

OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE KREIN.

LUDWING DUHAN AROCHA OSORIO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE KREIN.

LUDWING DUHAN AROCHA OSORIO

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Director:

EDILBERTO JOSE REYES GONZÁLES

Mg. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2018

*A mi familia, en especial
a mi abuela Maria T.*

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos

- ★ Al profesor **Mg. Edilberto J. Reyes** que, como director de esta tesis, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.
- ★ A mis padres, **Ludwing Arocha Ayala** y **Lina Osorio** que gracias a sus esfuerzos y sacrificios me han permitido ser quien soy.
- ★ A mi abuela **Maria T.** cuya experiencia de vida ha incrementado mis esfuerzos para seguir preparándome.
- ★ A mi abuelo **Rodrigo Osorio** que aunque ya no esté con nosotros, fue quien promovió mi gusto por las matemáticas a temprana edad.
- ★ A mi tío **Luis Fernando** que durante el último año me ha brindado un espacio donde alojarme y estudiar.
- ★ A **Lina Liceth** quien me ha acompañado durante los últimos dos años, su amor y cariño lo llevaré por siempre.
- ★ A todo aquel que durante los últimos cuatro años me brindó su amistad. En especial agradezco a mis amigos de carrera por su apoyo moral, por darme fuerzas en momentos difíciles y por todas las alegrías que pasamos. Mis mejores recuerdos de la universidad son gracias a ustedes.
- ★ A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemático.

Contenido

	Pág
INTRODUCCIÓN	10
1 Preliminares	1
1.1 Espacios con producto interno	1
1.2 Operadores lineales acotados y continuos	3
1.3 Operador adjunto en espacios de Hilbert	7
1.4 Descomposición polar de un operador	9
2 Espacios con métrica indefinida	12
2.1 Espacios con producto interno indefinido	12
2.2 Ortogonalidad	17
2.3 Descomposiciones fundamentales	22
3 Espacios de Krein	24
3.1 Geometría en espacios de Krein	28
3.2 Operador adjunto	33
3.3 Subespacios Uniformemente Definidos	37
3.4 Subespacios Krein	45
REFERENCIAS	48

RESUMEN

TÍTULO: OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE KREIN. ¹.

AUTOR: LUDWING DUHAN AROCHA OSORIO.²

PALABRAS CLAVES: PRODUCTO INTERNO INDEFINIDO, ESPACIOS DE HILBERT, ESPACIOS DE KREIN, OPERADOR ADJUNTO, OPERADOR ANGULAR, SUBESPACIO KREIN.

DESCRIPCIÓN:

La geometría en los espacios de Krein tiene muchas similitudes con la teoría de espacios de Hilbert, pero también algunas diferencias importantes tales como la presencia de subespacios negativos. Estudiamos la geometría en los espacios de Krein utilizando algunos operadores, incluyendo los operadores autoadjuntos, proyecciones, operador angular y se muestra el análogo del teorema de proyección a los espacios de Krein.

En el primer capítulo se introduce algunos resultados preliminares sobre la teoría de espacios de Hilbert y generalizamos algunos conceptos que conducen a la definición de espacio con producto interno indefinido, estamos interesados en los espacios con producto interno indefinido descomponible y no degenerado. En el segundo capítulo se caracteriza estas nociones, en particular, se muestra bajo qué condiciones un subespacio definido positivo (negativo) de un espacio con producto interno descomponible corresponde con la parte positiva (negativa) de una descomposición fundamental.

En el tercer capítulo se definen los espacios de Krein, se muestran algunas diferencias con respecto a los espacios de Hilbert, tales como los subespacios degenerados que no admiten un complemento ortogonal. Se demuestra que todas las normas que dependen de la elección de una descomposición fundamental son equivalentes y se define la topología de la norma para los espacios de Krein. Por medio del operador angular K de un subespacio \mathcal{M} de un espacio de Krein \mathcal{K} , se muestra que \mathcal{M} es ortocomplementado si y solo si \mathcal{M} es uniformemente positivo (negativo) maximal, por último, mostramos que todo subespacio Krein es ortocomplementado y además es el rango de un operador proyección.

¹Trabajo de grado

²Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Edilberto Jose Reyés.

ABSTRACT

TITLE: OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE KREIN. ³

AUTOR: LUDWING DUHAN AROCHA OSORIO. ⁴

KEY WORDS: PRODUCTO INTERNO INDEFINIDO, ESPACIOS DE HILBERT, ESPACIOS DE KREIN, OPERADOR ADJUNTO, OPERADOR ANGULAR, SUBESPACIO KREIN.

DESCRIPTION:

The geometry of Krein spaces has many similarities with the Hilbert space case but also some important differences such as the presence of negative subspaces. We study Krein space geometry using basic class of operators, including selfadjoint operators, projections, angles operators and bring an analogue of the Projection theorem to the Krein space theory.

In the first chapter we introduce some preliminary results about Hilbert space theory and generalize some concepts that leads to indefinite inner product spaces, we are interested in descomposable non degenerate inner product spaces. In the second chapter, we characterize those notions; in particular, we show under which conditions a positive (negative) definite subspace of a descomposable indefinite inner product space is the positive (negative) part of a fundamental decomposition.

In the third chapter we define Krein spaces, we show some differences with respect to the Hilbert space case, such as degenerate subspaces which don't admit an orthogonal complement. We show all norms depending on choices of fundamental decompositions are equivalent and define the norm topology in Krein spaces. By means of the angle operator K for a subspace \mathcal{M} of a Krein space \mathcal{K} , we prove \mathcal{M} is orthocomplemented if and only if \mathcal{M} is uniformly positive (negative) maximal, finally we show that every Krein subspace is orthocomplemented and is the range of a projection operator.

³Grade work.

⁴School of Mathematics. Faculty of Sciences. Universidad Industrial de Santander. Director: Edilberto José Reyes.

INTRODUCCIÓN

El inicio del estudio de los operadores en espacios con métrica indefinida se remonta a la década de los años cuarenta del siglo XX. En 1944, Pontryagin [13] publica un artículo en el cual se consideran operadores lineales hermíticos en espacios con producto interno donde existen vectores no nulos cuyos cuadrados son cero. En las décadas siguientes muchos matemáticos se interesan por el tema: Iohvidov [9] muestra la primera aplicación al caso infinito-dimensional de la transformada de Cayley, Krein [11] aplica el principio de punto fijo a operadores lineales en espacios con métrica indefinida. En tiempos más recientes, matemáticos norteamericanos se han sumado a la exploración de estas teorías. Son notables y de gran importancia teórica, los trabajos de Rovnyak y Ditschel [5] en particular sobre operadores contráctiles y bicontráctiles en espacios de Pontryagin y de Krein.

Los Espacios de Krein aparecieron implícitamente en artículos de Nevanlinna y Pesonen; formalmente fueron presentados por Gunzburg [7] en 1957. Sin embargo, el término espacio de Krein parece estar justificado por el hecho de que la teoría de estos espacios surgió, en su mayor parte, de la escuela de M.G Krein en la Universidad de Odessa, Ucrania (antigua URSS). Dichos espacios son generalizaciones de los espacios de los Hilbert y son los objetos en los cuales se centra este trabajo, cuyo objetivo tiene por estudiar la geometría de los espacios de Krein por medio de algunos operadores lineales acotados, tales como los operadores autoadjuntos, proyecciones e isometrías.

El trabajo está organizado en la siguiente forma: en el primer capítulo establece-

mos los preliminares que permitirán el desarrollo de los resultados estudiados. En el segundo capítulo iniciamos con nociones básicas en espacios con métrica indefinida y caracterizamos a los espacios no degenerados, subespacios ortocomplementados y espacios descomponibles. En el tercer capítulo estudiamos la geometría de los espacios de Krein así como sus propiedades fundamentales. Finalmente, con base en el método del operador angular se muestra bajo ciertas condiciones, cuando un espacio de Krein se puede descomponer como suma directa de un subespacio y su compañero ortogonal.

Capítulo

1

Preliminares

Para el estudio de espacios con producto interno indefinido, en este capítulo presentamos algunas definiciones y resultados preliminares que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos; iniciamos con la definición de espacio con producto interno usual, luego continuamos con unas definiciones en los espacios de Hilbert, tales como el operador adjunto y descomposición polar de un operador. Estas definiciones y resultados se pueden encontrar en cualquier libro introductorio de análisis funcional, para ver con más detalle invitamos al lector a las bibliografías [12], [4].

1.1 Espacios con producto interno

Definición 1.1. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{F} (\mathbb{C} o \mathbb{R}). **Un producto interno** en \mathcal{V} , es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$, tal que para todo $x, y \in \mathcal{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ satisface:

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Al par $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se le llama espacio con producto interno. El **antiespacio** de un espacio con producto interno $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, es el espacio $(\mathcal{V}, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ejemplo 1.2. Sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, el producto interno canónico en \mathbb{R}^n está dado por:

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Análogamente, si $x, y \in \mathbb{C}^n$, el producto interno canónico en \mathbb{C}^n es

$$\langle x, y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n.$$

Ejemplo 1.3. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_2,$$

para α un número real. Se puede verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisface las condiciones 1 y 2 de la definición de producto interno, además, como

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x_1^2 - 2x_1x_2 + \alpha x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + (\alpha - 1)x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (\alpha - 1)x_2^2, \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno si y solo si $\alpha > 1$.

Definición 1.4. Si \mathcal{V} es un espacio con producto interno real (respectivamente complejo) diremos que \mathcal{V} es un espacio pre-Hilbert.

Definición 1.5. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial complejo, una norma es una función $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ que verifica:

1. Para cada $x \in \mathcal{V}$, $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.
2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente \mathbb{C}) y $x \in \mathcal{V}$. Entonces $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

3. Si $x, y \in \mathcal{V}$, entonces

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Un espacio normado es un par $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ donde \mathcal{V} es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma.

Observación. Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como $\|x\| = [x, x]^{1/2}$ para todo $x \in \mathcal{V}$, y por tanto es también métrico, con la métrica asociada $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposición 1.6. Si $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno entonces se cumple la identidad de polarización, es decir, para todo $x, y \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$[x, y] = \frac{1}{4} [x + y, x + y] - \frac{1}{4} [x - y, x - y] + \frac{i}{4} [x - iy, x - iy].$$

1.2 Operadores lineales acotados y continuos

Definición 1.7. Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre-Hilbert completo (con respecto a la métrica inducida por el producto interno). En adelante, usaremos el símbolo H en vez de $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ para denotar un espacio de Hilbert arbitrario.

Ejemplo 1.8.

- Los espacios con producto interno del ejemplo 1.2, \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n son espacios de Hilbert, de hecho, todo espacio con producto interno real o complejo de dimensión finita es un espacio de Hilbert.
- Considere l^2 , el espacio de sucesiones de números complejos cuyos términos al cuadrado forman una serie convergente, con el producto interno

$$[x, y] = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \overline{y_n}.$$

Entonces l^2 es un espacio de Hilbert.

Los espacios de Hilbert son un caso particular de los espacios de Banach (espacios normados y que además son completos), con la ventaja de que dicha norma proviene de un producto interno. En este sentido, los siguientes resultados y propiedades en el resto de esta sección se presentan de manera general para espacios normados.

Sean $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ dos espacios vectoriales y D un subespacio de \mathcal{V}_1 . Un **operador lineal** T es una función $T : D(T) \rightarrow \mathcal{V}_2$ que satisface

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; x_1, x_2 \in D(T)).$$

Decimos que $D(T)$ es el dominio de T , el conjunto $R(T) \subset \mathcal{V}_2$ es el rango de T . Observamos que $R(T)$ es un subespacio de \mathcal{V}_2 . Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$, decimos que T es un operador lineal en \mathcal{V} .

Definición 1.9. Sea $T : D(T) \rightarrow \mathcal{V}_2$ un operador lineal. Llamamos el núcleo de T al subespacio $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$.

Definición 1.10. T es invertible, cuando $N(T) = \{0\}$ en cuyo caso se puede definir el operador T^{-1} , donde $D(T^{-1}) = R(T)$ y es tal que $T^{-1}y = x$ si y solo si $Tx = y$.

Definición 1.11. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un Operador lineal.

- Decimos que T es **acotado**, si existe una constante positiva C tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{para todo } x \in X.$$

- T es **continuo** en x_0 , si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| < \epsilon, \quad \text{para todo } x_0 \in D(T) \quad \text{que satisface } \|x - x_0\| < \delta.$$

Decimos que T es continuo, si T es continuo en x_0 para todo $x_0 \in D(T)$.

Teorema 1.12. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. T es acotado;
2. T es continuo;
3. T es continuo en $0 \in X$.

Corolario 1.13. Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, entonces

- (a) Si $x_n, x \in D(T)$ son tales que $x_n \rightarrow x$, entonces $Tx_n \rightarrow Tx$.
- (b) El espacio nulo $N(T)$ es cerrado.

Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ al espacio de operadores acotados en X a Y , luego si $Y = X$, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Nota. El espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$ y multiplicación por un escalar $\alpha (T_1x) = T_1(\alpha x)$.

Definición 1.14. Un **funcional** lineal f , es un operador lineal cuyo rango está sobre el cuerpo \mathbb{F} . Si f es acotado, se denota por $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{F})$.

Ejemplo 1.15. Sea $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ un espacio normado. La norma $\|\cdot\|$ es un funcional no lineal, dado que si $\alpha < 0$ y $x \in X$, $x \neq 0$, entonces $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \neq \alpha\|x\|$.

Ejemplo 1.16. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $x \in H$. El funcional $\varphi_x : H \mapsto \mathbb{F}$ definido por

$$\varphi_x(z) = \langle z, x \rangle, \quad (1.1)$$

es un funcional lineal. Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.1) se prueba que este funcional es acotado.

Este ejemplo es importante, en el sentido que su recíproco, que se conoce como el teorema de Representación de Riesz hace parte fundamental de este capítulo.

Teorema 1.17. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador acotado. El espacio vectorial $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado bajo la norma de operadores definida por

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|, \quad x \in D(T). \quad (1.2)$$

Además, si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ también lo es.

Definición 1.18. Sea X un espacio normado. El **espacio dual**, denotado por X' es el conjunto de todos los funcionales lineales acotados en X .

Proposición 1.19. El espacio dual X' de un espacio normado X es un espacio de Banach, bajo la norma de operadores (1.2).

Ejemplo 1.20. El espacio dual de \mathbb{R}^n es \mathbb{R}^n (bajo un isomorfismo).

Ejemplo 1.21. El espacio dual de $(l^1, \|\cdot, \cdot\|_1)$ es $(l^\infty, \|\cdot, \cdot\|_\infty)$, donde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_n|$ para todo $x \in l^1$ y $\|z\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |z_i|$ para todo $z \in l^\infty$.

Definición 1.22. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal. Diremos que el operador T es **cerrado**, si su gráfico

$$Gr(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

es cerrado en $X \times Y$, es decir, para cualquier sucesión $x_n \in D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

Definición 1.23. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que T es acotado inferiormente, si existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in X$.

Teorema 1.24. Si X, Y son espacios normados y $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal continuo, entonces T es acotado inferiormente si y solo si T es inyectivo y su gráfico es cerrado.

Teorema 1.25. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal acotado.

1. Si $D(T)$ es cerrado en X , entonces T es cerrado.
2. Si T es cerrado y Y es un espacio de Banach, entonces $D(T)$ es cerrado en X .

Teorema 1.26. (Teorema del Gráfico Cerrado). Sean X, Y espacios de Banach y $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal. Si T es cerrado, entonces T es acotado.

1.3 Operador adjunto en espacios de Hilbert

Definición 1.27. Sea H un espacio de Hilbert, decimos que x es *ortogonal* a y , denotado por $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$. Dos subespacios S_1, S_2 de H son ortogonales, si para todo $x \in S_1, y \in S_2$ se tiene que $\langle x, y \rangle = 0$. Para cada subconjunto $Y \subset H$, Y^\perp se define como el subespacio $Y^\perp = \{z \in H : z \perp Y\}$.

Definición 1.28. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial y S_1, S_2 subespacios no triviales de \mathcal{V} . Se dice que \mathcal{V} es la suma directa de S_1 y S_2 si para cada $x \in \mathcal{V}$ existe una única representación de la forma

$$x = y + z, \quad y \in S_1, \quad z \in S_2.$$

En particular si H es un espacio de Hilbert y $H = S_1 + S_2$ donde $S_1 \perp S_2$, decimos que H es la suma directa ortogonal de S_1 y S_2 , denotado por $H = S_1 \oplus S_2$.

En los espacios de Hilbert, el siguiente teorema destaca la importancia de los subespacios cerrados, ya que todo subespacio cerrado está complementado.

Teorema 1.29. Sea H un espacio de Hilbert y Y un subespacio cerrado de H , entonces

$$H = Y \oplus Y^\perp. \tag{1.3}$$

Teorema 1.30. (Teorema de representación de Riesz). Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $f \in H'$. Entonces, existe un único $z \in H$ tal que

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{1.4}$$

para todo $x \in H$, además, $\|f\| = \|z\|$.

Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert sobre \mathbb{F} y consideremos un operador $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Dado $y \in H_2$, se define el funcional

$$\begin{aligned} H_1 &\longrightarrow \mathbb{F} \\ x &\longrightarrow \langle Ax, y \rangle, \end{aligned}$$

el cual es lineal y acotado ya que $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Luego, aplicando el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $z \in H_1$ tal que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle, \quad \text{para todo } x \in H_1.$$

Este análisis motiva la definición del adjunto del operador A , como veremos a continuación.

Definición 1.31. Sea $A : H_1 \longrightarrow H_2$ un operador lineal y acotado, donde H_1, H_2 son espacios de Hilbert. Llamamos el **adjunto** de Hilbert de A , denotado por A^\times , al único operador

$$\begin{aligned} A^\times : H_2 &\longrightarrow H_1 \\ y &\longrightarrow A^\times(y) := z \end{aligned}$$

donde

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\times y \rangle, \quad \text{para todo } x \in H_1, y \in H_2. \quad (1.5)$$

Ejemplo 1.32. Considere el espacio \mathbb{C}^n con un producto interno definido por $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$, donde x^T es la transpuesta del vector x . Para cualquier operador $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ cuya representación matricial es la matriz A se tiene que su adjunto resulta ser la matriz $(\bar{A})^T$.

Proposición 1.33. Si H_1, H_2 son espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, entonces $A^\times \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ y es tal que $\|A\| = \|A^\times\|$.

Teorema 1.34. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert. Si $A, B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y α un escalar. Entonces,

1. $\langle A^\times x, y \rangle = \langle y, Ax \rangle$, para todo $x \in H_1, y \in H_2$;
2. $(A + B)^\times = A^\times + B^\times$;
3. $(\alpha A)^\times = \bar{\alpha} A^\times$;
4. $(A^\times)^\times = A$.

Definición 1.35. Sea A un operador continuo en un espacio de Hilbert H . Decimos que A es autoadjunto, si $A^\times = A$. La siguiente proposición es una caracterización de los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

Proposición 1.36. T es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert complejo H si y solo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in H$.

Proposición 1.37. Sea H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H)$, entonces

$$N(T^\times) = R(T)^\perp, \quad N(T) = R(T^\times)^\perp.$$

Demostración. Sea $y \in R(T)^\perp$ luego por definición $\langle Tx, y \rangle = 0$, es decir, $\langle x, T^\times y \rangle = 0$ para todo $x \in H$. En particular para $x = T^\times y$, por lo tanto $T^\times y = 0$. Así $y \in N(T^\times)$. Note que la otra inclusión se da regresándose en el argumento anterior. La otra igualdad es consecuencia de que $T^{\times \times} = T$, ya que $N(T^{\times \times}) = R(T^\times)^\perp$.

□

1.4 Descomposición polar de un operador

Recordemos que dado un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$, podemos descomponerlo de manera que $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$. De manera similar, es posible descomponer un operador continuo en un espacio de Hilbert. No obstante, necesitamos precisar primero algunas definiciones y resultados. Las demostraciones se pueden encontrar en [1].

Teorema 1.38. Sea H un espacio de Hilbert y $P \in \mathcal{L}(H)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. P es positivo, es decir, $\langle Px, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in H$;
2. Existe un único operador positivo $Q \in \mathcal{L}(H)$ tal que $P = Q^2$; dicho operador es denotado por \sqrt{P} y es llamado la **raíz cuadrada** del operador P ;
3. Existe un operador $S \in \mathcal{L}(H, K)$ donde K es un espacio de Hilbert, tal que $P = S^*S$;

Proposición 1.39. Si T es un operador continuo en el espacio de Hilbert H , entonces T^*T es un operador positivo.

Demostración. sea $x \in H$, de acuerdo al Teorema 1.34 se tiene que $\langle T^*Tx, x \rangle = \|Tx\|^2$, luego T^*T es positivo.

□

Definición 1.40. Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Denotamos por $|T|$ al operador positivo en H_1 dado por

$$|T| = \sqrt{T^*T}.$$

Diremos que $|T|$ es el **módulo** de T , es decir, el operador $|T|$ es la única raíz cuadrada positiva del operador T^*T .

Definición 1.41. Sea H un espacio de Hilbert y $T, W \in \mathcal{L}(H)$.

- Diremos que T es una isometría, si $\|Tx\| = \|x\|$, para todo $x \in H$.
- W es una isometría parcial, si $W|_{N(W)^\perp}$ es una isometría. Además, $N(W)^\perp$ y $R(W)$ serán denotados como el espacio inicial y espacio final de W , respectivamente.

Observación. Si W es una isometría parcial y $N(W)^\perp = 0$, entonces W es una isometría. El espacio inicial de una isometría parcial es el subespacio cerrado ortogonal a $N(W)$.

Teorema 1.42. (Descomposición polar). Si H es un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$, entonces existe una isometría parcial W con espacio inicial $N(A)^\perp$ y espacio final $\overline{R(A)}$ tal que $A = W|A|$. Además, W y $|A|$ están determinados de manera única.

Corolario 1.43. Si la descomposición polar de A es $A = W|A|$, entonces $A^\times = W^\times|A^\times|$ es la descomposición polar para el operador adjunto A^\times .

Observación. En particular, si $B \in \mathcal{L}(H)$ es un operador autoadjunto, con descomposición polar $B = W|B|$, entonces podemos concluir que

- La isometría parcial W es autoadjunta;
- W y $|B|$ conmutan;
- $N(B) = N(|B|)$;
- El espacio inicial y final de W coinciden con $\overline{R(|B|)}$.

Capítulo

2

Espacios con métrica indefinida

En este capítulo se presentan resultados sobre espacios con métrica indefinida. Se pretende caracterizar los espacios no degenerados, subespacios ortocomplementados y espacios que admiten una descomposición fundamental para un subespacio definido. Este capítulo fue basado en [2].

2.1 Espacios con producto interno indefinido

Los espacios con producto interno indefinido son una generalización de producto interno dada en la sección 1.1, en razón de esto, se presenta la siguiente definición.

Definición 2.1. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial complejo, una función $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ es una **forma sesquilineal simétrica** (hermitiana), que satisface

1. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$ para todo $x, y, z \in \mathcal{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $[x, y] = \overline{[y, x]}$ para todo $x, y \in \mathcal{V}$.

Observación. El termino "sesqui" tiene como significado uno y medio. Bajo esta definición, una forma sesquilineal es una función lineal en el primer argumento y semi lineal en el segundo argumento. Además, note que el producto interno es un ejemplo de una forma sesquilineal.

De acuerdo al inciso 2 de la definición de forma sesquilineal simétrica, $[x, x]$ es un número real y puede llegar a ser para algunos elementos positivo, negativo o cero.

Definición 2.2. Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Si $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal simétrica que satisface:

1. $[x, x] \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{V}$, decimos que $[\cdot, \cdot]$ define un producto interno **semi-definido positivo**.
2. $[x, x] \leq 0$ para todo $x \in \mathcal{V}$, en cuyo caso el producto es **semi-definido negativo**. Un espacio es semidefinido, si es semidefinido positivo o semi-definido negativo.
3. Si $[x, x] > 0$, para todo $x \neq 0 \in \mathcal{V}$, se dice que el producto interno es **definido positivo**. Análogamente, si $[x, x] < 0$, para todo $x \neq 0 \in \mathcal{V}$, el producto interno es **definido negativo**.
4. Si existe $x, y \in \mathcal{V}$ tal que $[x, x] > 0$ y $[y, y] < 0$, entonces $[\cdot, \cdot]$ define un producto interno **indefinido**.

Nota. En adelante cuando hablemos de una un producto interno, entenderemos por una forma sesquilineal simétrica, teniendo en cuenta que la definición de producto interno en la sección 1.1 corresponde a un producto interno definido positivo.

A lo largo del trabajo, el cuerpo \mathbb{F} será el de los números complejos, salvo que se indique lo contrario. Además, la notación para el producto interno en un espacio de Hilbert (definido positivo) será el símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $[\cdot, \cdot]$ en los restantes.

El siguiente teorema es bastante conocido en espacios de Hilbert, de hecho, se sigue cumpliendo de manera general para todo espacio con producto interno semidefinido .

Teorema 2.3. (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*). Si $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con

producto interno semidefinido, entonces para todo $x, y \in \mathcal{V}$ se tiene que

$$|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]. \quad (2.1)$$

Demostración. Si $u = 0$ o $v = 0$ claramente se cumple la desigualdad. Sean $u, v \neq 0 \in \mathcal{V}$ y $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$. Supongamos que \mathcal{V} es semidefinido positivo, por tanto $[\lambda u - \mu v, \lambda u - \mu v] \geq 0$, es decir $|\lambda|^2 [u, u] - \bar{\lambda}\mu [u, v] - \bar{\mu}\lambda [v, u] + |\mu|^2 [v, v] \geq 0$ para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. En particular si $\lambda = [u, v]$ y $\mu = [u, u]$, se tiene que

$$\begin{aligned} |[u, v]|^2 [u, u] - 2|[u, v]|^2 [u, u] + [u, u]^2 [v, v] &\geq 0 \\ |[u, v]|^2 - 2|[u, v]|^2 + [v, v] &\geq 0 \\ [u, u][v, v] &\geq |[u, v]|^2. \end{aligned}$$

De manera análoga se cumple para un espacio semidefinido negativo.

□

Definición 2.4. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno. Se dice que $x \in \mathcal{V}$ es

- **Positivo**, si $[x, x] > 0$.
- **Negativo**, si $[x, x] < 0$.
- **Neutro**, si $[x, x] = 0$.

Con base en lo anterior, se definen los siguientes conjuntos.

$$\mathcal{B}^+ = \{x \in \mathcal{V} : [x, x] \geq 0\}.$$

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{V} : [x, x] = 0\}.$$

$$\mathcal{B}^- = \{x \in \mathcal{V} : [x, x] \leq 0\}.$$

$$\mathcal{B}^{++} = \{x \in \mathcal{V} : [x, x] > 0, \text{ ó } x = 0\}.$$

$$\mathcal{B}^{--} = \{x \in \mathcal{V} : [x, x] < 0, \text{ ó } x = 0\}.$$

Observación. Por medio de estas definiciones podemos concluir que:

- $\mathcal{B}^{++} \subseteq \mathcal{B}^+$ y $\mathcal{B}^{--} \subseteq \mathcal{B}^-$.
- Es posible que exista $x \in \mathcal{B}^+$ y $x \notin \mathcal{B}^{++}$, en cuyo caso se debe cumplir que $x \in \mathcal{V}$, $x \neq 0$ y es tal que $[x, x] = 0$, es decir, x es un vector neutro diferente al trivial.
- $\mathcal{N} = \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$.

Ejemplo 2.5. Sea $\mathcal{V} = \{\{x_n\} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$. Si $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ son elementos de \mathcal{V} , se define un producto interno indefinido mediante

$$[x, y] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n \overline{y_n}.$$

Observe que $x = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots\} \in \mathcal{B}^+$, $y = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, \dots\} \in \mathcal{B}^-$ y $z = \{1, i, 0, 0, \dots\} \in \mathcal{N}$.

Definición 2.6. Si $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno que tiene vectores positivos y negativos, decimos que $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un producto interno indefinido o un **espacio con métrica indefinida**.

Ejemplo 2.7. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y \mathcal{M}, \mathcal{N} subespacios no nulos de H tal que $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Para cada $x \in H$, existen únicos $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{N}$ tales que $x = m + n$. Si x, y son elementos de H con $x = m_1 + n_1$, $y = m_2 + n_2$ donde $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ y $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ se puede verificar que

$$[x, y] = \langle m_1, m_2 \rangle - \langle n_1, n_2 \rangle$$

define un producto interno en H . Además, note que para todo $m \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, $[m, m] > 0$ y para cada $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, $[n, n] < 0$. Por lo tanto $(H, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno indefinido.

Ejemplo 2.8. Considere $C[-1, 1]$, el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$ con valores complejos. Si $f, g \in C[-1, 1]$ se define un producto interno indefinido mediante $[f, g] = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(-t)} dt$.

Note que si $f \neq 0 \in C[-1, 1]$ es una función par, luego $[f, f] > 0$. Análogamente si $g \neq 0 \in C[-1, 1]$ es una función impar entonces $[g, g] < 0$. Además, puesto que el producto entre una función par y una impar es una función impar, se concluye que $[f, g] = 0$.

Proposición 2.9. *Si $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno indefinido entonces \mathcal{V} contiene elementos neutros no nulos.*

Demostración. Dado que $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es un espacio con producto interno indefinido, existen $a, b \in \mathcal{V}$ tal que $[a, a] > 0$ y $[b, b] < 0$. Considere la ecuación cuadrática para la variable x

$$[b, b] x^2 + 2 \operatorname{Re} [a, b] x + [a, a] = 0, \quad (2.2)$$

cuyo discriminante $(2 \operatorname{Re} [a, b])^2 - 4 [b, b] [a, a] > 0$, ya que $[b, b] [a, a] < 0$. Por tanto la ecuación (2.2) tiene solución real. Sea $z = a + x_0 b$, donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es solución de (2.2), veamos que $[z, z] = 0$ y $z \neq 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} [z, z] &= [a + x_0 b, a + x_0 b] \\ &= [a, a + x_0 b] + [x_0 b, a + x_0 b] \\ &= [a, a] + x_0 [a, b] + x_0 \overline{[a, b]} + x_0^2 [b, b] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $z = 0$, entonces $a = -x_0 b$. Luego $[a, a] = [-x_0 b, -x_0 b] = x_0^2 [b, b] \leq 0$, que es una contradicción. Se concluye que \mathcal{V} contiene elementos neutros no nulos.

□

Teorema 2.10. *(Krein-Smulian). Si el espacio con producto interno \mathcal{V} posee un vector positivo (negativo), entonces todo elemento de \mathcal{V} es la suma de dos vectores positivos (negativos).*

Demostración. Sea $x \in \mathcal{V}$ y $x_0 \in \mathcal{V}$ tal que $[x_0, x_0] > 0$. Para $\alpha \in \mathbb{R}^+$, se define

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \langle x + \alpha x_0, x + \alpha x_0 \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\alpha \operatorname{Re} (\langle x, x_0 \rangle) + \alpha^2 \langle x_0, x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Como $[x_0, x_0] > 0$, se tiene que

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} p(\alpha) = +\infty.$$

Por tanto para α suficientemente grande se tiene que $\langle x + \alpha x_0, x + \alpha x_0 \rangle$ es positivo. Concluimos que $x = (x + \alpha x_0) + (-\alpha x_0)$, donde $x + \alpha x_0$ y $-\alpha x_0$ son positivos. El caso para el vector negativo se obtiene considerando el antiespacio de \mathcal{V} .

Corolario 2.11. *Si \mathcal{V} es un espacio con producto interno indefinido, entonces ninguno de los conjuntos $\mathcal{B}^+, \mathcal{B}^-, \mathcal{B}^{++}, \mathcal{B}^{--}$ es un subespacio.*

2.2 Ortogonalidad

Definición 2.12. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y $x, y \in \mathcal{V}$. Si $[x, y] = 0$ o equivalentemente $[y, x] = 0$, decimos que x, y son ortogonales y lo denotamos por $x \perp y$. Si $x \in \mathcal{V}$ es ortogonal a un conjunto \mathcal{M} , es decir, $x \perp y$ para todo $y \in \mathcal{M}$, lo denotamos por $x \perp \mathcal{M}$. Dos subespacios S_1, S_2 son ortogonales, si para todo $x \in S_1, y \in S_2$ se tiene que $[x, y] = 0$.

Lema 2.13. *Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ subespacios ortogonales entre sí. Si \mathcal{M}_i es positivo para todo $1 \leq i \leq n$, entonces el generado de ellos, denotado por $\text{gen}\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n\}$ también lo es.*

Demostración. Sea $m \in \text{gen}\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n\}$, entonces para todo $1 \leq i \leq n$ existen $m_i \in \mathcal{M}_i$ y α_i escalares tales que $m = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_j$. Se tiene que

$$\begin{aligned} [m, m] &= \left[\sum_{j=1}^n \alpha_j m_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k m_k \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} \left[m_j, \sum_{k=1}^n m_k \right] \\ &= \sum_{j=1}^n [m_j, m_j] |\alpha_j|^2 \end{aligned}$$

donde m_j es positivo, para todo $1 \leq j \leq n$. Se concluye que m es positivo.

□

Nota. De acuerdo a la demostración y haciendo sus respectivos cambios, se puede observar que el generado de una cantidad finita de subespacios negativos (neutrales, definidos positivos, definidos negativos) ortogonales mutuamente, también es negativo (neutral, definido positivo, definido negativo, respectivamente).

Definición 2.14. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y \mathcal{M} un subconjunto de \mathcal{V} , el **compañero ortogonal** de \mathcal{M} , denotado por \mathcal{M}^\perp , es el conjunto

$$\mathcal{M}^\perp = \{x \in \mathcal{V} : x \perp \mathcal{M}\}.$$

Proposición 2.15. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} subconjuntos de \mathcal{V} . El compañero ortogonal es un subespacio y satisface:

- Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, entonces $\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{M}^\perp$.
- Si \mathcal{M}, \mathcal{N} son subespacios de \mathcal{V} , entonces $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$.

Definición 2.16. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y \mathcal{S} un subespacio de \mathcal{V} . Denotamos como la **parte isotrópica** de \mathcal{S} al subespacio $\mathcal{S}^\circ = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp$. Diremos que $x \in \mathcal{S}$ es un vector isotrópico para \mathcal{S} , si $[x, y] = 0$ para todo $y \in \mathcal{S}$.

Nota. Es claro que $0 \in \mathcal{S}^\circ$, luego $\mathcal{S}^\circ \neq \emptyset$. Diremos que \mathcal{S} es **degenerado** si $\mathcal{S}^\circ \neq \{0\}$ o no degenerado en caso contrario.

Ejemplo 2.17. Sea $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$. Para todo $x, y \in \mathcal{K}$, tales que $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2)$ se define un producto interno indefinido mediante $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = x_1 \overline{x_2} - y_1 \overline{y_2}$.

Si $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$, entonces $[e_1, e_1] = 1, [e_1, e_2] = 0, [e_2, e_2] = -1$.

Además, se tiene que el subespacio $\mathcal{V} = \{(x, x) : x \in \mathbb{C}\}$ es tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\perp$. Así, tenemos que \mathcal{V} es un espacio degenerado contenido en un espacio no degenerado.

Ejemplo 2.18. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de números reales y considere el conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| |x_n|^2 < +\infty \right\}.$$

Dados $x, y \in \mathcal{V}$, la expresión $[x, y] = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n \overline{y_n}$ define un producto interno. Además, este espacio es degenerado si y solo si $\alpha_j = 0$ para algún j .

Proposición 2.19. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno semidefinido, entonces la parte isotrópica de \mathcal{V} consiste en todos los elementos neutros de \mathcal{V} , es decir, $\mathcal{V}^0 = \mathcal{N}$.

Demostración. Si $x \in \mathcal{V}^0$, entonces $x \in \mathcal{V}^\perp$, luego $[x, y] = 0$ para todo $y \in \mathcal{V}$. En particular para x , se tiene que $[x, x] = 0$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \mathcal{N}$. De acuerdo al teorema 2.3 se concluye que si $[x, x] = 0$, entonces $[x, y] = 0$ para todo $y \in \mathcal{V}$.

□

Corolario 2.20. Un espacio con producto interno neutro, es necesariamente el espacio nulo.

Corolario 2.21. Sean $x, y \in \mathcal{V}$ tales que $[x, x] = 0$ y $[x, y] \neq 0$ entonces el subespacio $\text{gen}\{x, y\}$ es indefinido.

Lema 2.22. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ subespacios de \mathcal{V} . Si $V = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, donde \mathcal{S}_1 es definido positivo y \mathcal{S}_2 es negativo, entonces \mathcal{S}_1 es maximal positivo y \mathcal{S}_2 es maximal negativo.

Demostración. Que \mathcal{S}_1 sea maximal definido positivo se tiene puesto que para cualquier subespacio \mathcal{S}'_1 que contenga propiamente a \mathcal{S}_1 , como $V = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$, entonces $\mathcal{S}'_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq 0$. Así \mathcal{S}'_1 no es positivo. Análogamente para \mathcal{S}_2 concluimos que es maximal negativo.

□

Lema 2.23. Si \mathcal{S} es un subespacio definido positivo maximal (definido negativo maximal) de un espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$, entonces \mathcal{S}^\perp es negativo (positivo).

Demostración. Supóngase por el contrario que \mathcal{S}^\perp es no negativo, luego existe $x \in \mathcal{S}^\perp$ tal que $[x, x] > 0$. Como \mathcal{S} es definido positivo, entonces $\text{gen}\{x, \mathcal{S}\}$ también es positivo y contiene propiamente a \mathcal{S} , ya que si por el contrario $x \in \mathcal{S}$, implicaría que $x \in \mathcal{S}^0$, es decir, $[x, x] = 0$.

□

Definición 2.24. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y \mathcal{S} un subespacio de \mathcal{V} . Si $x \in \mathcal{V}$ se puede escribir de la forma $x = y + z$, donde $y \in \mathcal{S}$ y $z \in \mathcal{S}^\perp$, se dice que y es una **proyección** de x sobre \mathcal{S} .

La existencia o unicidad de una proyección en un subespacio no está garantizada, para ver esto considere al espacio del ejemplo 2.17. Todo vector $x \in \mathcal{V}$ tiene infinitas proyecciones sobre \mathcal{V} , mientras que para todo vector $y \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{V}$ no existe proyección alguna sobre \mathcal{V} . La siguiente proposición caracteriza las proyecciones cuando su existencia ya está de por medio.

Proposición 2.25. *Dos proyecciones del vector $x \in \mathcal{V}$ en el subespacio $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ difieren en un vector isotrópico arbitrario de \mathcal{S} .*

Demostración. Sean $x = y_1 + z_1$ y $x = y_2 + z_2$ dos proyecciones de $x \in \mathcal{V}$, donde $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ y $z_1, z_2 \in \mathcal{S}^\perp$. Luego $y_1 - y_2 = z_1 - z_2 \in \mathcal{S}^\perp$, pero $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}$, por tanto $y_1 - y_2 \in \mathcal{S}^0$.

Por otra parte, si $x = y + z$, donde $y \in \mathcal{S}$ y $z \in \mathcal{S}^\perp$, entonces para todo $u \in \mathcal{S}^0$ se tiene que $x = (y + u) + (z - u)$, donde $y + u \in \mathcal{S}$ y $z - u \in \mathcal{S}^\perp$.

□

Corolario 2.26. *Si $x \in \mathcal{V}$ tiene exactamente una proyección en \mathcal{S} , entonces \mathcal{S} es no degenerado. Por otro lado, si \mathcal{S} es no degenerado, entonces todo vector en \mathcal{V} tiene a lo más una proyección en \mathcal{S} .*

Definición 2.27. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y \mathcal{S} un subespacio de \mathcal{V} . Se dice que \mathcal{S} es **ortocomplementado**, si \mathcal{S} admite un subespacio complementario ortogonal, es decir, un subespacio $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}^\perp$ tal que $\mathcal{S} \cap \mathcal{M} = 0$ y $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{M}$.

Observación. Un subespacio no degenerado es ortocomplementado si y solo si $V = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$.

Proposición 2.28. *Si \mathcal{S} es ortocomplementado, entonces \mathcal{S}^\perp también lo es.*

Demostración. Basta observar que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{\perp\perp}$ y aplicar la definición de ortocomplementado.

□

Nota. Que \mathcal{S} sea ortocomplementado no es condición necesaria para que \mathcal{S}^\perp sea ortocomplementado. Basta considerar un subespacio no cerrado de un espacio de Hilbert.

Teorema 2.29. *Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno y \mathcal{S} un subespacio de \mathcal{V} . Todo vector de \mathcal{V} tiene una única proyección sobre \mathcal{S} si y solo si \mathcal{S} es ortocomplementado.*

Demostración. Si \mathcal{S} es ortocomplementado, luego para todo $x \in \mathcal{V}$, existen $y \in \mathcal{S}, z \in \mathcal{S}^\perp$ tales que $x = y + z$. Por tanto, y es una proyección de x sobre \mathcal{S} .

Si ahora para todo $x \in \mathcal{V}$, x tiene una proyección sobre \mathcal{S} , entonces de acuerdo al corolario 2.26, \mathcal{S} es no degenerado. Se concluye que \mathcal{S} es ortocomplementado.

□

Lema 2.30. *Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno. Si \mathcal{V}^1 es un subespacio complementario para \mathcal{V}^0 , entonces \mathcal{V}^1 es no degenerado y se tiene que $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$.*

Demostración. De la definición de parte isotrópica $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^\perp$, se tiene que $\mathcal{V}^0 \perp \mathcal{V}^1$, así $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$. Para ver que \mathcal{V}^1 es no degenerado, basta notar que $\mathcal{V}^0 = (\mathcal{V}^0)^0 \oplus (\mathcal{V}^1)^0$, es decir, $(\mathcal{V}^1)^0 = 0$.

□

2.3 Descomposiciones fundamentales

Definición 2.31. Un espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es **descomponible**, si admite una descomposición de la forma

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^- \oplus \mathcal{V}^0, \quad (2.3)$$

donde $\mathcal{V}^+ \subset \mathcal{B}^{++}$, $\mathcal{V}^- \subset \mathcal{B}^{--}$ y $\mathcal{V}^0 \subset \mathcal{N}$ son subespacios positivo, negativo y neutro, respectivamente. Esta descomposición recibe el nombre de **Descomposición Fundamental**.

Nota. Se denota al subespacio neutro con el símbolo \mathcal{V}^0 , ya que coincide con la parte isotrópica de \mathcal{V} , esto debido a la proposición 2.19 y el siguiente lema.

Lema 2.32. Si $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \mathcal{V}_n$, entonces $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}_1^0 \oplus \mathcal{V}_2^0 \oplus \cdots \mathcal{V}_n^0$

Proposición 2.33. Toda descomposición fundamental de un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ es de la forma

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \oplus \mathcal{V}^-, \quad \text{donde } \mathcal{V}^+ \subset \mathcal{B}^{++}, \quad \mathcal{V}^- \subset \mathcal{B}^{--} \quad (2.4)$$

Observación. No todo espacio con producto interno es descomponible (ver [2], ejemplo 11.3, pag 24).

Teorema 2.34. Sea $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ un espacio con producto interno indefinido y \mathcal{S} un subespacio definido positivo (definido negativo) de \mathcal{V} . Entonces \mathcal{V} es descomponible con descomposición fundamental de la forma (2.3), tal que $\mathcal{V}^+ = \mathcal{S}$ ($\mathcal{V}^- = \mathcal{S}$) si y solo si

1. \mathcal{S} es definido positivo maximal (definido negativo maximal);
2. \mathcal{S} es ortocomplementado.

Demostración. Supongamos que \mathcal{V} admite una descomposición de la forma

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{V}^- \oplus \mathcal{V}^0$$

donde $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^{++}$, $\mathcal{V}^- \subset \mathcal{B}^{--}$. De acuerdo al lema 2.13, el subespacio $\mathcal{V}^- \oplus \mathcal{V}^0$ es negativo. De manera que se tienen las hipótesis del lema 2.22 y así se concluye que \mathcal{S} es positivo definido maximal. Para ver que \mathcal{S} es ortocomplementado, basta notar que $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{V}^- \oplus \mathcal{V}^0$.

Supongamos que \mathcal{S} es un subespacio definido maximal ortocomplementado, luego \mathcal{S} es no degenerado y es tal que $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^\perp$. De acuerdo al lema 2.23, \mathcal{S}^\perp es negativo. Afirmamos que $\mathcal{S}^\perp = (\mathcal{S}^\perp)^0 \oplus (\mathcal{S}^\perp)^1$, donde $(\mathcal{S}^\perp)^1$ es un subespacio negativo no degenerado, esto como consecuencia del lema 2.30. Además, $(\mathcal{S}^\perp)^0$ consiste de todos los elementos neutros de \mathcal{S}^\perp (lema 2.19). De manera que $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus (\mathcal{S}^\perp)^0 \oplus (\mathcal{S}^\perp)^1$ conforma una descomposición fundamental de \mathcal{V} .

□

Corolario 2.35. *Un espacio con producto interno indefinido es descomponible si y solo si contiene subespacios maximales definidos ortocomplementados.*

Observación. El anterior teorema indica que la descomposición de un espacio con producto interno indefinido no es única. En efecto, considere el espacio del ejemplo 2.17. Cualquier subespacio definido positivo unidimensional, de acuerdo al teorema, sirve como subespacio positivo para una descomposición fundamental.

Capítulo

3

Espacios de Krein

Un espacio de Krein es un espacio con producto interno indefinido, descomponible y no degenerado, se define de tal manera que generalice el concepto de espacio de Hilbert. En este capítulo se estudiará la geometría de estos espacios mediante el uso de algunos operadores lineales.

Definición 3.1. Un espacio con producto interno $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$ que admite una descomposición fundamental de la forma (2.4), donde $(\mathcal{V}^+, [\cdot, \cdot])$ y $(\mathcal{V}^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert recibe el nombre de **Espacio de Krein**. En adelante usaremos la notación \mathcal{K} para los espacios de Krein y $\mathcal{K}^+, \mathcal{K}^-$ para los subespacios positivos y negativos de la descomposición fundamental, es decir

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-. \quad (3.1)$$

Ejemplo 3.2. Sea $\mathcal{K} = l_2$ el espacio de sucesiones de números complejos cuyos módulos de los términos al cuadrado forman una serie convergente, con el producto interno definido por

$$[x, y] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} x_n \overline{y_n}.$$

Este espacio admite una descomposición fundamental de la forma $l_2 = l_i \oplus l_p$, donde l_p es el espacio generado por la familia de sucesiones que constan de 1

en una única posición par y 0 en las demás, mientras que l_i es generado por la familia de sucesiones con 1 en alguna posición impar y 0 en las demás posiciones.

Los vectores de l_i son positivos, los vectores de l_p son negativos con respecto al producto interno dado. El único vector isotrópico es el vector nulo (sucesión formada por ceros).

Ejemplo 3.3. Considere el espacio con producto interno del ejemplo 2.17. Veamos que es un espacio de Krein. En efecto, si definimos

$$\mathcal{K}^+ = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\};$$

$$\mathcal{K}^- = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\},$$

obtenemos que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, donde $(\mathcal{K}^+, [\cdot, \cdot])$ y $(\mathcal{K}^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert.

No obstante, es posible determinar otra descomposición fundamental para \mathcal{K} de la siguiente manera. Sean $\mathcal{K}_1^+ = \{\lambda(2, 1) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\mathcal{K}_2^- = \{\lambda(1, 2) : \lambda \in \mathbb{C}\}$, entonces también se tiene que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ \oplus \mathcal{K}_2^-$, donde $(\mathcal{K}_1^+, [\cdot, \cdot])$ y $(\mathcal{K}_2^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert. Así, notamos que la descomposición de un espacio de Krein no necesariamente es única.

Una descomposición fundamental (3.1) de \mathcal{K} permite definir un producto interno definido positivo sobre todo el espacio de Krein \mathcal{K} mediante la fórmula

$$\langle x, y \rangle = [x^+, y^+] - [x^-, y^-],$$

donde $x = x^+ + x^-$, $y = y^+ + y^-$ son elementos de \mathcal{K} , es decir $x^\pm, y^\pm \in \mathcal{K}^\pm$.

Este producto interno se puede considerar como la suma ortogonal de los espacios de Hilbert \mathcal{K}^+ y $-\mathcal{K}^-$. Esto en razón de que si $x, y \in \mathcal{K}^+$, entonces $\langle x, y \rangle = [x, y]$. Análogamente, si $x, y \in \mathcal{K}^-$, entonces $\langle x, y \rangle = -[x, y]$. Por último, si $x \in \mathcal{K}^+$, $y \in \mathcal{K}^-$, luego $\langle x, y \rangle = [x, 0] - [0, y] = 0$.

Definición 3.4. Sea un espacio de Krein \mathcal{K} con descomposición fundamental (3.1). Se denota por $|\mathcal{K}|$ al espacio de Hilbert obtenido al reemplazar \mathcal{K}^- por su antiespacio $-\mathcal{K}^-$, es decir,

$$|\mathcal{K}| = \mathcal{K}^+ \oplus -\mathcal{K}^-. \quad (3.2)$$

Definición 3.5. Sea \mathcal{K} un espacio de Krein con descomposición fundamental $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ y $x \in \mathcal{K}$ tal que $x = x^+ + x^-$. Considérense los operadores $P^+ : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^+$, $P^- : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^-$ y $J : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ dados por

$$P^+(x^+ + x^-) = x^+, \quad P^-(x^+ + x^-) = x^-, \quad J(x^+ + x^-) = x^+ - x^-. \quad (3.3)$$

Los operadores P^+, P^- , se llaman **Proyectores Fundamentales** y el operador J se llama **Simetría Fundamental** asociados a la descomposición (3.1).

La anterior definición está motivada por la estrecha relación entre el espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ y el espacio de Hilbert $(|\mathcal{K}|, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, puesto que \mathcal{K} y $|\mathcal{K}|$ coinciden como espacios vectoriales ya que para cualquier par de vectores $x, y \in \mathcal{K}$,

$$[x, y] = \langle Jx, y \rangle \quad \text{y} \quad \langle x, y \rangle = [Jx, y]. \quad (3.4)$$

La Simetría Fundamental y la norma $\|\cdot\|_{|\mathcal{K}|}$ satisfacen:

- $J^2 = I$, donde I es el operador identidad. O equivalentemente $J^{-1} = J$.

Demostración. Sea $x \in \mathcal{K}$, entonces

$$\begin{aligned} JJx &= JJ(x^+ + x^-) \\ &= J(x^+ - x^-) \\ &= J(x^+ + (-x^-)) \\ &= (x^+ + x^-) \\ &= I(x). \end{aligned}$$

□

- J es simétrico.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{K}$, luego

$$\begin{aligned} [Jx, y] &= [(x^+ - x^-), (y^+ + y^-)] \\ &= [x^+, y^+] - [x^-, y^-]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} [x, Jy] &= [(x^+ + x^-), (y^+ - y^-)] \\ &= [x^+, y^+] - [x^-, y^-]. \end{aligned}$$

Por tanto $[Jx, y] = [x, Jy]$.

□

- $\|J\| = 1$.
- Para cualquier simetría fundamental J , se tiene que $|[x, y]| \leq \|x\| \|y\|$.

Demostración. Sean $x, y \in \mathcal{K}$, de acuerdo a la simetría fundamental y desigualdad de Cauchy, se tiene que

$$\begin{aligned} |[x, y]| &= |\langle Jx, y \rangle| \\ &\leq \|J\| \|x\| \|y\| \\ &= \|x\| \|y\|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

Corolario 3.6. Si \mathcal{S} es un subespacio positivo (negativo) de \mathcal{K} , es decir, $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}^+$ (\mathcal{B}^-) entonces $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathcal{B}^+$ (\mathcal{B}^-).

Observación. Como consecuencia del corolario anterior, si \mathcal{S} es un subespacio maximal positivo (negativo), entonces \mathcal{S} es cerrado.

3.1 Geometría en espacios de Krein

Un espacio de Hilbert H es un espacio de Krein, en cuyo caso ($\mathcal{K}^- = 0$). Análogamente ($\mathcal{K}^+ = 0$) si se considera el antiespacio de un espacio de Hilbert H . Excluyendo estos casos, un espacio de Krein tiene infinitas descomposiciones fundamentales, por tanto infinitos espacios de Hilbert asociados $|\mathcal{K}|$ y normas $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{|\mathcal{K}|}$. Pese a esto, las normas asociadas a cada descomposición fundamental, resultan equivalentes.

Teorema 3.7. *Sea \mathcal{K} un espacio de Krein con dos descomposiciones fundamentales*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ \oplus \mathcal{K}_1^- \quad \text{y} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+ \oplus \mathcal{K}_2^-. \quad (3.6)$$

Sea $S \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1^+, \mathcal{K}_2^+)$ definido por

$$Sx_1^+ = x_2^+, \quad \text{si } x_1^+ \in \mathcal{K}_1^+ \quad \text{y} \quad x_1^+ = x_2^+ + x_2^- \quad \text{con} \quad x_2^\pm \in \mathcal{K}_2^\pm,$$

y sea $T \in \mathcal{L}(-\mathcal{K}_1^-, -\mathcal{K}_2^-)$ dado por

$$Ty_1^- = y_2^-, \quad \text{si } y_1^- \in -\mathcal{K}_1^- \quad \text{y} \quad y_1^- = y_2^+ + y_2^- \quad \text{con} \quad y_2^\pm \in \mathcal{K}_2^\pm.$$

Entonces S, T son isomorfismos.

Demostración. Veamos que el gráfico de S es cerrado. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathcal{K}_1^+ . De acuerdo a la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+ \oplus \mathcal{K}_2^-$, podemos expresar la sucesión de manera que $x_n = y_n + z_n$, donde $y_n \in \mathcal{K}_2^+$, $z_n \in \mathcal{K}_2^-$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, note que $x_n - y_n \perp \mathcal{K}_2^+$ en el producto interno de \mathcal{K} , para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $x_n \rightarrow x$ en \mathcal{K}_1^+ , $Sx_n = y_n \rightarrow y$ en \mathcal{K}_2^+ , concluiremos que $x - y \in \mathcal{K}_2^-$. En efecto, sea $w \in \mathcal{K}$, entonces como el funcional $\varphi_w : \mathcal{K}_2^+ \rightarrow \mathbb{C}$ definido por $\varphi_w(x) = [x, w]$ es acotado, se tiene que para todo $w_2^+ \in \mathcal{K}_2^+$, $\varphi_{w_2^+}(x_n - y_n) \rightarrow \varphi_{w_2^+}(x - y)$, por tanto, $x - y \perp \mathcal{K}_2^+$ en el producto interno de \mathcal{K} . Encontramos que la descomposición de x en $\mathcal{K} = \mathcal{K}_2^+ \oplus \mathcal{K}_2^-$ está dada por $x = y + z$, donde $y \in \mathcal{K}_2^+$, $z = x - y \in \mathcal{K}_2^-$. Así $Sx = y$. De acuerdo al Teorema del Gráfico Cerrado, se concluye que $S \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_1^+, \mathcal{K}_2^+)$.

Supongamos que $x_1^+ \in K_1^+$ y es tal que $x_1^+ = x_2^+ + x_2^-$, donde $x_2^\pm \in \mathcal{K}_2^\pm$, luego

$$\begin{aligned}
\|x_1^+\|_{\mathcal{K}_1^+}^2 &= \langle x_1^+, x_1^+ \rangle_{\mathcal{K}_1^+} \\
&= [x_1^+, x_1^+]_{\mathcal{K}} \\
&= [x_2^+, x_2^+]_{\mathcal{K}_2^+} + [x_2^-, x_2^-]_{\mathcal{K}_2^-} \\
&\leq [x_2^+, x_2^+]_{\mathcal{K}_2^+} \\
&= [Sx_1^+, Sx_1^+]_{\mathcal{K}_2^+} \\
&= \|Sx_1^+\|_{\mathcal{K}_2^+}^2.
\end{aligned}$$

Así, $\|x_1^+\|_{\mathcal{K}_1^+} \leq \|Sx\|_{\mathcal{K}_2^+}$, es decir, S es acotado inferiormente, por tanto S es inyectivo y su gráfico es cerrado. Resta mostrar que S es sobreyectivo. Supongamos que $z \in \mathcal{K}_2^+$ y es tal que $z \perp \text{Im}(S)$, luego para todo $x_1^+ \in \mathcal{K}_1^+$ donde $x_1^+ = x_2^+ + x_2^-$, $x_2^\pm \in \mathcal{K}_2^\pm$, se tiene que $z \perp x_2^+$ y $z \perp x_2^-$. Por tanto $z \perp x_1^+$, es decir, $z \in \mathcal{K}_1^-$ y es tal que $0 \leq \langle z, z \rangle_{\mathcal{K}_2^+} = \langle z, z \rangle_{\mathcal{K}_1^-} \leq 0$. Concluimos que $z = 0$, entonces $\text{Im}(S)^\perp = 0$, luego S es sobreyectivo.

De manera similar, considerando el antiespacio de \mathcal{K} se puede concluir lo anterior para el operador $T \in \mathcal{L}(-\mathcal{K}_1^-, -\mathcal{K}_2^-)$.

□

Definición 3.8. Sea \mathcal{K} un espacio de Krein, decimos que el índice **positivo**, índice **negativo**, denotados por $(\text{ind}_+ \mathcal{K})$, $(\text{ind}_- \mathcal{K})$ son las dimensiones de \mathcal{K}^+ , \mathcal{K}^- respectivamente. Un espacio de **Pontryagin**, es un espacio de Krein \mathcal{K} tal que $(\text{ind}_- \mathcal{K}) < \infty$.

Corolario 3.9. Sea \mathcal{K} un espacio de Krein, entonces

$$\text{ind}_\pm \mathcal{K} = \dim \mathcal{K}_\pm,$$

no depende de la elección de la descomposición (3.6).

Corolario 3.10. Sea \mathcal{K} un espacio de Krein con dos descomposiciones funda-

mentales (3.6) y espacios de Hilbert asociados

$$|\mathcal{K}|_1 = \mathcal{K}_1^+ \oplus |\mathcal{K}_1^-| \quad \text{y} \quad |\mathcal{K}|_2 = \mathcal{K}_2^+ \oplus |\mathcal{K}_2^-|. \quad (3.7)$$

Entonces $|\mathcal{K}|_1$ y $|\mathcal{K}|_2$ tienen normas equivalentes, es decir, existen $m > 0$ y $M > 0$ tal que

$$m\|x\|_{|\mathcal{K}|_1} \leq \|x\|_{|\mathcal{K}|_2} \leq M\|x\|_{|\mathcal{K}|_1} \quad (3.8)$$

para todo $x \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, las topologías de normas en los espacios de Hilbert (3.7) son idénticas.

Demostración. Todo vector $x \in \mathcal{K}$ se puede expresar de la forma

$$x = x_1^+ + x_1^- = x_2^+ + x_2^-, \quad \text{donde } x_1^\pm \in \mathcal{K}_1^\pm \text{ y } x_2^\pm \in \mathcal{K}_2^\pm.$$

Si S, T son los operadores del teorema 3.7, se puede representar la parte positiva y negativa de acuerdo a la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1^+ \oplus \mathcal{K}_1^-$ de tal manera que $x_1^+ = Sx_1^+ + (I - S)x_1^+$ y $x_1^- = (I - T)x_1^- + Tx_1^-$, donde $(I - T)x_1^- \in \mathcal{K}_2^+$, ya que $x_1^- - x_2^- = x_2^+$. Análogamente concluimos que $(I - S)x_1^+ \in \mathcal{K}_2^-$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_2^+ &= Sx_1^+ + (I - T)x_1^- \\ x_2^- &= (I - S)x_1^+ + Tx_1^-. \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} \|x\|_{|\mathcal{K}|_2}^2 &= \|x_2^+\|_{|\mathcal{K}|_2}^2 + \|x_2^-\|_{|\mathcal{K}|_2}^2 \\ &= \|Sx_1^+ + (I - T)x_1^-\|_{|\mathcal{K}|_2}^2 + \|(I - S)x_1^+ + Tx_1^-\|_{|\mathcal{K}|_2}^2 \\ &\leq (\|S\| \|x_1^+\|_{|\mathcal{K}|_1} + \|I - T\| \|x_1^-\|_{|\mathcal{K}|_1})^2 + (\|I - S\| \|x_1^+\|_{|\mathcal{K}|_1} + \|T\| \|x_1^-\|_{|\mathcal{K}|_1})^2 \\ &\leq M (\|x_1^+\|_{|\mathcal{K}|_1}^2 + \|x_1^-\|_{|\mathcal{K}|_1}^2) \\ &= M\|x\|_{|\mathcal{K}|_1}^2, \end{aligned}$$

donde $M = \|S\|^2 + \|I - S\|^2 + \|I - T\|^2 + \|T\|^2$ es obtenido al expandir los términos elevados al cuadrados y aplicando la desigualdad $|2ab| \leq a^2 + b^2$.

De la misma manera pueden encontrarse otras relaciones parecidas invirtiendo los roles de las descomposiciones, obteniéndose así una constante m .

□

Ejemplo 3.11. Considere el conjunto \mathbb{C}^2 . Si $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \alpha \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ entonces se define un producto interno dado por $[a, b] = a_1 \bar{b}_1 - \alpha \bar{\beta}$. Se denota a este espacio mediante \mathbb{M}^2 . Note que $\mathcal{K}^+ = \text{gen}\{(1, 0)^t\}$ y $\mathcal{K}^- = \text{gen}\{(0, 1)^t\}$ son una descomposición fundamental para \mathbb{M}^2 . Asimismo, $\mathcal{K}_2^+ = \text{gen}\{(3, 1)^t\}$ y $\mathcal{K}_2^- = \text{gen}\{(1, 3)^t\}$ conforman otra descomposición fundamental para \mathbb{M}^2 , (ver figura 1).

La región sombreada representa los vectores no negativos, mientras que la región blanca representa los vectores no positivos. Una figura similar se puede representar para \mathbb{M}^3 , en cuyo caso, la región sombreada será un cono sólido.

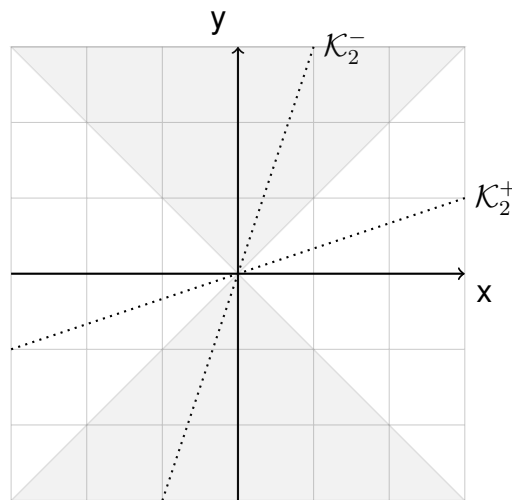


Figura 1

En general, se define al **Espacio de Minkowsky** \mathbb{M}^{n+1} como el conjunto de vectores $(n + 1)$ -dimensionales con entradas complejas. Dados dos elementos $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha)^t$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n, \beta)^t$ su producto interno se define mediante

$$[a, b] = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n - \alpha \bar{\beta}.$$

Note que \mathbb{M}^{n+1} es un espacio de Pontryagin, ya que $\text{ind}_+ \mathbb{M}^{n+1} = n, \text{ind}_- \mathbb{M}^{n+1} = 1$. Además, si representamos a los operadores sobre \mathbb{M}^{n+1} como matrices (en la

forma usual), entonces la simetría fundamental para el espacio está dada por

$$J_{M^{n+1}} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde I_n representa la matriz identidad de orden n . Por último, $|\mathbb{M}^{n+1}| = \mathbb{C}^{n+1}$ con el producto interno canónico.

Ejemplo 3.12. Sea $a \neq 0 \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{K} = L^2([-a, a])$ el espacio de Lebesgue de funciones complejas cuadráticamente integrables con respecto a la medida habitual de Lebesgue sobre el intervalo $[-a, a]$. Considere la siguiente forma sesquilineal simétrica $[\cdot, \cdot] : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$[f, g] = \int_{-a}^a f(x) \overline{g(-x)} dx.$$

Además, $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ es una descomposición fundamental para \mathcal{K} , donde

$$\mathcal{K}^+ = \{f \in \mathcal{K} : f(-x) = f(x)\} \text{ y } \mathcal{K}^- = \{f \in \mathcal{K} : f(-x) = -f(x)\}.$$

Luego \mathcal{K} es un espacio de Krein ya que $(\mathcal{K}^+, [\cdot, \cdot]), (\mathcal{K}^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert con simetría fundamental $(Jf)(x) = f(-x)$ para todo $x \in [-a, a]$. Por tanto se tiene al espacio de Hilbert $|\mathcal{K}|$ asociado a \mathcal{K} considerando el producto interno

$$[f, Jg] = \int_{-a}^a f(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle.$$

Definición 3.13. La **topología de la norma** de un espacio de Krein \mathcal{K} es la topología inducida por la norma de cualquier espacio de Hilbert (3.2) asociado a una descomposición fundamental (3.1) de \mathcal{K} .

De esta manera, las nociones de convergencia y continuidad utilizadas en el resto de este trabajo se entienden con respecto a esta topología, a menos que se indique lo contrario.

3.2 Operador adjunto

Sea \mathcal{K} un espacio de Krein, si dotamos a la topología de la norma de \mathcal{K} para una descomposición fundamental dada, esta resulta indistinguible como espacio topológico de $|\mathcal{K}|$. Si \mathcal{K}, \mathcal{H} son dos espacios de Krein, entonces $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ si y solo si $A \in \mathcal{L}(|\mathcal{K}|, |\mathcal{H}|)$. Luego, $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ coincide con $\mathcal{L}(|\mathcal{K}|, |\mathcal{H}|)$ y decimos que la norma $\|\cdot\|$ de $\mathcal{L}(|\mathcal{K}|, |\mathcal{H}|)$ es una **norma de operadores** para $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

Proposición 3.14. Sean \mathcal{K}, \mathcal{H} dos espacios de Krein, si dotamos al espacio $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ con la norma

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{|\mathcal{K}|}=1} \|Ax\|, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H}),$$

el espacio de operadores acotados resulta un espacio de Banach.

Nota. Dos importantes teoremas de la teoría de operadores en espacios de Hilbert también son validos para espacios de Krein.

- (Teorema del Gráfico Cerrado): Cualquier operador lineal de un espacio de Krein \mathcal{H} en un espacio de Krein \mathcal{K} , definido para todo $x \in \mathcal{H}$, es continuo si y solo si tiene gráfico cerrado.
- (Teorema de Representación de Riesz): Todo funcional lineal continuo φ sobre un espacio de Krein \mathcal{K} es de la forma $\varphi(x) = [x, y]$, $x \in \mathcal{K}$, para un único $y \in \mathcal{K}$.

Demostración. De acuerdo a la topología en \mathcal{K} , se tiene que $\varphi : |\mathcal{K}| \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo. Por el teorema de representación de Riesz existe un único $z \in \mathcal{K}$ tal que $\varphi(x) = \langle x, z \rangle_{|\mathcal{K}|}$ para todo $x \in \mathcal{K}$. Además, como $\langle x, z \rangle_{|\mathcal{K}|} = [x, Jz]$ tomando $y = Jz$ se obtiene la existencia y unicidad.

□

Dados dos espacios de Krein \mathcal{H} y \mathcal{K} , el adjunto de un operador $A \in (\mathcal{H}, \mathcal{K})$, denotado por A^* se define de manera similar que en los espacios de Hilbert, la existencia y unicidad del adjunto se sigue del teorema anterior.

Para todo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, existe un único operador $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$, llamado el **adjunto** de A tal que

$$[Ax, y]_{\mathcal{K}} = [x, A^*y]_{\mathcal{H}}, \text{ donde } x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}.$$

Los conceptos de adjunto (respecto a la métrica indefinida de \mathcal{K} y adjunto de Hilbert (respecto al producto interno asociado a $|\mathcal{K}|$) están relacionados: Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, entonces el adjunto $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ satisface,

$$A^* = J_{\mathcal{H}}A^{\times}J_{\mathcal{K}} \quad (3.9)$$

donde $A^{\times} \in \mathcal{L}(|\mathcal{K}|, |\mathcal{H}|)$ es el adjunto de Hilbert de A .

Demostración. Sean $x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{K}$ y denotemos por $J_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{K}}$ la simetría fundamental asociada a \mathcal{H}, \mathcal{K} respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} [Ax, y] &= \langle J_{\mathcal{K}}Ax, y \rangle_{|\mathcal{K}|} \\ &= \langle x, (J_{\mathcal{K}}A)^{\times}y \rangle_{|\mathcal{H}|} \\ &= \langle x, A^{\times}J_{\mathcal{K}}y \rangle_{|\mathcal{H}|} \\ &= [x, J_{\mathcal{H}}A^{\times}J_{\mathcal{K}}y]. \end{aligned}$$

Por la unicidad del adjunto se concluye que $A^* = J_{\mathcal{H}}A^{\times}J_{\mathcal{K}}$.

□

Definición 3.15. Sean \mathcal{K}, \mathcal{H} dos espacios de Krein. Decimos que

1. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es **autoadjunto**, si $A^* = A$.
2. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ es una **proyección**, si A es autoadjunto y $A^2 = A$.
3. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es **isométrico**, si $A^*A = 1_{\mathcal{K}}$.
4. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ es **unitario**, si A, A^* son isométricos.

Teorema 3.16. (Factorización de Bognár-Kramli). Sea \mathcal{K} un espacio de Krein. Cualquier operador autoadjunto $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ se puede escribir de la forma

$$A = DD^*,$$

donde $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{D}, \mathcal{K})$ para algún espacio de Krein \mathfrak{D} y $N(D) = \{0\}$.

Demostración. Denotemos por J la simetría fundamental de \mathcal{K} y $|\mathcal{K}|$ el espacio de Hilbert asociado a él. Como A es autoadjunto, se tiene que $A = A^* = JA^\times J$. Afirmamos que AJ es autoadjunto como elemento de $\mathcal{L}(|\mathcal{K}|)$. En efecto, ya que $AJ = JA^\times = (AJ)^\times$. Así, su descomposición polar es de la forma

$$AJ = |AJ|W = W|AJ|,$$

donde $|AJ| \in \mathcal{L}(|\mathcal{K}|)$ es un operador positivo y W es una isometría parcial autoadjunta con espacio inicial y final $\mathfrak{D} = \overline{R(|AJ|)}$, por tanto $(\mathfrak{D}, [\cdot, \cdot]_W)$ es un espacio de Krein con simetría fundamental $J_{\mathfrak{D}} = W|_{\mathfrak{D}}$ (ver [3]), donde $[\cdot, \cdot]_W$ es el producto interno indefinido dado por $[x, y]_W = \langle Wx, y \rangle_{|\mathcal{K}|}$, para todo $x, y \in \mathfrak{D}$.

Considere al operador lineal $D : \mathfrak{D} \rightarrow \mathcal{K}$ definido por $Dx = |JA|^{1/2}x$, $x \in \mathfrak{D}$. Note que $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{D}, \mathcal{K})$, ya que $|JA| \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ y \mathfrak{D} es un subespacio cerrado de \mathcal{K} . Además, de la ecuación (3.9) concluimos que $D^* = W|AJ|^{1/2}J$, por tanto $DD^* = |AJ|^{1/2}W|AJ|^{1/2}J = (AJ)J = A$. De acuerdo a la construcción del operador D , $N(D) = N(|JA|) \cap \mathfrak{D} = \{0\}$.

□

En la sección 2.2 se definió el concepto de compañero ortogonal \mathcal{M}^\perp para un subespacio \mathcal{M} de un espacio con producto interno \mathcal{V} . En particular, si \mathcal{M}, \mathcal{N} son subespacios de un espacio de Krein \mathcal{K} , las siguientes son algunas propiedades del compañero ortogonal.

- $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{M}}$.
- $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^\perp = \mathcal{M}^\perp \cap \mathcal{N}^\perp$.

- Si \mathcal{M}, \mathcal{N} son cerrados, entonces $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^\perp = \overline{\mathcal{M}^\perp + \mathcal{N}^\perp}$.
- $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{K}$ si y solo si $\mathcal{M}^\perp = 0$.

Las demostraciones se deducen al igual que en la teoría de espacios de Hilbert bajo el hecho de que si \mathcal{M} es un subespacio del espacio de Krein \mathcal{K} , entonces \mathcal{M}^\perp coincide con el subespacio $(JM)^\perp \subset |\mathcal{K}|$ donde J es la simetría fundamental asociada a la descomposición $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$. En efecto, si $x \in \mathcal{M}^\perp$ de acuerdo a la ecuación (3.4) y como J es un operador simétrico,

$$[x, y] = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \langle x, Jy \rangle = 0,$$

para todo $y \in \mathcal{M}$.

A pesar de esto, la diferencia entre los términos complemento ortogonal y compañero ortogonal radica que en general no se cumple que si \mathcal{M} es un subespacio cerrado de un espacio de Krein \mathcal{K} , entonces

$$\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp. \tag{3.10}$$

Considere el subespacio

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

del espacio de Minkowski \mathbb{M}^2 . Observe que \mathcal{M} es cerrado, ya que $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\perp$ y claramente $\mathbb{M}^2 \neq \mathcal{M}$.

Con el objetivo de identificar y caracterizar aquellos subespacios para los cuales existe un complemento ortogonal, es decir, para los cuales se cumple (3.10) se utilizarán las nociones de subespacio uniformemente definido y subespacio krein.

3.3 Subespacios Uniformemente Definidos

Sea \mathcal{M} un subespacio definido positivo del espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$, luego $[x, x] > 0$ para todo $x \neq 0 \in \mathcal{M}$. Por tanto $(\mathcal{M}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{M}})$ es un espacio pre-Hilbert con norma intrínseca $\|x\|_{\mathcal{M}} = [x, x]^{1/2}$. De acuerdo a la proposición 2.3 se sigue que $\|x\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{M}$. Con el objetivo de distinguir el caso en el cual estas normas son equivalentes se presenta la definición de subespacio uniformemente definido.

Algunos resultados se muestran para el caso positivo o negativo, entendiéndose que su análogo puede deducirse de la misma manera.

Definición 3.17. Sea \mathcal{K} un espacio de Krein con norma $\|\cdot\|$. Un subespacio \mathcal{M} de \mathcal{K} es **uniformemente positivo**, si existe $\delta > 0$ tal que

$$[x, x] \geq \delta \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{M}.$$

De manera análoga \mathcal{M} es **uniformemente negativo**, si existe $\delta > 0$ tal que

$$[x, x] \leq -\delta \|x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{M}.$$

Observación. Todo subespacio contenido en un subespacio uniformemente definido también es uniformemente definido.

Proposición 3.18. \mathcal{M} es uniformemente definido si y solo si $\overline{\mathcal{M}}$ es uniformemente definido.

Demostración. Si $\overline{\mathcal{M}}$ es uniformemente definido positivo, por la anterior observación tenemos que \mathcal{M} es uniformemente definido positivo. Ahora, supongamos que \mathcal{M} es uniformemente definido, de acuerdo a (3.5) y el hecho de que es continua se concluye que $\overline{\mathcal{M}}$ es también uniformemente definido.

Proposición 3.19. Sea S un subespacio cerrado del espacio de Krein \mathcal{K} , entonces S es uniformemente positivo si y solo si S es un espacio de Hilbert con la métrica indefinida de \mathcal{K} .

Demostración. Si \mathcal{S} es uniformemente positivo, es claro que \mathcal{S} es un espacio pre-Hilbert, ya que las condiciones 1), 2), 3) y 4) de producto escalar se satisfacen por hipótesis. Al ser \mathcal{S} cerrado, luego \mathcal{S} es completo bajo la norma inducida por el espacio de Hilbert $|\mathcal{K}|$.

Supongamos que $(\mathcal{S}, [\cdot, \cdot]_{\mathcal{S}})$ es un espacio de Hilbert, donde $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{S}}$ es el producto interno indefinido de \mathcal{K} restringido a \mathcal{S} . Consideremos la norma inducida por este producto interno $\|x\|_1 = [x, x]^{1/2}, x \in \mathcal{S}$. Fijando la simetría fundamental J de \mathcal{K} , denotemos por $\|\cdot\|$ la norma asociada a el espacio de Hilbert $|\mathcal{K}|$. Note que la aplicación identidad $id : (\mathcal{S}, \|\cdot\|) \longrightarrow (\mathcal{S}, \|\cdot\|_1)$ es acotada, ya que

$$\begin{aligned} (\|x\|_1)^2 &= [x, x] \\ &= \langle Jx, x \rangle \\ &\leq \|J\| \|x\|^2 \\ &= \|x\|^2. \end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema de la Aplicación Abierta, su inversa también está acotada, es decir, existe $C > 0$ tal que $\|x\| \leq C\|x\|_1$, esto implica que $[x, x] = \|x\|_1^2 \geq \delta\|x\|^2$ para $\delta = \frac{1}{C^2}$.

□

Lema 3.20. Sean \mathcal{K} un espacio de Krein y \mathcal{S} un subespacio positivo de \mathcal{K} , entonces $P^+|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow P^+\mathcal{S}$ es un homeomorfismo, donde P^+ es el proyector fundamental perteneciente a una descomposición canónica (3.1) de \mathcal{K} .

Demostración. Es claro que el proyector fundamental P^+ y su restricción $P^+|_{\mathcal{S}}$ son operadores lineales. Además, para todo $x \in \mathcal{S}$ y por la desigualdad de Cauchy se tiene que

$$\begin{aligned} \|P^+x\|^2 &= \langle P^+x, x \rangle \\ &\leq \|P^+x\| \|x\|. \end{aligned}$$

Por tanto $\|P^+\| \leq 1$. Por definición $P^+|_{\mathcal{S}}$ es sobreyectivo. Note que si $x \in \mathcal{S}$ es

tal que $P^+x = 0$, entonces $x = P^-x$, por lo tanto $x \in \mathcal{S} \cap \mathcal{K}^- \subset \mathcal{K}^+ \cap \mathcal{K}^- = \{0\}$. Resta probar que $(P^+|_{\mathcal{S}})^{-1}$ es continua. En efecto, sea $x \in \mathcal{S}$, luego $x = x^+ + x^-$, $x^\pm \in \mathcal{K}^\pm$ y es tal que $\|x^+\| > \|x^-\|$, entonces

$$\|(P^+|_{\mathcal{S}})x\|^2 = \|x^+\|^2 \geq \frac{1}{2}(\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

En ese sentido, $(P^+|_{\mathcal{S}})x = y$ si y solo si $(P^+|_{\mathcal{S}})^{-1}y = x$, donde $y \in P^+\mathcal{S}$. Por tanto

$$\|(P^+|_{\mathcal{S}})^{-1}y\|^2 \leq 2\|y\|^2, \text{ esto es, } \|(P^+|_{\mathcal{S}})^{-1}\| \leq \sqrt{2}.$$

□

Corolario 3.21. *Bajo las hipótesis del lema 3.20 se tiene que \mathcal{S} y $P^+\mathcal{S}$ son ambos cerrados o ambos no cerrados.*

Definición 3.22. Sea \mathcal{S} un subespacio negativo del espacio de Krein \mathcal{H} , llamamos al **operador angular** del subespacio \mathcal{S} con respecto a \mathcal{H}^- , al operador continuo

$$K = P^+(P^-|_{\mathcal{S}})^{-1}, \quad K : P^-\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{H}^+$$

Observación. La definición del operador angular implica que todo $x \in \mathcal{S}$ donde $x = x^+ + x^-$, $x^\pm \in \mathcal{H}^\pm$ se puede escribir de la forma $x = Kx^- + x^-$, con $x^- \in P^-\mathcal{S}$.

Si identificamos a \mathcal{H} como espacio vectorial con $\mathcal{H}^+ \times |\mathcal{H}^-|$, entonces cada elemento de \mathcal{H} está determinado por el par $(x, y)^t = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $x \in \mathcal{H}^+$, $y \in |\mathcal{H}^-|$.

Definición 3.23. (Representación de un subespacio definido como el gráfico de un operador). Sea \mathcal{H} un espacio de Krein con descomposición fundamental $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ y sea \mathcal{S} un subespacio negativo de \mathcal{H} . El operador angular de \mathcal{S} es una contracción K con $D(K) \subseteq |\mathcal{H}^-|$ y $R(K) \subseteq \mathcal{H}^+$ tal que como subespacio de $\mathcal{H}^+ \times |\mathcal{H}^-|$,

$$\mathcal{S} = Gr(K) = \left\{ \begin{pmatrix} Kx \\ x \end{pmatrix} : x \in D(K) \right\}.$$

Nota. Que K sea una contracción es consecuencia de que para todo $x \in D(K)$ como S es negativo, $[x + Kx, x + Kx]_{\mathcal{H}} \leq 0$ donde

$$\begin{aligned} [x + Kx, x + Kx]_{\mathcal{H}} &= [x, x]_{\mathcal{H}} + [Kx, Kx]_{\mathcal{H}} \\ &= -\langle x, x \rangle_{|\mathcal{H}^-|} + [Kx, Kx]_{\mathcal{H}^+} \\ &= -\|x\|_{|\mathcal{H}^-|}^2 + \|Kx\|_{\mathcal{H}^+}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|Kx\|_{\mathcal{H}^+} \leq \|x\|_{|\mathcal{H}^-|}$, esto es, $\|K\| \leq 1$.

Lema 3.24. *Sea \mathcal{H} un espacio de Krein y S un subespacio negativo de \mathcal{H} , si denotamos por K al operador angular de S con respecto a \mathcal{H} , entonces*

1. S es cerrado si y solo si $D(K)$ es cerrado en $|\mathcal{H}^-|$.
2. S es uniformemente negativo si y solo si $\|K\| < 1$.
3. S es negativo maximal si y solo si $D(K) = |\mathcal{H}^-|$, es decir, la proyección del subespacio S en $|\mathcal{H}^-|$, es todo $|\mathcal{H}^-|$.
4. S es uniformemente negativo maximal si y solo si $D(K) = |\mathcal{H}^-|$ y $\|K\| < 1$.

Demostración. 1. Consecuencia del teorema 1.25.

2. Supongamos que S es uniformemente negativo, luego

$$[x, x] = \|x^+\|^2 - \|x^-\|^2 \leq -\delta\|x\|^2 = -\delta\left(\|x^+\|^2 + \|x^-\|^2\right).$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)\|x^-\|^2 \geq \|x^+\|^2 = \|Kx^-\|^2, \quad (3.11)$$

es decir, $\|K\| < 1$. Recíprocamente, supongamos que $\|K\| < 1$, veamos que S es uniformemente negativo. En efecto, considere

$$\delta = \frac{1 - \|K\|^2}{1 + \|K\|^2} \quad (0 < \delta < 1),$$

luego despejando a $\|K\|^2$ obtenemos $\|K\|^2 = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)$. De manera que para todo

$x \in \mathcal{S}$ y $x^- \in |\mathcal{H}^-|$ tal que $x = x^+ + x^- = Kx^- + x^-$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|x^+\|^2 &= \|Kx^-\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \|x^-\|^2 \\ &= \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right) \|x^-\|^2. \end{aligned}$$

Y claramente es igual a la ecuación (3.11), así podemos concluir que \mathcal{S} es uniformemente negativo.

3. Si \mathcal{S} es negativo maximal, veamos que $P^-\mathcal{S} = \mathcal{H}^-$ y de acuerdo a la definición 3.23, el operador angular K de \mathcal{S} es tal que $D(K) = |\mathcal{H}^-|$. Supongamos que $P^-\mathcal{S} \neq \mathcal{H}^-$. De acuerdo al corolario 3.6, \mathcal{S} es cerrado y por consiguiente (lema 3.21) $P^-\mathcal{S}$ también lo es, luego no es denso en \mathcal{H}^- , así existe $z_0 \in \mathcal{H}^- \cap (P^-\mathcal{S})^\perp$ tal que $z_0 \neq 0$. Afirmamos que $z_0 \perp \mathcal{S}$ ya que para todo $x \in \mathcal{S}$ donde $x = x^+ + x^-$, con $x^\pm \in \mathcal{H}^\pm$

$$\begin{aligned} [z_0, x] &= [z_0, x^+ + x^-] \\ &= [z_0, x^-] \\ &= -\langle z_0, x^- \rangle \\ &= -\langle z_0, Px^- \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además, $z_0 \notin \mathcal{S}$ ya que de lo contrario z_0 sería un vector isotrópico, es decir, un vector neutral. De esta manera, hemos construido $\text{gen}\{z_0, \mathcal{S}\} = \mathcal{S}'$ tal que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}^-$ y $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ contradiciendo que \mathcal{S} es negativo maximal. Recíprocamente supongamos que $D(K) = |\mathcal{H}^-|$, es decir, $P^-\mathcal{S} = \mathcal{H}^-$. Afirmamos que para cualquier subespacio negativo \mathcal{S}' tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ se tiene que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$. De lo contrario para todo $x' \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}$, $P^-x' = x' \in \mathcal{H}^-$ y como $P^-\mathcal{S} = \mathcal{H}^-$ entonces existe $x \in \mathcal{S}$ tal que $x' = P^-x$, por lo tanto $P^-(x' - x) = 0$ y de acuerdo al lema 3.20, $x' = x$. Concluimos que \mathcal{S} es negativo maximal.

4. Consecuencia de 2. y 3.

□

Teorema 3.25. *Sea \mathcal{H} un espacio de Krein.*

1. *Un subespacio \mathcal{M} de \mathcal{H} es negativo maximal si y solo si \mathcal{M}^\perp es positivo maximal de \mathcal{H} .*
2. *Si \mathcal{M}^+ es un subespacio uniformemente positivo maximal de \mathcal{H} , entonces $\mathcal{M}^- = (\mathcal{M}^+)^\perp$ es uniformemente negativo maximal. Además, $\mathcal{H} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ es una descomposición fundamental de \mathcal{H} .*
3. *Todo subespacio negativo de \mathcal{H} está contenido en un subespacio negativo maximal de \mathcal{H} .*
4. *Todo subespacio uniformemente negativo de \mathcal{H} está contenido en un subespacio uniformemente negativo maximal de \mathcal{H} .*
5. *Sean $\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ subespacios uniformemente positivo, uniformemente negativo, respectivamente. Si $\mathcal{S}^+ \perp \mathcal{S}^-$, entonces existe una descomposición fundamental $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ tal que $\mathcal{S}^\pm \subseteq \mathcal{H}^\pm$.*

Demostración. 2. De acuerdo al lema 3.24 y aplicándolo para el caso positivo, podemos ver que si \mathcal{M}^+ es un subespacio uniformemente positivo maximal de \mathcal{H} , entonces es de la forma

$$\mathcal{M}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ Ku \end{pmatrix} : u \in \mathcal{H}^+ \right\},$$

donde $K : \mathcal{H}^+ \rightarrow |\mathcal{H}^-|$ y $\|K\| < 1$. Para hallar explícitamente a $(\mathcal{M}^+)^\perp$, considere $v \in (\mathcal{M}^+)^\perp$ que es de la forma $v = v^+ + v^-$ con $v^\pm \in \mathcal{H}^\pm$. Por definición para todo $u \in \mathcal{M}^+$ se tiene que $[u + Ku, v^+ + v^-] = 0$, es decir, $[u, v^+] = -[Ku, v^-]$.

Además, note que

$$\begin{aligned}
\langle u, v^+ \rangle_{\mathcal{H}^+} &= [u, v^+] \\
&= - [Ku, v^-] \\
&= \langle Ku, v^- \rangle_{|\mathcal{H}^-|} \\
&= \langle u, K^\times v^- \rangle_{\mathcal{H}^+},
\end{aligned}$$

donde $K^\times : |\mathcal{H}^-| \rightarrow \mathcal{H}^+$. Como u es arbitrario, concluimos que $v^+ = K^\times v^-$ y $(\mathcal{M}^+)^\perp$ queda determinado mediante

$$(\mathcal{M}^+)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} K^\times v^- \\ v^- \end{pmatrix} : v^- \in |\mathcal{H}^-| \right\}.$$

Note que $(\mathcal{M}^+)^\perp$ es uniformemente negativo maximal ya que por lo anterior $\|v^+\| < \|v^-\|$, $D(K^\times) = |\mathcal{H}^-|$ y $\|K^\times\| = \|K\| < 1$.

De acuerdo a la proposición 3.19, \mathcal{M}^+ y $-\mathcal{M}^-$ son espacios de Hilbert y es claro que su intersección coincide con el elemento nulo. Para ver que $\mathcal{H} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$, se debe cumplir que para todo $x^\pm \in \mathcal{H}^\pm$ existen $u \in \mathcal{H}^+$ y $v^- \in |\mathcal{H}^-|$ tales que el sistema

$$u + K^\times v^- = x^+ \tag{3.12}$$

$$v^- + Ku = x^- \tag{3.13}$$

tiene solución.

Despejando a v^- en la ecuación (3.13) obtenemos que $v^- = x^- - Ku$ y al reemplazar en (3.12), $u + K^\times(x^- - Ku) = x^+$ por lo tanto

$$u = (I^+ - K^\times K)^{-1} (x^+ - K^\times x^-) \quad (u \in \mathcal{H}^+),$$

donde $I^+ : \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+$ es el operador identidad. Reemplazando a u en (3.13)

concluimos que

$$v^- = x^- - K(I^+ - K^\times K)^{-1}(x^+ - K^\times x^-), \quad (v^- \in |\mathcal{H}^-|).$$

4. Sea \mathcal{M} un subespacio uniformemente negativo de \mathcal{H} , de acuerdo a la proposición 3.18, $\overline{\mathcal{M}}$ también es uniformemente definido negativo. Denotamos a su operador angular por \overline{K} y es tal que $D(\overline{K})$ es cerrado en $|\mathcal{H}^-|$. Además, $\|\overline{K}\| < 1$. Extendiendo \overline{K} a un operador $K' \in \mathcal{L}(|\mathcal{H}^-|, \mathcal{H}^+)$ de tal manera que

$$K'x^- = \begin{cases} \overline{K}x^-, & x^- \in D(\overline{K}) \\ 0, & x^- \in |\mathcal{H}^-| \cap D(\overline{K})^\perp \end{cases}$$

Note que el gráfico de K' , es un subespacio uniformemente negativo maximal de \mathcal{H} que contiene a \mathcal{M} .

5. Por hipótesis \mathcal{S}^+ es uniformemente positivo, luego $\overline{\mathcal{S}^+}$ también es uniformemente positivo y de acuerdo al inciso 4 para el caso positivo, existe un subespacio positivo maximal \mathcal{M}^+ que contiene a \mathcal{S}^+ . Note que $\overline{\mathcal{S}^+}, \mathcal{M}^+$ son espacios de Hilbert con la métrica indefinida de \mathcal{H} , luego por el teorema de proyección aplicado a \mathcal{M}^+ , existe un espacio de Hilbert \mathcal{T}^+ tal que

$$\mathcal{M}^+ = \overline{\mathcal{S}^+} \oplus \mathcal{T}^+.$$

En consecuencia con el inciso 2, se tiene que $\mathcal{M}^- = (\mathcal{M}^+)^\perp$ es uniformemente negativo maximal y es tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^- \\ &= (\overline{\mathcal{S}^+} \oplus \mathcal{T}^+) \oplus \mathcal{M}^- \\ &= \overline{\mathcal{S}^+} \oplus (\mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{M}^-). \end{aligned}$$

Note que $(\overline{\mathcal{S}^+})^\perp = \mathcal{T}^+ \oplus \mathcal{M}^-$, de esta manera, $(\overline{\mathcal{S}^+})^\perp$ es un espacio de Krein. Además, como \mathcal{S}^- es un subespacio uniformemente negativo de $(\overline{\mathcal{S}^+})^\perp$, aplicando un

argumento similar al realizado anteriormente para \mathcal{S}^+ , encontramos que

$$(\overline{\mathcal{S}^+})^\perp = (\overline{\mathcal{S}^-}) \oplus (\mathcal{N}^+ \oplus \mathcal{N}^-),$$

donde $\mathcal{N}^+, -\mathcal{N}^-$ son subespacios de \mathcal{H} y también espacios de Hilbert con respecto a la métrica indefinida de \mathcal{H} . Concluimos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{\mathcal{S}^+} \oplus (\overline{\mathcal{S}^+})^\perp \\ &= (\overline{\mathcal{S}^+} \oplus \mathcal{N}^+) \oplus (\overline{\mathcal{S}^-} \oplus \mathcal{N}^-). \end{aligned}$$

Así, la descomposición canónica obtenida es tal que $\mathcal{H}^\pm = \overline{\mathcal{S}^\pm} \oplus \mathcal{N}^\pm$.

□

Note que las demostraciones del teorema anterior corresponden a los incisos 2, 4 y 5. Esto teniendo en cuenta que la demostración para el inciso 1 se hace de la misma manera que el inciso 2 (con sus respectivos cambios en el operador angular). Igualmente, la demostración del inciso 3 sigue el mismo procedimiento al del inciso 4.

3.4 Subespacios Krein

En esta sección se muestra que las proyecciones en un espacio de Krein son similares a las proyecciones de un espacio de Hilbert, pero la geometría solo aplica a subespacios Krein.

Definición 3.26. Sea \mathcal{H} un espacio de Krein y \mathcal{M} un subespacio de \mathcal{H} . Decimos que \mathcal{M} es un **subespacio Krein** del espacio \mathcal{H} , si \mathcal{M} es un espacio de Krein bajo el producto interno de \mathcal{H} , es decir,

$$[x, y]_{\mathcal{M}} = [x, y]_{\mathcal{H}}, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{M}.$$

Teorema 3.27. Sean \mathcal{K} un espacio de Krein y \mathcal{M} un subespacio cerrado de \mathcal{K} ,

las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. \mathcal{M} es subespacio Krein de \mathcal{K} ;
2. $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$;
3. \mathcal{M} es el rango de una proyección P .

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Supongamos que \mathcal{M} es un espacio de Krein con la métrica indefinida de \mathcal{K} . Por definición $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-$ donde $\mathcal{M}^+, -\mathcal{M}^-$ son espacios de Hilbert. De acuerdo al ítem 5) del teorema 3.25, se tiene que $\mathcal{M}^\pm \subseteq \mathcal{K}^\pm$ para alguna descomposición fundamental $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ del espacio de Krein \mathcal{K} . Además como \mathcal{M}^+ es cerrado en \mathcal{K}^+ ,

$$\mathcal{K}^+ = \mathcal{M}^+ \oplus (\mathcal{K}^+ \cap (\mathcal{M}^+)^\perp).$$

Análogamente,

$$\mathcal{K}^- = \mathcal{M}^- \oplus (\mathcal{K}^- \cap (\mathcal{M}^-)^\perp).$$

Para ver que $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ observe que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^\perp &= (\mathcal{M}^+ \oplus \mathcal{M}^-)^\perp \\ &= (\mathcal{M}^+)^\perp \cap (\mathcal{M}^-)^\perp \\ &= \left((\mathcal{K}^+ \cap (\mathcal{M}^+)^\perp) \oplus \mathcal{K}^- \right) \cap \left((\mathcal{K}^- \cap (\mathcal{M}^-)^\perp) \oplus \mathcal{K}^+ \right) \\ &= \left(\mathcal{K}^+ \cap (\mathcal{M}^+)^\perp \right) \oplus \left(\mathcal{K}^- \cap (\mathcal{M}^-)^\perp \right). \end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp &= \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^- \\ &= \mathcal{K}. \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 3$. Por hipótesis $\mathcal{K} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, luego todo vector $x \in \mathcal{K}$ se puede escribir de la forma

$$x = y + z, \quad y \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathcal{M}^\perp.$$

Es claro que el operador $P : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$ definido por $Px = y$ es acotado. Además, que sea proyección es consecuencia de que para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{K}$ donde $x_i = y_i + z_i, i = 1, 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} [Px_1, x_2] &= [y_1, y_2 + z_2] \\ &= [y_1, y_2] \\ &= [y_1 + z_1, y_2] \\ &= [x_1, Px_2]. \end{aligned}$$

Por otro lado, $P^2x_1 = y_1 = Px_1$. Para ver que $R(P) = \mathcal{M}$ note que para todo $y \in \mathcal{M}$, $Py = y$ por tanto $y \in R(P)$. La otra inclusión es trivial. Concluimos que \mathcal{M} es el rango de la proyección P .

$3 \Rightarrow 1$. Supongamos que \mathcal{M} es el rango de una proyección P , es decir, $\mathcal{M} = R(P)$. De acuerdo al teorema 3.16, se puede factorizar a P de la forma $P = DD^*$ con $D \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, \mathcal{K})$ un operador inyectivo. Puesto que $P^2 = P$, se tiene que

$$DD^*DD^* = DD^*.$$

Además, como D es inyectivo, entonces $R(D^*)$ es denso en \mathcal{K} y se tiene que $D^*D = I, DD^*D = D$. Además, $R(D) = R(DD^*) = \mathcal{M}$. Así \mathcal{M} es un subespacio Krein ya que D es un isomorfismo del espacio de Krein \mathcal{D} sobre \mathcal{M} en la métrica indefinida de \mathcal{K} .

□

REFERENCIAS

- [1] S. Attal, *Operator theory and Spectral Theory*, Lecture Notes
- [2] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [3] T. Constantinescu & A. Gheondea, *Representations of Hermitian Kernels by Means of Krein Spaces*, Publ. RIMS. Kyoto Univ, 33(1997), 917–951.
- [4] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, 2ed, Springer-Verlag, 1998.
- [5] M. A. Dritschel & J. Rovnyak, *Extension theorems for contraction operators on Krein spaces*, Oper. Theory Adv. Appl. 47 (1990), 221-305.
- [6] M. A. Dritschel & J. Rovnyak, *Operators on indefinite inner product spaces*, Fields Institute Monographs No. 3, Amer. Math. Soc. Edited by Peter Lancaster, 1996, 141-232.
- [7] Ju. P. Ginzburg, *On J -contractive operator functions*, Dokl.Akad.Nauk SSSR 117, 171-173 (1957) [Russian]
- [8] I.S Iohvidov, *Unitary operators in a space with an indefinite metric*, Zap. Mat. Otd. Fiz-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obsc. (4) 21, 79-86 (1949) [Russian]
- [9] I. S. Iokhvidov & T. Ya. Azizov, *Linear Operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley and sons, 1989.
- [10] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators* (reprint of the 1980 edition), Springer-Verlag, Berlin, 1995.

- [11] Krein, M.G, *An application of the fixed-point principle in the theory of linear transformations of spaces with an indefinite metric*, Upehi Mat. Nauk 5, no. 2, 180-190 (1950) Mat. 8, 243-280 (1944) [Russian]
- [12] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley & sons, 1978.
- [13] L. S. Pontryagin, *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 8, 243-280 (1944) [Russian]
- [14] J. Rovnyak, *Methods on Krein space operator theory*, Interpolation theory, systems theory and related topics (Tel Aviv/Rehovot, 1999), Oper. Theory Adv. Appl., 134 (2002), 31–66.