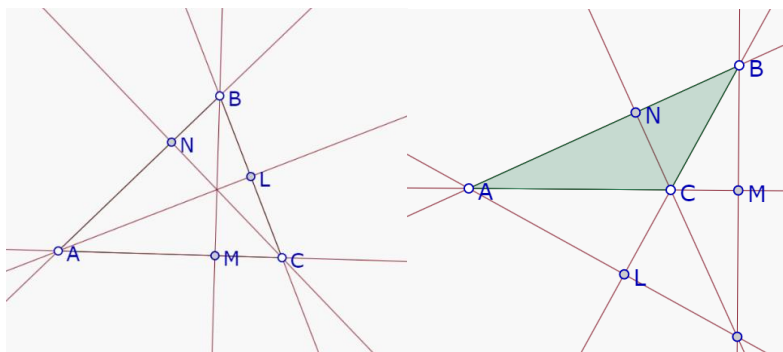


Figura 5-31, Construcción adecuada de la tarea 1 de la 3° Secuencia

Esta construcción es satisfactoria por lo que soporta la prueba del arrastre.

En esta tarea no esperamos que los alumnos cambien las condiciones dadas puesto que lo más natural para los alumnos es construir primero el triángulo y a continuación sus elementos constituyentes y, dado que el triángulo es lo dado, consideramos que por él empezarán la construcción. Sin embargo, los alumnos podrían intentar iniciar con un triángulo equilátero, haciendo uso de la herramienta círculo, en este caso el profesor debe intervenir para cuestionar la naturaleza del triángulo y devolver el problema a los alumnos. En consecuencia, se espera que se refuerce la acción de utilizar herramientas de construcción para garantizar las propiedades, en este caso la herramienta recta perpendicular para garantizar que la recta contenga a la altura del triángulo.

- **Tarea 2:** *Dados un segmento AB y un punto P , construir un triángulo ABC , tal que las alturas pasen por P .*

Al igual que en la tarea anterior, esta se resuelve utilizando la definición de altura de un triángulo y construyendo las rectas perpendiculares adecuadas. Las acciones que los estudiantes pueden realizar son las siguientes:

- Construir el punto M, tal que M sea el punto medio del segmento AB y posteriormente trazar la recta MP, como se muestra en la Figura 5-32.

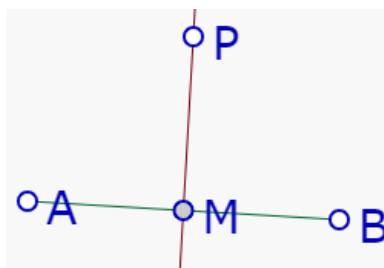


Figura 5-32, Considerar que la altura pasa por el punto medio

En este caso los estudiantes asimilan que la altura de un triángulo pasa por el punto medio del lado opuesto al vértice. Lo anterior podría deberse al trabajo previamente realizado sobre medianas o porque perceptivamente las alturas de triángulos realizados por los estudiantes pasan por el punto medio (generalmente trazan triángulos isósceles o equiláteros). Dado el caso que los estudiantes se encuentren en esta situación se le realizarán preguntas como ¿Cuáles son las condiciones para que un segmento sea altura de un triángulo? Si arrastras los objetos dados ¿Se conservan estas condiciones?

- Construir un $\triangle ABC$ con sus respectivas alturas y construir P, tal que P es el punto de intersección de las alturas del triángulo. Observe la Figura 5-33.

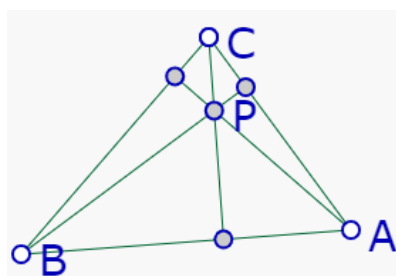


Figura 5-33, Construir el ortocentro cuando está dado

Esta acción evidenciaría que el alumno aun no comprende que los objetos dados deberían ser independientes de los demás objetos. Se espera que esta situación no se presente debido al

trabajo realizado en la anterior secuencia. No obstante, en caso de presentarse se le podría pedir al estudiante que borre el punto C, lo que provocaría la eliminación del punto P. Con el anterior acto de devolución los estudiantes notaran que el punto P depende de C y por tanto no es dado.

- Construir la recta AP y punto libre en ella llamado M, luego construir el punto C tal que el punto medio de B y C sea M. Ver la Figura 5-34

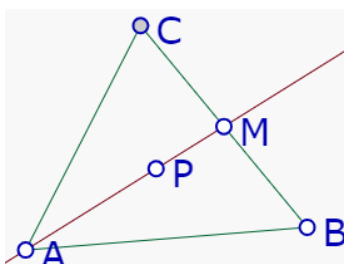


Figura 5-34, M debe estar en AP, pero confunde altura con mediana

Esta acción evidenciaría que el estudiante utiliza la definición de altura al construir la recta AP y reconocer que sobre esa recta hay un punto M que está en el segmento BC, es decir, en el lado opuesto al vértice. Sin embargo, elige un punto cualquiera y asimila que este punto M coincidiría con el punto medio del lado opuesto para todos los triángulos, lo cual es incorrecto. Para que el estudiante note que la construcción no cumple las condiciones, se le podría pedir que arrastre los puntos dados y preguntarles sobre las propiedades que no deberían cumplirse y si estas efectivamente se mantienen al arrastrar.

- Construir r, tal que r sea una recta perpendicular a AB que pase por el punto P y construir el punto C en cualquier parte de la recta r. Perciba la Figura 5-35

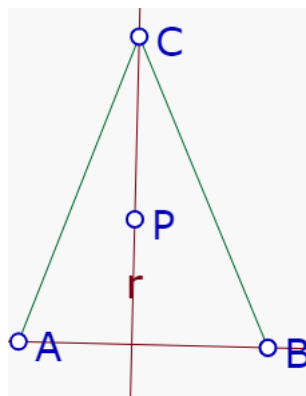


Figura 5-35, Ubicar C en cualquier parte de r

Se puede notar en esta acción que el estudiante está utilizando la definición de altura, ya que reconoce que esta debe ser perpendicular al lado opuesto y, además, tiene en cuenta que en dicha recta perpendicular debe estar el punto C, ya que uno de los extremos de la altura es el vértice opuesto al segmento. Sin embargo, esta acción solo garantizaría que una altura pasa por P, por lo que le faltaría garantizar que las otras dos alturas cumplan lo mismo. Para que el estudiante evidencie ello se le podría preguntar ¿la construcción cumple con las condiciones requeridas? Al arrastrar los objetos dados ¿Se mantienen dichas condiciones?

- Construir las rectas r y s, tal que r sea una perpendicular a AB que pase por el punto P y s sea una recta perpendicular a AP que pase por B. Por último, construir el punto C, tal que C sea el punto de intersección de r y s. Note la Figura 5-36

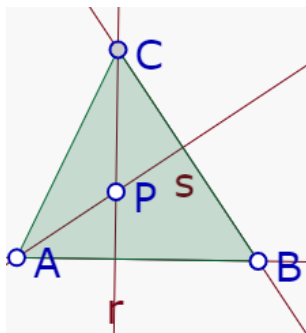


Figura 5-36, Construcción idónea de la tarea 2 de la 3° Secuencia

Esta sería una construcción idónea que resistiría la prueba del arrastre.

Esta tarea involucra un tipo de razonamiento inverso al de la anterior y requiere concatenar dos veces el mismo razonamiento. Es decir, en la tarea dos se podía realizar la construcción siguiendo de manera lineal la definición y con razonamientos individuales. Esto es, como la altura es perpendicular al lado opuesto al vértice, se selecciona el lado opuesto y a continuación la herramienta recta perpendicular, luego como debe pasar por el vértice opuesto al lado al cual es perpendicular, se selecciona dicho vértice. Por último, se repite el mismo paso dos veces más y se tienen las tres alturas. Por el contrario, en esta tarea no se tiene el triángulo, solo se tiene un lado y un punto por donde pasa la altura, de modo que con razonamientos simples y siguiendo la definición de manera lineal solo se podría construir una altura utilizando la cuarta estrategia descrita anteriormente, mientras que para construir cualquiera de las otras dos alturas se requieren conectar tres razonamientos simples e inversos: en primer lugar, que la recta AP y la recta BP son alturas, este hecho se deduce de la condición solicitada, pero no es explícito. En segundo lugar, que si la recta es altura entonces C debe estar sobre una perpendicular a AP por B, pero no en cualquier parte. En tercer lugar, si se repite este segundo razonamiento, C debe estar sobre una recta perpendicular a BP por A y, por lo tanto, en ambas rectas perpendiculares a AP y BP. Consideramos que esta conjugación de distintos razonamientos simples promueve razonamientos deductivos cada vez más elaborados que le permiten al alumno ir tomando conciencia de estos e irlos construyendo de manera controlada.

- **Tarea 3:** *Dadas dos rectas r y s , construir un triángulo ABC con alturas AL y BM , tal que A y L estén en r y, B y M estén en s .*

Esta tarea conlleva el uso de la definición de altura de un triángulo, de ahí determinar que las rectas dadas deben ser perpendiculares a los lados correspondientes. Los estudiantes pueden realizar diferentes acciones, entre ellas:

- Ubicar las dos rectas dadas de tal forma que perceptivamente sean paralelas. Observe la Figura 5-37

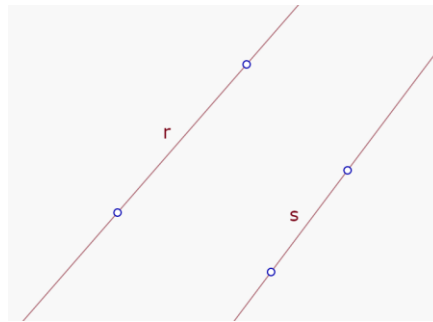


Figura 5-37, Ubicar r y s de manera paralela

Como no hay alguna especificación acerca de cómo deban ser las rectas, los estudiantes pueden ubicarlas de tal forma que parezcan paralelas. Aunque no lo sean, no ver la intersección de estas puede dificultar el desarrollo de la construcción. De aquí pueden surgir preguntas como ¿Es posible que las rectas que contienen las alturas del triángulo sean paralelas?

- Ubicar la recta r y construir s perpendicular a r, como se ve en la Figura 5-38.

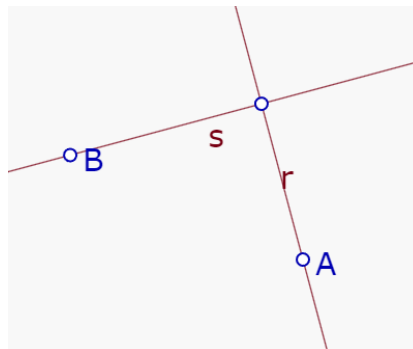


Figura 5-38, Construir s de manera perpendicular a r

Esta acción implica que el punto de intersección de las rectas sea C , M y L simultáneamente, es decir, $C=M=L$, aunque el triángulo que se forma cumple con los requisitos, la construcción no cumple con que la recta s sea dada, por lo que se le puede pedir al estudiante que borre uno de los puntos con los que creó la recta r y así observar cómo se eliminan ambas rectas, lo cual no debería pasar si s fuera independiente de r .

- Ubicar en la recta r los puntos A y L , ubicar en la recta s los puntos B y M , crear las rectas AM y BL , la intersección de ellas será C . Ver la Figura 5-39

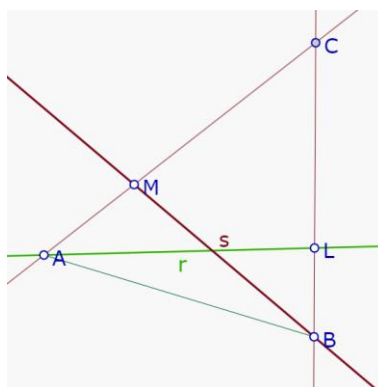


Figura 5-39, Ubica A , L , B y M de manera aleatoria en r y s

Con esta construcción el estudiante reconoce que C debe estar tanto en AM como en BL , sin embargo, no asegura la perpendicularidad para que BM y AL sean alturas, es decir, tal construcción no soporta la prueba de arrastre por lo que se le puede pedir al estudiante que arrastre todos los objetos, ¿Las condiciones para que BM y AL sean alturas se cumplen?

- Ubicar dos puntos libres A y L en r , trazar una recta t_1 perpendicular a r que pase por L , la intersección entre t_1 y s indica la posición de B ; luego se traza una recta t_2 perpendicular a s que pase por A , el punto M sería la intersección entre t_2 y s . La intersección entre t_1 y t_2 proporciona a C . Lo anterior se observa en la Figura 5-40.

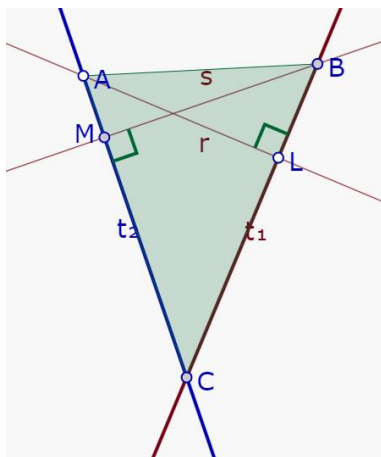


Figura 5-40, Construcción idónea de la tarea 3 de la 3ª Sección

Esta sería una construcción que garantizaría que BM y AL fueran las alturas, las cuales están contenidas en r y s respectivamente, al soportar la prueba de arrastre.

Al igual que en la tarea anterior, esperamos que los alumnos refuercen la acción de conjugar más de un razonamiento simple para concretar otro razonamiento deductivo más elaborado, así como el reconocimiento de que los objetos dados imponen restricciones a las acciones que determinan el problema.

Actividad 2:

En esta actividad se plantean 3 secuencias de tareas que involucran el uso de más de una regla teórica para argumentar la presencia de propiedades en la construcción. Entre dichas reglas teóricas se encuentran la definición de rectángulo, los postulados de congruencia de triángulos y de perpendicularidad y paralelismo.

1ª Secuencia:

En esta sección se plantearon 3 tareas en las que se recurre al uso de definiciones de círculo, punto medio, rectas perpendiculares y paralelas, pero se centra en las definiciones de rectángulo y en el postulado de perpendicularidad y paralelismo.

- **Tarea 1:** *Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD.*

Este es el primer problema en el cual los estudiantes deberán utilizar más de dos reglas teóricas para justificar la solución, por lo que esperan que las posibles acciones de los estudiantes sean las siguientes:

- Construir dos rectas r y s , tal que r sea perpendicular a AB que pase por A y s sea perpendicular a AB que pase por B . Posteriormente construir un punto C que pertenezca a la recta s y construir una recta f , tal que f sea perpendicular a s que pase por C . Por último, D sería la intersección entre las rectas r y f .
- Construir dos rectas r y s , tal que r sea perpendicular a AB que pase por A y s sea perpendicular a AB que pase por B . Posteriormente construir un punto C que pertenezca a la recta s y construir una recta f , tal que f sea paralela a la recta AB que pase por C . Por último, D y C sería la intersección entre las rectas r - f y s - f respectivamente.

Ambas acciones son soluciones satisfactorias al problema, sin embargo, en la primera acción se garantiza, por medio de rectas perpendiculares, que 3 ángulos internos del rectángulo sean rectos como se ve en la Figura 5-41. Sin embargo, en el proceso de construcción no se garantiza, por medio de la definición de perpendicular, que el $\angle ADC = 90^\circ$. De modo que los estudiantes tendrían que buscar reglas teóricas y realizar razonamientos deductivos para garantizar que dicho ángulo es recto.

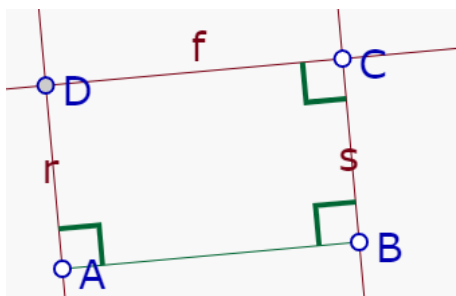


Figura 5-41, Construcción por medio de la herramienta recta perpendicular

Para realizar la actividad, se les pedirá a los estudiantes que, por medio de reglas teóricas, justifiquen el paso a paso que hicieron en la construcción. Para ello, se utilizará la herramienta “mostrar construcción”, la cual aparece al hacerle clic en el ícono de “otras herramientas”. Esta muestra el paso a paso detallado de la construcción realizada, como se ve en la Figura 5-42. Por lo tanto, se trabajará conjuntamente con esta herramienta para que el estudiante explique por qué realizó cada objeto y cómo, a través de lo construido, se garantizan las condiciones requeridas por el problema, que en este caso sería obtener el rectángulo.

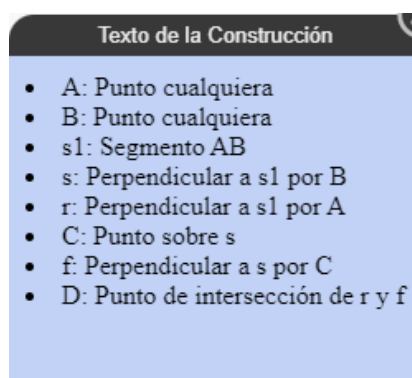


Figura 5-42, Catálogo de construcción en DGPAd

Como se dijo anteriormente, se espera que los estudiantes no tengan problema en justificar los 3 ángulos rectos que crearon a partir de la definición de rectas perpendiculares. Sin embargo, el ángulo $\angle ADC = 90^\circ$ no se puede garantizar directamente por la definición de rectas perpendiculares, ya que en ningún momento del listado de construcción se especifica que se creó

una recta perpendicular a r que pase por D (o por C), sino que fue creado como la intersección de las rectas r y f . Por lo tanto, los estudiantes tendrán que hallar otra regla teórica, identificar su estructura si-entonces para buscar que en el coneciente garantice ángulos rectos, teniendo en cuenta que el antecedente esté relacionado con lo que se realizó en la construcción, en este caso que esté relacionado con rectas perpendiculares.

En la segunda acción se realizaría la misma actividad pero teniendo en cuenta que el antecedente en este caso tiene que estar relacionado con rectas paralelas y perpendiculares, que son los objetos que tenemos en la construcción.

- **Tarea 2:** *Dado un segmento AB , construir un rectángulo $ABCD$, tal que $BC=3AB$.*

En las tareas realizadas previamente el estudiante duplicaba o hallaba la mitad de un segmento, por tanto, esta tarea indica una nueva relación la cual es que $BC=3AB$. Con la construcción de la tarea 1 se espera que el estudiante no tenga dificultades para construir el rectángulo con la nueva relación. Las acciones que posiblemente realicen los estudiantes son las siguientes:

- Construir una recta s perpendicular a AB que pase por A , crear un círculo c_1 con centro en A que pase por B , la intersección entre s y c_1 será P_1 . Construir un círculo c_2 con centro en P_1 que pase por A , su intersección será P_2 . Construir un círculo c_3 con centro en P_2 que pase por P_1 , su intersección será D . Crear una recta perpendicular a s que pase por D y una a AB que pase por B , su intersección será C . Observe la Figura 5-43

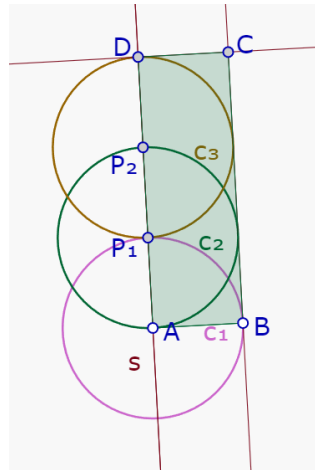


Figura 5-43, La relación construida es $AD=3AB$

Esta es una construcción que cumple con las condiciones dadas, sin embargo, el uso de las herramientas garantizaría que $AD=3AB$, por lo que se le podría pedir al estudiante que argumente, utilizando las reglas teóricas, por qué $BC=3AB$.

- Construir una recta s perpendicular a AB que pase por B , crear un círculo c_1 con centro en B que pase por A , la intersección entre s y c_1 será P_1 . Construir un círculo c_2 con centro en P_1 que pase por B , su intersección será P_2 . Construir un círculo c_3 con centro en P_2 que pase por P_1 , su intersección será C . Crear una recta perpendicular a s que pase por C y una a AB que pase por A , su intersección será C . Ver la Figura 5-44

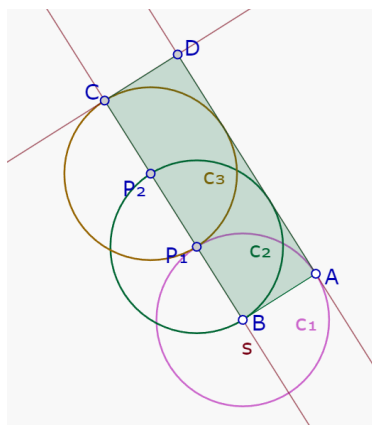


Figura 5-44, Construcción adecuada del rectángulo con la relación $BC=3AB$

Esta es una construcción que, por realizar las acciones con herramientas del software partiendo desde el punto B, garantiza directamente que $BC=3AB$.

- **Tarea 3:** Dado un segmento AB , construir un rectángulo $ABCD$, tal que $2BC=3AB$

En la anterior tarea el estudiante triplicaba un segmento para obtener los lados del rectángulo. En esta tarea el alumno deberá realizar lo mismo pero aunado a los conocimientos adquiridos en las anteriores secuencias.

- Construir una recta s perpendicular a AB que pase por B , crear un círculo $c1$ con centro en B que pase por A , la intersección entre s y $c1$ será $P1$. Construir un círculo $c2$ con centro en $P1$ que pase por B , su intersección será $P2$. Construir un círculo $c3$ con centro en $P2$ que pase por $P1$, su intersección será $P3$. Posteriormente construir un círculo con centro en $P3$ que pase por B , su intersección será C . Crear una recta perpendicular a s que pase por C y una a AB que pase por A , su intersección será D . Note la Figura 5-45

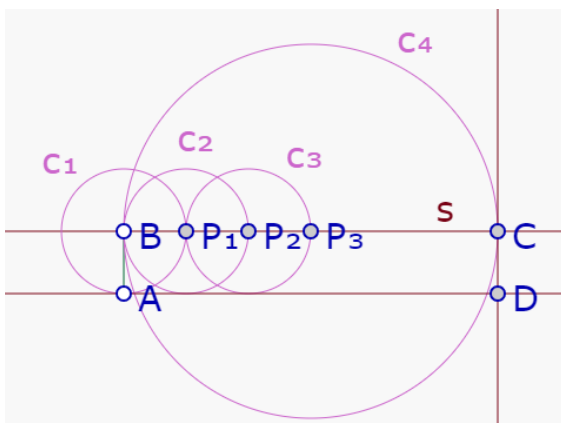


Figura 5-45, Rectángulo ABCD tal que $6AB=BC$

Esta acción podría surgir debido a que el estudiante piensa que después de triplicar el segmento AB se debería duplicar este debido a la expresión $2BC$. Para este caso se le podría pedir al estudiante que explique con sus palabras que significa la condición $3AB=2BC$ y se le podría preguntar si evidencia lo descrito en la construcción y que invalide su estrategia a partir de actos de devolución.

- Construir una recta s perpendicular a AB que pase por A , crear un círculo c_1 con centro en A que pase por B , la intersección entre s y c_1 será P_1 . Construir un círculo c_2 con centro en P_1 que pase por A , su intersección será P_2 . Construir un círculo c_3 con centro en P_2 que pase por P_1 , su intersección será P_3 . Posteriormente construir el punto medio entre el punto P_3 y A , al cual llamaremos D . Crear una recta perpendicular a s que pase por D y una a AB que pase por B , su intersección será C . Estas acciones se ven construidas en la Figura 5-46

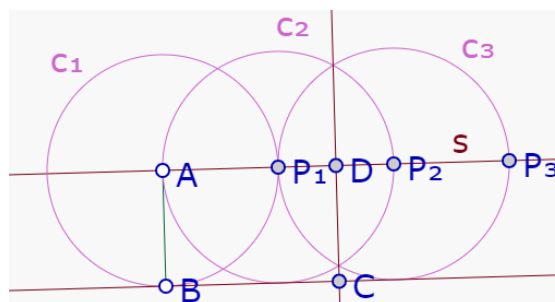


Figura 5-46, Primera construcción idónea

Esta acción satisface las condiciones requeridas por el problema, no obstante, los estudiantes estarían garantizando directamente que $3AB=2AD$. Por lo anterior, se le podría pedir al estudiante que justifique, con reglas teóricas, por qué se cumple que $3AB=2BC$.

- Construir una recta s perpendicular a AB que pase por B , crear un círculo c_1 con centro en B que pase por A , la intersección entre s y c_1 será P_1 . Construir un círculo c_2 con centro en P_1 que pase por B , su intersección será P_2 . Construir un círculo c_3 con centro en P_2 que pase por P_1 , su intersección será P_3 . Posteriormente construir el punto medio entre el punto P_3 y B , al cual llamaremos C . Crear una recta perpendicular a s que pase por C y una a AB que pase por A , su intersección será D . Observe la Figura 5-47

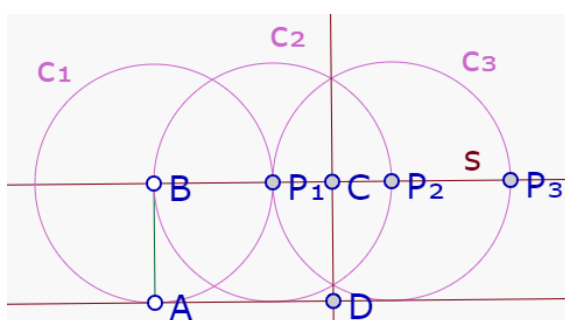


Figura 5-47, Segunda construcción idónea

Esta es una construcción que cumpliría con las condiciones requeridas del problema.

Esta segunda tarea suscita por una parte el refuerzo de las acciones que consisten en utilizar reglas teóricas para garantizar las propiedades y, por otra parte, la conjugación de varias propiedades en una sola construcción, lo cual implica una interpretación discursiva que promueve el razonamiento deductivo cada vez más elaborado. Dado que ya no solo se trata de construir un rectángulo como en la tarea anterior, sino de construir una propiedad adicional, que promueve el refuerzo de las acciones de la primera actividad.

2° Secuencia:

La tarea que se presenta en esta secuencia fue extraída de Acosta y Cardozo (2021), ellos consideran que esta actividad le permite al estudiante reconocer las condiciones suficientes y necesarias para realizar una construcción exacta y para el proceso de justificación. Por tanto, dicha tarea tiene como objetivo que el estudiante conjeture y redacte el segundo teorema de Tales teniendo en cuenta las condiciones necesarias y suficientes. El segundo teorema de Tales menciona que, si un triángulo está inscrito en un semicírculo entonces es un triángulo rectángulo. En este sentido, esperamos que los alumnos ya no solo usen una relación de causalidad, sino que la expresen a partir de una propiedad que se visualiza mediante un experimento. A los alumnos se les propone la siguiente tarea práctica:

1. Ubique dos puntos A y B fijos.
2. Ubique un punto C cualquiera y halle la medida del ángulo ACB.
3. Arrastre el punto C hasta que el ángulo ACB aproximadamente sea de 90° .
4. Oculte la medida del ángulo ACB.
5. Repita desde el paso 2.

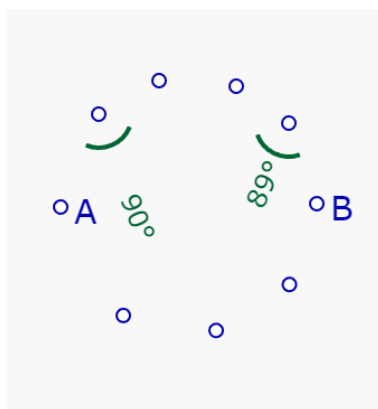


Figura 5-48, Descubriendo el teorema de Tales

Después de la actividad empírica algunas de las conjeturas a las que podrían llegar los estudiantes son:

- Con tres puntos sobre una misma circunferencia se puede formar un ángulo recto.
- Con los extremos del diámetro de un círculo y un punto sobre este se puede formar un ángulo recto
- Todo triángulo rectángulo está inscrito en una circunferencia
- Si un triángulo está inscrito en un semicírculo entonces es un triángulo rectángulo

Para que el estudiante logre redactar la relación causal, se podrían proponer preguntas del estilo ¿Cuál es el resultado? ¿Cuáles propiedades se deben garantizar para obtener el resultado?

Si la conjetura no es correcta, como en el caso de la anteriormente mencionada, se podría pedir al estudiante que realice un ejemplo donde se construyan los elementos del antecedente para ver si siempre se cumple el consecuente.

3° Secuencia:

- **Tarea:** Dadas dos rectas r_1 y r_2 , construir un triángulo ABC tal que la bisectriz del ángulo BAC esté contenida en r_1 y la bisectriz del ángulo ABC esté contenida en r_2

La tarea que se propone en esta sección requiere de la conexión de varias implicaciones lógicas, en las cuales se utilizan diversas reglas teóricas, como por ejemplo la definición de bisectriz, triángulos congruentes, círculo y postulados de congruencia. Las posibles acciones y dificultades que pueden exponer los estudiantes son las siguientes:

- Construir un segmento AB tal que A y B estén contenidos en r_1 y r_2 respectivamente. Construir los puntos P y M , tal que P sea el punto medio de AB y M sea la intersección de r_1 y r_2 . Construir la recta MP y C estaría en cualquier lugar de la dicha recta. Ver la Figura 5-49

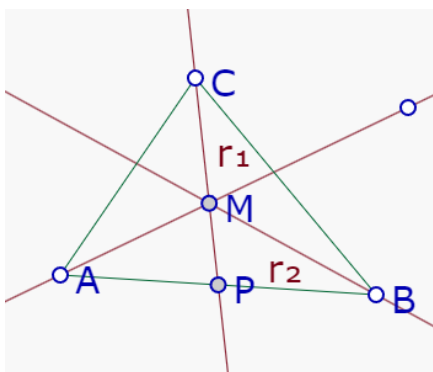


Figura 5-49, C en la recta MP

Esta acción evidencia que el estudiante considera que las bisectrices de los ángulos de un triángulo cruzan necesariamente por el punto medio del lado opuesto al ángulo. Lo anterior puede deberse a que, perceptivamente, las bisectrices de las representaciones prototípicas de los triángulos suelen cruzar por el punto medio del lado opuesto, pero no necesariamente lo hacen. Los actos de devolución preparados para este caso sería pedirle al estudiante que lea la definición

de bisectriz y proceda con el arrastre de los objetos de la construcción, luego cuestionarlo ¿Al arrastrar los objetos independientes de la construcción se mantienen las condiciones requeridas?

La representación prototípica de los triángulos no solamente puede sugerirle al estudiante que la bisectriz pasa por el punto medio del lado opuesto al ángulo, sino también podría hacerles pensar que contiene cada una de sus alturas. Por esta razón, se tienen en cuenta los casos analizados de la tarea 3 de la última secuencia de la 1° actividad, y los actos de devolución en dichos casos se centrarían en el arrastre de la construcción y su contraste con la definición de bisectriz.

- Construir un segmento AB tal que A y B estén contenidos en r_1 y r_2 respectivamente. Construir el punto P , tal que P sea el punto de intersección de r_1 y r_2 . Posteriormente, construir el punto F , tal que F sea la simetría central del punto B con respecto al punto P y construir la recta AF . Observe la Figura 5-50

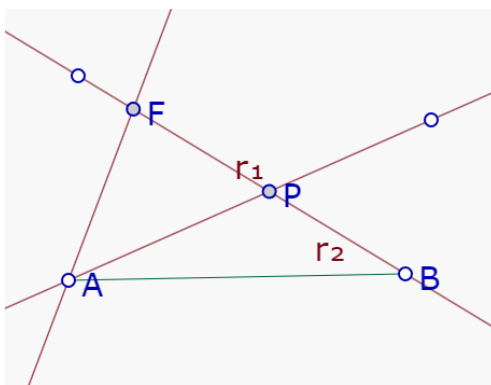


Figura 5-50, Uso de la simetría central

La construcción puede sugerir que el estudiante utilizó la herramienta porque perceptivamente el ángulo $\angle BAF$ es bisecado por r , sin embargo, después del trabajo realizado en las anteriores secuencias, se espera que el estudiante haya utilizado la herramienta, en este caso la simetría central, para garantizar las condiciones del problema por medio de triángulos congruentes. De esta forma utilizarían la simetría axial para garantizar la congruencia de uno de los lados de los

triángulos $\triangle APF$ y $\triangle APB$. No obstante, los triángulos no son congruentes, ya que solo dos lados son congruentes, y por ende r no es bisectriz del ángulo.

Como acto de devolución se le pediría al estudiante que arrastre los objetos dados y observe si las condiciones que requiere el problema se conservan (r y s sean bisectrices del triángulo). También se podría dejar que el estudiante siga con dicha idea y la aplique con el vértice B , así en teoría el punto C sería la intersección de la recta AF y BR , suponiendo que R es la simetría axial de A con respecto a P . Sin embargo, el estudiante notará inmediatamente que algo anda mal, ya que AF y BR son paralelas, y cuestionará su propia construcción.

- Construir un segmento AB tal que A y B estén contenidos en r_1 y r_2 respectivamente. Construir el punto P , tal que P sea el punto de intersección de r_1 y r_2 . Posteriormente construir los círculos c_1 y c_2 , tal que c_1 tenga centro en P y pase por B y c_2 tenga centro en A y pase por B . Luego se construye el punto F , tal que F sea el punto de intersección de c_1 y c_2 y se construye la recta AF . Ver Figura 5-51.

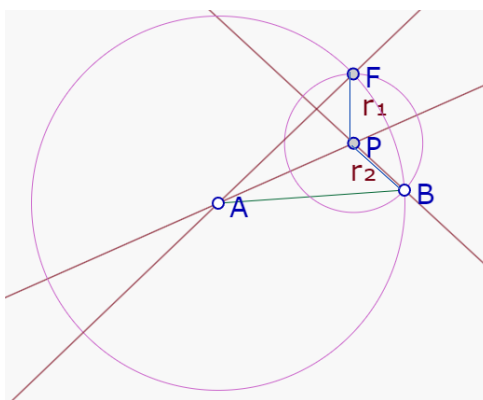


Figura 5-51, Construcción adecuada de la tarea de bisectrices

Aunque faltaría hacer prácticamente el mismo procedimiento con el otro vértice, esta sería una solución al problema, que cumple las condiciones requeridas por medio del postulado de congruencia LLL.

El problema tiene dos dificultades: en primer lugar, requiere la utilización de varias reglas teóricas: la definición de bisectriz, de triángulos congruentes, postulado de congruencia LLL y la definición de círculo. En segundo lugar, se requiere de procesos de razonamiento visual, para determinar qué regla teórica utilizar para garantizar la congruencia de los ángulos (definición de triángulos congruentes), qué par de triángulos construir y qué postulado de congruencia usar. Sin embargo, dada la evolución que se espera que hayan logrado los alumnos a partir de los problemas previos, creemos que con las retroacciones al arrastrar y actos de devolución que inviten al alumno a la utilización de reglas teóricas para garantizar las propiedades, los alumnos podrán hacer razonamientos pertinentes para resolver la tarea.

5.3 Análisis a posteriori

En esta sección se realiza una confrontación de los resultados obtenidos con el análisis a priori, de cada una de las actividades realizadas. Las tareas que se diseñaron fueron dirigidas a 4 estudiantes de licenciatura en matemáticas de primer nivel de la Universidad Industrial de Santander. Para el desarrollo de las actividades se conformaron dos grupos de dos estudiantes, el primero conformado por Karina y Pablo, y el segundo por John y Alejandro; cada grupo estaba siendo observado por los autores Jennifer y Dilan (en la transcripción J y D respectivamente). Cabe mencionar que las actividades se realizaron durante varias clases del curso de Geometría Euclidiana. Es decir, las tareas se propusieron para todos los alumnos y la atención del profesor no se centró solamente en los alumnos observados, de modo que los investigadores realizaron actos

de devolución, cuando lo consideraron necesario. La recolección de datos se realizó por medio de grabaciones de pantalla y de audio.

Para realizar el análisis a posteriori se expondrán fragmentos de las transcripciones de los videos realizados, las transcripciones completas se encuentran en la sección de Anexos. Las transcripciones están conformadas por tres columnas que indican el número de línea, el sujeto que habla y el mensaje que transmite o las acciones que realiza; estas últimas serán escritas entre paréntesis rectos “[]” y las aclaraciones que pueden surgir serán escritas entre paréntesis redondos “()”.

Actividad 1:

Las tareas que se presentan en la primera actividad contienen las definiciones de punto medio, mediana, alturas de triángulos y perpendicularidad; para el desarrollo de las construcciones es necesario que los estudiantes realicen sencillas implicaciones lógicas donde utilizan una o dos definiciones, es decir, la idea es que los estudiantes utilicen las herramientas del software para asegurar las propiedades necesarias para obtener el objeto matemático en cuestión, según la definición del mismo. Esta actividad se dividió en 3 secuencias, en las siguientes líneas se muestra el análisis a posteriori de cada una.

Primera secuencia:

Recordemos que antes de realizar las actividades, los estudiantes ya habían tenido un ligero acercamiento con DGPad y con el libro de Clements, lo anterior se puede evidenciar en algunos fragmentos de la transcripción de la clase. A continuación, se van a mencionar los conocimientos que los estudiantes evidenciaron adquirir durante esta primera secuencia:

- *Arrastre como forma de validación*

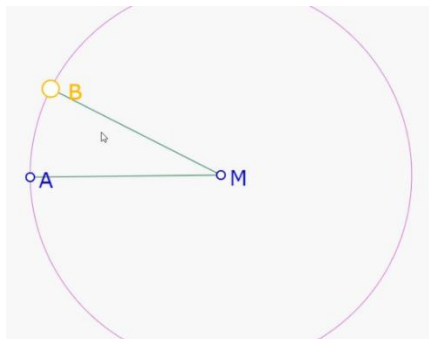
Tanto Karina como Pablo reconocen la necesidad de arrastrar los puntos dados para asegurarse que la construcción sea correcta; al arrastrar los puntos se dan cuenta que las condiciones se mantienen, por lo que confirman que el procedimiento fue correcto, esto se puede observar en las líneas 4-10, 14-17 y 58-60. Alejandro y John también reconocieron la importancia del arrastre para verificar la exactitud de la construcción e identificaron cuando las condiciones no se mantienen al arrastrar; en las líneas 56-65 se evidencia que, al inicio, M es perceptivamente punto medio de A y B, sin embargo, al arrastrar el punto B sobre el círculo (ya que es un punto construido en el círculo) este deja de ser colineal con A y M, por lo que notan que ese no es el punto B que desean construir.

4	Pablo	Busca la herramienta punto medio, la cuatro, [Karina busca y usa la herramienta y construye el punto medio de A y B], ahora se nombra M [Karina nombra el punto medio].
5	Karina	Ya quedó ¿No?
6	Pablo	Ahora mueva A [Karina mueve el punto A], sí, siempre está en la mitad.
7	Karina	Ahora B [mueve el punto B].
8	Pablo	[Pregunta a J] ¿Usted nos puede ayudar? Es que mi capacidad de seguridad.... Es poca.
9	J	Yo hago preguntas para orientarlos.
10	Karina	No, pero sí está bien. [abre otra pestaña para el siguiente problema].
14	Pablo	[Lee el problema] ¿No es lo mismo?
15	Karina	No, porque en la otra no había una línea, solo los puntos. [Construye el punto medio seleccionando el segmento y luego la herramienta punto medio]

16	Pablo	¿Sí está bien?
17	Karina	No sé, equivocándose se aprende [mueve el punto A y el punto B] M siempre va a estar... El segmento también.
58	Karina	[Traza el segmento AB y luego traza el punto medio, borra M y se elimina todo, construye de nuevo M y el círculo con centro en M que pase por A].
59	Pablo	Y si traza una recta, no un segmento, una recta que pase por ambos. [Karina construye la recta que pasa por A y M] En la intersección de ambos pone el B.
60	Karina	[Mueve los puntos] Ay sí, así era, M va a ser punto medio y siempre va a tener la misma distancia.
56	Alejandro	[Construye un círculo con centro en M que pasa por A].
57	John	Y eso va a tener la medida del radio, por ende, ese va a ser un punto medio.
58	Alejandro	Pero cómo agregamos B ahí.
59	John	Espíchele.
60	Alejandro	[Hace clic sobre el círculo y construye un punto sobre el mismo], pero eso no sigue siendo punto medio cuando... [arrastra el punto sobre la circunferencia].
61	John	Relajado. Primero espíchele para nombrarlo B. Se supone que si usted crea un segmento aquí [señalando los puntos A y M].
63	Alejandro	Sí, pero mire que este se mueve (refiriéndose al punto B).

64 John Sí, pero espere. Si construyo este segmento hasta M [construye el segmento AM] y después uno de M a B [construye el segmento MB].

65 Alejandro [Mueve el segmento BM] No, esto no.

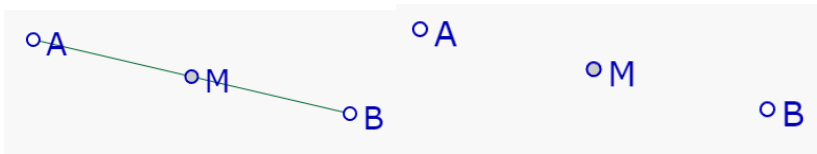


- *Dependencia de objetos*

En las líneas 18-35, Karina y Pablo consideraron que el punto medio dependía del segmento, por lo que si se borraba el segmento se iba a eliminar M; es decir, reconocen que, si un objeto depende del otro, entonces al alterar el primero, el segundo también se ve afectado; no obstante, no tienen en cuenta que en realidad el punto medio depende directamente de A y B porque el segmento depende de ellos. Por lo anterior, cuando no se borró M, consideraron que la construcción era errónea, pero con la intervención del profesor lograron reconocer la dependencia del segmento. Por otra parte, los estudiantes diferencian los problemas propuestos por la dependencia de los objetos: en las líneas 36-39 consideraron diferentes los problemas 1 y 3 ya que B depende de M y no M de B.

18 J Ahora una pregunta. ¿Cuál es la diferencia entre el primer problema y el segundo problema?

19 Karina M está definiendo que hay corte entre A y B

20	J	¿Qué creen que va a ocurrir si se borra el segmento?
21	Pablo	M se va a borrar
22	J	¿Por qué?
23	Pablo	Porque el punto M depende del segmento
24	J	Pruébenlo
25	Karina	[Borra el segmento y no se borra M] Entonces M no es el punto medio del segmento.
26	J	¿Por qué?
27	Karina	Porque el punto medio debería ser del segmento como tal y si desaparece el segmento debería desaparecer M
28	Pablo	Entonces ¿En qué nos equivocamos?
29	Karina	[Realiza el mismo procedimiento, construye el segmento y sobre el segmento construye el punto medio con la herramienta]
		
30	Pablo	Ahora borre [Karina borra la recta y se da cuenta que sigue estando M]
31	Karina	Entonces no hay ninguna diferencia (haciendo referencia a que no hay diferencia entre el primer problema y el segundo problema)
32	Profesor	[Él realiza las mismas preguntas hechas por J] ¿De qué depende el segmento?
33	Clase	De A y B
34	Profesor	Y entonces el punto medio del segmento AB depende únicamente de...
35	Clase	De A y B

36	Profesor	¿Cuál es la diferencia entre el problema 1 y el 3?
37	Pablo	[Lee el problema 3] Son distintos porque M depende de B
38	Karina	[Lee el problema y construye los puntos dados] (se quedan pensando qué se debe hacer) M no debe depender de nadie.
39	Pablo	Y debe quedar en la mitad de A y B.

Por otra parte, el grupo conformado por Alejandro y John tenían dificultad para diferenciar los objetos dados de los dependientes. Por ejemplo, en las líneas 3-7 se evidenciaba que Alejandro, en la primera tarea, quería construir el segmento para luego utilizar la herramienta punto medio. Sin embargo, John argumentaba que no se podía realizar dicha acción porque entonces el segmento sería dado y lo dado son solamente los 2 puntos; más adelante estas complicaciones fueron superadas por una intervención realizada por el profesor, al notar que el segmento es dependiente de A y B y, por ende, el punto medio también. Otra situación para tener en cuenta ocurre en las líneas 50-53, donde los estudiantes pretendieron utilizar la simetría central de A con respecto a M; sin embargo, Alejandro borra el punto M y realiza la simetría de un punto cualquiera con respecto a A, pero John no estuvo de acuerdo porque el punto al que se le aplicó la simetría es un punto que se realizó después de construir A, por lo que considera que depende de él y, por ende, no es un punto dado (aunque sí lo sea).

3	Alejandro	Primero hacemos el segmento y luego el punto medio [utiliza la herramienta segmento para crear AB]... es una recta que...
4	John	No, es un segmento.
5	Alejandro	Pero es que no dice que sea un segmento.

6 John Tampoco dice que sea una recta.

7 Alejandro Quedó mal porque es el punto medio de A y B [borra el segmento AB]... ¿Y ahí qué?

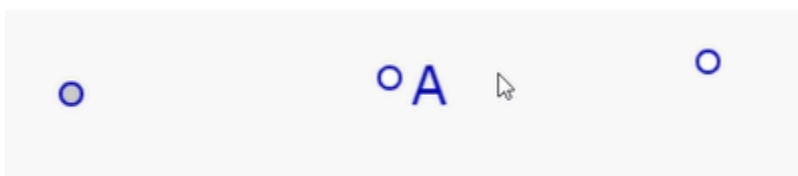
50 Alejandro Bueno, como hacemos esto (refiriéndose al problema 3)

51 John Mire, ¿Si pillas que hay una herramienta?, esta... simetría central.



52 Alejandro Sí. ¿Sí se puede... no?

53 John Sí [borra el punto M y utiliza la herramienta “simetría central” de un punto cualquiera con respecto a A], pero toca leer bien porque le está diciendo que partir de un punto A y M, no nos está diciendo que partiendo desde un punto [Construye el punto M de nuevo].



-
- *Diferenciar el proceso de construcción al cambiar las condiciones iniciales*

El trabajo del grupo de Karina y Pablo, en las líneas 36-39, y del grupo de John y Alejandro, en las líneas 40-49, refleja que los estudiantes logran diferenciar los problemas 1 y 3, debido a que las condiciones iniciales son distintas. En la tarea 1, el punto M depende de A y B; y en la tarea 3, el punto B depende de A y M.

40	Profesor	¿Qué diferencia hay entre el primer y tercer problema?
41	Alejandro	Que en el tercero le está pidiendo que el segundo punto sea el medio, entre ese y otro punto.
42	John	Sí, que el segundo punto sea el punto medio entre A y el tercer punto construido.
43	Profesor	¿Son distintos los problemas?
44	John	No.
45	Alejandro	Sí.
46	John	Son distintos en construcción.
47	Alejandro	Sí, en construcción son distintos.
48	Profesor	Entonces son distintos.
49	John	Claro, la construcción es diferente pero el resultado es el mismo

En la tarea 3, Pablo pensó una solución no contemplada en el análisis a priori que consistía en crear un triángulo isósceles cuya base fuera el segmento AB y M sería el pie de la altura de dicho triángulo (perpendicular a AB). Como inicialmente él pensaba que tenía A y B, M dependería de esos puntos; como los objetos iniciales eran M y A, él decidió cambiar la estrategia y construir 2 triángulos rectángulos congruentes con un lado igual a AM (ver línea 62), entonces podemos ver que a partir de diferentes objetos dados él se ideó una manera distinta de solucionar el problema, la cual fue de crear un triángulo isósceles en el caso de ser dados A y B o la de construir dos triángulos rectángulos congruentes con un par de lados correspondientes de longitud AM en el caso de ser dados A y M. Por otra parte, cuando Pablo se dio cuenta que los puntos dados eran A y M, la construcción debería depender de estos dos y no de A y B. Karina propuso que usara la idea original y luego renombrara los puntos, Pablo no aceptó esa idea porque reconoció

que renombrar los puntos implica alterar las condiciones del problema, mientras que Karina aún no tenía completamente claro este hecho. Esto se evidencia en las líneas 61-77.

61	J	¿Cuál era la idea del triángulo?
62	Pablo	Hacer un triángulo equilátero que justo en la mitad estuviera M.
		
63	Karina	Pero sí se podía así ¿No? Se hace el triángulo y se parte por la mitad y ese sería M, este extremo A y el otro B.
64	J	Intenten hacer lo que pensaron.
65	Pablo	El problema es que como lo pensé, M dependería de B.
66	Karina	Pues lo hacemos y lo renombramos.
67	Pablo	No se puede renombrar porque el chiste es que le dan A y M. Entonces sería hacer un triángulo equilátero, pero ¿Cómo? Sería más fácil en lápiz y papel.
68	Karina	Sí, porque uno puede medir.
69	Pablo	Y porque nada se mueve.... Sería mejor hacer un triángulo rectángulo. ¿Cómo se hace eso?
70	J	¿Cuál es la característica principal del triángulo rectángulo?
71	Pablo	Tiene un ángulo de 90°

72	J	¿Cómo puedo garantizar eso?
73	Karina	Con dos rectas... perpendiculares
74	J	¿Cuáles serían las rectas perpendiculares?
75	Pablo	Este y este [señalando el lado AB y la altura correspondiente del dibujo hecho en la línea 62]
76	J	Vuelva a decir su idea.
77	Pablo	La idea es hacer un triángulo rectángulo y luego otro que esté al lado y que sean iguales. [Construye una recta que pase por A y M] ¿Cómo hago un ángulo de 90° ?

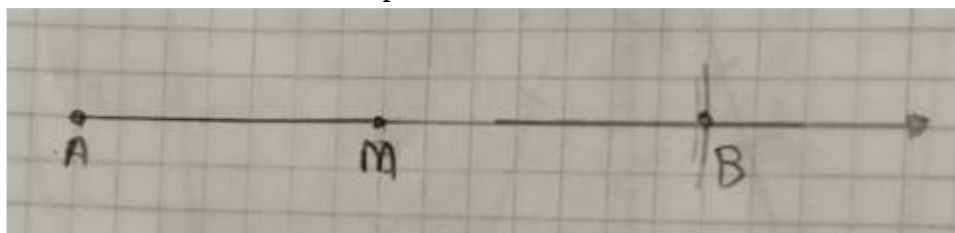
- *Utiliza implicaciones lógicas simples*

Ambos grupos conocían cuáles eran las condiciones necesarias para que M sea el punto medio de A y B, las cuales son: que los 3 puntos estén alineados y que M equidiste de A y B. Karina y Pablo lo tenían claro desde el inicio del problema, en la línea 46 y 51 se observa cómo Karina repite dichas condiciones. Ellos tenían las dos propiedades en mente, pero inicialmente no las conectaron para dar con la solución. Esto da cuenta de que no se trata solo de reconocer las propiedades, sino que se requieren razonamientos visuales y deductivos para poder conjugarlas y resolver el problema. No obstante, en las líneas siguientes los estudiantes logran superar la dificultad y asegurar las dos condiciones necesarias; el otro grupo fue descubriendo las propiedades necesarias por medio de la definición y la exploración de su construcción a lápiz y papel, esto se nota en las líneas 80-82.

46 Karina Si M queda en la mitad del círculo y A queda en un extremo y B en el otro, hay la misma distancia de M a B que de M a A. Entonces si M es el radio siempre va a haber la misma distancia en la circunferencia.

51 Karina [Crea un círculo con centro en M que pase por A] A y M deben ser independientes [arrastra los puntos] En el círculo debe estar B [ubica un punto en el círculo] este debe ser B. Pero deben estar alineados para que este sea punto medio.

80 Alejandro Con compás sí soy capaz, en el libro lo enseñan [saca un cuaderno y regla]. Ponga cuidado, tenemos el segmento AM, el libro nos decía que se prolongaba el segmento y entonces se medía AM y ya, y ahí se marcaba [realiza la representación en el cuaderno de la recta que contiene el segmento AM y copia la distancia AM con un compás].



81 John Ya, mire; esta sería una posible solución, ponemos la recta [utiliza la herramienta para crear la recta AB y construye el punto de intersección entre la recta y el círculo]

82 Alejandro Ay sí, dele a punto. Ya quedó.

En el análisis a priori tuvimos en cuenta posibles acciones que los estudiantes podían realizar en la tarea 3; efectivamente, ambos grupos hicieron algunas de estas acciones, como por ejemplo construyeron un círculo con centro en M que pasara por A y ubicaron un punto B cualquiera sobre el círculo (perceptivamente colineal con M y A); acá ambos grupos garantizaron que M equidistara de A y B, pero no que estuvieran alineados. La otra acción que ambos grupos realizaron fue cuando garantizaron las 2 condiciones necesarias por medio del círculo, anteriormente descrito, y la recta AM (para garantizar que los 3 puntos sean colineales). Lo mencionado anteriormente está expuesto en las líneas 51-60 del grupo de Karina y Pablo y en las líneas 69-75 y 79-82 del grupo de John y Alejandro.

51	Karina	[Crea un círculo con centro en M que pase por A] A y M deben ser independientes [arrastra los puntos] En el círculo debe estar B [crea un punto sobre el círculo] este debe ser B. Pero deben estar alineados para que este sea punto medio.
52	Pablo	Pero dice dados dos puntos, no un segmento, entonces no sé...
53	Karina	Pero para que este sea punto medio [señala M] debe estar alineado
54	Pablo	Trace una línea de A a B.
55	Karina	[Traza la línea de A a B y mueve los puntos, M no es colineal].
56	Pablo	Se me ocurre hacer un triángulo, pero no sé bien.
57	J	Dibuja tu idea en el cuaderno para intentarla.
58	Karina	[Traza el segmento AB y luego traza el punto medio, borra M y se elimina todo, construye de nuevo M y el círculo con centro en M que pase por A].
59	Pablo	Y si traza una recta, no un segmento, una recta que pase por ambos. [Karina construye la recta que pasa por A y M] En la intersección de ambos pone el B.

60 Karina [Mueve los puntos] Ay sí, así era, M va a ser punto medio y siempre va a tener la misma distancia.

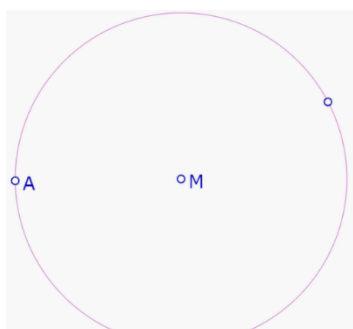
69 Alejandro Es que no entiendo por qué es que... [Construye un círculo con centro en A que pasa por M].

70 John No, pero de M a A.

71 D ¿Por qué de M a A?

72 John Porque M es el punto medio, entonces si hablamos de una circunferencia estamos diciendo que...

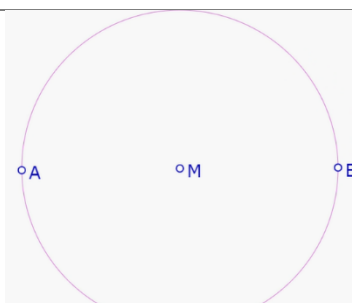
73 Alejandro El radio, de aquí a acá [señalando los puntos A y M] es la misma distancia que de aquí a acá [señalando el punto M y otro punto de la circunferencia].

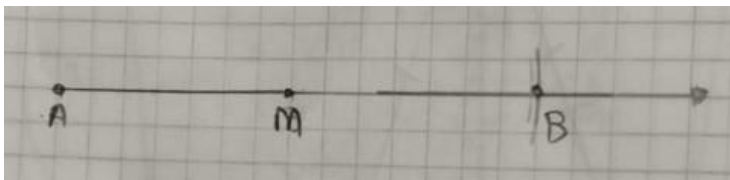


Pero lo que necesito, digamos si yo pongo el punto acá [pone un punto cualquiera sobre el círculo], yo no sé si M es el punto medio entre A y este punto.

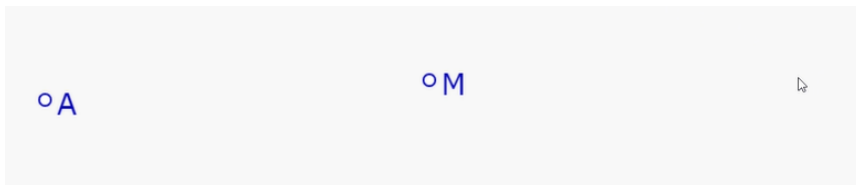
74 John Espere, es que así se construye el punto B de modo que esté en la medida

75 Alejandro Ahora, espere, yo lo puedo bajar, dele en B [mueve B hacia abajo], o sea sí, no quiero que se mueva, que quede alineado.



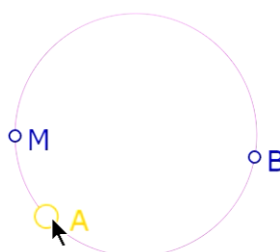
76	John	Haga el punto medio de A y B
77	Alejandro	[Construye el punto medio de A y B por medio de la herramienta] Pero ¿Qué pasa si lo muevo? Ah... ¿Sí ve?, si lo muevo ya cambia, necesito que se quede ahí quieto (se refiere a cuando el punto medio construido coincide con M). Yo con compás sí puedo hacerlo.
78	John	Con compás sí.
79	D	¿Podrían entonces hacerlo con compás en el cuaderno?
80	Alejandro	Con compás sí soy capaz, en el libro lo enseñan [saca un cuaderno y regla]. Ponga cuidado, tenemos el segmento AM, el libro nos decía que se prolongaba el segmento y entonces se medía AM y ya, y ahí se marcaba
		
[Realiza la representación en el cuaderno de la recta que contiene el segmento AM y copia la distancia AM con un compás].		
81	John	Ya, mire; esta sería una posible solución, ponemos la recta [utiliza la herramienta para crear la recta AB y construye el punto de intersección entre la recta y el círculo]
82	Alejandro	Ay sí, dele a punto. Ya quedó.

El grupo de Alejandro y John, como se ve en las líneas 31-33, realizó una de las acciones expuestas en el análisis a priori. Construyeron los puntos dados (A y M) y ubicaron B de tal forma que perceptivamente los puntos fueran colineales y que $AM = MB$, lo que muestra que los estudiantes tienen noción de las condiciones necesarias para que un punto sea punto medio de otros 2. También se evidencia que hay una cooperación entre los miembros el grupo y llegan a la conclusión de que el punto B no debería moverse, por lo que deberían construirlo con ayuda de otras definiciones.

31	John	¿Sabe cómo se podría construir?
32	Alejandro	Sería por acá ¿No?, M el punto medio de A y B. [Señala con el cursor donde, perceptivamente, debería estar B].
		
33	John	Pero no lo puede sacar así, tiene que ser de la misma medida. ¿Sabe cómo se puede hacer? Con círculos. Recuerde que había una parte en el libro donde sacaban el punto medio.

Karina y Pablo hicieron una acción que no se previó en el análisis a priori, la cual está escrita en la línea 40. Karina construyó un punto B cualquiera y luego un círculo que pasara por los tres puntos, A, B y M. Al parecer, reconocía que el círculo permitía la equidistancia entre puntos, pero no lograba determinar cuál punto correspondía al centro del círculo. Sin embargo, después de realizar tal acción y mover un poco la construcción se daba cuenta que M no era punto medio de A y B.

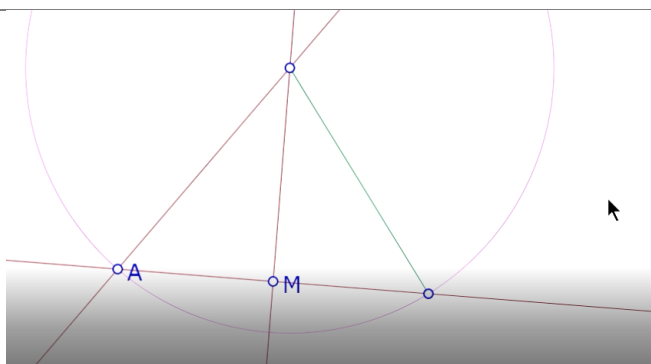
-
- 40** Karina Creemos B [crea un punto B y lo ubica de tal forma que M parezca el punto medio de AB]...Hagamos un círculo que pase por los tres puntos [para ello utiliza la herramienta círculo que pasa por 3 puntos y luego de construir el círculo arrastra el punto A].



Las acciones que realizaban los estudiantes, junto con las retroacciones dadas por el medio, les permitió reconocer que algunas condiciones necesarias no habían sido garantizadas, esto les ayudó a resolver adecuadamente el problema por medio de implicaciones lógicas simples, las cuales fueron, si necesito que $AM=BM$ realizo la construcción de un círculo con centro en M que pase por A y si necesito la colinealidad realizo la construcción de la recta AM, la intersección del círculo y la recta será B.

En el caso de la solución propuesta por Pablo, se ve una serie de conexiones lógicas para garantizar la construcción de los 2 triángulos rectángulos que formarían un triángulo isósceles, las cuales serían, si necesito ángulos rectos entonces construyo una perpendicular y si necesito equidistancia utilizo círculos, esto se observa en las líneas 69-83. Cabe mencionar que, aunque la idea original era construir un triángulo equilátero, Pablo concluyó que podría bastar con garantizar la congruencia de dos pares de lados.

69	Pablo	Y ¿Por qué nada se mueve?... Sería mejor hacer un triángulo rectángulo. ¿Cómo se hace eso?
70	J	¿Cuál es la característica principal del triángulo rectángulo?
71	Pablo	Tiene un ángulo de 90°
72	J	¿Cómo puedo garantizar eso?
73	Karina	Con dos rectas... perpendiculares
74	J	¿Cuáles serían las rectas perpendiculares?
75	Pablo	Este y este [Señalando AM y su altura correspondiente]
76	J	Vuelva a decir su idea.
77	Pablo	La idea es hacer un triángulo rectángulo y luego otro que esté al lado y que sean iguales. [Construye una recta que pase por A y M] ¿Cómo hago un ángulo de 90° ?
78	Karina	Con rectas perpendiculares [busca entre las herramientas de DGPad, construye una recta perpendicular a AM que pase por M]
79	Pablo	[Crea un punto P sobre la perpendicular y construye la recta AP] ¿Es posible hacer una misma recta, pero para el otro lado?
80	J	¿Qué es lo que quiere asegurar?
81	Pablo	Que del punto [señala a P] hasta B sea lo mismo que del punto a A.
82	Karina	Sería con la misma idea de círculo, para tener la misma distancia.
83	Pablo	Sería un círculo de aquí a acá [señalando a P y a A] y donde se interseque con la recta ahí sería B.



Segunda secuencia

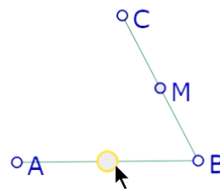
Esta secuencia se relaciona con la anterior en el sentido en que se retoma la definición de punto medio debido a su relación con el concepto de mediana de un triángulo. Por ejemplo, en la primera tarea los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en la construcción de las medianas de un triángulo, como se tenía esperado en el análisis a priori, ya que recientemente habían trabajado con las definiciones y construcciones de punto medio. Los estudiantes realizaron ciertas acciones que nos permitieron evidenciar los siguientes conocimientos:

- *Utiliza la relación causal de las definiciones para resolver los problemas*

En la segunda tarea, se deben asegurar dos cosas: que AM sea mediana y que su medida sea la mitad de la medida de AB. Ambos grupos, para asegurar que $AB=2AM$, usaron la definición de punto medio, como se ve en las líneas 121-126 del grupo de Karina y en las líneas 143-146 del grupo de John; al asegurar la proporción, tenían que asegurar que AM fuera mediana; en las líneas 138-154 del grupo de Karina, se evidencia que los estudiantes reconocieron que M debe ser el punto medio de BC. Por tanto, se observa que ellos tienen en cuenta la definición de mediana y sus condiciones para serlo. A partir de ello, crearon un círculo con centro en M que pasa por B y

una recta MB para obtener C. Esto mismo se puede observar en las líneas 155-168 del grupo de John.

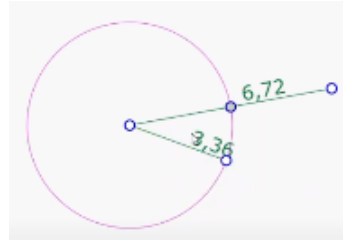
121	J	¿Qué debe cumplir AM?
122	Pablo	Que sea la mitad de AB
123	J	¿Ahí lo cumple?
124	Karina	No.
125	J	¿Cómo hago para que se cumpla?
126	Karina	Punto medio [crea el punto medio de AB], la distancia que hay de A a este punto [señala el punto medio] debe ser la distancia que hay a M.



138	Profesor	¿Qué parte ya tienen? ¿Cuál de las condiciones del triángulo tienen ya?
139	Pablo	Que la medida de AM sea la mitad.
140	Profesor	¿Qué hace falta?
141	Pablo	La mediana del triángulo. Me falta M.
142	Profesor	No solo M, hace falta que AM sea la mediana.
143	Pablo	Y M es el punto medio de BC.
144	Profesor	Falta un punto M en el círculo (refiriéndose al círculo con centro en A que pasa por el punto medio de AB) que sea punto medio de BC
145	Pablo	Gracias.

144 Alejandro Sacándole la mitad al segmento.

145 John Eso, eso fue lo que yo hice cuando hice la circunferencia [vuelve a hacer el segmento dado y un círculo con centro en A que pasa por el punto medio].



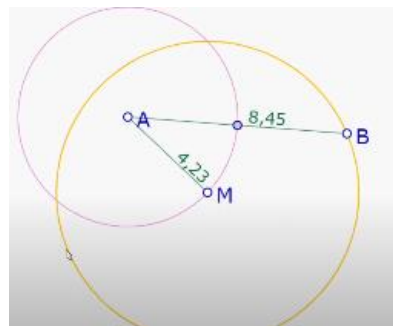
146 Alejandro Y ya, siempre es la mitad.

155 John ¿Cómo hicimos para ubicar eso? Mire lo hicimos así [construye un círculo con centro en M que pase por B]

156 Alejandro Sí, cierto.

157 John Cómo hicimos este problema, que nos daban A y M y construíamos B, hacer lo mismo acá (refiriéndose a la solución de la tarea 2).

158 Alejandro O sea, C tiene que estar en esa circunferencia (la última construida), y ahora tiene que marcar acá (señalando perceptivamente con el ratón donde debe estar C).



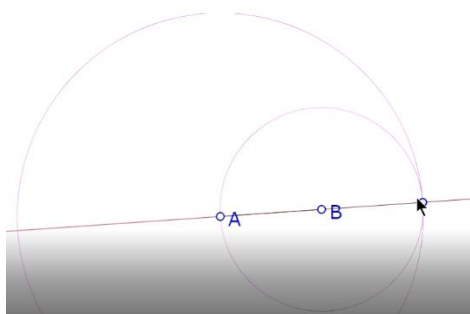
159 John ¿Y si trazo una recta? [Construye la recta BM].

160	Alejandro	Y crear esta intersección [construye el punto de intersección entre BM y el último círculo construido].
161	John	Técnicamente es el punto medio, por más que lo mueva [mueve los puntos dados].
162	D	¿Por qué siempre va a ser el punto medio?
163	John	Porque al crear la circunferencia, una de sus propiedades principales es que cualquier punto que esté en la circunferencia va a tener la misma medida.
164	Alejandro	Y el centro del círculo es el punto medio del diámetro del círculo, entonces por eso es el punto medio.
165	John	Sí, el caso es que, como nosotros construimos esto, el punto medio no va a cambiar nunca, entonces siempre se va a mantener la medida.
166	Alejandro	Por el círculo.
167	D	¿Por qué hicieron la recta?
168	John	Para que los puntos se mantengan colineales.

En la tercera tarea se nota una mayor solvencia en el uso de las definiciones para construir el objeto pedido que en la segunda tarea; por ejemplo, Karina y Pablo empezaron construyendo el doble de AB por medio de la definición de círculo, luego crearon un punto M sobre el círculo, construyeron un círculo con centro en M que pasara por B y una recta BM para construir C, de tal forma aseguran equidistancia y colinealidad, que son las condiciones necesarias para que M sea punto medio y por ende que AM sea mediana. No hicieron otras acciones diferentes a estas,

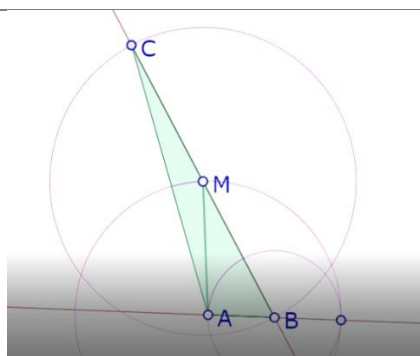
posiblemente por la relación con la segunda tarea, dichas acciones se observan en las líneas 164-169.

-
- 164** Pablo Creo que, es que no sé... si hacemos una recta AB, en la intersección del círculo con la recta se pone un punto, luego se hace un círculo con centro en A que pase por ese punto entonces tendríamos el doble de la medida de A a B. [Construye lo que mencionó].



Ahí ya tendríamos el doble.

-
- 165** Karina Okey sí, entonces M debe estar en cualquier punto de ese círculo, pongamos a M por acá [crea M sobre el círculo].
-
- 166** Pablo Ahora dónde va C.... AM es la mediana, entonces la mitad de BC es M. M debe estar entre B y C.
-
- 167** Karina M debe ser el radio del círculo, perdón, el centro del círculo para que el radio de M a B sea el mismo que de M a C. [Crea un círculo con centro en M que pase por B].
-
- 168** Pablo Ahora trace una recta de B a M.
-
- 169** Karina [Traza la recta BM] En la intersección iría C. [Construyen el triángulo y la mediana AM]
-



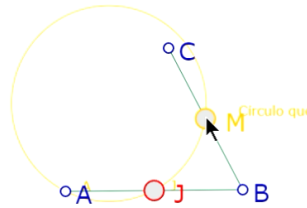
- *Control de acciones*

En ocasiones los estudiantes realizan acciones que no llevan a la solución del problema o que garantizan propiedades diferentes a las requeridas, ante estas situaciones los alumnos pueden decidir si seguir con la acción realizada y relacionarla con las condiciones del problema o abandonar la idea. Esta última también da evidencia de un dominio en los conceptos al asimilar que lo construido no garantiza las condiciones requeridas.

En las líneas 127-132, Karina y Pablo muestran ese control sobre las acciones que llevan a cabo. En un principio, Karina para lograr equidistancia de puntos construye un círculo que no garantiza la relación deseada, cuando lo construye ella se da cuenta que no es el círculo adecuado debido a que distingue que el punto que equidista de los demás es el centro y ninguno de los puntos cumple esta condición y, por ende, lo borra; luego construye otro que no es el apropiado, pero ella no lo nota; sin embargo, su compañero le hace notar que el correcto es el círculo con centro en A que pasa por J. En estas líneas se puede observar cómo se descartan ideas al darse cuenta de que no están garantizando las propiedades que deberían.

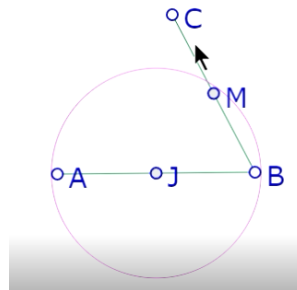
127 J ¿Y cómo logro que esa sea la distancia?

128 Karina Con un círculo, pero no sé cómo ubicarlo. [Crea un círculo que pasa por A, por el punto medio que llamó J y por M]



[Borra el círculo]

[Crea un círculo con centro en J que pasa por A] (esa era la idea, sin embargo, usó mal la herramienta y no pasó por A).



129 Pablo No porque no me interesa JM sino AM.

130 Karina Entonces A viene siendo el centro que se une con J.

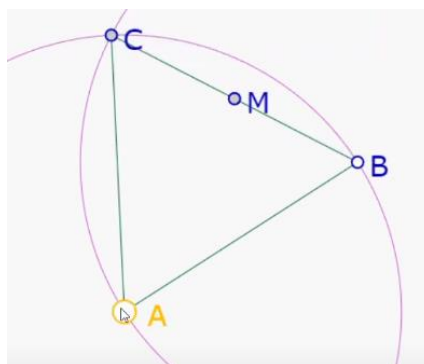
131 Pablo Sí.

132 Karina [Crea el círculo con centro en A que pasa por J].

Con respecto al otro grupo se puede notar que, en las líneas 93-97, los estudiantes realizaron un bosquejo en DGPad de cómo se vería un triángulo con una mediana igual al doble de su lado. El triángulo realizado era equilátero, pero fue suficiente para conjeturar que dicho

triángulo no sería una solución al problema y les dio indicios de donde debería estar C y, por ende, M. En las líneas 103-106 se puede observar que los estudiantes deseaban garantizar la condición $2AM=AB$, sin embargo, la condición que cumplen es que $2AC=AB$ y solo hasta la línea 106, Alejandro nota que no se está cumpliendo lo requerido por el problema. Después de una socialización entre los integrantes del grupo y el profesor se concluye que el punto construido sobre el círculo, nombrado C, en realidad es M para que cumpliera con los requerimientos, esto se puede observar en las líneas 106-113.

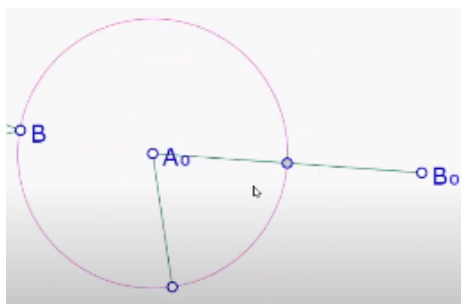
93	John	[Construye le segmento AB] pues con un círculo podemos hacer el tercer lado.
94	Alejandro	[Construye un círculo con centro en A que pasa por B y un círculo con centro en B que pasa por A].
95	John	Entonces con la intersección se haría el triángulo [Construye M punto medio de AB].



96	Alejandro	[Construye el segmento AM] AB tiene que ser igual a dos veces este lado (se refiere a la mediana), o sea que este es más largo [señalando a AB].
97	John	[Borra todo menos el segmento y lee de nuevo el problema] O sea que C debe estar como cerca [construye el triángulo ABC y arrastra C], espere,

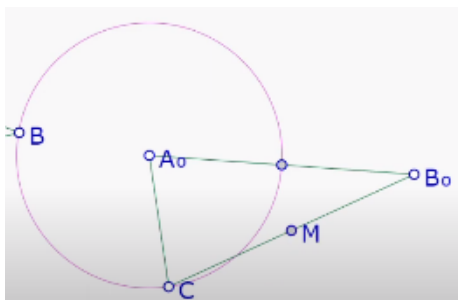
pongámoslo exacto (arrastran C hasta que las medidas cumplan con las condiciones requeridas por el problema).

103 John No, espera, mejor así [construye un círculo con centro A_0 que pasa por el punto medio de A_0B_0 y un punto cualquiera sobre el círculo] Así sí tiene la misma medida y siempre va a tener la medida de esa mitad.



104 Alejandro Sí, por lo que es el radio.

105 John [Construye el segmento entre el punto en el círculo y B_0] y ahora sí saca los puntos medios [construye el punto medio del segmento creado].



106 Alejandro Mídale a ver si cumple [Mide A_0M y A_0B_0], eso no es la mitad. Oiga, pero no cree que entonces el punto C, este es la media ¿Sí me hago a entender?, digamos este segmento es la media de este segmento

108 Profesor ¿Cuál segmento?

109	Alejandro	Este segmento.
110	Profesor	Nómbrelo.
111	Alejandro	El segmento AC es la mitad de AB.
112	Profesor	Pero ¿Para qué quiere que AC sea la mitad de AB?
113	Alejandro	Bueno A ₀ C no, esto no. Se supone que no debería ser C sino M.

Tercera secuencia

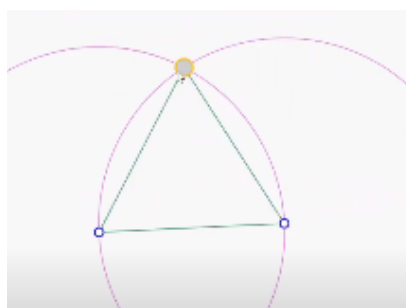
Esta secuencia requiere el uso de definiciones diferentes a las usadas previamente; el objeto geométrico principal son las alturas de un triángulo, por ende, otro objeto que está involucrado son las rectas perpendiculares. Las actividades propuestas requieren el uso de estas definiciones para resolver los problemas.

- *Diferenciar objetos geométricos por las propiedades que garantizan*

En la primera tarea, los estudiantes Karina y Pablo leyeron la definición de altura y la combinaron con la definición de mediana; es decir, ellos decían que una altura iba desde el vértice del triángulo hasta el punto medio del lado opuesto de manera perpendicular. Como acto de devolución se les pidió que leyeran las definiciones de altura y de mediana; con esa lectura ellos afirmaron que la altura no necesariamente debe pasar por el punto medio de un lado del triángulo y que la mediana no siempre es perpendicular al lado. esto indica que los estudiantes reconocieron que los objetos matemáticos son diferentes a raíz de las propiedades estipuladas en la definición; por tanto, descartaron la idea original de lo que ellos pensaban que era altura. Sucede algo similar con respecto al otro grupo, en las líneas 17-26 se puede observar cómo los estudiantes confunden la mediana y la altura de un triángulo; sin embargo, por medio de retroacciones del medio y actos

de devolución del investigador, Alejandro llegó a la conclusión de que no son lo mismo para todos los triángulos teniendo en cuenta las condiciones necesarias de cada objeto geométrico.

17	John	Ya, ya, ya. Ahora tenemos ya un... Voy a poner un triángulo equilátero
18	Alejandro	Un equilátero y listo.
19	John	[Construye un triángulo equilátero]. Listo y hagamos la media, que la media es una altura.



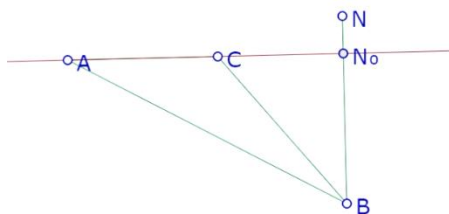
20	Alejandro	¿La media?
21	John	Sí, me refiero a que la altura es la misma media, entonces saque la mediana de cada lado.
22	Alejandro	Entonces, ¿Puedo decir que la altura de un triángulo pasa desde el vértice hasta el punto medio de este?
23	D	¿Y eso es verdad?
24	Alejandro	No creo, pues vamos a comprobarlos.
25	John	Comprobarlo primero (realiza la experimentación en DGPad con un triángulo y sus medianas)
26	Alejandro	Solo cumpliría en ciertos triángulos, porque si están torcidos ya no forman ángulos rectos.

- *Control de las acciones*

En ocasiones, los estudiantes pueden darse cuenta de que el procedimiento realizado no es el adecuado por medio de actos de devolución que el profesor realiza. En la primera tarea, Ambos grupos realizaron una acción de las descritas en el análisis a priori: construyeron las perpendiculares a los segmentos y no a las rectas que contienen los segmentos, por tanto, cuando arrastraban los puntos, las alturas desaparecían (Ver líneas 52-71 del grupo de John); a partir de una discusión en clase con el profesor a cerca de lo que es una altura, los estudiantes eliminaron la construcción anterior e hicieron nuevas acciones, esto se puede ver en las líneas 1-5 del grupo de Karina-Pablo.

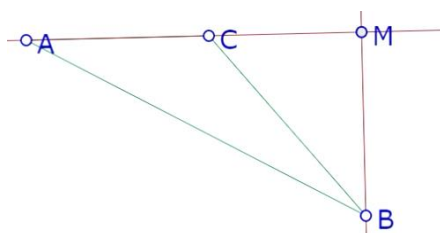
52	John	Listo, entonces construyámoslo [construyen el triángulo dado y trazan las perpendiculares a cada lado que pasan por el vértice opuesto correspondiente]. Tienen un punto de intersección. ¿Ve?
53	Alejandro	Sí.
54	John	[Construyen los puntos de intersección entre las rectas perpendiculares construidas y los lados de los triángulos] Esa es la altura L
55	Alejandro	¿Y C?
56	John	C, la altura N
57	Alejandro	Y ¿B?
58	John	Y B, altura M
59	Alejandro	Ahora sí se puede mover cada punto.
60	John	Y siempre va a ser perpendicular y siempre va a cortar en un ángulo de 90 grados.

61	D	¿Qué pasa si mueves A?
62	John	¿Así?
63	D	¿Cuáles son las alturas de A? Mejor dicho ¿Qué son las alturas según la definición?
64	Alejandro	Es un segmento.
65	Profesor	Ahí está.
66	John	Ahora haré los segmentos [construye los segmentos AL, BM, CN]
67	John	[Mueve bruscamente el triángulo desde el punto B]. Ya, ahí se eliminaron las alturas porque serían iguales al segmento.
68	D	¿Serían iguales?
69	John	Se supone que se eliminaron porque aquí ya son iguales.
70	John	[Mueve el triángulo de manera que aparece la altura CN].
71	Alejandro	Ahora el problema es que sale la altura de CN y no la de BM.
1	Profesor	[Dibuja en el tablero un triángulo y traza un segmento que es perpendicular y va desde un vértice hasta el lado opuesto] Este [señala el segmento] va hasta el lado opuesto perpendicularmente, no llego ni antes del lado ni después del lado ¿Verdad?
2	Karina	[Realiza una construcción en DGPAd, construye una recta perpendicular a AB que pase por B, ubica un punto N libre en la perpendicular, luego construye AC y el punto de intersección entre AC y la perpendicular la nombra N ₀]



(Esto lo realizó para comprender lo que significa que va hasta el lado opuesto, de tal forma BN va más allá del lado AC, en cambio BN_0 va hasta el lado AC y de manera perpendicular)

[Construye adecuadamente el punto M, tal que BM sea una altura]



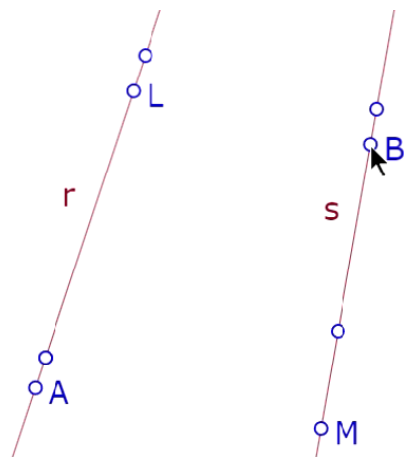
Ahora hago una perpendicular a BC que pase por A. ¿Y ahora qué? [Borra todo y empieza de nuevo]

3	Pablo	Crea una perpendicular a esa (hace referencia a AB) que pase por C y luego crea la recta AB, en la intersección está el punto, no sé qué letra lleva.
4	Karina	[Nombra el punto de intersección N].
5	Pablo	Ahora hay que hacer lo mismo para el resto.

En el segundo problema, en las líneas 41-43, Karina realizó una de las acciones pensadas en el análisis a priori: pretendía ubicar las dos rectas dadas como si fueran paralelas, luego eliminó la idea del paralelismo porque notó que las alturas deben intersectarse. Por otra parte, en el tercer problema, líneas 58-63, Karina construyó rectas perpendiculares para construir las alturas y ubicó

puntos sobre ellas que no formaban las alturas requeridas, al leer de nuevo el problema se dio cuenta que B debe estar sobre la recta s y que su construcción no cumplía eso, por tanto, supo que algo estaba erróneo en la construcción y la eliminó. John y Alejandro, en las líneas 165-178, optaron por realizar el segundo problema por medio de triángulos equiláteros. Aunque perceptivamente las rectas construidas fueran perpendiculares, los estudiantes desearon la idea por las retroacciones que les ofrecía el medio y por el uso de las definiciones expuestas en el documento de reglas teóricas, esto se evidencia cuando utilizaron el arrastre para comprobar experimentalmente que se formaron ángulos de 90° y así verificar que las rectas construidas contienen las alturas del triángulo o no.

-
- 41** Karina Tengo una teoría [ubican las rectas como si aparentemente fueran paralelas, ubican A y L de manera libre sobre r] Ahí no necesariamente está L, pero sí sobre esa recta debe estar [ubican B y M de manera libre sobre s].



-
- 42** Pablo Pues cumple que está en r y en s.
-

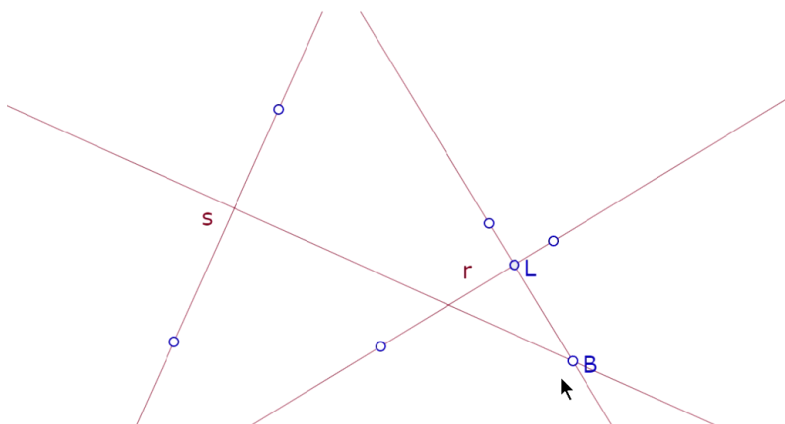
43 Karina Esta es una altura y esta es otra altura [señala a AL y a BM]... Van a ir unidos porque deben formar un triángulo [une a A con B] [borra la construcción, construye de nuevo las rectas, pero secantes]

58 J ¿Qué relación tiene la recta con el lado? [Viendo el dibujo y señalando la recta r con el lado BC).

59 Karina Perpendiculares.

60 J ¿Entonces qué hay que hacer?

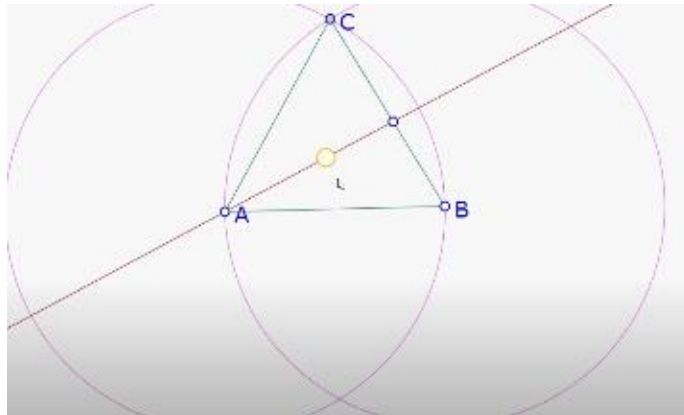
61 Karina [Construye una perpendicular “l” a r que pasa por cualquier punto de r] En el punto de intersección está B (refiriéndose a la intersección de r con su perpendicular) ¿Sí? No, aquí está L. (refiriéndose a que la intersección no es B sino L) [Luego traza una perpendicular a s que pasa por cualquier punto de “l” nombra el punto como B]



62 J ¿B puede quedar ahí?

63 Karina Debe estar en s y no está en s [borra todo].

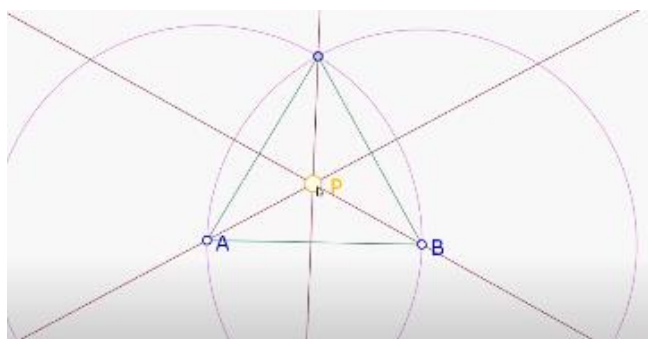
- 165** John Toca armar un triángulo que las alturas pasen por ese punto, hagámosle con los círculos [borra el punto P y realiza la misma construcción que había hecho antes] (en esta parte se da cuenta que hace lo mismo y en vez de realizar las rectas perpendiculares construye una recta cualquiera que pasa por A y que perceptivamente corta el lado BC del triángulo).



[Construye P sobre la recta perpendicular a uno de los lados].

- 166** D Por ejemplo, ese punto que estás moviendo (estaba moviendo el punto sobre la recta) ¿Es un punto dado?
- 167** Alejandro Sí.
- 168** D ¿Por qué?
- 169** Alejandro Porque puede moverlo.
- 170** D Entonces trate de moverlo aquí [señala la parte inferior derecha de la pantalla] (por donde no pasa la recta).
- 171** John No, porque el solo va en la recta.
- 172** D Bien, un punto dado debe ser un punto libre en el plano.
- 173** Alejandro Yo lo que digo es que haga una recta de P a B.

174	D	¿Por qué una recta de P a B?
175	Alejandro	Porque eso me garantiza que el otro punto sea perpendicular y que el segmento cumpla.
176	John	[Construye un triángulo equilátero de lado AB, un punto P libre y las rectas AP, BP y PC, siendo C el tercer vértice del triángulo equilátero] Listo ahí se está moviendo P, ahí deja de ser perpendicular [mueve P].



177	D	¿Por qué deja de ser perpendicular esa?
178	John	Porque ya no forma ángulos de 90 grados. ¿No?

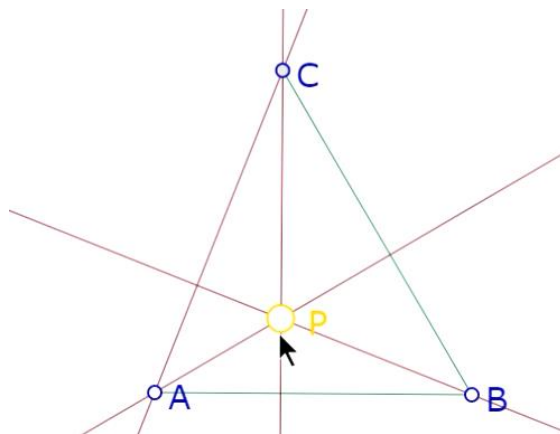
- *Utiliza la relación causal de las definiciones para resolver los problemas*

En el segundo problema, Pablo tuvo las ideas muy claras para resolver la tarea, lo cual se observa en las líneas 23-37, él realizó un dibujo del problema resuelto, esto le ayudó mucho a identificar las propiedades que debía garantizar, él afirmó que P debía ser el punto de concurrencia, que las rectas AP y BP debían contener las alturas y que debían ser perpendiculares a los lados BC y AC respectivamente; sabiendo la definición de altura, él construyó una perpendicular al segmento que pasa por P. tanto Karina como Pablo saben que en esa perpendicular está C pero que no cualquiera sirve porque BC debe ser perpendicular a la recta AP; por tanto, construye una

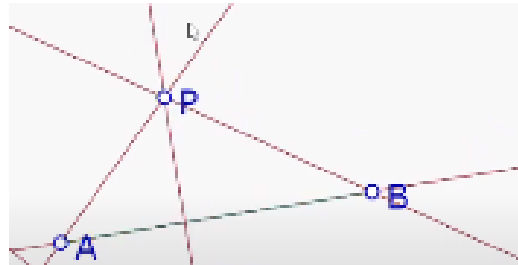
perpendicular a AP que pase por B, con lo anterior se observa un dominio de la definición de altura y que su uso ayudó a resolver el problema. En esta misma tarea, en las líneas 210-213, John realiza un dibujo como estrategia para encontrar características que ayuden a la solución del problema, él notó que la tercera altura no estaba construida (ya habían construido las rectas AP y BP que contenían 2 alturas del triángulo) y que se podía construir, por medio de la definición de altura, con las condiciones iniciales del problema; en las líneas ya mencionadas se puede observar como el estudiante tiene en cuenta las reglas teóricas para responder las preguntas del investigador acerca de la construcción.

23	J	¿Qué ocurre con P?
24	Pablo	P está en todas las alturas
25	J	Realicen un dibujo del problema resuelto.
26	Pablo	[Realiza un dibujo con las alturas y la intersección P] Aquí debe estar P, que cuando se muevan los puntos P siempre se mantenga.
27	J	¿Qué información le puede dar el dibujo?
28	Karina	[Traza una recta que pasa por A y por P, y otra que pasa por B y P]
29	J	¿Qué ocurre con esas rectas?
30	Karina	Son perpendiculares
31	Pablo	Pasan por el vértice y por P. Con esas líneas, se podrían sacar las perpendiculares y con eso BC y AC. Trace una perpendicular a AB que pase por P [Karina construye la perpendicular].
32	Karina	Aquí iría C [señala la perpendicular].

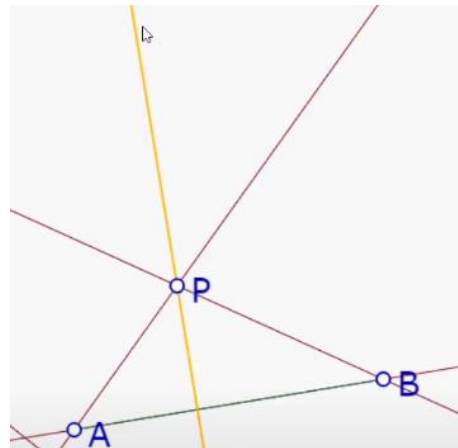
33	Pablo	Sí, pero recordemos que AC debe ser perpendicular a esta recta [señala la recta BP].
34	J	¿Por qué?
35	Pablo	Porque esa recta debe contener la altura, entonces cree una recta perpendicular a BP que pase por A [Karina lo construye].
36	Karina	Y ahora una perpendicular a AP que pase por B.
37	Pablo	Y aquí arriba en el punto de intersección debe quedar C. Ahora mueva los puntos, [Karina mueve los puntos] Sí se cumple todo.



- 210** Alejandro Espere, si yo tengo... [Borra la construcción, construye lo dado junto con las rectas AP y BP y construye una recta perpendicular a AB que pasa por P].



(Apunta perceptivamente donde debería estar C) entonces ahí tengo la tercera altura. ¿No?



- 211** D ¿Por qué?
- 212** Alejandro Porque es del lado opuesto a un vértice, entonces necesito ubicar el vértice, pero ahí ya está, o sea el vértice va a estar colineal con P y el lado opuesto, pero ahí tenemos las 3 alturas.
- 213** John Hagamos eso.

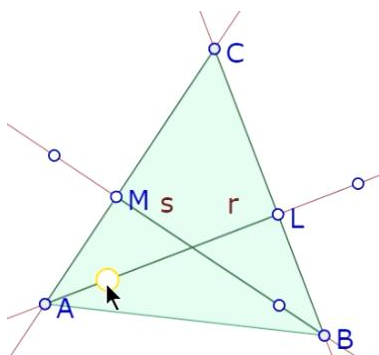
En el tercer problema, en las líneas 44-46, Pablo reconoció que las alturas deben estar contenidas en las rectas, entonces, por ser alturas, esas rectas deben ser perpendiculares a los lados

del triángulo, por tanto, procedió con la construcción de las respectivas perpendiculares. Luego, con la información del problema y la definición de alturas, ubicó correctamente los puntos A, B y C. Aunado a lo anterior, se observa, en las líneas 53-56, que el estudiante ha mejorado su discurso matemático ya que le describe bien las acciones que va a realizar a su compañera Karina.

44 Pablo Tengo una idea, en s debe estar BM [traza una perpendicular a s que pase por cualquier punto de s, la intersección de la perpendicular con r la nombra A] Así tenemos que s va a ser perpendicular con AC... [Construye una perpendicular a r que pase por cualquier punto de r] Con esto tenemos que r es perpendicular a esta [señala la perpendicular que creó] Entonces tenemos que esta es perpendicular a esta y esta es perpendicular a s [señala las rectas y las perpendiculares correspondientes].

45 Karina Espere, esta es perpendicular a r y esta es perpendicular a s [señala las perpendiculares correspondientes].

46 Pablo O sea que aquí debería ir B [señala la intersección de s con la perpendicular a r, lo nombra B] pongamos C [la intersección la perpendicular de r con las perpendicular a s, lo nombra C, construye el triángulo].



53	Karina	[Abre otra pestaña y realiza nuevamente la construcción] (se le pidió a la estudiante que realizara la construcción nuevamente porque no parecía haber comprendido el razonamiento de Pablo).
54	Pablo	Mire, hay que construir un triángulo, la altura AL debe estar en r, entonces r debe ser perpendicular a BC.
55	J	Pueden guiarse con un dibujo.
56	Pablo	[Lo dibuja] s debe ser perpendicular a AC y r es perpendicular a BC. Entonces si tengo r creo una recta perpendicular y tengo s creo otra recta perpendicular y ahí tengo a C.

Actividad 2

Esta actividad lleva consigo un aumento en la cantidad de reglas teóricas para construir o asegurar propiedades, por lo cual, el razonamiento deductivo que se involucra es más elaborado que el utilizado en la primera actividad, ya que el número de implicaciones lógicas aumenta y la conclusión obtenida se convierte en la nueva premisa. En esta actividad se utilizan definiciones como la de rectángulo, rectas perpendiculares, bisectriz y congruencia de triángulos; no obstante, se agregan otras reglas teóricas, como los postulados de perpendicularidad y paralelismo o los postulados de congruencia de triángulos.

Primera secuencia

Los problemas propuestos en esta secuencia están centrados en los procesos de razonamiento que pueden surgir durante la utilización de las definiciones y postulados. Además, durante la secuencia los estudiantes siguen fortaleciendo sus conocimientos con respecto a los objetos dependientes y a las formas de validación. Por ejemplo, en el primer problema, en las líneas 7-15 del grupo de John y Alejandro, Alejandro consideraba que el punto C era dado debido a que se podía mover libremente sobre una recta y que, al tener un punto dado adicional a los otorgados por el problema, era necesario replantear toda la construcción. Sin embargo, por medio de los actos de devolución realizados por el investigador, John logra identificar que C no es punto libre ya que depende de B.

7	Alejandro	Pero lo que es dado es AB, C no se puede mover.
8	John	Estos son puntos libres (mueve A y B).
9	Alejandro	Pero C no.
10	John	Pues no (mueve C por la recta BC) pero no pasa nada de todas formas sigue cumpliendo.
11	Alejandro	Pues ya, según lo que dice el problema.
12	D	¿C es libre?
13	John	Sí, C es libre
14	D	Entonces trate de mover C acá [señalando la parte inferior izquierda de la pantalla]
15	John	C no es libre porque depende de B, un punto es libre cuando no depende de nadie.

Los conocimientos que se promovieron en el transcurso de la secuencia fueron:

- *Validación por medio de las reglas teóricas*

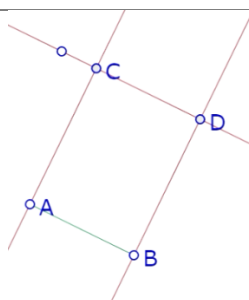
Existen varias formas de validación, entre ellas están las observadas hasta el momento en los problemas, las cuales son el uso el arrastre o la medición de segmentos y ángulos para verificar que se mantienen las condiciones requeridas. Sin embargo, a medida que los estudiantes realicen problemas de construcción y refinan su discurso matemático, se espera que estas formas de validación estén más relacionadas con los aspectos teóricos de lo construido. Lo anterior se ve reflejado en las líneas 129-134, del grupo de John y Alejandro, en el acto de devolución realizado al final de la construcción, ante la cuestión de si medir o no, los estudiantes consideraron que los objetos construidos ya garantizaban las condiciones del problema.

129	John	Estas dos rectas, la recta r y la t son perpendiculares a AB, entonces si estos 2 son perpendiculares entonces son paralelas.
130	D	¿Por qué?
131	Alejandro	Por postulado de perpendicularidad y paralelismo.
132	John	Entonces, cuando dos rectas son paralelas y una recta s es perpendicular a una de ellas, como estamos viendo s es perpendicular a r, a una de esas. Eso quiere decir que entonces s es perpendicular a t, a la otra.
133	Alejandro	¿Y ya?
134	John	Sí, eso garantiza que sea de 90°

En el caso de Karina y Pablo, en las líneas, 38-47, cuando el profesor pregunta por qué los ángulos son rectos, ellos no recurrieron a medir el ángulo, sino que lo garantizaron por el uso y la

definición de la recta perpendicular. Esto indica que los estudiantes van reconociendo que la forma en cómo se avalan las propiedades es por medio de las reglas teóricas, ya que no siempre fue así, en las líneas 30-34, Karina no se remite a las reglas teóricas para justificar las afirmaciones que hace, sino que utiliza sus concepciones o imágenes mentales previas para justificarlas, por tanto, se ve cómo se va logrando un tránsito hacia la validación teórica.

30	Profesor	Y si usted traza una paralela ¿Cómo sabe que el ángulo es recto?
31	Pablo	Porque se conecta con las dos perpendiculares... ella fue la de la idea de la paralela [señala a Karina].
32	Karina	Porque la paralela me garantiza que esta no se mueva de esta a esta y si esta ya forma dos ángulos rectos entonces por obligación si es una paralela aquí también los va a formar.
33	Profesor	¿Por obligación?
34	Karina	Sí porque no tiene la posibilidad de girar porque está conectada a esta que es perpendicular a estas dos.
35	Pablo	Tenemos el segmento, creamos las perpendiculares y como la paralela está conectada a las perpendiculares, siempre que movamos el segmento las perpendiculares se van a mover y eso movería la paralela.
36	Profesor	¿Cómo justificaríamos que este ángulo es recto? [Señala un ángulo formado por una perpendicular y la paralela] Póngales nombres a los puntos.
37	Karina	[Nombra los puntos].



38	Profesor	¿Por qué el ángulo ABD es recto?
39	Karina	Porque todo mide 90° y la paralela...
40	Profesor	No, solo el ángulo ABD, ¿Por qué el ángulo ABD es recto?
41	Pablo	Porque la recta que se cruza con D es perpendicular al punto que se cruza con B.
42	Profesor	¿La recta y el punto? ¿Por qué el ángulo es recto?
43	Karina	Porque hay dos perpendiculares.
44	Profesor	Porque las rectas son perpendiculares y eso está en una...
45	Karina	Definición.
46	Profesor	¿Por qué el ángulo BAC es recto?
47	Karina	Porque es lo mismo (haciendo referencia a que AB es perpendicular con AC).

- *Utiliza la relación causal de las definiciones y de los postulados para resolver problemas*

En las tareas que se presentan en la primera secuencia se evidencia un cambio en la cantidad y el tipo de reglas teóricas que se usan. En esta secuencia se necesita de la definición de rectángulo, de rectas perpendiculares y de los postulados de perpendicularidad y paralelismo.

En la primera tarea, Karina y Pablo iniciaron construyendo rectas perpendiculares al segmento, líneas 17-23, lo interesante es que, durante la conversación del profesor con los estudiantes, ellos dieron a conocer las razones de su construcción, reconocieron que si querían ángulos rectos necesitaban la perpendicular porque la propia definición les garantizaba esa propiedad, con esto se observa un razonamiento deductivo sencillo que solo implica una definición.

17	Pablo	Es que primero creamos el segmento y luego creamos dos perpendiculares
18	Profesor	¿Por qué perpendiculares?
19	Pablo	Para asegurarnos que tengan ángulos rectos
20	Profesor	¿Por qué si las rectas son perpendiculares tenemos ángulos rectos?
21	Karina	Porque cuando una recta corta a otra hace cuatro ángulos rectos
22	Profesor	Y ¿Usted cómo sabe eso?
23	Karina	Por la definición.

Cuando el profesor se dirigió a toda la clase, líneas 102-122 (del grupo de Karina), se puede notar que no solo los 2 grupos realizan esos razonamientos sencillos, sino que toda la clase lo hace, ya que el profesor, al preguntar por qué se obtienen los ángulos rectos, ellos comentan que por las perpendiculares creadas. La creación de los 3 ángulos rectos se consiguió por la definición y el uso directo de una herramienta (rectas perpendiculares). Sin embargo, el cuarto ángulo recto no fue construido directamente, sino que fue un producto de las acciones realizadas. Por tanto, los estudiantes debían garantizar que el ángulo fuera recto. En las líneas 145-153 del grupo de Karina y Pablo y 119-136 en el otro grupo, utilizan los postulados de perpendicularidad y paralelismo para garantizar la propiedad, con esto se ve una relación causal más fuerte que las anteriores, ya

que utilizan los dos postulados y la definición de rectas perpendiculares, es decir, usan 3 reglas teóricas mostrando con esto, un avance en su razonamiento deductivo.

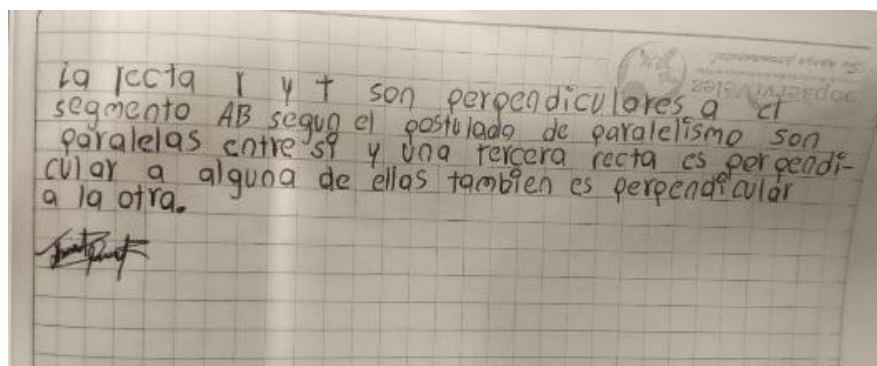
102	Profesor	Vamos a repasar, ¿Este ángulo es recto? [Señala el ángulo BAC].
103	Clase	Sí.
104	Profesor	¿Por qué?
105	Clase	Por la perpendicular.
106	Profesor	¿Cuál perpendicular?
107	Clase	Porque r_1 es perpendicular al segmento.
108	Profesor	Bien, ¿Este ángulo es recto? [Señala el ángulo ABC].
109	Clase	Sí
110	Profesor	¿Por qué?
111	Clase	Porque r_2 es perpendicular a s_1
112	Profesor	¿Es este recto? [Señala el ángulo BCD]
113	Clase	Sí
114	Pablo	Porque r_2 y r_3 son perpendiculares.
115	Profesor	¿Es este ángulo es recto? [Señala el ángulo CDA].
116	Clase	Sí
117	Profesor	¿Por qué?
118	Clase	Porque r_1 y r_3 son perpendiculares
119	Profesor	¿Dónde está eso dicho? (Como no se construyó directamente una perpendicular sobre r_1 , no aparece esa acción en el protocolo de construcción).

120	Pablo	En la línea 8 (lo confunde con otras perpendiculares).
121	Clase	Dicho no está, pero se puede inferir.
122	Profesor	Hemos solicitado que tres ángulos sean rectos porque hemos solicitado explícitamente que 3 rectas sean perpendiculares, pero, hay un cuarto ángulo del que no hemos solicitado que sea recto y tampoco hemos solicitado que sean perpendiculares esas rectas, entonces ¿Cómo vamos a garantizar que sí es recto?
145	Pablo	Si r_1 y r_2 son paralelas si se crea una tercera perpendicular a r_2 , o sea, r_3 , si r_3 es perpendicular a r_2 entonces será perpendicular a r_1 .
146	Karina	Y al ser dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos.
147	J	¿Cómo saben que r_1 y r_2 son paralelas?
148	Pablo	[Busca la definición de paralelas] Si dos rectas no se cortan entonces son paralelas.
149	Karina	Y no se cortan porque están intersecando el mismo segmento.
150	Pablo	Estas rectas son paralelas porque ambas son perpendiculares al mismo segmento.
151	J	Y eso ¿De dónde lo sacaron?
152	Karina	De las definiciones
153	Pablo	Del postulado de perpendicularidad y paralelismo.

119	Alejandro	[Busca en el documento] Mírela, postulado de perpendicularidad y paralelismo.
120	John	[Lee el postulado].
121	Alejandro	A pues ahí está el inicio, si 2 rectas son perpendiculares la otra.
122	John	Son paralelas.
123	D	¿Cuáles rectas?
124	Alejandro	Sí, t es perpendicular a s.
125	D	¿Dónde está eso en la secuencia de construcción?
126	Alejandro	¿Yo puedo decir esto? Si r y t son perpendiculares a esta [señalando AB] entonces son paralelas
127	John	Si, esa es la primera. Y si dos rectas son paralelas y una tercera es perpendicular de ellas entonces esta también es perpendicular a la otra y eso garantiza que es un ángulo de 90° .
128	Alejandro	Espere, más justificado [muestra la secuencia de construcción]
129	John	Estas dos rectas, la recta r y la t son perpendiculares a AB, entonces si estos 2 son perpendiculares entonces son paralelas.
130	D	¿Por qué?
131	Alejandro	Por postulado de perpendicularidad y paralelismo.
132	John	Entonces, cuando dos rectas son paralelas y una recta s es perpendicular a una de ellas, como estamos viendo s es perpendicular a r, a una de esas. Eso quiere decir que entonces s es perpendicular a t, a la otra.
133	Alejandro	¿Y ya?
134	John	Sí, eso garantiza que sea de 90°

135 D Listo, ahora escriban lo que realizaron

136 John (Lo escrito por John fue lo siguiente).



- *Discurso deductivo*

En el primer problema se propuso como actividad que los estudiantes comunicaran la forma de garantizar que uno de los ángulos del cuadrilátero es recto (el ángulo que no fue formado de manera directa con la herramienta perpendicular). En el caso de John en la línea 31, antes de la intervención del profesor, tenía una idea de cómo justificarlo, pero argumentaba con condiciones que no le proporcionaba el problema y sin reglas teóricas de por medio. Después de la intervención, que va desde la línea 30 a la línea 112, John pudo enriquecer su argumento con una estructura más deductiva y con un lenguaje matemático más formal. Lo anterior se puede ver en las líneas 129-134.

31 John Como sabemos que son perpendiculares, si hacemos cualquier cambio [mueve los puntos dados] se va a mantener. También podemos verificarlo con la herramienta ángulo. Como son perpendiculares y estas

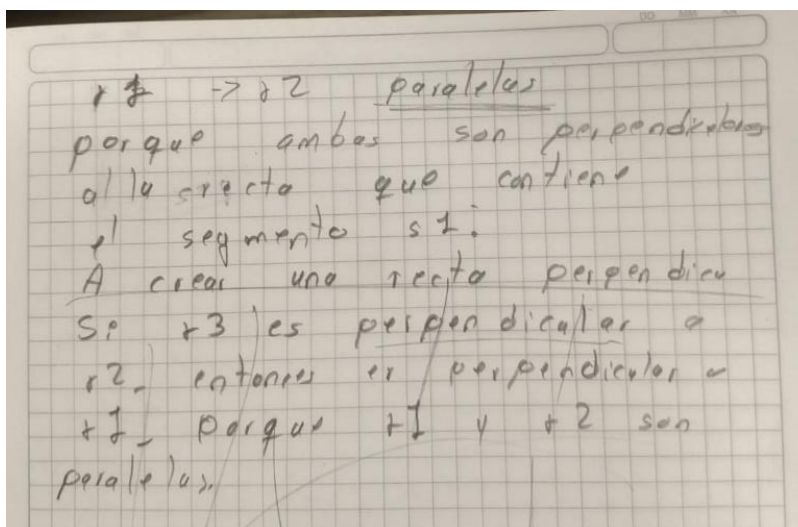
		dos son paralelas, entonces cuando usted traza la perpendicular, va a trazar una recta que corta a las 2 rectas paralelas en un mismo punto y las vuelva a ambas perpendicular.
129	John	Estas dos rectas, la recta r y la t son perpendiculares a AB, entonces si estos 2 son perpendiculares entonces son paralelas.
130	D	¿Por qué?
131	Alejandro	Por postulado de perpendicularidad y paralelismo.
132	John	Entonces, cuando dos rectas son paralelas y una recta s es perpendicular a una de ellas, como estamos viendo s es perpendicular a r, a una de esas. Eso quiere decir que entonces s es perpendicular a t, a la otra.
133	Alejandro	¿Y ya?
134	John	Sí, eso garantiza que sea de 90°

Tanto Karina como Pablo utilizaron proposiciones de la forma si-entonces para garantizar que el ángulo pedido era recto, esto se puede ver en las líneas 158 y 169. La escritura mostraba un mayor dominio de las relaciones causales y de las reglas teóricas. Esto ejemplifica, que por medio del discurso se puede observar la evolución del estudiante en su razonamiento deductivo.

158	Karina	Quedaría algo así, si dos rectas nunca se cortan entonces son paralelas y si hay dos rectas paralelas y hay una tercera perpendicular a una de ellas entonces también es perpendicular a la otra.
-----	--------	---

169

(Lo que escribió Pablo fue lo siguiente).



Segunda secuencia

Esta secuencia involucra la creación de una conjetura a partir de una tarea experimental, con esta actividad podemos notar algunos conocimientos, los cuales se exponen a continuación:

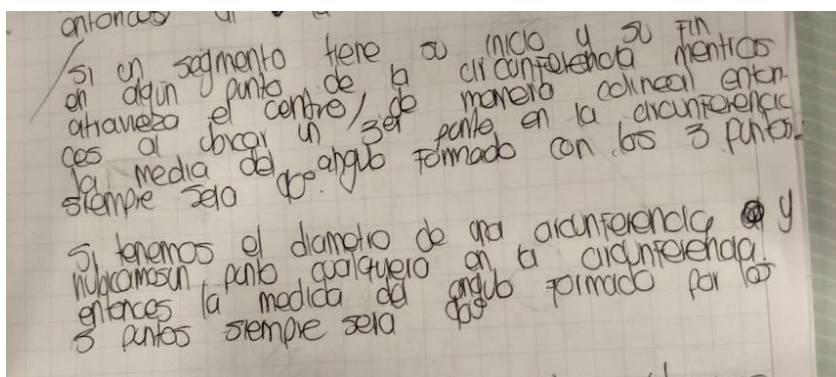
- *Discurso deductivo*

Cuando se le pide al estudiante que escriba la conjetura a la que llegó, el estudiante tiene que organizar sus ideas y ver qué propiedad consigue al garantizar otras propiedades, de tal forma, el alumno puede formar una relación causal de la forma si-entonces, reconociendo las implicaciones lógicas como parte fundamental del razonamiento deductivo.

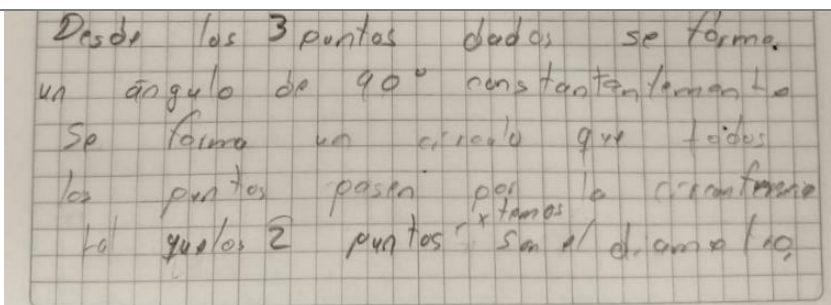
Karina escribe una implicación que tiene como consecuente el ángulo recto mientras que Pablo escribe una implicación que tiene como consecuente el círculo, es decir, escribieron una implicación y su recíproca, como se puede ver en las líneas 101-109. Por parte de Karina, se ve más clara la estructura si-entonces que en la proposición de Pablo. No obstante, ambos estudiantes supieron identificar las características necesarias para obtener el objeto geométrico.

101	J	Ahora deben crear una proposición del estilo si-entonces, que muestre su razonamiento de la exploración realizada. Cada uno escriba sus ideas
102	Karina	¿Debo escribir los nombres P y Q?
103	J	Las reglas teóricas se escriben de manera general, sin darle nombre a los puntos, así como está en el documento
104	Karina	Es difícil
105	Pablo	Si desde los tres puntos dados se forma un ángulo de 90° constantemente entonces se forma un círculo que pasa por todos los puntos
106	Karina	Si un segmento tiene su inicio y su fin en algún punto de la circunferencia mientras atraviesa el centro de manera colineal, entonces al ubicar un tercer punto en la circunferencia la medida del ángulo formado por los tres puntos siempre será de 90° .
107	J	¿Puedes resumir la proposición?
108	Karina	O sea, más reducido

(La proposición escrita por Karina)



109	(La proposición escrita por Pablo)
-----	------------------------------------



Con respecto al otro grupo, la estructura de la relación causal hecha por John es similar a la de Karina, utiliza una implicación que tiene por consecuente ángulos rectos (Ver línea 138). Las condiciones y la conclusión se hacen presentes en el discurso, siendo las condiciones prácticamente los pasos de la construcción y la conclusión lo que debían encontrar para solucionar el problema.

138 John	Espera, lo que tengo hasta ahora es que, si en un círculo se crea un punto cualquiera...no, si en un segmento se crea una circunferencia tal que esta tenga... No, así no. Si en segmento se crea el punto medio y de este se crea una circunferencia que pase por los extremos del segmento cualquier punto de la circunferencia con la relación al ángulo será de 90° .
----------	--

- *Control de acciones*

Por medio de los actos de devolución que realiza el investigador, el estudiante puede considerar si las acciones realizadas favorecen la solución del problema o si no son convenientes a la luz de la teoría. El grupo de John y Alejandro, en la línea 107-117, consideraron que solo 2 puntos cumplen con las condiciones requeridas, esto debido al termino aproximar, el cual les

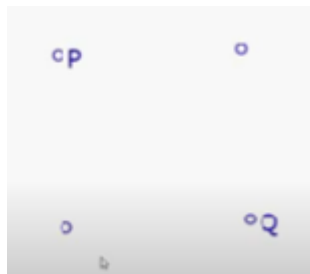
indicaba que podían existir muchos puntos que se acerquen a 90° pero solo 2 que dan el ángulo exacto. No obstante, luego de una intervención por parte del investigador, notaron que hay más puntos que cumplen.

107 John [Mueve el punto R hasta que el ángulo se aproximó a 90°].



108 Alejandro Borre el ángulo sin borrar el punto y repita el paso del 2 al 5.

109 John Bueno [construye otro punto libre y lo arrastra] listo, ahí está aproximado



110 Alejandro Y ¿Ahora qué? Son solo 2 puntos

111 John Ahora el siguiente paso

112 Alejandro Y repita todo nuevamente... ¿Cómo así?

113 John ¡Hasta encontrar una estrategia!

114 Alejandro ¿Cuántas más quieres que haga?

115 Alejandro Pues puedo ponerlos todos de aquí para allá [indicando con el dedo la línea que forma ambos puntos R], pues que se aproxime a 90° hay muchos pero que den exactamente 90° solo hay 2.

116 D Ubique un punto cerca de P, ¿Es posible que se puede formar un ángulo de 90° ?

117 Alejandro [Construye otro punto libre y sigue las indicaciones].



Oiga sí, es que es PRQ, pensé que era PQR.

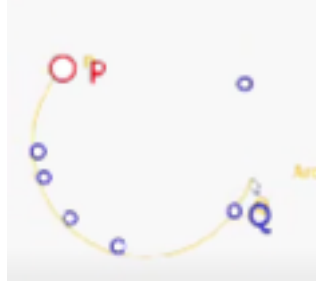
En las líneas 121-128, cuando John ya había construido varios puntos que cumplían las condiciones del problema, ambos miembros del grupo conjeturaron que los puntos estaban en una semicircunferencia. Sin embargo, uno de los puntos estaba por fuera de la construcción realizada, por lo que el investigador llevó la conversación a dicho punto. Como solución ante este inconveniente, John construye un arco de circunferencia que abarca todos los puntos construidos y Alejandro conjetura que todos los puntos están en una circunferencia.

121 John [Realiza más puntos R y los acomoda para que el ángulo PRQ se aproxime a 90°]



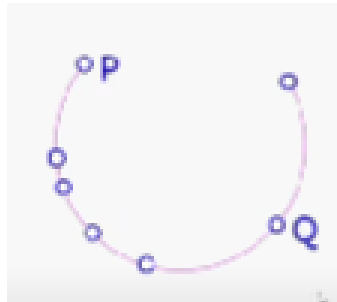
122 Alejandro ¿No se puede hacer un semicírculo? De ahí a ahí [señala P y Q]

123 John También pensé en semicírculos [utiliza la herramienta para construir un arco de circunferencia].



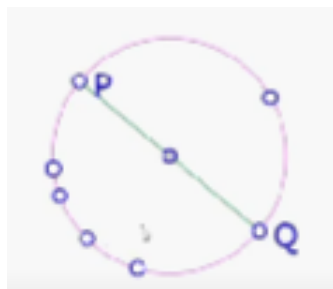
124 D ¿Sí es una semicircunferencia? ¿Qué pasaría con el punto que está fuera?

125 John [Construyen un arco hasta el punto por el cual preguntó D]



126 Alejandro Es un círculo completo, pero ¿Cómo hacemos un círculo solo con puntos? Tocaríá sacar el punto medio y salió

127 John [Construye el punto medio de PQ y un círculo con centro en el punto medio que pasa por Q] Pero no todos los puntos pasan por el círculo



128 Alejandro Porque son aproximaciones, construya un punto en la circunferencia y mida el ángulo.

Como se hizo notar en el análisis a priori, es muy posible que el estudiante cree conjeturas que no sean correctas, por ejemplo, Karina, en las líneas 77-80, da a entender que, si los tres puntos están en una circunferencia, entonces uno de los ángulos será recto, conjetura prevista en el análisis a priori. Cuando ella realizó un dibujo de un círculo en su cuaderno, el investigador aprovecha y formuló una pregunta como acto de devolución, con ese cuestionamiento Karina se percató que no funciona cualquier círculo y procedió a crear otra conjetura, esto se observa en las líneas 90-91.

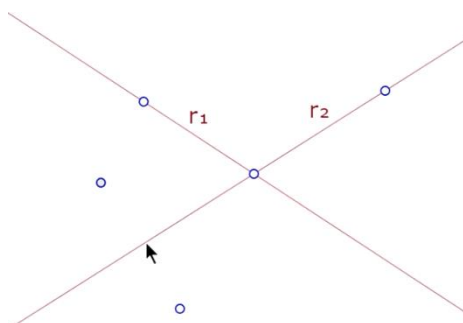
77	J	Pero ¿Qué características tendría ese círculo?
78	Karina	Que P, R y Q van a estar en la circunferencia
79	Pablo	Si está formando un círculo, donde PQ sería el diámetro
80	Karina	No necesariamente
90	J	(Aprovechando el círculo que dibujó, que era un círculo con que P y Q no forma el diámetro) Ubica un punto en ese círculo, R, ¿Cómo es el ángulo PRQ?
91	Karina	No es recto, es agudo. Entonces no sirve cualquier círculo que contenga a los tres puntos. Sí debe ser el diámetro.

Tercera secuencia

La actividad que se planteó en esta última secuencia trabajaba con diferentes reglas teóricas; por una parte, las definiciones de bisectriz, congruencia de ángulos y de triángulos y por otra, los postulados de congruencia de triángulos.

Durante el desarrollo de las previas secuencias descritas, se ha visto un avance en los estudiantes tanto en la conexión de implicaciones como en su discurso deductivo. Sin embargo, hay algunas acciones que los estudiantes siguen realizando, por ejemplo, Karina y Pablo se guían en ocasiones por lo perceptivo; en las líneas 4-14 se puede observar que utilizaron la *Simetría Axial* y ellos pensaron que les serviría para resolver el problema, efectivamente les ayudó, pero no reconocían las razones por las cuales dicha herramienta funcionaba en la solución. Por tanto, su forma de mostrar que la construcción era correcta fue midiendo los ángulos, lo cual, en clases pasadas ya se había discutido que la forma en cómo se garantiza una construcción es usando las reglas teóricas. En la línea 24, el profesor intervino con un acto de devolución que logra motivar a los alumnos a utilizar las reglas teóricas para gestionar no solo sus razonamientos, sino también los pasos de construcción asociados.

4 Karina [Selecciona r_2 y utiliza la herramienta de “simetría axial”]



5 Profesor Qué herramienta están usando.

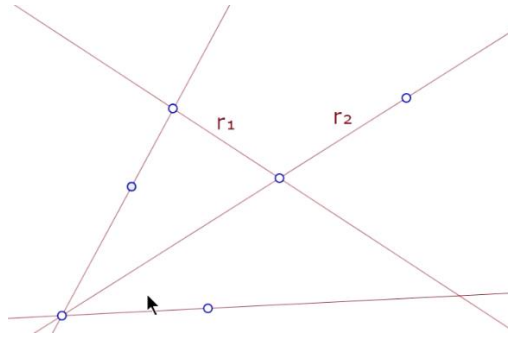
6 Karina Pues a mí me apareció esta [señala la de simetría axial], que da la misma distancia.

7 Profesor ¿Para qué quiere la misma distancia?

8 Karina Para que divida igualmente el ángulo

9 Profesor ¿Qué tiene que ver el ángulo con la distancia?

- 10 Karina Si una línea pasa por ese punto que sale de la recta y otra recta que pasa por este punto se tendría un ángulo que se divide en dos ángulos congruentes.

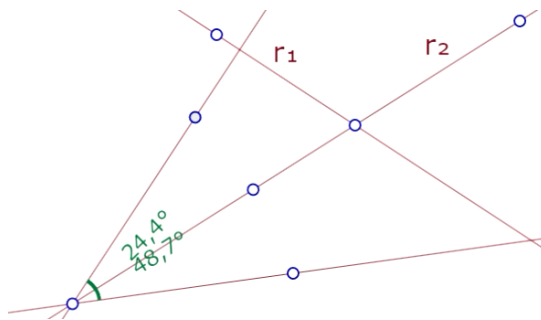


- 11 Profesor ¿Y cómo va a justificar eso?

- 12 Karina Pero ¿Sí funciona?

- 13 Profesor El problema es ¿Cómo va a justificar que esos dos ángulos son congruentes?

- 14 Karina [Halla la medida de los ángulos].



Sí son iguales

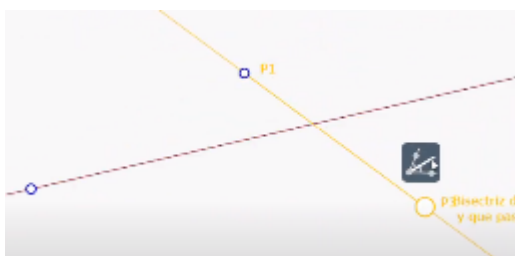
- 24 Profesor Vamos a usar las propiedades que están ahí enunciadas para realizar la construcción. Por ejemplo, en el problema del rectángulo yo preguntaba

por qué se usaban las rectas perpendiculares y ustedes decían, para obtener ángulos rectos por la definición de perpendiculares.

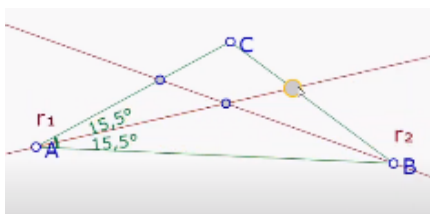
Entonces, ahora lo que necesito son ángulos congruentes, la idea es buscar alguna regla teórica que me permita garantizar la congruencia de ángulos.

Otra acción inesperada en esta secuencia fue con respecto a los objetos dados, la cual se presentó con el grupo de John y Alejandro en las líneas 9-15. En esta situación los estudiantes no comenzaron con las rectas sino con 3 puntos y hallando sus bisectrices construyeron las rectas, ellos argumentaban que las rectas se podían mover libremente por el plano, sin embargo, había dependencia entre las rectas r_1 y r_2 . El acto de devolución realizado por parte del investigador fue valerse del arrastre para que los estudiantes notaran la dependencia de las 2 rectas, lo que efectivamente sucedió.

-
- 9** Alejandro [Construye 3 puntos libres y dos rectas con la herramienta bisectriz] y ahí está [construye el triángulo con los 3 puntos libres].



-
- 10** Alejandro [Nombra los puntos libres como A, B y C] y podemos medir para probar [mide los dos ángulos resultantes de la primera bisectriz construida].
-



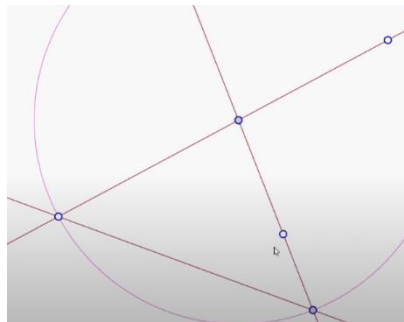
- | | | |
|----|-----------|--|
| 11 | D | ¿Las rectas son dadas? |
| 12 | John | ¿Cómo construyó las rectas? |
| 13 | Alejandro | Con la bisectriz, si son dadas por que se pueden mover [mueve el punto A] (como r1 es bisectriz del ángulo CAB se mueve también). |
| 14 | D | Mueva r1. |
| 15 | Alejandro | [Mueve r1] se mueve también r2, está mal. Hagámoslo bien [construye dos rectas r1 y r2 y mueve r1] (nota que no se mueve r2) Ah solo se mueve... ya entiendo ¿Cómo lo hacemos? Entiendo que esta recta es la bisectriz del ángulo. |

- *Utiliza la relación causal de las definiciones y los postulados para resolver problemas*

Alejandro realiza la solución del problema traspasando lo realizado en el cuaderno a DGPAd, pero teniendo en cuenta el orden en que debía construir los objetos, las reglas teóricas pertinentes y las herramientas que le permitían realizar lo expuesto en el dibujo. En las líneas 86-95, se puede observar cómo utiliza las reglas teóricas para ir justificando cada paso de la construcción y cómo hila las definiciones y los postulados para garantizar ángulos congruentes. Por ejemplo, se puede evidenciar, en dichas líneas, cómo realizó los círculos para hacer uso el

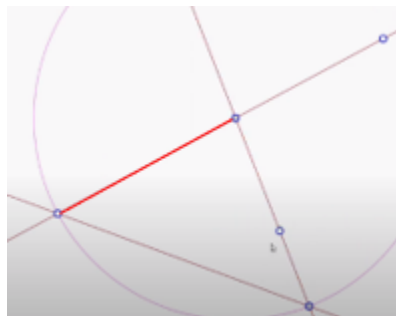
postulado de congruencia LLL, luego lo utilizó para construir triángulos congruentes y con ello, concluyó que las rectas son bisectrices debido a la congruencia de ángulos que garantizan los triángulos construidos.

-
- 86** Alejandro [Escribe en el cuaderno] Espera [construye un círculo con centro en el punto de intersección de las rectas dadas que pasa por un punto cualquiera de r_1], necesitamos un triángulo congruente con este chiquito [construye el punto de intersección entre el círculo y r_2].

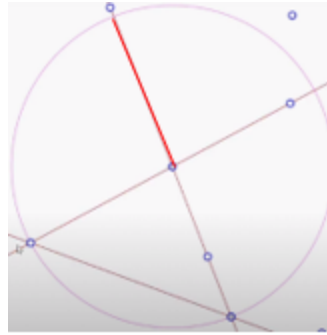


-
- 87** John Equiángulo.

-
- 88** Alejandro Equiángulo no, congruente, entonces este lado lo van a compartir (señalando uno de los lados del triángulo).



-
- 89** Alejandro Y este no lo comparten, pero está en la misma circunferencia [señala un radio del círculo] (en este caso se imagina el triángulo construido y está garantizando la congruencia de lados).
-



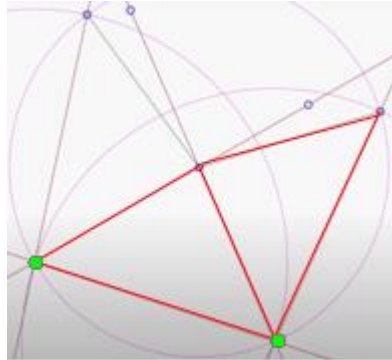
- 90** Alejandro El que necesitamos hallar es este (se refiere a garantizar que los últimos lados sean congruentes) entonces hacemos un círculo con centro acá que pase por acá [construye un círculo con radio igual a último lado por garantizar].



- 91** Alejandro Entonces como está en ambas circunferencias entonces es este punto [construye la intersección de los 2 círculos] y recta [construye la recta que forma los triángulos congruentes] y ahí está la bisectriz ya que son congruentes.

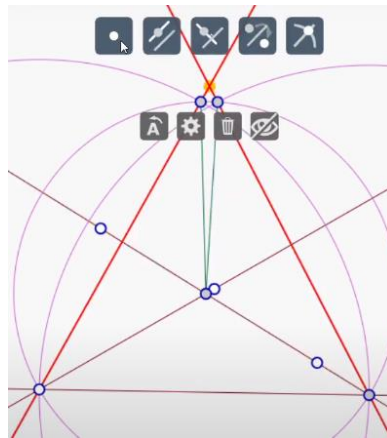
- 92** John Este con este [Señalando los triángulos]

-
- 93 Alejandro Ahora toca hacer lo mismo con el otro [construye los otros triángulos congruentes] Oiga, pero quedó raro.



-
- 94 John [Mueve los puntos dados].

-
- 95 Alejandro A ya [construye el punto de intersección de las últimas 2 rectas construidas] y ya, ahí está el triángulo



En el caso de Karina y Pablo, las líneas 25-34 exponen, de manera implícita, una serie de implicaciones lógicas, usando definiciones y postulados, que generan teóricamente la solución al problema. Es decir, Pablo comenta que, para tener ángulos congruentes, se necesitan triángulos

congruentes porque su definición lo garantiza y que para tener triángulos congruentes es necesario que los tres lados correspondientes sean congruentes. No obstante, ellos reconocieron las implicaciones lógicas, pero no lograban concretarlas en el software. Seguidamente ellos realizaron algunos intentos con círculos, sin embargo, con los actos de devolución del investigador, Karina, en las líneas 101-115, logró realizar los círculos correspondientes y por ende los triángulos congruentes, además, justificó la congruencia de lados por medio de la construcción de los círculos.

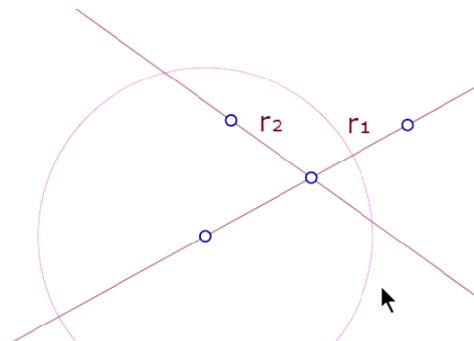
25	Pablo	Hay tres postulados de congruencias [lee los postulados de congruencia de triángulos].
26	Karina	O sea que tenemos que hacer dos pares de lados congruentes.
27	Pablo	Tenemos que hacer triángulos congruentes, ahora, ¿Cómo se hacen triángulos congruentes?
28	J	¿Qué otra definición tenemos?
29	Pablo	[Lee la definición de triángulos congruentes]
30	J	¿Eso les ayuda para resolver el problema?
31	Pablo	Supongo que sí porque si tengo dos triángulos congruentes sus ángulos también son congruentes, ahora, no sé cómo hacer triángulos congruentes.
32	J	¿Qué le ayuda a construir triángulos congruentes?
33	Pablo	No sé, [busca en las reglas teóricas y lee el postulado de congruencia LLL] ¿Cómo así? [Dibuja dos triángulos en el cuaderno] Si tenemos dos triángulos, entonces que cada lado del triángulo sea congruente.

34 Karina Si tenemos un triángulo [dibuja dos triángulos en el cuaderno] y este lado es congruente a este y este a este y este a este, entonces los triángulos son congruentes.

101 Karina Creo que ya sé [dibuja un triángulo] este lado debe ser congruente con este y este con este para que los ángulos correspondientes sean congruentes. Entonces ubicamos A y hacemos un círculo que pase por él para que la misma medida de acá a acá sea la que halla de acá a acá. [Señala el dibujo realizado en el cuaderno].

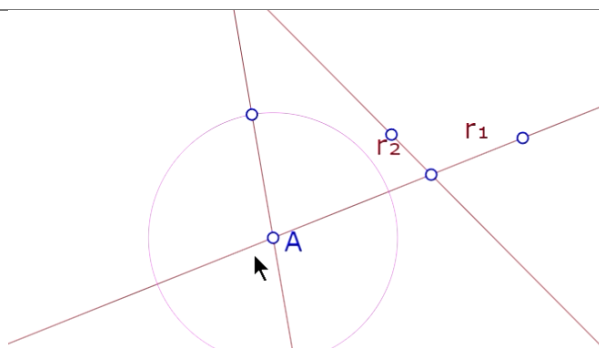
102 J Listo, con eso asegura la congruencia de esos dos lados, ahora ¿Cómo asegura la otra parte? Ve construyendo lo que me dijiste.

103 Karina [Ubica un punto A en r_1 , crea un círculo cualquiera con centro en ese punto].



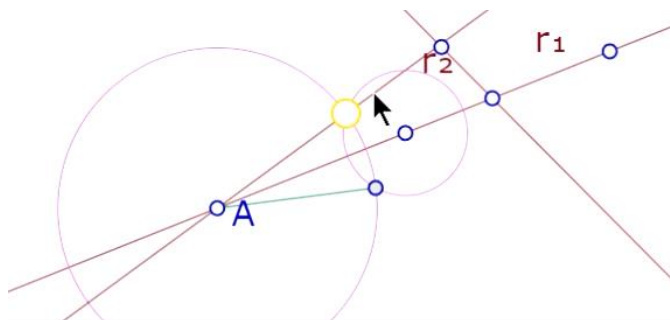
104 J ¿Y el círculo es para?

105 Karina Asegurar esto (se refiere a que un par de lados sean congruentes) [crea una recta que pasa por A y por un punto P cualquiera de la circunferencia].



106 J Con ese círculo logras que dos lados sean congruentes, como garantizas que estos otros dos lados sean congruentes [haciendo referencia al dibujo] ¿Cómo garantizas congruencia de lados?

107 Karina Con círculos [crea otro punto Q sobre r_1 , crea un círculo con centro en Q que pase por P, las intersecciones de los círculos formarían los triángulos congruentes].

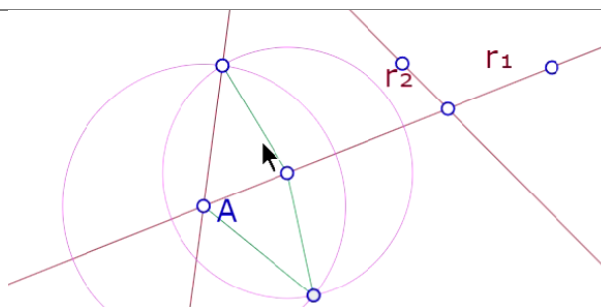


108 J ¿Por qué este lado es igual a este lado?

109 Karina Porque tiene como centro A [señala el círculo que tiene centro en A].

110 J ¿El otro círculo que creó qué garantiza?

111 Karina Que este lado y este lado van a ser congruentes [crea segmentos de dichos lados].



112	J	¿Entonces qué construyó?
113	Pablo	Triángulos congruentes.
114	J	Entonces...
115	Pablo	Este ángulo y este ángulo serían congruentes y esta sería la bisectriz.

- *Control de acciones*

Existen diversas reglas teóricas que como consecuente se obtiene la misma propiedad, pero las condiciones necesarias y suficientes planteadas en el antecedente difieren. Por tanto, es necesario saber cuál regla teórica funciona para resolver el problema a partir de las condiciones dadas.

En la discusión en clase un estudiante comenta que se puede utilizar el teorema del triángulo isósceles para construir los ángulos congruentes, aunque en las líneas 71-77, Karina niega la posibilidad de usar ese teorema para cumplir con la propiedad deseada porque no es posible que dos ángulos opuestos de dos lados de un triángulo sean adyacentes, aunque ella no utiliza las palabras apropiadas se evidencia que reconoce que las condiciones dadas no permiten el uso de dicha regla teórica. Por otra parte, John consideró utilizar triángulos equiláteros y cuadrados para garantizar ángulos congruentes, pero Alejandro se negó a esta última idea porque el cuadrado solo serviría para ángulos de 90° (ver línea 50-58), por lo que terminaron descartando la idea.

71	Profesor	¿Qué dice el teorema del triángulo isósceles?
72	Clase	[Leen el teorema del triángulo isósceles].
73	Profesor	Acá tengo congruencia de ángulos si los lados opuestos son congruentes. ¿Podríamos pensar esos dos ángulos en los que la bisectriz divide al ángulo BAC como dos ángulos de un triángulo? ¿Es posible que esos dos ángulos sean los dos ángulos de un triángulo donde los lados opuestos a ellos son congruentes?
74	Karina	No, porque dice dos lados opuestos. Porque el ángulo está en el mismo lado.
75	Clase	(Alguien comenta algo en clase, es inaudible).
76	Karina	Porque el ángulo congruente va a ser al lado opuesto, o sea cada lado va a tener su opuesto, y no va a ser el mismo del siguiente lado. O sea, cada lado tiene su ángulo opuesto, y dice que son 2 lados congruentes y los respectivos ángulos opuestos a esos lados son los ángulos que van a ser congruentes, los respectivos ángulos nunca van a ser el mismo.
77	Profesor	Como es de difícil decir las cosas. Voy a tratar de decir lo que usted me está queriendo decir con otras palabras. ... Entonces, no toda regla teórica que concluya lo que quiero me funciona. Continúen.

50 Alejandro Y ¿Por qué no círculo?, porque si yo construyo un triángulo equilátero tendrá todos sus ángulos congruentes

51	Profesor	Y ¿Qué regla teórica le garantiza eso?
52	Alejandro	La definición de triángulo equilátero [busca en el documento]
53	Profesor	De triángulo equilátero es que sus 3 lados son iguales.
54	John	Equiángulo.
55	Alejandro	Pero si es un triángulo es equiángulo debe ser obligatoriamente equilátero. ¿No?
56	John	¿Es que no se puede resolver con cuadrado? Porque todos sus ángulos son rectos y por ende congruentes.
57	Alejandro	[Realiza un dibujo en cuaderno] pero solo sería para ángulos de 90° .
58	John	Que otros teoremas garantizan ángulos congruentes

De manera general, cabe resaltar algunos de los avances más significativos de los estudiantes; a Pablo al inicio se le dificultaba realizar esa conexión de implicaciones lógicas para resolver el problema, sin embargo, en las últimas tareas proponía soluciones válidas y organizadas axiomáticamente. Karina y John presentan un avance en el discurso deductivo, por ejemplo, cuando escribieron con sus palabras el teorema de Tales, ellos identificaron adecuadamente las condiciones necesarias para obtener la propiedad requerida y lo expresaron con una proposición de la forma si-entonces. Por otra parte, Alejandro, en un primer momento, basaba la validación de la solución del problema perceptivamente y luego, conforme avanzaba en las tareas, se basaba en las reglas teóricas utilizadas en la construcción.

6. CONCLUSIONES

La teoría de las situaciones didácticas, al tener como base el aprendizaje por adaptación, ofrece al estudiante un papel protagónico en la construcción de su propio aprendizaje; donde el aprendizaje se logra por medio de la interacción del alumno con el medio modelado, en el cual se resuelven los problemas planteados. Por tanto, con el fin de lograr establecer un puente entre la geometría física y la geometría teórica, fue necesario diseñar minuciosamente las situaciones adidácticas con el propósito de que los estudiantes construyeran los conocimientos geométricos deseados. La ingeniería didáctica contribuyó en la elaboración de estas situaciones ya que ofrece, en el análisis preliminar, un marco conceptual de los conocimientos implicados desde una perspectiva epistemológica, cognitiva y didáctica. Dicho análisis dio cuenta de que la enseñanza de la geometría euclidiana en la universidad tiene como enfoque principal los procesos formales de demostración, hizo notar las dificultades que tienen los estudiantes en el proceso de razonamiento deductivo y de las ventajas que el SGD puede traer como medio para el desarrollo de este. Toda la información recolectada contribuyó a la modelación del medio a través de una micro ingeniería didáctica.

En el análisis a priori, la TSD permitió establecer conjeturas sobre la interacción de los estudiantes con el medio y se propusieron actos de devolución ante algunas acciones que requerían de la intervención del profesor para lograr que las situaciones adidácticas evolucionaran. Los actos de devolución que se llevaron a cabo en la fase de experimentación coadyuvaban la comprensión de los problemas y el uso de las reglas teóricas relacionadas por parte de los alumnos; cuando el profesor identificaba que estas eran motivadas por la intuición o por razones perceptivas. En este sentido, consideramos que el contrato didáctico en el que se invita a los alumnos a actuar, interpretar retroacciones y validar acciones mediante el uso de definiciones, postulados y teoremas

de los que dispone, fue importante para motivar el paso de la validación meramente perceptiva del uso de las herramientas construcción a una validación discursiva, logrando conectar las herramientas de construcción con reglas teóricas. Por ejemplo, el alumno cuando usaba la herramienta recta perpendicular no solo podía constatar perceptivamente que estas forman ángulos rectos, sino también, que la definición de rectas perpendiculares permitía justificarlo y para ello fue importante que el profesor convidara al alumno a usar el documento con las reglas teóricas.

Con respecto a la interacción de los estudiantes con el medio, el SGD ofrece herramientas para construir objetos dinámicos que se pueden manipular arrastrándolos por la pantalla. También ofrece retroacciones al arrastrar que les permitieron a los alumnos validar las construcciones efectuadas, de manera que podían distinguir si la construcción garantizaba las propiedades solicitadas o no, al percibirlas en la pantalla. Así mismo, esto les ayudó a tener un control sobre sus acciones y a justificar por qué el procedimiento funcionó o no.

Entendiendo que una de las principales problemáticas del uso del SGD en el aula es su fundamentación teórica. En general, llevar el SGD a la clase no implica que aprovechemos el potencial que este tiene para enseñar, ya que muchas actividades se pueden limitar a elaborar dibujos y construcciones sin una reflexión didáctica exhaustiva. En este trabajo hemos buscado, usando la TSD y la ingeniería didáctica, concretar una secuencia de tareas y reflexionar sobre su implementación y lo que sería un modelo teórico sobre la interacción de los alumnos con el medio. Esta reflexión teórica fue, en gran medida, coherente con los resultados obtenidos. Es decir, la TSD ofreció los elementos suficientes para lograr un grado de generalidad destacable.

Con las tareas diseñadas, la interacción de los estudiantes con el medio, las retroacciones y las devoluciones dadas, se evidenció un avance en el razonamiento deductivo de los alumnos, ya que en la primera actividad realizaban implicaciones lógicas simples usando una sola definición;

utilizaban el arrastre y la eliminación de objetos como forma de validación y; su discurso estaba basado mayormente en razonamientos intuitivos y un léxico natural. Mientras que, en la segunda actividad, los estudiantes solucionaban los problemas de construcción usando implicaciones lógicas más elaboradas con definiciones y postulados; ya no validaban las construcciones realizadas solo de manera visual sino también con las reglas teóricas disponibles; y mediante un discurso más formal, usando conexiones lógicas y un léxico propio del razonamiento axiomático deductivo. Sin embargo, consideramos que en algunos casos las acciones de los alumnos pudieron ser permeadas por el contrato didáctico y en estos casos los resultados habría que estudiarlos con mayor profundidad. Más adelante ejemplificaremos y profundizaremos más este hecho.

De manera más específica, con respecto a la primera secuencia, los estudiantes utilizaron la herramienta “punto medio” para construir el punto medio de los puntos dados, el cual permanece invariante con el arrastre. También distinguieron que el problema de construcción está determinado por los objetos iniciales, esto se evidencia cuando notaron la diferencia entre el problema de construir el punto medio M de A y B dados estos dos últimos y construir B dados A y M . En el primero lograron comprender que bastaba usar la herramienta punto medio mientras que en el segundo no y, por lo tanto, se trataba de otro problema. En este último utilizaron el círculo para garantizar la equidistancia del punto medio a los extremos y la recta para garantizar la colinealidad de los puntos.

En la segunda secuencia, los estudiantes utilizaron herramientas para construir varios objetos que conforman otro nuevo. Por ejemplo, construir las medianas de un triángulo por medio de las herramientas “punto medio” y “segmento”. En las otras tareas, utilizaron el círculo y otras herramientas para garantizar las condiciones explícitas en el antecedente de las reglas teóricas de las que disponían.

Con respecto a la tercera secuencia, en la primera tarea, los estudiantes diferenciaron los objetos geométricos por las propiedades que los caracterizan. Por ejemplo, Karina y Pablo inicialmente confundieron mediana con altura, creyendo que cada altura debía pasar siempre por el punto medio del lado opuesto al vértice, no obstante, cuando leyeron las definiciones, del documento de reglas teóricas, se dieron cuenta que sus consecuentes no garantizaban lo mismo, por lo que podría haber triángulos con alturas que no tengan como extremo el punto medio de un lado o con medianas que no sean perpendiculares a los lados. En cuanto a las 2 últimas tareas de esta tercera secuencia, los estudiantes utilizaron la herramienta “perpendicular” juntamente con la definición de altura para obtener los lados del triángulo, evidenciando un uso teórico de esta herramienta de construcción.

En cuanto a la segunda actividad, primera secuencia, se evidenció la utilización de una herramienta para construir un objeto que garantizaba una propiedad ya que los estudiantes usaron la herramienta “perpendicular” para asegurar tres ángulos rectos. Además, para justificar que el cuarto ángulo era recto, usaron más de una regla teórica porque no fue construido directamente con una herramienta. En otras palabras, al solicitar la justificación, los estudiantes realizaron conexiones entre varias reglas teóricas (definición de rectas perpendiculares, definición de rectángulo y el postulado de perpendicularidad y paralelismo) con los elementos de la construcción realizada. Esto es, los estudiantes utilizaron proposiciones de la forma si-entonces y lograron concretar un razonamiento deductivo. Sin embargo, cuando el profesor solicitó a los alumnos justificar teóricamente por qué el cuarto ángulo del cuadrilátero es recto, es posible que haya propiciado el efecto topacio, dado que los alumnos no necesariamente reconocían esta justificación como algo necesario, sino posiblemente como una petición autoritaria del profesor, dado que ellos podían medir el ángulo y comprobar que permanecía recto luego de arrastrar, estrategia que en la

primera actividad jugó un papel importante para validar. Por lo tanto, es pertinente replantear la forma como se formula el problema a los estudiantes, para que no resulte en una imposición del profesor, sino en una situación que tiene sentido para los alumnos, donde la necesidad de justificar surge de manera natural. Una posible reformulación consiste ofrecer el protocolo de construcción y pedir anticipar si con esas acciones se obtiene un rectángulo.

En la segunda secuencia, cuando se les pidió a los estudiantes que escribieran la conjetura a la que llegaron, los alumnos organizaron las ideas de tal forma que determinaron las propiedades que eran necesarias garantizar para conseguir el resultado observado, esto lo escribieron de la forma si-entonces mostrando la comprensión de la relación causal. Karina conjeturó “si tenemos el diámetro de una circunferencia y ubicamos un punto cualquiera en la circunferencia, entonces la medida del ángulo formado por los tres puntos siempre será 90° ”. Por su parte, John escribió “Si en un segmento se crea el punto medio y de este se crea una circunferencia que pase por los extremos del segmento cualquier punto de la circunferencia con relación al ángulo será de 90° ”. Aunque la proposición de John tiene una redacción deficiente, la relación causal que él manifiesta en esta es explícita.

En la última secuencia, los estudiantes utilizaron varias reglas teóricas para concatenarlas en razonamientos deductivos y producir propiedades más elaboradas por medio de la construcción de varios objetos, esto debido a que, por la definición de bisectriz necesitaban garantizar ángulos congruentes; una de las formas de conseguirlos fue por medio de triángulos congruentes que se construyeron usando el postulado de congruencia LLL.

Aunque este trabajo conllevó resultados positivos, el hecho de que hayamos experimentado con estudiantes en un ambiente de aula de clase, ocasiona que algunas de sus acciones no correspondan necesariamente a una consecuencia de la ingeniería didáctica sino del contrato

didáctico. Sin embargo, eso no implica que todas las acciones del alumno provengan de este ya que se puede evidenciar que hay momentos en los que el diseño de la ingeniería didáctica favorece el razonamiento deductivo a través de las acciones realizadas por los alumnos para solucionar la tarea. Así pues, pensamos que unas situaciones se pueden reformular de modo que las acciones que se desea que hagan los estudiantes surjan del planteamiento del problema y no por una imposición del profesor.

En esta investigación se trabajaron problemas con definiciones sencillas y luego con razonamientos más robustos, no obstante, hace falta estudiar muchas más tareas con nuevas reglas teóricas, con conexiones lógicas más elaboradas y técnicas de resolución de problemas; por tanto, hay necesidad de seguir investigando en esta dirección.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, E. y Cardozo, S. (2021). Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando software de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted*,(49), 255-276.
<https://doi.org/10.17227/ted.num49-9884>
- Acosta, M., Monroy, L. & Rueda, G. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio. *Revista de integración*. 28(2), 173-189.
<https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/2174/2535>
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-59, Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del zorzal. Buenos aires. Argentina.
- Chávez, V. y Parraguez, M. (2014). *Construcciones mentales para el objeto recta de euler*. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 689-696
- Dal Maso, M. (2007). Dificultades en las demostraciones en geometría. *Premisa*, 35, 26-36.
- Estévez, R. (2022). *Retroacciones didácticas programadas en DGPAD para el reconocimiento perceptivo de la razón de homotecia*. [Tesis de maestría, Universidad Industrial de Santander]
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas*. (M. Acosta y J. Fiallo, trads.) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

- Mathé, A. C., Barrier, T., & Perrin-Glorian, M. J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire: Enjeux, ruptures et continuités*. Editions Academia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*.
- Morales, S. y Samper, C. (2015). *Dificultades en el aprendizaje de la demostración deductiva formal en geometría euclídea*. 4(6). 55-68.
- Ortega, T. y Pecharromán, G. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *AIEM – Avances de Investigación en Educación Matemática*. (7). 95-117.
- Rueda, M. y Niño, A. (2013). *Automatización de actos de devolución en software Cabrí LM*. [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]
- Samper, C., Aya, O. y Echeverry, A. (2015). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *TED*, (35), 63-86.
- Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2001). Razonamiento en Geometría. *EMA*, 6(2), 141-158.
- Samper, C., Molina, C. y Echeverry, A. (2013). *Elementos de Geometría*.
- Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*. 65-81.

ANEXOS

Anexo1

Transcripción grupo Karina y Pablo

1era Clase

Actividad 1:

1° Secuencia

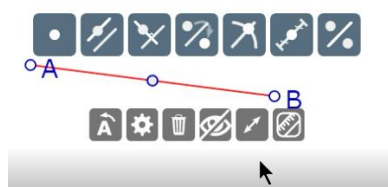
- 1) Dados dos puntos A y B, construir un punto M, tal que M sea el punto medio de A y B.

No	Sujeto	Descripción
1	Karina	[Lee la tarea, construye los puntos dados y los nombra A y B].
2	Pablo	Lo hicimos la vez pasada. ¿Se acuerda cómo usar eso verdad?
3	Karina	Ya se me olvidó.
4	Pablo	Busca la herramienta punto medio, la cuatro, [Karina busca y usa la herramienta y construye el punto medio de A y B], ahora se nombra M [Karina nombra el punto medio].
5	Karina	Ya quedó ¿No?
6	Pablo	Ahora mueva A [Karina mueve el punto A], si siempre está en la mitad.
7	Karina	Ahora B [mueve el punto B].
8	Pablo	[Pregunta a J] ¿Usted nos puede ayudar? Es que mi capacidad de seguridad.... Es poca.
9	J	Yo hago preguntas para orientarlos.
10	Karina	No, pero sí está bien [abre otra pestaña para el siguiente problema].

- 2) Dado un segmento AB, construir un punto M, tal que M sea el punto medio del segmento AB.

No	Sujeto	Descripción
11	Karina	[Lee el problema].
12	Pablo	Un segmento es una línea ¿Verdad?
13	Karina	Sí [construye dos puntos, el segmento y nombra los puntos].
14	Pablo	[Lee el problema] ¿No es lo mismo?
15	Karina	No, porque en la otra no había una línea, solo los puntos. [construye el punto medio seleccionando el segmento y luego la herramienta punto medio]
16	Pablo	¿Sí está bien?

17	Karina	No sé, equivocándose se aprende [mueve el punto A y el punto B] M siempre va a estar... El segmento también.
18	J	Ahora una pregunta. ¿Cuál es la diferencia entre el primer problema y el segundo problema?
19	Karina	M está definiendo que hay corte entre A y B
20	J	¿Qué creen que va a ocurrir si se borra el segmento?
21	Pablo	M se va a borrar
22	J	¿Por qué?
23	Pablo	Porque el punto M depende del segmento
24	J	Pruébenlo
25	Karina	[Borra el segmento y no se borra M] Entonces M no es el punto medio del segmento.
26	J	¿Por qué?
27	Karina	Porque el punto medio debería ser del segmento como tal y si desaparece el segmento debería desaparecer M
28	Pablo	Entonces ¿En qué nos equivocamos?
29	Karina	[Realiza el mismo procedimiento, construye el segmento y sobre el segmento ubica el punto medio]

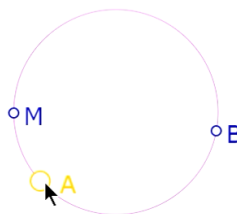


30	Pablo	Ahora borre [Karina borra la línea y se da cuenta que sigue estando M]
31	Karina	Entonces no hay ninguna diferencia (haciendo referencia a que no hay diferencia entre el primer problema y el segundo problema)
32	Profesor	[Él realiza las mismas preguntas hechas por J] ¿De qué depende el segmento?
33	Clase	De A y B
34	Profesor	Y entonces el punto medio del segmento AB depende únicamente de...
35	Clase	De A y B

3) Dados dos puntos A y M, construir un punto B, tal que M sea el punto medio de A y B.

No	Sujeto	Descripción
36	Profesor	¿Cuál es la diferencia entre el problema 1 y 3?
37	Pablo	[Lee el problema 3] Son distintos porque M depende de B
38	Karina	[Lee el problema y construye los puntos dados] (se quedan pensando que se debe hacer) M no debe depender de nadie.
39	Pablo	Y debe quedar en la mitad de A y B.
40	Karina	Creemos B [crea un punto B y lo ubica de tal forma que M parezca el punto medio de AB]...Hagamos un círculo que pase por los tres puntos

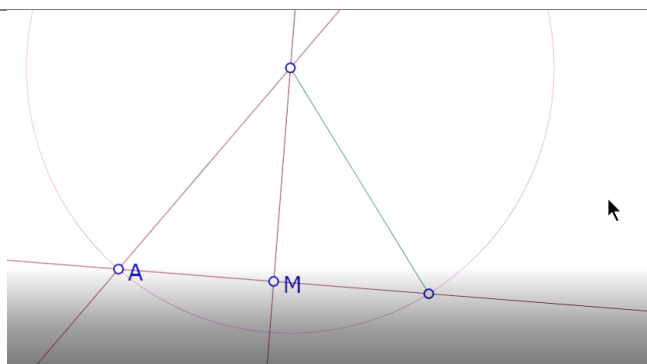
[para ello utiliza la herramienta círculo que pasa por 3 puntos y luego de construir el círculo arrastras el punto A].



41	Pablo	¿Qué está haciendo?
42	Karina	Este debe ser el radio [señalando a M] que está en la mitad (se refiere a que M debe ser el centro del círculo).
43	Pablo	El radio no queda en la mitad, el punto medio está en la mitad.
44	Karina	El radio también queda en la mitad.
45	Pablo	El radio es lo que hay del extremo al punto. ¿Qué es lo que está haciendo?
46	Karina	Si M queda en la mitad del círculo y A queda en un extremo y B en el otro, hay la misma distancia de M a B que de M a A. Entonces si M es el radio siempre va a haber la misma distancia en la circunferencia.
47	J	¿M es el radio?
48	Karina	Bueno es el circulito de la mitad.
49	J	Se llama centro.
50	Pablo	Radio es la distancia, quite el punto B que creó. Ahora haga un círculo con centro en M y luego por A.
51	Karina	[Crea un círculo con centro en M que pase por A] A y M deben ser independientes [arrastra los puntos] En el círculo debe estar B [ubica un punto en el círculo] este debe ser B. Pero deben estar alineados para que este sea punto medio.
52	Pablo	Pero dice dados dos puntos, no un segmento, entonces no sé...
53	Karina	Pero para que este sea punto medio [señala M] debe estar alineado
54	Pablo	Trace una línea de A a B.
55	Karina	[Traza la línea de A a B y mueve los puntos, M no es colineal].
56	Pablo	Se me ocurre hacer un triángulo, pero no sé bien.
57	J	Dibuja tu idea en el cuaderno para intentarla.
58	Karina	[Traza el segmento AB y luego traza el punto medio, borra M y se elimina todo, construye de nuevo M y el círculo con centro en M que pase por A].
59	Pablo	Y si traza una recta, no un segmento, una recta que pase por ambos. [Karina construye la recta que pasa por A y M] En la intersección de ambos pone el B.
60	Karina	[Mueve los puntos] Ay si, así era, M va a ser punto medio y siempre va a tener la misma distancia.
61	J	¿Cuál era la idea del triángulo?
62	Pablo	Hacer un triángulo equilátero que justo en la mitad estuviera M.



63	Karina	Pero sí se podía así ¿No? Se hace el triángulo y se parte por la mitad y ese sería M, este extremo A y el otro B.
64	J	Intenten hacer lo que pensaron.
65	Pablo	El problema es que como lo pensé, M dependería de B.
66	Karina	Pues lo hacemos y lo renombramos.
67	Pablo	No se puede renombrar porque el chiste es que le dan A y M. Entonces sería hacer un triángulo equilátero, pero ¿Cómo? Sería más fácil en lápiz y papel.
68	Karina	Sí, porque uno puede medir.
69	Pablo	Y porque nada se mueve.... Sería mejor hacer un triángulo rectángulo. ¿Cómo se hace eso?
70	J	¿Cuál es la característica principal del triángulo rectángulo?
71	Pablo	Tiene un ángulo de 90°
72	J	¿Cómo puedo garantizar eso?
73	Karina	Con dos rectas... perpendiculares
74	J	¿Cuáles serían las rectas perpendiculares?
75	Pablo	Este y este [señalando la base y la altura del triángulo]
76	J	Vuelva a decir su idea.
77	Pablo	La idea es hacer un triángulo rectángulo y luego otro que esté al lado y que sean iguales. [construye una recta que pase por A y M] ¿Cómo hago un ángulo de 90° ?
78	Karina	Con rectas perpendiculares [busca entre las herramientas de DGPAD, construye una recta perpendicular a AM que pase por M]
79	Pablo	[Crea un punto P sobre la perpendicular y lo conecta con A] ¿Es posible hacer una misma recta, pero para el otro lado?
80	J	¿Qué es lo que quiere asegurar?
81	Pablo	Que del punto [señala a P] hasta B sea lo mismo que del punto a A.
82	Karina	Sería con la misma idea de círculo, para tener la misma distancia.
83	Pablo	Sería un círculo de aquí a acá [señalando a P y a A] y donde se interseque con la recta ahí sería B.

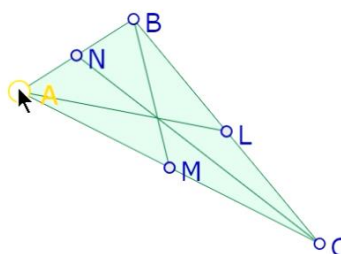


- 84 J ¿Por qué sabías que con ese triángulo isósceles se puede conseguir B? (Pablo no sabía por qué construyendo un triángulo isósceles podría conseguir B, al parecer tenía una idea perceptiva de que en el triángulo isósceles punto medio coincide con el pie de la altura).

2º Secuencia

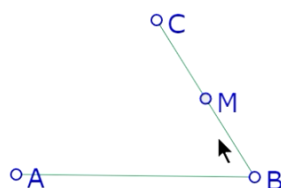
1. Dado un triángulo ABC, construir las medianas AL, BM y CN.

No	Sujeto	Descripción
85	Karina	[Lee el problema] ¿Qué es mediana?
86	J	Deben descargar y leer el documento de reglas teóricas
87	Karina	[Descarga el archivo, busca la definición de mediana y en el cuaderno dibuja las medianas correctamente] ¿Quedó bien?
88	J	¿Cuáles son las propiedades que debe cumplir para que sea mediana?
89	Karina	Que sea un segmento y va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Entonces sí quedó bien dibujado.
90	Pablo	[Construye el triángulo ABC] Hay que sacar el punto medio que hay de A a B, de A a C y de B a C
91	Karina	[Construye los puntos medios sin problema y los une con los vértices correspondientes]



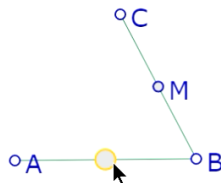
2. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $2AM=AB$.

No	Sujeto	Descripción
92	Karina	[Lee el problema, construye los puntos y el segmento] Eso significa la mitad Juan Pablo, yo aprendí que $2AM$ es la mitad.
93	Pablo	Lo que hay de A a M, debe ser la mitad de lo que hay de A a B. ¿Cómo se hace eso?
94	Karina	No sé, [hace un triángulo en el cuaderno] Este debe ser la mitad de esto [señala a AM y a AB]
95	J	¿Qué propiedades se deben conseguir?
96	Pablo	Que la distancia que hay de AM sea la mitad de AB.
97	Profesor	Y ¿Qué más?
98	Pablo	AM debe ser una mediana
99	Profesor	¿Qué necesita para que AM sea una mediana?
100	Karina	Que sea el punto medio del ángulo opuesto
101	Profesor	¿Quién?
102	Karina	M.
103	Profesor	¿M debe ser el punto medio del ángulo opuesto?
104	Karina	Sí.
105	Profesor	¿Cómo obtienen el punto medio de un ángulo?
106	Pablo	Punto medio de un segmento.
107	Profesor	Lea lo que es mediana en el documento.
108	Karina	[Lee el documento].
109	Profesor	¿Entonces M quién vendría siendo?
110	Pablo	El punto medio de BC.
111	Profesor	¿Y eso ya lo saben hacer no?
112	Karina	Me confundí.
113	J	Dibuja el ejercicio resuelto.
114	Karina	[Dibuja el triángulo con la mediana AM].
115	J	¿M que es?
116	Karina	La mediana del lado BC.
117	J	M es un punto, la mediana es un segmento.
118	Karina	Ah perdón, M es el punto medio de BC.
119	J	¿Cómo construyó M?
120	Karina	Construyo un segmento BC [construye BC] y a esto le saco punto medio [lo nombra M].

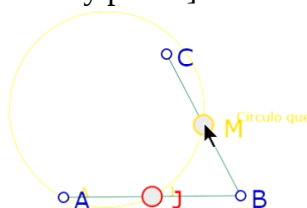


121	J	¿Qué debe cumplir AM?
122	Pablo	Que sea la mitad de AB

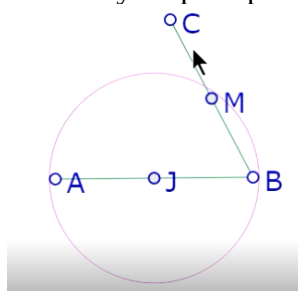
123	J	¿Ahí lo cumple?
124	Karina	No.
125	J	¿Cómo hago para que se cumpla?
126	Karina	Punto medio [crea el punto medio de AB], la distancia que hay de A a este punto [señala el punto medio] debe ser la distancia que hay a M.



127	J	¿Y cómo logro que esa sea la distancia?
128	Karina	Con un círculo, pero no sé cómo ubicarlo [crea un círculo que pasa por A, por el punto medio que llamó J y por M]

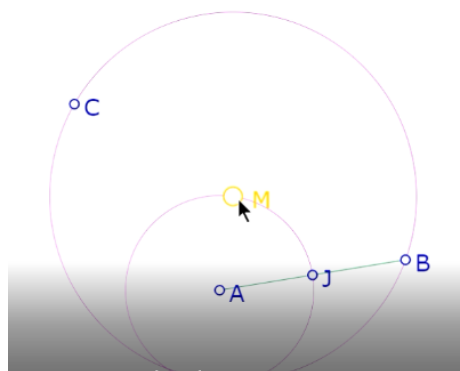


(enseguida se da cuenta que no es lo que necesita) [borra el círculo] [crea un círculo con centro en J que pasa por A] (esa era la idea, sin embargo, usó mal la herramienta y no pasó por A).

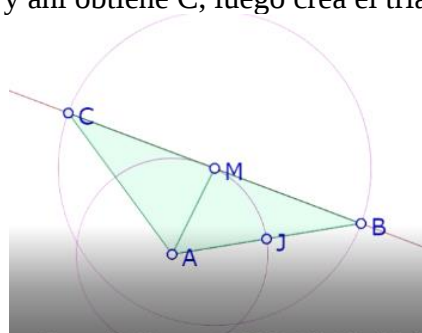


129	Pablo	No porque no me interesa JM sino AM.
130	Karina	Entonces A viene siendo el centro que se une con J.
131	Pablo	Si.
132	Karina	[Crea el círculo con centro en A que pasa por J].
133	Pablo	Ahora necesitamos un punto en el círculo que sea la mitad de BC, que es lo que no se hacer. O sea, en ese círculo debe quedar el punto medio de BC.
134	Profesor	¿En qué parte?
135	Pablo	En el círculo.
136	Profesor	¿Qué necesita garantizar del triángulo? Una parte ya la tienen que es que $2AM$ sea AB .
137	Pablo	[Lee el problema]
138	Profesor	¿Qué parte ya tienen? ¿Cuál de las condiciones del triángulo tienen ya?
139	Pablo	Que la medida de AM sea la mitad.

140	Profesor	¿Qué hace falta?
141	Pablo	La mediana del triángulo. Me falta M.
142	Profesor	No solo M, hace falta que AM sea la mediana.
143	Pablo	Y M es el punto medio de BC.
144	Profesor	Falta un punto M en el círculo que sea punto medio de BC
145	Pablo	Gracias.
146	Karina	Creo que tengo una idea [ubica M en cualquier parte del círculo] Se sabe que M debe ser el punto medio.
147	J	¿Si es el punto medio que debe pasar?
148	Karina	La distancia que hay de acá a acá [señala a B y a M] es la misma que debe haber de M a C.
149	Pablo	O sea, el círculo... no mentiras.
150	Karina	La distancia que hay de M a B debe haber de M a C [repite la afirmación] O sea que debe haber un círculo que pase por B [crea un círculo con centro en M que pase por B] Y C va a estar diagonal a B [ubica un punto C cualquiera en el nuevo círculo].



151	Pablo	Pero si mueve C deja de ser el punto medio, pero, pero...
152	J	¿C puede ser cualquier punto del círculo?
153	Karina	No.
154	Pablo	Si pone una recta de B a M, en la intersección tendría C.
155	Karina	[Construye la recta y ahí obtiene C, luego crea el triángulo].

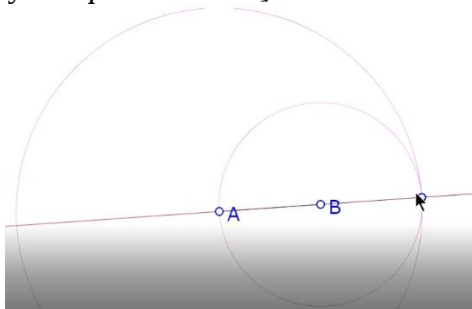


156	Karina	¿Ya?
157	J	¿Ustedes que creen?

158	Karina	Leamos de nuevo [leen de nuevo el problema, mueven todos los puntos] Si se mueve, M sigue siendo el punto medio de A y B y cumple con que AM sea punto medio de AB.
-----	--------	--

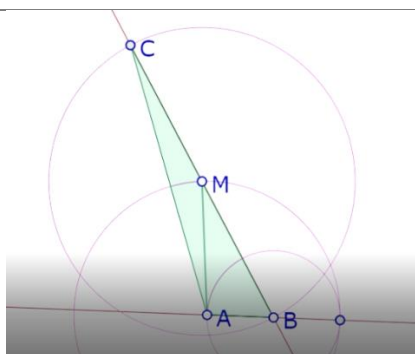
3. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $AM=2AB$.

No	Sujeto	Descripción
159	Karina	[Lee el problema, construye el segmento AB] Eso es el doble.
160	Pablo	[Lee el problema].
161	Karina	O sea que esto [señala el segmento AB] es la mitad de AM.
162	Pablo	Lo que hay de A a M es el doble de lo que hay de A a B.
163	Karina	Voy a intentar algo [crea un círculo con centro en B que pase por A] Esta es la distancia que hay de A a M [recorre con el dedo un diámetro del círculo].
164	Pablo	Creo que, es que no sé... si hacemos una recta AB, en la intersección del círculo con la recta se pone un punto, luego se hace un círculo con centro en A que pase por ese punto entonces tendríamos el doble de la medida de A a B. [construye lo que mencionó].



Ahí ya tendríamos el doble.

165	Karina	Okey si, entonces M debe estar en cualquier punto de ese círculo, pongamos a M por acá [coloca a M sobre el círculo].
166	Pablo	Ahora dónde va C.... AM es la mediana, entonces la mitad de BC es M. M debe estar entre B y C.
167	Karina	M debe ser el radio del círculo, perdón, el centro del círculo para que el radio de M a B sea el mismo que de M a C. [crea un círculo con centro en M que pase por B].
168	Pablo	Ahora trace una recta de B a M.
169	Karina	[Traza la recta BM] En la intersección iría C [construyen el triángulo y la mediana AM]



2da clase

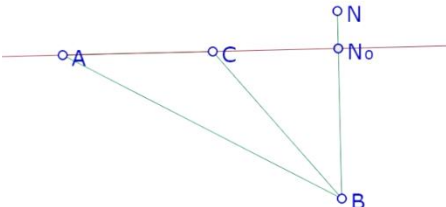
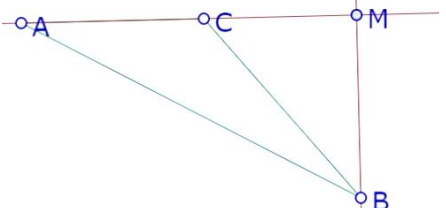
1. Dado un triángulo ABC, construir las alturas AL, BM y CN.

Karina lee el problema y busca la definición de altura en el archivo, ella realiza una combinación entre la definición de altura y de mediana, de tal forma, ella dibuja en el cuaderno una “altura”, que para ella es un segmento que va desde el vértice hasta el punto medio del otro lado, de manera perpendicular. Pablo parece estar de acuerdo con ella.

Se les pide a los estudiantes que construyan las alturas del triángulo dado en DGPad y lo hacen sin algún problema, sin embargo, como hallaron las perpendiculares con respecto al segmento, la altura desaparece cuando se mueven los vértices, es decir cuando el triángulo es obtuso.

El profesor realiza una retroalimentación de manera grupal, para toda la clase. Él dibuja un triángulo obtuso para analizar la situación problemática cuando alguna altura está por

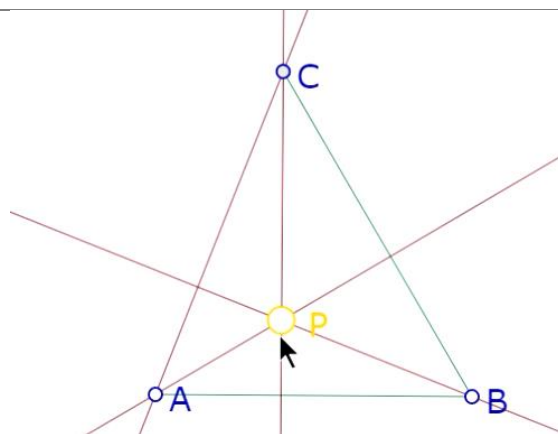
fuera del triángulo. Después de realizar el dibujo, les pide a unos estudiantes que pasen al tablero y tracen las 3 alturas del triángulo; a partir de las acciones de los estudiantes, el profesor realiza correcciones teniendo como base la definición de altura, es decir, resalta las propiedades necesarias para que un segmento sea una altura.

No	Sujeto	Descripción
1	Profesor	[Él dibuja, en el tablero, un triángulo y traza un segmento que es perpendicular y va desde un vértice hasta el lado opuesto] Este [señala el segmento] va hasta el lado opuesto perpendicularmente, no llega ni antes del lado ni después del lado ¿Verdad?
2	Karina	[Realiza una construcción en DGPAd, construye una recta perpendicular a AB que pase por B, ubica un punto N libre en la perpendicular, luego construye AC y el punto de intersección entre AC y la perpendicular la nombra N ₀]
 (esto lo realizó para comprender lo que significa que va hasta el lado opuesto, de tal forma BN va más allá del lado AC, en cambio BN₀ va hasta el lado AC y de manera perpendicular) [construye adecuadamente el punto M, tal que BM sea una altura]  Ahora hago una perpendicular a BC que pase por A. ¿Y ahora qué? [borra todo y empieza de nuevo]		
3	Pablo	Crea una perpendicular a esa (hace referencia a AB) que pase por C y luego crea la recta AB, en la intersección está el punto, no sé qué letra lleva.
4	Karina	[Nombra el punto de intersección N].
5	Pablo	Ahora hay que hacer lo mismo para el resto.
6	Karina	Trazo la perpendicular a BC que pasa por A [lo construye y arrastra los puntos para que la altura esté por fuera del triángulo].
7	Pablo	Trace una recta que vaya de B a C [Karina construye la recta BC y nombra el punto de intersección como L].
8	Karina	Ahora una recta perpendicular a esta [señala AC] que pase por B
9	Pablo	Ahora arrastre C (para que la altura esté por fuera del triángulo) [Karina arrastra el punto y construye la recta AC, la intersección la nombra M].
10	Karina	[Construye los segmentos AL, BM y CN, y ocultan las rectas perpendiculares, mueven los puntos] Listo ya lo hicimos.

11	Pablo	Ahora el otro.
----	-------	----------------

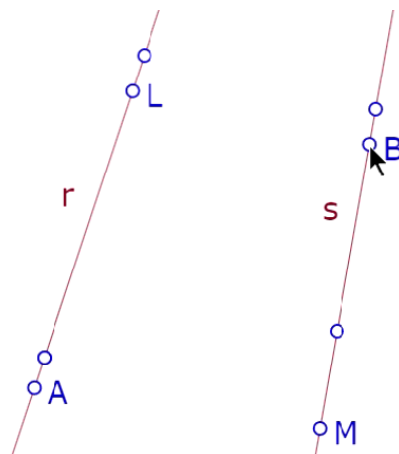
2. Dados un segmento AB y un punto P, construir un triángulo ABC, tal que las alturas pasen por P.

No	Sujeto	Descripción
12	Pablo	[Lee el problema y hace un dibujo en el cuaderno] Creo que lo tengo.
13	Karina	[Lee el problema, construye el segmento AB y el punto P]
14	Pablo	Supongo que donde se intersecan todas las alturas debe ser P. Creo que tengo la idea
15	Karina	[Karina construye un punto C libre, hace el triángulo y ubica P fuera del triángulo].
16	Pablo	P debería estar dentro del triángulo ¿No?
17	Karina	No porque a veces las alturas salen del triángulo.
18	Pablo	No porque nos dan P entonces las alturas deben depender de P, no P de las alturas. O bueno no sé...
19	J	¿Por qué colocas el punto C?
20	Karina	Para crear el triángulo
21	J	¿O sea puede ser cualquier C?
22	Karina	No, porque las alturas deben pasar por C.
23	J	¿Qué ocurre con P?
24	Pablo	P está en todas las alturas
25	J	Realicen un dibujo del problema resuelto.
26	Pablo	[Realiza un dibujo con las alturas y la intersección P] Aquí debe estar P, que cuando se muevan los puntos P siempre se mantenga.
27	J	¿Qué información le puede dar el dibujo?
28	Karina	[Traza una recta que pasa por A y por P, y otra que pasa por B y P]
29	J	¿Qué ocurre con esas rectas?
30	Karina	Son perpendiculares
31	Pablo	Pasan por el vértice y por P. Con esas líneas, se podrían sacar las perpendiculares y con eso BC y AC. Trace una perpendicular a AB que pase por P. [Karina construye la perpendicular].
32	Karina	Aquí iría C [señala la perpendicular].
33	Pablo	Si, pero recordemos que AC debe ser perpendicular a esta recta [señala la recta BP].
34	J	¿Por qué?
35	Pablo	Porque esa recta debe contener la altura, entonces cree una recta perpendicular a BP que pase por A [Karina construye].
36	Karina	Y ahora una perpendicular a AP que pase por B.
37	Pablo	Y aquí arriba en el punto de intersección debe quedar C. Ahora mueva los puntos, [Karina mueve los puntos] Si se cumple todo.



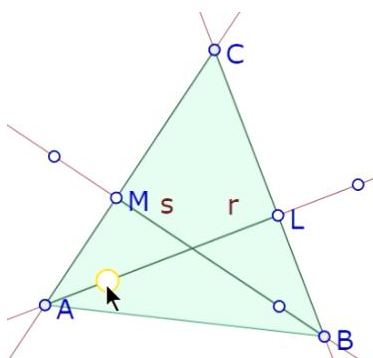
3. Dadas dos rectas r y s , construir un triángulo ABC con alturas AL y BM , tal que A y L estén en r y B y M estén en s .

No	Sujeto	Descripción
38	Pablo	[Lee el problema] Nos dan dos rectas [construye a r y a s] necesitamos construir un triángulo que las alturas.... un triángulo ABC que la altura AL esté en S . Con esas dos rectas debemos tener un triángulo y dentro de las rectas deben estar las alturas, ¿No?
39	Karina	No necesariamente.
40	Pablo	Si porque la altura AL debe estar en r y BM en s
41	Karina	Tengo una teoría [ubican las rectas como si aparentemente fueran paralelas, ubican A y L de manera libre sobre r] Ahí no necesariamente está L , pero sí sobre esa recta debe estar [ubican B y M de manera libre sobre s].



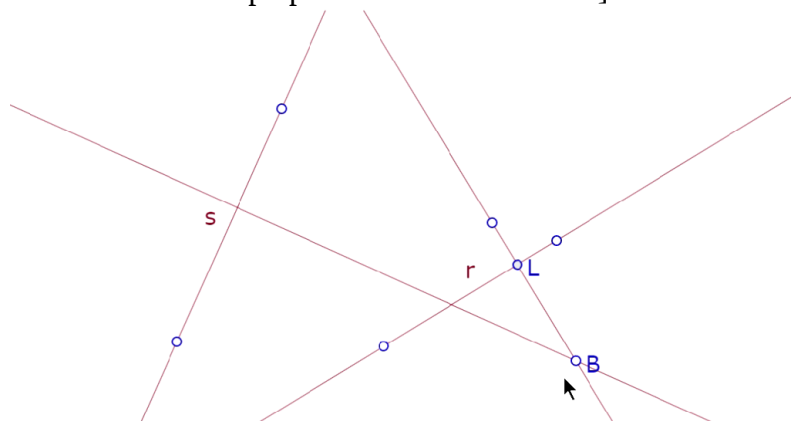
42	Pablo	Pues cumple que está en r y en s .
43	Karina	Esta es una altura y esta es otra altura [señala a AL y a BM]... Van a ir unidos porque deben formar un triángulo [une a A con B] (aquí se da cuenta que las rectas no pueden ser paralelas) [borra la construcción, construye de nuevo las rectas, pero intersecándose]

44	Pablo	Tengo una idea, en s debe estar BM [traza una perpendicular a s que pase por cualquier punto de s, la intersección de la perpendicular con r la nombra A] Así tenemos que s va a ser perpendicular con AC... [construye una perpendicular a r que pase por cualquier punto de r] Con esto tenemos que r es perpendicular a esta [señala la perpendicular que creó] Entonces tenemos que esta es perpendicular a esta y esta es perpendicular a s [señala las rectas y las perpendiculares correspondientes].
45	Karina	Espere, esta es perpendicular a r y esta es perpendicular a s [señala las perpendiculares correspondientes].
46	Pablo	O sea que aquí debería ir B [señala la intersección de s con la perpendicular a r, lo nombra B] pongamos C [la intersección la perpendicular de r con las perpendicular a s, lo nombra C, construye el triángulo].



47	Profesor	Arrastre C.
48	Pablo	No se mueve porque depende de las rectas, entonces muevo las rectas s y r [mueve las rectas] creo que así es.
49	Karina	Esta vendría siendo L y esta M [señala la intersección de r y s con BC y AC respectivamente].
50	Pablo	¿Sí quedó bien?
51	J	Mueva todos los puntos.
52	Pablo	Esta altura está en r y está en s [AL y BM].
53	Karina	[Abre otra pestaña y realiza nuevamente la construcción] (se le pidió a la estudiante que realizara la construcción nuevamente porque no parecía haber comprendido el razonamiento de Pablo).
54	Pablo	Mire, hay que construir un triángulo, la altura AL debe estar en r, entonces r debe ser perpendicular a BC.
55	J	Pueden guiarse con un dibujo.
56	Pablo	[Lo dibuja] s debe ser perpendicular a AC y r es perpendicular a BC. Entonces si tengo r creo una recta perpendicular y tengo s creo otra recta perpendicular y ahí tengo a C.
57	Karina	No entiendo, hagámoslo en mi cuaderno [dibuja la solución del ejercicio].
58	J	¿Qué relación tiene la recta con el lado? [viendo el dibujo y señalando la recta r con el lado BC].
59	Karina	Perpendiculares.
60	J	¿Entonces que hay que hacer?

- 61 Karina [Construye una perpendicular “l” a r que pasa por cualquier punto de r] En el punto de intersección está B (refiriéndose a la intersección de r con su perpendicular) ¿Sí? No, aquí está L. [luego traza una perpendicular a s que pasa por cualquier punto de “l” nombra el punto como B; la intersección de s con su perpendicular la nombra M].



- 62 J ¿B puede quedar ahí?
- 63 Karina Debe estar en s y no está en s [borra todo].
- 64 Pablo [Le da unas indicaciones] (aquí se acabó la clase y no pudo terminar el problema).
- (Aquí se acabó la clase y Karina no pudo terminar el problema).

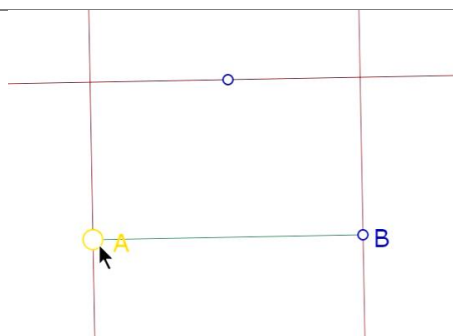
3ra clase

Actividad 2:

1° Secuencia

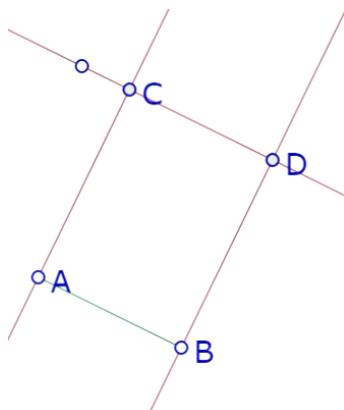
1. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD.

No	Sujeto	Descripción
1	Pablo	[Lee el problema] Hay que construir un rectángulo
2	Karina	[Construye un segmento AB]
3	Pablo	Hay que hacer una perpendicular del segmento que conecte con B [construye una recta perpendicular a AB que pase por B].
4	Karina	Y otra que pase por A, y una paralela a este ¿No? [construye una recta perpendicular a AB que pase por A y una paralela a AB que pase por cualquier punto de las perpendiculares] .

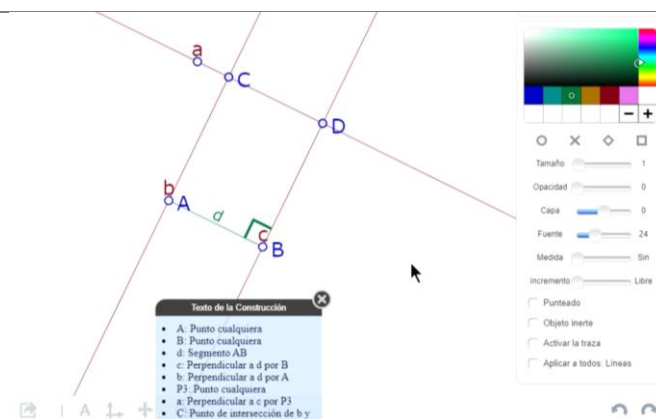


5	Profesor	¿Por qué necesita la paralela?
6	Karina	Porque como nos dan el segmento AB...
7	Profesor	¿Qué es un rectángulo?
8	Karina	Que el área es la medida de la base por la medida de la altura.
9	Profesor	Sí, el área del rectángulo es base por altura, pero ¿Qué es un rectángulo? ¿Qué caracteriza un rectángulo? ¿Qué lo define?
10	Pablo	Los ángulos rectos.
11	Profesor	¿Y usted cómo sabe eso?
12	Pablo	Por rectángulo, ángulos rectos.
13	Profesor	¿Y no hay una definición en el documento?
14	Karina	[Busca la definición de rectángulo en el documento y la lee].
15	Pablo	Es un cuadrilátero que tiene sus ángulos rectos.
16	Profesor	Entonces, ¿Para qué paralelas?
17	Pablo	Es que primero creamos el segmento y luego creamos dos perpendiculares
18	Profesor	¿Por qué perpendiculares?
19	Pablo	Para asegurarnos que tengan ángulos rectos
20	Profesor	¿Por qué si las rectas son perpendiculares tenemos ángulos rectos?
21	Karina	Porque cuando una recta corta a otra hace cuatro ángulos rectos
22	Profesor	Y ¿Usted cómo sabe eso?
23	Karina	Por la definición.
24	Profesor	Fantástico. ¿Eso está escrito ahí?
25	Karina	Por aquí está.
26	Profesor	Si las rectas son perpendiculares entonces forman ángulos rectos, o sea que cada vez que quiera ángulos rectos...
27	Pablo	Uso rectas perpendiculares ... Y la paralela era para crear el lado opuesto
28	Profesor	¿Pero no querían ángulos rectos?
29	Pablo	Puedo crear una paralela al segmento o crear una perpendicular a cualquiera de las dos rectas [señala las rectas perpendiculares creadas].
30	Profesor	Y si usted traza una paralela ¿Cómo sabe que el ángulo es recto?
31	Pablo	Porque se conecta con las dos perpendiculares... ella fue la de la idea de la paralela [señala a Karina].
32	Karina	Porque la paralela me garantiza que esta no se mueva de esta a esta y si esta ya forma dos ángulos rectos entonces por obligación si es una paralela aquí también los va a formar.

33	Profesor	¿Por obligación?
34	Karina	Si porque no tiene la posibilidad de girar porque está conectada a esta que es perpendicular a estas dos.
35	Pablo	Tenemos el segmento, creamos las perpendiculares y como la paralela está conectada a las perpendiculares, siempre que movamos el segmento las perpendiculares se van a mover y eso movería la paralela.
36	Profesor	¿Cómo justificaríamos que este ángulo es recto? [señala un ángulo formado por una perpendicular y la paralela] Póngales nombres a los puntos.
37	Karina	[Nombra los puntos].



38	Profesor	¿Por qué el ángulo ABD es recto?
39	Karina	Porque todo mide 90° y la paralela...
40	Profesor	No, solo el ángulo ABD, ¿Por qué el ángulo ABD es recto?
41	Pablo	Porque la recta que se cruza con D es perpendicular al punto que se cruza con B.
42	Profesor	¿La recta y el punto? ¿Por qué el ángulo es recto?
43	Karina	Porque hay dos perpendiculares.
44	Profesor	Porque las rectas son perpendiculares y eso está en una...
45	Karina	Definición.
46	Profesor	¿Por qué el ángulo BAC es recto?
47	Karina	Porque es lo mismo (haciendo referencia a que AB es perpendicular con AC).
48	Profesor	¿Cómo sabe que AB es perpendicular a BD?
49	Pablo	Por el mismo proceso.
50	Profesor	¿Podrían mostrar la descripción de la construcción?
51	Karina	[Muestra la descripción de la construcción].
52	Profesor	Ahí en la descripción podríamos decir ¿Por qué AB es perpendicular a BD?, póngales nombre a las rectas.
53	Karina	[Le pone nombre a cada una de las rectas y segmentos].

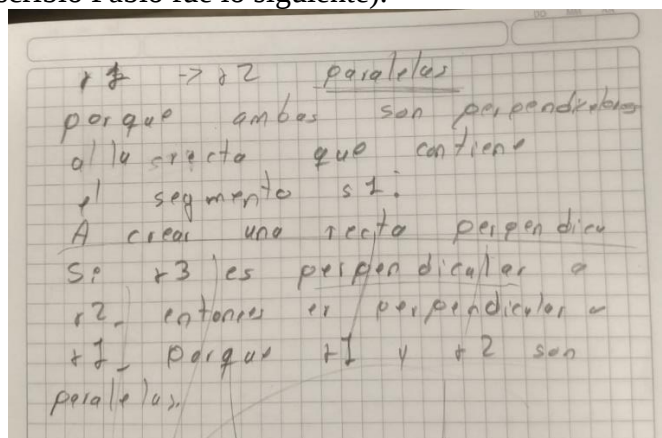


54	Profesor	(dirigiéndose a toda la clase) Vamos a hacer la construcción paso a paso
55	Pablo	Primero se hace el segmento AB.
56	Profesor	Primero, A punto cualquiera, segundo B punto cualquiera [dibuja cada objeto en el tablero] tercero...
57	Clase	S_1 Segmento AB
58	Profesor	Cuarto.
59	Clase	r_1 perpendicular a s_1 por A.
60	Profesor	Viene la primera pregunta, ¿Por qué trazamos esa recta r_1 perpendicular al segmento AB por A?
61	Clase	Para que se cumpla la propiedad del rectángulo que los ángulos sean de 90° .
62	Profesor	¿Por qué se necesita que los ángulos sean de 90° ?
63	Pablo	Por la definición.
64	Profesor	¿Cuál definición?
65	Pablo	La de rectángulo.
66	Profesor	¿Alguno puede leer la definición de rectángulo?
67	Clase	[Alguno de los estudiantes lee la definición]
68	Profesor	Si un cuadrilátero es rectángulo entonces...
69	Clase	Tiene sus ángulos rectos.
70	Profesor	Fíjense que estamos usando una proposición, una relación de causalidad para obtener ángulos rectos a partir de perpendiculares, gracias a una proposición de la forma si y entonces que es una regla teórica, que en este caso es una definición. Quinto...
71	Clase	Es que se puede hacer de varias formas.
72	Profesor	Se puede hacer de varias formas, vamos a hacer todos una misma ¿les parece?
73	Clase	r_2 perpendicular a s_1 por B.
74	Profesor	¿Para qué esa recta?
75	Clase	Para lo mismo
76	Profesor	Para que un segundo ángulo del cuadrilátero sea rectángulo, porque no solo basta con un ángulo ¿no?
77	Clase	Todos los ángulos.
78	Profesor	Sexto.

79	Clase	Una paralela al segmento.
80	Profesor	¿Por qué una paralela?
81	Clase	Para que sea perpendicular.
82	Profesor	¿Por qué si quiero una perpendicular no construyo directamente una perpendicular? Ahora, trazamos una...
83	Clase	Perpendicular.
84	Profesor	¿Y por dónde?
85	Clase	Por cualquier punto de la recta.
86	Profesor	Primero pongamos un punto C ¿Dónde?
87	Clase	En cualquiera
88	Profesor	¿En cualquiera?
89	Profesor	¿Para construir un rectángulo ABCD puedo ponerlo en cualquiera en r_1 o r_2 ?
90	Clase	No, en r_2
91	Profesor	Bien, ahora ¿Qué hago?
92	Clase	r_3 perpendicular a r_2 por C
93	Profesor	¿Y qué garantizo con eso?
94	Clase	Que el tercer y el cuarto ángulo sea recto.
95	Profesor	Nombremos el punto de intersección D. Ahora ¿Qué es lo que estamos buscando?
96	Clase	Ángulos rectos
97	Profesor	¿Qué es lo que garantizo con esta perpendicular?
98	Clase	Que el tercer y cuarto ángulo sean rectos.
99	Karina	Que el tercer ángulo sea recto.
100	Profesor	Si es perpendicular a r_2 ¿Que ángulo sería recto?
101	Clase	BCD.
102	Profesor	Vamos a repasar, ¿Este ángulo es recto? [señala el ángulo BAC].
103	Clase	Sí.
104	Profesor	¿Por qué?
105	Clase	Por la perpendicular.
106	Profesor	¿Cuál perpendicular?
107	Clase	Porque r_1 es perpendicular al segmento.
108	Profesor	Bien, ¿Este ángulo es recto? [señala el ángulo ABC].
109	Clase	Sí
110	Profesor	¿Por qué?
111	Clase	Porque r_2 es perpendicular a s_1
112	Profesor	¿Es este recto? [señala el ángulo BCD]
113	Clase	Sí
114	Pablo	Porque r_2 y r_3 son perpendiculares.
115	Profesor	¿Es este ángulo es recto? [señala el ángulo CDA].
116	Clase	Sí
117	Profesor	¿Por qué?
118	Clase	Porque r_1 y r_3 son perpendiculares

119	Profesor	¿Dónde está eso dicho? (como no se construyó directamente una perpendicular sobre r_1 , no aparece esa acción en el protocolo de construcción).
120	Pablo	En la línea 8 (lo confunde con otras perpendiculares).
121	Clase	Dicho no está, pero se puede inferir.
122	Profesor	Hemos solicitado que tres ángulos sean rectos porque hemos solicitado explícitamente que 3 rectas sean perpendiculares, pero, hay un cuarto ángulo del que no hemos solicitado que sea recto y tampoco hemos solicitado que sean perpendiculares esas rectas, entonces ¿Cómo vamos a garantizar que si es recto?
123	Karina	Porque es el punto de intersección de dos perpendiculares.
124	Profesor	Y como va a garantizar que son perpendiculares.
125	Pablo	Porque r_1 y r_2 son paralelas.
126	Profesor	¿Y qué tiene que ver que r_1 y r_2 sean paralelas?
127	Pablo	Que la que se cree va a ser tanto perpendicular a r_1 como a r_2
128	Profesor	¿Cómo llego a que las rectas son perpendiculares?
129	Karina	Voy a mirar aquí [Empieza a leer el documento de las reglas teóricas].
130	Profesor	¿Cómo hemos garantizado las propiedades de las que hemos venido hablando?
131	Karina	Por las definiciones.
132	Profesor	Usando...
133	Karina	Definiciones.
134	Profesor	Reglas teóricas que en este caso son...
135	Clase	Definiciones.
136	Profesor	¿Qué definición usamos?
137	Clase	Definición de rectas perpendiculares.
138	Profesor	Lean la definición.
139	Karina	Si dos rectas son perpendiculares, entonces forman ángulos rectos al intersectarse.
140	Profesor	Estamos usando las definiciones, pero no solo tenemos definiciones, tenemos otras relaciones de causalidad, entonces, les propongo el ejercicio de garantizar que este ángulo es recto [señala el ángulo CDA] usando las relaciones de causalidad que están en el documento. Háganle.
141	Karina	¿Cómo así?
142	J	Tenemos en este documento diferentes reglas teóricas, con ellas tenemos que garantizar que el ángulo ADC es recto.
143	Pablo	[Lee el documento] Creo que esta nos puede servir (refiriéndose al segundo postulado de perpendicularidad y paralelismo).
144	Karina	Ah claro, ahí está
145	Pablo	Si r_1 y r_2 son paralelas si se crea una tercera perpendicular a r_2 , o sea, r_3 , si r_3 es perpendicular a r_2 entonces será perpendicular a r_1 .
146	Karina	Y al ser dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos.
147	J	¿Cómo saben que r_1 y r_2 son paralelas?
148	Pablo	[Busca la definición de paralelas] Si dos rectas no se cortan entonces son paralelas.

149	Karina	Y no se cortan porque están intersecando el mismo segmento.
150	Pablo	Estas rectas son paralelas porque ambas son perpendiculares al mismo segmento.
151	J	Y eso ¿De dónde lo sacaron?
152	Karina	De las definiciones
153	Pablo	Del postulado de perpendicularidad y paralelismo.
154	J	Ahora escribanlo.
155	Pablo	r_1 y r_2 son paralelas.
156	J	¿Por qué?
157	Pablo	Porque ambas son perpendiculares al segmento s_1 , no, a la recta que contiene al segmento.
158	Karina	Quedaría algo así, si dos rectas nunca se cortan entonces son paralelas y si hay dos rectas paralelas y hay una tercera perpendicular a una de ellas entonces también es perpendicular a la otra.
159	Pablo	¿Y cómo sabe que son paralelas?
160	J	Exacto ¿Cómo sabe que son paralelas?
161	Karina	Porque nunca se tocan.
162	J	¿Por qué sabe que nunca se tocan?
163	Pablo	Porque son perpendiculares a s_1 .
164	Karina	Porque son perpendiculares al segmento.
165	J	Y eso ¿Que conlleva? Lee las reglas teóricas, los dos postulados
166	Karina	Si dos rectas son perpendiculares a otra entonces son paralelas
167	J	Listo, ahora sigan escribiendo.
168	Karina	Es que no sé cómo escribirlo.
169		(Lo que escribió Pablo fue lo siguiente).

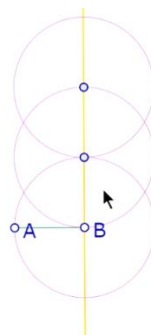


4ta Clase

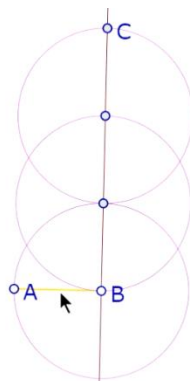
- Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $BC=3AB$.

No	Sujeto	Descripción
----	--------	-------------

1	Pablo	[Lee el problema y traza un segmento AB] ¿Cómo se hace que sea 3 veces más grande? Si tenemos un segmento y creamos un círculo, sabemos que lo que hay en el otro extremo del círculo es el doble del segmento. Si desde este punto creo un círculo que pase por el punto medio, tendría tres veces más.
2	Karina	¿Cómo?
3	Pablo	Creo un círculo con que el centro esté acá, si creo otro círculo, tendría el triple.
4	Karina	Y se haría hacia arriba.
5	Pablo	Y tendríamos que hacer una perpendicular que pase por B.
6	J	¿Para qué la perpendicular?
7	Pablo	Para asegurarnos que el rectángulo tenga un ángulo de 90° .
8	Karina	Creo un círculo con centro en B que pase por A.
9	Pablo	Tenemos ya la misma distancia de AB, ahora creemos el punto.
10	Karina	[Marca la intersección entre el círculo y la perpendicular].
11	Pablo	Ahora otro círculo con centro aquí [señala la intersección] que pase por B.
12	Karina	[Crea un círculo con centro en el punto de intersección que pase por B y luego otro con centro en el nuevo punto de intersección que pase por el anterior].



13	Pablo	Entonces la distancia que hay de aquí acá es la misma que hay aquí y acá, entonces aquí iría C.
----	-------	---



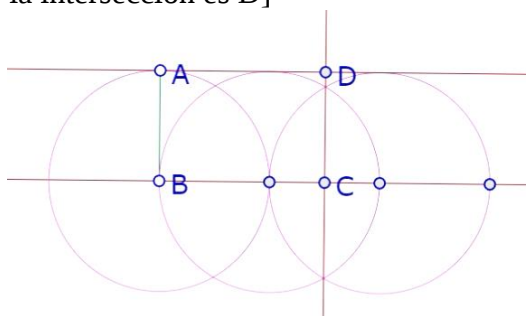
14	Karina	[Mueve lo puntos] Sigue siendo el triple
15	Pablo	Ahora hacemos lo mismo que hicimos ayer, o paralelas o perpendiculares.
16	Karina	[Crea una perpendicular a AB que pase por A y luego una perpendicular a BC que pase por C, mueve los puntos] Siempre van a tener 90° y va a ser el triple.

17	Pablo	Como nos dieron el segmento, entonces todo va a depender de A o de B, y como BC es el triple que AB entonces AD es el triple de AB.
18	Profesor	Vamos a leer la construcción, porque están usando una sintaxis que no es la que correspondiente [dirigiéndose a toda la clase].
19	Karina	[Abre el texto de la construcción].
20	J	Van leyendo la construcción y van diciendo el porqué de la construcción.
21	Karina	El segmento es el que nos dan, la perpendicular a s_1 que pase por B.
22	J	¿Para qué?
23	Karina	Para asegurar que sea un ángulo de 90° , círculo con centro en B que pasa por A.
24	J	¿Para qué?
25	Karina	Es para hallar un tercio de la medida que nos piden.
26	J	Sigue.
27	Karina	Punto de intersección de r_1 y c_1 , para crear el siguiente círculo, círculo con centro en P_1 que pasa por B para crear dos tercios de la medida, el punto P_2 que es la intersección de r_1 y c_2 para obtener el centro del tercer círculo, el tercer círculo para obtener tres tercios de la medida y el punto de intersección que es C.
28	J	Ahora continúa
29	Karina	r_2 perpendicular a s_1 que pase por A.
30	Pablo	Para asegurarnos de que tenga otro ángulo de 90° .
31	Karina	r_3 perpendicular a r_2 que pase por C.
32	Pablo	Para crear el otro ángulo de 90° .
33	Karina	Y en el punto de intersección de r_2 y r_3 se pone D.

3. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $2BC=3AB$

No	Sujeto	Descripción
34	Pablo	[Lee el problema y traza un segmento AB] Se puede leer como que BC es la mitad de tres veces AB o también se puede leer como que AB es un tercio de dos veces BC.
35	Karina	[Dibuja en su cuaderno como si $BC=6AB$]
36	Pablo	Lo del rectángulo ya se sabe cómo hacerlo, estoy intentando como sacar que $2BC=3AB$, que no sé.
37	Karina	Y así, esto es $3AB$, entonces como dice así, AB se divide en 3 partes, dice que la mitad de BC...
38	J	¿Ahí dice la mitad de BC? ¿BC que es?
39	Pablo	La mitad de $3AB$
40	J	Tu habías dicho que $2BC$ indicaba que BC era...
41	Karina	La mitad de tres veces AB.
42	Pablo	$3AB$ indica la mitad de lo que hay de BC
43	Profesor	De BC necesito 2 y de AB necesito 3 para quedar iguales, ¿Cuál es más grande?
44	Pablo	AB, porque es el triple, ¿Sí? ¿No?

45	Profesor	¿Usted qué opina? ¿Quién es más grande? [se dirige a Karina].
46	Karina	Supongo que AB, porque es 3 veces el segmento que nos dan.
47	Profesor	A ver, necesito dos marcadores para formar todo esto, y necesito 3 bordes del celular para completarlo, ¿Quién es más grande?
48	Karina	Son iguales.
49	Profesor	¿Quién es más grande el marcador o el borde del celular?
50	Pablo	Es más grande el borde porque se necesita 3 para formar todo este
51	Profesor	¿Quién es más grande el marcador o el borde del celular?
52	Pablo	El marcador.
53	Profesor	¿Quién es más grande BC o AB?
54	Karina	BC porque solo se necesitan 2.
55	Pablo	Porque con el doble de BC tengo el triple de AB, pero como consigo el doble de BC.
56	Karina	El doble de BC es el triple de AB, [construye el triple de AB de la misma manera que en el problema pasado].
57	J	Ahora que tenemos el triple de AB ¿Qué hacemos?
58	Karina	Ahora necesitamos hallar el doble... perdón la mitad (piensa que su razonamiento está mal) [borra la construcción].
59	Pablo	Dos veces BC equivale a tres veces AB, o sea que, $2BC$ dividido en 3 partes es AB.
60	J	Pero no tienes BC.
61	Pablo	Ese es el problema, al revés sería, tenemos esto [dibuja AB en el cuaderno] lo triplicamos [triplica el segmento], y de aquí lo dividimos en dos pedazos y esto sería BC.
62	Karina	O sea, la mitad de AB.
63	J	¿De AB?
64	Karina	¿Qué es esto? [señala el segmento triplicado]
65	Pablo	El triple de AB
66	Karina	¡Ah! Entonces era lo que estaba haciendo [construye de nuevo el triple de AB haciendo el proceso del ejercicio anterior].
67	J	Ahora que tienes el triple ¿Qué haces?
68	Karina	[Construye el punto medio del segmento $3AB$ y lo nombra C, construye una perpendicular a AB que pase por A y luego una perpendicular a BC que pase por C, la intersección es D]



Triplizamos AB y luego sacamos la mitad y eso es BC

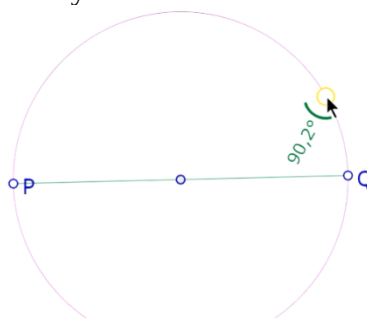
2° Secuencia

Tarea experimental: Siga los siguientes pasos

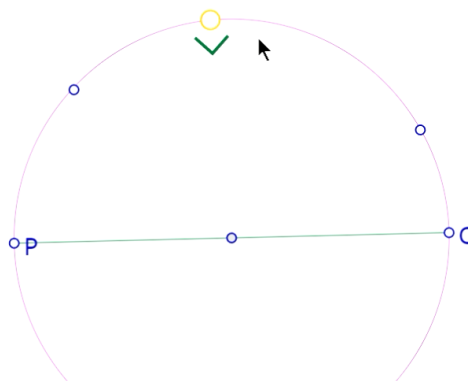
1. Ubique dos puntos P y Q fijos.
2. Ubique un punto R cualquiera y halle la medida del ángulo PQR. (No nombre al punto)
3. Arrastre el punto R hasta que el ángulo PQR aproximadamente sea de 90°.
4. Oculte la medida del ángulo PQR.
5. Repita desde el paso 2.

No	Sujeto	Descripción
69	Profesor	Vamos a hacer la siguiente exploración [escribió todos los pasos en el tablero]
70	Karina	[Ubica los puntos P y Q y un punto R que no lo nombra, halla la medida del ángulo] ¿Cuántas veces hay que hacerlo?
71	J	Hasta que se dé cuenta de algo
72	Karina	[Repite el proceso 7 veces] Va a formar un círculo
		
73	J	¿Segura?
74	Karina	Pues parece un círculo
75	J	¿Y qué características tendría ese círculo?
76	Karina	[Construye más punto] Si va a formar un círculo
77	J	Pero ¿Qué características tendría ese círculo?
78	Karina	Que P, R y Q van a estar en la circunferencia
79	Pablo	Si está formando un círculo, donde PQ sería el diámetro
80	Karina	No necesariamente
81	Pablo	Lo digo porque la mitad de PQ, todos los puntos están a la misma distancia, eso parece
82	Karina	No porque para el diámetro necesita que una línea que los une pase por el centro
83	Pablo	[Ubica más puntos]

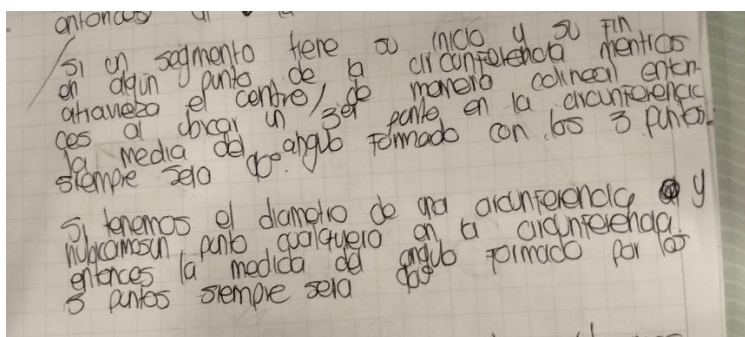
84	J	Los dos ven un círculo ¿Qué características tiene ese círculo?
85	Pablo	Si yo tengo un círculo, tomo una parte de la circunferencia hasta la que está al lado contrario, acabo de formar el diámetro...
86	Karina	Si pasa por el centro
87	Pablo	Por eso dije que, al lado contrario, si es por el lado contrario pasa por el centro
88	Karina	[Dibuja una cuerda que no pasa por el centro] Mire esta no pasa por el centro
89	Pablo	Pero ya tenemos a P y a Q
90	J	(Aprovechando el círculo que dibujó, que era un círculo con que P y Q no forma el diámetro) Ubica un punto en ese círculo, R, ¿Cómo es el ángulo PRQ?
91	Karina	No es recto, es agudo. Entonces no sirve cualquier círculo que contenga a los tres puntos. Si debe ser el diámetro.
92	Profesor	[Escribe en el tablero] Dados dos puntos P y Q construir todos los puntos tal que PRQ sean de 90°
93	Pablo	Pues ¿Ahí están no?
94	J	¿Esos son todos los puntos?
95	Pablo	O sea que tengo que hacer un círculo completo. Si trazo P y Q y hallo el punto medio creo el círculo y pongo los puntos ¿Es una forma de demostrar lo que estoy diciendo?
96	J	Inténtelo
97	Pablo	[Construye el segmento PQ, el punto medio de PQ, y el círculo que tiene como centro el punto medio y que pasa por A, ubica un punto R arbitrario, lo ubica encima del círculo y halla la medida del ángulo PRQ]



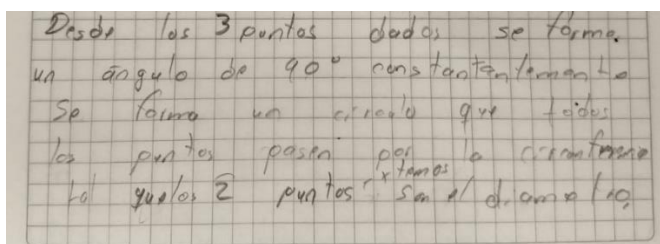
98	Karina	O mejor así, [crea un punto sobre el círculo y encuentra la medida de PRQ]
----	--------	--



		Recto
99	J	Mueva el punto
100	Karina	Siempre es recto
101	J	Ahora deben crear una proposición del estilo si, entonces, que muestre su razonamiento de la exploración realizada. Cada uno escriba sus ideas
102	Karina	¿Debo escribir los nombres P y Q?
103	J	Las reglas teóricas se escriben de manera general, sin darle nombre a los puntos, así como está en el documento
104	Karina	Es difícil
105	Pablo	Si desde los tres puntos dados se forma un ángulo de 90° constantemente entonces se forma un círculo que pasa por todos los puntos
106	Karina	Si un segmento tiene su inicio y su fin en algún punto de la circunferencia mientras atraviesa el centro de manera colineal, entonces al ubicar un tercer punto en la circunferencia la medida del ángulo formado por los tres puntos siempre será de 90° .
107	J	¿Puedes resumir la proposición?
108	Karina	O sea, más reducido (la proposición escrita por Karina)



109 (La proposición escrita por Pablo)

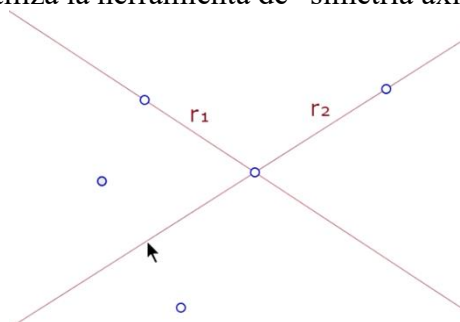


5ta Clase

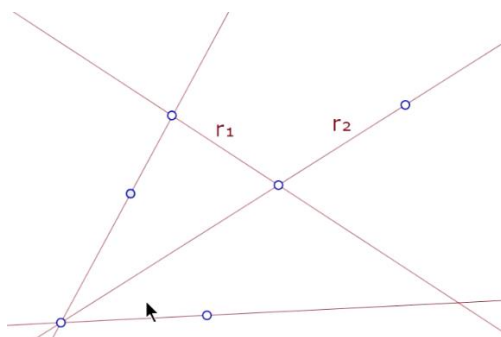
3° Secuencia

1. Dadas dos rectas r_1 y r_2 , construir un triángulo ABC tal que la bisectriz del ángulo BAC esté contenida en r_1 y la bisectriz del ángulo ABC esté contenida en r_2

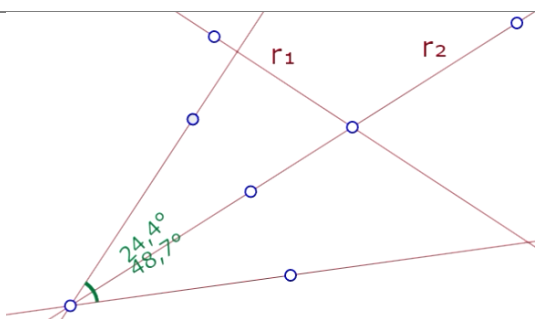
No	Sujeto	Descripción
1	Pablo	[Lee el problema y construye r_1 y r_2] La bisectriz del ángulo, ¿Cómo la saco?
2	Karina	Hay una herramienta.
3	Pablo	[Dibuja la solución del problema en el cuaderno y busca en el documento lo que es la bisectriz del ángulo].
4	Karina	[Selecciona r_2 y utiliza la herramienta de “simetría axial”]



5	Profesor	Qué herramienta están usando.
6	Karina	Pues a mí me apareció esta [señala la de simetría axial], que da la misma distancia.
7	Profesor	¿Para qué quiere la misma distancia?
8	Karina	Para que divida igualmente el ángulo
9	Profesor	¿Qué tiene que ver el ángulo con la distancia?
10	Karina	Si una línea pasa por ese punto que sale de la recta y otra recta que pasa por este punto se tendría un ángulo que se divide en dos ángulos congruentes.



11	Profesor	¿Y cómo va a justificar eso?
12	Karina	Pero ¿Sí funciona?
13	Profesor	El problema es ¿Cómo va a justificar que esos dos ángulos son congruentes?
14	Karina	[Halla la medida de los ángulos].

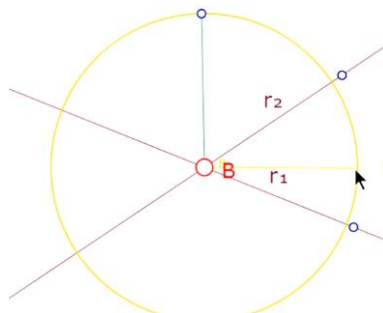


Si son iguales

15	Profesor	Pero ¿Por qué?
16	Karina	Porque siempre va a tener la misma distancia
17	J	Revisen el documento y miren cómo pueden justificar las acciones que hicieron (no encuentran información sobre la simetría axial).
18	Profesor	Yo creo que usaron una herramienta misteriosa que todavía no saben qué es.
19	Karina	¿O sea que esa no se podía?
20	Profesor	No es que no se pueda.
21	Karina	Es que usted esperaba que la hiciéramos con otra.
22	Profesor	No, yo esperaba que lo hicieron concienzudamente.
23	Karina	Pero es que tienen la misma distancia...
24	Profesor	Vamos a usar las propiedades que están ahí enunciadas para realizar la construcción. Por ejemplo, en el problema del rectángulo yo preguntaba por qué se usaban las rectas perpendiculares y ustedes decían, para obtener ángulos rectos por la definición de perpendiculares. Entonces, ahora lo que necesito son ángulos congruentes, la idea es buscar alguna regla teórica que me permita garantizar la congruencia de ángulos.
25	Pablo	Hay tres postulados de congruencias [lee los postulados de congruencia de triángulos].
26	Karina	O sea que tenemos que hacer dos pares de lados congruentes.
27	Pablo	Tenemos que hacer triángulos congruentes, ahora, ¿Cómo se hacen triángulos congruentes?
28	J	¿Qué otra definición tenemos?
29	Pablo	[Lee la definición de triángulos congruentes]
30	J	¿Eso les ayuda para resolver el problema?
31	Pablo	Supongo que sí porque si tengo dos triángulos congruentes sus ángulos también son congruentes, ahora, no sé cómo hacer triángulos congruentes.
32	J	¿Qué le ayuda a construir triángulos congruentes?
33	Pablo	No sé, [Busca en las reglas teóricas y lee el postulado de congruencia LLL] ¿Cómo así? [dibuja dos triángulos en el cuaderno] Si tenemos dos triángulos, entonces que cada lado del triángulo sea congruente.
34	Karina	Si tenemos un triángulo [dibuja dos triángulos en el cuaderno] y este lado es congruente a este y este a este y este a este, entonces los triángulos son congruentes.
35	Profesor	[Se dirige a toda la clase] Vamos a hacer una pausa ¿Qué hacemos primero?

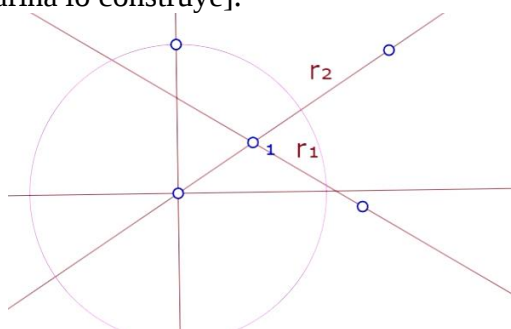
36	Clase	Dos rectas.
37	Profesor	¿Por qué dos rectas?
38	Clase	Porque son los objetos dados
39	Profesor	Y para resolver el problema ¿Qué hicieron primero?
40	Clase	Un dibujo con el problema resuelto.
41	Profesor	Noten que, a pesar de que yo no tenga la construcción, yo sí puedo tener un dibujo de la solución, ¿cierto? ¿Cuál sería el dibujo de la solución? ¿Qué dibujo?
42	Clase	Un triángulo ABC luego su bisectriz del ángulo BAC y luego la bisectriz del ángulo ABC.
43	Profesor	Un triángulo con dos de sus bisectrices, eso lo podemos dibujar a pesar de que no tenemos la solución del problema, esa es una estrategia muy útil cuando trabajamos problemas de construcción porque me permite abstraer, a partir el dibujo, propiedades que necesito garantizar. Ahí viene la primera pregunta ¿Qué propiedad debo garantizar?
44	Clase	Ángulos congruentes.
45	Profesor	¿Qué caracteriza a la bisectriz?
46	Karina	Que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
47	Profesor	Entonces lo que necesito garantizar es la congruencia de dos ángulos. Entonces viene la otra pregunta, ¿De qué manera garantizamos las propiedades de construcción?
48	Clase	Con las definiciones.
49	Profesor	Con las definiciones, postulados y hace falta uno que aún no hemos mencionado, pero pronto mencionaremos, teoremas. Y esa es la manera como garantizamos las propiedades, porque yo noto que están haciendo objetos, cosas arbitrariamente sin ningún control... Vamos a hacer una especie de árbol para cada propiedad que necesitemos garantizar. Entonces lo primero que necesito es que esa recta sea bisectriz de un ángulo, para llegar a que la recta es bisectriz necesito una propiedad ¿Qué propiedad?
50	Karina	Congruencia de ángulos.
51	Profesor	Ángulos congruentes, y aquí utilizo una regla teórica, ¿cuál regla teórica?
52	Clase	Bisectriz de un ángulo
53	Profesor	La definición de bisectriz, esa es la forma en como garantizamos las propiedades. La regla teórica tiene unas condiciones, antecedente y nos dan un consecuente. Y ahora viene la otra pregunta ¿Qué herramienta teórica me permite garantizar que dos ángulos son congruentes? Aquí está el problema, tengo que encontrar esa regla teórica y una vez encuentro esa regla teórica, posiblemente encuentre más de una, me tengo que preguntar con cuál me voy a quedar y eso depende de las condiciones de esa regla teórica. Sigán.
54	Pablo	Creo que, sí creo un triángulo y creo otro con las mismas medidas, tendría la bisectriz... Necesitamos que estos dos ángulos sean iguales.
55	J	Y eso lo hacemos por medio de...
56	Pablo	Dos triángulos.
57	Karina	Que tienen que ser congruentes.

58	Pablo	Tendríamos que hacer un círculo.
59	Karina	[Nombra el punto de intersección de r_1 y r_2 como B]
60	J	¿Ese puede ser B?
61	Pablo	No, bueno no sé.
62	Karina	[Crea un círculo con centro en B que pase por cualquier punto, luego ubica dos puntos en el círculo y crea dos segmentos desde B]

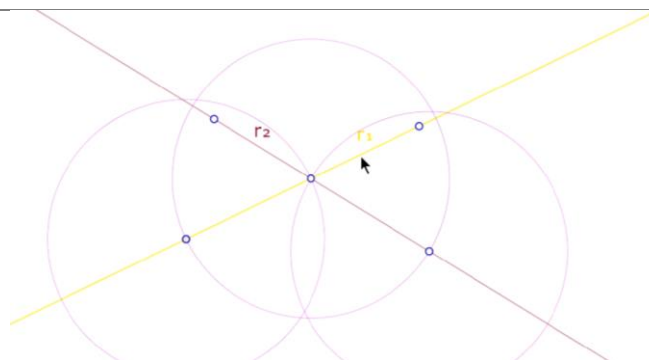


Esta es la misma distancia, esta es la bisectriz [mueve los puntos y se da cuenta que no se mantiene la congruencia de triángulos, borra el círculo].

63	Pablo	Cree el círculo en cualquier parte, pero que B no sea el centro.
64	Karina	[Crea un punto sobre r_2 y crea un círculo de radio cualquiera con centro en ese punto].
65	Pablo	Cree una recta cualquiera y luego una perpendicular a la recta que pase por el punto [Karina lo construye].

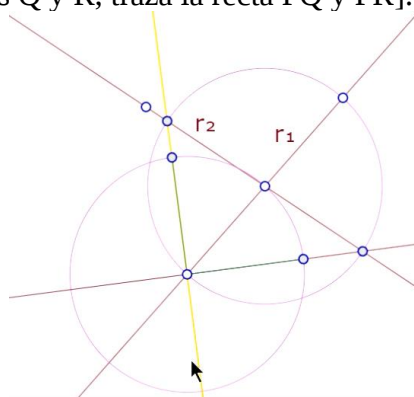


66	J	¿Por qué tiene que ser perpendicular?
67	Pablo	Para asegurarnos que siempre esté en la misma distancia a esta recta.
68	Karina	[Mueve el punto] r_1 dejaría de ser la bisectriz.
69	Pablo	Por ejemplo, si creo un círculo y acá otro círculo, entonces sus lados son iguales y si sus lados son iguales sus ángulos son iguales [crea un círculo C_1 con centro en O, la intersección de r_1 y r_2 , con radio cualquiera, (llamaremos P a la intersección de C_1 con r_2 y Q a la intersección de C_1 con r_1), construye un círculo C_2 con centro en P que pase por O y otro círculo C_3 con centro en Q que pase por O].



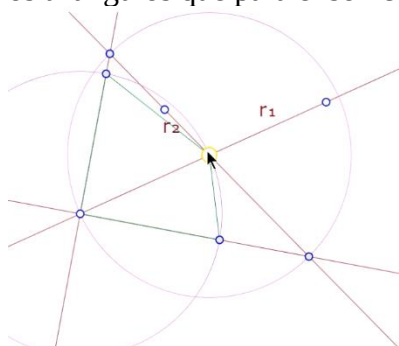
70	Clase	(En la clase empieza la discusión acerca de que regla teórica usar para asegurar ángulos congruentes, un estudiante menciona el teorema del triángulo isósceles).
71	Profesor	¿Qué dice el teorema del triángulo isósceles?
72	Clase	[Leen el teorema del triángulo isósceles].
73	Profesor	Acá tengo congruencia de ángulos si los lados opuestos son congruentes. ¿Podríamos pensar esos dos ángulos en los que la bisectriz divide al ángulo BAC como dos ángulos de un triángulo? ¿Es posible que esos dos ángulos sean los dos ángulos de un triángulo donde los lados opuestos a ellos son congruentes?
74	Karina	No, porque dice dos lados opuestos. Porque el ángulo está en el mismo lado.
75	Clase	(Alguien comenta algo en clase, es inaudible).
76	Karina	Porque el ángulo congruente va a ser al lado opuesto, o sea cada lado va a tener su opuesto, y no va a ser el mismo del siguiente lado. O sea, cada lado tiene su ángulo opuesto, y dice que son 2 lados congruentes y los respectivos ángulos opuestos a esos lados son los ángulos que van a ser congruentes, los respectivos ángulos nunca van a ser el mismo.
77	Profesor	Como es de difícil decir las cosas. Voy a tratar de decir lo que usted me está queriendo decir con otras palabras. ... Entonces, no toda regla teórica que concluya lo que quiero me funciona. Continúen.
78	Pablo	Creo que lo que estaba haciendo no funcionaría (refiriéndose a los 3 círculos).
79	J	Sigan elaborando sus ideas, ¿Cómo van a construir triángulos congruentes?
80	Karina	Haciendo que las distancias sean iguales.
81	J	Y eso ¿Qué regla teórica es?
82	Pablo	Que, si tenemos tres lados congruentes, los respectivos ángulos son congruentes [busca en el documento los postulados de congruencia].
83	J	Ustedes tienen tres postulados, ¿Cuál usarían?
84	Pablo	[Lee los postulados] Sería la primera, porque si tenemos que sus lados son congruentes entonces tenemos que sus ángulos son congruentes.
85	J	¿Por qué?
86	Pablo	Porque son triángulos congruentes.

87	J	¿Qué necesitas?
88	Pablo	Lados congruentes, este con este [señalando un dibujo en su cuaderno]
89	J	¿Y eso como lo vas a hacer?
90	Pablo	Con un círculo... (inaudible) [crea un círculo C_1 con centro O , intersección de r_1 y r_2 , la intersección entre C_1 y r_1 será P , crea un círculo con centro en P que pasa por O , marca las intersecciones entre C_1 y r_2 , estas las llamaremos Q y R , traza la recta PQ y PR].



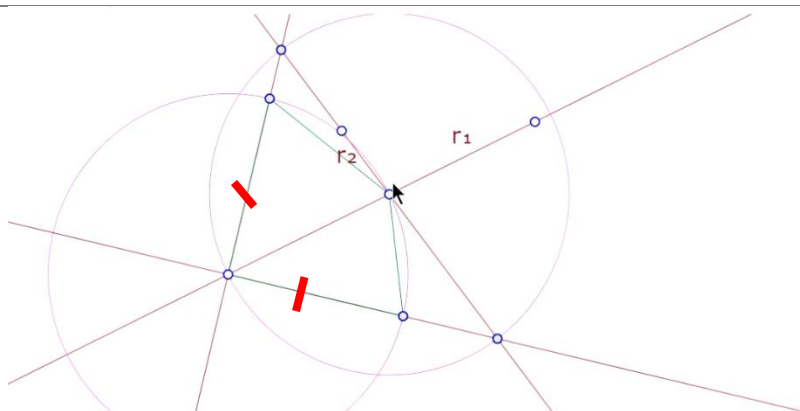
r_1 sería la bisectriz

91	J	Mueva los puntos.
92	Pablo	[Mueve los puntos] Acá ya no tiene el mismo ángulo, no entiendo porque pasa eso [construye los triángulos que para él son congruentes].

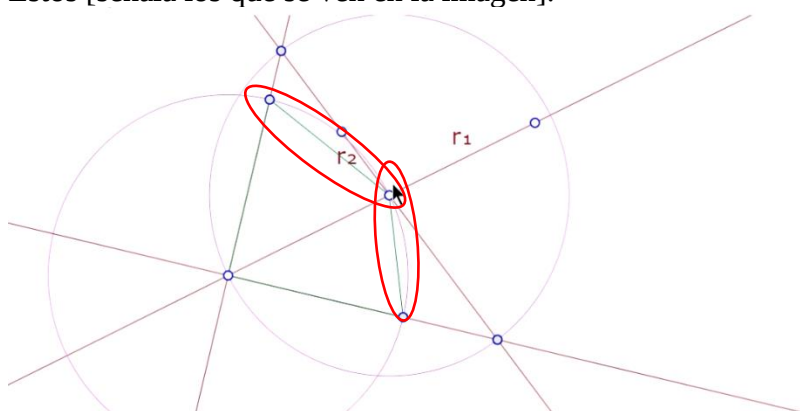


Es que no entiendo por qué pasa eso.

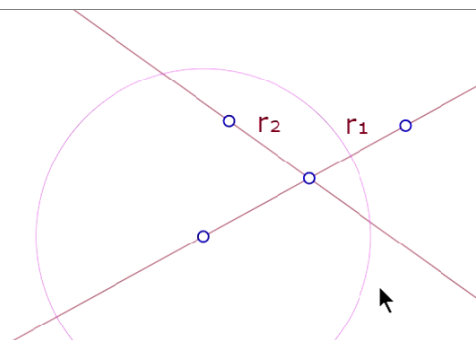
93	J	Retomemos ¿Qué postulado vamos a usar?
94	Pablo	Lado, lado, lado, aseguro los tres lados congruentes.
95	J	Entonces, ustedes ya tienen un par de lado congruentes ¿Cuáles?
96	Pablo	Este es igual a este [señala los que se ven en la imagen].



97	J	¿Por qué?
98	Pablo	Por este círculo.
99	J	Entonces, ¿Qué le hace falta? ¿Qué lados le hacen faltan para que sea congruentes?
100	Pablo	Estos [señala los que se ven en la imagen].

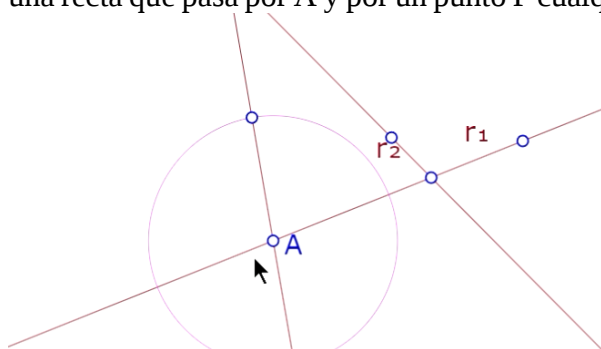


101	Karina	Creo que ya sé [dibuja un triángulo] este lado debe ser congruente con este y este con este para que los ángulos correspondientes sean congruentes. Entonces ubicamos A y hacemos un círculo que pase por él para que la misma medida de acá a acá sea la que halla de acá a acá. [señala el dibujo realizado en el cuaderno].
102	J	Listo, con eso asegura la congruencia de esos dos lados, ahora ¿Cómo asegura la otra parte? Ve construyendo lo que me dijiste.
103	Karina	[Ubica un punto A en r_1 , crea un círculo cualquiera con centro en ese punto].



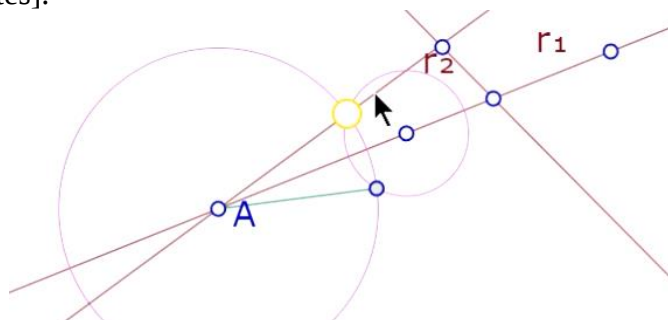
104 J ¿Y el círculo es para?

105 Karina Asegurar esto (se refiere a que un par de lados sean congruentes) [crea una recta que pasa por A y por un punto P cualquiera de la circunferencia].



106 J Con ese círculo logras que dos lados sean congruentes, como garantizas que estos otros dos lados sean congruentes [haciendo referencia al dibujo] ¿Cómo garantizas congruencia de lados?

107 Karina Con círculos [crea otro punto Q sobre r1, crea un círculo con centro en Q que pase por P, las intersecciones de los círculos formarían los triángulos congruentes].

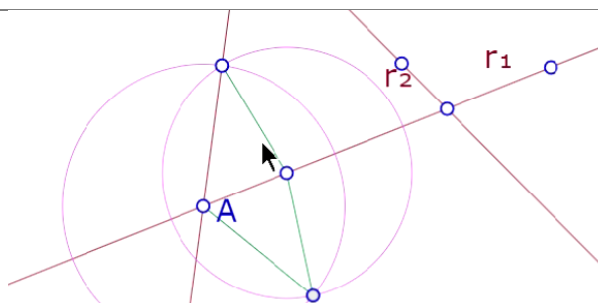


108 J ¿Por qué este lado es igual a este lado?

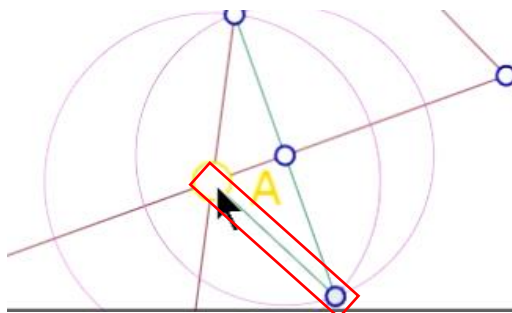
109 Karina Porque tiene como centro A [señala el círculo que tiene centro en A].

110 J ¿El otro círculo que creó qué garantiza?

111 Karina Que este lado y este lado van a ser congruentes [crea segmentos de dichos lados].

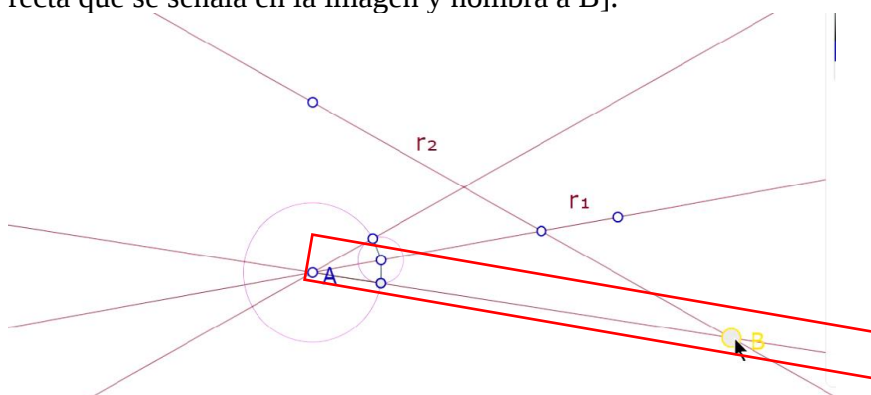


112	J	¿Entonces que construyó?
113	Pablo	Triángulos congruentes.
114	J	Entonces...
115	Pablo	Este ángulo y este ángulo serían congruentes y esta sería la bisectriz.
116	J	Ahora, ¿Dónde estaría ubicado B?
117	Karina	Está con el lado A y con el lado C.
118	J	Viendo el dibujo ¿Dónde está B?
119	Pablo	Esta debería conectar con una recta con B ¿No? [señala lo que se ve en la imagen].



Ese segmento está dentro de la recta que contiene también a B, o sea, ese segmento debe estar dentro de AB.

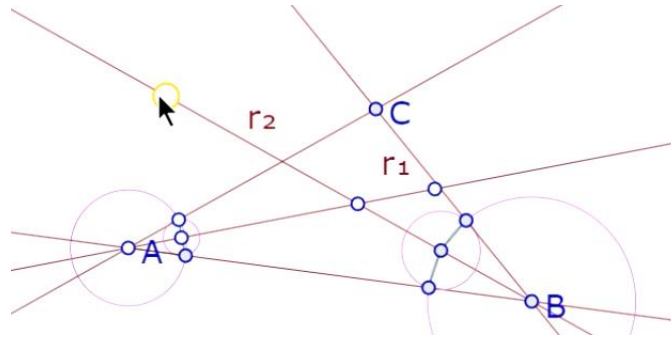
120	J	¿Entonces que se debe hacer? ¿Cómo construyen a B?
121	Pablo	Si acá creo una recta que pase por acá, aquí debería estar B [construye la recta que se señala en la imagen y nombra a B].



Y ahora se realiza el mismo proceso que se hizo antes.

122	Karina	Anteriormente ubiqué un punto cualquiera pero ahora tengo B, hago un círculo que pase por r_2 , entonces de acá a cualquier parte tengo la misma distancia. [crea un círculo C_3 con centro en B que pase por un punto M cualquiera a r_2 , la intersección de C_3 con AB la llamaremos N].
-----	--------	---

- 123** Pablo Ahora marque la intersección del círculo con r_2 , hace un círculo de ahí hasta acá. Y ahora una recta que vaya hasta B y esto sería C [crea un círculo C_4 con centro en M que pase por N, la intersección de C_4 con C_3 será S, crea la recta BS, la intersección de esa recta con la otra recta diferente a r_1 y a r_2 , será C].



- 124** J ¿Cómo sé que es la bisectriz?
- 125** Pablo Porque este lado es el mismo que este y este con este, entonces los triángulos son congruentes, entonces los ángulos son iguales.
- 126** Karina [Mueve los puntos] Todo se mantiene.

Transcripción grupo John y Alejandro

1era Clase

Actividad 1: 1° Secuencia

1. Dados dos puntos A y B, construir un punto M, tal que M sea el punto medio de A y B.

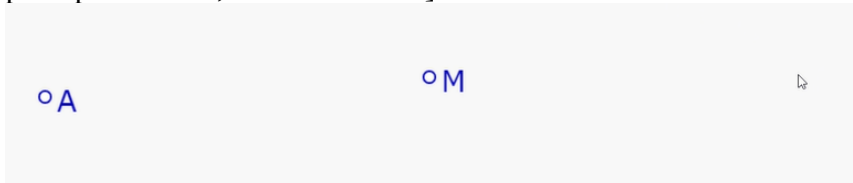
No	Sujeto	Descripción
1	Alejandro	[Lee la tarea, construye los puntos dados y los nombra A y B].
2	John	Mantenemos espichado [hace clic en el punto A].
3	Alejandro	Primero hacemos el segmento y luego el punto medio [utiliza la herramienta segmento para crear AB]... es una recta que...
4	John	No, es un segmento.
5	Alejandro	Pero es que no dice que sea un segmento.
6	John	Tampoco dice que sea una recta.
7	Alejandro	Quedó mal porque es el punto medio de A y B [borra el segmento AB]... ¿Y ahí qué?
8	John	Bueno, primero formo un segmento y creo el punto medio [hace clic sobre el segmento y utiliza la herramienta punto medio].
9	Alejandro	Pero no dice que sea segmento, dice dados dos puntos construir el punto medio.
10	John	Pero tampoco dice dada una recta.
11	Alejandro	Pero en el libro decía tipo...
12	John	[Enuncia el problema] Cumple con las condiciones, formamos dos puntos A y B, construimos el segmento y su punto medio.
13	Alejandro	[Hace clic en el punto A y luego acerca el cursor a la herramienta mediatriz]. ¿Y ahora?
14	John	¿Por qué apunta a la herramienta mediatriz? Ya lo tenemos, literal hice un punto A y un punto B...
15	Alejandro	Pero no decía segmento.
16	John	Tampoco dice recta.
17	Alejandro	Bueno pasemos al siguiente.

2. Dado un segmento AB, construir un punto M, tal que M sea el punto medio del segmento AB.

No	Sujeto	Descripción
18	Alejandro	[Lee el problema], ahí sí dice que es un segmento, eso es lo que me deja como loco. Ahí sí hace un segmento y la mitad [utiliza las herramientas segmento y punto medio].

19	John	Y ya.
20	Alejandro	Que M sea el punto medio de AB, ya ese es el punto medio [señala el punto construido con la herramienta punto medio].
21	Profesor	¿Cuál es la diferencia entre los dos problemas?... [Socializa con el grupo la pregunta] A ok, en el primer punto es hallar el punto medio de dos puntos y el segundo es hallar el punto medio de un segmento. ¿Y si borramos el segmento en el segundo?
22	John	[Elimina el segmento AB] A nosotros no se nos borró.
23	Profesor	¿Por qué no se borra?
24	Alejandro	Porque es el punto medio entre los 2. ¿No?
25	Profesor	¿De qué depende el segmento?
26	John	De A y B.
27	Profesor	Y entonces el punto medio de A y B depende exclusivamente...
28	John	De A y B.
29	Profesor	Entonces ¿DGPad qué usa para calcular el punto medio del segmento AB cuando usted toca el segmento?... A y B.

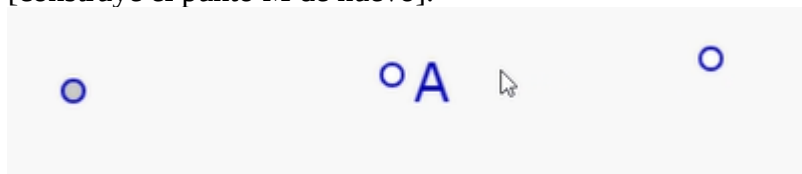
3. Dados dos puntos A y M, construir un punto B, tal que M sea el punto medio de A y B.

No	Sujeto	Descripción
30	Alejandro	[Lee el problema 3].
31	John	¿Sabe cómo se podría construir?
32	Alejandro	Sería por acá ¿no?, M el punto medio de A y B. [Señala con el cursor donde, perceptivamente, debería estar B].
		
33	John	Pero no lo puede sacar así, tiene que ser de la misma medida. ¿Sabe cómo se puede hacer? Con círculos. Recuerde que había una parte en el libro donde sacaban el punto medio.
34	Alejandro	¿Qué le sacaba qué?
35	John	Hay una forma de sacar el punto medio, acuérdesse. Con la intersección de 2 círculos.
36	Alejandro	No, pero eso se hace midiendo la misma distancia, pero eso se hace con compás, yo sé cómo hacerlo.
37	John	Sí, por eso.
38	Alejandro	Pero acá no tenemos compás.
39	John	Pero entonces hágalo con intersecciones.
40	Profesor	¿Qué diferencia hay entre el primer y tercer problema?
41	Alejandro	Que en el tercero le está pidiendo que el segundo punto sea el medio, entre ese y otro punto.

42	John	Sí, que el segundo punto sea el punto medio entre A y el tercer punto construido.
43	Profesor	¿Son distintos los problemas?
44	John	No.
45	Alejandro	Sí.
46	John	Son distintos en construcción.
47	Alejandro	Sí, en construcción son distintos.
48	Profesor	Entonces son distintos.
49	John	Claro, la construcción es diferente pero el resultado es el mismo
50	Alejandro	Bueno, como hacemos esto (refiriéndose al problema 3)
51	John	Mire, si pillas que hay una herramienta, esta... simetría central.

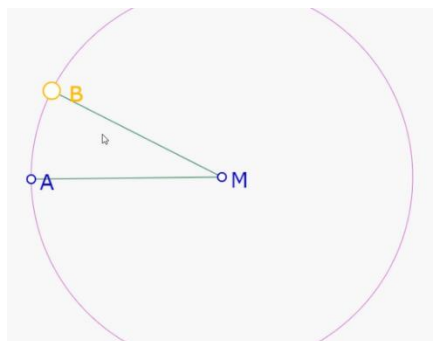


52	Alejandro	Sí. ¿Sí se puede no?
53	John	Sí [borra el punto M y utiliza la herramienta “simetría central” de un punto cualquiera con respecto a A], pero toca leer bien porque le está diciendo que partir de un punto A y M, no nos está diciendo que partiendo desde un punto [construye el punto M de nuevo].



54	Alejandro	Ahora, nos está pidiendo construir un punto B, tal que M sea el punto medio de A y el punto que vamos a agregar. O sea que de A a M y de B a M debe haber la misma distancia para que sea punto medio. Pero entonces cómo hacemos para meter eso (refiriéndose al punto B).
55	John	¿Sabe cómo? Con un círculo, trace un círculo con centro aquí [señalando el punto M] con el radio acá [señalando el punto A].
56	Alejandro	[Construye un círculo con centro en M que pasa por A].
57	John	Y eso va a tener la medida del radio, por ende, ese va a ser un punto medio.
58	Alejandro	Pero cómo agregamos B ahí.
59	John	Espíchele.
60	Alejandro	[Le da clic sobre el círculo y construye un punto sobre la circunferencia], pero eso no sigue siendo punto medio cuando... [arrastra el punto sobre la circunferencia].
61	John	Relajado, primero espíchele para nombrarlo B, Se supone que si usted crea un segmento aquí [señalando los puntos A y M].
63	Alejandro	Sí, pero mire que este se mueve (refiriéndose al punto B).
64	John	Sí, pero espere. Si construyo este segmento hasta M [construye el segmento AM] y después uno de M a B [construye el segmento MB].

65 Alejandro [Mueve el segmento BM] No esto no.



66 John Borremos eso [elimina toda la construcción].

67 Alejandro A ver, ¿Hacemos otra vez el círculo?

68 John Sí, el círculo nos ayuda a hacer eso.

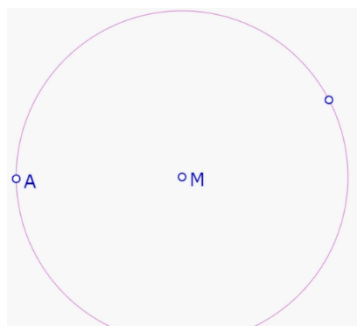
69 Alejandro Es que no entiendo por qué es que... [Construye un círculo con centro en A que pasa por M].

70 John No, pero de M a A.

71 D ¿Por qué de M a A?

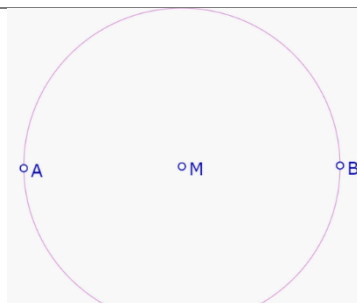
72 John Porque M es el punto medio, entonces si hablamos de una circunferencia estamos diciendo que...

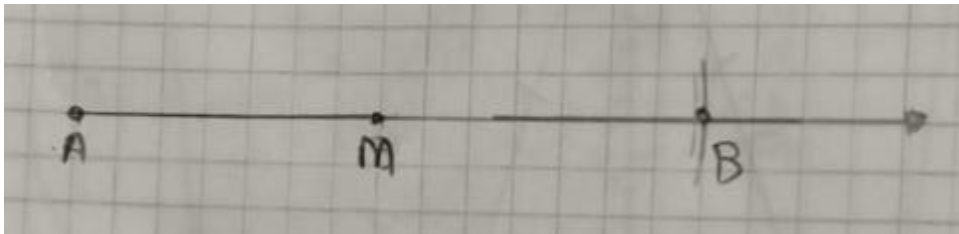
73 Alejandro El radio, de aquí a acá [señalando el punto A y M] es la misma distancia que de aquí a acá [señalando el punto M y otro punto de la circunferencia]. Pero lo que necesito, digamos si yo pongo el punto acá [pone un punto cualquier sobre el círculo], yo no sé si M es el punto medio entre A y este punto.



74 John Espere, es que así se construye el punto B de modo que esté en la medida

75 Alejandro Ahora, espere, yo lo puedo bajar, dele en B [mueve B hacia abajo], o sea sí, no quiero que se mueva, que quede alineado.



76	John	Haga el punto medio de A y B
77	Alejandro	[Construye el punto medio de A y B por medio de la herramienta] Pero ¿Qué pasa si lo muevo? A sí ve, si lo muevo ya cambia, necesito que se quede ahí quieto (en esta parte se refiere a cuando el punto medio construido coincide con M). Yo con compás sí puedo hacerlo.
78	John	Con compás sí.
79	D	¿Podrían entonces hacerlo con compás en el cuaderno?
80	Alejandro	Con compás sí soy capaz, en el libro lo enseñan [saca un cuaderno y regla]. Ponga cuidado, tenemos el segmento AM, el libro nos decía que se prolongaba el segmento y entonces se media AM y ya, y ahí se marcaba [realiza la representación en el cuaderno de la recta que contiene el segmento AM y copia la distancia AM con un compás].
		
81	John	Ya, mire; esta sería una posible solución, ponemos la recta [utiliza la herramienta para crear la recta AB y construye el punto de intersección entre la recta y el círculo]
82	Alejandro	Ay sí, dele a punto. Ya quedó.

2° Secuencia

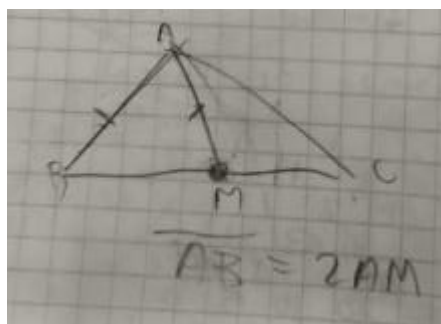
1. Dado un triángulo ABC, construir las medianas AL, BM y CN.

No	Sujeto	Descripción
83	Alejandro	[Lee el problema] ¿Medianas? Yo no he visto eso
84	John	Busquemos en el pdf y listo (el pdf se refiere al listado de reglas teóricas) [leen la definición de mediana].
85	Alejandro	O sea, toca construir el punto medio y unirlo con el vértice [construye el triángulo ABC].

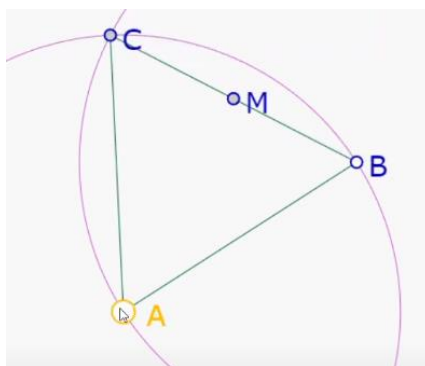
86	John	Ahora saque el punto medio aquí, a cualquier segmento. Toca sacarles a todos.
87	Alejandro	A este se le pone L [nombra L al punto medio de BC].
88	John	[Nombra los demás puntos medios].
89	Alejandro	Pero únalas ¿No?, esas serían las medianas [construye las medianas del triángulo ABC].
90	John	Y son concurrentes porque pasan por el punto medio.

2. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $2AM=AB$.

No	Sujeto	Descripción
91	John	[Lee el problema].
92	Alejandro	[Realiza una representación gráfica en el cuaderno] O sea dos veces la mediana de ahí sea igual al lado AB.

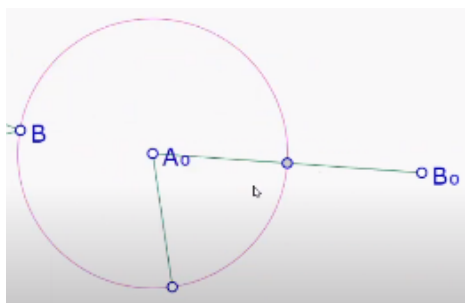


93	John	[Construye le segmento AB] pues con un círculo podemos hacer el tercer lado.
94	Alejandro	[Construye un círculo con centro en A que pase por B y viceversa].
95	John	Entonces con la intersección se haría el triángulo [construye M punto medio de AB].

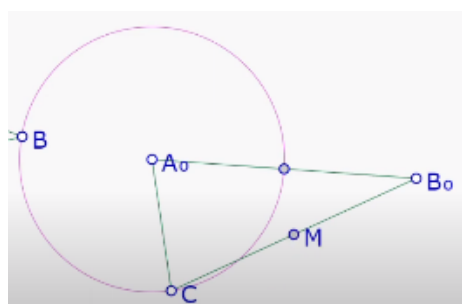


96	Alejandro	[Construye el segmento AM] AB tiene que ser igual a dos veces este lado (se refiere a la mediana), o sea que este es más largo [señalando a AB].
97	John	[Borra todo menos el segmento y lee de nuevo el problema] O sea que C debe estar como cerca [construye el triángulo ABC y arrastra C], espere,

		pongámoslo exacto (Arrastran C hasta que las medidas cumplan con las condiciones requeridas por el problema).
98	D	Acá tiene un punto tal que la distancia AC es la mitad de la distancia AB, hallen otro punto que cumpla lo mismo.
99	John	¿Otro punto?
100	Alejandro	Sí, tal que la distancia de A a ese punto también sea la mitad de AB.
101	John	Espere, voy a volverlo a hacer [construye otro segmento A_0B_0] O sea que tiene que estar al punto medio [construye el punto medio], ahora construir otro punto en cualquier lado tal que sea la mitad de AB, ¿Cómo hago para copiar esta medida? [Señala al punto medio] Si no estoy mal se podría hacer así, con una recta [traza una recta que pasa por el punto medio] (perceptivamente perpendicular) y cualquier punto en esa recta. No, así no era.
102	Alejandro	Me dejó confundido.
103	John	No, espera, mejor así [construye un círculo con centro A_0 que pasa por el punto medio de A_0B_0 y un punto cualquiera sobre el círculo.] Así sí tiene la misma medida y siempre va a tener la medida de esa mitad.

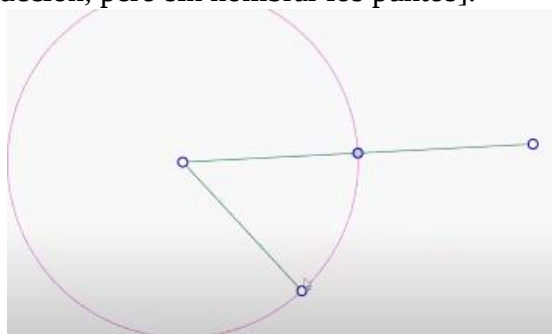


104	Alejandro	Sí, por lo que es el radio.
105	John	[Construye el segmento entre el punto en el círculo y B_0] y ahora sí saca los puntos medios [construye el punto medio del segmento creado].

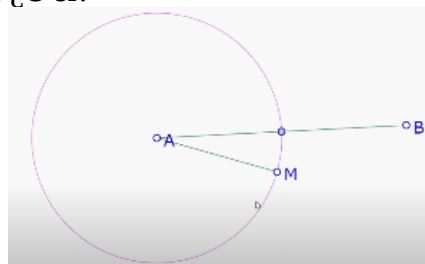


106	Alejandro	Mídalo a ver si cumple [Mide A_0M y A_0B_0], eso no es la mitad. Oiga, pero no cree que entonces el punto C, este es la media ¿Sí me hago a entender?, digamos este segmento es la media de este segmento
108	Profesor	¿Cuál segmento?
109	Alejandro	Este segmento.
110	Profesor	Nómbrelo.
111	Alejandro	El segmento AC es la mitad de AB.

112	Profesor	Pero ¿Para qué quiere que AC sea la mitad de AB?
113	Alejandro	Bueno A_0C no, esto no se supone que debería ser C sino M.
114	John	Profesor, es que el AM debe ser la mitad de AB, entonces lo que hice fue formar un círculo para que de aquí al punto medio tenga la misma medida [señalando A_0C].
115	Profesor	¿Cómo sabe que de ahí al punto va a tener la misma medida?
116	Alejandro	Porque es una propiedad del círculo.
117	John	Cualquier punto a distancia del punto medio va a tener la misma medida [miden los segmentos para verificar].
118	Profesor	Pero ¿Cumple lo que se pidió? (Refiriéndose al problema).
119	John	No.
120	Alejandro	No, pero este pedazo cumple con este pedazo [señalando A_0B_0 y A_0C].
121	John	[Borra toda la construcción] Vamos a hacer lo que usted dijo [realiza la misma construcción, pero sin nombrar los puntos].

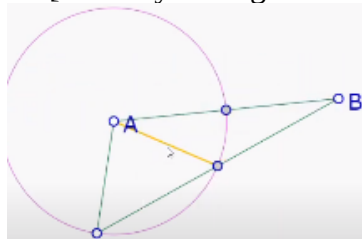


122	Alejandro	Se supone que esta debe ser la mediana [señalando el radio del círculo].
123	D	Nombre los puntos para saber de qué objetos estamos hablando.
124	Alejandro	[Nombra los puntos A, B y M] y ¿Dónde ubicamos el C? no se si podemos ubicarlo donde sea, ¿O sí?



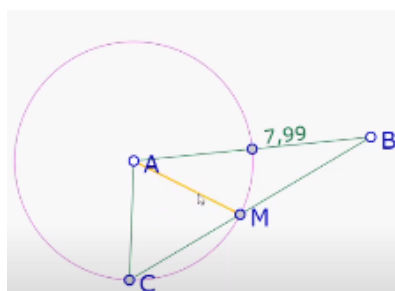
125	D	¿Qué nos dice la definición de mediana?
126	Alejandro	[Leen la definición] O sea que este es el punto medio de este segmento, aparte de ser la mediana es el punto medio de BC.
127	D	¿Para qué hicieron el círculo?
128	Alejandro	Fue para para hallar la mediana.
129	John	Yo la hice, porque miré, hice el segmento y hallo el punto medio, con ese punto medio sako el punto C (refiriéndose a un punto sobre el círculo)
130	D	¿Por qué halló el punto medio?
131	Alejandro	Porque nos están diciendo que... [Lee el problema].
132	John	Yo el punto C lo hice para que midiera la mitad de AB.

- 133 Alejandro Pero mire que AC es la mitad de AB, cumpliría si el punto M estuviera en la circunferencia [construye el segmento BC y su punto medio].

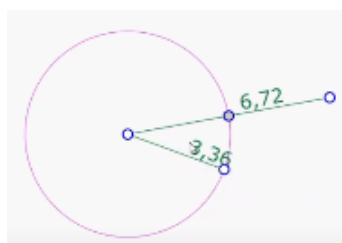


(en este caso movieron el punto C hasta que, perceptivamente, el punto medio estuviera sobre el círculo)

- 134 John Ahí sí cumple.
- 135 Alejandro Sí, pero si muevo el punto no, necesitamos que el punto medio vaya por la circunferencia.
- 136 D ¿Para qué necesitamos que vaya por la circunferencia?
- 137 Alejandro Para que cumpla condición, de que sea la mitad de AB.
- 138 John Pues entonces [borra el punto medio y construye la intersección entre el círculo y BC].

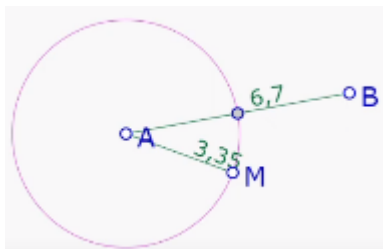


- 139 Alejandro Sí cumple
- 140 John Cumple las medidas.
- 141 D ¿Cumple todas las condiciones?
- 142 Alejandro [Mueve el punto C] ay no, no es mediana porque tiene que estar en el punto medio [borra la construcción].
- 143 D ¿Cómo podrías garantizar que $2AM = AB$?
- 144 Alejandro Sacándole la mitad al segmento.
- 145 John Eso, eso fue lo que yo hice cuando hice la circunferencia [vuelve a hacer el segmento dado y un círculo con centro en A que pasa por el punto medio].

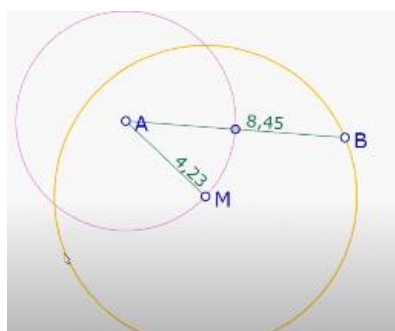


- 146 Alejandro Y ya, siempre es la mitad.

147	D	¿Y entonces para qué utilizamos el círculo?
148	John	Por eso, entonces este es el segmento AB y está la mediatriz [nombra los puntos].



149	D	La mediana.
150	Alejandro	Sí, eso la mediana [lee la definición de mediana], M es el punto medio de BC, pero... ¿Cómo hacemos para que cumpla eso?
151	John	Ya sé, utilizamos el problema en donde hallamos el punto medio ¿Sí se acuerda?
152	Alejandro	Sí
153	John	Sí, y la mediana es el punto medio entre B y C.
154	Alejandro	Por eso, toca ubicar C.
155	John	¿Cómo hicimos para ubicar eso? Mire lo hicimos así [construye un círculo con centro en M que pase por B]
156	Alejandro	Sí cierto.
157	John	Cómo hicimos este problema, que nos daban A y M y construíamos B, hacer lo mismo acá (refiriéndose a la solución de la tarea 2).
158	Alejandro	O sea, C tiene que estar en esa circunferencia (la última construida), y ahora tiene que marcar acá (señalando perceptivamente con el ratón donde debe estar C).

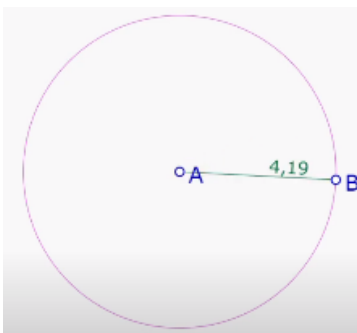


159	John	¿Y si trazo una recta? [Construye la recta BM].
160	Alejandro	Y crear esta intersección [construye el punto de intersección entre BM y el último círculo construido].
161	John	Técnicamente es el punto medio, por más que lo mueva [mueve los puntos dados].
162	D	¿Por qué siempre va a ser el punto medio?
163	John	Porque al crear la circunferencia, una de sus propiedades principales es que cualquier punto que esté en la circunferencia va a tener la misma medida.

164	Alejandro	Y el centro del círculo es el punto medio del diámetro del círculo, entonces por eso es el punto medio.
165	John	Sí, el caso es que, como nosotros construimos esto, el punto medio no va a cambiar nunca, entonces siempre se va a mantener la medida.
166	Alejandro	Por el círculo.
167	D	¿Por qué hicieron la recta?
168	John	Para que los puntos se mantengan colineales.

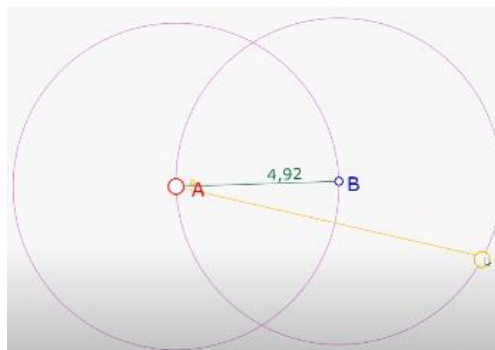
3. Dado un segmento AB, construir un triángulo ABC con mediana AM, tal que $AM=2AB$.

No	Sujeto	Descripción
169	Alejandro	[Lee el problema, construye el segmento AB].
170	John	[Lee el problema].
171	Alejandro	Ahora es al revés, que el segmento sea el doble de la mediana
172	John	No, que la mediana sea el doble del segmento.
173	Alejandro	Ah sí, sí. Miremos el problema anterior, entonces este debería ser AM y este AB [señalando los segmentos AB y AM respectivamente].
174	John	Entonces, hacemos lo mismo [construye un círculo con centro en A que pase por el punto medio de AB].
175	Alejandro	Ahora, entonces este sería M [cambia el nombre del punto B a M].
176	John	Pero no podemos cambiarles el nombre a los puntos, no porque es un punto dado.
177	Alejandro	[Lee el problema] Vale sí, será hacer lo mismo que en el problema anterior, pero toca hacerlo desde el inicio, viceversa. Tenemos un punto y hacer el doble.
178	John	Entonces, ya sé, primero hacer el círculo [construye el segmento AB y círculo con centro en A que pasa por B].

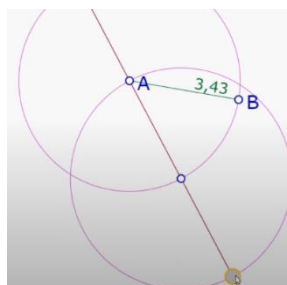
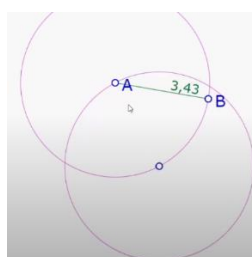


179	Alejandro	Vale, entonces el doble de ese va a ser la mediana, o sea va a estar por fuera (del círculo).
180	John	Claro, entonces haga un punto cualquier afuera del círculo.
181	D	¿Cuáles son las condiciones que se deben garantizar?
182	John	Que dos veces este segmento sea la mediana [señala AB].
183	D	¿Qué herramientas tenemos para construir el doble de ese segmento?

184	John	Fácil, ponga de B a A [construye otro círculo con centro en B que pasa por A].
185	Alejandro	¡Ah sí!, otro círculo. Y si hacemos una recta [construye la recta AB y construye M tal que M es la intersección de AB y el último círculo construido] entonces este punto sería M, bueno más o menos.
186	John	No entiendo, ¿Por qué ese sería M? Ya tenemos el doble. No podemos hacer el segmento de A ... [Borra la recta AB y construye un segmento de extremo A hasta un punto cualquiera del círculo construido]

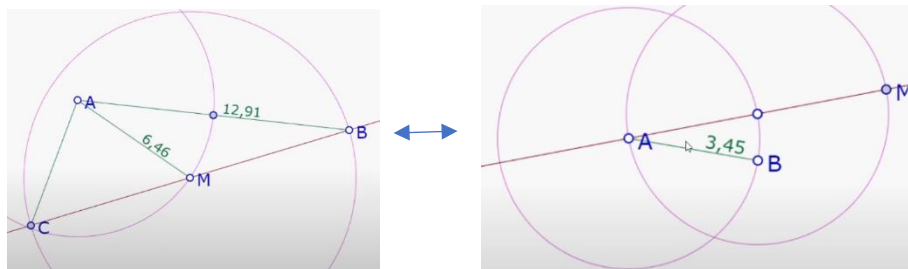


187	Alejandro	No, no porque no sería el doble porque no pasa por el radio. Tendría que ser colineal para que sea el doble.
188	John	Sí [borra toda la construcción y construyen un segmento AB y un círculo con centro en A que pasa por B].
189	Alejandro	Y si creamos esto de acá... [Construye un punto cualquiera en el círculo y construye un círculo con centro en dicho punto que pasa por A] [Construye la recta que pasa por A y por el punto creado en el círculo]

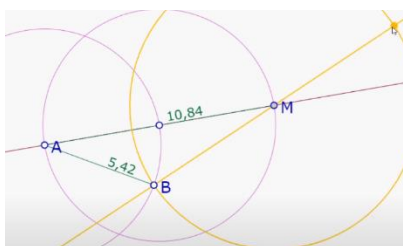


190	John	Técnicamente esa es la medida de la mediana [nombra M a la intersección de la recta con el último círculo creado].
-----	------	---

- 191** Alejandro Qué tal si hacemos un círculo en M [construye un círculo con centro en B que pasa por M] (en esta parte estaba comparando lo hecho hasta ahora con la anterior construcción).



- 192** John Sí y ahora una recta [construye la recta BM].
- 193** Alejandro [Construye la intersección entre la recta y el círculo] ¿Qué pasa si formo la intersección?



- 194** John Forma el triángulo.
- 195** Alejandro [Nombra C al punto de intersección y construye el triángulo ABC] Bueno cuando muevo siempre va a mantener la misma propiedad [mueve los puntos dados].

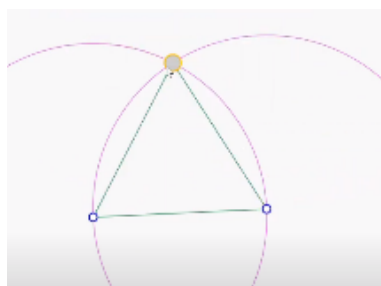
2da clase

3° Secuencia:

1. Dado un triángulo ABC, construir las alturas AL, BM y CN.

No	Sujeto	Descripción
1	Alejandro	[Lee la tarea].
2	Alejandro	Es que yo le quería preguntar ¿Están en las definiciones lo de las alturas?
3	D	Sí.
4	Alejandro	[Lee la definición] Si yo quiero sacar la altura b, ¿Esta altura es igual a esta? [Señalando un dibujo realizado en el cuaderno] ¿O cómo? Pues dice que es perpendicular, no me dice que tiene que pasar por algún lado, tiene que ser perpendicular a este lado.
5	D	¿Ambas pueden ser perpendiculares?
6	Alejandro	No, solo una.

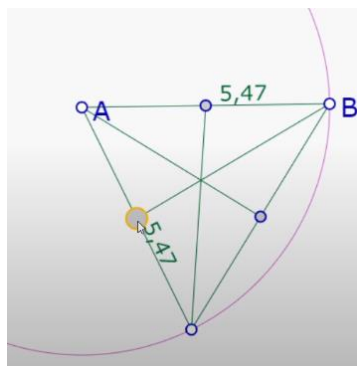
7	John	¿Sabe cómo puede sacar la altura? ...Equilátero.
8	Alejandro	Espere, Espere. Es que yo lo que le pregunto es que digamos... ¿Este es perpendicular a este no?
9	D	Sí.
10	John	Esta es la altura y esta la altura.
11	Alejandro	Sí, porque forman ambos...
12	John	Pero si hago esta.
13	D	¿Qué significan que sean perpendiculares?
14	Alejandro	Que cuando se cruza una recta con otra, tiene que formar en los 4...
15	John	Ángulos rectos, ¿Sí? Ángulos congruentes y rectos
16	Alejandro	Ahhhhh gracias, gracias.
17	John	Ya, ya, ya. Ahora tenemos ya un... Voy a poner un triángulo equilátero
18	Alejandro	Un equilátero y listo.
19	John	[Construye un triángulo equilátero].



Listo y hagamos la media, que la media es una altura.

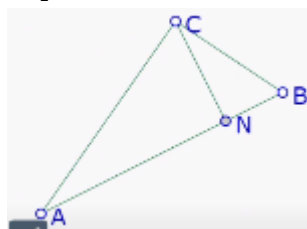
20	Alejandro	¿La media?
21	John	Sí, me refiero a que la altura es la misma media, entonces saque la mediana de cada lado.
22	Alejandro	Entonces, ¿Puedo decir que la altura de un triángulo pasa desde el vértice hasta el punto medio de este?
23	D	¿Y eso es verdad?
24	Alejandro	No creo, pues vamos a comprobarlos.
25	John	Comprobarlo primero (realiza la experimentación en DGPAD con un triángulo y sus medianas)
26	Alejandro	Solo cumpliría en ciertos triángulos, porque si están torcidos ya no forman ángulos rectos.
27	D	¿Qué nos pide el problema?
28	John	[Lee el problema].
29	D	¿Qué objetos deben ser libres?
30	Alejandro	¿Libres? A, B y C. No es libre porque vea, se puede mover este, pero este no (nota que en la construcción uno de los puntos no es libre).
31	John	Ah solamente A y C, B no es libre. B no es libre y esto hay que quitarlo [elimina el punto B y queda una recta].
32	Alejandro	¿Cómo hacemos para que quede libre?
33	John	Es que ahí venia yo con la cuestión, para que no hiciera todos estos círculos, espere me devuelvo todo [se elimina todo y quedan con 2

		puntos] Hacemos un segmento y hallamos el punto medio, hacemos una recta...
34	Alejandro	¿Con qué puntos?
35	John	Ah ya, espere, espere [construye el segmento AB y el punto C lo construyen en cualquier parte sobre el círculo con centro en A que pase por B] y ahora si construimos las alturas [construye las medianas del triángulo]



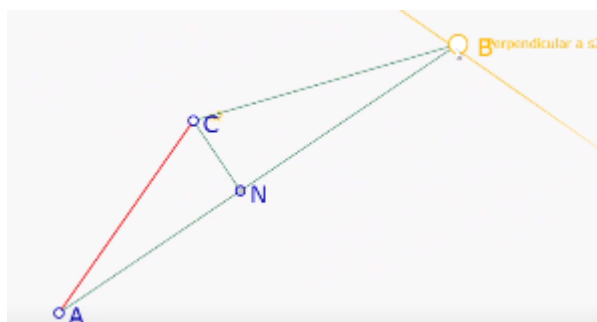
36	D	Y ¿Cómo garantizan que son alturas?
37	John	La definición nos lo dice [lee la definición].
38	D	¿Cómo garantizan que es perpendicular?
39	John	Porque cuando corta se forma un ángulo de 90°
40	Alejandro	Ah, pero ahí no hay ángulo de 90° . ¿Y ahora?
41	John	Espere, borremos todo. [Lee la definición de altura] Es que por eso utilicé un triángulo equilátero.
42	Profesor	¿La altura no es perpendicular cuando el triángulo no es equilátero?
43	Alejandro	Pues sí es perpendicular con el lado opuesto.
44	Profesor	Vale y ¿A que sería perpendicular?
45	Alejandro	Al lado.
46	Profesor	¿Tiene una herramienta para garantizar ángulos rectos aquí?
47	Alejandro	No, o no sé.
48	Profesor	Y ¿Qué herramientas tiene?
49	Alejandro	[Hace clic sobre un punto] tenemos rectas, segmentos, círculos...
50	Profesor	Y ¿Solo aparecen herramientas cuando le das clic a un punto?
51	Alejandro	No, en las rectas también hay [construye el segmento AB] (se da cuenta que existe la herramienta “perpendicular”) Ay mire se puede hacer una perpendicular.
52	John	Listo, entonces construyámoslo [construyen el triángulo dado y trazan las perpendiculares a cada lado]. Tienen un punto de intersección. ¿Ve?
53	Alejandro	Sí.
54	John	[Ponen en cada intersección puntos] Esa es la altura L
55	Alejandro	¿Y C?
56	John	C, la altura N
57	Alejandro	Y ¿B?
58	John	Y B, altura M

59	Alejandro	Ahora sí se puede mover cada punto.
60	John	Y siempre va a ser perpendicular y siempre va a cortar en un ángulo de 90 grados.
61	D	¿Qué pasa si mueves A?
62	John	¿Así?
63	D	¿Cuáles son las alturas de A? Mejor dicho ¿Qué son las alturas según la definición?
64	Alejandro	Es un segmento.
65	Profesor	Ahí está.
66	John	Ahora haré los segmentos [construye los segmentos AL, BM, CN]
67	John	[Mueve bruscamente el triángulo desde el punto B]. Ya, ahí se eliminaron las alturas porque serían iguales al segmento.
68	D	¿Serían iguales?
69	John	Se supone que se eliminaron porque aquí ya son iguales.
70	John	[Mueve el triángulo de manera que aparece la altura CN].
71	Alejandro	Ahora el problema es que sale la altura de CN y no la de BM.
72	John	Porque se igualó al segmento, porque va desde el vértice hasta el lado opuesto.
73	D	¿Entonces solo tiene una altura?
74	John	No, tiene 3 alturas
75	Alejandro	Pero no sale.
76	John	Tiene que ser del vértice al lado opuesto perpendicularmente, tiene 3 alturas porque tenemos 3 vértices
77	John	Bueno, como no aparecen las otras alturas de este triángulo vamos a sacarla, dice que es del vértice al lado opuesto [se posiciona en el segmento CB] está implícita.



78	Alejandro	Está tocando el vértice... Esta perpendicularmente ahí está el ángulo de 90°.
79	John	Es que ahí está la cosa, no está tocando el lado está tocando el vértice.
80	Alejandro	¿Cómo que no está tocando el lado? Ahí lo está haciendo.
81	John	¿Está tocando el lado o está tocando el vértice?
82	D	¿El vértice pertenece al lado o no?
83	Alejandro	Obvio es el lado
84	D	Entonces ¿Cuáles serían las alturas? ¿Una altura?
85	Alejandro	En ese caso sería una...No, están las tres solo que son las mismas.
86	D	¿Cuáles son?
87	Alejandro	Estas 3 [señala los segmentos AC, CN, CB].
88	D	Listo.

89	John	[Mueve el triángulo].
90	D	¿Cuántas alturas tiene?
91	Alejandro	Estas 3.
92	D	¿Esta es una altura? [Señala el segmento CB] ¿Por qué?
93	Alejandro	Porque toca el lado.
94	D	Toca el lado opuesto, pero si toca el lado opuesto ¿ya es una altura?
95	John	No, tiene que ser perpendicular.
96	D	Y ¿Es perpendicular?
97	John	Ahí es donde había dicho porque no era perpendicular. Para solucionarlo hay que empezar desde cero [empiezan desde cero haciendo un triángulo construyendo sus puntos].
98	Alejandro	[Ubica una recta perpendicular en medio del triángulo que pasa por el punto A y mueve un lado hacia la izquierda].
99	John	Sáquele la altura de la recta.
100	Alejandro	[Ubica una recta perpendicular en el punto B] No se puede.

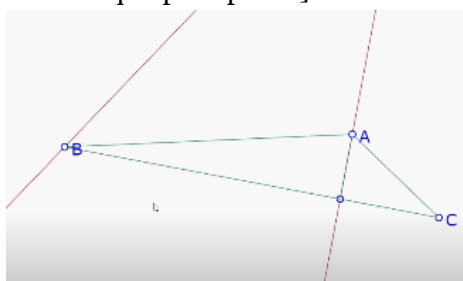


101	D	Recuerden que eso es una condición, que sea perpendicular el lado opuesto, que pase por el vértice, ¿Eso es una perpendicular a qué?
102	John	Lado opuesto al vértice [hace clic en el punto B y selecciona la herramienta perpendicular].
103	D	Pero no solo es una recta perpendicular ¿Qué es?
104	John	Un segmento.
105	Alejandro	¿Por qué un segmento?
106	Alejandro	Porque una recta va de aquí hasta por aquí, lo están diciendo en la definición. Es que ahí estaba el problema que le decía a usted, un segmento es la altura de un triángulo, entonces va desde el vértice del triángulo...
107	John	...hasta el lado opuesto en dirección perpendicular, por eso digo que hagamos del lado opuesto al vértice.
108	Alejandro	Pero eso es una recta no un segmento.
109	D	¿Y el segmento que extremos tendría?
110	Alejandro	Tendría los extremos de B hasta el punto del lado opuesto.
111	D	¿Hasta un punto de acá? [Señala AC] Y ¿Eso es posible?

- 112 John Mejor, acá ¿Dónde está la altura? [Señala la recta perpendicular que pasa por A].

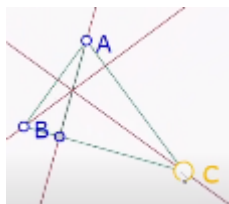


- 113 John Bueno es este segmento.
- 114 Profesor ¿Por qué es ese segmento?
- 115 Alejandro Porque va del vértice al lado opuesto en dirección perpendicular a esta.
- 116 John El segmento va de A.
- 117 Alejandro Al lado opuesto de BC.
- 118 D Pero ¿Por qué lo hicieron justamente ahí?
- 119 John Porque el lado opuesto...
- 120 Alejandro Porque debe tener una dirección perpendicular, en este pedazo marca los 90 grados ahí sería un segmento perpendicular.
- 121 D ¿Y por qué lo hicieron sobre la recta?
- 122 Alejandro Porque la recta al ser perpendicular al lado opuesto y el vértice a partir de eso...
- 123 Profesor Listo, y ahora ¿Para qué hicieron esta recta? [Señalando la recta perpendicular a AC que pasa por B].



- 124 John Eso es lo que no entiendo porque usted dice que la recta es así...
- 125 Alejandro Si va del vértice al lado opuesto [crea una recta perpendicular], entonces lo vamos a hacer acá, el lado opuesto al vértice eso es la altura.
- 126 D ¿La altura es una recta?
- 127 Alejandro No, es un segmento, pero no tenemos un segmento porque la altura está literalmente cortando segmento BC.
- 128 John Entonces la altura sería esta [señala AC].
- 129 Alejandro ¿Por qué?
- 130 John Pues sí, porque como él dijo un punto hace parte de un segmento, técnicamente está tocando el segmento, pero en perpendicular, ahí es donde no entiendo porque hace estas 2 rectas si no tocan el triángulo y no son perpendiculares.
- 131 D ¿Dónde estaría el segmento en caso de que se tenga?
- 132 Alejandro Suponiendo que donde deba estar el segmento...

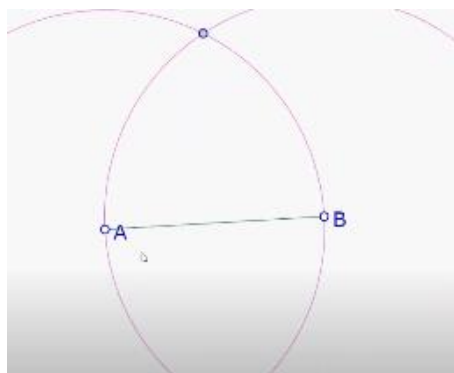
133	John	Ya sé, que esté en línea recta hasta acá.
134	Alejandro	Exacto, pero tiene que ser perpendicular.
135	D	¿Tienen que estar dentro del triángulo?
136	Alejandro	No necesariamente, porque mire que va a pasar si muevo [mueve el punto C hasta que las alturas están dentro del triángulo] ya entran, pero siguen siendo la altura



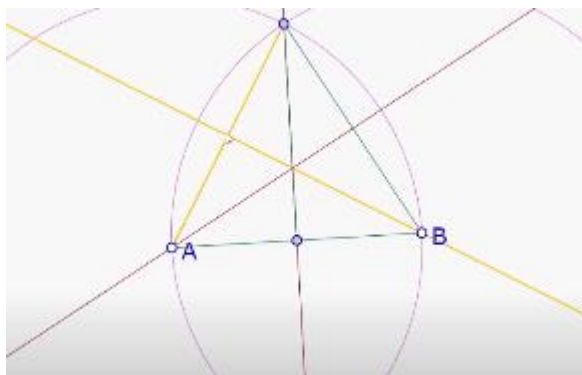
137	John	Pero deja de ser un segmento, pero tengo una idea, hagamos todo con líneas rectas [crean un triángulo usando líneas rectas y líneas perpendiculares], mire ahora sí se ven las alturas.
138	Alejandro	Ahhh sí, pero se supone que tienen que ser segmentos.
139	John	Pues convirtámoslo en segmentos [construyen cada segmento usando de guía las líneas que tenían y las ocultan].
140	Alejandro	Listo ya quedó, sigamos con el siguiente.

2. Dados un segmento AB y un punto P, construir un triángulo ABC, tal que las alturas pasen por P.

141	Alejandro	[Lee el ejercicio].
142	John	[Se construyen el segmento AB].
143	Alejandro	P es el punto de concurrencia ¿Cómo lo hacemos?
144	John	En este sí lo podemos hacer con círculos y no pasa nada para que sea equilátero, los únicos que se tienen que mover son A y B [construye dos círculos, uno con centro en A que pasa por B y viceversa] y aquí saca la intersección [construye la intersección C de los 2 círculos]. [Construye los segmentos AC y BC].

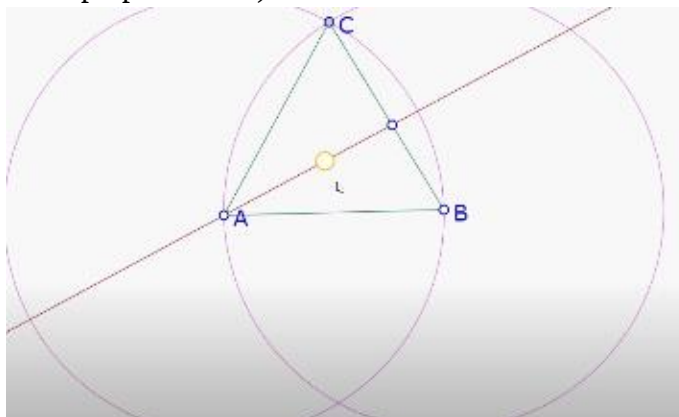


145	Alejandro	Ahora las líneas perpendiculares en cada segmento [construye las rectas perpendiculares a cada lado del triángulo que pasaran por el vértice opuesto].
-----	-----------	--



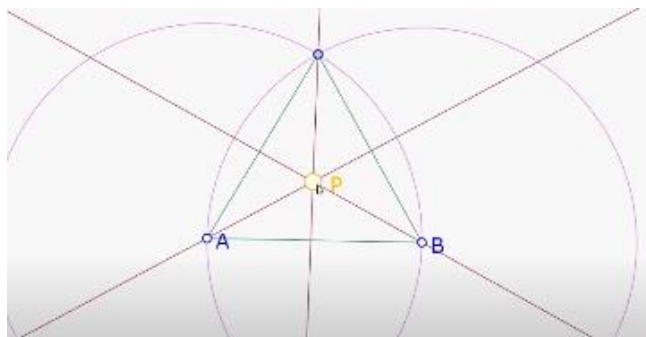
146	John	Ahora trace un segmento.
147	Alejandro	No puedo primero tengo que poner un punto en cada intersección.
148	John	Ah sí, sí, póngalos y haga los segmentos.
149	Alejandro	Ya y ahora pongo un punto ahí [construye el punto P, tal que P es la intersección de todas las rectas perpendiculares].
150	John	¿Ahora qué?
151	Alejandro	Ocultemos esto [oculta las rectas perpendiculares].
152	John	Oculte los círculos.
153	Alejandro	[Mueven el triángulo de un lado] Listo profesor.
154	D	¿Listo? Mueva P.
155	Alejandro	P no se puede mover.
156	John	No se puede mover porque es el punto de intersección.
157	Alejandro	Sí, se tiene que mover porque nos lo están dando.
158	John	No, los únicos puntos que nos dan son el segmento AB, no ve que P depende de donde pasan las alturas.
159	D	Pero como dice su compañero, dados un segmento AB y un punto P como es dado se tiene que mover.
160	Alejandro	Revirtamos el proceso
161	John	¿Espere se puede arrastrar?
162	Alejandro	No.
163	John	[Empiezan de nuevo construyendo los puntos dados A, B y P]
164	Alejandro	Esos son libres.

- 165** John Toca armar un triángulo que las alturas pasen por ese punto, hagámosle con los círculos [borra el punto P y realiza la misma construcción que había hecho antes] (en esta parte se da cuenta que hace lo mismo y solo deja una recta perpendicular).



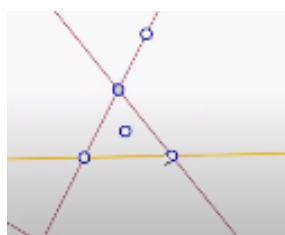
[Construye P sobre la recta perpendicular a uno de los lados].

- 166** D Por ejemplo, ese punto que estás moviendo (estaba moviendo el punto sobre la recta) ¿Es un punto dado?
- 167** Alejandro Sí.
- 168** D ¿Por qué?
- 169** Alejandro Porque puede moverlo.
- 170** D Entonces trate de moverlo aquí [señala la parte inferior derecha de la pantalla] (por donde no pasa la recta).
- 171** John No, porque el solo va en la recta.
- 172** D Bien, un punto dado debe ser un punto libre en el plano.
- 173** Alejandro Yo lo que digo es que haga una recta de P a B.
- 174** D ¿Por qué una recta de P a B?
- 175** Alejandro Porque eso me garantiza que el otro punto sea perpendicular y que el segmento cumpla.
- 176** John [Construye un triángulo equilátero de lado AB y las rectas AP, BP y PC, siendo C el tercer vértice del triángulo equilátero] Listo ahí se está moviendo P, ahí deja de ser perpendicular [mueve P].



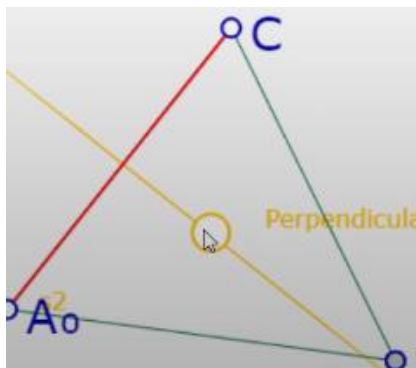
- 177** D ¿Por qué deja de ser perpendicular esa?
- 178** John Porque ya no forma ángulos de 90 grados. ¿No?

179	Alejandro	¿Entonces cómo hacemos eso? Aunque más o menos es así como con rectas porque si tenemos este y este de aquí a aquí este punto va a interseccionar acá. Si hago una recta acá, ahí siempre va a pasar (refiriéndose a que se interseca con CB).
180	John	Pero ya no es perpendicular.
181	Alejandro	No, pero ahora necesitamos formar un segmento que sea perpendicular. Este segmento...
182	John	¿Sabe cómo se podría seguir moviendo? Al punto medio.
183	Alejandro	Pero pues así al punto medio digamos si muevo para acá. [Borra todo y deja los objetos dados y las rectas AP y BP] yo creo que es lo que tenemos, las alturas pasan por ahí, necesitamos formar un punto.
184	D	¿Por qué hicieron 2 rectas?
185	Alejandro	Pues porque hablamos de que si se mueve el punto P esta altura va siempre a aportar perpendicularmente, pero necesito hallar el lado opuesto al vértice para que cumpla la perpendicularidad
186	John	El punto P es libre ¿No? Pero tiene que pasar todas las alturas por el mismo lado, haga de nuevo el triángulo con puras rectas, el punto P va a seguir pasando por todas las alturas. [Se devuelven al ejercicio anterior para hacer un ejemplo] En este punto supongamos que es el punto P ahí no se va a poder mover porque no es libre, pero mi deducción es: si lo hacemos que sea libre y deconstruimos las rectas que van por P...
187	Alejandro	Pues eso es lo que estamos haciendo, pero necesitamos C. ¿Dónde pongo C?
188	John	Lo que yo digo es que forme todos los lados con rectas. ¿Me hago entender?
189	Alejandro	Sí, pero necesitamos C, donde hago una recta para poner C.
190	Alejandro	[Construye dos rectas que pasen por A y B respectivamente y un punto P en dentro del triángulo conformado por A, B y el punto de intersección de las rectas] ya tenemos punto C ahora...

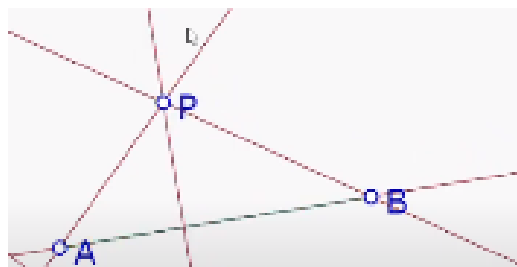


191	Alejandro	Que pasen por ahí y que sean perpendiculares.
192	John	Hagámoslo semiequilátero, trate de ponerlo en el medio (se refiere a P con respecto al triángulo) y trases rectas perpendiculares al punto P [construye las rectas AP, BP y la recta que por P y el punto de intersección de las 2 rectas construidas al principio] Ahora P es libre y pasa por las alturas porque va a ser perpendicular.
193	D	¿Y si mueve el punto P?
194	Alejandro	Cerca de este vértice (acerca P a uno de los vértices).
195	D	Pero que se vean las “alturas”, más arriba.

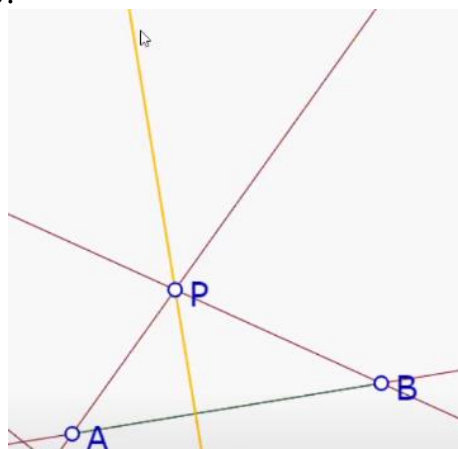
196	John	[Aplica zoom para acomodarlo].
197	D	¿Sí cumple?
198	John	Sí
199	Alejandro	No lo son, ya no son alturas porque no son perpendiculares al lado opuesto [repasa el problema anterior].
200	John	En este caso siempre va a ser la altura porque va en forma perpendicular
201	Alejandro	Ahí cuáles se pueden mover, ¿A y B?
202	John	A, B se pueden mover.
203	Alejandro	Ahora toca hacer lo mismo pero que se mueva el punto P, pero ¿Cómo lo hacemos?
204	John	Me imagino que, si usted traza una recta entre AP, una recta en PB y luego hace una recta así de larga, usted puede formar otro punto acá en C, traza otra recta y técnicamente serían la mitad ahora.
205	D	¿Cuáles son los puntos que tienen dados?
206	Alejandro	A, B y P. Necesitamos un punto que pase por aquí que cumpla la relación de que sean perpendiculares tanto aquí como acá [señala un dibujo realizado en el cuaderno de un triángulo con sus alturas], pero ¿Cómo?
207	John	Qué tal si hacemos esto [construye un triángulo con 2 vértices libres y ubica un punto P perceptivamente en la mitad del triángulo] (en esta parte realiza una recta perpendicular al segmento con extremos en P y A, luego lo borra).



208	D	¿Por qué pasó una perpendicular por ahí?
209	John	Porque trataba de que pasaran por la misma parte (se refiere a que P el vértice estuvieran en dicha recta).
210	Alejandro	Espere, si yo tengo... [Borra la construcción, construye lo dado junto con las rectas AP y BP y construye una recta perpendicular a AB que pasa por P].

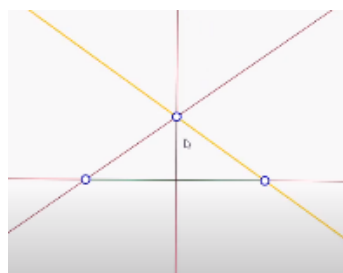


(Apunta perceptivamente donde debería estar C) entonces ahí tengo la tercera altura. ¿No?



211	D	¿Por qué?
212	Alejandro	Porque es del lado opuesto a un vértice, entonces necesito ubicar el vértice, pero ahí ya está, o sea el vértice va a estar colineal con P y el lado opuesto, pero ahí tenemos las 3 alturas.
213	John	Hagamos eso.
214	Alejandro	Ya tenemos al menos un pedacito, tenemos la recta, el punto P, tenemos la otra recta, tenemos el segmento, la perpendicular. Allá tenemos las 3 alturas.
215	D	Si mueves el punto P, ¿Qué pasara? ¿Sigue siendo la altura?
216	Alejandro	Sí.
217	John	Eso es lo que también había pensado.
218	Alejandro	Noventa y bueno acá faltan las del triángulo, pero pues necesitamos hacer el otro punto para que se unan.
219	D	¿Y dónde está el otro punto?
220	Alejandro	El otro punto es colineal, o sea yo sé que está en esta recta (señala la última recta construida) ¿Puede estar en cualquier lado de la recta?
221	John	Si usted pone un círculo y pone un punto... ¿Ese punto es libre no? Si usted forma otros 2 son libres dentro del plano del círculo [construye 2 círculos, uno con centro en A que pasa por B y viceversa]y ahora ponga la intersección ahí [construye la intersección del círculo con centro en A que pasa por B con la recta perpendicular a AB que pasa por P] (en este caso asumen que el punto de intersección es el punto C que están buscando) y así los 3 lados van a ser iguales [construye el triángulo ABC].
222	Alejandro	¿Para qué necesitamos la misma medida?
223	John	Espere, este se supone que es el punto P [arrastra P] pero ahí ya deja de ser altura.
224	Alejandro	Aquí sí es altura [señala la perpendicular a AB que pasa por B], pero las otras ya no, solo serían rectas.
225	John	Sí, si quiere devuélvase bastante.

226 [Borra el triángulo y los 2 círculos].



227 D ¿Por qué creo esas 2 rectas?, las primeras

228 Alejandro Para poder hallar las alturas.

229 D O sea, ¿Esas 2 son alturas?

230 Alejandro No todas, porque la altura es un segmento.

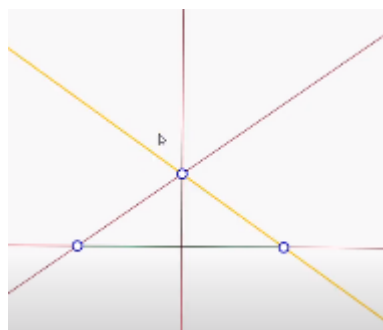
231 D Ok, están contenidas las alturas en esas 2 rectas.

232 Alejandro Mejor dicho, estas 3 rectas contienen las alturas que intentamos buscar.

233 John A lo que yo me refiero es a que eso es lo que yo había hecho, pero le dije que lo hicieran con rectas, porque si usted hace esto el punto P ya va a tener la altura del lado de aquí y aquí (de P al segmento AB), ya va a tener esa altura porque es perpendicular y va a tener la altura del lado opuesto aquí porque es perpendicular al vértice. ¿No?

234 D ¿Más o menos dónde iría el otro lado para que sea perpendicular?

235 Alejandro Por acá [señala dónde debería cortar el lado del triángulo y en qué dirección].



236 D Para que sea perpendicular con...

237 Alejandro Con esta [señala la recta BP].

238 Profesor ¿Tenemos alguna herramienta para crear eso que imagina?

239 John Con un círculo.

240 Alejandro Una recta, un segmento.

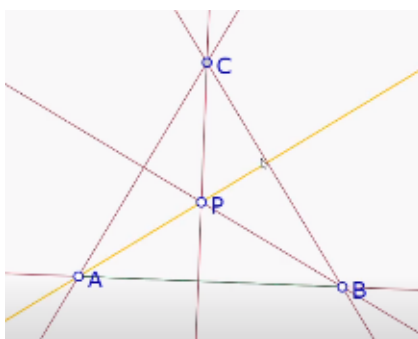
241 John [Construye una recta perpendicular a BP que pasa por A y un círculo con centro en A que pasa por B].

242 D ¿Por qué creó el círculo?

243 John Lo creé más que nada para que este segmento, el que voy a hacer nuevo sea el mismo que este segmento (refiriéndose a que al final crearía un triángulo isósceles en C).

244 Profesor ¿Y ahí puede estar C?

245	John	No, tiene que estar en la recta de P (la recta perpendicular a AB que pasa por P).
246	Profesor	¿Por qué creo la perpendicular?
247	John	Pues porque pensé: si tengo los 3 puntos y yo creo un círculo con centro aquí y aquí, este va a ser el A, suponiendo que el lado que corta con el círculo hay un punto, técnicamente moviera esto es derecho y es perpendicular.
248	D	Para que estuviera en un círculo sería en un triángulo isósceles, y ¿Solo un triángulo isósceles se puede?
249	John	No, tiene que cumplir con cualquier triángulo, esa es la cuestión
250	Alejandro	Y si hacemos esto [construye una recta perpendicular a AP que pasa por B y construye el punto de intersección entre dicha recta y la anteriormente construida].



251	John	Sí cumple.
252	Alejandro	Todas las alturas son perpendiculares, lo que significa que ya está hecho.

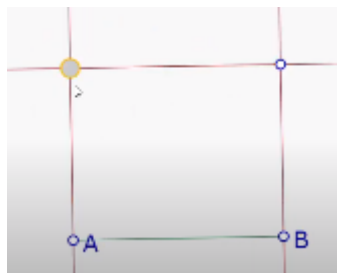
3ra clase

Actividad 2: 1° Secuencia

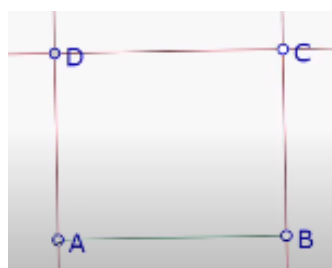
1. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD.

No	Sujeto	Descripción
1	Alejandro	[Lee el problema] Toca crear el rectángulo con círculos para crear ángulos de 90°.
2	John	[Construye el segmento AB] y todos los lados deben dar 40 porque es un rectángulo.
3	Alejandro	90°, con 360° lo que suman.
4	John	Listo, entonces... [Construye una recta perpendicular a AB que pasa por A] así tenemos una [construye una recta perpendicular a AB que pasa por B] y tenemos 2.
5	Alejandro	Y ahora una perpendicular a esa (refiriéndose a la última recta creada).

- 6 John [Construye una recta perpendicular a última recta construida que pasa por un punto cualquiera de dicha recta] y todos forman 90 y lo único que falta es hallar los puntos de cruce [construye el último vértice del rectángulo con la herramienta intersección]

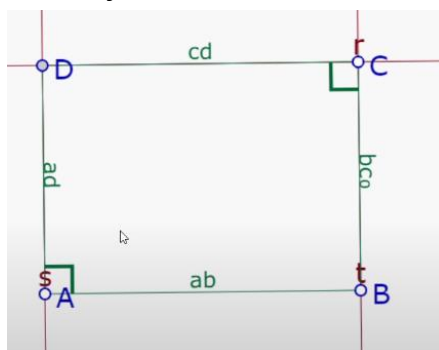


[Nombra los puntos C y D].



7	Alejandro	Pero lo que es dado es AB, C no se puede mover.
8	John	Estos son puntos libres (mueve A y B).
9	Alejandro	Pero C no.
10	John	Pues no (mueve C por la recta BC) pero no pasa nada de todas formas sigue cumpliendo.
11	Alejandro	Pues ya, según lo que dice el problema.
12	D	¿C es libre?
13	John	Sí, C es libre
14	D	Entonces trate de mover C acá [señalando la parte inferior izquierda de la pantalla]
15	John	C no es libre porque depende de B, un punto es libre cuando no depende de nadie.
16	Alejandro	¿Ya es un rectángulo?
17	John	Sí, ya tiene los ángulos de 90 [utiliza la herramienta para medir los ángulos].
18	D	Nombra las rectas que construiste.

19 John Vale [nombra los objetos construidos].



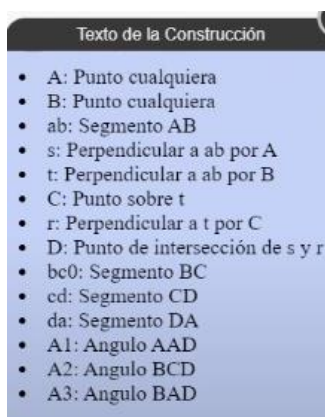
20 D Bien, ahora ¿Cómo garantizan que lo que construyeron es un rectángulo?

21 John Porque todos sus ángulos forman 90° y tiene sus 4 lados.

22 D Vale, ahora dale en mostrar construcción (herramienta para mostrar la secuencia de la construcción).

23 Alejandro [Muestra la descripción de la construcción].

24 D Con los mostrado en la secuencia, como garantizas que es un rectángulo.



25 John [Lee la secuencia de construcción] Bien entonces, hicimos esta perpendicular (refiriéndose a la recta s) porque con esta garantizamos un ángulo de 90° que, por definición de rectángulo, es lo que se debe garantizar. Luego se construyó otra perpendicular a AB que pase por B y eso nos garantiza otro ángulo de 90° .

26 D Listo.

27 John Luego, tenemos que crear un punto C sobre t, y luego construimos una recta perpendicular a C por t y eso nos garantiza los otros 2 ángulos rectos.

28 D ¿Por qué garantiza este ángulo? [Señalando el ángulo BCD]

29 John Porque son perpendiculares.

30 D ¿Y este? [Señala el ángulo ADC]

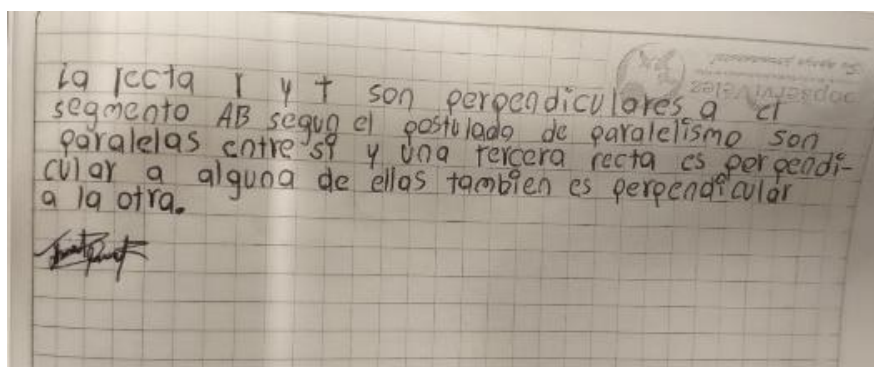
31 John Como sabemos que son perpendiculares, si hacemos cualquier cambio [mueve los puntos dados] se va a mantener. También podemos verificarlo con la herramienta ángulo. Como son perpendiculares y estas

		dos son paralelas, entonces cuando usted traza la perpendicular, va a trazar una recta que corta a las 2 rectas paralelas en un mismo punto y las vuelva a ambas perpendicular.
32	D	Y en el documento ¿Dónde podemos encontrar la regla teórica que me está diciendo?
33	Profesor	(Dirigiéndose a toda la clase) Vamos a hacer la construcción paso a paso.
34	John	Primero se hace el segmento AB.
35	Profesor	Primero, A punto cualquiera, segundo B punto cualquiera [dibuja cada objeto en el tablero] tercero.
36	Clase	S ₁ Segmento AB.
37	Profesor	Cuarto.
38	Clase	r ₁ perpendicular a s ₁ por A.
39	Profesor	Viene la primera pregunta, ¿Por qué trazamos esa recta r ₁ perpendicular al segmento AB por A?
40	Clase	Para que se cumpla la propiedad del rectángulo que los ángulos sean de 90°.
41	Profesor	¿Por qué se necesita que los ángulos sean de 90°?
42	Alejandro	Por la definición.
43	Profesor	¿Cuál definición?
44	Alejandro	La de rectángulo.
45	Profesor	¿Alguno puede leer la definición de rectángulo?
46	Clase	[Uno de los estudiantes lee la definición].
47	Profesor	Si un cuadrilátero es rectángulo entonces...
48	Clase	Tiene sus ángulos rectos.
49	Profesor	Fíjense que estamos usando una proposición, una relación de causalidad para obtener ángulos rectos a partir de perpendiculares, gracias a una proposición de la forma si-entonces que es una regla teórica, que en este caso es una definición. Quinto...
50	Clase	Es que se puede hacer de varias formas.
51	Profesor	Se puede hacer de varias formas, vamos a hacer todos una misma ¿Les parece?
52	Clase	r ₂ perpendicular a s ₁ por B.
53	Profesor	¿Para qué esa recta?
54	Clase	Para lo mismo.
55	Profesor	Para que un segundo ángulo del cuadrilátero sea rectángulo, porque no solo basta con un ángulo. ¿No?
56	Clase	Todos los ángulos.
57	Profesor	Sexto.
58	Clase	Una paralela al segmento.
59	Profesor	¿Por qué una paralela?
60	Clase	Para que sea perpendicular.
61	Profesor	¿Por qué si quiero una perpendicular no construyo directamente una perpendicular? Ahora, trazamos una...
62	Clase	Perpendicular.
63	Profesor	¿Y por dónde?

64	Clase	Por cualquier punto de la recta.
65	Profesor	Primero pongamos un punto C ¿Dónde?
66	Clase	En cualquiera.
67	Profesor	¿En cualquiera?
68	Profesor	¿Para construir un rectángulo ABCD puedo ponerlo en cualquiera en r_1 o r_2 ?
69	Clase	No, en r_2 .
70	Profesor	Bien, ahora ¿Qué hago?
71	Clase	r_3 perpendicular a r_2 por C.
72	Profesor	¿Y qué garantizo con eso?
73	Clase	Que el tercer y el cuarto ángulo sea recto.
74	Profesor	Nombremos el punto de intersección D. Ahora ¿Qué es lo que estamos buscando?
75	Clase	Ángulos rectos.
76	Profesor	¿Qué es lo que garantizo con esta perpendicular?
77	Clase	Que el tercer y cuarto ángulo sean rectos.
78	Profesor	Si es perpendicular a r_2 ¿Que ángulo sería recto?
79	Clase	BCD.
80	Profesor	Vamos a repasar, ¿Este ángulo es recto? [Señala el ángulo BAC]
81	Clase	Sí.
82	Profesor	¿Por qué?
83	Clase	Por la perpendicular.
84	Profesor	¿Cuál perpendicular?
85	John	Porque r_1 es perpendicular al segmento.
86	Profesor	Bien, ¿Este ángulo es recto? [Señala el ángulo ABC].
87	Clase	Sí
88	Profesor	¿Por qué?
89	Clase	Porque r_2 es perpendicular a s_1 .
90	Profesor	¿Es este recto? [Señala el ángulo BCD].
91	Clase	Sí.
92	Clase	Porque r_2 y r_3 son perpendiculares.
93	Profesor	¿Es este ángulo es recto? [Señala el ángulo CDA]
94	Clase	Sí
95	Profesor	¿Por qué?
96	Clase	Porque r_1 y r_3 son perpendiculares
97	Profesor	¿Dónde está eso dicho? (Como no se construyó directamente una perpendicular sobre r_1 , no aparece esa acción en el protocolo de construcción).
98	Clase	Dicho no está, pero se puede inferir.
99	Profesor	Hemos solicitado que tres ángulos sean rectos porque hemos solicitado explícitamente que 3 rectas sean perpendiculares, pero, hay un cuarto ángulo del que no hemos solicitado que sea recto y tampoco hemos solicitado que sean perpendiculares esas rectas, entonces ¿Cómo vamos a garantizar que si es recto?
100	Clase	Porque es el punto de intersección de dos perpendiculares.

101	Profesor	Y cómo va a garantizar que son perpendiculares.
102	Clase	Porque r_1 y r_2 son paralelas.
103	Profesor	¿Y qué tiene que ver que r_1 y r_2 sean paralelas?
104	Clase	Que la que se cree va a ser tanto perpendicular a r_1 como a r_2 .
105	Profesor	¿Cómo llego a que las rectas son perpendiculares?
106	Profesor	¿Cómo hemos garantizado las propiedades de las que hemos venido hablando?
107	Profesor	Usando...
108	Clase	Definiciones.
109	Profesor	Reglas teóricas que en este caso son...
110	Clase	Definiciones.
111	Profesor	¿Qué definición usamos?
112	John	Definición de rectas perpendiculares.
113	Profesor	Lean la definición.
114	John	Si dos rectas son perpendiculares, entonces todos sus ángulos son rectos.
115	Profesor	Estamos usando las definiciones, pero no solo tenemos definiciones, tenemos otras relaciones de causalidad, entonces, les propongo el ejercicio de garantizar que este ángulo es recto [señala el ángulo CDA] usando las relaciones de causalidad que están en el documento. Háganle.
116	Alejandro	[Mira la secuencia de construcción] Yo no puedo decir que como esta es perpendicular a esta y esta es perpendicular a esta [señalando AB con BC y luego BC con CD].
117	John	Por consiguiente, esta es perpendicular [señalando el ángulo ADC].
118	D	Y donde lo podemos encontrar en el documento, recuerden que necesitamos la regla teórica.
119	Alejandro	[Busca en el documento] Mírela, postulado de perpendicularidad y paralelismo.
120	John	[Lee el postulado].
121	Alejandro	A pues ahí está el inicio, si 2 rectas son perpendiculares la otra.
122	John	Son paralelas.
123	D	¿Cuáles rectas?
124	Alejandro	Sí, t es perpendicular a s.
125	D	¿Dónde está eso en la secuencia de construcción?
126	Alejandro	¿Yo puedo decir esto? Si r y t son perpendiculares a esta [señalando AB] entonces son paralelas
127	John	Si, esa es la primera. Y si dos rectas son paralelas y una tercer es perpendicular de ellas entonces esta también es perpendicular a la otra y eso garantiza que es un ángulo de 90° .
128	Alejandro	Espere, más justificado [muestra la secuencia de construcción]
129	John	Estas dos rectas, la recta r y la t son perpendiculares a AB, entonces si estos 2 son perpendiculares entonces son paralelas.
130	D	¿Por qué?
131	Alejandro	Por postulado de perpendicularidad y paralelismo.

132	John	Entonces, cuando dos rectas son paralelas y una recta s es perpendicular a una de ellas, como estamos viendo s es perpendicular a r , a una de esas. Eso quiere decir que entonces s es perpendicular a t , a la otra.
133	Alejandro	¿Y ya?
134	John	Sí, eso garantiza que sea de 90°
135	D	Listo, ahora escriban lo que realizaron
136	John	(Lo escrito por John fue lo siguiente).

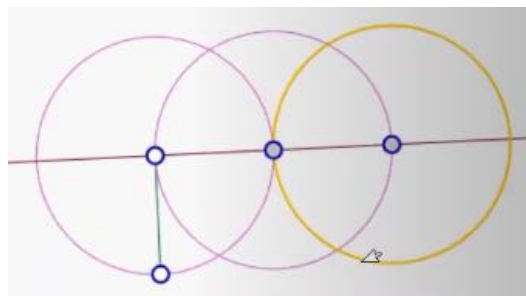


4ta Clase

4. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $BC=3AB$.

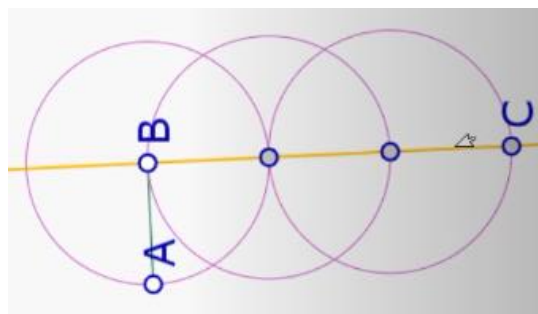
No	Sujeto	Descripción
1	Alejandro	[Lee la tarea].
2	John	Eso se hace con círculos para sacar el triple.
3	Alejandro	Tiene que ser un lado.
4	John	Un centro en B.
5	Alejandro	Y tiene que ser rectángulo, o sea que debe tener ángulos rectos.
6	John	Hay que dejar un rectángulo.
7	Alejandro	Tengo este segmento, ¿Qué puedo hacer?, puedo hacer una circunferencia con centro en alguno de los 2 (refiriéndose a los puntos dados) y ahí puedo sacar una recta perpendicular.
8	John	Voy a hacer un círculo para sacar el triple [construye el segmento dado sin nombrar los extremos].
9	Alejandro	Yo hice esto [construye un círculo con centro en B que pasa por A] le puse una recta perpendicular [construye una recta perpendicular a AB que pasa por B]
10	D	¿Por qué una recta perpendicular?

- 11 Alejandro Para que quede el ángulo recto [construye el punto de intersección entre el círculo y la recta perpendicular], entonces de ahí saco otro círculo que sería de aquí [señalando el punto de intersección construido] hasta este punto [indica B]. Ya hay el doble y otro círculo, eso es lo que llevo.



- 12 John Eso es lo que yo dije.

- 13 Alejandro Y acá el punto C, y nombrémoslos [nombra cada punto creado]

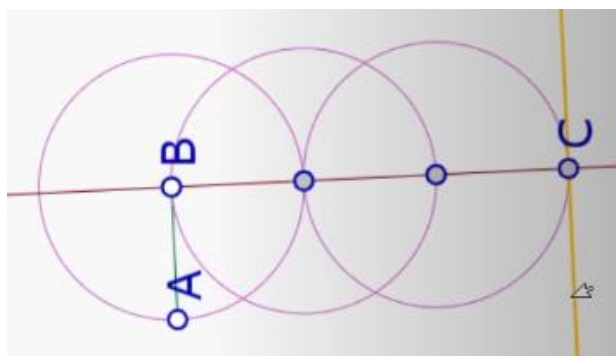


- 14 D ¿Cómo garantizamos que es el triple?

- 15 Alejandro Por los círculos, porque de aquí a acá es lo mismo que de aquí a acá [señalando los radios]

- 16 John Esta medida de acá es el radio entonces cualquier punto que pase por la circunferencia al centro va a tener la misma medida.

- 17 Alejandro Entonces acá puedo sacar otra perpendicular a este [construye una recta perpendicular a BC que pasa por C] y de ahí puedo sacar...

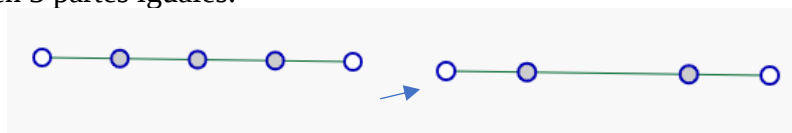


- 18 John Pues perpendicular es hasta allá, pero son paralelas, aunque también puede sacarla de ahí, pero es mejor así

19	Alejandro	Pero que pasen por este punto [construye una recta perpendicular a la última recta creada que pase por A]
20	John	Listo ya, ahora trace el polígono y listo ese es el triple
21	Alejandro	[Traza el polígono con la herramienta]
22	John	Listo
23	Alejandro	¿Mido?
24	Profesor	¿Hay necesidad de medir?
25	Alejandro	No, porque es paralela, círculos, igualdades.
26	John	Pues sí, pero para confirmar digamos si son de verdad entonces... ya con los círculos uno ya sabe que son 3 veces.
27	Alejandro	¿Entonces ya?
28	John	Ya, siguiente ejercicio.

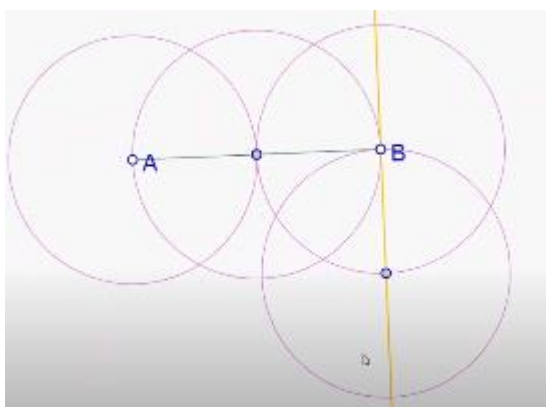
5. Dado un segmento AB, construir un rectángulo ABCD, tal que $2BC=3AB$

29	Alejandro	[Lee el problema]
30	John	Ya sé cómo, BC tiene que ser el tercio de eso ¿Sabe cómo se hace?
31	Alejandro	Sí
32	John	Agarra un punto, punto medio y...
33	Alejandro	Punto medio y círculos... punto medio y ahí otro punto medio y círculos. ¿No? (Estaban resolviendo el problema en el cuaderno).
34	John	Entonces hacemos 2 puntos libres, A y B. ¿No? Trazando punto medio ya tenemos la mitad.
35	Alejandro	Sí, porque es la mitad de la mitad.
36	D	¿La mitad de la mitad es un tercio?
37	John	Sí, porque tenemos un segmento y si lo partimos en tres partes, ah no aquí no se ha partido en tres partes, se ha partido en cuatro partes.
38	Alejandro	Pero eso es como el que hicimos del isósceles ¿Recuerda? Que era el doble, pero digamos si yo paso el 2 allá lo pasa a dividir, sería 1,5 de AB.
39	John	Como sacar... AB tiene que ser 3 veces más pequeño que CA.
40	D	Me puedes explicar que obtienen al pasar el 2.
41	Alejandro	Que tengo 2AB que es igual a 3BC. ¿No? Pues al segmento AB sería igual a 3BC sobre 2, vamos a despejar es BC porque necesitamos encontrarlo.
42	D	¿2AB es igual a 3BC?
43	Alejandro	Ay sí que pena, pero más o menos lo tengo, $2BC=3AB$.
44	John	Vea, así sí daría la distancia, usted traza el punto medio y pasa un segmento de acá a acá, traza otro punto medio, y pasa un segmento de acá a acá y traza otro punto medio y borra la del centro y ya está partida en 3 partes iguales.

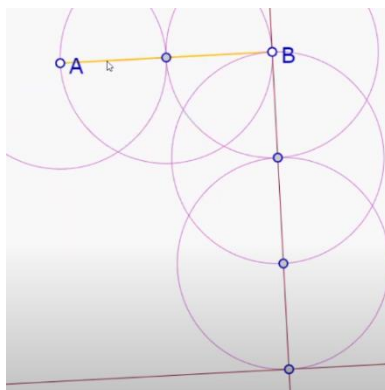


45	Alejandro	Espere, si de aquí a aquí es igual y de aquí a aquí es igual y está diciendo que quita esto este sería más grande que estos de aquí.
46	John	Hagámoslo con cuadritos, vea tenemos 4 cuadritos, si los partimos ¿Cuánto nos queda?, 2 y 2 para cada lado, ah no, sí.
47	D	Muestre cómo vamos, entonces nos dice que BC... y ¿Por qué despejó BC y no AB?
48	Alejandro	Porque necesito buscar solo estas 2...
49	John	Estamos cometiendo un error, quizá no estamos leyendo bien esto. [Leen de nuevo el ejercicio], yo había leído la de arriba.
50	John	Qué pasa si usted coge un segmento, ¿Se acuerda cuando hicimos aquí los círculos? Usted lo agrando 3 veces y está partido en 3 partes iguales, báse en eso, aquí están partidos en 3 partes iguales, si lo aumentamos en 3 partes iguales, si solamente cogemos una básicamente cumpliría con la condición, ¿Me hago entender?
51	Alejandro	Sí.
52	John	Mire, por ejemplo, se supone que estamos tratando de que al partir una recta queden 3 partes iguales, para decir 2 veces BC es el triple de AB... ¿Pero si construimos el triple de AB primero?
53	Alejandro	Pues eso estoy haciendo acá, el triple estoy haciendo... y saco la mitad.
54	John	¿Ahora cómo construimos anteriormente el triple?
55	Alejandro	Con 3 círculos
56	D	¿Por qué le sacaste la mitad? Entonces triplicaste AB, así que ya lo sabes hacer, ¿Cómo le sacas la mitad?
57	Alejandro	Con punto medio.
58	D	Entonces tratemos de hacer este, pero en otra pestaña porque es otro ejercicio.
59	Alejandro	Es que no sé dónde poner el centro, es que eso es lo que no sé, así que haré un círculo para que me de esta medida. Ah pues lo concentro que pase por acá digamos como así, que pase por acá creo yo, no sé [construye un segmento AB].
60	Alejandro	Entonces AB y como es la mitad, entonces acá sería una recta perpendicular a este punto. ¿No? Si le saca un punto que pase por acá en el punto medio.
61	D	Recordemos que es el rectángulo ABCD.
62	Alejandro	Vale [construye un círculo con centro en A que pasa por el punto medio de AB].
63	Alejandro	¿1.5 dijimos? O sea sería el segmento y la mitad de ese.
64	Profesor	Sí.
65	Alejandro	Es el segmento, el punto medio y la mitad, ¿Me hago entender?
66	John	Sí, la mitad del segmento... eso fue lo que dije.
67	Alejandro	Súmele la mitad y ya.
68	John	Mitad del punto AB.
69	Alejandro	Segmento. Espere borremos esto [borra los círculos].

70	John	Quitemos la mitad del segmento.
71	Alejandro	Haga un punto ahí, que pase por el punto medio.
72	John	¿Y ese círculo para qué? Ya tenemos AB, ahora como sabemos tenemos que hallar BC entonces...
73	Alejandro	BC es este mismo segmento más 1.5.
74	John	Pero vea, es partir AB, y esto hacerlo 3 veces [construye el círculo con centro en B que pase por el punto medio de AB].
75	Alejandro	Ya tenemos medio, ahora 2 hacia abajo
76	John	No, todavía no. Falta un segmento mas
77	Alejandro	Ah, cruce una perpendicular que pase por B [construye una recta perpendicular a AB que pasa por B] y de aquí a allá tenemos medio (refiriéndose del punto B al punto de intersección entre la recta perpendicular y el último círculo construido), y haga otros 2 círculos para hacer el completo.
78	John	¿Aquí?
79	Alejandro	Ahí punto, medio.
80	Profesor	Aquí tenemos medio de este segmento.
81	Alejandro	Ahora necesitamos otro completo, añadírselo y ya.
82	John	¿Añadirlo a esta mitad?
83	Alejandro	No, no, no ya tenemos medio ahora añadirle el completo, o sea haga otros 2, de aquí a acá [construye un círculo con centro en la intersección que pasa por B].



- 84** Alejandro Ya tenemos la unidad, ahora nos falta hacerle medio, otro punto aquí [construye el punto de intersección entre la recta y el último círculo construido], otro círculo. Entonces ya tenemos unidad y medio. Haga otro punto [punto de intersección entre la recta y el último punto construido] y una perpendicular a la recta [construye una recta perpendicular a la recta que pasa por el último punto de intersección construido].



85	John	Yo había pensado otra manera de hacerlo.
86	Alejandro	Pues trate de hacerlo en otra pestaña.
87	John	[Construye una recta perpendicular a la última recta construida que pasa por A].
88	Profesor	¿Cómo garantiza que la construcción cumple las condiciones?
89	Alejandro	Pues porque 2 veces este es 3 veces este por el despeje que hice el...
90	John	Sí, ya está bien.
91	Alejandro	Marque el polígono.
92	John	Listo.

2° Secuencia

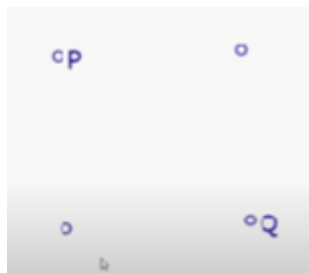
Tarea experimental: Siga los siguientes pasos

1. Ubique dos puntos P y Q fijos.
2. Ubique un punto R cualquiera y halle la medida del ángulo PQR. (No nombre al punto)
3. Arrastre el punto R hasta que el ángulo PQR aproximadamente sea de 90° .
4. Oculte la medida del ángulo PQR.
5. Repita desde el paso 2.

No	Sujeto	Descripción
93	Profesor	Vamos a hacer la siguiente exploración [escribió todos los pasos en el tablero]
94	John	[Ubica los puntos P y Q y un punto R que no lo nombra, halla la medida del ángulo] Ahora toca medir el ángulo [halla la medida del ángulo]
95	Alejandro	Ahora arrastrar el punto R hasta...
96	John	Sea igual a 90° [arrastra el punto Q].
97	Alejandro	R, el punto R.
98	John	[Mueve el punto R]
99	Alejandro	Ese, hasta que dé 90° .
100	John	Tiene que estar alineado perpendicularmente.
101	Alejandro	Pero no podemos construir nada.
102	John	Toca mucho pulso.
103	Profesor	¿Por qué?
104	Alejandro	Toca arrastrarlo hasta que de 90° .
105	Profesor	¿Ahí dice hasta que dé 90° ?
106	Alejandro	Se aproxime.
107	John	[Mueve el punto R hasta que el ángulo se aproximó a 90°].



108	Alejandro	Borre el ángulo sin borrar el punto y repita el paso del 2 al 5.
109	John	Bueno [construye otro punto libre y lo arrastra] listo, ahí está aproximado



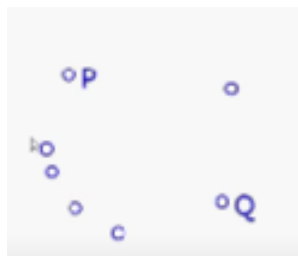
110	Alejandro	Y ¿Ahora qué? Son solo 2 puntos
111	John	Ahora el siguiente paso
112	Alejandro	Y repita todo nuevamente... ¿Cómo así?
113	John	¡Hasta encontrar una estrategia!
114	Alejandro	¿Cuántas más quieres que haga?

115	Alejandro	Pues puedo ponerlos todos de aquí para allá [indicando con el dedo la línea que forma ambos puntos R], pues que se aproxime a 90° hay muchos pero que den exactamente 90° solo hay 2.
116	D	Ubique un punto cerca de P, ¿Es posible que se puede formar un ángulo de 90° ?
117	Alejandro	[Construye otro punto libre y sigue las indicaciones].

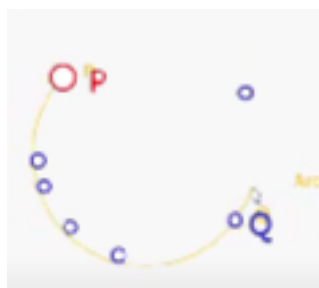


Oiga sí, es que es PRQ, pensé que era PQR.

118	Alejandro	[Construye los puntos en un cuaderno] ya lo vi, es con un círculo.
119	Profesor	El objetivo es que escriban una relación de causalidad, es que escriban una proposición de la forma...
120	Alejandro	Si-entonces.
121	John	[Realiza más puntos R y los acomoda para que el ángulo PRQ se aproxime a 90°]

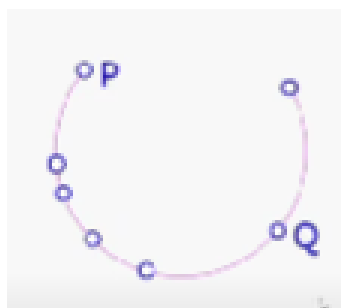


122	Alejandro	¿No se puede hacer un semicírculo? De ahí a ahí [señala P y Q]
123	John	También pensé en semicírculos [utiliza la herramienta para construir un arco de circunferencia].



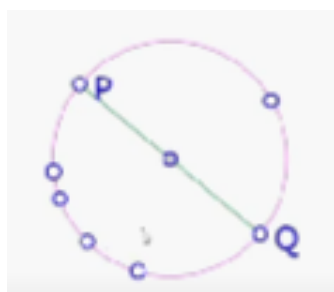
124	D	¿Sí es una semicircunferencia? ¿Qué pasaría con el punto que está fuera?
-----	---	--

- 125 John [Construyen un arco hasta el punto por el cual preguntó D]



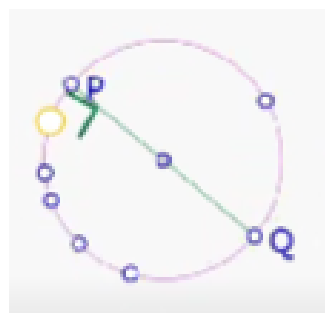
- 126 Alejandro Es un círculo completo, pero ¿Cómo hacemos un círculo solo con puntos? Tocaría sacar el punto medio y salió

- 127 John [Construye el punto medio de PQ y un círculo con centro en el punto medio que pasa por Q] Pero no todos los puntos pasan por el círculo



- 128 Alejandro Porque son aproximaciones, construya un punto en la circunferencia y mida el ángulo.

- 129 John [Halla la medida del ángulo y arrastra el punto sobre la circunferencia] ¡Ay sí! Nos dio un ángulo recto.



- 130 D ¿Esos son todos los puntos que pide el problema?

- 131 Alejandro Usted puede llenar toda la circunferencia de puntos si quiere.

- 132 D Entonces ¿Cuántos puntos hay?

- 133 Alejandro Infinitos.

- 134 D Faltaría escribir la relación causal.

- 135 Alejandro O sea, siempre va a formar un ángulo recto.

- 136 John Porque forma un triángulo.

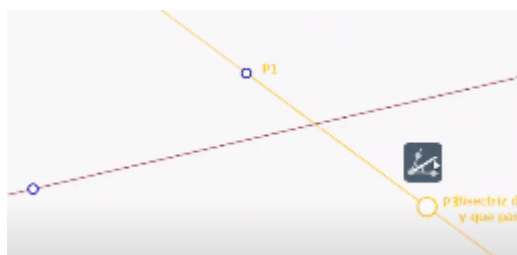
137	Alejandro	¿Un triángulo?
138	John	Espera, lo que tengo hasta ahora es que, si en un círculo se crea un punto cualquiera...no, si en un segmento se crea una circunferencia tal que esta tenga... No, así no. Si en segmento se crea el punto medio y de este se crea una circunferencia que pase por los extremos del segmento cualquier punto de la circunferencia con la relación al ángulo será de 90° .
139	D	Ahí puedes formar el triángulo como habías dicho.
140	John	Pues lo que había dicho que podemos formar esto [construye el triángulo conformado por los puntos P, Q y un punto sobre la circunferencia].
141	Alejandro	Se forma un triángulo rectángulo.
142	D	Podrían utilizar eso para realizar la relación causal.

5ta Clase

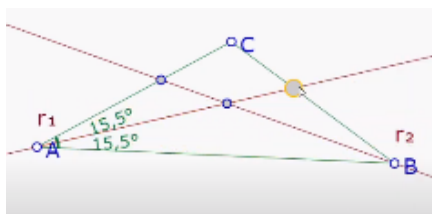
3° Secuencia

1. Dadas dos rectas r_1 y r_2 , construir un triángulo ABC tal que la bisectriz del ángulo BAC esté contenida en r_1 y la bisectriz del ángulo ABC esté contenida en r_2

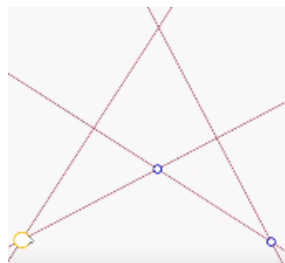
No	Sujeto	Descripción
1	Alejandro	[Lee el problema y comienza a hacerlo en el cuaderno] ya, ya lo hice (realizó un triángulo con sus bisectrices)
2	John	¿Ya?
3	Alejandro	En la hoja.
4	D	¿Qué es la bisectriz?
5	Alejandro	Parte un ángulo en dos ángulos iguales
6	D	¿Qué parte el ángulo?
7	Alejandro	Una recta.
8	John	Una semirrecta, que es eso si no tiene fin, no tiene que ir directamente al lado opuesto.
9	Alejandro	[Construye 3 puntos libres y dos rectas con la herramienta bisectriz] y ahí está [construye el triángulo con los 3 puntos libres].



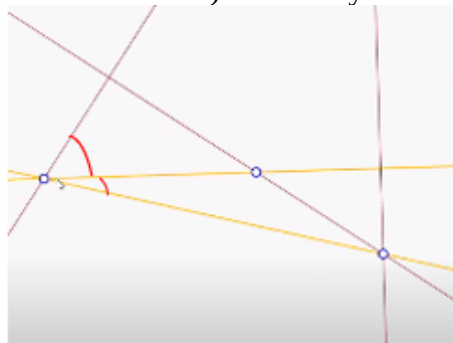
10	Alejandro	[Nombra los puntos libres como A, B y C] y podemos medir para probar [mide los dos ángulos resultantes de la primera bisectriz construida].
----	-----------	---



11	D	¿Las rectas son dadas?
12	John	¿Cómo construyó las rectas?
13	Alejandro	Con la bisectriz, si son dadas por que se pueden mover [mueve el punto A] (como r1 es bisectriz del ángulo CAB se mueve también).
14	D	Mueva r1.
15	Alejandro	[Mueve r1] se mueve también r2, está mal. Hagámoslo bien [construye dos rectas r1 y r2 y mueve r1] (nota que no se mueve r2) Ah solo se mueve... ya entiendo ¿Cómo lo hacemos? Entiendo que esta recta es la bisectriz del ángulo.
16	John	Parte el ángulo.
17	Alejandro	¿Qué más?
18	John	Debe haber 2 puntos que se corten [construye una perpendicular a r1 y otra a r2].

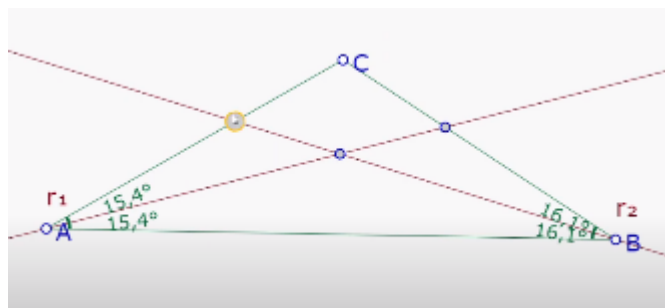


19	Alejandro	Pero necesitamos que sean bisectrices.
20	John	Y ahora sí podemos marcar el triángulo.
21	Alejandro	Pero no cuadra, acá tengo que ajustar para que el ángulo de aquí sea igual al de acá, mire si lo muevo acá este es más grande que este (refiriéndose a los 2 ángulos que forma la recta r1) entonces ya no es bisectriz.



22	John	Sí, bueno y si lo hacemos con punto medio [realiza un dibujo de las bisectrices de un triángulo] ahí vemos que pasa por el punto medio.
----	------	---

- 23 Alejandro Veamos acá [abre el historial de construcción para abrir la primera construcción]. Midamos, no, eso no es punto medio.

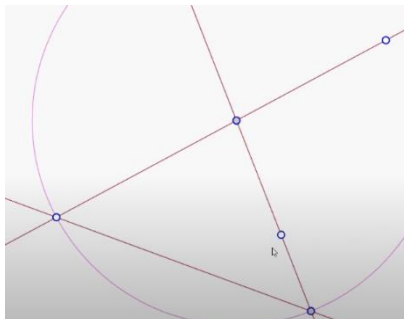


24	John	Entonces debemos encontrar el baricentro, recuerda que la medida de aquí a acá ¿Es el triple?
25	Alejandro	Eso es para las medianas, más no para las bisectrices.
26	John	[Hace un dibujo en el cuaderno] es que esta línea divide el triángulo en 2, porque así tendría un triángulo con la medida de los ángulos iguales.
27	Alejandro	¿Qué hay que garantizar?
28	John	Que si yo hago el mismo triángulo aquí y aquí [señalando el dibujo] me va a dar estos ángulos.
29	Alejandro	Pues solo le va a dar un ángulo igual
30	Profesor	[Se dirige a toda la clase] Vamos a hacer una pausa ¿Qué hacemos primero?
31	Clase	Dos rectas.
32	Profesor	¿Por qué dos rectas?
33	Clase	Porque son los objetos dados.
34	Profesor	Y para resolver el problema ¿Qué hicieron primero?
35	Alejandro	Un dibujo con el problema resuelto.
36	Profesor	Noten que, a pesar de que yo no tenga la construcción, yo sí puedo tener un dibujo de la solución, ¿Cierto? ¿Cuál sería el dibujo de la solución? ¿Qué dibujo?
37	Clase	Un triángulo ABC luego su bisectriz del ángulo BAC y luego la bisectriz del ángulo ABC.
38	Profesor	Un triángulo con dos de sus bisectrices, eso lo podemos dibujar a pesar de que no tenemos la solución del problema, esa es una estrategia muy útil cuando trabajamos problemas de construcción porque me permite abstraer, a partir el dibujo, propiedades que necesito garantizar. Ahí viene la primera pregunta ¿Qué propiedad debo garantizar?
39	Clase	Ángulos congruentes.
40	Profesor	¿Qué caracteriza a la bisectriz?
41	Karina	Que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
42	Profesor	Entonces lo que necesito garantizar es la congruencia de dos ángulos. Entonces viene la otra pregunta, ¿De qué manera garantizamos las propiedades de construcción?
43	Alejandro	Con las definiciones.

44	Profesor	Con las definiciones, postulados y hace falta uno que aún no hemos mencionado, pero pronto mencionaremos, teoremas. Y esa es la manera como garantizamos las propiedades, porque yo noto que están haciendo objetos, cosas arbitrariamente sin ningún control. Vamos a hacer una especie de árbol para cada propiedad que necesitemos garantizar. Entonces lo primero que necesito es que esa recta sea bisectriz de un ángulo, para llegar a que la recta es bisectriz necesito una propiedad ¿Qué propiedad?
45	Clase	Congruencia de ángulos.
46	Profesor	Ángulos congruentes, y aquí utilizo una regla teórica, ¿Cuál regla teórica?
47	Clase	Bisectriz de un ángulo.
48	Profesor	La definición de bisectriz, esa es la forma en como garantizamos las propiedades. La regla teórica tiene unas condiciones, antecedente y nos dan un consecuente. Y ahora viene la otra pregunta ¿Qué herramienta teórica me permite garantizar que dos ángulos son congruentes? Aquí está el problema, tengo que encontrar esa regla teórica y una vez encuentro esa regla teórica, posiblemente encuentre más de una, me tengo que preguntar con cuál me voy a quedar y eso depende de las condiciones de esa regla teórica. Sigán.
49	John	[Leen el documento] qué tal teorema del triángulo isósceles.
50	Alejandro	Y ¿Por qué no círculo?, porque si yo construyo un triángulo equilátero tendrá todos sus ángulos congruentes
51	Profesor	Y ¿Qué regla teórica le garantiza eso?
52	Alejandro	La definición de triángulo equilátero [busca en el documento]
53	Profesor	De triángulo equilátero es que sus 3 lados son iguales.
54	John	Equiángulo.
55	Alejandro	Pero si es un triángulo es equiángulo debe ser obligatoriamente equilátero. ¿No?
56	John	¿Es que no se puede resolver con cuadrado? Porque todos sus ángulos son rectos y por ende congruentes.
57	Alejandro	[Realiza un dibujo en cuaderno] pero solo sería para ángulos de 90°.
58	John	Que otros teoremas garantizan ángulos congruentes
59	Alejandro	Con paralelas [señalando el postulado de perpendicularidad y paralelismo].
60	John	Y si es este, con triángulos congruentes [leen la definición] es que a eso iba con el cuadrado [dibuja un cuadrado] si usted lo parte aquí [traza la diagonal] estos dos triángulos van a ser congruentes.
61	Clase	(En la clase empieza la discusión acerca de que regla teórica usar para asegurar ángulos congruentes, un estudiante menciona el teorema del triángulo isósceles).
62	Profesor	¿Qué dice el teorema del triángulo isósceles?
63	Clase	[Leen el teorema del triángulo isósceles].
64	Profesor	Acá tengo congruencia de ángulos si los lados opuestos son congruentes. ¿Podríamos pensar esos dos ángulos en los que la bisectriz divide al ángulo BAC como dos ángulos de un triángulo? ¿Es posible que esos dos

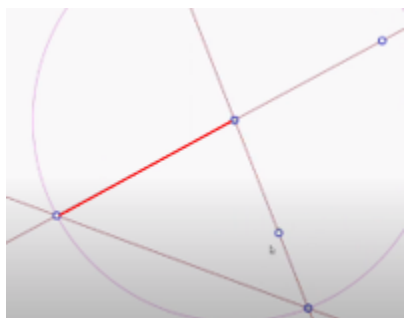
		ángulos sean los dos ángulos de un triángulo donde los lados opuestos a ellos son congruentes?
65	Clase	No, porque dice dos lados opuestos. Porque el ángulo está en el mismo lado.
66	Clase	(Alguien comenta algo en clase, es inaudible).
67	Clase	Porque el ángulo congruente va a ser al lado opuesto, o sea cada lado va a tener su opuesto, y no va a ser el mismo del siguiente lado. O sea, cada lado tiene su ángulo opuesto, y dice que son 2 lados congruentes y los respectivos ángulos opuestos a esos lados son los ángulos que van a ser congruentes, los respectivos ángulos nunca van a ser el mismo.
68	Profesor	Cómo es de difícil decir las cosas. Voy a tratar de decir lo que usted me está queriendo decir con otras palabras. No es posible que dos ángulos opuestos de dos lados de un triángulo queden adyacentes. Entonces, no toda regla teórica que concluya lo que quiero me funciona. Continúen.
69	John	Toca leer, quiero probar el postulado de congruencia LAL.
70	D	¿Por qué?
71	John	[Lee el teorema]
72	Profesor	¿Postulado de congruencia LAL? ¿Qué nos dice la conclusión?
73	Clase	Triángulos congruentes.
74	Profesor	Y ¿Qué necesito?
75	Clase	Ángulos congruentes
76	John	No, entonces esa no.
77	Clase	(Empieza una discusión acerca de que regla teórica usar para asegurar ángulos congruentes, un estudiante menciona la definición de triángulos congruentes).
78	Profesor	Ahora tenemos que garantizar triángulos congruentes.
79	Clase	Ahora sí los postulados
80	John	El postulado LAL.
81	Profesor	Ese es uno, son 3.
82	Clase	Postulado de congruencia ALA.
83	Profesor	Voy a garantizar con congruencia de triángulos, y ahora voy a garantizar congruencia de triángulos con...
84	John	Congruencia de ángulos, entonces el de postulado LLL.
85	John	[Construye un triángulo equilátero y construye dos bisectrices a sus ángulos] ¿La misma recta puede ser la bisectriz y la mediana? Pues al menos en este caso si [borra la construcción y construye las rectas dadas].

- 86 Alejandro [Escribe en el cuaderno] Espera [construye un círculo con centro en el punto de intersección de las rectas dadas que pasa por un punto cualquiera de r_1], necesitamos un triángulo congruente con este chiquito [construye el punto de intersección entre el círculo y r_2].



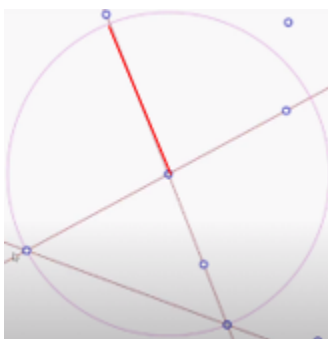
- 87 John Equiángulo.

- 88 Alejandro Equiángulo no, congruente, entonces este lado lo van a compartir (señalando uno de los lados del triángulo).



- 89 Alejandro Y este no lo comparten, pero está en la misma circunferencia [señala un radio del círculo] (en este caso se imagina el triángulo construido y está garantizando la congruencia de lados).

- 90 Alejandro El que necesitamos hallar es este (se refiere a garantizar que los últimos lados sean congruentes) entonces hacemos un círculo con centro acá que pase por acá [construye un círculo con radio igual a último lado por garantizar].

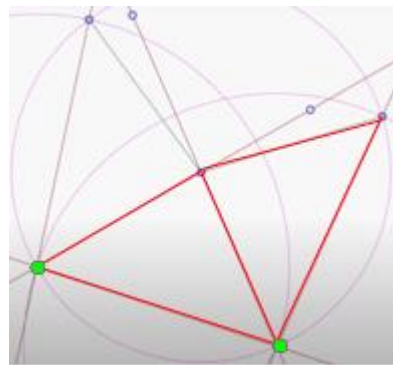


- 91 Alejandro Entonces como está en ambas circunferencias entonces es este punto [construye la intersección de los 2 círculos] y recta [construye la recta que forma los triángulos congruentes] y ahí está la bisectriz ya que son congruentes.



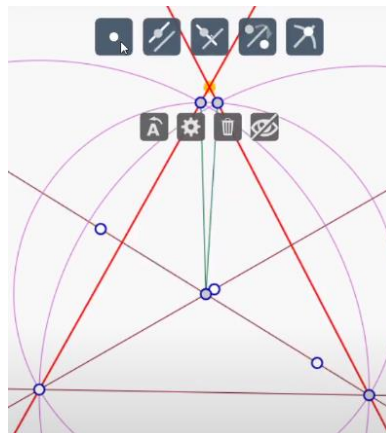
- 92 John Este con este [señalando los triángulos]

- 93 Alejandro Ahora toca hacer lo mismo con el otro [construye los otros triángulos congruentes] Oiga, pero quedó raro.



- 94 John [Mueve los puntos dados].

- 95 Alejandro A ya [construye el punto de intersección de las últimas 2 rectas construidas] y ya, ahí está el triángulo



96	John	Y las bisectrices son esas.
97	Alejandro	Sí, ahí están las 2 rectas.
98	John	[Mueve los puntos dados] Pero entonces el problema vendría cuando se mueven los puntos (nota que en la pantalla no se encuentra el punto de intersección).



99	D	¿Seguro? Utilice el zoom
100	John	Ah sí, entonces sí siempre va a cumplir.

Anexo 2

ALGUNAS DEFINICIONES BÁSICAS

A continuación, presento algunas definiciones que usaremos con mucha frecuencia al principio del curso. Todas ellas se encuentran consignadas en el Clemens, aunque no necesariamente escritas de la misma forma. **Nota:** las proposiciones son siempre válidas para el plano. Sin embargo, algunas podrían no ser ciertas en el espacio.

Definición de círculo.

- Si dos o más puntos están en un círculo entonces equidistan del centro de dicho círculo.
- Si dos o más puntos equidistan de otro entonces están en un círculo con centro en ese otro.

Definición de punto medio.

- Si un punto equidista de otros dos y está alineado con ellos entonces es punto medio de esos dos puntos.
- Si un punto es punto medio de otros dos entonces está alienado con ellos y equidista de ellos.

Definición de rectas perpendiculares.

- Si dos rectas son perpendiculares entonces forman ángulos rectos al intersecarse.
 - Si dos rectas forman ángulos rectos al intersecarse entonces son perpendiculares.
- Nota:** la definición puede generalizarse para segmentos. En este sentido, dos segmentos son perpendiculares si están contenidos en dos rectas perpendiculares.

Definición de rectas paralelas.

- Si dos rectas son paralelas entonces no se cortan. • Si dos rectas no se cortan entonces son paralelas.
- Nota:** Observe que cortarse no es lo mismo que intersecarse, una recta no se corta a sí misma, pero sí se interseca con ella misma en todos sus puntos. En este sentido una recta es paralela a sí misma. Al igual que la definición de rectas perpendiculares, el paralelismo puede generalizarse a segmentos como se generalizó la perpendicularidad.

Definición de rectángulo.

- Si un cuadrilátero es rectángulo entonces sus ángulos son rectos.
- Si un cuadrilátero tiene sus ángulos rectos entonces es un rectángulo.

Definición de cuadrado.

- Si un cuadrilátero es cuadrado entonces sus ángulos son rectos y sus lados congruentes.
- Si un cuadrilátero tiene sus ángulos rectos y sus lados congruentes entonces es un cuadrado.

Definición de paralelogramo.

- Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus lados opuestos son paralelos.
- Si un cuadrilátero tiene sus lados opuestos paralelos entonces es un paralelogramo.

Definición de altura de un triángulo.

- Si un segmento es una altura de un triángulo entonces va desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto en dirección perpendicular a este.
- Si un segmento va desde un vértice de un triángulo hasta el lado opuesto, en dirección perpendicular a este, entonces es una altura de dicho triángulo.

Definición de mediana de un triángulo.

- Si un segmento es una mediana de un triángulo entonces va desde un vértice del triángulo hasta el punto medio del lado opuesto.
- Si un segmento va desde un vértice de un triángulo hasta el punto medio del lado opuesto entonces es una mediana de dicho triángulo.

Definición de bisectriz de un ángulo.

- Si una recta es la bisectriz de un ángulo entonces lo divide en dos ángulos congruentes.
- Si una recta divide a un ángulo en dos ángulos congruentes entonces es la bisectriz de dicho ángulo.

Definición de bisectriz de un segmento.

- Si una recta (o segmento) es la bisectriz de un segmento entonces contiene el punto medio del segmento.
- Si una recta (o segmento) contiene el punto medio de un segmento entonces es la bisectriz de dicho segmento.

Definición de mediatriz de un segmento.

- Si una recta es la mediatriz de un segmento entonces contiene el punto medio de dicho segmento y es perpendicular a él.
- Si una recta contiene el punto medio de un segmento y es perpendicular a él entonces es la mediatriz de dicho segmento.

Nota: en algunos libros como el Clemens a la mediatriz le llaman *bisectriz perpendicular*.

Definición de congruencia de triángulos.

- Si dos triángulos son congruentes entonces sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.
- Si dos triángulos tienen sus lados y ángulos correspondientes congruentes entonces dichos triángulos son congruentes.

Nota: Usaremos el símbolo “=” para denotar la congruencia. La correspondencia se explicita cuando se escribe la congruencia. Esto es, el orden en que nombramos cada triángulo indica qué lados y qué ángulos de uno corresponden a los del otro. Por ejemplo, si $\triangle QRS = \triangle LAP$ entonces al lado QR le corresponde el lado LA , al lado QS le corresponde el lado LP , al $\angle RSQ$ le corresponde el $\angle APL$, etc.

PROPOSICIONES DE LA FORMA SI-ENTONCES QUE NO CORRESPONDEN A DEFINICIONES

Otro tipo de proposiciones de la forma *si-entonces* que no corresponden a definiciones, son los postulados y los teoremas, pero que establecen relaciones de causalidad. En su momento, concretaremos con más precisión las ideas de postulado y teorema.

Postulados de perpendicularidad y paralelismo.

- Si dos rectas son perpendiculares a otra entonces son paralelas.
- Si dos rectas son paralelas y una tercera es perpendicular a una de ellas entonces también es perpendicular a la otra.

Postulado de congruencia LLL (versión definitiva).

- Si dos triángulos tienen los tres lados correspondientes congruentes entonces dichos triángulos son congruentes.

Postulado de congruencia LAL.

- Si dos triángulos tienen dos pares de lados correspondientes congruentes y los ángulos comprendidos entre estos congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.

Postulado de congruencia ALA.

- Si dos triángulos tienen dos pares de ángulos correspondientes congruentes y los lados comprendidos entre estos congruentes, entonces dichos triángulos son congruentes.

Teoremas del triángulo isósceles.

- Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces los ángulos opuestos a dichos lados son congruentes.
- Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes entonces los lados opuestos a dichos ángulos son congruentes.

Teoremas de la mediatriz.

- Si un punto está en la mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento.
- Si un punto equidista de los extremos de un segmento entonces está en la mediatriz de dicho segmento.

Segundo Teorema de Tales.

- Si un triángulo está inscrito en un semicírculo entonces es un triángulo rectángulo.