MÉTODOS VARIACIONALES Y EL MODELO DE KELLER-SEGEL ESTACIONARIO

SERGIO ANDRÉS JIMÉNEZ JEREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2019

MÉTODOS VARIACIONALES Y EL MODELO DE KELLER-SEGEL ESTACIONARIO

SERGIO ANDRÉS JIMÉNEZ JEREZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemático

Director
JHEAN ELEISON PÉREZ LÓPEZ
Ph.D en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

Dedicado: A mi familia, en especial
a mis padres.

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos

- ⋆ En primera parte a mi familia y en especial a mis padres **Luis F. Jiménez H. y Flor A. Jerez B.** que fueron un gran apoyo económico y emocional a través de mi vida.
- ⋆ Al profesor, **Rafael Fernando Isaacs Giraldo** que gracias a su apoyo me motivo a continuar en las Matemáticas.
- ⋆ Al profesor **Jhean Eleison Pérez López** por la paciencia y motivación académica hacia esta rama de las Matemáticas.
- ⋆ A **Daniela A. Rueda A.** quien me ha acompañado durante el ultimo año y medio, su amor y cariño lo llevaré por siempre.
- ⋆ A todos mis amigos con los cuales hacen que el día a día se disfrute mejor.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: MÉTODOS VARIACIONALES Y EL MODELO DE KELLER-SEGEL ESTACIONARIO. *

AUTOR: SERGIO ANDRÉS JIMÉNEZ JEREZ **

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS DE FUNCIONES, QUIMIOTAXIS, MÉTODOS VARIACIONALES, TEOREMA DEL PASO DE LA MONTAÑA, MODELO DE KELLER-SEGEL.

DESCRIPCIÓN:

El sistema de Keller-Segel es un modelo de quimiotaxis que físicamente modela la interacción entre un tipo de organismos y un químico. Este modelo es descrito por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con incógnitas u y v, que representan la concentración de células y la concentración de químico, respectivamente. Más específicamente, se considera el modelo

$$\begin{aligned} D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v)) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ D_2\Delta v - av + bu &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

El objetivo de este trabajo es demostrar la existencia de soluciones físicamente consistentes para este modelo, esto es, soluciones clásicas positivas y no constantes. Para ello, tomando la función $\phi(v) = v$, se tiene que la primera ecuación se cumple si u verifica la relación $u = ce^{pv}$, así, de la segunda ecuación vemos que el sistema es reducido a una única ecuación en términos de v. Para resolver dicha ecuación tratamos un problema más general, el cual está asociado con el funcional

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + c\int_\Omega u^2 dx\right) - \int_\Omega H(u)dx.$$

Es mostrado que obtener soluciones del problema diferencial es equivalente a mostrar la existencia de puntos críticos de dicho funcional, para ello se hace uso del Teorema del paso de la montaña.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Ph.D en Matemáticas.

Finalmente, de la teoría de los operadores elípticos concluimos que dichos puntos críticos son no negativos y no constantes.

ABSTRACT

TITLE: VARIATIONAL METHODS AND THE STATIONARY KELLER-SEGEL MODEL *

AUTHOR: SERGIO ANDRÉS JIMÉNEZ JEREZ **

KEYWORDS: FUNCTION SPACES, CHEMOTAXIS, VARIATIONAL METHODS, THE MOUNTAIN PASS THEOREM, KELLER-SEGEL MODEL.

DESCRIPTION:

The Keller-Segel system is a chemotaxis model that physically models the interaction between a type of organisms and a chemical. This model is described by a system of partial differential equations with unknowns u and v, which represent the concentration of cells and the concentration of chemical, respectively. More specifically, the model is considered

$$\begin{aligned} D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v)) &= 0 \text{ in } \Omega, \\ D_2\Delta v - av + bu &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{aligned}$$

The objective of this work is to demonstrate the existence of physically consistent solutions for this model, this is, positive and non-constant classical solutions. To do this, taking the function $\phi(v) = v$, the first equation must be fulfilled if you verify the relation $u = ce^{pv}$. Therefore, from the second equation we see that the system is reduced to a single equation in terms of v. To solve this equation, we treat a more general problem, which is associated with the functional

$$J_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\epsilon^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + c\int_\Omega u^2 dx\right) - \int_\Omega H(u)dx.$$

It is shown that obtaining solutions to the differential problem is equivalent to showing the existence of critical points of said functional, for this purpose the Mountain Pass Theorem is used. Finally, based

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Ph.D en-Matemáticas.

on the theory of elliptical operators, we conclude that these critical points are not negative and are not constant.

INTRODUCCIÓN

El modelo de Keller-Segel define el fenómeno biofísico de la quimiotaxis. Como bien la palabra *taxis* define el movimiento de un organismo provocado por un estímulo externo. Así, quimiotaxis define la reacción de un organismo provocado por un estimulo químico. Este tipo de comportamiento se puede ver en nuestro sistema inmune, cuando ingresa un virus e infecta un tejido muscular, los Neutrófilos un tipo de leucocitos se ven atraídos al virus para repelerlo, este fenomeno es conocido como quimio-atracción el cual es el caso a estudiar. En el modelo a considerar usaremos las funciones u y v representan la concentración de células y la concentración del químico.

Para un modelo de quimiotaxis se pueden presentar dos casos, quimio-repulsión y quimio-atracción como ya mencionado en el ejemplo. En el modelo biofísico, el término que representa el efecto de la quimiotaxis se representa matemáticamente por $\chi\nabla \cdot (u\nabla\phi(v))$, donde los casos a dar me lo definen el signo de la χ, como es para el caso $\chi < 0$, se modela un comportamiento en el cual las células se alejan en dirección del gradiente del químico, este se conoce como un modelo de quimio-repulsión, en efecto para este trabajo se desea estudiar el modelo encontrado en [1]. Por tanto, tenemos a $\chi > 0$, lo cual biofísicamente modela que las células se van a sentir bien estimuladas o bien atraídas, así, estas se dirigen en dirección al gradiente del químico, este caso se conoce como quimio-atracción.

[1] Y. Kabeya y W. M. Ni. “Stationary Keller-Segel model with the linear sensitivity”. En: *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* 1025 (1998), págs. 44-65.

Como ya se mencionó, el modelo de quimio-atracción encontrado en [1] viene descrito por

$$\begin{aligned} D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v)) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ D_2\Delta v - av + bu &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

donde Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera $\partial\Omega$ suave, $D_1, D_2, a, b > 0$ son constantes, ν es el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ y ϕ es una función suave con $\phi' > 0$ en $(0, \infty)$, aquí las incógnitas son u y v. Biofísicamente, u representa la cantidad de amebas y v representa la concentración del químico.

Volviendo a lo anterior, notemos qué modela más exactamente la ecuación. El término Δu se puede ver como $\nabla\cdot\nabla u$, el cual expresa el movimiento de la densidad celular en dirección de su gradiente, por tanto la primera ecuación $D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v)) = 0$, describe la variación de la densidad celular. Para el caso de la segunda ecuación esta puede verse como $D_2\Delta v = av - bu$, donde modela que v está generando químico y u lo esta consumiendo, de donde tenemos que esta ecuación modela la variación del químico. Cabe añadir, que los términos de la frontera $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$, conocidos como condiciones de tipo Newman, su interpretación indica que tanto la u como la v se mantiene en el ambiente, en otras palabras no hay traspaso através de la frontera.

Consecuentemente, tenemos que (1) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales estacionario de tipo elíptico. Así, para resolverlo es necesario usar técnicas propias de esta rama de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), las cuales incluyen los llamados métodos variacionales, y en particular el uso del Teorema del paso de la montaña.

En los problemas de quimiotaxis el término ya mencionado $\chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v))$, vista desde la teoría de EDP, es difícil de abordar. Para el caso en que $\phi(v)=v$ es posible hacer el cambio de variable $u=\lambda e^{pv}$ y reducir el sistema a una sola ecuación diferencial para la variable v. Por lo tanto, para resolver el sistema (1) basta con resolver el sistema más general

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\Delta u - cu + h(u) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ u &\geq 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

Su formulación variacional resulta tener una relación con la derivada en el sentido de Fréchet del funcional

$$J_\epsilon(u)=\frac{1}{2}\left(\epsilon^2\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + c\int_\Omega u^2dx\right)-\int_\Omega H(u)dx,$$

donde $H(z)=\int_0^z h(t)dt$. Así, puede ser verificado que resolver el sistema (2), es formalmente equivalente a encontrar un punto crítico del funcional J_ε, esto se logrará haciendo uso del ya mencionado Teorema del Paso de la Montaña.

Con base en lo anterior, el objetivo principal de este trabajo consiste en estudiar la existencia de soluciones u y v del problema (1). Note que, matemáticamente las funciones nulas $u, v\equiv 0$, son soluciones triviales que representan el caso en que no hay células ni químico, por otro lado, los casos en que $u, v<0$ no tienen interpretación biofísica. Por ello, para dar sentido físico y no caer en el caso trivial se buscan soluciones no negativas no constantes. Por lo cual se hace uso de la Teoría de operadores elípticos, para descartar estos casos y así tener solución no constante positiva.

Este trabajo está distribuido en dos capítulos. En el primer capítulo, se introducen algunos resultados preliminares sobre la teoría de espacios de funciones, entre estos se encuentran los espacios de Hölder, espacios de Lebesgue L^p, espacios de Orlicz y espacios de Sobolev. También se presentan algunas relaciones entre estos espacios, incluyendo el Teorema de Trudinger. La parte final del capítulo está dedicada al conocido Teorema del paso de la montaña. El segundo capítulo está dedicado al estudio del modelo de Keller-Segel. Inicialmente se reescribe el problema en un problema equivalente en términos de un operador entre espacios de Banach. Luego se establecen algunos resultados preliminares para finalmente concluir la existencia de solución usando el Teorema del paso de la montaña. Adicionalmente es mostrado que dicha solución es clásica y no negativa.

1. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones, teoremas y demás resultados preliminares que facilitarán la manera de abordar el estudio de las EDP. Se iniciará con los espacios de funciones y algunas de sus propiedades. Allí se encuentran los espacios de Lebesgue L^p, espacios de Hölder, espacios de Orlicz y espacios de Sobolev. También se presentarán algunas relaciones entre estos espacios, en especial, la relación entre los espacios de Sobolev y los espacios de Orlicz. Seguidamente, se mencionan algunos resultados de análisis funcional para finalizar con el enunciado del conocido Teorema del paso de la montaña.

1.1. Espacios de Funciones

- **Notación**

En el desarrollo de este trabajo el símbolo Ω denotará un dominio de $\mathbb{R}^n$, para $n = 2$, esto es, un conjunto no vacío, abierto y conexo cuya frontera será denotada por $\partial\Omega$. Un punto de $\mathbb{R}^n$ es escrito como $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y su norma euclidiana viene dada por $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$=$(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$. El producto interno de dos vectores x, y en $\mathbb{R}^n$ es dado por $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ es una $n-$upla de enteros no negativos α_i, se dice que α es un multi-índice de “longitud” $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ y α un multi-índice, se define x^α como $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Similarmente, si $D_j = \partial/\partial x_j$, entonces D^α definido como

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

denota el operador diferencial de orden $|\alpha|$. Note que $D^{(0,0,\ldots,0)} u = u$.

El símbolo ∇ representará el operador gradiente, que es definido como

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

Así, para una función escalar f, ∇f representa el vector con i-ésima componente $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. De la misma forma, Δ representará el operador Laplaciano, que es definido como

$$\Delta =: \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

esto es, si f es una funcion escalar, entonces $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Para $1 \leq p \leq \infty$, p' denotará su exponente conjugado. Para $1 < p < \infty$, p' viene dado por la relación

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

y si $p = 1$, entonces $p' = \infty$, o si $p = \infty$ entonces $p' = 1$.

En general, para un espacio normado X se denota su norma como $\|\cdot\|_X$. Si el espacio X es de Hilbert denotaremos su producto interno como $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, (salvo el caso de $L^2(\Omega)$ que es denotado por $(\cdot, \cdot)$), y para el producto dual entre X' (dual de X) y X, se usará $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$.

Dados dos espacios de Banach X e Y, se dice que un operador lineal $T : X \to Y$ es compacto, si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ acotada, existe una subsucesión $(x_{n_i}) \subset (x_n)$ tal que $T(x_{n_i})$ es convergente.

Dados dos espacios normados X e Y, se dice que X está inmerso continuamente en el espacio normado Y, y se usa la notación $X \hookrightarrow Y$ para designar esta inmersión, siempre que X sea un subespacio vectorial de Y, y el operador identidad I definido de X en Y por $Ix = x$ para todo $x \in X$, es continuo. Debido a que I es lineal, esto es equivalente a la existencia de una constante positiva M tal que

$$\|Ix\|_Y \leq M\|x\|_X.$$

Si además se cumple que el operador I es compacto, entonces se dice que el espacio X está inmerso compactamente en el espacio normado Y, y se escribe $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ para designar esta inmersión.

1.1.1. Espacios de funciones continuas Para cualquier entero no negativo k, $C^k(\Omega)$ denotará el espacio de funciones f las cuales, junto con todas sus derivadas parciales $D^\alpha f$ de orden $|\alpha| \leq k$, son continuas en Ω. Abreviando $C^0(\Omega) = C(\Omega)$, además $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$. Los subespacios $C_c(\Omega)$ y $C_c^\infty(\Omega)$ están conformados por todas las funciones en $C(\Omega)$ y $C^\infty(\Omega)$ respectivamente, que tienen soporte compacto en Ω, donde el soporte de una función ϕ es definido como

$$\text{supp } \phi := \overline{\{x \in \Omega; \phi(x) \neq 0\}}.$$

Se define ahora $C^m(\bar{\Omega})$ ($C(\bar{\Omega})$ para $m = 0$) como el espacio de todas las funciones f para las cuales $D^\alpha f$ es acotada y uniformemente continua en Ω, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. $C^m(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach con norma definida como:

$$\|f\|_{C^m(\bar{\Omega})} := \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\Omega} |D^\alpha f|.$$

Por otro lado, dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, decimos que la frontera $\partial\Omega$ es de clase C^k si para cada punto $x^* \in \partial\Omega$, existe $r > 0$ y una función γ de clase C^k, $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que (despúes de redefinir y reorientar los ejes si es necesario) se tiene que

$$\Omega \cap B(x^*, r) = \{x \in B(x^*, r); x_n > \gamma(x_1, x_2, ..., x_{n-1})\}.$$

1.1.2. Espacios de Hölder Otro tipo de espacios de funciones son los llamados espacios Hölder, los cuales también son espacios de Banach. Para propiedades adicionales sobre espacios de Hölder (véase [2]). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $0 < \gamma \leq 1$. El conjunto de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|^\gamma,$$

para algún $c \in \mathbb{R}$, son llamadas funciones Hölder continuas de exponente γ. Si $\gamma = 1$, entonces u es llamada lipschitziana.

Definición 1.1 *i) Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ continua y acotada, definimos $\|u\|_{C(\overline{\Omega})}$ como*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

ii) La γ-ésima semi-norma de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es definida como

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

iii) La γ-ésima norma de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es definida como

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega}))} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Definición 1.2 *El espacio Hölder $C^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right)$, con $k \in \mathbb{N}$ y $0 < \gamma \leq 1$ es definido como*

$$C^{k,\gamma}\left(\bar{\Omega}\right) = \{f \in C^k\left(\bar{\Omega}\right); \|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} < \infty\}$$

[2] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010.

donde

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Puede ser mostrado sin mayor dificultad que el espacio de Hölder $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ con la norma $\|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})}$, es un espacio de Banach (véase [2]).

1.1.3. Espacios de Lebesgue Se define en seguida los espacios de Lebesgue, sobre los cuales se enuncian algunos resultados básicos que nos facilitarán el entendimiento de espacios de funciones más complejos. Una teoría general sobre espacios de Lebesgue puede ser consultada en [3].

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$. Para $1 \leq p < \infty$, el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ es definido como el espacio de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Por otra parte, en el caso $p = \infty$, el espacio $L^\infty(\Omega)$ se define como el espacio de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)| < \infty.$$

Sobre los espacios de Lebesgue se tienen los siguientes resultados:

- Desigualdad de Hölder: Sean $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^r(\Omega)$ y se tiene que:

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

[3] G. Follang. *Real analisis: modern thecnics and theri applications*. Printed in the United States of America, 1984.

- Desigualdad de Young: Sean $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y vale que

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

  donde

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

- Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Denotamos también por $L^1_{Loc}(\Omega)$ al espacio vectorial formado por todas las funciones medibles f, tales que para todo compacto $K \subset \Omega$ se tiene que

$$\int_K |f(x)|dx < \infty.$$

Definición 1.3 *Suponga $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Decimos que v es la α-ésima derivada de u en el sentido débil si*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \phi dx,$$

para toda función $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$.

Observación 1 *Se puede mostrar que en caso de que la derivada débil v de u exista, ésta es única (salvo en un conjunto de medida nula), por lo tanto será denotada por $v = D^\alpha u$.*

1.1.4. Espacios Orlicz A continuación introducimos los espacios de Orlicz. Estos espacios son una generalización de los espacios de Lebesgue y como se verá, se cumple una relación de inclusión entre éstos y los espacios de Sobolev (véase Teorema 1.15). Esta relación de inclusión es fundamental en nuestro estudio del problema (1). Los resultados aquí presentados pueden ser consultados en [4].

Definición 1.4 *Sea $\phi(t)$ una función real con valores reales, continua, convexa y par, que satisface*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{t} = \infty.$$

Entonces, la clase de Orlicz $L_\phi(\Omega)$ consiste en todas las funciones $u = u(x)$ tales que

$$\int_\Omega \phi\left(u(x)\right) dx < \infty.$$

El espacio de Orlicz $L_{\phi^*}(\Omega)$ puede definirse como la envolvente convexa de $L_\phi(\Omega)$, que junto con la norma de Luxemburg

$$\|u\|_{L_{\phi^*}(\Omega)} = \inf\left\{k; \int_\Omega \phi\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leq 1\right\},$$

hacen al espacio $L_{\phi^*}(\Omega)$ un espacio de Banach.

Se dice que una sucesión de funciones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L_{\phi^*}(\Omega)$ converge en media a $u \in L_{\phi^*}(\Omega)$ si

$$\int_\Omega \phi\left(u_n(x) - u(x)\right) dx \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Se llamará $\phi(t)$, una función definitoria para $L_{\phi^*}(\Omega)$. Si para dos funciones $\phi(t), \psi(t)$ tenemos que para cada $\lambda > 0$ vale que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(\lambda t)}{\psi(t)} = \infty,$$

entonces escribimos $\psi \prec \phi$.

De esto se sigue que si $\psi \prec \phi$ entonces $L_{\phi^*}(\Omega) \subset L_{\psi^*}(\Omega)$. Además, si una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $L_{\phi^*}(\Omega)$ y converge en media, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en

---

[4] N. S. Trudinger. "On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications". En: *Journal of Mathematics and Mechanics* 5 (1967), págs. 473-483.

$L_{\psi^*}(\Omega)$.

1.1.5. Espacios Sobolev A continuación definiremos los espacios de Sobolev. Estos espacios son los espacios centrales en nuestro estudio de ecuaciones diferenciales parciales y en particular en la forma como abordaremos el problema (1).

Definición 1.5 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, se define como el espacio de todas las funciones medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$, tales que para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe y $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Sobre este espacio se define la norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ como*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u\,(x)|^p \, dx\right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \sup \operatorname{ess}_\Omega |D^\alpha u| & p = \infty. \end{cases}$$

Observación 2 *Si $p = 2$ se usa la notación especial*

$$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega).$$

Sobre este espacio se puede definir un producto interno dado por

$$\langle u, v\rangle_{H^k(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) \cdot D^\alpha v(x) dx.$$

Definición 1.6 *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Se define $W_0^{k,p}(\Omega)$, a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$. Esto es, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ sí, y solo sí, existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ con $m \in \mathbb{N}$, tales que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$.*

Observación 3 *Como es usual, en el caso $p = 2$ se escribe*

$$W_0^{k,2}(\Omega) = H_0^k(\Omega).$$

Sobre los espacios de Sobolev se tienen los siguientes resultados básicos. Para una mayor teoría sobre espacios de Sobolev (véase [2]).

Teorema 1.7 *Para toda $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Teorema 1.8 *Sea $1 \leq p < \infty$ y suponga que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces, existen funciones $u_m \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tales que:*

$$u_m \longrightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

Teorema 1.9 *(Aproximación global por funciones suaves) Sea $1 \leq p < \infty$ y $\partial\Omega$ es de clase C^1. Suponga que $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Entonces existen funciones $u_m \in C^{\infty}\left(\bar{\Omega}\right)$ tales que*

$$u_m \longrightarrow u \text{ en } W^{k,p}(\Omega).$$

Los dos teoremas a seguir muestran la relación entre los espacios $W^{m,q}(\Omega)$ y $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.10 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1. Entonces*

$$W^{k,q}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

para todo $p \in \left[1, \frac{nq}{n-kq}\right]$ si $kq < n$, y para todo $p \in [1, \infty)$ si $kq = n$; esto es, existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_1 \|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} \quad \forall p \in \left[q, \frac{nq}{n-kq}\right] \text{ si } kq < n, \\ \|u\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_2 \|u\|_{W^{k,q}(\Omega)} \qquad \forall p \in [q, \infty) \text{ si } kq = n. \end{aligned}$$

Finalmente, si $kq > n$, cada $u \in W^{k,q}(\Omega)$ es igual $c.t.p.\ x \in \Omega$ a una única función en $C^m(\bar{\Omega})$, con $0 \leq m < (k-n)/q$, y la siguiente desigualdad se mantiene

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} \leq C_3 \|u\|_{W^{k,q}(\Omega)}.$$

Las constantes C_1, C_2 y C_3 en este teorema solo dependen de k, q, p y n.

Teorema 1.11 *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1, y sea $q \in [1, \infty)$. Entonces*

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$$

con $p \in [1, nq/(n-q))$, si $q < n$, y $p \in [1, \infty)$, si $q = n$. Finalmente, si $q > n$, entonces

$$W^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}).$$

Finalmente, en este conjunto de inclusiones y desigualdades, presentamos la llamada desigualdad de Poincaré.

Teorema 1.12 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Suponga $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ para todo $1 \leq q < n$. Entonces, se tiene la estimativa*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^q(\Omega)},$$

para todo $p \in [1, nq/(n-q)]$, donde la constante C depende únicamente de p, q, n y Ω. En particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^p(\Omega)}.$$

Dado que las funciones en los espacios $L^p(\Omega)$ son definidas como clases de equivalencia (iguales salvo en un conjunto de medida nula) y dado que para $\partial\Omega$ de clase C^1 se tiene que la medida de $\partial\Omega$ es cero, en general no tiene sentido hablar de su valor en la frontera. Por otro lado, en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales generalmente aparecen condiciones de frontera que las incógnitas del problema deben verificar. El siguiente teorema permite dar un significado a dichas condiciones de frontera cuando trabajamos en espacios de Sobolev.

Teorema 1.13 *(Teorema de la traza) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y suponga que $\partial\Omega$ es de clase C^1. Entonces existe un operador lineal y acotado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

tal que

i) $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*,*

ii) $\| Tu \|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \| u \|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$. La constante C depende únicamente de p y Ω.

Teorema 1.14 *(Traza de funciones en $W_0^{1,p}$) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y suponga que $\partial\Omega$ es C^1. Además, suponga que $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces,*

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ sí, y solo sí, } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

En las inmersiones de Sobolev (Teorema 1.10) es esperado que para $kp = n$ tuviésemos que $W^{k,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$, pero no es difícil mostrar que este no es el caso (véase [2]). Sin embargo, aunque las funciones en $W^{k,p}(\Omega)$ no son necesariamente acotadas, se tiene un control en su crecimiento. Ese es el asunto del siguiente teorema (véase [4]).

Teorema 1.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. Entonces el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ con $kp = n$, puede ser continuamente inmerso en el espacio de Orlicz $L_{\phi^*}(\Omega)$ donde*

$$\phi(t) = e^{|t|^{n/(n-1)}} - 1.$$

Además, $W^{k,p}(\Omega)$ puede ser continuamente inmerso en el sentido de convergencia *media en toda clase de Orlicz $L_\psi(\Omega)$ donde $\psi(t) \leq \phi(\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$. La inmersión en $L_{\psi*}(\Omega)$ para toda $\psi \prec \phi$ es compacta.*

1.2. Operadores elípticos

En lo que sigue se introducen los operadores diferenciales de este tipo y se presentan algunos resultados de existencia y unicidad, así como de regularidad para ecuaciones diferenciales de tipo elíptico. Estos resultados pueden ser consultados en [5] , [6]. Considere el operador diferencial L dado por

$$Lu = a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^0(x)u, \qquad a^{ij} = a^{ji}.$$

Establecemos las siguiente definiciones:

L es llamado *elíptico* en un punto $x \in \Omega$ si la matriz de coeficientes $[a^{ij}(x)]$ es positiva; esto es, si $\lambda(x)$ y $\Lambda(x)$ denotan respectivamente el mínimo y el máximo de sus autovalores, entonces

$$0 < \lambda(x)\,|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)\,|\xi|^2\,,$$

para toda $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Si $\lambda > 0$ en Ω, entonces L es elíptico en Ω, y *estrictamente elíptico* si $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ para alguna constante λ_0. Por otro lado, si Λ/λ es acotado en Ω, decimos que L es *uniformemente elíptico* en Ω.

En el resultado que sigue, también imponemos la siguiente condición sobre los co-

---

[5] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. PITMAN PUBLISHING INC, 1985.

[6] D. Gilbarg y N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 2001.

eficientes a^i :

$$\frac{|a^i(x)|}{\lambda(x)} \leq C < \infty, \quad \text{para todo } i = 1, 2, ..., n, \ x \in \Omega.$$

El siguiente lema es una versión del llamado Lema de Punto de Frontera de Hopf (véase [6]).

Lema 1.16 *Suponga que L es uniformemente elíptico, $a^0 = 0$ y $Lu \geq 0$ en Ω. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

i) u es continua en x_0,

ii) $u(x_0) > u(x)$ para toda $x \in \Omega$,

iii) $\partial\Omega$ es por lo menos de clase C^2.

Entonces, la derivada normal exterior de u en x_0, si existe, satisface que $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$. Si $a^0 \leq 0$ y a^0/λ es acotado, se concluye lo mismo siempre que $u(x_0) \geqslant 0$, y si $u(x_0) = 0$ se concluye lo mismo independientemente del signo de a^0.

Consideramos ahora el operador $Au = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a^0(x)u$, donde las funciones a^{ij}, a^i y a^0 son funciones suaves tales que $a^{ij} = a^{ji}$ y se verifica que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant -\alpha|\xi|^2,$$

para algún $\alpha > 0$ y para todo $x \in \bar{\Omega}$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Consideramos también el operador

$$Bu = \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

donde las funciones b^i son suaves y $\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\nu^i \neq 0$ en todo punto de $\partial\Omega$.

El siguiente teorema es un resultado de existencia y unicidad de solución para problemas elípticos (véase [5]).

Teorema 1.17 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un dominio acotado con frontera* $\partial\Omega$ *suave. Suponga además que* $a^0 \geqslant \beta > 0$ *en* $\bar{\Omega}$ *y que*

$$b^0 b_\nu = b^0 \sum_{i=1}^{n} b_i \nu^i \geqslant 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Entonces, para toda $f \in L^p(\Omega)$ *y toda* $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$*, existe una única función* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *solución de*

$$\begin{aligned} Au &= f \text{ en } \Omega, \\ \gamma\,(Bu + b_0 u) &= g \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Finalizamos esta sección con un resultado de regularidad (véase [5]).

Teorema 1.18 *Suponga* Ω, A *y* B *como antes, y sea* $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} Au = f \in W^{k,p}(\Omega), \\ \gamma Bu = g \in W^{2+k-d-1/p,p}(\partial\Omega), \end{cases}$$

entonces $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$*.*

1.3. Teorema del paso de la montaña

A continuación se introducen algunas definiciones necesarias para el uso del Teorema del paso de la montaña de Ambrosetti y Rabinowitz, por lo cual nos vamos un poco hacia la teoría de análisis funcional, donde se presentarán algunas notaciones antes junto a cálculo en espacios de Banach en el cual esta la derivada en el sentido de Fréchet, esta derivada aporta en gran parte, dado que garantiza la continuidad de una función que sea Fréchet diferenciable. Esto puede ser encontrado en [7].

1.3.1. Cálculo en espacios de Banach Presentamos ahora la definición de derivada de Fréchet en espacios de Banach.

Definición 1.19 *Sea X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_X$, U un abierto en X y $x_0 \in U$. Se tiene que una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto x_0 si existe un funcional lineal continuo $\lambda_{x_0} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (esto es $\lambda_{x_0} \in X'$) y una función ψ definida para $h \in X$ suficientemente pequeño, con valores en $\mathbb{R}$, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0,$$

y tal que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \lambda_{x_0}(h) + \|h\|_X \psi(h).$$

El operador λ_{x_0} si existe, entonces es único, por lo tanto este es llamado la derivada de f en x_0 y es denotado por $f'(x_0)$ o $Df(x_0)$.

Diremos que una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, si es diferenciable en todo punto del abierto U. Por otro lado, si la función f es diferenciable y la función $f' : U \longrightarrow L(X, \mathbb{R})$ es continua, entonces decimos que f es de clase C^1.

Para $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, decimos que un punto $x_0 \in U$ es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$ (funcional lineal nulo). Por otro lado, un número $c \in \mathbb{R}$ es llamado un valor crítico de f si $f(x_0) = c$ para algún punto crítico $x_0 \in U$.

Decimos que $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, si $\phi : X \to \mathbb{R}$ donde X es un espacio de Banach y ϕ es C^1.

---

7 D. G. Costa. *An Invitation to Variatonal Methods in Differential Equations*. Birkhauser Boston, 2007.

Definición 1.20 *Decimos que un funcional* $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *satisface la condición de Palais-Smale si cualquier sucesión* (u_n) *tal que* $\varphi(u_n)$ *es acotada y* $\varphi'(u_n) \to 0$ *posee una subsucesión convergente.*

Teorema 1.21 *(Teorema del paso de la montaña) Sea* X *un espacio de Banach y* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *un funcional que satisface la condición de Palais-Slame, para* $e \in X$ *y* $0 < r < \|e\|_X$ *tales que*

$$a := \text{máx}\{\phi(0), \phi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \phi(u) := b,$$

entonces

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t))$$

es un valor critico de ϕ *con* $c \geq b$*. Donde* Γ *es el conjunto de caminos que une a* 0 *y* e*, es decir,* $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$.

2. El modelo Keller-Segel

En este capitulo se hace la demostración de existencia y positividad de una solución no constante del modelo ya mencionado previamente. Así, se estudiará el siguiente sistema de Keller-Segel

$$\begin{aligned} D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla\phi(v)) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ D_2\Delta v - av + bu &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3}$$

En este trabajo consideramos ϕ como la función identidad, así, la primera ecuación en (3) puede ser reescrita como:

$$D_1\Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla v) = \nabla\cdot\{D_1 u\frac{1}{u}\nabla u - u\chi\nabla v\} = \nabla\cdot\{D_1 u\nabla(\log u - \frac{\chi}{D_1}v)\} = 0.$$

Esta ecuación es verificada, por ejemplo, si tenemos que $\log u - \frac{\chi}{D_1}v = c_1$, con c_1 una constante. En este caso se tiene que $u = ce^{pv}$, donde $p = \chi/D_1$ y $c > 0$ es una constante. Por consideraciones físicas buscamos soluciones (u, v) positivas. Así, usando lo anterior en (3) se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} D_2\Delta v - av + bce^{pv} &= 0 \text{ en } \Omega, \\ v &> 0 \text{ en } c.t.p\,\Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

Por comodidad se escribirá a (4) usando los siguientes cambios $\varepsilon^2 = D_2/a$ y $bc/a =$

λ, para obtener

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta v - v + \lambda e^{pv} &= 0 \text{ en } \Omega, \\ v &> 0 \text{ en } c.t.p\, \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5}$$

con $\varepsilon, p, \lambda > 0$.

Observación 4 *Note que si tenemos una solución v de* (5)*, por medio de la relación $u = ce^{pv}$ se tendrá una solución (u, v) para* (3)*.*

El siguiente lema proporciona una condición necesaria si queremos obtener soluciones no constantes de (5) (note que la solución nula es $(u, v) \equiv (0, 0)$ es solución de (3)

Lema 2.1 *Si* (5) *tiene una solución no constante, entonces la ecuación $t = \lambda e^{pt}$ debe tener dos ceros.*

Demostración: Integrando (5), obtenemos

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \Delta v dx + \int_\Omega (-v + \lambda e^{pv}) dx = 0. \tag{6}$$

Usando integración por partes (véase [2]) y la condición de frontera se obtiene:

$$\int_\Omega 1 \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} 1 \frac{\partial v}{\partial \nu} dS - \int_\Omega \nabla 1 \cdot \nabla v dx = 0 - 0.$$

Lo cual, concluimos que:

$$\int_\Omega (-v + \lambda e^{pv}) dx = 0,$$

y como v no es una solución constante, entonces debe existir un valor de $t > 0$ tal que $-t + \lambda e^{pt} < 0$, es decir $\lambda e^{pt} < t$; De la misma manera también debe existir un valor de t tal que $-t+\lambda e^{pt}>0$, es decir $\lambda e^{pt}>t$. Así, existe un valor en el medio tal que $t=\lambda e^{pt}$. Nótese que para $t=0$, tenemos que $-t+\lambda e^{pt}>0$ y para un $t>>1$ volvemos a tener que $-t+\lambda e^{pt}>0$. Así, se obtiene que existe solo dos valores por los cuales $t=\lambda e^{pt}$.

$\square$

Observación 5 *Si $u\in C^2\left(\bar{\Omega}\right)$ es solución de* (5) *y Q es el punto mínimo de u en $\bar{\Omega}$, entonces $\Delta u(Q)\geq 0$. Por lo tanto, $-\varepsilon^2\Delta u(Q)=-u(Q)+\lambda e^{pu(Q)}\leq 0$, lo que implica que $\min_\Omega u\geq z_\lambda$, donde z_λ es la menor solución de $-t+\lambda e^{pt}=0$.*

Definiendo $w=v-z_\lambda$ y usando que $z_\lambda=\lambda e^{pz_\lambda}$ se tiene que la primera ecuación en (5) se transforma en

$$\varepsilon^2\Delta w-w+z_\lambda\left(e^{pw}-1\right)=0.$$

Así, para resolver (5) es suficiente resolver el problema

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\Delta w-\left(1-z_\lambda p\right)w+z_\lambda\left(e^{pw}-1-pw\right)&=0 \text{ en } \Omega,\\ w&\geq 0 \text{ en } \Omega\\ \frac{\partial w}{\partial\nu}&=0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Donde por consideraciones físicas se buscan $w\geq 0$, Así, tenemos un problema modificado

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\Delta w-\left(1-z_\lambda p\right)w+z_\lambda\left(e^{pw}-1-pw\right)_+&=0 \text{ en } \Omega,\\ w&\geq 0 \text{ en } \Omega,\\ \frac{\partial w}{\partial\nu}&=0 \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned} \tag{7}$$

Donde,

$$z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+ = z_\lambda \left(e^{pw_+} - 1 - pw_+\right)$$

Observación 6 *Note que dada una solución* $w \geq 0$ *de* (7) *es solución de* (5) *mediante la relación* $w = v - z_\lambda$

Ahora, fijamos $c = 1 - z_\lambda p$. Note que si $\lambda e^{pz_\lambda} = z_\lambda$ tiene dos soluciones entonces $c > 0$. De hecho, considerando la función $\varphi(t) = \lambda e^{pt}$, su derivada $\varphi'(z_\lambda) = p\lambda e^{pz_\lambda} = pz_\lambda$ y como φ interseca a $y = t$ transversalmente, se obtiene que $pz_\lambda < 1$.
Ahora, para solucionar (7) primero consideremos el sistema de ecuaciones más general

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u - cu + h(u) &= 0 \text{ en } \Omega, \\ u &\geq 0 \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $c > 0$. Para la función $h(z)$ se imponen las siguientes condiciones:

$h_1)$ $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es localmente Hölder continua con $h(z) = 0$ para $z \leq 0$ y $h(z) > 0$ para $z > 0$.

$h_2)$ $h(z) = o(z)$ cuando $z \downarrow 0$.

$h_3)$ $h(z)/z \to \infty$ cuando $z \to \infty$. Por otra parte, existe $\alpha \geq 0$ y $\beta(z)$ con $\beta(z)/z^2 \to 0$ cuando $z \to \infty$ tal que

$$h(z) \leq \alpha e^{\beta(z)} \text{ para } z > 0.$$

$h_4)$ Sea $H(z) = \int_0^z h(t)dt$. Entonces existe $\alpha_1 \geq 0$ y $\theta \in (0, 1/2)$ tal que

$$H(z) \leq \theta z h(z) \text{ si } z \geq \alpha_1.$$

$h_5)$ $\gamma = \inf\{cz^2/2 - H(z) | z \in Z\} > 0$, donde $Z = \{z > 0; h(z) = cz\}$.

Mostremos que $Z \neq \emptyset$. Sea $f(z) = h(z) - cz$, como la función $h(z)$ es Hölder continua entonces $f(z)$ es continua y además $f(z) = z(h(z)/z - c)$. Por $h_2)$ tenemos que para $0 < z << 1$, es decir, para z muy cercanos a 0 pero diferentes de 0, $f(z) < 0$. Por $h_3)$ para $z >> 1$, es decir, para z muy grandes, tenemos que $f(z) > 0$, entonces existe $z_0 > 0$ tal que $f(z_0) = 0$. Así $h(z_0) = cz_0$.
Observemos que $z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+$, satisface $h_1) - h_5)$, la cual verifica que

$$z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+ = z_\lambda \left(e^{pw_+} - 1 - pw_+\right)$$

Consecuentemente, por $h_1)$ nuestra función es localmente lipschitz y por tanto es localmente Hölder continua.
Nótese que por $h_2)$, debe cumplir que $z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+ = o(w)$ cuando $w \downarrow 0$; Por tanto, usando L'Hopital se tiene que

$$\lim_{w \to 0} \frac{z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+}{w} = 0.$$

Para $h_3)$, es claro que $z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+ / w \to \infty$ cuando $w \to \infty$, y además existe $\alpha = z_\lambda > 0$, y para $\beta(w) = pw$ se tiene que

$$z_\lambda \left(e^{pw} - 1 - pw\right)_+ \leq \alpha e^{\beta(w)}, \text{ para } w > 0.$$

Para $h_4)$, sea $\theta_0 \in (0, 1/2)$. Así, para $\alpha_1 = z_\lambda / p > 0$, y $\theta = \min\{\theta_0, z_\lambda p/2\}$ se cumple la desigualdad.

Nótese que para h_5), se tiene que $c = 1 - z_\lambda p$, y dado que usamos $w > 0$, nuestro $h(w) = z_\lambda(e^{pw} - 1 - pw)$, de donde se concluye que

$$H(w) = z_\lambda \left(\frac{e^{pw}}{p} - w - \frac{pw^2}{2} - \frac{1}{p} \right).$$

Se busca un w tal que $h(w) = cw$, entonces

$$z_\lambda e^{pw} - z_\lambda - z_\lambda pw = (1 - z_\lambda p)w,$$

Así, $w = z_\lambda(e^{pw} - 1)$, donde se tienen dos soluciones, cuando $1 - z_\lambda p > 0$, $w = 0$ y una cuando $w_1 > 0$. Por tanto, despejando e^{pw}, tenemos que $e^{pw} = \frac{w+z_\lambda}{z_\lambda}$.
Consideremos ahora a la función $g(w)$ definida como

$$g(w) = \frac{cw^2}{2} - H(w).$$

Note que buscamos que el $\inf g(w)$ sea positivo, así definiendo la función $f(w) = 2pg(w)$, denota que el $\inf g(w) > 0$ es equivalente demostrar que el $\inf f(w)$ sea positivo. Por tanto

$$f(w) = pw^2 - 2z_\lambda e^{pw} + 2pz_\lambda w + 2z_\lambda$$

y usando que $e^{pw} = \frac{w+z_\lambda}{z_\lambda}$, tenemos que

$$f(w) = pw^2 + (2pz_\lambda - 2)w = w(pw + 2(pz_\lambda - 1)).$$

Nótese que la función $f(w)$ tiene dos ceros, $w = 0$ y $w_2 = \frac{2(1-z_\lambda p)}{p}$. Para concluir solo basta mostrar que $w_1 > w_2$, o equivalentemente, que

$$w_2 > z_\lambda(e^{pw_2} - 1);$$

esto es,

$$\frac{2(1-z_\lambda p)}{p} > z_\lambda \left(e^{p\frac{2(1-z_\lambda p)}{p}} - 1 \right)$$

si, y solo si,

$$2(1-z_\lambda p) - z_\lambda p(e^{2(1-z_\lambda p)} - 1) > 0.$$

Definiendo ahora $\rho(t) = 2 - t - te^{2(1-t)}$, se tiene que $\rho(1) = 0$ y como $z_\lambda p < 1$ sigue que $\rho(z_\lambda p) > 0$ de lo cual se sigue que

$$2(1-z_\lambda p) - z_\lambda p(e^{2(1-z_\lambda p} - 1) > 0,$$

así tenemos que $w_1 > w_2$. Consecuentemente, $\text{ínf} f > 0$ y por tanto $\text{ínf} g > 0$. Así dado $\gamma = \text{ínf}\{\frac{cw^2}{2} - H(w) | w \in Z\} \geq w_1 > 0$, concluimos.

$\square$

Observación 7 *Como se pudo ver, la función* $(e^{pw} - 1 - pw)_+$ *satisface* $h_1) - h_5)$*. Así, es suficiente demostrar la existencia de solución en* (8) *para concluir la existencia de solución para el sistema* (7)*.*

Para resolver el sistema (8) vamos a establecer su formulación variacional. Para esto, suponemos que u es una solución clásica y multiplicamos la primera ecuación por una función test $\theta \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$ para obtener

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \Delta u \theta dx - c\int_\Omega u\theta dx + \int_\Omega h(u)\theta dx = 0.$$

Usando integración por partes y la condición de frontera, se obtiene

$$\varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \theta dx + c\int_\Omega u\theta dx - \int_\Omega h(u)\theta dx = 0. \tag{9}$$

Así, si u resuelve (8) entonces v resuelve su formulación variacional. Note que la ecuación (9) tiene sentido bajo condiciones mucho menos restrictivas sobre las funciones u y θ.

Definimos ahora el sentido de solución débil para nuestro problema.

Definición 2.2 *Decimos que* $u \in H^1(\Omega)$ *es una solución débil de* (8) *si vale* (9) *para toda* $\theta \in H^1(\Omega)$.

Con el objetivo de mostrar la existencia de solución débil para (8) se usará el Teorema del paso de la montaña. Para esto, en lo que sigue, denotaremos como E el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ con norma dada por

$$\|u\| := \left(\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + c \int_\Omega u^2 dx\right)^{1/2}.$$

Definimos el funcional $J_\varepsilon : E \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$J_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + c \int_\Omega u^2 dx\right) - \int_\Omega H(u) dx, \tag{10}$$

esto es,

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(u) dx.$$

Ahora, demostremos que en efecto J_ε es C^1. Para esto mostraremos que cada cada función que sigue a continuación es de clase C^1. Definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} J_1(u) &= \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \\ J_2(u) &= \frac{1}{2} c \int_\Omega u^2 dx, \\ J_3(u) &= \int_\Omega H(u) dx. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
J_1(u+v)-J_1(u) &= \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega |\nabla(u+v)|^2dx-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla u|^2dx\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega(|\nabla u+\nabla v|^2-|\nabla u|^2)dx\\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega 2\nabla u\nabla v+|\nabla v|^2dx\\
&= \varepsilon^2\int_\Omega\nabla u\nabla vdx+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla v|^2dx\\
&= \varepsilon^2\int_\Omega\nabla u\nabla vdx+\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla v|^2dx\frac{\|v\|}{\|v\|}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\int_\Omega|\nabla v|^2=\|\nabla v\|^2_{L^2}\leq k\|v\|$$

con k constante. Por lo tanto

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\varepsilon^2\int_\Omega|\nabla v|^2dx}{2\|v\|}\|v\|\leq\lim_{\|v\|\to 0}k\|v\|=0.$$

Así para $J_1(u)$ tenemos que

$$J_1'(u)v=\varepsilon^2\int_\Omega\nabla uvdx.$$

Calculemos ahora la derivada de $J_2(u)$. En este caso,

$$\begin{aligned}
J_2(u+v)-J_2(u) &= \frac{1}{2}c\int_\Omega(u+v)^2dx-\frac{1}{2}c\int_\Omega u^2dx\\
&= \frac{1}{2}c\int_\Omega(2uv+v^2)dx\\
&= c\int_\Omega uvdx+\frac{c}{2}\int_\Omega v^2dx\\
&= c\int_\Omega uvdx+\frac{c}{2}\int_\Omega v^2dx\frac{\|v\|}{\|v\|}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{\Omega} v^2 = \|v\|_{L^2}^2 \leq k\|v\|.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{c\int_{\Omega} v^2 dx}{2\|v\|}\|v\| \leq \lim_{\|v\|\to 0} k\|v\| = 0.$$

Concluimos que para $J_2(u)$

$$J_2'(u)(v) = c\int_{\Omega} uvdx.$$

Ahora para $J_3(u)$, se demostrará que su derivada es

$$\int_{\Omega} h(u)vdx.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
J_3(u+v) - J_3(u) &= \int_{\Omega} H(u+v)dx - \int_{\Omega} H(u)dx \\
&= \int_{\Omega} \left(H(u+v) - H(u)\right) dx \\
&= \int_{\Omega} h(\widetilde{u})(u+v-u)dx \\
&= \int_{\Omega} h(\widetilde{u})v - \int_{\Omega} h(u)v + \int_{\Omega} h(u)vdx \\
&= \int_{\Omega} (h(\widetilde{u}) - h(u))vdx + \int_{\Omega} h(u)vdx.
\end{aligned}$$

Sea

$$\psi(v) = \int_{\Omega} (h(\widetilde{u}) - h(u))vdx,$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|\psi(v)| &\leq \left(\int_\Omega (h(\widetilde{u})-h(u))^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega v^2dx\right)^{1/2}\\
&= \|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\\
&\leq c\|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2}\|v\|.
\end{aligned}$$

Luego

$$0 \leq \frac{|\psi(v)|}{\|v\|} \leq c\|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2}.$$

Note que solo falta mostrar que $\|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2} \to 0$ cuando $v \to 0$. Suponiendo por el absurdo, existe $(v_n) \subset E$, tal que $v_n \to 0$ y $\|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2} \geq \varepsilon > 0$.
Como (v_n) es acotada, podemos tomar una subsucesión que converge débil en E y fuerte en L^3 y $c.t.p$ para 0. Así, $h(\widetilde{u}) \to h(u)$ $c.t.p$ y por el Teorema de Trundinger $\|h(\widetilde{u})\|_{L^3} \leq c$, que no depende de Ω. Por lo tanto,

$$\|h(\widetilde{u})-h(u)\|_{L^2} \to 0.$$

□

De forma que J_ε que es un funcional de clase C^1 y su derivada de Fréchet en el vector v verifica

$$J_\varepsilon'(u)v = \varepsilon^2\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + c\int_\Omega uvdx - \int_\Omega h(u)vdx,$$

para toda $v \in H^1(\Omega)$. Así, puntos críticos no negativos de J_ε son soluciones débiles de (8), dado que solucionan su problema variacional.

Teorema 2.3 *Bajo los supuestos de $h_1)$ a $h_5)$, existe una solución no constante no negativa u_ε de* (8)*, siempre que $\varepsilon > 0$ sea suficientemente pequeño. Además, u_ε satisface*

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C_0\varepsilon^2,$$

donde $C_0 > 0$ depende únicamente de Ω y h.

Para la demostración del teorema necesitamos dos lemas tomados y adaptados de [8] y [9]. Para lo que sigue, definimos φ como

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon^{-1}|x|) & \text{si } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Lema 2.4 *Para todo $s > 0$. Se tiene que*

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^s dx = K_s \varepsilon^{2(1-s)}, \quad \int_\Omega |\nabla\varphi(x)|^2 dx = \pi\varepsilon^{-4},$$

donde

$$K_s = 2\pi \int_0^1 (1-\rho)^s \rho d\rho.$$

Demostración: Veamos primero que

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^s dx = K_s \varepsilon^{2(1-s)}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi(x)|^s dx &= \int_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x)|^s dx \\ &= \int_{|x|<\varepsilon} \varepsilon^{-2s}(1 - \varepsilon^{-1}|x|)^s dx. \end{aligned}$$

[8] L. Ni y Takagi. “Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system”. En: *Journal Differential Equations* 72 (1988), págs. 1-27.

[9] A. Ambrosetti y P. H. Rabinowitz. “Dual Variatioal Methods in Critical Point Theory and Applications”. En: *Joournal of Functional Analysis* 14 (1973), págs. 349-381.

Haciendo cambio de variable $z = \frac{x}{\varepsilon}$, y usando el Teorema del cambio de variable obtenemos

$$\int_{|x|<\varepsilon} \varepsilon^{-2s}(1-\varepsilon^{-1}|x|)^s dx = \varepsilon^{-2s} \int_{|z|<1} (1-|z|)^s \varepsilon^2 dz.$$

Ahora, usando coordenadas polares deducimos que

$$\varepsilon^{2(1-s)} \int_{|z|<1} (1-|z|)^s \varepsilon^2 dz = \varepsilon^{2(1-s)} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-\rho)^s \rho d\rho d\theta.$$

Así,

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^s dx = 2\pi\varepsilon^{2(1-s)} \int_0^1 (1-\rho)^s \rho d\rho = K_s \varepsilon^{2(1-s)}.$$

Ahora veamos que

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \pi\varepsilon^{-4}.$$

Dado que $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y)$, tenemos que para $x = (x_1, x_2)$, $\varphi_{x_1}^2 = \varepsilon^{-4}(\varepsilon^{-1}\frac{x_1}{|x|})^2$ y $\varphi_{x_2}^2 = \varepsilon^{-4}(\varepsilon^{-1}\frac{x_2}{|x|})^2$. Así, $|\nabla\varphi|^2 = \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 = \varepsilon^{-6}$ para $|x| < \varepsilon$ y $|\nabla\varphi|^2 = 0$ para el caso contrario. Así,

$$\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 dx = \int_{|x|<\varepsilon} \varepsilon^{-6} dx = \pi\varepsilon^{-4}.$$

□

Para el lema que sigue, sea $g(t) := J_\varepsilon(t\varphi)$ para $t \geq 0$.

Lema 2.5 *Existen t_1, t_2 con $0 < t_1 < t_2$ tales que*

1. $g'(t) < 0$ *para* $t_1 < t$,
2. $g(t) < 0$ *para* $t_2 < t$.

Demostración: Para $\sigma \in (0,1)$, definimos el conjunto $\Omega_\sigma = \{x \in \Omega; \varphi(x) > \sigma\varepsilon^{-2}\}$. Afirmamos que existe σ tal que

$$\int_{\Omega_\sigma} |\varphi(x)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx.$$

De hecho, note que $\varphi(x) = \sigma\varepsilon^{-2}$ si $|x| = (1-\sigma)\varepsilon$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\sigma} |\varphi(x)|^2 dx &= \int_{|x|<(1-\sigma)\varepsilon} |\varphi(x)|^2 dx \\
&= \int_{|x|<(1-\sigma)\varepsilon} \varepsilon^{-4}\left(1-\varepsilon^{-1}|x|\right)^2 dx \\
&= \varepsilon^{-4}2\pi \int_0^{(1-\sigma)\varepsilon} \left(1-\varepsilon^{-1}r\right)^2 r dr \\
&= \varepsilon^{-5}2\pi \int_0^{(1-\sigma)\varepsilon} (\varepsilon - r)^2 r dr \\
&= \varepsilon^{-6}2\pi \int_0^{(1-\sigma)\varepsilon} \varepsilon^2 r - 2\varepsilon r^2 + r^3 dr \\
&= \varepsilon^{-6}2\pi \left(\frac{\varepsilon^2(1-\sigma)^2\varepsilon^2}{2} - \frac{2\varepsilon(1-\sigma)^3\varepsilon^3}{3} + \frac{(1-\sigma)^4\varepsilon^4}{4}\right) \\
&= \varepsilon^{-2}2\pi(1-\sigma)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2(1-\sigma)}{3} + \frac{(1-\sigma)^2}{4}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, del Lema 2.4 con con $s = 2$, tenemos que

$$\int_\Omega |\varphi(x)|^2 dx = \varepsilon^{-2}\frac{2\pi}{12}.$$

Luego, σ es determinado por la relación

$$(1-\sigma)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2(1-\sigma)}{3} + \frac{(1-\sigma)^2}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

Ahora, demostremos 1. Note que por regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(t) &= J'_\varepsilon(t\varphi)\varphi \\ &= t\int_\Omega \left(\varepsilon^2|\nabla\varphi|^2+\varphi^2\right)dx - \int_\Omega h(t\varphi)\varphi dx \\ &= t\left(\varepsilon^2\pi\varepsilon^{-4}+K_2\varepsilon^{-2}\right) - \int_\Omega h(t\varphi)\varphi dx \\ &= t\varepsilon^{-2}(\pi+K_2) - \int_\Omega h(t\varphi)\varphi dx. \end{aligned}$$

Por $h_3)$, dado $R>0$, existe M_R tal que $h(z)\geq Rz$ si $z\geq M_R$. Sea $\Omega_1=\{x\in\Omega;\varphi(x)>M_R/t\}$, entonces $\Omega_\sigma\subset\Omega_1$ si $M_R/t<\sigma\varepsilon^{-2}$ y así,

$$\begin{aligned} \int_\Omega h(t\varphi(x))\varphi(x)dx &\geq \int_{\Omega_1} h(t\varphi(x))(\varphi(x))dx \\ &\geq Rt\int_{\Omega_\sigma}(\varphi(x))^2dx \\ &= Rt\frac{1}{2}\int_\Omega(\varphi(x))^2dx \\ &= RtK_2\frac{\varepsilon^{-2}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $t>M_R/\sigma\varepsilon^{-2}$ se tiene que

$$g'(t)\leq t\varepsilon^{-2}\left(\pi+K_2-R\frac{K_2}{2}\right).$$

En consecuencia, tomando R_1 suficientemente grande tal que $\pi+K_2-R_1\frac{K_2}{2}<0$, tenemos que $g'(t)<0$ si $t>t_1:=M_{R_1}/\sigma\varepsilon^{-2}$.

Ahora, demostremos 2. Para $R>0$, de $h_3)$ se sigue que podemos encontrar $M_R>0$ y $m_R>0$ tales que si $z\geq M_R$, entonces

$$H(z)\geq\frac{Rz^2}{2}-m_R.$$

Así, con Ω_1 como antes, tenemos la estimativa

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} H(t\varphi(x))dx &\geq \int_{\Omega_1} H(t\varphi(x))dx \\
&\geq Rt^2 \int_{\Omega_\sigma} (\varphi(x))^{2} dx - |\Omega_1| m_R \\
&\geq \frac{Rt^2}{4} K_2 \varepsilon^{-2} - |\Omega_1| m_R \\
&\geq \frac{Rt^2}{4} K_2 \varepsilon^{-2} - |\Omega| m_R.
\end{aligned}
$$

Siempre que $t > M_R/\sigma\varepsilon^{-2}$. Del Lema 2.4 llegamos a que

$$
\begin{aligned}
g(t) &\leq \frac{t^2\varepsilon^{-2}}{2}(\pi + K_2) - \frac{t^2\varepsilon^{-2}}{4} K_2 R + |\Omega| m_R \\
&= \frac{t^2\varepsilon^{-2}}{2}\left(\pi + K_2 - \frac{K_2}{2}R\right) + |\Omega| m_R.
\end{aligned}
$$

Tomando R_2 tal que $\pi + K_2 - \frac{K_2}{2}R_2 < 0$ y t tal que $t > M_{R_2}/\sigma\varepsilon^{-2}$ y $t^2 > 2|\Omega| m_{R_2}\varepsilon^2 / \left(\frac{K_2}{2}R_2 - \pi - K_2\right)$ obtenemos

$$g(t) < 0.$$

□

Demostración del Teorema 2.3

Vamos a mostrar la existencia de un punto crítico del funcional J_ε. Para ello haremos uso del Teorema del paso de la montaña. Como ya se ha mencionado $J_\varepsilon \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 con $J_\varepsilon(0) = 0$. Adicionalmente debemos comprobar lo siguiente:

i) J_ε satisface la condicione de Palais-Smale.

ii) Existen $\rho > 0$ y $\beta > 0$ tal que $J_\varepsilon(u) > 0$ si $0 < \|u\| < \rho$ y $J_\varepsilon(u) \geq \beta > 0$ si $\|u\| = \rho$.

iii) Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una función no negativa $\varphi \in E$ y constantes positivas C_0 y t_0 tales que $J_\varepsilon(t_0\varphi) = 0$ y $J_\varepsilon(t\varphi) \leq C_0\varepsilon^2$.

Note que los ítems ii) y iii) implican que $\|t_0\varphi\| > \rho$ y que

$$0 = \max\{J_\varepsilon(0), J_\varepsilon(t_0\varphi)\} < \beta \leq \inf_{\|u\|=\rho} J_\varepsilon(u).$$

Así, por el Teorema del paso de la montaña Teorema 1.21 existe un valor crítico c_c para J_ε tal que $c_c \geq \beta > 0$. Adicionalmente, dado que $\rho(t) = (1-t)t_0\varphi$ es un camino que une a 0 y $t_0\varphi$, por $iii)$ concluimos que $c_c \leq C_0\varepsilon^2$. Por otro lado, note que si $u \in E$, entonces $u \in L^q(\Omega)$ (Por Teorema 1.10) y $h(u) \in L^q(\Omega)$ (Por Teorema 1.15 y h_3)). Así, del Teorema 1.17 sigue que los puntos críticos de J_ε son elementos de $W^{2,q}(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$ y por otro lado, del Teorema 1.18 sigue que los puntos críticos de J_ε son entonces elementos de $W^{4,q}(\Omega)$, y en particular elementos de $C^2(\bar{\Omega})$.
Vamos a mostrar ahora que los puntos críticos obtenidos son no negativos. De hecho, suponga que $\min u < 0$, entonces, existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $u(x_0) = \min u$. Si $x_0 \in \Omega$, entonces $\Delta u(x_0) \geq 0$ pero dado que $h(u(x_0)) = 0$, tendríamos que $\varepsilon^2 \Delta u(x_0) = cu(x_0) < 0$, lo cual es absurdo. Ahora, suponga que $x_0 \in \partial\Omega$, entonces existe una bola abierta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$ y $u(x_0) < u(x) < 0$ en B. Así, $\varepsilon^2 \Delta u = cu < 0$ en B, y por el Lema 1.16 concluimos que $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) < 0$. lo cual es absurdo.
Para negar la posibilidad de que los puntos críticos correspondientes al valor crítico c_c sean constantes, note que si $\bar{u} > 0$ es una solución constante ($\bar{u} \equiv 0$ no puede ser punto crítico correspondiente a c_c), entonces

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\bar{u}) &:= \frac{1}{2}c\int_\Omega \bar{u}^2 dx - \int_\Omega H(\bar{u})dx = \left(\frac{1}{2}c\bar{u}^2 dx - H(\bar{u})\right)|\Omega| \\ &\geq \inf_{\bar{u}\in Z}\left\{\frac{1}{2}c\bar{u}^2 dx - H(\bar{u})\right\}|\Omega| = \gamma\,|\Omega| > 0. \end{aligned}$$

Así, para obtener puntos críticos no constantes basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que
$C_0\varepsilon^2 < \gamma\,|\Omega|$.
Vamos ahora a probar $i) - iii)$. Para mostrar $i)$, sea $(u_m) \subset E$ una sucesión, tal que

$|J_\varepsilon(u_m)|$ este acotado y tal que $J'_\varepsilon(u_m) \longrightarrow 0$ cuando $m \longrightarrow \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} d &\geq J_\varepsilon(u_m) = \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - \left(\int_{\{x\in\Omega; u_m(x)\leq\alpha_1\}} H(u_m)dx + \int_{\{x\in\Omega; u_m(x)>\alpha_1\}} H(u_m)dx \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - c - \theta \int_{\{x\in\Omega; u_m(x)\geq\alpha_1\}} h(u_m)u_m dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_m\|^2 - c - \theta \int_\Omega h(u_m)u_m dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, para m suficientemente grande, tenemos que

$$-J'_\varepsilon(u_m)v \leq |J'_\varepsilon(u_m)v| \leq \|J'_\varepsilon(u_m)\|_{E'}\|v\| \leq \|v\|.$$

De esto,

$$-\varepsilon^2 \int_\Omega \nabla u_m \nabla v dx - c\int_\Omega u_m v dx + \int_\Omega h(u_m)v dx \leq \|v\|.$$

Tomando en particular $v = u_m$ tenemos

$$-\|u_m\|^2 + \int_\Omega h(u_m)u_m \leq \|u_m\|.$$

Por lo tanto

$$-\theta \int_\Omega h(u_m)u_m \geq -\theta\|u_m\|^2 - \theta\|u_m\|,$$

lo cual implica

$$d \geq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_m\|^2 - c - \theta\|u_m\|.$$

Como $\frac{1}{2} - \theta > 0$, la desigualdad anterior implica que (u_m) es acotada en E y por lo tanto existen una subsucesión, nuevamente denotada (u_m), y un $u \in E$ tales que $(u_m) \longrightarrow u$ en el sentido débil. Como $E \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, (u_m) es convergente en el sentido fuerte en L^2, existe una subsucesión, nuevamente denotada (u_m) tal que $(u_m) \longrightarrow u$ para casi todo $x \in \Omega$ y como h es continua, se sigue que $h(u_{m_k}) \longrightarrow h(u)$ para casi todo $x \in \Omega$. Por otro lado, del Teorema 1.15 y el hecho de que $|\Omega| < \infty$, se sigue que $\int_\Omega e^{(u_m)^2}dx < K$ con K independiente de m. Con esto, por $h3)$, concluimos que $\|h\left(u_m\right)\|_{L^2} \leq c$, donde c no depende de m. Por lo tanto (véase [2])

$$\int_\Omega \left[h\left(u_m(x)\right) - h(u(x))\right]^q dx \longrightarrow 0, \text{ para } 1 \leq q < 2.$$

Ahora, considere el funcional $f(u) = \int_\Omega H(u)dx$ con derivada de Fréchet $f'(u)v = \int_\Omega h(u)vdx$. Por el Teorema de Representación de Riesz (véase [2]), existe un único $T(u) \in E$ tal que $f'(u)v = \langle T(u), v\rangle$. Así, $T : E \longrightarrow E$ con $1 \leq q < 2$ vale que

$$\begin{aligned}
\|T(u_m) - T(u)\| &= \|f'(u_m) - f'(u)\|_{E'} \\
&= \sup_{\|v\|=1} \left|\left(f'(u_m) - f'(u)\right) v\right| \\
&= \sup_{\|v\|=1} \left|\int_\Omega \left[h(u_m) - h(u)\right] vdx\right| \\
&\leq \sup_{\|v\|=1} \|h(u_m) - h(u)\|_{L^q}\|v\|_{L^{q'}} \\
&\leq c\|h(u_m) - h(u)\|_{L^q} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos a concluir que la subsucesión (u_m) es convergente. Sea $\nabla J_\varepsilon(u_m)$ el único elemento en E tal que $J'_\varepsilon(u_m)v = \langle \nabla J_\varepsilon(u_m), v\rangle$ para toda $v \in E$. Se sigue entonces que

$$\langle \nabla J_\varepsilon(u_m), v\rangle = J'_\varepsilon(u_m)v = \langle u_m, v\rangle - \langle T(u_m), v\rangle \quad \forall v \in E.$$

Esto es,

$$\nabla J_\varepsilon(u_m) = u_m - T(u_m).$$

Como $\nabla J_\varepsilon(u_m) \longrightarrow 0$ y $T(u_m) \longrightarrow T(u)$, concluimos que (u_m) converge.

Para mostrar $ii)$, note que por $h_2)$ se tiene que dado $\widetilde{\varepsilon} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|H(z)| \leq \widetilde{\varepsilon}|z|^2$ si $|z| < \delta$. Por otro lado, de $h_3)$ tenemos que $|H(z)| \leq c_2 e^{c_1 z^2} z^3$, para

$|z| \geq \delta$. Así,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |H(u)|dx &= \int_{\{x\in\Omega;|u|<\delta\}} |H(u)|dx + \int_{\{x\in\Omega;|u|\geq\delta\}} |H(u)|dx \\
&\leq \int_{\{x\in\Omega;|u|<\delta\}} \widetilde{\varepsilon}|u|^2dx + \int_{\{x\in\Omega;|u|\geq\delta\}} c_2e^{c_1u^2}u^3dx \\
&\leq \widetilde{\varepsilon}\int_\Omega u^2dx + c_2\int_\Omega e^{c_1u^2}u^3dx \\
&\leq \widetilde{\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2 + c_2\|e^{c_1u^2}\|_{L_2}\|u^3\|_{L^2} \\
&= \widetilde{\varepsilon}\|u\|_{L^2}^2 + c_2\left(\int_\Omega e^{2c_1u^2}dx\right)^{1/2}\|u\|_{L^6}^3 \\
&\leq \widetilde{\varepsilon}c_3\|u\|^2 + c_4\left(\int_\Omega e^{2c_1u^2}dx\right)^{1/2}\|u\|^3.
\end{aligned}
$$

Por el Teorema 1.15, existe una constante $c_5 > 0$ suficientemente pequeña tal que para toda $u \in E$ con $\|u\| \leq c_5$. Entonces,

$$
\left(\int_\Omega e^{2c_1u^2}\right)^{1/2} dx \leq K,
$$

para $K > 0$ constante. Así,

$$
\int_\Omega |H(u)|dx \leq \widetilde{\varepsilon}c_3\|u\|^2 + c_6\|u\|^3
$$

para toda $u \in E$ con $\|u\| \leq c_5$. De lo anterior se sigue que

$$
\begin{aligned}
J_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega H(u)dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \widetilde{\varepsilon}c_3\|u\|^2 - c_6\|u\|^3 \\
&\geq \left(\frac{1}{2} - \widetilde{\varepsilon}c_3\right)\|u\|^2 - c_6\|u\|^3.
\end{aligned}
$$

Tomando $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\frac{1}{2} - \widetilde{\varepsilon}c_3 > 0$ concluimos que, para $\|u\|$ suficientemente pequeña, tenemos que

$$J_\varepsilon > 0.$$

Por lo tanto, existen $\rho > 0$ y $\beta > 0$ tales que $J_\varepsilon(u) > 0$ si $0 < \|u\| < \rho$ y además $J_\varepsilon(u) \geq \beta > 0$ para toda $u \in E$ con $\|u\| = \rho$.

Ahora vamos a demostrar $iii)$. Sea $g = g(t)$ como en el Lema 2.5. Por la parte $ii)$ se tiene que $g(t) > 0$ para $0 < t << t_1$. Luego, del Lema 2.5 concluimos que existe $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = 0$. Adicionalmente se tiene que

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} g(t) &= \max_{0 \leq t \leq t_1} g(t) \\ &= \max_{0 \leq t \leq t_1} \left(\frac{1}{2} t^2 \varepsilon^{-2} (\pi + K_2) - \int_\Omega H(t\varphi(x)) dx \right) \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq t_1} \frac{1}{2} t^2 \varepsilon^{-2} (\pi + K_2) = \frac{1}{2} t_1^2 \varepsilon^{-2} (\pi + K_2) . \end{aligned}$$

Ya que $t_1 = M_{R_1} \varepsilon^2 / \sigma$, obtenemos que $\max g(t) \leq M_{R_1}^2 (\pi + K_2) \varepsilon^2 / (2\sigma^2)$. Por consiguiente, existe una función no negativa, en nuestro caso es la φ definida al inicio. Claramente, por como está definida $\varphi \in E$ y siendo $C_0 = M_{R_1}^2 (\pi + K_2) / (2\sigma^2)$, concluimos la demostración. $\square$

BIBLIOGRAFÍA

Ambrosetti, A. y P. H. Rabinowitz. “Dual Variatioal Methods in Critical Point Theory and Applications”. En: *Joournal of Functional Analysis* 14 (1973), págs. 349-381 (vid. pág. 43).

Costa, D. G. *An Invitation to Variatonal Methods in Differential Equations*. Birkhauser Boston, 2007 (vid. pág. 30).

Evans, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 2010 (vid. págs. 19, 20, 24, 26, 33, 50).

Follang, G. *Real analisis: modern thecnics and theri applications*. Printed in the United States of America, 1984 (vid. pág. 20).

Gilbarg, D. y N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 2001 (vid. págs. 27, 28).

Grisvard, P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. PITMAN PUBLISHING INC, 1985 (vid. págs. 27, 29).

Kabeya, Y. y W. M. Ni. “Stationary Keller-Segel model with the linear sensitivity”. En: *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* 1025 (1998), págs. 44-65 (vid. págs. 12, 13).

Ni, L. y Takagi. “Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system”. En: *Journal Differential Equations* 72 (1988), págs. 1-27 (vid. pág. 43).

Trudinger, N. S. “On Imbeddings into Orlicz Spaces and Some Applications”. En: *Journal of Mathematics and Mechanics* 5 (1967), págs. 473-483 (vid. págs. 22, 26).