ACCIONES PARCIALES Y TEORÍA DE GALOIS

ANDRÉS SEBASTIÁN CAÑAS PÉREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2018

ACCIONES PARCIALES Y TEORÍA DE GALOIS

ANDRÉS SEBASTIÁN CAÑAS PÉREZ

Trabajo de grado para optar al título de
MAGÍSTER EN MATEMÁTICAS

Director
HÉCTOR EDONIS PINEDO TAPIA
Doctor en Ciencias

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2018

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo del trabajo han participado muchas personas que han impactado mi vida, tanto académica como personalmente. Quiero manifestar mi gratitud a mis profesores por toda la disposición y conocimientos obtenidos. En especial a mi director de tesis, el profesor Héctor, por su esfuerzo, dedicación y sus oportuna orientación durante estos años. A la Escuela de Matemáticas, por ser como una segunda casa. A mis amigos, por acompañarme en este proceso.

Finalmente, quiero expresar mis sincera gratitud a toda mi familia por su apoyo y motivación incondicional. A mi madre Leonor, por siempre ser mi soporte y guía, por enseñarme a nunca rendirme. A mi *nonna Carmen*, por mostrarme la fortaleza de corazón. A mis tías Claudia, Martha y Olga, por su amor de madre.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: ACCIONES PARCIALES Y TEORÍA DE GALOIS *

AUTOR: ANDRÉS SEBASTIÁN CAÑAS PÉREZ **

PALABRAS CLAVE: ACCIONES PARCIALES, TEORÍA DE GALOIS DE ANILLOS CONMUTATIVOS, GRUPO DE HARRISON, EXTENSIONES DE GALOIS SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS, EXTENSIONES DE GALOIS PARCIALES SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS.

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo de grado expone la teoría de Galois de anillos conmutativos y la teoría de Galois parcial de anillos conmutativos, las cuales son generalizaciones de la teoría de Galois sobre cuerpos. Estas teorías se basan en el concepto de extensiones de anillos y acciones parciales de un grupo sobre álgebras. Dado R un anillo, se dice que S es una extensión de R si S es un R-módulo fiel, y por otra parte se asigna un grupo G, el cual va a estar actuando global o parcialmente sobre S, dependiendo el contexto. En particular, se estudian las extensiones de Galois sobre un anillo conmutativo grupo de Galois G, acciones parciales de grupos sobre álgebras, globalizaciones de acciones parciales y extensiones de Galois parciales sobre un anillo conmutativo dada una acción parcial α. En este trabajo se encuentran los resultados más importantes de estas teorías, las cuales son, entre otras, las condiciones para que una acción parcial admita una globalización, la relación entre extensiones de Galois globales y extensiones de Galois parciales, y los respectivos teoremas de correspondencia. Adicional a lo anterior, a partir de estas definiciones y resultados se detalla la construcción de estructuras, como el grupo de Harrison y el semigrupo inverso de Harrison, los cuales son, respectivamente, conjuntos de clases de equivalencia de las extensiones de Galois y extensiones de Galois parciales de un anillo R y un grupo abeliano G fijos.

* Tesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctorado en ciencias.

ABSTRACT

TÍTLE: PARTIAL ACTIONS AND GALOIS THEORY *

AUTHOR: ANDRÉS SEBASTIÁN CAÑAS PÉREZ **

KEYWORDS: PARTIAL ACTIONS, GALOIS THEORY OF COMMUTATIVE RINGS, HARRISON'S GROUP, GALOIS EXTENSIONS OF COMMUTATIVE RINGS, PARTIAL GALOIS EXTENSIONS OF COMMUTATIVE RINGS.

DESCRIPTION:

In this paper, the Galois theory of commutative rings and the partial Galois theory of commutative rings are presented. These theories are based on the concept of ring extensions and partial actions of groups over algebras. Given a ring R, S is a ring extension of R if S is a faithful R-module. If S is a ring extension, a group G is assigned, which is going to be acting globally or partially over S, depending on the context. In particular, Galois extensions of a commutative ring with Galois group G, partial actions over algebras, enveloping actions of partial actions, and partial Galois extensions of a commutative ring with partial action α are studied. The most important results of these theories are found in this document, which, among others, are a criterion for the existence of a global extension of a given partial action on an algebra and the respective correspondence theorems. In addition, the constructions of Harrison's group and Harrison's inverse semigroup are detailed. These structures are sets of equivalence classes of Galois extensions and partial Galois extensions of a fixed commutative ring R and a fixed abelian group G, respectively.

---

* Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Héctor Edonis Pinedo Tapia, Doctorado en ciencias.

INTRODUCCIÓN

El concepto de extensión de Galois de anillos conmutativos S/R fue introducido por M. Auslander y O. Goldman en [1]. Mas tarde, en 1965 los autores S. U. Chase, D. K. Harrison y A. Rosenberg publican [2], donde desarrollan esta teoría bajo la hipótesis de que S/R es separable y finitamente generado. En aquel trabajo se introduce, además, un teorema fundamental de extensiones de Galois, que establece una correspondencia biunívoca entre los subgrupos de G y las subálgebras de S/R que son separables y G-fuertes.

Por otro lado, las acciónes parciales son objetos de una investigación intensiva y tuvo sus orígenes por R. Exel en la teoría de álgebras de operadores, isometrías parciales, productos cruzados y C^*-álgebras ([3], [4], [5]). Los primeros resultados alge-

---

[1] AUSLANDER, Maurice y GOLDMAN, Oscar. “The Brauer group of a commutative ring”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 97 (1960), págs. 367-409.

[2] CHASE, Stephen; HARRISON, David y ROSENBERG, Alex. “Galois theory and Galois cohomology of commutative rings”. En: *Mem. Amer. Math. Soc.* 52 (1965), págs. 1-19.

[3] EXEL, Ruy. “Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences”. En: *J. Funct. Anal.* 122 (1994), págs. 361-401.

[4] EXEL, Ruy. “The Bunce-Deddens algebras as crossed products by partial automorphisms”. En: *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 25 (1994), págs. 317-179.

[5] EXEL, Ruy. “Twisted partial actions: a classification of regular C^*-algebraic bundles”. En: *Proc. London Math. Soc.* 74 (1997), págs. 417-443.

braicos sobre este concepto, fueron establecidos en [6], [7] y [8], y el desarrollo de una teoría de Galois para acciones parciales en [9], estos trabajos estimularon un crecimiento algebraico sobre acciones parciales, en particular, resultados en teoría de Galois han sido obtenidos en [10], [11], [12] y mas recientemente en [13], [14] y [15].

Una forma de obtener acciones parciales es restringir acciones globales (ver Ejemplo 4.1.1), así que una pregunta natural es saber cuándo una acción parcial puede ser obtenida a partir de una acción global, si lo anterior sucede se dice que la acción

---

[6] DOKUCHAEV, Michael y EXEL, Ruy. "Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations". En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2004), págs. 1931-1952.

[7] DOKUCHAEV, Michael; EXEL, Ruy y PICCIONE, Paolo. "Partial representations and partial group algebras". En: *J. Algebra* 226 (2000), págs. 505-532.

[8] STEINBERG, Benjamin. "Inverse semigroup homomorphisms via partial group actions". En: *Bull. Aust. Math. Soc.* 64 (2001), págs. 157-168.

[9] DOKUCHAEV, Michael; FERRERO, Miguel y PAQUES, Antonio. "Partial actions and Galois theory". En: *J. Pure Appl. Algebra* 208 (2007), págs. 77-87.

[10] BAGIO, Dirceu y PAQUES, Antonio. "Partial groupoid actions: globalization, Morita theory and Galois theory". En: *Comm. Algebra* 40 (2012), págs. 3658-3678.

[11] PAQUES, Antonio y SANT'ANA, Alveri. "When is a crossed product by a twisted partial action Azumaya?" En: *Comm Algebra* 38 (2010), págs. 1093-1103.

[12] PAQUES, Antonio; RODRIGUES, Virgínia y SANT'ANA, Alveri. "Galois correspondences for partial Galois Azumaya extensions". En: *J. Algebra Appl.* 10 (2011), págs. 835-847.

[13] DOKUCHAEV, Michael; PAQUES, Antonio y PINEDO, Héctor. *Partial actions cohomology and related homomorphisms (expanded version)*. 2018. Disponible en Internet: arXiv: `1804.03762v2 [quant-ph]`.

[14] MARÍN, Victor. "O semigrupo inverso das estensões abelianas parciais". Tesis doct. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016.

[15] PAQUES, Antonio y THAMUSIUNAS, Thaisa. "The Galois correspondence theorem for groupoid actions". En: *J. Algebra* 509 (2018), págs. 105-123.

parcial dada tiene una globalización. En [6], M. Dokuchaev y R. Exel muestran condiciones necesarias y suficientes para solucionar este problema de globalización en la categoría de álgebras con unidad.

En este trabajo se consideran acciones parciales globalizables (ver Teorema 4.2.1) y tiene como objetivo hacer un estudio profundo de [9] y [14] para entender la teoría de Galois de extensiones de anillos conmutativos en el contexto de acciones parciales y presentar el semigrupo inverso de Harrison.

Este trabajo está dividido en seis capítulos. Después de la introducción, en el capítulo 1 se encuentra el objetivo general y los objetivos especÃficos de este documento. En el capítulo 2 se dan definiciones y teoremas preliminares que son base para la construcción de los temas a seguir. A continuación, en el Capítulo 3 se encuentran las definiciones y resultados importantes de la Teoría de Galois de anillos conmutativos descrita en [16], como la definición de extensión de Galois y el teorema de correspondecia, y además la definición del grupo de Harrison. El capítulo 4 está dedicado al estudio de la Teoría de Galois parcial. Posteriormente, en el capítulo 5 se presenta la construcción y definición formal del semigrupo inverso de Harrison. Por último, en el capítulo 6 se plasman las conclusiones y alcances de este trabajo.

---

[16] PAQUES, Antonio. *Teoría de Galois sobre anillos conmutativos*. Universidad de los Andes, Mérida, 1999.

1. OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL

- Disertar sobre la teoría de Galois de anillos conmutativos basada en acciones parciales.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar la teoría de Galois de anillos conmutativos al contexto de acciones parciales.
- Estudiar productos cruzados parciales y tópicos relacionados al problema de globalización.

2. PRELIMINARES

En este capítulo se presenta las definiciones y los teoremas pertinentes de álgebra conmutativa que son fundamentales para la compresión y el desarrollo de los temas en las secciones siguientes. A partir de ahora R denotará un anillo con elemento identidad 1 y por un R-módulo se entenderá un R-módulo a izquierda.

2.1. MÓDULOS PROYECTIVOS

Definición 2.1.1. *Un R-módulo P es llamado proyectivo si P es un submódulo de un R-módulo libre L y existe un submódulo Q de L tal que*

$$P \oplus Q = L.$$

Es conocido que todo R-módulo es imagen homomorfa de un R-módulo libre. Esto es, si M es un R-módulo entonces existe un R-módulo libre L y una proyección $L \to M \to 0$. El siguiente teorema garantiza que los R-módulos proyectivos son exactamente aquellos R-módulos M tal que la sucesión exacta $L \to M \to 0$ se escinde.

Teorema 2.1.1. *Sea P un R-módulo. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *P es proyectivo;*

2. *Dado el diagrama de R-módulos,*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] & N \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "\sigma"] & \end{tikzcd}$$

donde θ es sobreyectivo, existe un homomorfismo de R-módulos $\sigma^* : P \to M$ tal que el diagrama conmuta;

3. *Si $0 \to M' \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} N \to 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, entonces la sucesión de R-módulos*

$$0 \to \textit{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{\beta^*} \textit{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\alpha^*} \textit{Hom}_R(P, N) \to 0$$

   es exacta, donde β^*, α^* están dados por $\beta^*(f) = \beta \circ f$ y $\alpha^*(g) = \alpha \circ g$, para todos $f \in \textit{Hom}_R(P, M')$ y $g \in \textit{Hom}_R(P, M)$, respectivamente;

4. *Toda sucesión exacta de R-módulos $M \xrightarrow{\phi} P \to 0$ se escinde, esto es, existe un homomorfismo de R-módulos $\psi : R \to M$ tal que $\phi\psi = \textit{id}_P$;*

5. *Existen conjuntos $\{p_i \mid i \in I\}$ en P y $\{f_i \mid i \in I\}$ en $P^* = \textit{Hom}_R(P, R)$ tales que para todo $p \in P$, $p = \sum\limits_{i \in I} f_i(p)p_i$, donde $f_i(p) = 0$ excepto para un número finito de índices.*

Corolario 2.1.1. *Sea P un R-módulo proyectivo. Sea*

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

una sucesión exacta de R-módulos. Entonces la sucesión

$$0 \to M' \otimes_R P \xrightarrow{\alpha \otimes \textit{id}_P} M \otimes_R P \xrightarrow{\beta \otimes \textit{id}_P} M'' \otimes_R P \to 0$$

es exacta.

Demostración. Inicialmente se mostrará que si L es un R-módulo libre, entonces la sucesión

$$0 \to M' \otimes_R L \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_L} M \otimes_R L \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_L} M'' \otimes_R L \to 0$$

es exacta. En efecto, sea $\{x_i \mid i \in I\}$ una base de L sobre R y sea $f_i \in L^*$, $i \in I$, dado por $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Luego, si $z = \sum\limits_{j \in J \subset I} m'_j \otimes x_j \in M' \otimes_R L$ es tal que $\alpha \otimes \mathrm{id}_L(z) = 0$, entonces

$$\sum_{j \in J} \alpha(m'_j) \otimes x_i = 0,$$

lo que implica que para cada $i \in J$,

$$(1 \otimes f_i)\Big(\sum_{j \in J} \alpha(m'_j) \otimes x_j\Big) = 0,$$

o sea,

$$0 = \sum_{j \in J} \alpha(m'_j) \otimes f_i(x_j) = \alpha(m'_i) \otimes 1.$$

Luego $z \in \mathrm{Ker}(\alpha) \otimes \mathrm{id}_L$. Como α es inyectivo, se tiene que $m'_i = 0$ para todo $i \in J$, esto es $z = 0$, luego $\alpha \otimes \mathrm{id}_L$ es inyectiva. Razonando de manera análoga se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\beta \otimes \mathrm{id}_L) &= \mathrm{ker}\beta \otimes_R L \\ &= \alpha(M') \otimes_R L \\ &= (\alpha \otimes \mathrm{id}_L)(M' \otimes_R L). \end{aligned}$$

La sobreyectividad de $\beta \otimes \mathrm{id}_L$ es inmediata.

Para el caso general. Sea P un R módulo proyectivo. Luego existen un R-módulo Q y un R-módulo libre L tales que $L = P \oplus Q$. Entonces se tiene las siguientes sucesiones de R-módulos:

$$0 \to M' \otimes_R P \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_P} M \otimes_R P \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_P} M'' \otimes_R P \to 0,$$

$$0 \to M' \otimes_R Q \xrightarrow{\alpha \otimes \mathrm{id}_Q} M \otimes_R Q \xrightarrow{\beta \otimes \mathrm{id}_Q} M'' \otimes_R Q \to 0.$$

Lo que da paso a la sucesión

$$0 \to M' \otimes_R (P \oplus Q) \xrightarrow{(\alpha\otimes \mathrm{id}_P)\oplus(\alpha\otimes \mathrm{id}_Q)} M \otimes_R (P \oplus Q) \xrightarrow{(\beta\otimes \mathrm{id}_P)\oplus(\beta\otimes \mathrm{id}_Q)} M'' \otimes_R (P \oplus Q) \to 0.$$

Como $P \oplus Q = L$, $(\alpha \otimes \mathrm{id}_P) \oplus (\alpha \otimes \mathrm{id}_Q) = \alpha \otimes (\mathrm{id}_P \oplus \mathrm{id}_Q) = \alpha \otimes \mathrm{id}_L$. De manera análoga $(\beta \otimes \mathrm{id}_P) \oplus (\beta \otimes \mathrm{id}_Q)$. De donde se tiene que la tercera sucesión es exacta y por consiguiente las otras dos también lo son. $\square$

Sea P un R-módulo proyectivo. Se dice que P es proyectivo finitamente generado si P es un sumando directo de un R-módulo libre finitamente generado. El siguiente teorema da una caracterización de módulos proyectivos finitamente generados.

Teorema 2.1.2. *Sea P un R-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *P es proyectivo finitamente generado;*
2. *$P \otimes_R P^* \xrightarrow{\phi}$ Hom$_R(P, P)$, donde $\phi\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes f_i\Big)(p) = \sum_{i=1I}^{n} f_i(p)p_i$ es un isomorfismo de R-módulos.*

Sea A una R-álgebra. Se dice que A es central si el centro

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \ \forall b \in A\}$$

de A es isomorfo al anillo R.

2.2. ÁLGEBRAS SEPARABLES SOBRE ANILLOS CONMUTATIVOS

Para poder definir las extensiones de Galois primero se debe recordar el concepto de álgebras separables.

Definición 2.2.1. *Sea R un anillo conmutativo. Una R-álgebra es un anillo A tal que:*

1. *$(A, +)$ es un R-módulo;*

2. $r(ab) = (ra)b = a(rb)$ *para todos* $r \in R$ *y* $a, b \in A$.

A partir de ahora, cada vez que se utilice $\otimes$ *se hará haciendo referencia a* $\otimes_R$.

Dadas dos R-álgebras A y B, $A \otimes B$ también tiene estructura de R-álgebra vía la acción inducida por $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1a_2 \otimes b_1b_2$, para todos $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$.

Sea S una R-álgebra no necesariamanete conmutativa con elemento identidad 1_S, se denota por S^o el R-álgebra opuesta de S y $S^{\mathfrak{e}} = S \otimes_R S^o$ el álgebra envolvente de S.

Se tiene que S es un $S^{\mathfrak{e}}$-módulo vía la acción inducida por $(a \otimes b)x = axb$, para todos $a, b, x \in S$. Considere $\mu : S^{\mathfrak{e}} \to S$ el epimorfismo de $S^{\mathfrak{e}}$-módulos definido como la multiplicación usual en S, es decir,

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.$$

Se denota $J(S) = \text{ker}\mu$. Entonces $J(S)$ es un ideal de $S^{\mathfrak{e}}$ generado por $\{s \otimes 1_S - 1_S \otimes s \mid s \in S\}$. Esto es

$$J(S) = \langle s \otimes 1_S - 1_S \otimes s \rangle \tag{1}$$

En efecto, para todo $s \in S$, $\mu(s \otimes 1_S - 1_S \otimes s) = s - s = 0$. Ahora, se toma $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in J(S)$, luego $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i = 0$ y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(1_S\otimes b_i)(a_i\otimes 1_S-1_S\otimes a_i) &= \sum_{i=1}^{n}(1_S\otimes b_i)(a_i\otimes 1_S)-(1_S\otimes b_i)(1_S\otimes a_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i\otimes b_i-1_S\otimes a_ib_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i-\sum_{i=1}^{n}1_S\otimes a_ib_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i-1_S\otimes\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i
\end{aligned}$$

Por lo tanto $J(S)$ es generado por $\{s\otimes 1_S-1_S\otimes s \mid s\in S\}$.

Teorema 2.2.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. S *es un* $S^{\mathfrak{e}}$*-módulo proyectivo;*

2. *La sucesión exacta de* $S^{\mathfrak{e}}$*-módulos*

$$0\to J(S)\to S^{\mathfrak{e}}\xrightarrow{\mu} S\to 0$$

   se escinde;

3. *Existe* $e\in S^{\mathfrak{e}}$ *tal que* $\mu(e)=1_S$ *y* $J(S)e=0$.

Demostración.

$1\Leftrightarrow 2$. Se sigue de la definición de módulo proyectivo.

$2\Rightarrow 3$. Sea $\nu: S\to S^{\mathfrak{e}}$ un homomorfismo de $S^{\mathfrak{e}}$-módulos tal que $\mu\circ\nu=\mathrm{id}_S$. Sea $e=\nu(1)\in S^{\mathfrak{e}}$. Luego

$$\mu(e)=\mu(\nu(1))=1.$$

Además, para cualquier $a \in S$, se tiene que $(1 \otimes a)1 = 1 \cdot 1 \cdot a = a$ y así

$$(a \otimes 1)e = (a \otimes 1)\nu(1) = \nu((a \otimes 1)1) = \nu(a) = (1 \otimes a)e.$$

Por lo tanto, $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)e = 0$ y $J(S)e = 0$.

$3 \Rightarrow 2$. Por hipótesis, existe $e \in S^{\mathfrak{e}}$ tal que $\mu(e) = 1$ y $J(S)e = 0$. Se define $\nu : S \to S^{\mathfrak{e}}$ por $\nu(a) = (a \otimes 1)e = (1 \otimes a)e,$ así, $\nu(a + b) = ((a + b) \otimes 1)e = \nu(a) + \nu(b)$ y $\mu \circ \nu = \mathrm{id}_S$. En efecto, dado $a \in S$, como μ es un epimorfismo de $S^{\mathfrak{e}}$-módulos, $\mu(\nu(a)) = \mu((a \otimes 1)e) = (a \otimes 1)\mu(e) = (a \otimes 1)1_S = a1_S = a$. Ahora, dados $a, b, c \in S$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\nu((a \otimes b)c) &= \nu(acb) \\
&= (acb \otimes 1)e \\
&= (ac \otimes 1)(b \otimes 1)e \\
&= (ac \otimes 1)(1 \otimes b)e \\
&= (ac \otimes b)e \\
&= (a \otimes b)(c \otimes 1)e \\
&= (a \otimes b)\nu(c).
\end{aligned}$$

Luego $\nu : S \to S^{\mathfrak{e}}$ es un homomorfismo de $S^{\mathfrak{e}}$-módulos tal que $\mu \circ \nu = \mathrm{id}_S$. □

Se dice que S es separable sobre R si S satisface una, y por lo tanto todas, de las condiciones del teorema anterior. Sea S separable sobre R, y sea $e \in S^{\mathfrak{e}}$ verificando 3 del Teorema 2.2.1, entonces e es idempotente. En efecto, e cumple que $e - e1 \otimes 1 \in J(S)$ y gracias a esto se obtiene

$$e^2 - e = (e - 1 \otimes 1)e \in J(S)e = 0.$$

Tal elemento e se llamará un idempotente de separabilidad de S sobre R.

Proposición 2.2.1. *Sea S una R-álgebra separable conmutativa. Entonces su idempotente de separabilidad es único.*

Demostración. Sean $e, e' \in S^{\mathfrak{e}}$ tales que $\mu(e) = \mu(e') = 0$ y $J(S)e = J(S)e' = 0$. Luego

$$\mu(e) - \mu(e') = \mu(e - e') = 0,$$

por lo tanto $e - e' \in J(S)$. Entonces $(e - e')e = 0 = -(e - e')e'$. Luego

$$\begin{aligned} e^2 - e'e &= e - e'e \\ &= -ee' + e'^2 \\ &= e' - ee'. \end{aligned}$$

Como S es conmutativa se obtiene que $e = e'$ $\square$

Ejemplo 2.2.1. *Sea R un anillo conmutativo con elemento identidad 1_R, entonces R es una R-álgebra separable ya que $\mu : R^{\mathfrak{e}} \to R$ es un isomorfismo.*

Ejemplo 2.2.2. *Si se toma $R = \mathbb{Z}$ y $S = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para un entero $n > 1$, se obtiene que $\mu : S \otimes S \to S$ es, también, un isomorfismo, por lo tanto $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es una $\mathbb{Z}$-álgebra separable.*

3. TEORÍA DE GALOIS

3.1. EXTENSIONES DE GALOIS

Como se mencionó en la introducción, el concepto de extensión de Galois de un anillo conmutativo apareció en el trabajo de Auslander y Goldman en [1]. Más tarde, en [2] este concepto fue desarrollado, obteniendo, entre otras cosas, varias equivalencias del mismo.

Dado un R-módulo P, el anulador de P es el conjunto

$$\text{ann}_R(P) = \{r \in R \mid rp = 0, \ \forall p \in P\}.$$

Se dice que P es fiel si $\text{ann}_R(P) = 0$ y que S es una extensión de R si S es fiel como R-módulo. Luego si S se una extensión de R, existe una inmersión natural $\varphi : R \to S$, dada por $\varphi(r) = r1_S$.

Proposición 3.1.1. *Si P es un R-módulo proyectivo finitamente generado y fiel, entonces $T_R(P) = R$, donde $T_R(P)$ es el ideal generado por $\{f(p) \in R \mid p \in P$ y $f \in P^*\}$.*

Ahora, dados S una extensión del anillo R y G un subgrupo finito del grupo Aut(S) de todos los automorfismos de S, se denotará como $\triangle(S : G)$ el S-módulo libre con base $\{\mu_\sigma \mid \sigma \in G\}$. Se define sobre este conjunto la suma componente a componente y la multiplicación de la siguiente forma:

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \mu_\sigma\right)\left(\sum_{\tau \in G} b_\tau \mu_\tau\right) = \sum_{\sigma, \tau \in G} a_\sigma \sigma(b_\tau) \mu_{\sigma\tau}.$$

La multiplicación definida anteriormente dota, junto a la suma, a $\triangle(S : G)$ de una estructura de anillo no conmutativo con identidad $1\mu_1 = \mu_1$. Note que $\triangle(S : G)$ es un R-módulo y una R-álgebra, si y sólo si, $G \subset \mathrm{Aut}_R(S) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(S) \mid \sigma(x) = x,\ \forall x \in R\}$.

En efecto, si $\triangle(S : G)$ es un R-álgebra y $r \in R$, se tiene que $(\mu_\sigma)(r\mu_1) = r\mu_\sigma$, pero por la multiplicación definida se tiene $(\mu_\sigma)(r\mu_1) = \sigma(r)\mu_\sigma$, por lo tanto $\sigma(r) = r$. Como σ y r eran arbitrarios, se puede concluir que $G \subset \mathrm{Aut}_R(S)$. Recíprocamente se tiene que si $G \subset \mathrm{Aut}_R(S)$ entonces dados $r, p \in R$, vale que

$$
\begin{aligned}
r\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\mu_\sigma\right)p\left(\sum_{\tau\in G} b_\tau\mu_\tau\right) &= \sum_{\sigma,\tau\in G} ra_\sigma\sigma(pb_\tau)\mu_{\sigma\tau} \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in G} ra_\sigma\sigma(p)\sigma(b_\tau)\mu_{\sigma\tau} \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in G} ra_\sigma p\sigma(b_\tau)\mu_{\sigma\tau} \\
&= rp\sum_{\sigma,\tau\in G} a_\sigma\sigma(b_\tau)\mu_{\sigma\tau} \\
&= (rp)\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\mu_\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in G} b_\tau\mu_\tau\right).
\end{aligned}
$$

Sea $A = \mathrm{Hom}(S, S)$ entonces A es una R-álgebra con elemento identidad $1_A = \mathrm{id}_S$ y además es un S-módulo vía $(sf)(s') = sf(s')$, para todos $s, s' \in S$ y $f \in A$.

Además, sea $\phi : \triangle(S : G) \to A$ dada por

$$
\phi\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma\mu_\sigma\right)(s) = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\sigma(s),
$$

para todo $s \in S$, luego ϕ es un homomorfismo de S-módulos. Además, si $G \subset \mathrm{Aut}_R(S)$, ϕ también es un homomorfismo de R-álgebras.

Con las mismas condiciones anteriores se considerará el S-módulo libre denotado por $\bigtriangledown(S:G)$ cuya base es $\{\nu_\sigma \mid \sigma \in G\}$, sobre este S-módulo se define la multiplicación:

$$\left(\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \nu_\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in G} b_\tau \nu_\tau\right) = \sum_{\sigma,\tau\in G} a_\sigma b_\tau \delta_{\sigma,\tau}\nu_\sigma,$$

donde

$$\delta_{\sigma,\tau} = \begin{cases} 1, & \text{si } \sigma = \tau; \\ 0, & \text{si } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

La multiplicación expresada arriba dota a $\bigtriangledown(S:G)$ de una estructura de S-álgebra conmutativa con elemento identidad $\sum\limits_{\sigma\in G}\nu_\sigma$. Sea $\psi : S\otimes S \to \bigtriangledown(S:G)$, dada por

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in G} a_i\sigma(b_i)\nu_\sigma,$$

considerando $S\otimes S$ como S-álgebra vía acción $s(a\otimes b) = (sa)\otimes b$, para todos $a,b,s\in S$ se tiene que ψ es un homomorfismo de S-álgebras.

Teorema 3.1.1 ([16], Teorema 3.4)**.** *Sean S una extensión de R y G un subgrupo finito de Aut(S). Sea $S^G = \{x\in S \mid \sigma(x) = x,\ \forall\sigma\in G\}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. a) *S es un R-módulo proyectivo finitamente generado;*

   b) *$\phi : \triangle(S:G) \to$ Hom$_R(S,S)$ es un isomorfismo de R-álgebras.*

2. a) *$S^G = R$;*

   b) *$\psi : S\otimes S \to \bigtriangledown(S:G)$ es un isomorfismo de S-álgebras.*

3. a) *$S^G = R$;*

   b) *existen elementos $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n\in S$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\sigma(y_j) = \delta_{1,\sigma}.$$

4. a) $S^G = R$;

   b) *Para cada $\sigma \neq 1$ en G y para cada ideal maximal M de S, existe $x \in S$ tal que $\sigma(x) - x \in M$.*

5. a) $S^G = R$;

   b) *Para cualquier idempotente no nulo $e \in S$ y para cada par $\sigma \neq \tau$ en G existe $x \in S$ tal que $\sigma(x)e \neq \tau(x)e$;*

   c) *S es separable sobre R.*

Se demostrará una versión más general de este teorema en el Teorema 4.3.2.

Definición 3.1.1. *Sean S una extensión de R y $G \subset$ Aut(S) un subgrupo finito. Se dice que S* ***es una extensión de Galois de*** *R* ***con grupo de Galois*** *G, si satisface una de las condiciones, y por lo tanto todas, del teorema anterior.*

Corolario 3.1.1 ([16], Corolario 3.6)**.** *Sea S una extensión de Galois de R con grupo de Galois G*

1. *Existe un elemento $c \in S$ tal que tr$_{S/R}(c) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(c) = 1$;*
2. *R es un sumando directo de S como R-módulo;*
3. *Si T es una R-álgebra conmutativa, con elemento identidad 1_T, y G actúa sobre $T \otimes S$ vía $\sigma(t \otimes s) = t \otimes \sigma(s)$, para todo $s \in S$, $t \in T$ y $\sigma \in G$, entonces $T \otimes S$ es una extensión de Galois de T con grupo de Galois G.*

Demostración.

1. Evidentemente tr$_{S/R} \in$ Hom$_R(S, R)$ y tr$_{S/R} = \phi(\sum_{\sigma \in G} u_\sigma)$, donde ϕ es el isomorfismo mencionado en el teorema anterior. Sea $t = \sum_{\sigma \in G} u_\sigma \in \triangle(S : G)$ y se demostrará que Hom$_R(S, R) = \phi(tS)$. Por lo tanto, para todo $f \in$ Hom$_R(S, R)$, existe $s \in Se$ tal que
$$f = \phi(ts) = \phi(\sum_{\sigma \in G} \sigma(s) u_\sigma)$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(\sum_{\sigma\in G}\sigma(s)u_\sigma)(x) \\ &= \sum_{\sigma\in G}\sigma(s)\sigma(x) \\ &= \sum_{\sigma\in G}\sigma(sx) \\ &= \mathrm{tr}_{S/R}(sx), \end{aligned}$$

para todo $x \in S$. Esto muestra que para todo $f \in \mathrm{Hom}_R(S,R)$, $f = \mathrm{tr}_{S/R}(s-)$ para algún $s \in S$. Por otra parte, S es un R-módulo fielmente proyectivo. Luego existen $x_1, \cdots, x_n \in S$ y $f_1, \cdots, f_n \in \mathrm{Hom}_R(S,R)$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) = 1$ por la Proposición 3.1.1. Luego existen $s_1, \cdots, s_n \in S$ tales que $f_i = \mathrm{tr}_{S/R}(s_i-)$ y

$$1 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}_{S/R}(s_ix_i) = \mathrm{tr}_{S/R}(\sum_{i=1}^{n} s_ix_i) = \mathrm{tr}_{S/R}(c),$$

para $c = \sum\limits_{i=1}^{n} s_ix_i \in S$.

2. Por 1, existe $c \in S$ tal que $\mathrm{tr}_{S/R}(c) = 1$. Luego la sucesión de R-módulos $S \xrightarrow{\mathrm{tr}_{S/R}} R \to 0$ es exacta. Se define $\theta : R \to S$ por $\theta(r) \in R$, para cualquier $r \in R$. θ es un homomorfismo de R-módulos, $\mathrm{tr}\circ\theta = \mathrm{id}_R$ y se sigue el resultado.

3. Por 2, $S = R \oplus N$ para algún R-módulo N, entonces $T \otimes S = (T \otimes R) \oplus (T \otimes N)$ y se puede identificar T con $T \otimes R$ en $T \otimes S$. Si $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ son elementos de S tales que satisfacen $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\sigma(y_i) = \delta_{1,\sigma}$, entonces $1 \otimes x_1, \cdots, 1 \otimes$

$x_n, 1 \otimes y_1, \cdots, 1 \otimes y_n$ son elementos de $T \otimes S$ y

$$\sum_{i=1}^{n}(1 \otimes x_i)(1 \otimes \sigma)(1 \otimes y_i) = 1 \otimes \sum_{i=1}^{n} x_i \sigma(y_i) = 1 \otimes \delta_{1,\sigma} = \delta_{1,\sigma}.$$

Hace falta mostrar que $T = (T \otimes S)^G$. Para todo $t \in T$ se tiene que $(1 \otimes \sigma)(t \otimes 1) = t \otimes \sigma(1) = t \otimes 1$, para cualquiera que sea $\sigma \in G$ y así $T = T \otimes R \subset (T \otimes S)^G$. Sea $w \in (T \otimes S)^G$. Por $1)$ existe $c \in S$ tal que tr$(c) = 1$. Entonces $\sum\limits_{\sigma \in G}(1 \otimes \sigma)(1 \otimes c) = 1 \otimes 1$. Ahora, sea $w(1 \otimes c) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i \otimes s_i \in T \otimes S$. Luego

$$\begin{aligned} w = w(1 \otimes 1) &= w(\sum_{\sigma \in G}(1 \otimes \sigma)(1 \otimes x)) \\ &= \sum_{\sigma \in G}(1 \otimes \sigma)(w(1 \otimes c)), \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} w &= \sum_{\sigma \in G}(1 \otimes \sigma)(w(1 \otimes c)) \\ &= \sum_{\sigma \in G}(1 \otimes \sigma)(\sum_{i=1}^{m} t_i \otimes s_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} t_i \otimes \sum_{\sigma \in G} \sigma(s_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} t_i \otimes \text{tr}(s_i) \in T \otimes R = T. \end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.2.1. *Sean $f, g : S \to T$ homomorfismos de anillos. Se dice que f y g son fuertemente distintos si para todo idempotente no nulo $e \in T$ existe $s \in S$ tal que $f(s)e \neq g(s)e$.*

Lema 3.2.1. *Sean S una R-álgebra separable con elemento identidad 1_S. Sea $f : S \to R$ un homomorfismo de R-álgebras. Entonces existe un único idempotente $e \in S$ tal que $f(e) = 1_R$ y $se = f(s)e$, cualquiera que sea $s \in S$. Más aún, si*

$$f_1, f_2, \cdots, f_n : S \to R$$

son homomorfismos de R-álgebras fuertemente distintos dos a dos, entonces los correspondientes idempotentes $e_1, e_2, \cdots, e_n \in S$ satisfacen que $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$ y $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$ para $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

Demostración. Sea $f : S \to R$ un homomorfismo de R-álgebras. Como S es separable, existen $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in S$ tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$ y $\sum\limits_{i=1}^{n} s x_i \otimes y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i s$, para todo $s \in S$. Sea $e = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) y_i \in S$. Entonces

$$\begin{aligned} f(e) &= f\big(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) y_i\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f(y_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) \\ &= f(1) = 1 \end{aligned}$$

Ahora, para todo $s \in S$, se tiene $(f \otimes 1)\big(\sum_{i=1}^{n} sx_i \otimes y_i\big) = (f \otimes 1)\big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i s\big)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(sx_i) \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes y_i s,$$

por un lado se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} f(sx_i) \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes f(sx_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes f(s)f(x_i)y_i = 1 \otimes f(s)e,$$

y por otro

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \otimes y_i s = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes f(x_i)y_i s = 1 \otimes se,$$

luego $1 \otimes f(s)e = 1 \otimes se$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu(1 \otimes f(s)e) &= f(s)e \\ &= se \\ &= \mu(1 \otimes se). \end{aligned}$$

Así $f(s)e = se$, para todo $s \in S$. Ahora, sea $s = e$, $f(e)e = e^2$. Por un lado se tenía que $f(e) = 1$, luego $1e = e = e^2$. Por lo tanto, e es idempotente. Sea $e' \in S$ otro idempotente que verifica $f(e') = 1$ y $f(s)e' = se'$, para todo $s \in S$. Luego $e' = f(e)e' = ee' = e'e = f(e')e = e$, es decir, $e = e'$.

Sean ahora $f_1, \cdots, f_n : S \to R$ homomorfismos de R-álgebras fuertemente distintas dos a dos. Sean $e_1, \cdots, e_n \in S$ los respectivos idempotentes. Sea $e_{ij} = f_i(e_j)$, entonces

$$e_{ji}^2 = f_i(e_j)f_i(e_j) = f_i(e_j^2) = f_i(e_j) = e_{ji}.$$

Así, e_{ij} es idepotente, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Ahora

$$\begin{aligned} f(s)e_{ij} &= f_i(s)f_i(e_j) \\ &= f_i(se_j) \\ &= f_i(f_j(s)e_j) \\ &= f_j(s)f_i(e_j) \\ &= f_j(s)e_{ij}, \end{aligned}$$

para todo $s \in S$. Como f_i, f_j son fuertemente distintas si $i \neq j$ se concluye que $e_{ij} = 0$, luego $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Finalmente $e_ie_j = f_j(e_i)e_j = \delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

□

Definición 3.2.2. *Sea S una extensión de Galois de R con grupo de Galois G y $T \subset S$ subanillo. Se dice que T es G-fuerte si para todos $\sigma, \tau \in G$, $\beta_\sigma|_T = \beta_\tau|_T$ ó $\beta_\sigma|_T$ y $\beta_\tau|_T$ son fuertemente distintos.*

Si S es una extensión de Galois de R con grupo de Galois G, $H \subset G$ un subgrupo de G y $T \subset S$ es una R-subálgebra de S, se denotan $S^H = \{s \in S \mid \beta_\sigma(s) = s, \ \forall \sigma \in H\}$ y $H_T = \{\sigma \in G \mid \beta_\sigma(x) = x, \ \forall x \in T\}$. S^H es R-subálgebra de S y H_T es un subgrupo de G.

A continuación se presenta el Teorema fundamental de la teoría de Galois para anillos conmutativos con unidad. Se establecerá una demostración de una versión más general de este resultado en el Teorema 4.4.1.

Teorema 3.2.1 (**Teorema fundamental de la teoría de Galois**). *[16, Teorema 3.8] Sea S una extensión de Galois de R con grupo de Galois G.*

1. *Sea H un subgrupo de G y $T = S^H$. Entonces T es una R-álgebra separable y G-fuerte como subálgebra de S, S es una extensión de Galois de T con grupo de Galois H y $H = H_T$.*

2. *Sea T una R-subálgebra separable y G-fuerte de S y $H = H_T$. Entonces $T = S^H$.*

3. *Para cada $\sigma \in G$ y cada R-subálgebra separable y G-fuerte T de S, $H_{\sigma(T)} = \sigma H_T \sigma^{-1}$. En consecuencia un grupo H de G es normal, si y sólo si, $\sigma(S^H) = S^H$, para todo $\sigma \in G$ y en este caso S^H es una extensión de Galois de R con grupo de Galois G/H.*

3.3. EL GRUPO DE HARRISON

En 1965, Harrison en [17] presentó un estudio sobre las extensiones de Galois de un mismo anillo con grupo de Galois abeliano. El conjunto de clases de isomorfismos de tales extensiones se le dota de un producto con el cual es un grupo, llamado el grupo de Harrison, que se definirá a seguir.

Definición 3.3.1. *Sean $B \supseteq A$ y $B' \supseteq A$ extensiones de anillos.*

- *Una extensión de Galois B de un anillo A con grupo de Galois G se dice abeliana si G es abeliano.*

- *Se dice que dos extensiones abelianas de Galois B y B' de A con mismo grupo de Galois G son G-isomorfas si existe un isomorfismo de álgebras $f : B \to B'$ tal que*

$$f \circ \beta_\sigma = \beta'_\sigma \circ f.$$

Se consideran las clases $[B]$ bajo la relación de G-isomorfismos. Se denota este conjunto por $T_{gl}(G, A)$. Sean $[B], [B'] \in T_{gl}(G, A)$. Entonces $B \otimes_A B'$ es una extensión

[17] HARRISON, David. “Abelian extensions of commutative rings”. En: *Mem. Amer. Math. Soc.* 52 (1965), págs. 67-79.

abeliana de A con grupo de Galois $G \times G$, esto es un caso particular del Teorema 4.3.4.

Se denotará δG el subgrupo de $G \times G$ cuyos elementos son de la forma (σ^{-1}, σ), $\sigma \in G$. Se tiene que G y $(G \times G)/\delta G$ son grupos isomorfos vía la aplicación $\sigma \mapsto (\sigma, 1)\ \delta G = (1, \sigma)\ \delta G$.

G actúa sobre $(B \otimes B')^{\delta G}$ de la siguiente forma:

$$\sigma : \sum_i b_i \otimes b_i' \mapsto \sum_i \sigma(b_i) \otimes b_i' = \sum_i b_i \otimes \sigma(b_i'),$$

para todo $b_i \in B,\ \ b_i' \in B'$ y $\sigma \in G$. Para ver que está acción está bien definida, se toma

$$\begin{aligned} B \times B' &\to B \otimes B' \\ (a, b) &\mapsto \sigma(a) \otimes b \end{aligned}$$

la cual es una función bilineal, y por la propiedad universal de los productos tensoriales, se obtendrá que existe un homomorfismo de módulos dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : B \otimes B' &\to B \otimes B' \\ \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \sigma(a_i) \otimes b_i. \end{aligned}$$

Si se hace la restricción $\tilde{\sigma}|_{(B \otimes B')^{\delta G}}$, se obtendrá la acción del elemento $\sigma \in G$ sobre $(B \otimes B')^{\delta G}$. Resta ver que si $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i' \in (B \otimes B')^{\delta G}$ entonces $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(b_i) \otimes b_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes \sigma(b_i') \in (B \otimes B')^{\delta G}$.

De hecho, si $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i' \in (B \otimes B')^{\delta G}$, se tiene que dado $\tau \in G$ entonces $(\tau^{-1}, \tau) \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes$

$b_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau^{-1}(b_i) \otimes \tau(b_i') = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i'$, luego si $\sigma \in G$, entonces

$$\begin{aligned}
(\tau^{-1}, \tau) \sum_{i=1}^{n} \tau(b_i) \otimes b_i' &= \sum_{i=1}^{n} \tau^{-1}(\sigma(b_i)) \otimes \tau(b_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\tau^{-1}\sigma)(b_i) \otimes \tau(b_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sigma\tau^{-1})(b_i) \otimes \tau(b_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma(\tau^{-1}(b_i) \otimes \tau(b_i')) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma((\tau^{-1}, \tau)(b_i \otimes b_i')) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma(b_i \otimes b_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sigma(b_i) \otimes b_i',
\end{aligned}$$

y así $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(b_i) \otimes b_i' \in (B \otimes B')^{\delta G}$. Por consiguiente, $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(b_i) \otimes b_i' = (\sigma^{-1}, \sigma) \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma(b_i) \otimes b_i' = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \otimes \sigma(b_i')$.

Luego, por Teorema fundamental de la teoría de Galois (3.2.1) se obtendrá que $(B \otimes B')^{\delta G}$ es una extensión de Galois de A con el mismo grupo de Galois G.

Se define sobre $T_{gl}(G, A)$ la operación $*$ dada por

$$[B] * [B'] := [(B \otimes B')^{\delta G}],$$

para todos $[B],\ [B'] \in T_{gl}(G, A)$.

La operación $*$ tiene un elemento neutro dado por la extensión trivial $E = \sum\limits_{\sigma \in G} A e_\sigma$, donde los elementos e_σ son idempotentes ortogonales dos a dos cuya suma es 1.

Una acción de G sobre E está dada por $\sigma(e_\tau) = e_{\sigma\tau}$, para todo $\sigma, \tau \in G$. Para todo $[B] \in T_{gl}(G, A)$ es fácil ver que

$$(B \otimes E)^{\delta G} = \Big\{ \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(b) \otimes e_\sigma \ \mid \ b \in B \Big\}$$

y que la aplicación

$$\begin{aligned} f : (B \otimes E)^{\delta G} &\to B \\ \sum_{\sigma \in G} \sigma^{-1}(b) \otimes e_\sigma &\mapsto b \end{aligned}$$

es un isomorfismo de A-álgebras tal que $f \circ \sigma = \sigma \circ f$, para todo $\sigma \in G$, donde se sigue que $[B] * [E] = [B]$.

Dado $[B] \in T_{gl}(G, A)$ el elemento inverso $[B]^{-1}$ es representado por la propia extensión B con la acción de G dada por $\sigma : b \mapsto \sigma^{-1}(b)$, para todo $\sigma \in G$ y $b \in B$. De hecho, la aplicación

$$\begin{aligned} \theta : B \otimes B &\to \sum_{l \in G} B e_l \\ b \otimes b' &\mapsto \sum_{l \in G} b l(b') e_l, \end{aligned}$$

es un isomorfismo de B-álgebras. Dicho esto, $B \otimes B$ y $\sum_{l \in G} B e_l$ son extensiones abelianas de A con grupo de Galois $G \times G$ actuando respectivamente sobre las A-álgebras de la siguiente forma:

$$(\sigma, \tau)(b \otimes b') = \sigma(b) \otimes \tau^{-1}(b'),$$

$$(\sigma, \tau)\Big(\sum_{l \in G} b_l e_l \Big) = \sum_{l \in G} \sigma(b_l) e_{\sigma\tau l},$$

para todos $\sigma, \tau \in G$. Luego $\theta \circ (\sigma, \tau) = (\sigma, \tau) \circ \theta$ para todo $\sigma, \tau \in G$ y de esto se sigue que θ induce por restricción un isomorfismo de A-álgebras entre $(B \otimes B')^{\delta G}$ y $E = \sum_{\sigma \in G} Ae_\sigma = \left(\sum_{\sigma \in G} Be_\sigma \right)^{\delta G}$. Por lo tanto $[B] * [B]^{-1} = [E]$.

Proposición 3.3.1. $T_{gl}(G, A)$ *es un grupo con la operación *.*

4. TEORÍA DE GALOIS PARCIAL

En este capítulo se hablará de la teoría de Galois parcial, haciendo analogía al desarrollo de la teoría de Galois (Global). Primero se pasará por la definición de acciones parciales de grupos sobre álgebras para llegar a la definición de extensiones parciales de Galois.

4.1. ACCIONES PARCIALES DE GRUPOS SOBRE ÁLGEBRAS

A continuación se presenta la definición de acción parcial de un grupo sobre una álgebra.

Definición 4.1.1. *Sea G un grupo y S una álgebra unitaria sobre un anillo conmutativo R. Una acción parcial α de G sobre S es una colección de ideales S_σ, $\sigma \in G$, de S e isomorfismos de R-álgebras $\alpha_\sigma : S_{\sigma^{-1}} \to S_\sigma$, tales que:*

1. *$S_1 = S$ y α_1 es la identidad de S;*
2. *$S_{\sigma\tau} \supseteq \alpha_\tau^{-1}(S_\tau \cap S_{\sigma^{-1}})$;*
3. *$\alpha_\sigma \circ \alpha_\tau(x) = \alpha_{\sigma\tau}(x)$, para todo $x \in \alpha_\tau^{-1}(S_\tau \cap S_{\sigma^{-1}})$ y $\sigma, \tau \in G$.*

Donde la propiedad 2 puede ser reemplazada por $\alpha_\sigma(S_{\sigma^{-1}} \cap S_\tau) = S_\sigma \cap S_{\sigma\tau}$ y de esta manera la propiedad 3 puede ser reescrita como $\alpha_\sigma \circ \alpha_\tau(x) = \alpha_{\sigma\tau}(x)$, para todo $x \in S_{\tau^{-1}} \cap S_{(\sigma\tau)^{-1}}$ para $\sigma, \tau \in G$.

Ejemplo 4.1.1 (Acción parcial inducida de una acción global). *Sea T una R-álgebra y G un grupo actuando sobre T con automorfismos $\{\beta_\sigma \mid \sigma \in G\}$. Sea S un ideal de T, y sea $S_\sigma = S \cap \beta_\sigma(S)$, $\sigma \in G$. Se define α_σ como β_σ restringida a $S_{\sigma^{-1}}$. Luego la familia $\{\alpha_\sigma : S_{\sigma^{-1}} \to S_\sigma \mid \sigma \in G\}$ es una acción parcial α de G sobre S.*

Ejemplo 4.1.2. *Sea R un anillo conmutativo y $S = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$ donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es un conjunto de elementos idempotentes no nulos, ortogonales dos a dos, cuya suma es igual a 1_S. Se denota por G el grupo cíclico de orden 4 generado por σ y se define la acción parcial α de G sobre S tomando $S_1 = S$, $S_\sigma = Re_1 \oplus Re_2$, $S_{\sigma^2} = Re_1 \oplus Re_3$ y $S_{\sigma^3} = Re_2 \oplus Re_3$, y $\alpha_1 = id_S$,*

$$\alpha_\sigma : S_{\sigma^3} \to S_\sigma \text{ dada por } \alpha_\sigma(e_2) = e_1 \text{ y } \alpha_\sigma(e_3) = e_2,$$

$$\alpha_{\sigma^2} : S_{\sigma^2} \to S_{\sigma^2} \text{ dada por } \alpha_{\sigma^2}(e_1) = e_3 \text{ y } \alpha_{\sigma^2}(e_3) = e_1 \text{ y}$$

$$\alpha_{\sigma^3} : S_{\sigma^2} \to S_\sigma \text{ dada por } \alpha_{\sigma^3}(e_1) = e_2 \text{ y } \alpha_{\sigma^3}(e_2) = e_3.$$

Definición 4.1.2. *Dada una acción parcial α de un grupo G sobre una R-álgebra S, el producto cruzado $S \rtimes_\alpha G$ correspondiente a α es el conjunto de todas las sumas formales finitas*

$$\Big\{ \sum_{\sigma \in G} a_\sigma \delta_\sigma \ \mid \ a_\sigma \in S_\sigma \Big\},$$

donde los δ_σ son símbolos. Se define la suma componente a componente y la multiplicación determinada por

$$(a_\sigma \delta_\sigma)(b_\tau \delta_\tau) = \alpha_\sigma(\alpha_{\sigma^{-1}}(a_\sigma) b_\tau) \delta_{\sigma\tau}.$$

Se define $f : S \to S \rtimes_\alpha G$ por $f(s) = s\delta_1$, lo cual permite identificar S con $S\delta_1$. En general el producto cruzado no es asociativo como se verá a continuación.

Ejemplo 4.1.3. *Sea A un K-espacio vectorial con base $\{1, t, u, v\}$. Se define la multiplicación en A por*

$$u^2 = v^2 = uv = vu = tu = ut = t^2 = 0,$$

$tv = vt = u$ y $1a = a1 = a$ para cada $a \in A$. Luego A es una K-álgebra asociativa con unidad.

Sea $G = \langle \sigma : \sigma^2 = 1 \rangle$, e I el ideal de A generado por v. Se considera la acción parcial α de G sobre A definida por $S_\sigma = I$, $\alpha_\sigma(u) = v$ y $\alpha_\sigma(v) = u$, $S_1 = A$ y α_1 es la identidad de A.

Así, $A \rtimes_\alpha G$ no es asociativo. Si se toma $x = t\delta_1 + u\delta_\sigma$ se tiene que $(xx)x = 0$ y $x(xx) = u\delta_\sigma$.

4.2. GLOBALIZACIÓN DE UNA ACCIÓN PARCIAL

Definición 4.2.1. *Sea α una acción parcial de un grupo G sobre una R-álgebra S. Se dice que una acción β (global) de G sobre una R-álgebra S' es una globalización para α si existe un isomorfismo de R-álgebras φ de S sobre un ideal de S' tal que para todo $\sigma \in G$ se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\varphi(S_\sigma) = \varphi(S) \cap \beta_\sigma(\varphi(S))$;
2. $\varphi \circ \alpha_\sigma(x) = \beta_\sigma \circ \varphi(x)$, *para todo* $x \in S_{\sigma^{-1}}$;
3. S' *es generado por* $\bigcup_{\sigma \in G} \beta_\sigma(\varphi(S))$.

El siguiente teorema da condiciones suficientes y necesarias para la existencia de globalizaciones.

Teorema 4.2.1 ([6], Theorem 4.3)**.** *Sea S una R-álgebra unitaria. Una acción parcial α de un grupo G sobre S admite una globalización β, si y sólo si, cada ideal S_σ, $\sigma \in G$, es una R-álgebra unitaria. Más aún, si β existe, es única bajo isomorfismos.*

De ahora en adelante se supondrá que S es una R-álgebra unitaria con identidad 1_S y α una acción parcial de un grupo G sobre S, además se denotará el elemento unitario de S_σ por 1_σ y se asume que existe una globalización de α denotada por (S', β).

Proposición 4.2.1 ([6], Proposition 4.3)**.** *$S \rtimes_\alpha G$ está contenido bajo un encaje en $S' \rtimes_\beta G$. En particular, $S \rtimes_\alpha G$ es asociativo.*

Como G es finito, S' tiene elemento identidad $1_{S'}$. Como $S' = \sum_{\sigma \in G} \beta_\sigma(S)$, la identidad de S' puede verse como la suma booleana de idempotentes $\beta_\sigma(1_S)$, $\sigma \in G$, de S'. Se denotarán los elementos de G por $\{\sigma_1 = 1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$, así se puede escribir:

$$1_{S'} = e_1 \oplus e_2 \oplus \cdots \oplus e_n,$$

donde $e_1 = 1_S$, $e_2 = (1_{S'} - 1_S)\beta_{\sigma_2}(1_S)$ y $e_j = (1_{S'} - 1_S) \cdots (1_{S'} - \beta_{\sigma_{j-1}}(1_S))\beta_{\sigma_j}(1_S)$. Así

$$1_{S'} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{i_1}(1_S) \cdots \beta_{i_l}(1_S). \tag{2}$$

Gracias a esto se define $\psi : S' \to S'$ por

$$\psi(x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{i_1}(1_S) \cdots \beta_{i_l}(1_S) \beta_{i_l}(x),$$

este es un homomorfismo R-lineal y se puede escribir

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{\sigma_i}(x) e_i.\text{[18]} \tag{3}$$

De forma similar, todo subgrupo $H = \{\tau_1 = 1, \tau_2, \cdots, \tau_n\}$ de G determina una aplicación $\psi_H : S' \to S'$ dada por la fórmula

$$\psi_H(b) = \sum_{1 \le l \le n} \sum_{i_1 < \cdots < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{\tau_{i_1}}(1_S) \beta_{\tau_{i_2}}(1_S) \cdots \beta_{\tau_{i_l}}(1_S) \beta_{\tau_{i_l}}(b), \tag{4}$$

[18] La demostración de las ecuaciones (2) y (3) no requieren mayor esfuerzo pero son muy extensas, por lo cual es omitida.

para todo $b \in S'$. La cual puede escribirse de la forma

$$\psi_H(b) = \sum_{1 \leq i \leq n} \beta_{\tau_i}(b) e_i,$$

para todo $b \in S'$, donde $e_1 = 1_S$, y $e_i = (1_{S'} - 1_S)(1_{S'} - \beta_{\tau_2}(1_S)) \cdots (1_{S'} - \beta_{\tau_{i-1}})\beta_{\tau_i}(1_S)$, con $2 \leq i \leq n$, los cuales son idempotentes de S' y además, ortogonales dos a dos. Ahora, H también determina, por restricción, una acción parcial $\alpha_H = \{\alpha_\tau : S_{\tau^{-1}} \to S_\tau \mid \tau \in H\}$ de H en S. Se denotará por S^{α_H} a la subálgebra de S de los elementos invariantes por la acción α_H.

Teorema 4.2.2. *Sea $\psi_H : S' \to S'$ la función descrita anteriormente. Luego,*

1. *ψ_H es un homomorfismo de anillos;*
2. *ψ_H es unitario, si y sólo si, $H = G$ y, en este caso, $S' = \sum_{1 \leq \leq m} \beta_{g_i}(S) e_i$;*
3. *ψ_H es S'^H-lineal;*
4. *$(\psi_H)|_S$ es inyectiva;*
5. *$e_H = \psi_H(1_S)$ es un idempotente de S';*
6. *$\psi_H(s) \in S'^H$, para todo $s \in S^{\alpha_H}$;*
7. *La restricción de ψ_H a S^{α_H} es un isomorfismo de anillos de S^{α_H} sobre $S'^H e_H$, cuya inversa está dada por la multiplicación por 1_S. Particularmente, $S'^H 1_S = S^{\alpha_H}$.*

Demostración. 1. Se sigue de manera inmediata del hecho que β_σ, $\sigma \in G$, es un homomorfismo de anillos y los idempotentes e_i, $1 \leq i \leq n$, son ortogonales dos a dos.

2. De acuerdo al Lema 4.4 de [6] se tiene que

$$1_{S'} = \psi_H(1_S) \in \sum_{1 \leq i \leq m} \beta_{\tau_i}(S)e_i$$

que es un ideal de S', de lo cual se sigue la igualdad deseada.

3. ψ_H es S'^H-lineal pues, para todo $x \in S'^H$ y $b \in S'$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\psi_H(xb) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_{\tau_i}(xb)e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \beta_{\tau_i}(x)\beta_{\tau_i}(b)e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} x\beta_{\tau_i}(b)e_i \\
&= x\sum_{i=1}^{n} \beta_{\tau_i}(b)e_i \\
&= x\psi_H(b).
\end{aligned}$$

4. Se recuerda que $1_S = e_1$. Ahora, ψ_H restricta a S es inyectiva, ya que

$$\psi_H(s)1_S = \sum_{i=1}^{n} \beta_{\tau_i}(s)e_i 1_S = \beta_1(S)e_1 1_S = s1_S = s,$$

para todo $s \in S$.

5. Se sigue del hecho que los elementos $\beta_{\tau_i}(1_S)$ y los elementos e_i son idempotentes de S' y $e_ie_j = 0$, para todo $i \neq k$.

6. Se debe probar que si $s \in S^{\alpha_H}$, entonces $\beta_\tau(\psi_H(s)) = \psi_H(s)$, para todo $\tau \in H$. Para esto es suficiente mostrar que para todo $r \in S^{\alpha_H}$ y $\tau \in H$. El elemento

$\beta_\tau(\beta_{\tau_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{\tau_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{\tau_{i_l}}(s))$, con $i_1 < \cdots < i_l$, es una partición de $\psi_H(s)$, para $1 \leq l \leq n$.

Se inicia probando que

$$\beta_{\tau_i}(1_S)\beta_{\tau_j}(r) = \beta_{\tau_j}(1_S)\beta_{\tau_i}(r),$$

para todo $1 \leq i,\ \ j \leq n$ y $r \in S^{\alpha_H}$.

De las condiciones de globalización se puede deducir que $\alpha_\tau(s1_{\tau^{-1}}) = \beta_\tau(s)1_S$, para todo $s \in S$ y $\tau \in H$.

Particularmente, si $s \in S^{\alpha_H}$ se tiene que $\beta_\tau(s)1_S = s1_\tau$, para todo $\tau \in H$, y entonces

$$\begin{aligned}
\beta_{\tau_i}(1_S)\beta_{\tau_j}(s) &= \beta_{\tau_j}(\beta_{\tau_j^{-1}\tau_i}(1_S)s)\\
&= \beta_{\tau_j}(\beta_{\tau_j^{-1}\tau_i}(1_S)1_S s)\\
&= \beta_{\tau_j}(\alpha_{\tau_j^{-1}\tau_i}(1_S 1_{\tau_i^{-1}\tau_j})s)\\
&= \beta_{\tau_j}(1_{\tau_j^{-1}\tau_i}s)\\
&= \beta_{\tau_j}(1_S\beta_{\tau_j^{-1}\tau_i}(s))\\
&= \beta_{\tau_j}(1_S)\beta_{\tau_i}(s).
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\beta_\tau(\beta_{\tau_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{\tau_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{\tau_{i_l}}(s)) = \beta_{\tau\tau_{i_1}}(1_S)\cdots\beta_{\tau\tau_{i_{l-1}}}(1_S)\beta_{\tau\tau_{i_l}}(s).$$

Sea $\tau_{j_k} = \tau\tau_{i_k}$ para todo $1 \leq k \leq l$. Como S' es conmutativa, se puede reordenar $\beta_{\tau_{j_1}}(1_S), \cdots, \beta_{\tau_{j_{l-1}}}(1_S)$ de forma que los $\tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_{l-1}}$ aparezcan de forma creciente.

Si $\tau_{j_{i-1}}$ aparece listado antes que τ_{j_i}, no se debe hacer nada. Si se tiene el caso contrario, por lo que se mostró antes, se puede organizarlo de forma creciente. Por lo tanto, el elemento es una parte de $\psi_H(s)$.

7. Se prueba inicialmente que la aplicación $\psi_H : S^{\alpha_H} \to S'^H e_H$ está bien definida. Para $s \in S^{\alpha_H}$, se tiene que

$$\psi_H(s) = \psi_H(s1_S) = \psi_H(s)\psi_H(1_S) = \psi_H(s)e_H$$

y por 6 se tiene que $\psi_H(s) \in S'^H e_H$.

Por otro lado, si $x \in S'^H$ entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_\tau((xe_H1_S)1_{\tau^{-1}}) &= \alpha_\tau((x1_S)1_{\tau^{-1}}) \\
&= \beta_\tau((x1_S)1_{\tau^{-1}}) \\
&= \beta_\tau((x1_S)1_S\beta_{\tau^{-1}}(1_S)) \\
&= \beta_\tau(x1_S)1_S \\
&= \beta_\tau(x)\beta_\tau(1_S)1_S \\
&= x1_\tau \\
&= (x1_S)1_\tau \\
&= (xe_H1_S)1_\tau,
\end{aligned}$$

para todo $\tau \in H$, es decir, $xe_H1_S \in S^{\alpha_H}$.

Finalmente se tiene

$$(1_S \circ \psi_H)(s) = 1_S(\psi_H(s)) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{\tau_i}(s)e_i1_S = \beta_{\tau_1}(s)e_1 = s1_S = s$$

y

$$(\psi_H \circ 1_S)(xe_H) = \psi_H((xe_H)1_S) = \psi_H(x1_S) = x\psi_H(1_S) = xe_H,$$

para todo $s \in S^{\alpha_H}$ y todo $x \in S'^H$.

$\square$

El subanillo de invariantes de S bajo α es definido por

$$S^\alpha = \{x \in S \mid \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) = 1_\sigma x\}.$$

Se denotan por $R' = S'^G$ y $R = S^\alpha$.

Definición 4.2.2. *La traza parcial se define como tr*$_{S/R}(x) = \sum_{\sigma \in G} \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})$, *para todo* $x \in S$.
La traza global entre S' *y* R' *está definida por tr*$_{S'/R'}(x) = \sum_{\sigma \in G} \beta_\sigma(x)$, *para todo* $x \in S'$.

Se tiene:

Lema 4.2.1 ([9], Lema 2.1)**.** *1. tr*$_{S/R} : S \to R$ *es un homomorfismo* R*-lineal;*

2. tr$_{S/R}(x) =$ *tr*$_{S'/R'}(x)1_S$, *para todo* $x \in S$;

3. tr$_{S'/R'}(S) =$ *tr*$_{S'/R'}(S')$

Demostración.

1. Si $x \in S$ y $\tau \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha_\tau(\text{tr}_{S/R}(x)1_{\tau^{-1}}) &= \sum_{\sigma \in G} \beta_\tau(\beta_\sigma(x)1_s)1_s \\ &= \sum_{\sigma \in G} \beta_\tau(\beta_\sigma(x))\beta_\tau(1_s)1_s \\ &= \text{tr}_{S/R}(x)1_\tau. \end{aligned}$$

Así tr$_{S/R}(x) \in R$.

2. Para todo $x \in S$ se tiene que

$$\text{tr}_{S/R}(x) = \sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) = \sum_{\sigma\in G} \beta_\sigma(x)1_s$$
$$= \text{tr}_{S'/R'}(x)1_s.$$

3. Se asume que $y \in \text{tr}_{S'/R'}(S')$ y se toma $x \in S'$ con $\text{tr}_{S'/R'}(x) = y$.

   Se puede escribir $x = \sum_{\sigma\in G} \beta_\sigma(x_\sigma)$ con $x_\sigma \in S$, ya que $S' = \sum_{\sigma\in G} \beta_\sigma(S)$. Así

$$y = \sum_{\rho\in G} \beta_\rho(x) = \sum_{\sigma\in G} \Big(\sum_{\rho\in G} \beta_\rho\beta_\sigma(x_\sigma) \Big)$$
$$= \sum_{\sigma\in G} \text{tr}_{S'/R'}(x_\sigma)$$
$$\in \text{tr}_{S'/R'}(S).$$

   Por lo tanto $\text{tr}_{S'/R'}(S') \subseteq \text{tr}_{S'/R'}(S)$.

$\square$

Corolario 4.2.1 ([9], Corollary 2.2)**.** *Bajo las mismas condiciones anteriores* $\text{tr}_{S'/R'}$ *es sobreyectiva en* R'*, si y sólo si,* $\text{tr}_{S/R}$ *es sobreyectiva en* R*.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si existe $c \in S'$ tal que $\text{tr}_{S'/R'}(c) = 1_{S'}$, luego existe $d \in S$ tal que $\text{tr}_{S/R}(d) = 1_S$ por 3 del Lema 4.2.1.
$\Leftarrow$) Se supone que existe $c \in S$ tal que $\text{tr}_{S/R}(c) = 1_S$. Así $\text{tr}_{S'/R'}(c)1_S = 1_S$ y se tiene que

$$1_{S'} = \psi(\text{tr}_{S'/R'}(c)1_S)$$
$$= \text{tr}_{S'/R'}(c)\psi(1_S)$$
$$= \text{tr}_{S'/R'}(c)1_{S'} = \text{tr}_{S'/R'}(c).$$

$\square$

Proposición 4.2.2 ([9], Proposition 2.3)**.** *Si $R,\ R',\ S,\ S',\ G$ y α están dadas por las condiciones anteriores y tr$_{S'/R'}$ es sobreyectiva. Luego la restricción de ψ a R es un isomorfismo de anillos de R a R' cuya inversa es la aplicación ϕ que envía r' a $r'1_S$, para todo $r' \in R'$.*

El siguiente teorema muestra que las globalizaciones de acciones parciales se comportan bien respecto al producto tensorial.

Teorema 4.2.3. *Sean S y T anillos, G un grupo finito y $\alpha = \{\alpha_\sigma : S_{\sigma^{-1}} \to S_\sigma \mid \sigma \in G\}$ y $\alpha' = \{\alpha'_\sigma : T_{\sigma^{-1}} \to T_\sigma \mid \sigma \in G\}$ acciones parciales unitarios de G sobre S y T respectivamente. Sean (S', β) y (T', β') sus respectivas globalizaciones.*

1. *Si $S^\alpha = R = T^\alpha$, entonces*

$$\alpha \otimes \alpha' = \{\alpha_\sigma \otimes \alpha'_\tau : S_{\sigma^{-1}} \otimes T_{\tau^{-1}} \to S_\sigma \otimes T_\tau \mid (\sigma, \tau) \in G \times G\}$$

   es una acción parcial unitaria de G sobre $S \otimes T$.

2. *Si $S'^G = A = T'^G$ entonces $(S' \otimes_A T', \beta \otimes \beta')$ es una globalización de $(S \otimes T, \alpha \otimes \alpha')$.*

Demostración. 1. Se verifica de manera usual.

2. Por hipótesis existen monomorfismos de anillos $\varphi : S \to \varphi(S) \subseteq S'$ y $\varphi' : T \to \varphi'(S) \subseteq T'$ tales que $\varphi(S)$ y $\varphi'(S)$ son ideales de S' y T' respectivamente, tales que satisfacen, para cada $\sigma \in G$

   a) $\varphi(S_\sigma) = \varphi(S) \cap \beta_\sigma(\varphi(S))$ y $\varphi'(S'_\sigma) = \varphi'(S') \cap \beta'_\sigma(\varphi'(S'))$,

   b) $(\varphi \circ \alpha_\sigma)|_{S_{\sigma^{-1}}} = (\beta_\sigma \circ \varphi)|_{S_{\sigma^{-1}}}$ y $(\varphi' \circ \alpha'_\sigma)|_{T_{\sigma'^{-1}}} = (\beta'_\sigma \circ \varphi')|_{T_{\sigma^{-1}}}$,

   c) $S' = \sum\limits_{\sigma \in G} \beta_\sigma(\varphi(S))$ y $T' = \sum\limits_{\sigma \in G} \beta'_\sigma(\varphi'(T))$, entonces

$$\varphi \otimes \varphi' : S \otimes T \to S' \otimes_A T'$$

es un monomorfismo de anillos tal que $\varphi \otimes \varphi'(S \otimes T)$ es un ideal de $S' \otimes_A T'$ y para cada $(\sigma, \tau) \in G \times G$

a)

$$\begin{aligned}
\varphi \otimes \varphi'(S_\sigma \otimes T_\tau) &= \varphi(S_\sigma) \otimes \varphi'(T_\tau) \\
&= (\varphi(S) \cap \beta_\sigma(\varphi(S)) \otimes (\varphi'(T) \cap \beta'_\tau(\varphi'(T))) \\
&= (\varphi(S)\beta_\sigma(\varphi(S))) \otimes (\varphi'(T)\beta'_\tau(\varphi'(T))) \\
&= [\varphi(S) \otimes \varphi'(T)] \cap [\beta_\sigma(\varphi(S)) \otimes \beta'_\tau(\varphi'(T))] \\
&= [\varphi \otimes \varphi'(S \otimes T)] \cap [\beta_\sigma \otimes \beta'_\tau(\varphi \otimes \varphi'(S \otimes T))],
\end{aligned}$$

b) para todo $x \otimes y \in S_{\sigma^{-1}} \otimes T_{\sigma'^{-1}}$,

$$\begin{aligned}
[(\varphi \otimes \varphi') \circ (\alpha_\sigma \otimes \alpha'_\tau)](x \otimes y) &= [(\varphi \circ \alpha_\sigma) \otimes (\varphi' \circ \alpha'_\tau)](x \otimes y) \\
&= [(\beta_\sigma \circ \varphi) \otimes (\beta_\tau \circ \varphi')](x \otimes y) \\
&= [(\beta_\sigma \otimes \beta'_\tau) \circ (\varphi \otimes \varphi')](x \otimes y),
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
S' \otimes_A T' &= \Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_\sigma(\varphi(S))\Big) \otimes \Big(\sum_{\tau \in G} \beta'_\tau(\varphi'(T))\Big) \\
&= \sum_{(\sigma,\tau) \in G \times G} \beta_\sigma(\varphi(S)) \otimes \beta'_\tau(\varphi'(T)) \\
&= \sum_{(\sigma,\tau) \in G \times G} \beta_\sigma \otimes \beta'_\tau(\varphi \otimes \varphi'(S \otimes T)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(S' \otimes_A T', \beta \otimes \beta')$ es una globalización de $(S \otimes T, \alpha \otimes \alpha')$.

$\square$

4.3. EXTENSIONES PARCIALES DE GALOIS

El concepto de extensión de Galois parcial aparece por primera vez en el trabajo de Dokuchaev, Ferrero y Paques en [9].

Definición 4.3.1. *S es una extensión de Galois parcial de R con acción parcial α (o extensión de Galois α-parcial de R) si $S^\alpha = R$ y existen $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in S$, con $n \in \mathbb{N}$, tales que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y 1_{\sigma^{-1}}) = \delta_{1,\sigma}.$$

Se dice que $\{x_i, y_i\}$ son coordenadas parciales de Galois de S sobre R.

Teorema 4.3.1 ([9], Theorem 3.3)**.** *Son equivalentes:*

1. *S' es una extensión de Galois de R' con grupo de Galois G;*

2. *S es una extensión de Galois parcial de R con acción parcial α.*

Se define el homomorfismo de S-módulos y R-álgebras $j : S \rtimes_\alpha G \to \mathrm{End}_R(S)$, por

$$j(\sum_{\sigma \in G} x_\sigma u_\sigma)(z) = \sum_{\sigma \in G} x_\sigma \alpha_\sigma(z 1_{\sigma^{-1}}), \tag{5}$$

para todo $z \in S$.
Sea M un $S \rtimes_\alpha G$-módulo. Se define

$$M^G = \{m \in M \mid (1_\sigma \delta_\sigma)m = 1_\sigma m, \ \forall \sigma \in G\}$$

el R-*submódulo de invariantes de* M bajo G. S puede ser considerado como un $S \rtimes_\alpha G$-módulo vía j, esto es, $(x_\sigma \delta_\sigma)y = j(x_\sigma \delta_\sigma)(y)$, para todos $y \in S$ y $\sigma \in G$.

Teorema 4.3.2 ([9], Theorem 4.1)**.** *Sea α una acción parcial de un grupo finito G sobre una R-álgebra S. Son equivalentes:*

1. *S es una extensión de Galois parcial de R con acción parcial α;*

2. *S es un R-módulo proyectivo finitamente generado y el homomorfismo j como fue definido en* (5) *es un isomorfismo de S-módulos y de R-álgebras;*

3. *S es un R-módulo proyectivo finitamente generado y para cada $S \rtimes_\alpha G$-módulo M, la función $\mu : S \otimes M^G \to M$, dada por $\mu(x \otimes m) = xm$ es un isomorfismo de S-módulos;*

4. *S es un R-módulo proyectivo finitamente generado y $\psi : S \otimes S \to \prod_{\sigma \in G} S_\sigma$ definido por $\psi(x \otimes y) = (x\alpha_\sigma(y1_{\sigma^{-1}}))_{\sigma \in G}$ es un isomorfismo de S-módulos;*

5. *Para cada $\sigma \neq 1 \in G$ y para cada ideal maximal $\mathcal{M}$ de S, existe $x \in S$ tal que $x - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) \notin \mathcal{M}$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Sean $x_i, y_i \in S$, $1 \leq i \leq n$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) = \delta_{1,\sigma}$$

y se define $f_i \in \text{Hom}_R(S, R)$ por $f_i(x) = \text{tr}_{S/R}(y_i x)$, para todo $x \in S$. Luego

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \text{tr}_{S/R}(y_i x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(y_i x 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{\sigma\in G} \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})\alpha_\sigma(s 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{\sigma\in G} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \Big) \alpha_\sigma(x 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{\sigma\in G} \delta_{1,\sigma} \alpha_\sigma(x 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= x.
\end{aligned}
$$

Así S es un R-módulo finitamente generado por $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Para mostrar que j es un isomorfismo, dado $\tau \in \text{End}(S)$ se toma $w \in S \rtimes_\alpha G$ de la forma $\sum\limits_{\sigma\in G} \sum\limits_{i=1}^{n} h(x_i)\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})u_\sigma$. Se puede ver que $j(w)(x) = h(x)$, para todo $x \in S$,

$$
\begin{aligned}
j(w)(x) &= \sum \sum h(x_i)\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})\alpha_\sigma(x 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= h(x),
\end{aligned}
$$

En efecto j es sobreyectivo. Sea $v = \sum\limits_{\sigma\in G} x_\sigma u_\sigma \in \ker j$. Luego, $j(v)(x_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así,

$$
0 = \sum_{\tau\in G} \sum_{i=1}^{n} j(v)(x_i)\alpha_\tau(y_i 1_{\tau^{-1}}) = v.
$$

Como S es una extensión de Galois α-parcial de R, $R = S^\alpha$, se tiene que $\sum\limits_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(x y_i 1_{\sigma^{-1}}) = \text{tr}_{S/R}(x y_i) \in R$.

$2 \Rightarrow 3$. Como S es un R-módulo proyectivo finitamente generado, se tiene que por 5 del Teorema 2.1.1 existen $x_i \in S$ y $f_i \in \mathrm{Hom}_R(S,R)$, $1 \leq i \leq l$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x),$$

para todo $x \in S$. Se define $\nu : M \to S \otimes M^G$ por $\nu(m) = \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes v_i m$, donde $v_i = j^{-1}(f_i) \in S \rtimes_\alpha G$. ν está bien definida y es un homomorfismo que es la inversa de μ.

$3 \Rightarrow 4$. Sea $\mathcal{F} = \{f : G \to S \mid f(\sigma) \in S_\sigma, \ \forall \sigma \in G\}$. Luego $\mathcal{F}$ es isomorfo a $\prod_{\sigma \in G} S_\sigma$ como S-módulos. Además, $\mathcal{F}$ tiene estructura de $S \rtimes_\alpha G$-módulo dada por $((x_\sigma u_\sigma)f)(\tau) = x_\sigma \alpha_\sigma(f(\sigma^{-1}\tau)1_{\sigma^{-1}})$, para todos $f \in \mathcal{F}$ y $\sigma, \tau \in G$. Se sigue de 3 que

$$\mu : S \otimes \mathcal{F}^G \to \mathcal{F} \cong \prod_{\sigma \in G} S_\sigma,$$

definido por $\mu(x \otimes f) = (xf(\sigma))_{\sigma \in G}$, es un isomorfismo de S-módulos.

Además, se define

$$\begin{aligned} \lambda : S &\to \mathcal{F}^G \\ x &\mapsto f_x \end{aligned}$$

donde $f_x : G \to S$ está dado por $f_x(\tau) = \alpha_\tau(x1_{\tau^{-1}})$, con $\tau \in G$, es un isomorfismo de R-módulos. Consecuentemente

$$S \otimes S \to S \otimes \mathcal{F}^G \to \prod_{\sigma \in G} S_\sigma$$

es un isomorfismo de S-módulos, que es precisamente igual a ψ.

$4 \Rightarrow 1$. Se toma $x \in S^\alpha$. Se sigue por 4 que $x \otimes 1 = 1 \otimes x$. Además, S es fielmente proyectivo, entonces R es sumando directo de S. Así $x \in R$ y se sigue que $S^\alpha = R$.

Para obtener las coordenadas parciales de Galois se toma $(1,0,\cdots,0) \in \prod_{\sigma\in G} S_\sigma$. Como ψ es un isomorfismo, existe $w = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in S \otimes S$ tal que

$$\psi(w) = (1,0,\cdots,0)$$

y 1 se sigue.

$5 \Rightarrow 1$. Sea $\sigma \neq 1 \in G$ y se considera $I \subseteq S$ el ideal generado por $\{x - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) \mid x \in S\}$. Por la hipótesis $I = S$, pues si no pasara esto, I estaría contenido en un ideal maximal de S, lo cual es un absurdo. Así, existen elementos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in S$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})) = 1_S$.

A partir de esto se obtiene que $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1_S + \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})$. Se define $x_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})$ y $y_{n+1} = 1_S$.

Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + x_{n+1} y_{n+1} \\
&= 1_S + \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) - \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= 1_S,
\end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) &= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) + x_{n+1}\alpha_\sigma(y_{n+1}1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})\Big)\alpha_\sigma(y_{n+1}1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})\Big)\alpha_\sigma(1_S 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}})\Big)\alpha_\sigma(1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) - \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Inicialmente se supone que H y H' son subconjutos de G que contienen el elemento identidad 1 de G, para los que existen elementos $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m,x'_1,\dots,x'_m,y'_1,\dots,y'_m \in S$ tales que que para cada $1\neq\sigma\in H$ y $1\neq\tau\in H'$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) = \delta_{1,\sigma} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_\tau(y_i 1_{\tau^{-1}}) = \delta_{1,\tau}.$$

Luego, para todo $\eta\in H\cup H'$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i x'_j\alpha_\eta(y_i y'_j 1_{\eta^{-1}}) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\eta(y_i 1_{\eta^{-1}})\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} x'_j\alpha_\eta(y'_j 1_{\eta^{-1}})\Big) \\
&= \delta_{1,\eta}\delta_{1,\eta} \\
&= \delta_{1,\eta}.
\end{aligned}
$$

Como $G = \bigcup_{\sigma\neq 1\in G}\{1,\sigma\}$, el resultado se sigue.

$1 \Rightarrow 5$. Sean $x_i, y_i \in S$, con $i = 1, \dots, n$, las coordenadas parciales de Galois de S. Se supone que existe $\sigma \in G$, con $g \neq 1$, y $\mathcal{M}$ un ideal maximal de S tales que $x - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) \in \mathcal{M}$, para todo $x \in S$. Luego, en particular, se tiene que $y_i - \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \in \mathcal{M}$. Ahora

$$1_S = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - \alpha_{\sigma^{-1}}(y_i 1_{\sigma^{-1}})) \in \mathcal{M},$$

lo cual contradice que $\mathcal{M}$ sea ideal maximal. $\square$

Lema 4.3.1. *Si S es una extensión de Galois α-parcial de R, entonces tr$_{S/R}(S) = R$. En particular existe $s \in S$ tal que tr$_{S/R}(s) = 1_S$.*

Se dice que dos elementos σ y τ son *fuertemente distintos*, respecto a la acción parcial α de G sobre S si para cualquier $e \in S_\sigma \cup S_\tau$ idempotente no nulo, existe $x \in S$ tal que

$$\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e \neq \alpha_\tau(x1_{\tau^{-1}})e.$$

Teorema 4.3.3 ([9], Theorem 4.2)**.** *Sea α una acción parcial de un grupo G sobre una R-álgebra S. Si S es una extensión de Galois α-parcial de R, entonces S es separable sobre R y los elementos de G son fuertemente distintos dos a dos. Si, adicionalmente, S es conmutativo y $S^\alpha = R$, la recíproca se cumple.*

Demostración. S, al ser ideal generado por un idempotente central, es sumando directo de su globalización S',

$$S' = (1_{S'} - 1_S)S' \oplus 1_S S',$$

y S' es una extensión de Galois de $R' = S'^G$, luego es R'-separable. Además, S es R'-separable, y así es R-separable.

Ahora, se toma $\sigma, \tau \in G$ y se supone que $e \in S_\sigma \bigcup S_\tau$ es un idempotente no nulo. Si

$\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e = \alpha_\tau(x1_{\tau^{-1}})e,$ con $x \in S,$ se tiene que $\sigma(x)1_S e = \tau(x)1_S e$ y así

$$x\sigma^{-1}(e) = \sigma^{-1}\tau(x)\sigma^{-1}(e)$$

en S'. Usando las coordenadas de Galois $x_i, y_i,\ 1 \leq i \leq n,$ de S' de R' y tomando $x = y_i,$ para todo $1 \leq i \leq n,$ se obtiene que

$$\sigma = \tau,$$

y así, estos son α-fuertemente distintos.

Recíprocamente, se asumirá que S es conmutativo, además de ser una álgebra separable sobre $R = S^\alpha$ y los elementos de G son α-fuertemente distintos.

Para $\sigma \in G$ se considera el homomorfismo de S-álgebras

$$\theta_\sigma : S \otimes S \to S \otimes S_\sigma$$

definido por $\theta_\sigma(x \otimes y) = x \otimes \alpha_\sigma(y1_{\sigma^{-1}})$. Se denotará por

$$e = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in S \otimes S$$

el idempotente de separabilidad de S sobre R y por μ la función multiplicación $x \otimes y \mapsto xy,$ que además es un homomorfismo de S-módulos. Sea $\sigma \in G$

$$e_\sigma = \mu(\theta_\sigma(e)) = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \in S$$

es idempotente. Además,

$$
\begin{aligned}
xe_\sigma &= x\mu(\theta_\sigma(e)) \\
&= \mu(x\theta_\sigma(e)) \\
&= \mu(\theta_\sigma(xe)) \\
&= \mu(\theta_\sigma(ex)) \\
&= \mu\Big(\theta_\sigma\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i \otimes xy_i)\Big)\Big) \\
&= \mu\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \alpha_\sigma(xy_i 1_{\sigma^{-1}})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(xy_i 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) \\
&= \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e_\sigma
\end{aligned}
$$

para todo $x \in S$. Como los elementos de G son fuertemente distintos, para $\sigma \neq 1$, se obtiene que $e_\sigma = 0$ y así

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) = 0.$$

□

Teorema 4.3.4. *Sean S, T, G, α y α' como el Teorema 4.2.3. Si S (respectivamente T) es una extensión de Galois α-parcial (respectivamente α'-parcial) de S^α (respectivamente $S^{\alpha'}$) y $S^\alpha = R = T^{\alpha'}$, entonces $S \otimes T$ es una extensión de Galois $\alpha \otimes \alpha'$-parcial de R.*

Demostración. Se verifica que si $\{x_i, y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ son las coordenadas de Galois de S relativas a α y $\{x'_i, y'_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ son las coordenadas de Galois de S' relativas a α', entonces $\{x_i \otimes x'_j, y_i \otimes y'_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ son las coordenadas de Galois de $S \otimes S'$ relativas a $\alpha \otimes \alpha'$. Por lo tanto $S \otimes S'$ es una extensión de Galois $\alpha \otimes \alpha'$-parcial de $(S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'}$.

Para concluir resta mostrar que $(S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'} = R$. De hecho, es inmediato que $R = R \otimes R = S^{\alpha} \otimes S'^{\alpha'} \subseteq (S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'}$. Para la inclusión recíproca se observa que cada ideal S'_σ es unitario con elemento identidad denotado por $1'_\sigma$ y que tr$_{S'/R} : S' \to S'^{\alpha'}$ y dado por tr$_{S'/R}(s') = \sum\limits_{\sigma\in G} \alpha'_\sigma(s'1'_{\sigma^{-1}})$ para todo $s' \in S'$. Por el Lema 4.3.1 se sigue que existen $c \in S$ y $c' \in S'$ tales que tr$_{S/R}(c) = 1_S$ y tr$_{S'/R}(c') = 1'_{S'}$.

Sea $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i \otimes s'_i \in (S \otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'}$. Luego

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_\sigma \otimes \alpha'_\tau((s_i \otimes s'_i)1_{\sigma^{-1}} \otimes 1'_{\tau^{-1}}) = \sum_{i=1}^{k}(s_i \otimes s'_i)1_\sigma \otimes 1'_\tau,$$

para todo $(\sigma, \tau) \in G \times G$, y consecuentemente se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i' &= \Big(\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i'\Big)(1_S \otimes 1'_{S'}) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i'\Big)(\mathsf{tr}_{S/R}(c) \otimes \mathsf{tr}_{S'/R}(c')) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i'\Big)\Big(\sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(c1_{\sigma^{-1}}) \otimes \sum_{\tau\in G} \alpha'_\tau(c'1'_{\tau^{-1}})\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i'\Big)\Big(\sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(c1_{\sigma^{-1}}) \otimes \sum_{\tau\in G} \alpha'_\tau(c'1'_{\tau^{-1}})\Big) \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in G} \Big(\sum_{i=1}^{k} s_i \otimes s_i' \cdot 1_\sigma \otimes 1'_\tau\Big)\alpha_\sigma(c1_{\sigma^{-1}}) \otimes \alpha'_\tau(c'1'_{\tau^{-1}}) \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in G} \Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_\sigma \otimes \alpha'_\tau(s_i \otimes s_i' \cdot 1_{\sigma^{-1}} \otimes 1'_{\tau^{-1}})\Big)\alpha_\sigma(c1_{\sigma^{-1}}) \otimes \alpha'_\tau(c1'_{\tau^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \sum_{\sigma,\tau\in G} \alpha_\sigma(s_i c 1_{\sigma^{-1}}) \otimes \alpha'_\tau(s_i' c' 1'_{\tau^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \Big(\sum_{\sigma\in G} \alpha_\sigma(s_i c 1_{\sigma^{-1}})\Big) \otimes \Big(\sum_{\tau\in G} \alpha'_\tau(s_i' c' 1'_{\tau^{-1}})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathsf{tr}_{S/R}(s_i c) \otimes \mathsf{tr}_{S'/R}(s_i' c') \in S^\alpha \otimes S'^{\alpha'} = R.
\end{aligned}
$$

□

4.4. TEOREMA DE CORRESPONDENCIA PARA EXTENSIONES DE GALOIS PARCIALES

Definición 4.4.1. *Si S es una extensión de Galois parcial conmutativa de R con acción parcial α de G sobre S, para una subálgebra T de S se define*

$$H_T = \{\sigma \in G \mid \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}) = x1_\sigma, \ \forall x \in T\}.$$

Se dice que T es α-fuerte si, para todo $\sigma,\ \tau \in G$, con $\sigma^{-1}\tau \notin H_T$ y todo idempotente no nulo $e \in S_\sigma \cup S_\tau$, existe $t \in T$ tal que

$$\alpha_\sigma(t1_{\sigma^{-1}})e \neq \alpha_\tau(t1_{\tau^{-1}})e.$$

Teorema 4.4.1 (**Teorema fundamental de la teoría de Galois parcial**). *[9, Theorem 5.1]Sea S una extensión de Galois parcial de R con acción parcial α de G sobre S. Entonces existe una correspondencia uno a uno entre los subgrupos de G y las subálgebras T de S que son separables, α-fuertes y tales que H_T es subgrupo de G.*

El teorema fundamental de la teoría de Galois parcial fue probado en [9] a partir de los siguientes tres resultados

Teorema 4.4.2 ([9], Theorem 5.2)**.** *Sea S una extensión de Galois α-parcial R y H un subgrupo de G. Entonces $\alpha_H = \{\alpha_\sigma : S_{\sigma^{-1}} \to S_\sigma \mid \sigma \in H\}$ es una acción parcial de H sobre S y S es una extensión de Galois α_H-parcial de $T = S^{\alpha_H}$. Además, T es R-separable, α-fuerte y $H_T = H$.*

Demostración. La restricción α_H de α a H es una acción parcial de H sobre S. Ahora, como S es una extensión de Galois α-parcial de R existen las coordenadas parciales de S sobre R, $\{x_i, y_i\}$, con $1 \leq i \leq n$, tales que para todo $\sigma \in G$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\sigma(y_i) = \delta_{1,\sigma}.$$

En particular esto sucede para todo $\sigma \in H$ y como $S^{\alpha_H} = T$, se puede concluir que S es una extensión de Galois α_H-parcial de T.
Se denota por (S', G) a la globalización de α y tome $S'^G = R'$. Como $S' = \sum_{\sigma \in G} \sigma(S)$ es fácil ver que existe una acción global de H sobre $\tilde{S} = \sum_{\sigma \in H} \sigma(S)$ la cual es una

globalización de $\alpha_H,$ la cual está dada al restringir la acción global de G sobre S' a H y $\tilde{S}.$

La acción global de G sobre S' induce una acción parcial β de G sobre $\tilde{S}$ para la cual también es una globalización. Luego, por Proposición 4.2.2 se sigue que $R'1_{\tilde{S}} = (\tilde{S})^{\beta}$ y $R'1_S = R.$ Consecuentemente

$$(\tilde{S})^{\beta}1_S = R'1_{\tilde{S}}1_S = R'1_S = R.$$

Además, $(\tilde{S})^H 1_S = S^{\alpha_H}$. Por otro lado, $S' = S'1_{\tilde{S}} \oplus S'(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) = \tilde{S} \oplus S'(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}).$ Claramente, $S'(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$ es H-invariante, luego $S'^H = (\tilde{S})^H \oplus (S'(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})^H$ y $S'^H 1_{\tilde{S}} = (\tilde{S})^H 1_{\tilde{S}} = (\tilde{S})^H$. Por lo tanto $T = S^{\alpha_H} = (\tilde{S})^H 1_S = S'^H 1_{\tilde{S}} 1_S = S'^H 1_S.$

Por Teorema 4.3.1 S' es una extensión de Galois de R' con grupo de Galois $G.$ Por lo tanto S'^H es R'-separable, G-fuerte y $H = H_{S'^H}$. Se verifica de forma fácil que si $e' \in S'^H \otimes_{R'} S'^H$ es el idempotente de separabilidad de S'^H sobre R', entonces

$$e = e'(1_S \otimes 1_S) \in S'^H 1_S \otimes_{R'1_S} S'^H 1_S = S^{\alpha_H} \otimes S^{\alpha_H} = T \otimes T$$

es el idempotente de separabilidad de T sobre $R,$ para esto se ve que si $e' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\mu(e) &= \sum_{i=1}^{n} (a_i 1_S)(b_i 1_S) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) 1_S \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Big) 1_S \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $J(T)e \subseteq J(S'^H)e = J(S'^H)e'(1_S \otimes 1_S) = 0$, donde $J(-)$ está dado por la ecuación (1). Luego T es R-separable.

Ahora, se prueba que T es α-fuerte. Se toman cualesquiera $\sigma, \tau \in G$ con $\sigma^{-1}\tau \notin H_T$ y un idempotente no nulo $e \in S_\sigma \cup S_\tau$. Como S'^H es G-fuerte y $\sigma^{-1}\tau \notin H_T \subseteq H = S_{S'^H}$, si $e1_\sigma 1_\tau \neq 0$ entonces existe $x \in S'^H$ tal que $\sigma(x)e1_\sigma 1_\tau \neq \tau(x)e1_\sigma 1_\tau$. Consecuentemente $x1_S \in T$ y

$$\alpha_\sigma(x1_S 1_{\sigma^{-1}})e1_\sigma 1_\tau = \sigma(x)e1_\sigma 1_\tau \neq \tau(x)e1_\sigma 1_\tau = \alpha_\tau(x1_S 1_{\tau^{-1}})e1_\sigma 1_\tau,$$

por lo tanto $\alpha_\sigma(x1_S 1_{\sigma^{-1}})e1_\sigma 1_\tau \neq \alpha_\tau(x1_S 1_{\tau^{-1}})e1_\sigma 1_\tau$. Finalmente, si $e1_\sigma 1_\tau = 0$ y $e \in S_\sigma$ se tiene que $\alpha_\sigma(1_S 1_{\sigma^{-1}})e = 1_\sigma e = e \neq 0 = e1_\sigma 1_\tau = e1_\tau = \alpha_\tau(1_S 1_{\tau^{-1}})e$. De forma análoga se muestra que el resultado es cierto si $e \in S_\tau$.

Ahora, es claro que $H_T \subseteq H$. Recíprocamente, se asume que $\sigma \in H_T \backslash H$, $H = S_{S'^H}$. Como S'^H es G-fuerte, se sigue que existe $x \in S'^H$ con $\sigma(x)1_\sigma \neq x1_\sigma$. Por lo tanto $\alpha_\sigma(x1_s 1_{\sigma^{-1}}) = \sigma(x)1_\sigma \neq x1_\sigma = x1_S 1_\sigma$, lo cual es una contradicción pues $\sigma \in H_T$ y $x1_S \in S'^H 1_S = T$. Por lo tanto $H_T = H$ y la prueba está completa. □

Lema 4.4.1 ([9], Lemma 5.3)**.** *Sean S una extensión de Galois α-parcial de R y T una R-subálgebra de S, separable y α-fuerte. Entonces existen $x_i, y_i \in T$, $i = 1, \cdots, m$, tales que*

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \alpha_\sigma(y_i 1_{\sigma^{-1}}) = \delta_{1,\sigma},$$

para todo $\sigma \in G \backslash H_T$.

Demostración. Como T es separable sobre R, existe $e_T = \sum_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i \in T \otimes T$ idempotente de separabilidad y se considera $\mu : S \otimes S \to S$ el homomorfismo dado por la multiplicación. Luego $\mu(e_T) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i = 1$.

Por otro lado, si $x \in T$, se tiene que $(x \otimes 1_S - 1_S \otimes x)e_T = 0$. Dado $\sigma \neq 1 \in G\backslash H_T$, se define $e_\sigma = \mu(\theta_\sigma(e_T))$, donde $\theta_\sigma : S \to S$ es un homomorfismo de S-álgebras dado por $\theta_\sigma(x\otimes y)=x\otimes\alpha_\sigma(y1_{\sigma^{-1}})$. Por construcción e_σ es un idempotente de S_σ. Luego, si $x\in T$

$$
\begin{aligned}
0 &= \mu(\theta_\sigma((x\otimes 1_S - 1_S\otimes x)e_T))\\
&= \mu((\theta_\sigma(x\otimes 1_S - 1_S\otimes x)\theta_\sigma(e_T))\\
&= \mu(x\otimes\alpha_\sigma(1_S1_{\sigma^{-1}}) - 1_S\otimes\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})\theta_\sigma(e_T))\\
&= \mu(x\otimes\alpha_\sigma(1_{\sigma^{-1}}) - 1_S\otimes\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}))\mu(\theta_\sigma(e_T))\\
&= (x1_\sigma - 1_S\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})\theta_\sigma(e_T))\\
&= (x1_\sigma - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}}))e_\sigma\\
&= x1_\sigma e_\sigma - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e_\sigma\\
&= xe_\sigma - \alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e_\sigma,
\end{aligned}
$$

por lo tanto $xe_\sigma=\alpha_\sigma(x1_{\sigma^{-1}})e_\sigma$, para todo $x\in T$, pero como T es α-fuerte, esto implica que $e_\sigma=0$, es decir $\sum\limits_{i=1}^{m}x_i\alpha_\sigma(y_i1_{\sigma^{-1}})=0$. □

Teorema 4.4.3 ([9], Theorem 5.4)**.** *Sean S una extensión de Galois α-parcial de R y T una R-subálgebra de S, separable y α-fuerte tal que H_T es un subgrupo de G. Entonces $S^{\alpha_H}=T$ para $H=H_T$, donde α_H es la acción parcial de H sobre S definida anteriormente.*

Demostración. Claramente $T\subseteq S^{\alpha_H}$. Ahora, se probará la otra inclusión. Sea (S',β) la globalización de α y $R'=S'^G$. Como en la prueba del Teorema 4.4.1 se considera $\tilde{S}=\sum\limits_{\sigma\in H}\sigma(S)$ sobre la cual H actúa como un grupo de automorfismos y $(\tilde{S},H)$ es la globalización de la acción parcial de α_H de H sobre S.

Por la Proposicion 4.2.2, existe un isomorfismo de anillos $\psi^H: S^{\alpha_H}\to(\tilde{S})^H$ tal que $\psi^H(x)1_S=x$, para todo $x\in S^{\alpha_H}$. Se escribirá ahora $\tilde{T}=\psi^H(T)$.

Afirmación: existen elementos $\tilde{x}_i,\tilde{y}_i\in\tilde{T}$, $1\le i\le m$, tal que

$$\sum_{1\leq i\leq m}\tilde{x}_i\tilde{y}_i=1_{\tilde{S}}\quad \text{y} \quad \sum_{1\leq i\leq m}\tilde{x}_i\sigma(\tilde{y}_i)=0,$$

para todo $\sigma\in G\backslash H$. De hecho, por Lema 4.4.1 existen elementos $x_i,y_i\in T$, $1\leq i\leq m$, tales que $\sum\limits_{1\leq i\leq m}x_iy_i=1_S$ y $\sum\limits_{1\leq i\leq m}x_i\alpha_\sigma(y_i1_{\sigma^{-1}})=0$, para todo $\sigma\in G\backslash H$. Como $\sum\limits_{1\leq i\leq m}x_i\sigma(y_i)\in S\cap\sigma(S)=S_\sigma$ se tiene que

$$\sum_{1\leq i\leq m}x_i\sigma(y_i)=\sum_{1\leq i\leq m}x_i\sigma(y_i)1_\sigma=\sum_{1\leq i\leq m}x_i\alpha_\sigma(y_i1_{\sigma^{-1}})=0.$$

A partir de ahora, se escribirá como $\tilde{x}_i=\psi^H(x_i)$ y $\tilde{y}_i=\psi^H(y_i)$ en $\tilde{T}$, $1\leq i\leq m$, y se denotarán por $\tau_1=1,\tau_2,\dots,\tau_l$ los elementos de H. Ahora, para cada $x\in S^H$ se tiene que $\psi^H(x)=\sum\limits_{1\leq i\leq l}\tau_i(x)e_i$, donde $e_1,\dots,e_l\in\tilde{S}$ son idempotentes ortogonales dos a dos. Por lo tanto

$$\sum_{1\leq i\leq m}\tilde{x}_i\tilde{y}_i=\psi^H\Big(\sum_{1\leq i\leq m}x_iy_i\Big)=\psi^H(1_S)=1_{\tilde{S}}$$

y para cada $\sigma\in G\backslash H$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq m}\tilde{x}_i\sigma(\tilde{y}_i)&=\sum_{1\leq i\leq m}\sum_{1\leq j,j'\leq l}\tau_j(x_i)e_j\sigma(\tau_{j'}(y_i)e_{j'})\\&=\sum_{1\leq j,j'\leq l}e_j\sigma(e_{j'})\tau_j\Big(\sum_{1\leq i\leq m}x_i{\tau_j}^{-1}\sigma\tau_{j'}(y_i)\Big)=0.\end{aligned}$$

Note que como $H\subseteq H_{\tilde{T}}$ y los elementos $\tilde{x}_i,\tilde{y}_i$ están en $\tilde{T}$, lo que implica que $H_{\tilde{T}}=H$.

La restricción de (S',G) a $\tilde{S}$ resulta en una acción parcial β de G sobre $\tilde{S}$ para la cual también es su globalización.

Se sigue de Proposición 2.1.2 que existe un isomorfismo de anillos $S'^G\to(\tilde{S})^\beta$ que envía a x en $x1_{\tilde{S}}$. Además, la aplicación $x\mapsto x1_S$ es un isomorfismo de S'^G sobre R. Así, se tiene un isomorfismo $(\tilde{S})^\beta\to R$ definido por $y\mapsto y1_S$ para todo $y\in(\tilde{S})^\beta$, cuya inversa es ψ^H restringida a R. Luego $\psi^H(R) = (\tilde{S})^\beta$ y consecuentemente $\tilde{T} = \psi^H(T)$ es separable sobre $(\tilde{S})^\beta$.

Note que $S'^H = S'^H 1_{\tilde{S}} \oplus S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) = (S' 1_{\tilde{S}})^H \oplus S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) = (\tilde{S})^H \oplus S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$. En particular $S'^H 1_S = (\tilde{S})^H 1_S = S^{\alpha_H}$.

Se considera la subálgbebra $T' = \tilde{T} \oplus S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$. Se verá ahora que T' es separable sobre R' y es G-fuerte. De hecho, S'^H es separable sobre R' y así $S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$ es separable sobre $R'(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$. Como $\tilde{T}$ es $(\tilde{S})^\beta$-separable y $(\tilde{S})^\beta = S'^G 1_{\tilde{S}} = R' 1_{\tilde{S}}$, se sigue que T' es separable sobre $(\tilde{S})^\beta \oplus R'((1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) = R'$.

Para probar que T' es G-fuerte se asume que $\sigma \in G \backslash H$ y $e \in S'$ es un idempotente, y suponga que $\sigma(x+y)e = (x+y)e$, para todo $x \in \tilde{T}$ y $y \in S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$.

Se escribirán $e = e_1 + e_2$ con $e_1 = e 1_{\tilde{S}}$ y $e_2 = e(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$. Entones multiplicando la igualdad $\sigma(x+y)e = (x+y)e$ por $1_{\tilde{S}}$, se obtiene que $\sigma(x+y)e_1 = (x+y)e_1 = xe_1$, para todo $x \in \tilde{T}$ y $y \in S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$. En particular, tomando $y = 0$ se observa que $\sigma(x)e_1 = xe_1$ para todo $x \in \tilde{T}$.

Como ya se sabe, existen $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i \in \tilde{T}$, $1 \leq i \leq m$, con $\sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_i \tilde{y}_i = 1_{\tilde{S}}$ y $\sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_i \sigma(\tilde{y}_i) = 0$. Luego $0 = \sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_i \sigma(\tilde{y}_i) e_1 = \sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{x}_i \tilde{y}_i e_1 = 1_{\tilde{S}} e_1 = e_1$.

Por lo tanto $e = e_2$ y $\sigma(x+y)e_2 = (x+y)e_2 = ye_2$, para todo $x \in \tilde{T}$ y $y \in S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$.

Tomando $x = 0$ se obtiene que para todo $y \in S'^H(1_{S'} - 1_{\tilde{S}})$ se tiene que $\sigma(y)e_2 = ye_2$.

Como S'^H es G-fuerte y separable sobre R', por Lema 4.4.1 existen $u_j, v_j \in S'^H$, $1 \leq j \leq l$, con $\sum_{1 \leq j \leq l} u_j v_j = 1_{S'}$ y $\sum_{1 \leq j \leq l} u_j \sigma(v_j) = 0$. Así

$$0 = \sum_{1 \leq j \leq l} u_j \sigma(v_j) \sigma(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) e_2 = \sum_{1 \leq j \leq l} u_j v_j (1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) e_2 = 1_{S'}(1_{S'} - 1_{\tilde{S}}) e_2 = e_2,$$

lo cual demuestra que T' es G-fuerte.

□

5. ACCIONES PARCIALES Y EL SEMIGRUPO DE HARRISON

5.1. HACIA LA CONSTRUCCIÓN DEL SEMIGRUPO INVERSO DE HARRISON

En los siguientes resultados se van a utilizar los Teoremas de correspondecia de la teoría de Galois y la teoría de Galois parcial para construir nuevas extensiones parciales de Galois y poder, a su vez, construir el semigrupo inverso de Harrison que se verá en la siguiente sección.

Sea S es una extensión de Galois α-parcial tal que (B, β) es globalización de α. Se considera $\psi_H : B \to B$ dada por la ecuación (4) y se supone que H es un subgrupo normal de G. Por el Teorema de correspondencia de la Teoría de Galois global se sabe que la acción β del grupo G sobre B induce una acción global $\beta_{G/H}$ de G/H sobre B^H dada por:

$$\beta_{G/H} : G/H \to \text{Aut}(B^H)$$
$$\sigma H \mapsto \beta_\sigma|_{B^H}.$$

Como B es una extensión de Galois de B^G con grupo de Galois $G,$ entonces B^H es una extensión de Galois de B^G con grupo de Galois $G/H.$ Más aún, esta acción induce una acción parcial $\alpha_{G/H}$ de G/H sobre $B^H e_H$ de la siguiente forma:

$$\alpha_{G/H} = \{\alpha_{\sigma H} : D_{\sigma^{-1}H} \to D_{\sigma H} \mid \sigma H \in G/H\},$$

donde $D_{\sigma H} = (B^H e_H) \cap \beta_\sigma(B^H e_H) = B^H e_{\sigma H},$ con $e_{\sigma H} = e_H \beta_\sigma(e_H)$ y $\alpha_{\sigma H} = \beta_\sigma|_{D_{\sigma^{-1}H}}.$

Proposición 5.1.1 ([14], Proposição 2.4.3)**.** *Sea H un subgrupo normal de G y $\alpha_{G/H}$ definida anteriormente. Entonces*

1. $\alpha_{G/H}$ *es una acción parcial de* G/H *sobre* $B^H e_H$;

2. $(B, \beta_{G/H})$ *es una globalización de* $(B^H e_H, \alpha_{G/H})$.

Demostración. 1. Por construcción $D_{\sigma H}$ es un ideal de $B^H e_H$ y cada $\alpha_{\sigma H} = \beta_\sigma|_{D_{\sigma^{-1}H}}$ es un isomorfismo de anillos.

Ahora, se revisan las condiciones para que $\alpha_{G/H}$ sea una acción:

a) Primero, se tiene que $D_H = B^H e_H \beta_1(e_H) = B^H e_H$ y $\alpha_H = \beta_1|_{D_H} = id_{B^H e_H}$.

b)

$$\begin{aligned}
\alpha_{\sigma H}(D_{\sigma^{-1}H} \cap D_{\tau H}) &= \beta_\sigma(D_{\sigma^{-1}H} \cap D_{\tau H}) \\
&= \beta_\sigma(B^H e_H \beta_{\sigma^{-1}}(e_H) \cap B^H e_H \beta_\tau e_H) \\
&= \beta_\sigma(B^H e_H \beta_{\sigma^{-1}}(e_H) B^H e_H \beta_\tau e_H) \\
&= \beta_\sigma(B^H e_H \beta_{\sigma^{-1}}(e_H))\beta_\sigma(B^H e_H \beta_\tau e_H) \\
&= B^H \beta_\sigma(e_H) e_H B^H e_H \beta_{\sigma\tau}(e_H) \\
&= B^H \beta_\sigma(e_H) e_H \cap B^H e_H \beta_{\sigma\tau}(e_H) \\
&= D_{\sigma H} \cap D_{\sigma\tau H}.
\end{aligned}$$

c) Por último, de (2) se sigue que si $x \in D_{\tau^{-1}H} \cap D_{(\sigma\tau)^{-1}H,}$ entonces $\beta_\tau(x) = \alpha_{\tau H}(x) \in D_{\sigma^{-1}H}$, y por lo tanto se tiene que $\alpha_{\sigma H} \circ \alpha_{\tau H}(x) = \alpha_{\sigma H}(\beta_\tau(x)) = \beta_\sigma(\beta_\tau(x)) = \beta_{\sigma\tau}(x) = \alpha_{\sigma\tau H}(x)$.

2. Para mostrar la segunda afirmación es suficiente verificar que $B^H = \sum_{1 \leq i \leq m} \beta_{\sigma_i}(B^H e_H)$, donde $\sigma_1 = 1, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ denotan los representantes de las clases obtenidas al hacer el cociente entre G y H. Como esa suma es un ideal de B^H basta con ver que 1_{B^H} está contenido allí. La acción parcial de G/H sobre B^H establecida

por los elementos β_{σ_i} determinan la aplicación $\psi_{G/H} : B^H \to B^H$ dada por

$$\psi_{G/H}(x) = \sum_{1\leq l\leq m} \sum_{i_1<\cdots<1_l} (-1)^{l+1}\beta_{\sigma_{i_1}}(e_H)\beta_{\sigma_{i_2}}(e_H)\cdots\beta_{\sigma_{i_l}}(e_H)\beta_{\sigma_{i_l}}(x).$$

A partir de estose tiene que $\psi_{G/H}(B^H) \subseteq \sum\limits_{i\leq i\leq m} \beta_{\sigma_i}(B^H e_H)$ y como $\psi_{G/H}(e_H) = 1_{B^H}$ por el Lema 4.4 de [6], se obtiene el resultado deseado.

□

Ahora, se induce una acción parcial de G/H sobre S^{α_H} a partir de la acción $\alpha_{G/H}$ sobre $B^H e_H$ multiplicando por 1_S, y se denotará por $\alpha'_{G/H}$.
Sea $\{\sigma_1 = 1, \ldots, \sigma_n\}$ un conjunto de los representantes de las clases al cocientar G en H, sean:

$$1'_{\sigma_i} = e_{\sigma_i H}1_S = e_H\beta_{\sigma_i}(e_H)1_S = \beta_{\sigma_i}(e_H)1_S,$$

$$D'_{\sigma_i} = D_{\sigma_i H}1_S = B^H e_{\sigma_i H}1_S = S^{\alpha_H}1'_{\sigma_i},$$

$$\alpha'_{\sigma_i} = (1_S \circ \alpha_{\sigma_i H} \circ \psi_H)|_{D'_{{\sigma_i}^{-1}}}.$$

Proposición 5.1.2 ([14], Proposição 2.4.5)**.** *Sean H un subgrupo normal de G y $\{\sigma_1 = 1, \ldots, \sigma_n\}$ un conjunto de representantes de las clases del cociente entre G y H. Entonces,*

1. $\alpha'_{G/H} = \{\alpha'_{\sigma_i} : D'_{{\sigma_i}^{-1}} \to D'_{\sigma_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ *es una acción parcial de G/H sobre* S^{α_H};
2. $(S^{\alpha_H})^{\alpha'_{G/H}} = S^{\alpha_G}$;
3. $(B^H, \beta_{G/H})$ *es una globalización de* $(S^{\alpha_H}, \alpha'_{G/H})$;

4. S^{α_H} *es una extensión de Galois* $\alpha'_{G/H}$ *de* S^{α} *si y sólo si* B^H *es una extensión de Galois de* B^G *con grupo de Galois* G/H.

La demostración de la proposición 5.1.2 sigue los lineamientos de las demostraciones anteriores y por lo tanto no se presentará. A partir de estos resultados se enuncia y demuestra el siguiente teorema.

Teorema 5.1.1 ([14], Teorema 2.4.2)**.** *Sean* S *un anillo,* G *un grupo finito y* α *una acción parcial de* G *sobre* S *tal que* S *es una extensión de Galois* α*-parcial de* S^{α}. *Entonces todo subgrupo normal* H *de* G *induce una acción parcial* $\alpha'_{G/H}$ *sobre* S^{α_H} *y* S^{α_H} *es una extensión de Galois* $\alpha'_{G/H}$*-parcial de* S^{α}.

5.2. EL SEMIGRUPO INVERSO DE HARRISON

Similar a el Capítulo 3.3, se toma un grupo abeliano G y un anillo R, y se emula la construcción del grupo de Harrison en el contexto de extensiones de Galois parciales de R. Se notará que el resultado no es un grupo, pero sí es un semigrupo inverso.

Definición 5.2.1. *Un semigrupo inverso* S *es un semigrupo en el cual para todo elemento* $x \in S$ *tiene un único inverso* $y \in S$ *en el sentido que* $x = xyx$ y $y = yxy$.

Ejemplo 5.2.1. *Todo grupo es un semigrupo inverso.*

Ejemplo 5.2.2. *Sea* S *un semigrupo tal que todos sus elementos son idempotentes, entonces* S *es un semigrupo inverso. En particular el conjunto de los números naturales dotado con el producto* $m \cdot n =$ *min*(m, n) *es un semigrupo inverso.*

Ejemplo 5.2.3. *Sean* X *un conjunto e* $I(X) = \{f : A \to B \mid f$ *es biyectiva y* $A, B \subseteq X\}$. *Entonces* $I(X)$ *es un semigrupo inverso con la composición de funciones.*

A continuación se define una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las extensiones de Galois relativas a acciones parciales de un grupo finito G sobre extensiones del anillo R.

Definición 5.2.2. *Se dice que dos extensiones de Galois parciales* (S, α) *y* (S', α') *de* R *son* G*-isomorfas parcialmente, y se denotará por* $(S, \alpha) \overset{par}{\sim} (S', \alpha')$, *si existe un isomorfismo de* R*-álgebras* $f : S \to S'$ *tal que para todo* $\sigma \in G$:

1. $f(S_\sigma) = S'_\sigma$;
2. $(f \circ \alpha_\sigma)|_{S_{\sigma^{-1}}} = (\alpha'_\sigma \circ f)|_{S_{\sigma^{-1}}}$.

Es claro que $\overset{par}{\sim}$ es una relación de equivalencia y se denotará por $[S, \alpha]$ la clase de equivalencia representada por la extensión de Galois parcial (S, α), esto es $[S, \alpha] = \{(S', \alpha') \mid (S', \alpha') \overset{par}{\sim} (S, \alpha)\}$. Se considera $T_{par}(G, R)$ como el conjunto de las clases de equivalencia de las extensiones abelianas parciales bajo la relación $\overset{par}{\sim}$.

Sean (B, β) y (B', β') las globalizaciones de (S, α) y (S', α') respectivamente, y se supone que $B^G = A = B'^G$. Se dirá que son G-isomorfas *globalmente*, lo cual se denotará por $(B, \beta) \overset{gl}{\sim} (B', \beta')$, si existe un isomorfismo de A-álgebras $f : B \to B'$ tal que:

1. $f \circ \beta_\sigma = \beta'_\sigma \circ f$;
2. $f(1_S) = 1_{S'}$,

para todo $\sigma \in G$.

Proposición 5.2.1 ([14], Proposição 2.5.2)**.** *Sean* (S, α) *y* (S', α') *extensiones parciales de Galois de* R *con globalizaciones* (B, β) *y* (B', β'), *respectivamente. Si* $(B, \beta) \overset{gl}{\sim} (B', \beta')$, *entonces* (B', β') *es una globalización para* (S, α).[19]

Demostración. Sean $f : B \to B'$ un isomorfismo y $\varphi : S \to B$ un monomorfismo de anillos que satisface las propiedades de globalización en la Definición 4.2.1. Es suficiente mostrar que $f \circ \varphi$ también cumple tales propiedades.

[19] Note que en general $S^\alpha = S'^\alpha$ no implica que $B^G = B'^G$, pero por la Proposición 4.2.2 concluimos $B^G \simeq B'^G$.

De hecho, es claro que $f \circ \varphi : S \to B'$ es un monomorfismo de anillos pues tanto f como φ lo son. Primero, se debe vertificar que $f(\varphi(S))$ es un ideal de B' pero esto se tiene de que f es un isomorfismo y $\varphi(S)$ es un ideal de B. Ahora se verá el resto de propiedades:

1. Para todo $\sigma \in G$, se obtiene que

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)(S_\sigma) &= f(\varphi(S) \cap \beta_\sigma(\varphi(S)))\\ &= f((\varphi(S)) \cap f(\beta_\sigma(\varphi(S)))\\ &= f((\varphi(S)) \cap (\beta'_\sigma \circ f)(\varphi(S))\\ &= (f \circ \varphi)(S) \cap \beta'_\sigma((f \circ \varphi)(S)).\end{aligned}$$

2. Para todo $\sigma \in G$ y $x \in S_{\sigma^{-1}}$ se tiene

$$\begin{aligned}[(f \circ \varphi) \circ \alpha_\sigma](x) &= [f \circ (\varphi \circ \alpha_\sigma)](x)\\ &= [f \circ (\beta_\sigma \circ \varphi)](x)\\ &= [(\beta'_\sigma \circ f) \circ \varphi](x)\\ &= [\beta'_\sigma \circ (f \circ \varphi)](x).\end{aligned}$$

3. Note que

$$\begin{aligned}B' &= f(B)\\ &= f\Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_\sigma(\varphi(S))\Big)\\ &= \sum_{\sigma \in G} f(\beta_\sigma(\varphi(S)))\\ &= \sum_{\sigma \in G} \beta'_\sigma(f \circ \varphi)(S))\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 5.2.1 ([14], Teorema 2.5.3). *Sean (S,α) y (S',α') extensiones de Galois parciales de R y (B,β) y (B',β') sus respectivas globalizaciones. Sea H un subgrupo normal de G. Si (B,β) y (B',β') son G-isomorfas globalmente, entonces $(S^{\alpha_H},\alpha'_{G/H})$ y $(S'^{\alpha_H},\alpha''_{G/H})$ son G/H-isomorfas parcialmente. En particular (S,α) y (S',α') son G-isomorfas parcialmente.*

A continuación se enuncia una proposición, la cual será usado en la prueba de la Proposición 5.2.6.

Proposición 5.2.2 ([14],Proposição 2.5.4). *Sean (S,α) y (S',α') extensiones de Galois parciales de R y (B,β) y (B',β') sus respectivas globalizaciones. Si $(S,\alpha)\overset{par}{\sim}(S',\alpha')$, entonces $(B,\beta)\overset{gl}{\sim}(B',\beta')$.*

La aplicación $\psi_{\delta G}: B\otimes B'\to B\otimes B'$ es dada por la fórmula

$$\psi_{\delta G}(x\otimes y)=\sum_{1\leq l\leq|\delta G|}\sum_{i_1<\cdots<i_l}(-1)^{l+1}\beta_{\tau_{i_1}^{-1}}\otimes\beta'_{\tau_{i_1}}(1_R\otimes 1_R)\cdots\beta_{\tau_{i_l}^{-1}}\otimes\beta'_{\tau_{i_l}}(1_R\otimes 1_R)\beta_{\tau_{i_l}^{-1}}\otimes\beta'_{\tau_{i_l}}(x\otimes y).$$

Se denota por $e_{\delta G}:=\psi_{\delta G}(1_R\otimes 1_R)=\psi_{\delta G}(1_S\otimes 1'_S)$. Se sabe que $S^\alpha=R=S'^{\alpha'}$ y por lo tanto $1_S=1_R=1'_S$.
Además, $((B\otimes B')^{\delta G},(\beta\otimes\beta')_{(G\times G)/\delta G})$ es una globalización de $((S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}},\lambda'_{(G\times G)/\delta G})$, donde

- $\lambda=\alpha\otimes\alpha'$,
- $\lambda'_{(G\times G)/\delta G}=(\{D'_{[\sigma_o,\sigma_1]}\}.\{\alpha\otimes\alpha'_{[\sigma_o,\sigma_1]}\})$,
- $D'_{[\sigma_o,\sigma_1]}=(B\otimes B')^{\delta G}(\beta_{\sigma_i}\otimes\beta'_{\sigma_1})(e_{\delta G})1_S\otimes 1_{S'}$,
- $\alpha\otimes\alpha'_{[\sigma_o,\sigma_1]}=(1_S\otimes 1_{S'}\circ\alpha\otimes\alpha'_{[\sigma_o,\sigma_1]\delta G}\circ\psi_{\delta G})|_{D'_{[\sigma_o,\sigma_1]}}$.

Dados $[S,\alpha],[S',\alpha'] \in T_{par}(G,R)$, el Teorema 4.3.4 asegura que $S\otimes S'$ es una extensión abeliana $\alpha\otimes\alpha'$-parcial de $R\otimes R=R$. Por la Proposición 5.1.2, $((S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G\times G)/\delta G})$ es una extensión de Galois parcial con acción parcial $\lambda'_{(G\times G)/\delta G}$ de R. Luego es natural definir sobre $T_{par}(G,R)$ la operación $*_{par}$ dada por

$$\begin{aligned}[(S,\alpha)] *_{par} [(S',\alpha')] &= [1_S\otimes 1_{S'}(B\otimes B')^{\delta G}, 1_S\otimes 1'_S\Lambda_{(G\times G)/\delta G}]\\ &= [(S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G\times G)/\delta G}],\end{aligned}$$

con $\Lambda=\beta\otimes\beta'$ y $\lambda=\alpha\otimes\alpha'$.

Proposición 5.2.3 ([14], Proposição 3.1.2)**.** *La operación $*_{par}$ está bien definida.*

Demostración. Considere $[S,\alpha],\ [S',\alpha'],\ [S_1,\alpha_1]$ y $[S'_1,\alpha'_1]$ en $T_{par}(G,R)$ y sean $[B,\beta],\ [B',\beta'],$ $[B_1,\beta_1],\ [B'_1,\beta'_1]$ las clases de sus respectivas globalizaciones en $T_{gl}(G,A)$. Suponga que $[S,\alpha]=[S_1,\alpha_1]$ y $[S',\alpha']=[S'_1,\alpha'_1]$, entonces $[B,\beta]=[B_1,\beta_1]$ y $[B',\beta']=[B'_1,\beta'_1]$, y así

$$\begin{aligned}[(B\otimes B')^{\delta G}, \Lambda_{(G\times G)/\delta G}] &= [B,\beta]*[B',\beta']\\ &= [B_1,\beta_1]*[B'_1,\beta'_1]\\ &= [(B_1\otimes B'_1)^{\delta G}, (\Lambda_1)_{(G\times G)/\delta G}]\end{aligned}$$

con $\Lambda=\beta\otimes\beta'$ y $\Lambda_1=\beta_1\otimes\beta'_1$.

Ahora, $((B\otimes B')^{\delta G}, \Lambda_{(G\times G)_{\delta_G}})$ y $((B_1\otimes B'_1)^{\delta G}, (\Lambda_1)_{(G\times G)_{\delta_G}})$ son, respectivamente, globalizaciones de $((S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, \lambda'_{(G\times G)_{\delta_G}})$ y $((S_1\otimes S'_1)^{(\alpha_1\otimes\alpha'_1)_{\delta G}}, (\lambda'_1)_{(G\times G)_{\delta_G}})$. Por el Teorema 5.2.1 se sigue que la operación $*_{par}$ está bien definida.

$\square$

Proposición 5.2.4 ([14], Proposição 3.1.3)**.** *La operación $*_{par}$ es conmutativa y aso-*

ciativa.

Demostración. Se mostrará que $*_{par}$ es conmutativa. De hecho, sean $[S,\alpha],[S',\alpha'] \in T_{par}(G,R)$ y $[B,\beta],[B',\beta'] \in T_{gl}(G,A)$ las clases representadas por las globalizaciones de (S,α) y (S',α') respectivamente. La aplicación $\chi : (B\otimes B')^{\delta G} \to (B'\otimes B)^{\delta G}$, dada por $\chi(b\otimes b') = b'\otimes b$, es un isomorfismo de A-álgebras tal que

$$\chi(1_S \otimes 1_{S'}) = 1_{S'} \otimes 1_S,$$

$$\chi \circ (\beta_\sigma \otimes \beta'_\tau) = \beta'_\tau \otimes \beta_\sigma \circ \chi,$$

para todo $(\sigma,\tau) \in G \times G$, luego

$$((B\otimes B')^{\delta G}, (\beta\otimes\beta')_{(G\times G)/\delta G}) \text{ y } ((B\otimes B')^{\delta G}, (\beta'\otimes\beta)_{(G\times G)/\delta G})$$

son $(G\times G)/\delta G$-isomorfas globalmente, y por lo tanto

$$((S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, (\alpha\otimes\alpha')'_{(G\times G)/\delta G}) \text{ y } ((S\otimes S')^{\alpha\otimes\alpha'_{\delta G}}, (\alpha'\otimes\alpha)'_{(G\times G)/\delta G})$$

son $(G\times G)/\delta G$-isomorfas parcialmente por el Teorema 5.2.1, lo cual muestra la conmutatividad. De manera análoga se prueba que $*_{par}$ es asociativa. $\square$

A partir de este resultado se puede enunciar:

Teorema 5.2.2 ([14], Teorema 3.1.4)**.** $T_{par}(G,R)$ *es un semigrupo abeliano.*

Ahora hace falta ver que T_{par} es de hecho un semigrupo inverso. Para tal motivo se enuncia la siguiente proposición.

Proposición 5.2.5 ([14], Proposição 3.1.6)**.** $T_{par}(G,R)$ *es un semigrupo inverso abeliano.*

Demostración. Por la proposición anterior $T_{par}(G,R)$ es un semigrupo abeliano, lo que resta ver es que es un semigrupo inverso.

Sea (S, α) una extensión parcial abeliana de R con globalización (B, β). Se denota por α^* la acción parcial de G sobre $S^* = S$, con ideales $S^*_\sigma = S_{\sigma^{-1}}$ e isomorfismos $\alpha^*_\sigma : S^*_{\sigma^{-1}} \to S^*_\sigma$ dados por $\alpha^*_\sigma = \alpha_{\sigma^{-1}}$ para todo $\sigma \in G$. Se denota por β^* la acción global de G sobre $B^* = B$ dada de manera análoga.
Se denota a $[S^*, \alpha^*]$ por $[S, \alpha]^*$ en $T_{par}(G, R)$. Se nota que $[B^*, \beta^*] = [B, \beta]^{-1}$ en $T_{gl}(G, A)$. Se infiere que

1. (S^*, α^*) es una extensión parcial abeliana de R;
2. (B^*, β^*) es una globalización para (S^*, α^*);
3. $[B, \beta] * [B^*, \beta^*] * [B, \beta] = [B, \beta]$ en $T_{gl}(G, A)$;
4. $[B^*, \beta^*] * [B, \beta] * [B^*, \beta^*] = [B^*, \beta^*]$ en $T_{gl}(G, A)$.

Sea $\Delta(G) = \{((\sigma^{-1}, 1)\delta G, \sigma) \mid \sigma \in G\}$. De (3) se sigue

$$\theta : (B \otimes B^* \otimes B)^{\Delta G} \to B$$
$$x \otimes y \otimes z \mapsto xyz$$

es un isomorifsmo de A-álgebras tal que $\theta \circ (\beta_\sigma \otimes \beta^*_{\sigma_1} \otimes \beta_{\sigma_1}) = \beta_\sigma \circ \theta$ para todo $\sigma \in G$. Además, como $\theta(1_R \otimes 1_R \otimes 1_R) = 1_R$, se sigue que

$$((B \otimes B^* \otimes B)^{\Delta G}, (\beta \otimes \beta^* \otimes \beta)_{(G \times G \times G)/\Delta G}) \ \text{ y } (B, \beta),$$

son $(G \times G \times G)/\Delta G$-isomorfas globalmente. Estas son las globalizaciones respectivas de

$$((S \otimes S^* \otimes S)^{(\alpha \otimes \alpha^* \otimes \alpha)_{\Delta G}}, (\alpha \otimes \alpha^* \otimes \alpha)'_{(G \times G \times G)/\Delta G}) \ \text{ y } (S, \alpha),$$

y por lo tanto estas últimas son $(G \times G \times G)/\Delta G$-parcialmente isomorfas por el Teorema 5.2.1, es decir

$$[(S\otimes S^*\otimes S)^{(\alpha\otimes\alpha^*\otimes\alpha)_{\Delta G}},(\alpha\otimes\alpha^*\otimes\alpha)'_{(G\times G\times G)/\Delta G}]=[S,\alpha]*_{par}[S,\alpha]^* *_{par}[S,\alpha]=[S,\alpha]$$

en $T_{par}(G,A)$. De manera análoga se obtiene que

$$[S,\alpha]^* *_{par}[S,\alpha]*_{par}[S,\alpha]^*=[S,\alpha]^* \text{ en } T_{par}(G,A).$$

□

Observación: El semigrupo inverso de Harrison no es un grupo. En efecto $T_{par}(G,R)$ fuera un subgrupo este debería tener un elemento neutro. Este elemento necesariamente será $[\epsilon=E1_R,1_R\circ\rho]$, donde $(\epsilon=E1_R,1_R\circ\rho)$ es la extensión de Galois parcial de R cuya globalización es (E,ρ), el cual es el representante de la clase del elemnto neutro en $T_{gl}(G,A)$. Este elemento está dado por $E=\sum\limits_{\sigma\in G}Ae_\sigma$, donde los e_σ son idempotentes ortogonales dos a dos y con suma igual a 1_A, y $\rho_\sigma:E\to E$ está dado por $\rho_\sigma(e_\tau)=e_{\sigma\tau}$, para todos $\sigma,\tau\in G$.
Para toda extensión abeiana parcial (S,α) de R, con envolvente dada por la extensión abeliana global (B,β) de A se tendría

$$[(B\otimes E)^{\delta G},(\beta\otimes\rho)_{(G\times G)/\delta G}]=[B,\beta]*[E,\rho]=[B,\beta]$$

en $T_{gl}(G,A)$, esto quiere decir que $((B\otimes E)^{\delta G},(\beta\otimes\rho)_{(G\times G)/\delta G})$ y (B,β) son $(G\times G)/\delta G$-isomorfas globalmente vía un isomorfismo de A-álgebras

$$\begin{aligned} f:(B\otimes E)^{\delta G}&\to B\\ \sum_{\sigma\in G}\beta_{\sigma^{-1}}(t)\otimes e_\sigma&\mapsto t, \end{aligned}$$

la cual satisface la primera condición de isomorfismo global, es decir, $f(1_S\otimes 1_\epsilon)=1_S$, y además $(1_S \otimes 1_\epsilon) = (\tau, \tau^{-1})(1_S \otimes 1_\epsilon)$, para todo $\tau \in G$. Así, se tiene que

$$
\begin{aligned}
1_S &= f(1_s \otimes 1_\epsilon) \\
&= f((\tau, \tau^{-1})(1_S \otimes 1_\epsilon)) \\
&= f\Big((\tau, \tau^{-1})\Big(1_S \otimes \sum_{\sigma \in G} e_{\sigma^{-1}}\Big)\Big) \\
&= f\Big((\tau, \tau^{-1})\Big(\sum_{\sigma \in G} 1_S \otimes e_{\sigma^{-1}}\Big)\Big) \\
&= f\Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_\tau(1_S) \otimes \rho_{\tau^{-1}}(e_{\sigma^{-1}})\Big) \\
&= f\Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_\tau(1_S) \otimes e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}}\Big),
\end{aligned}
$$

tomando $\lambda = \tau^{-1}\sigma^{-1}$, se puede reescribir esto como

$$
\begin{aligned}
f\Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_\tau(1_S) \otimes e_{\tau^{-1}\sigma^{-1}}\Big) &= f\Big(\sum_{\sigma \in G} \beta_{\lambda^{-1}\sigma^{-1}}(1_S) \otimes e_\lambda\Big) \\
&= f\Big(\sum_{\lambda \in G} \beta_{\lambda^{-1}}(\beta_{\sigma^{-1}}(1_S)) \otimes e_\lambda\Big) \\
&= \beta_\sigma(1_S)
\end{aligned}
$$

luego $1_S = \beta_\sigma(1_S)$, para todo $\sigma \in G$. Esta igualdad sólo se da cuando (S, α) es una extensión global de R.

Proposición 5.2.6. *Dos extensiones de Galois G-isomorfas globalmente son G-isomorfas, pero el recíproco no es necesariamente verdadero.*

Demostración. La relación de G-isomorfismo global tiene una propiedad adicional a la relación de equivalencia de G-isomorfismo entre extensiones globales dada en la Definición 3.3.1, por lo cual es claro que G-isomorfismo global implica G-isomorfismo.

Ahora se prueba que el recíproco no es cierto. Sea (S,α) una extensión de Galois parcial de R con grupo de Galois G y (B,β) su globalización, se supone que $[S,\alpha] \in T_{par}(G,R)$ es un elemento idempotente. Se sabe, además, que $((B \otimes_A B)^{\delta G}, \beta \otimes \beta_{(G\times G)/\delta G})$ es globalización de $((S \otimes S)^{(\alpha\otimes\alpha)_{\delta G}}, \lambda'_{G\times G/\delta G})$, pero como $[S,\alpha]$ es idempotente

$$((S \otimes S)^{(\alpha\otimes\alpha)_{\delta G}}, \lambda'_{G\times G/\delta G}) \overset{par}{\sim} (S,\alpha),$$

luego $((B \otimes_A B)^{\delta G}, \beta \otimes \beta_{(G\times G)/\delta G}) \overset{gl}{\sim} (B,\beta)$, y por lo tanto son también G-isomorfas. Entonces $[(B \otimes_A B)^{\delta G}, \beta \otimes \beta_{(G\times G)/\delta G}] \overset{gl}{=} [B,\beta]$ en $T_{gl}(G,A)$. Es decir, $[B,\beta]$ es un elemento idempotente de $T_{gl}(G,A)$. Como este último es un grupo, su único elemento idempotente es $[E,\rho]$, y así $[B,\beta] = [E,\rho]$. Por lo que se concluye que la globalización del representante de una clase idempotente de $T_{par}(G,R)$ es G-isomorfa a (E,ρ). Se procede por contradicción suponiendo que G-isomorfismo implica G-isomorfismo global. Entonces, como (B,β) y (E,ρ) son G-isomorfas, ellas serán G-isomorfas globalmente, y por la Proposición 5.2.1 (E,ρ) es globalización de (S,α). Si $[S',\alpha']$ es otro elemento idempotente se obtiene que (E,ρ) es globalización de su representante. Por el Teorema 5.2.1, se obtiene que $(S,\alpha) \overset{par}{\sim} (S',\alpha')$, que es lo mismo a decir

$$[S,\alpha] = [S',\alpha'].$$

Esto es, sólo existe un elemento idempotente en $T_{par}(G,R)$, al cual se denotará por I. Ahora, se conoce que para todo $[U,\theta] \in T_{par}(G,R)$, al ser un semigrupo inverso, $[U,\theta] *_{par} [U,\theta]^*$ es un elemento idempotente, es decir $[U,\theta] *_{par} [U,\theta]^* = I$. Por lo tanto

$$[U,\theta] *_{par} [U,\theta]^* *_{par} [U,\theta] = I *_{par} [U,\theta] = [U,\theta] *_{par} I = [U,\theta],$$

para todo $[U,\theta] \in T_{par}(G,R)$. Lo cual contradice el hecho de que $T_{par}(G,R)$ no es un grupo. $\square$

6. CONCLUSIONES

Al principio del presente trabajo se propuso disertar sobre la teoría de Galois de anillos conmutativos basada en acciones parciales y para ello, se estudió la teoría de Galois de anillos conmutativos global, el concepto de acción parcial sobre álgebras, producto cruzado, globalización de una acción parcial y extensiones de Galois parciales. Al final se logró cumplir el objetivo trazado, más exactamente:

- En la Sección 3.3 se construye en detalle el grupo de Harrison $T_{gr}(G, A)$.
- Imitando la construcción del grupo de Harrison en el contexto de extensiones de Galois parciales, se construye el semigrupo inverso de Harrison (Proposición 5.2.5).
- La teoría de semigrupos inversos dice que estas estructuras pueden descomponerse como unión de grupos cuyos elementos neutros son los elementos idempotentes. Al intentar hallar los posibles idempotentes del semigrupo inverso $T_{par}(R, G)$ se obtiene la Proposición 5.2.6, la cual diferencia dos relaciones de equivalencia entre extensiones abelianas de Galois sobre un mismo anillo y con mismo grupo G, enriqueciendo la estructura del semigrupo inverso de Harrison.

BIBLIOGRAFÍA

AUSLANDER, Maurice y GOLDMAN, Oscar. “The Brauer group of a commutative ring”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 97 (1960), págs. 367-409 (vid. págs. 10, 22).

BAGIO, Dirceu y PAQUES, Antonio. “Partial groupoid actions: globalization, Morita theory and Galois theory”. En: *Comm. Algebra* 40 (2012), págs. 3658-3678 (vid. pág. 11).

CHASE, Stephen; HARRISON, David y ROSENBERG, Alex. “Galois theory and Galois cohomology of commutative rings”. En: *Mem. Amer. Math. Soc.* 52 (1965), págs. 1-19 (vid. págs. 10, 22).

DOKUCHAEV, Michael y EXEL, Ruy. “Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2004), págs. 1931-1952 (vid. págs. 11, 12, 38, 41, 67).

DOKUCHAEV, Michael; EXEL, Ruy y PICCIONE, Paolo. “Partial representations and partial group algebras”. En: *J. Algebra* 226 (2000), págs. 505-532 (vid. pág. 11).

DOKUCHAEV, Michael; FERRERO, Miguel y PAQUES, Antonio. “Partial actions and Galois theory”. En: *J. Pure Appl. Algebra* 208 (2007), págs. 77-87 (vid. págs. 11, 12, 44-46, 48, 49, 54, 59, 61, 62).

DOKUCHAEV, Michael; PAQUES, Antonio y PINEDO, Héctor. *Partial actions cohomology and related homomorphisms (expanded version)*. 2018. Disponible en Internet: arXiv: `1804.03762v2 [quant-ph]` (vid. pág. 11).

EXEL, Ruy. “Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner-Voiculescu exact sequences”. En: *J. Funct. Anal.* 122 (1994), págs. 361-401 (vid. pág. 10).

— “The Bunce-Deddens algebras as crossed products by partial automorphisms”. En: *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* 25 (1994), págs. 317-179 (vid. pág. 10).

— “Twisted partial actions: a classification of regular C^*-algebraic bundles”. En: *Proc. London Math. Soc.* 74 (1997), págs. 417-443 (vid. pág. 10).

HARRISON, David. “Abelian extensions of commutative rings”. En: *Mem. Amer. Math. Soc.* 52 (1965), págs. 67-79 (vid. pág. 31).

MARÍN, Victor. “O semigrupo inverso das estensões abelianas parciais”. Tesis doct. Brasil: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016 (vid. págs. 11, 12, 65, 67-69, 71-73).

PAQUES, Antonio. *Teoría de Galois sobre anillos conmutativos*. Universidad de los Andes, Mérida, 1999 (vid. págs. 12, 24, 25, 30).

PAQUES, Antonio; RODRIGUES, Virgínia y SANT’ANA, Alveri. “Galois correspondences for partial Galois Azumaya extensions”. En: *J. Algebra Appl.* 10 (2011), págs. 835-847 (vid. pág. 11).

PAQUES, Antonio y SANT’ANA, Alveri. “When is a crossed product by a twisted partial action Azumaya?” En: *Comm Algebra* 38 (2010), págs. 1093-1103 (vid. pág. 11).

PAQUES, Antonio y THAMUSIUNAS, Thaisa. “The Galois correspondence theorem for groupoid actions”. En: *J. Algebra* 509 (2018), págs. 105-123 (vid. pág. 11).

STEINBERG, Benjamin. “Inverse semigroup homomorphisms via partial group actions”. En: *Bull. Aust. Math. Soc.* 64 (2001), págs. 157-168 (vid. pág. 11).