TEOREMA DE GOODSTEIN

JAMIR SANTIAGO CASTELLANOS MANTILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

TEOREMA DE GOODSTEIN

JAMIR SANTIAGO CASTELLANOS MANTILLA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin
Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A todos aquellos por los que escribí un poema, un cuento, una historia o con profundo cariño puse las iniciales de sus nombres como una variable en mis demostraciones.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: TEOREMA DE GOODSTEIN *

AUTOR: JAMIR SANTIAGO CASTELLANOS MANTILLA **

PALABRAS CLAVE: TEOREMA DE GOODSTEIN, JERARQUÍAS DE CRECIMIENTO RÁPIDO, FUNCIONES RECURSIVAS, ARITMÉTICA DE PEANO.

DESCRIPCIÓN:

En 1944 R.L. Goodstein[1] definió para cada natural n una sucesión $(n)_k$ para la cuál sus términos se hacían cero. Esta sucesión permite definir la función de Goodstein $\mathcal{G}(n)$ como el menor k tal que $(n)_k = 0$ para cada n natural. Goodstein mostró que no puede ser probado en la Aritmética de Peano que $\mathcal{G}$ sea total. En 2007 A. Caicedo[2] ofrece una fórmula de la función de Goodstein usando jerarquías de funciones de crecimiento rápido además de concluir el mismo resultado de Goodstein como un corolario de la teoría de las funciones de crecimiento rápido.

En esta tesis profundizamos en el artículo de A. Caicedo ofreciendo una demostración detallada a cada uno de los teoremas que aparecen en el artículo mencionado.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

1 R. L. Goodstein. “On the Restricted Ordinal Theorem”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 9.2 (1944), págs. 33-41. URL: `http://www.jstor.org/stable/2268019` (visitado 01-06-2024).

2 A Caicedo. “Goodstein’s function”. en. En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 41 (dic. de 2007), págs. 381-391. URL: `http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-74262007000200008&nrm=iso`.

ABSTRACT

TITLE: Goodstein's Theorem *

AUTHOR: JAMIR SANTIAGO CASTELLANOS MANTILLA **

KEYWORDS: GOODSTEIN'S THEOREM, FAST GROWING HIERARCHY, RECURSIVE FUNCTIONS, PEANO ARITHMETIC

DESCRIPTION:

In 1944 R.L. Goodstein[1] defined for each natural number n a sequence $(n)_k$ whose terms reach zero. This sequence allows to define the Goodstein's function $\mathcal{G}(n)$ as the smallest k such that $(n)_k = 0$. Goodstein showed that it cannot be proven in Peano Arithmetic that $\mathcal{G}$ is total. In 2007 A. Caicedo[2] offers a Goodstein's function formula using fast growing hierarchies in addition to concluding the same result of Goodstein as a corollary of the rapid growing hierarchies theory.

In this thesis we delve into Caicedo's work, offering a detailed proof and explanation of each of the theorems that appear in said article.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, Doctor en Matemáticas.

Introducción

En 1944 Reuben Louis Goodstein definió para cada natural n una sucesión $(n)_k$ de la siguiente manera:

- $(n)_1$ es n escrito en su representación completa base 2 (la definición precisa se dará en la sección 1.2).
- $(n)_2$ es el número que se obtiene sustituyendo en $(n)_1$ cada 2 por un 3 y después se le resta 1.

  $(n)_3$ es el número que se obtiene sustituyendo en $(n)_2$ cada 3 por un 4 y después se le resta 1.
- Se continúa recursivamente.

Veamos un ejemplo, tomemos $n = 21$ y obtenemos la sucesión.

- $(21)_1 = 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1$
- $(21)_2 = 3^{3^3} + 3^3 + 1 - 1 \sim 7{,}6 \times 10^{12}$
- $(21)_3 = 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \sim 1{,}3 \times 10^{154}$
- $(21)_4 = 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \sim 1{,}9 \times 10^{2184}$

  $\vdots$

¿Es posible que la sucesión llegue a cero si se continúa iterando indefinidamente? Goodstein probó que, sin importar el número inicial $n \in \mathbb{N}$, siempre existirá un número k tal que $(n)_k = 0$. Este resultado es conocido como el teorema de Goodstein y permite definir la función $\mathcal{G}(n)$ como el menor k tal que $(n)_k = 0$ para cada n natural. Esta función se llama la función de Goodstein. Veremos una demostración en el Capítulo 1 de que esta función es total. El argumento consiste en asociarle un ordinal α_k a cada término $(n)_k$ de la sucesión de Goodstein de tal manera que la sucesión de ordinales sea decreciente y por el buen ordenamiento llegue a cero.

La importancia del teorema de Goodstein en parte se debe a que ese teorema no es demostrable en la aritmética de Peano (PA). Más precisamente, PA no demuestra que $\mathcal{G}$ es total. Haremos a continuación algunos comentarios para explicar lo que esto significa.

Los axiomas de la **aritmética de Peano** (PA) son una formalización de la aritmética (usual) de los números naturales, con las operaciones de suma y multiplicación y además

incluye el principio de inducción. Caicedo, "Goodstein's function" (2007) comenta que la aritmética de Peano es una teoría equivalente a tomar la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZFC) (que es la axiomatización estándar de la teoría de conjuntos, incluyendo el axioma de elección), eliminar el axioma del infinito (*existe un conjunto inductivo*) y reemplazarlo por su negación (*todo conjunto es finito*, es decir, todo conjunto es equipotente con un número natural). A pesar de esta restricción, la aritmética de Peano es lo suficientemente poderosa para codificar algunos conjuntos infinitos; por ejemplo, cualquier ordinal menor a ε_0[1] es formalizable dentro de PA; un enunciado que no es demostrable en PA, debe contener un uso explícito del axioma del infinito en su demostración.
En el año 1982 Kirby y Paris[2] dieron la primera prueba de que el teorema de Goodstein no es demostrable en PA. Más adelante, en 1983 Cichon [3] y Caicedo [2] en 2007 dan pruebas alternativas del resultado de Kirby-Paris. Ambas demostraciones usan jerarquías de funciones de crecimiento rápido. Estas jerarquías son familias de funciones Φ_α, para $\alpha < \varepsilon_0$, que están definidas por recursión. Su importancia reside en que toda función recursiva definible en PA está eventualmente dominada por alguna Φ_α. Este es el criterio usado por Caicedo para mostrar que $\mathcal{G}$ no es demostrablemente total en PA. En efecto, Caicedo (ver Teorema 3.5.1) usa la jerarquía de Löb-Wainer, $\{\Phi_a : \alpha < \varepsilon_0\}$, para expresar la función de Goodstein de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(n) = \Phi_{\alpha_1}(\Phi_{\alpha_2}(\dots(\Phi_{\alpha_k}(3)))) - 2,$$

donde los ordinales α_i dependen de la representación en base 2 de n y crecen a medida que n aumenta. Esta fórmula indica que $\mathcal{G}$ no está eventualmente dominada por ninguna Φ_α y en concecuencia en PA no se puede demostrar que $\mathcal{G}$ es una función total. Pero como veremos, la demostración de que $\mathcal{G}$ es total se puede hacer en teoría de conjuntos.
El objetivo de esta tesis es estudiar el artículo de Caicedo. Este trabajo está estructurado como sigue. En primer lugar se demostrará el teorema de Goodstein que da lugar a la definición de la función de Goodstein $\mathcal{G}$. Además de presentar diferentes variaciones. En segundo lugar, se mostrará que la función de Goodstein es recursiva. Y por último, siguiendo el trabajo de Caicedo mostraremos que la función de Goodstein se puede

---

[1] ε_0 es el primer ordinal α tal que $\alpha = \omega^\alpha$, ver la Definición 1.1.9.

[2] J Kirby L. y Paris. "Accessible independence results for Peano arithmetic". En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 14.4 (1982), pp.285–293. DOI: 10.1112/blms/14.4.285.

[3] E Cichon. "A Short Proof of Two Recently Discovered Independence Results Using Recursion Theoretic Methods". En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 87.4 (1983), págs. 704-706. URL: http://www.jstor.org/stable/2043364 (visitado 05-02-2024).

describir usando las jerarquías de Löb-Wainer y Hardy. Obtendremos como corolarios los resultados de Kirby-Paris y Cichón. Esta tesis contiene una explicación bastante detallada de los resultados de Caicedo, especialmente difícil resultó completar los detalles de la prueba del Lema 3.4.10 que tiene su propia sección debido a su extensión y complejidad.

1. Teorema de Goodstein

El objetivo principal de este capítulo es presentar la demostración del teorema de Goodstein, para ello es necesario, a manera de introducción, definir las nociones básicas de los números ordinales. En este capítulo además veremos las distintas formas de definir una sucesión de Goodstein.

1.1. Aritmética ordinal y la forma normal de Cantor

Decimos que un conjunto α es **transitivo** si cada elemento de α es un subconjunto de α, en otras palabras, un conjunto es transitivo si y solo si para todo $x \in \alpha, x \subseteq \alpha$. Un **ordinal** es un conjunto transitivo y bien ordenado bajo la relación $\in$. Los números naturales son ordinales, además $\omega = \mathbb{N}$ también es un número ordinal.
Si α es un ordinal, denotamos **el sucesor de** α por $\alpha + 1$ definido por:

$$\alpha + 1 = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

Si α es un número ordinal, entonces $S(\alpha)$ es a su vez un número ordinal.
Un número ordinal α es llamado **ordinal sucesor** si $\alpha = \beta + 1$ para algún β ordinal. De otro modo es llamado un **ordinal límite**.

Nota 1.1.1. *ω es el primer ordinal límite.*

Definición 1.1.2. *Para todo par de ordinales α, β definimos $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$.*

A continuación definimos la **suma de ordinales**.

Definición 1.1.3. *Para todo ordinal β,*

(a) $\beta + 0 = \beta$.

(b) $\beta + (\alpha + 1) = (\beta + \alpha) + 1$ *para todo* α.

(c) $\beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma | \gamma < \alpha\}$ *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

La suma de ordinales no es conmutativa.

Ejemplo 1.1.4. *Sea $m < \omega$. Siguiendo la definición de la suma para ordinales $m + \omega = \sup\{m + n | n < \omega\} = \omega$. Por lo anterior $m + \omega \neq \omega + m$.*

El siguiente lema muestra que es posible definir la resta de números ordinales.

Lema 1.1.5. *Hrbacek y Jeck* [4]
Si $\alpha \leq \beta$ entonces existe un único número ordinal ξ tal que $\alpha + \xi = \beta$.

Ahora podemos definir la **multiplicación de ordinales** de la siguiente manera.

Definición 1.1.6. *Para todo ordinal β.*

(a) $\beta \cdot 0 = 0$.

(b) $\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta$ *para todo* α.

(c) $\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma | \gamma < \alpha\}$ *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$

Ejemplo 1.1.7.

$$\beta \cdot 2 = \beta(1+1) = \beta \cdot 1 + \beta = \beta + \beta.$$
$$\beta \cdot \omega = \sup\{\beta \cdot n | n \in \omega\} = \sup\{\beta, \beta + \beta, \beta + \beta + \beta, \dots\}.$$

En particular

$$2 \cdot \omega = \omega$$
$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega,$$

lo que muestra que la multiplicación en general no es conmutativa.

Lema 1.1.8. *Hrbacek y Jeck Hrbacek,* Introduction to Set Theory
Los ordinales cumplen la propiedad distributiva

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

La **exponenciación de números ordinales** se define a continuación.

Definición 1.1.9. *Para todo β,*

(a) $\beta^0 = 1$.

(b) $\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$ *para todo* α.

(c) $\beta^\alpha = \sup\{\beta^\gamma | \gamma < \alpha\}$ *para todo ordinal límite* $\alpha \neq 0$.

Ejemplo 1.1.10. $\beta^\omega = \sup\{\beta^n | n \in \omega\}$, *en particular* $n^\omega = \sup\{n^m | m \in \omega\} = \omega$ *para cualquier* $n \in \omega$

---

[4] T. Hrbacek K. y Jech. *Introduction to Set Theory*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. M. Dekker, 1978. URL: `https://books.google.com.co/books?id=KvnuAAAAMAAJ`.

Las funciones suma, multiplicación y exponenciación son continuas.

Lema 1.1.11. *Hrbacek y Jeck Hrbacek,* Introduction to Set Theory
Si γ es un ordinal límite y $\beta = \sup_{v<\gamma} \beta_v$ entonces se satisfacen las siguientes igualdades.

- $\alpha + \beta = \sup\limits_{v<\gamma}(\alpha + \beta_v)$
- $\alpha \cdot \beta = \sup\limits_{v<\gamma}(\alpha \cdot \beta_v)$
- $\alpha^\beta = \sup\limits_{v<\gamma} \alpha^{\beta_v}$

Ahora podemos definir un ordinal que juega un papel importante en el estudio de las funciones recursivas.

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$$

Lema 1.1.12. *Hrbacek y Jeck Hrbacek,* Introduction to Set Theory

(a) Si $0 < \alpha \leq \gamma$ entonces existe un ordinal máximo β tal que $\alpha \cdot \beta \leq \gamma$

(b) Si $0 < \alpha \leq \gamma$ entonces existe un ordinal máximo β tal que $\alpha^\beta \leq \gamma$

Lema 1.1.13. *Hrbacek y Jeck Hrbacek,* Introduction to Set Theory
Si γ es un ordinal arbitrario y $\alpha \neq 0$, entonces existe un único ordinal β y un único ordinal $\rho < \alpha$ tal que $\gamma = \alpha \cdot \beta + \rho$.

La demostración del teorema de Goodstein hace uso de la forma normal de Cantor, a continuación presentamos una definición que se puede encontrar en (Hrbacek y Jeck Hrbacek, *Introduction to Set Theory*, 1999, p. 124).

Proposición 1.1.14. ***Forma normal de Cantor***
Todo ordinal $0 < \alpha < \varepsilon_0$ puede ser escrito de una única forma como

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

*donde $\alpha > \beta_1 > \ldots > \beta_n$ y $0 < k_1, \ldots, k_n < \omega$. Esta representación es conocida como la **forma normal de Cantor** de α*

1.2. Función de cambio de base

Para definir la función de Goodstein en primer lugar hace falta recordar las representaciones de los números naturales en base b.

Definición 1.2.1. *La representación de $n \in \mathbb{N}$ en base b de **profundidad-1** es la forma usual de representar n en base b:*

$$n = b^{m_1}n_1 + \cdots + b^{m_k}n_k,$$

donde $m_1 > \ldots > m_k \geq 0$ y $1 \leq n_i < b$ para cada i.

Si reemplazamos cada m_i con su respectiva representación en base b obtenemos la representación de n de *profundidad-2*. En general, la representación de *profundidad-(m+1)* se obtiene reemplazando cada m_i por su representación en base b de *profundidad-m*.

Ejemplo 1.2.2. *Para el número 266:*

- *Su representación de profundidad-1 en base 2 es $2^8 + 2^3 + 2^1$.*
- *Su representación de profundidad-2 en base 2 es $2^{2^3} + 2^{2^1+1} + 2^1$.*
- *Su representación de profundidad-3 en base 2 es $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$.*
- *Su representación de profundidad-4 en base 2 es $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2$.*

Para cualquier n y b a medida que m incrementa, la representación de n de profundidad-$(m+1)$ en base b eventualmente se estabiliza. Esa representación estable se llama la **representación completa de** n **en base** b.

Definición 1.2.3. *Sea $n, b \in \mathbb{N}$ definimos la **función de cambio de base** $R_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que asigna a n el número obtenido reemplazando cada b por $b+1$ en la representación completa de n en base b*

Para ilustrar la defincíón de R_b presentamos el siguiente ejemplo: La representación completa de 266 en base 2 es

$$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2.$$

De este modo

$$R_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3 = 443426488243037769948249630619149892887.$$

Definición 1.2.4. *$R_n^\omega(m)$ es la función cambio de base que reemplaza cada n por ω en la representación completa de m en base n.*

Observemos que $R_n^\omega(m)$ es un ordinal escrito en forma normal. Veamos un ejemplo. Como $266 = 3^{3+2} + 3^2 \cdot 2 + 3 + 2$, entonces

$$R_3^\omega(266) = \omega^{\omega+2} + \omega^2 \cdot 2 + \omega + 2.$$

1.3. Sucesión débil de Goodstein

La **sucesión débil de Goodstein** iniciando en $m > 0$ es la sucesión $(m)_1, (m)_2, \ldots$ de números naturales definida de la siguiente manera: En primer lugar, $(m)_1 = m$ es escrito en su representación en base 2:

$$(m)_1 = 2^{b_1} + \cdots + 2^{b_n}$$

Para obtener $(m)_2$, aumentamos la base en 1 (de 2 a 3) y restamos 1:

$$(m)_2 = 3^{b_1} + \cdots + 3^{b_n} - 1$$

En general, para obtener $(m)_{k+1}$ a partir de $(m)_k$ (siempre y cuando $(m)_k \neq 0$), escribimos $(m)_k$ en base $k+1$, aumentamos la base en 1 $(k+2)$ y restamos 1. En caso de que $(m)_k = 0$ entonces $(m)_{k+1} = 0$.

Ejemplo 1.3.1. *La sucesión débil de Goodstein tomando* $m = 21$ *sigue de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{lcl}
(21)_1 & = 21 & = 2^4 + 2^2 + 1 \\
(21)_2 & = 90 & = 3^4 + 3^2 \\
(21)_3 & = 271 & = 4^4 + 4 \cdot 3 + 3 \\
(21)_4 & = 642 & = 5^4 + 5 \cdot 3 + 2 \\
(21)_5 & = 1315 & = 6^4 + 6 \cdot 3 + 1 \\
(21)_6 & = 2422 & = 7^4 + 7 \cdot 3 \\
(21)_7 & = 4119 & = 8^4 + 8 \cdot 2 + 7 \\
(21)_8 & = 6585 & = 9^4 + 9 \cdot 2 + 6 \\
(21)_9 & = 10025 & = 10^4 + 10 \cdot 2 + 5 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Ejemplo 1.3.2. *La sucesión débil de Goodstein tomando $m = 3$ es:*

$$\begin{array}{ccccc} (3)_1 & = & 3 & = & 2+1 \\ (3)_2 & = & 3 & = & (3+1)-1 \\ (3)_3 & = & 3 & = & 4-1 \\ (3)_4 & = & 2 & = & 3-1 \\ (3)_5 & = & 1 & = & 2-1 \\ (3)_6 & = & 0 & = & 1-1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (3)_n & = & 0 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Las sucesiones débiles de Goodstein pueden crecer muy rápidamente, como es en el caso de $m = 21$. Para otros valores de m, como 3, vemos que su crecimiento se detiene en algún momento y se vuelve igual a cero. Esto es un fenómeno general, como lo establece el Teorema de Goodstein que veremos a continuación, pero antes mostramos un resultado auxiliar.

Proposición 1.3.3. *Sea $(m)_a$ el a-ésimo término de la sucesión débil de Goodstein, iniciando en m, escrito en base $a+1$ de la siguiente forma:*

$$(m)_a = (a+1)^{b_1} \cdot k_1 + (a+1)^{b_2} \cdot k_2 + \cdots + (a+1)^{b_n} \cdot k_n$$

Sea

$$\alpha_a = \omega^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{b_n} \cdot k_n,$$

el ordinal que se obtiene al reemplazar la base $a+1$ por ω en la representación de $(m)_a$. Entonces

$$\alpha_a > \alpha_{a+1}.$$

Demostración. Observe que el número $(a+2)^{b_n}$ puede ser reescrito de la siguiente manera:

$$(a+2)^{b_n} = \left(\sum_{i=1}^{b_n} (a+2)^{b_n - i} \cdot (a+1) \right) + 1. \tag{1.1}$$

Por ejemplo el número $3^5 = 3^4 \cdot 2 + 3^3 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 + 1$. Es por eso que podemos expresar $(a+2)^{b_n}\cdot k_n$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(a+2)^{b_n}\cdot k_n &= (a+2)^{b_n}(k_n-1)+(a+2)^{b_n}\\ &= (a+2)^{b_n}(k_n-1)+\sum_{i=1}^{b_n}(a+2)^{b_n-i}\cdot(a+1)+1.\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}(m)_{a+1} &= (a+2)^{b_1}\cdot k_1+(a+2)^{b_2}\cdot k_2+\cdots+(a+2)^{b_n}\cdot k_n-1.\\ (m)_{a+1} &= (a+2)^{b_1}\cdot k_1+(a+2)^{b_2}\cdot k_2+\cdots+(a+2)^{b_n}(k_n-1)+\sum_{i=1}^{b_n}(a+2)^{b_n-i}\cdot(a+1).\end{aligned}$$

Luego

$$\alpha_{a+1} = \omega^{b_1}\cdot k_1+\omega^{b_2}\cdot k_2+\cdots+\omega^{b_n}\cdot(k_n-1)+\sum_{i=1}^{b_n}\omega^{b_n-i}\cdot(a+1).$$

Mostraremos la siguiente desigualdad:

$$\omega^{b_n}\cdot k_n>\omega^{b_n}(k_n-1)+\sum_{i=1}^{b_n}\omega^{b_n-i}\cdot(a+1).$$

En efecto, de la definición de las operaciones entre ordinales tenemos que

$$\omega^{b_n}=\sup\{\omega^{b_n-1}\cdot n|n<\omega\}.$$

Luego, $\omega^{b_n}>\omega^{b_n-1}\cdot c$ para cualquier $c<\omega$. Para $1\leq i\leq b_n$ se cumple que

$$\begin{aligned}\omega^{b_n-i}(a+1) &\leq \omega^{b_n-1}(a+1).\\ \sum_{i=1}^{b_n}\omega^{b_n-i}\cdot(a+1) &\leq \omega^{b_n-1}\cdot(a+1)\cdot b_n<\omega^{b_n}.\end{aligned}$$

De ahí que $\omega^{b_n}(k_n-1)+\sum_{i=1}^{b_n}\omega^{b_n-i}\cdot(a+1)<\omega^{b_n}\cdot(k_n-1)+\omega^{b_n}=\omega^{b_n}\cdot k_n$.

□

Para la demostración del teorema a continuación seguiremos los argumentos utilizados en el libro de Hrbacek, *Introduction to Set Theory*.

Teorema 1.3.4. *La sucesión débil de Goodstein $(m)_n$ es eventualmente igual a cero para* *cualquier* $m \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. El $a-$ésimo término de la sucesión débil de Goodstein iniciando en m, escrito en base $a+1$ es:

$$(m)_a = (a+1)^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + (a+1)^{b_n} k_n.$$

Considere el ordinal

$$\alpha_a = \omega^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{b_n} \cdot k_n$$

que se obtiene al reemplazar la base $a+1$ por ω en la representación de $(m)_a$. Por la Proposición 1.3.3, $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_a > \ldots$ es una sucesión decreciente de ordinales, y consiguiente es necesariamente finita puesto que los ordinales están bien ordenados. Por lo tanto, existe algún n tal que $\alpha_n = 0$. Pero claramente $(m)_a \leq \alpha_a$. Por eso $(m)_n = 0$. $\square$

1.4. Sucesión de Goodstein

El Teorema 1.3.4 es una introducción a un resultado aún más interesante y fuerte sobre las sucesiones de Goodstein.

Definición 1.4.1. *La* ***sucesión de Goodstein*** *iniciando con* $m \in \mathbb{N}$*,* $(m)_k$ *está definida recursivamente de la siguiente manera:*

$$(m)_1 = m$$

y para $k \geq 1$*,*

$$(m)_{k+1} = \begin{cases} R_{k+1}((m)_k) - 1 & si \quad (m)_k > 0, \\ 0 & si \quad (m)_k = 0, \end{cases}$$

donde $R_{k+1}(n)$ *es la función definida en 1.2.3.*

A partir de ahora se utilizará la notación $(m)_k$ para hablar exclusivamente de la sucesión de Goodstein.

Ejemplo 1.4.2. *Tomando* $m = 21$ *obtenemos la sucesión.*

- $(21)_1 = 21 = 2^{2^2} + 2^2 + 1$
- $(21)_2 = 3^{3^3} + 3^3 + 1 - 1 \sim 7{,}6 \times 10^{12}$
- $(21)_3 = 4^{4^4} + 4^4 - 1 = 4^{4^4} + 4^3 \cdot 3 + 4^2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 3 \sim 1{,}3 \times 10^{154}$
- $(21)_4 = 5^{5^5} + 5^3 \cdot 3 + 5^2 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \sim 1{,}9 \times 10^{2184}$

- $(21)_5 = 6^{6^6} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 1 > 2 \times 10^{36305}$
- $(21)_6 = 7^{7^7} + 7^3 \cdot 3 + 7^2 \cdot 3 + 7 \cdot 3$
- $(21)_7 = 8^{8^8} + 8^3 \cdot 3 + 8^2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 7$
- $(21)_8 = 9^{9^9} + 9^3 \cdot 3 + 9^2 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 6$
- $(21)_9 = 10^{10^{10}} + 10^3 \cdot 3 + 10^2 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 5$

  $\vdots$

Las sucesiones de Goodstein crecen mucho más rápido que las sucesiones débiles de Goodstein, pero también son eventualmente igual a cero.

Definición 1.4.3. *La* ***función de Goodstein*** $\mathcal{G} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *está definida como el menor número* k *para el cual* $(m)_k = 0$.

Ejemplo 1.4.4. *La función de Goodstein aplicada a los números* $1, 2, 3$ *y* 4 *nos da como resultado.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(1) &= 2 \\
\mathcal{G}(2) &= 4 \\
\mathcal{G}(3) &= 6 \\
\mathcal{G}(4) &= 3 \cdot 2^{402653211} - 2 \sim 6{,}895 \times 10^{121210694}
\end{aligned}$$

A pesar de que la función de Goodstein es recursiva, como veremos en la siguiente sección, sus valores crecen increiblemente rápido como podemos evidenciar en $\mathcal{G}(4)$.
El siguiente teorema es uno de los objetivos de este trabajo.

Teorema 1.4.5. *(Goodstein, "On the Restricted Ordinal Theorem") La función* $\mathcal{G}$ *es total.*

Nuevamente podemos utilizar la igualdad (1.1) para hacer un argumento similar para la representación completa base a como sigue a continuación.

Demostración. Sea $(m)_a$ es el a-ésimo término de la sucesión de Goodstein, iniciando en m y escrito en base completa $a + 1$, esto es

$$(m)_a = (a + 1)^{b_1} \cdot k_1 + \cdots + (a + 1)^{b_n} \cdot k_n,$$

donde b_i, para $1 \leq i \leq n$, también está escrito en base completa $a + 1$. Consideremos el ordinal

$$\alpha_a = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n,$$

que se obtiene al reemplazar cada $a+1$ por ω en la representación completa de $(m)_a$ base $a+1$. Entonces afirmamos que

$$\alpha_a > \alpha_{a+1}.$$

En efecto,

$$\alpha_{a+1} \;=\; \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \omega^{\beta_2} \cdot k_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot (k_n - 1) + \sum_{i=1}^{b_n} \omega^{R^{\omega}_{a+2}(b_n - i)} \cdot (a+1),$$

y por el mismo argumento usado en la demostración de la Proposición 1.3.3 (los exponentes pueden ser arbitrarios) obtenemos lo afirmado. En consecuencia, tenemos una sucesión estrictamente decreciente de ordinales $\alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_a > \ldots$, por lo tanto, $\alpha_n = 0$ para algún n. Pero claramente $(m)_a \leq \alpha_a$. Por eso $(m)_n = 0$.

□

1.4.1. Otras formas de definir la sucesión de Goodstein La sucesión de Goodstein puede definirse de al menos dos formas. La primer forma es como se hizo en 1.4.1; la segunda manera, la veremos a continuación.

Definición 1.4.6.
*La **segunda versión de la sucesión de Goodstein** iniciando con $m \in N, [m]_k$ está definida por*

$$[m]_1 = m$$

y para $k \geq 1$,

$$[m]_{k+1} = \begin{cases} R_{k+1}([m]_k - 1) & si \quad m_k > 0 \\ 0 & si \quad m_k = 0. \end{cases}$$

Donde $R_b(n)$ es la función definida en 1.2.3.

Es decir, en cada iteración, restamos 1 del número y luego aumentamos la base. Como veremos esta sucesión $[m]_k$ también es eventualmente cero. Por esto, podemos definir su respectiva función. A continuación, no solo probaremos que esta función es total, sino que además mostraremos la relación entre esta variante y la sucesión original de Goodstein.

Definición 1.4.7. *La función de Goodstein $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está definida como el menor número k para el cual $[m]_k = 0$.*

Proposición 1.4.8. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, $g(m+1) = \mathcal{G}(m) + 1$.*

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$. Los términos de la sucesión de Goodstein $(m)_n$ iniciando con m son los siguientes:

$$\begin{array}{rcl}
(m)_1 & = & m \\
(m)_2 & = & R_2(m) - 1 \\
(m)_3 & = & R_3(R_2(m) - 1) - 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(m)_{n-1} & = & R_{n-1}(\dots(R_3(R_2(m) - 1) - 1)\dots) - 1) - 1 \\
(m)_n & = & R_n(R_{n-1}(\dots(R_3(R_2(m) - 1) - 1)\dots) - 1) - 1. \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Los términos de la sucesión en la segunda versión de Goodstein $[m+1]_n$ iniciando con $m+1$ son los siguientes:

$$\begin{array}{rcccl}
[m+1]_1 & = & m+1 & & \\
[m+1]_2 & = & R_2(m) & = & R_2((m)_1) \\
[m+1]_3 & = & R_3(R_2(m) - 1) & = & R_3((m)_2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[m+1]_n & = & R_n(R_{n-1}(\dots(R_3(R_2(m) - 1) - 1)\dots) - 1) & = & R_n((m)_{n-1}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Por lo tanto, si la función de Goodstein $\mathcal{G}(m) = k$ significa que $(m)_k = 0$ y por consiguiente $[m+1]_{k+1} = R_{k+1}((m)_k) = 0$, que es equivalente a $g(m+1) = \mathcal{G}(m) + 1$. $\square$

Como última forma de dar a conocer la sucesión de Goodstein, queremos definir una sucesión que en lugar de iniciar en base completa 2 inicie en una base arbitraria $a > 1$, esto nos será útil en los próximos capítulos para dar una fórmula más general de la función de Goodstein. La demostración de que esta sucesión es eventualmente igual a cero se hace de manera similar a las ya presentadas anteriormente.

Definición 1.4.9. *La sucesión de Goodstein iniciando en m con base completa b, $(m,b)_k$ está definida por*

$$(m,b)_1 = m$$

y para $k \geq 1$,

$$(m,b)_{k+1} = \begin{cases} R_{b+(k-1)}((m,b)_k) - 1 & si \quad (m,b)_k > 0 \\ 0 & si \quad (m,b)_k = 0. \end{cases}$$

Definición 1.4.10. *La **función de Goodstein iniciando en base** b, $\mathcal{G}_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es el menor número k para el cual $(m, b)_k = 0$.*

Ejemplo 1.4.11. $\mathcal{G}_2(n) = \mathcal{G}(n)$

2. Funciones recursivas

El propósito de este capítulo es introducir el concepto de función recursiva, que es la versión formal de la noción intuitiva de función computable. Todo esto con el objetivo de mostrar que la función de Goodstein es recursiva. Los resultados expuestos en esta sección son adaptados de Brainerd-Landweber[5] y Katz-Reimann[6].

2.1. Funciones primitivas recursivas

Las funciones recursivas con dominio $\mathbb{N}$ no tienen necesariamente una definición explícita, sino que usan un procedimiento que inicia con un valor $f(0)$ y luego para definir $f(n+1)$ se requiere que los anteriores valores $f(m)$, con $m < n+1$, hayan sido definidos (o computados) previamente. Formalmente, las funciones recursivas se fundamentan en el siguiente resultado.

Teorema de recursión. Sea A un conjunto y $a \in A$. Para cualquier función $g : A \times \mathbb{N} \to A$, existe una única función $f : \mathbb{N} \to A$ tal que

(a) $f(0) = a$;

(b) $f(n+1) = g(f(n), n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las funciones primitivas recursivas son las funciones que pueden ser obtenidas a partir de ciertas funciones básicas usando ciertas operaciones y recursión.

Composición: Dadas unas funciónes $h(x_1, \ldots, x_m)$ y $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)$, podemos componer estas funciones para definir una nueva función

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Recursión: Dadas unas funciones $g(x_1, \ldots, x_n)$ y $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$, podemos definir por

[5] L Brainerd W. y Landweber. *Theory of Computation*. (A Wiley-Interscience publication). Wiley, 1974, págs. 49-65. URL: `https://books.google.com.co/books?id=hS0XAAAACAAJ`.

[6] J Matthew K. y Reimann. *An introduction to ramsey theory: Fast functions, Infinity, and Metamathematics*. American Mathematical Society, 2018, págs. 105-113.

recursión una función f basada en g y h de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} f(x_1, \ldots, x_n, 0) & = & g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) & = & h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{array}$$

Las funciones primitivas recursivas básicas son las siguientes.

Función cero: $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $Z(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$

Función sucesor: $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $S(x) = x + 1$.

Función proyección: $P_n^i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por $P_n^i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.

Ahora podemos dar la definición de las funciones primitivas recursivas.

Definición 2.1.1. *La familia de funciones* **primitivas recursivas** *es la familia más pequeña de funciones $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario) que contiene las tres funciones básicas y es cerrada bajo composición y recursión.*

Si agregamos un nuevo operador al conjunto de funciones primitivas recursivas obtenemos las funciones recursivas.

Definición 2.1.2. *El* ***operador de minimización no acotado*** *μ. Dada una función $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, $f(y, x_1, \ldots, x_k)$, la función $\mu(f) : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es definida por:*

$$\mu(f)(x_1, \ldots, x_k) = z,$$

donde z es el menor argumento que satisface:

- $f(i, x_1, \ldots, x_k) > 0$ *para todo* $i < z$,
- $f(z, x_1, \ldots, x_k) = 0$.

Definición 2.1.3. *La familia de funciones* **recursivas** *es la familia más pequeña de funciones $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ (con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario) que contiene las tres funciones básicas, y es cerrada bajo el operador de minimización μ y bajo composición y recursión.*

Como es usual, la n-ésima iteración de una función f se denota por f^n, no confundirla con la exponenciación. A continuación presentamos unos ejemplos de funciones recursivas primitivas.

Ejemplo 2.1.4. *La operación de suma* $(+) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función recursiva primitiva al definirse de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{rcccl} +(x,0) & = & x+0 & = & P_1^1(x), \\ +(x,y+1) & = & x+(y+1) & = & S(P_3^3(x,y,+(x,y))). \end{array}$$

Asimismo podemos definir la operación de resta.

Ejemplo 2.1.5. *La operación resta* $(-) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es recursiva primitiva al ser definida como:*

$$x - y = \begin{cases} x - y & \textit{si } x \geq y, \\ 0 & \textit{si } x < y. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.6. *La operación de multiplicación* $(\cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es una función definida bajo recursión de la función* $+$

$$\begin{array}{rcl} x \cdot 0 & = & Z(x) = 0 \\ x \cdot (y+1) & = & +(P_3^1(x,y,x \cdot y), P_3^3(x,y,x \cdot y)) \end{array} \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1.7. *La función signo* $sign : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ *es una función recursiva primitiva.*

$$sign(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x > 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Observe que $sign(0) = 0$*,* $sign(x+1) = 1$*.*

Ejemplo 2.1.8.
Las funciones

$$coc(n,m) = \begin{cases} \textit{el cociente de dividir } n \textit{ entre } m & \textit{si } m \neq 0, \\ 0 & \textit{si } m = 0. \end{cases}$$

$$res(n,m) = \begin{cases} \textit{el residuo de dividir } n \textit{ entre } m & \textit{si } m \neq 0, \\ 0 & \textit{si } m = 0. \end{cases}$$

son funciones recursivas primitivas (Brainerd, Theory of Computation*).*

Una función recursiva primitiva a destacar es la función característica, la cual utilizaremos para trabajar las relaciones recursivas.

Definición 2.1.9. *Dada una relación $R \subseteq \mathbb{N}^k$ definimos la función característica de R, $\mathcal{C}_R$, de la siguiente manera:*

$$\mathcal{C}_R((x_1, x_2, \ldots, x_k)) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R, \\ 0 & \textit{si } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \notin R. \end{cases}$$

Definición 2.1.10. *Sea $R \subseteq \mathbb{N}^k$. Decimos que una función $f_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ es una **función representante** de la relación R si*

$$f_R((x_1, x_2, \ldots, x_k)) = 1 \textit{ si y solo si } (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R.$$

Definición 2.1.11. *Una relación R es una **relación recursiva primitiva** si R tiene una función representante recursiva primitiva.*

Como consecuencia directa de la definición se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.1.12. *Una relación es recursiva primitiva si su función característica lo es.*

Definición 2.1.13. *Sea $\{E_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ la familia de funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ dadas por la siguiente recursión:*

$$E_0(x) = x + 2.$$

$$E_{n+1}(x) = E_n^x(2).$$

La familia $\{E_n\}_{n<\omega}$ consiste de funciones recursivas primitivas. Para ilustrar esta familia, las primeras funciones con $n = 1$ y $n = 2$ son

$$\begin{array}{rcl} E_1(x) & = & 2x \\ E_2(x) & = & 2^x. \end{array}$$

Las definiciones por recursión generalmente producen funciones que crecen más rápido que las funciones originales. Por ejemplo, la operación suma está definida bajo recursión de la función sucesor y la función proyección y se cumple que para todo $x \in \mathbb{N}$ y $y > 1$,

$$S(x) < +(x, y).$$

Igualmente, la multiplicación que al ser definida bajo recursión de la operación suma, para todo $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ existirán valores $y \in \mathbb{N}$ para los cuales $x \cdot y$ crecerá más rápido que $x + y$.

Ahora mostraremos la primera jerarquía de funciones recursivas primitivas que se usa para clasificar, de acuerdo a su crecimiento, a todas las funciones primitivas recursivas.

Definición 2.1.14. *Decimos que una familia $\mathcal{E}$ de funciones es cerrada bajo* ***recursión acotada con respecto a*** *$\mathcal{E}$, si para toda función f definida bajo recursión basada en g y h, es decir,*

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\
f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y))
\end{aligned}
$$

con $g, h \in \mathcal{E}$ y tal que exista una función $j \in \mathcal{E}$ que cumple que para todo $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathbb{N}$,

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) \leq j(x_1, \ldots, x_n, y),$$

entonces $f \in \mathcal{E}$.

Definición 2.1.15. ***La jerarquía de Grzegorczyk*** *es la familia de funciones*

$$\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \ldots$$

Donde $\mathcal{E}_0$ es la familia más pequeña de funciones que contiene las funciones básicas la constante cero, la función suma, cada función proyección P_n^i y que además es cerrada bajo composición y recursión acotada con respecto a $\mathcal{E}_0$. En otras palabras, $\mathcal{E}_0$ es la clausura del conjunto $B_0 = \{Z, S, P_m^i, E_0\}$ bajo composición y recursión acotada. En general $\mathcal{E}_n$ es la clausura del conjunto $B_n = \{Z, S, P_m^i, E_k : k \leq n\}$ bajo composición y recursión acotada.
Una vez que se ha definido $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{n+1}$ se define como la familia más pequeña de funciones que contiene a E_n (ver la Definción 2.1.13), a las funciones de $\mathcal{E}_n$ y es cerrada bajo composición y recursión acotada.

La manera en que se define $\mathcal{E}_n$, como una clasura de una familia de funciones, asegura que $\mathcal{E}_n$ es estable con respecto a operaciones de su mismo tipo. Por ejemplo, $\mathcal{E}_2$ contiene la función multiplicación, así que si multiplicamos dos funciones de $\mathcal{E}_2$ obtendremos una función de $\mathcal{E}_2$. Por otra parte, si iteramos una función de $\mathcal{E}_n$, obtendremos una función de $\mathcal{E}_{n+1}$. Además, para todo $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{E}_n \setminus \mathcal{E}_{n-1}$, donde E_n pertenece a la familia de funciones mencionada en la Definición 2.1.13.
La jerarquía de Grzegorczyk permite clasificar a las funciones recursivas primitivas según su crecimiento como lo explicaremos a continuación.

Definición 2.1.16. *Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, decimos que f es* ***eventualmente dominada*** *por g si existe un k_0 tal que $f(k) \leq g(k)$ para todo $k \geq k_0$.*

Teorema 2.1.17. *Katz y Reimann Matthew,* An introduction to ramsey theory: Fast functions, Infinity, and Metamathematics

(1) Toda función primitiva recursiva pertenece a $\mathcal{E}_n$ para algún n.

(2) Si f es una función en $\mathcal{E}_n$ de una sola variable, entonces f es eventualmente dominada por E_n.

Lema 2.1.18. *Si $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ son recursivas primitivas entonces*

$$\sum_{i=0}^{g(x)} f(x,i) = f(x,0) + f(x,1) + \cdots + f(x,g(x))$$

es una función recursiva primitiva.

Demostración. Defina

$$\begin{aligned} h(x,0) &= f(x,0), \\ h(x,k+1) &= h(x,k) + f(x,g(k)). \end{aligned}$$

En base a esta definición $h(x,g(x)) = \sum_{i=0}^{g(x)} f(x,i)$, lo cual muestra h como la composición de dos funciones recursivas primitivas, haciéndola a su vez una función recursiva primitiva. □

Lo que nos enseña el anterior lema es que toda suma acotada de funciones recursivas primitivas es recursiva primitiva. El siguiente lema nos mostrará que definir una función por partes a partir de funciones recursivas primitivas es a su vez, una función recursiva primitiva.

Lema 2.1.19. *Sean $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_k$ relaciones recursivas primitivas en $\mathbb{N}^l$ que conforman una partición de $\mathbb{N}^l$ y $g_i : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$, $i \leq k$ funciones recursivas primitivas. Entonces la función $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ definida como:*

$$f(n_1,n_2,\ldots,n_l) = \begin{cases} g_1(n_1,n_2,\ldots,n_l) & \textit{si} \quad (n_1,n_2,\ldots,n_l) \in \mathcal{R}_1, \\ g_2(n_1,n_2,\ldots,n_l) & \textit{si} \quad (n_1,n_2,\ldots,n_l) \in \mathcal{R}_2, \\ \vdots & \vdots \\ g_k(n_1,n_2,\ldots,n_l) & \textit{si} \quad (n_1,n_2,\ldots,n_l) \in \mathcal{R}_k, \end{cases}$$

es primitiva recursiva

Demostración. Podemos reescribir $f(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ como

$$\begin{aligned} f(n_1, n_2, \ldots, n_l) \quad = \quad & \quad g_1(n_1, n_2, \ldots, n_l) \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}_1}(n_1, n_2, \ldots, n_l) \\ & + \quad g_2(n_1, n_2, \ldots, n_l) \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}_2}(n_1, n_2, \ldots, n_l) \\ & + \quad \ldots \\ & + \quad g_k(n_1, n_2, \ldots, n_l) \times \mathcal{C}_{\mathcal{R}_k}(n_1, n_2, \ldots, n_l). \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_r}$ es una función característica (ver la Definición 2.1.9). Como $(n_1, n_2, \ldots, n_l) \in \mathbb{N}^l$ y las relaciones forman una partición de $\mathbb{N}^l$, existe un único r tal que $(n_1, n_2, \ldots, n_l) \in \mathcal{R}_r$ por lo que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_r}(n_1, n_2, \ldots, n_l) = 1$ y $\mathcal{C}_{\mathcal{R}_s}(n_1, n_2, \ldots, n_l) = 0$ para $s \neq r$, obteniendo así el valor de $g_r(n_1, n_2, \ldots, n_l)$ como se esperaba de su definición por partes. Como f es la suma acotada de funciones primitivas recursivas entonces a su vez es una función primitiva recursiva.

$\square$

Algunas relaciones importantes son las relaciones de orden, pues para algunos casos, estas relaciones son recursivas primitivas.

Lema 2.1.20. *Las relaciones de orden en* $\mathbb{N}^2$*:*

- $n < m$,
- $n \leq m$,
- $n \geq m$,
- $n > m$,

son recursivas primitivas

Demostración. Por definición, $n < m$ si y solo si $m - n > 0$, así que la función característica de $<$ puede ser expresada como

$$\mathcal{C}_{<}(n, m) = sign(m - n).$$

La función signo $sign$ es recursiva primitiva (ver Ejemplo 2.1.7). Como la función característica está definida por medio de la composición de dos funciones recursivas primitivas (Ver Ejemplos 2.1.5 y 2.1.7) entonces es recursiva primitiva y por lo tanto el orden es primitivo recursivo. Un argumento similar sucede para las otras relaciones de orden. $\square$

2.2. La función de Goodstein es recursiva

Recordemos que todo número n puede ser reescrito en su representación base b como

$$n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} \cdots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Usaremos la siguiente notación para esa representación:

$$[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]_b.$$

A continuación mostraremos que la representación de un número n en base b es recursiva primitiva.

Lema 2.2.1. *La función $base : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definida por*

$$base(b,n,i) = \begin{cases} 1 & \textit{si } b = 1 \wedge i < n, \\ a_i & \textit{si } b > 1 \wedge i \leq k, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

es recursiva primitiva, donde a_i es el i-ésimo término de $[a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]_b$ (la representación en base b de n).

Demostración. Considere la función:

$$f(b,n,i) = \begin{cases} n & \text{si } i = 0 \\ coc(f(b,n,i-1),b) & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Observemos que f se obtiene por recursión primitiva, está definida por partes mediante relaciones recursivas primitivas (ver el Lema 2.1.19) y la función cociente coc es recursiva primitiva (ver el Lema 2.1.8), entonces f es recursiva primitiva.

Para empezar probaremos que $f(b,n,i)$ representa el número que se obtiene al eliminar los primeros i dígitos de la representación base b de n, es decir,

$$f(b,n,i) = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_{i+1}, a_i]_b.$$

Procederemos mediante inducción en i.
Para la base de la inducción, observe que $f(b,n,0) = n = [a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0]_b$.

La hipótesis de inducción es

$$f(b,n,i) = [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{i+1}, a_i]_b = \sum_{j=0}^{k-i} a_{j+i} b^j.$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} f(b,n,i+1) & = & coc(f(b,n,i),b) \\ & = & coc\left([a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{i+1}, a_i]_b, b\right) \\ & = & coc\left(\sum_{j=0}^{k-i} a_{j+i} b^j, b\right) \\ & = & coc\left(a_i + \sum_{j=0}^{k-i-1} a_{j+i+1} b^{j+1}, b\right) \\ & = & coc\left(a_i + b\sum_{j=0}^{k-i-1} a_{j+i+1} b^{j}, b\right) \\ & = & \sum_{j=0}^{k-i-1} a_{j+i+1} b^j \\ & = & [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{i+2}, a_{i+1}]_b. \end{array}$$

Y con esto hemos demostrado lo anunciado.

Considere la función

$$g(b,n,i) = res(f(b,n,i),b).$$

Entonces g es una función recursiva primitiva al ser composición de funciones recursivas primitivas (ver el Lema 2.1.8). Además, para cada i tenemos que

$$\begin{array}{rcl} g(b,n,i) & = & res(f(b,n,i),b) \\ & = & res([a_k, a_{k-1}, \ldots, a_{i+1}, a_i]_b, b) \\ & = & res\left(\sum_{j=0}^{k-i} a_{j+i} b^j, b\right) \\ & = & res\left(a_i + b\sum_{j=0}^{k-i-1} a_{j+i+1} b^{j}, b\right) \\ & = & a_i. \end{array}$$

La función

$$base(b,n,i) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 1 \wedge i < n \\ g(b,n,i) = a_i & \text{si } b > 1 \wedge i \leq k \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

es una función definida por partes a partir de funciones recursivas primitivas por lo que es una función recursiva primitiva. $\square$

Si la representación en base b de un número n es $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]_b$, entonces la cantidad de dígitos a_i es $k+1$. Obtener este valor se puede hacer a través de una función recursiva primitiva como se muestra a continuación.

Lema 2.2.2. *Sea $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]_b$ la representación en base b de un número n, la función $longbase : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definida por*

$$longbase(b,n) \begin{cases} k+1 & \textit{si } b > 1 \wedge n > 0 \\ n & \textit{si } b = 1 \\ 0 & \textit{si } b = 0 \vee n = 0 \end{cases}$$

es recursiva primitiva

Demostración. Para los casos $b = 1$, $b = 0$ o $n = 0$, la función $longbase(b, n)$ está definida para valores constantes que son recursivos primitivos. Falta analizar el caso $b > 1$ y $n > 0$. Debemos encontrar una expresión para $k + 1$ a partir de funciones recursivas primitivas. Observe que si $b > 1$ y $n > 0$, entonces

$$\begin{array}{lcl} longbase(b, [a_0]_b) & = & 1 \\ longbase(b, [a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]_b) & = & longbase(b, [a_k, \ldots, a_1]_b) + 1. \end{array}$$

Vemos que la función $longbase$ está definida recursivamente a partir de funciones recursivas primitivas por lo que es recursiva primitiva. $\square$

Algo importante a destacar de la representación en base b de un número n, $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]_b$, es que $k < n$, pues de tenerse lo contrario $(k \geq n)$ entonces $n = a_k b^k + \cdots + a_n b^n + \ldots a_1 b + a_0$, pero $b^n > n$ para todo $b > 1$, contradiciendo la representación en base b.
Retomando la Definición 1.2.1 y las funciones recursivas primitivas, podemos escribir las representaciones de profundidad m en base b a partir de la siguiente familia de funciones.

Definición 2.2.3. *Para un número $n > 0$, su representación de profundidad 1 en base $b > 0$ está determinado por la función:*

$$\sigma_1(b,n) = \sum_{i_1=0}^{longbase(b,n)-1} base(b,n,i_1) b^{i_1}.$$

La representación de profundidad 2 en base b es

$$\sigma_2(b,n) = \sum_{i_1=0}^{longbase(b,n)-1} base(b,n,i_1) b^{\sum_{i_2=0}^{long(b,i_1)-1} base(b,i_1,i_2) b^{i_2}}.$$

De manera iterativa podemos definir las representaciones en profundidad m en base b. Cada una de estas funciones σ_m es recursiva primitiva al ser la suma acotada de funciones recursivas primitivas (ver el Lema 2.1.18).

Previamente se había mencionado que a medida que aumenta la profundidad de la representación para un número n en base b, esta se estabilizaba, dicha representación se llamaba representación completa de n en base b. Esto se puede justificar al observar lo siguiente: sea $[a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0]_b$ la representación de $n > 0$ en base $b > 0$, si $k > b$, entonces k no está escrita en su representación en base b, por lo que hace falta iterar una profundidad más; nuevamente, si el mayor exponente de la representación de k en base b es mayor que b ($longbase(b,k) - 1 > b$), hace falta iterar otra vez. La profundidad se estabilizará cuando el mayor exponente de la representación del exponente anterior en base b sea menor que b. Asimismo, sabemos que todo número siempre será mayor que el mayor exponente de su representación en base b por lo que

$$n > k > longbase(b,k) - 1 > longbase(longbase(b,k) - 1) - 1 > \cdots \geq 0.$$

Acabamos de construir una sucesión $\{s_i\} = \{n, k, \ldots, 0\}$ decreciente finita de números naturales por lo que existe algún $s_r < b$ y por lo tanto $\sigma_r(b,n)$ es la representación completa de n en base b. Para todo $m \geq r$, σ_m es la representación completa de n en base b, en particular, del modo en que se definió la sucesión $\{s_i\}$ es fácil ver que $n + 1 \geq r$ por lo que $\sigma_{n+1}(b,n)$ determina la representación completa de n en base b.

Definición 2.2.4. *Sean $n > 0$ y $b > 0$.*

$$\rho_1(b,n) = \sum_{i_1=0}^{longbase(b,n)-1} base(b,n,i_1)(b+1)^{i_1}$$

es la función que reemplaza en n cada b por $b+1$ de la representación de profundidad 1 en base b. Mientras que

$$\rho_2(b,n) = \sum_{i_1=0}^{longbase(b,n)-1} base(b,n,i_1)(b+1)^{\sum_{i_2=0}^{long(b,i_1)-1} base(b,i_1,i_2)(b+1)^{i_2}}$$

es la función que reemplaza en n cada b por $b+1$ de la representación de profundidad 2 en base b. Al igual que con σ_m, de manera iterativa podemos definir ρ_m. Cada una de estas funciones es recursiva primitiva al ser la suma acotada de funciones recursivas primitivas (ver el Lema 2.1.18).

Proposición 2.2.5. *La función cambio de base mostrada en la Definición 1.2.3 es recursiva primitiva y*

$$R_b(n) = \rho_{n+1}(b, n).$$

Demostración. $\sigma_{n+1}(b, n)$ es la representación completa de n en base b, luego $\rho_{n+1}(b, n)$ es la función que reemplaza cada b por $b+1$ de la representación completa de n en base b y esta es precisamente la definición de $R_b(n)$. $\square$

Teorema 2.2.6. *La función de Goodstein es recursiva*

Demostración. La sucesión de Goodstein $(m)_k$ puede verse por medio de una función $f(m, k)$ definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
(m)_1 &= f(m, 0) &&= m \\
(m)_{k+2} &= f(m, k+1) &&= R_{k+2}(f(m, k)) - 1.
\end{aligned}$$

Por lo anterior, la sucesión de Goodstein se puede ver mediante la composición y recursión de las funciones recursivas primitivas de cambio de base (Proposición 2.2.5), es decir, la sucesión de Goodstein es una función recursiva primitiva. Sin embargo, al aplicar el operador de minimización μ para definir la función de Goodstein $\mathcal{G}$, se obtiene una función recursiva.

$\square$

3. Jerarquías de funciones de crecimiento rápido

Las jerarquías de crecimiento rápido son familias de funciones recursivas $\{f_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ donde $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. El primer acercamiento que tuvimos con estas jerarquías fue con la jerarquía de Grzegorczyk (ver la Definición 2.1.15). El inconveniente de esta jerarquía es que únicamente está definida para los números naturales. Como veremos al final de este capítulo, la función de Goodstein sobrepasa el crecimiento de cualquier función de la jerarquía de Grzegorczyk por lo que hace falta extender la noción de jerarquía a los números ordinales.

A continuación presentaremos las jerarquías de Löb-Wainer $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ y Hardy $\{H_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$, estas son familias de funciones recursivas cuyas propiedades serán esenciales a la hora de mostrar que la función de Goodstein es una función de crecimiento rápido.

3.1. La función d

Con el objetivo de definir las jerarquías mencionadas nos apoyaremos de una función auxiliar

$$d : OL(\varepsilon_0) \times \mathbb{N} \to \varepsilon_0$$

donde $OL(\varepsilon_0)$ corresponde a el conjunto de ordinales límites $\alpha < \varepsilon_0$.

Definición 3.1.1. *Sea X un conjunto ordenado. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **cofinal** en X si para cada $x \in X$ existe un $a \in A$ mayor o igual a x.*

Mediante inducción transfinita, definimos para cada ordinal límite $\alpha < \varepsilon_0$ una sucesión $d(\alpha, n)$ cofinal en α de la siguiente manera: por la forma normal de Cantor, todo ordinal $0 < \alpha < \varepsilon_0$ puede ser escrito de una única forma como

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot k_n$$

donde $\alpha > \beta_1 > \ldots > \beta_n$ y $0 < k_1, \ldots, k_n < \omega$. De este modo podemos reescribir

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot (k_n - 1) + \omega^{\beta_n}.$$

De lo anterior se obtiene que todo ordinal $0 < \alpha < \varepsilon_0$ puede ser escrito de un único modo de la forma

$$\alpha = \gamma + \omega^\beta.$$

Donde $\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot k_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot (k_n - 1)$ y $\beta = \beta_n$.

Definición 3.1.2. *Sea $\alpha = \gamma + \omega^{\beta}$ un ordinal límite Entonces*

$$d(\alpha, n) = \gamma + \begin{cases} \omega^{\delta} \cdot n & \textit{si } \beta = \delta + 1 \\ \omega^{d(\beta, n)} & \textit{si } \beta \textit{ es límite.} \end{cases}$$

La prueba que se brinda a continuación sobre la cofinalidad de la sucesión $(d(\alpha, n))_n$ es un resultado que no se encuentra en el artículo estudiado (Caicedo, "Goodstein's function").

Proposición 3.1.3. *Para todo ordinal límite $\alpha < \varepsilon_0$, la sucesión $(d(\alpha, n))_n$ es cofinal en α.*

Demostración. Para demostrar que $(d(\alpha, n))_n$ es cofinal en α basta utilizar el Lema 1.1.11. Sea $\alpha = \gamma_0 + \omega^{\xi_0}$ y supongamos que $\xi_0 = \delta + 1$. Entonces $d(\alpha, n) = \gamma_0 + \omega^{\delta} n$, luego

$$\begin{aligned} \sup_{n<\omega} d(\alpha, n) &= \sup_{n<\omega} \gamma_0 + \omega^{\delta} n \\ &= \gamma_0 + \omega^{\delta} \omega \\ &= \gamma_0 + \omega^{\delta+1} \\ &= \gamma_0 + \omega^{\xi_0}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si ξ_0 es un ordinal límite, entonces $\xi_0 = \gamma_1 + \omega^{\xi_1}$. Luego

$$d(\alpha, n) = \gamma_0 + \omega^{d(\xi_0, n)}.$$

Si nuevamente el ordinal ξ_1 es un ordinal límite, entonces $\xi_1 = \gamma_2 + \omega^{\xi_2}$ y $d(\xi_0, n) = \gamma_1 + \omega^{d(\xi_1, n)}$ por lo que

$$d(\alpha, n) = \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{d(\xi_1, n)}}.$$

Podemos continuar este argumento de forma iterativa. Del mismo modo que definimos los ordinales ξ_0, γ_0 y ξ_1 y γ_1, podemos definir recursivamente los ordinales límites $\xi_2 = \gamma_3 + \omega^{\xi_3}$, $\xi_3 = \gamma_4 + \omega^{\xi_4}, \ldots, \xi_n = \gamma_{n+1} + \omega^{\xi_{n+1}}$. De todo esto se desprende que

$$\begin{aligned} d(\alpha, n) &= \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{d(\xi_1, n)}} \\ &= \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\gamma_2 + \omega^{d(\xi_2, n)}}} \\ &= \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\gamma_2 + \omega^{\gamma_3 + \omega^{d(\xi_3, n)}}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como α, γ_n y ξ_n son ordinales menores a ε_0, el cual es el primer ordinal que satisface

$\beta = \omega^\beta$ entonces

$$\alpha > \xi_0 > \xi_1 > \ldots > \xi_n > \ldots$$

es una sucesión decreciente de ordinales por lo que tarde o temprano se estabilizará en un ordinal sucesor $\xi_k = \delta + 1$; es decir,

$$d(\alpha, n) = \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\gamma_2 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_k + \omega^\delta n}}}}}}}$$

Por el Lema 1.1.11

$$\sup_{n<\omega} d(\alpha, n) = \gamma_0 + \omega^{\xi_0}.$$

$\square$

Ejemplo 3.1.4. *Los ordinales $\omega, \omega 2$ y ω^2 se pueden reescribir de la forma $\gamma + \omega^\beta$ como $0 + \omega, \omega + \omega$ y $0 + \omega^2$ respectivamente. De este modo.*

$$\begin{array}{rcccl} d(\omega, n) & = & 0 + \omega^0 \cdot n & = & n \\ d(\omega + \omega, n) & = & \omega + \omega^0 \cdot n & = & \omega + n \\ d(\omega^2, n) & = & 0 + \omega \cdot n & = & \omega \cdot n \end{array}$$

Ejemplo 3.1.5. *Para todo número ordinal ω^α, su forma $\gamma + \omega^\beta$ es $\gamma = 0$ y $\beta = \alpha$ por lo que*

$$d(\omega^\alpha, n) = \begin{cases} \omega^\delta \cdot n & \textit{si } \alpha = \delta + 1 \\ \omega^{d(\alpha,n)} & \textit{si } \alpha \textit{ es límite.} \end{cases}$$

Lema 3.1.6. *Si $\alpha \geq \beta$, entonces $d(\alpha + \beta, n) = \alpha + d(\beta, n)$.*

Demostración. Ambos ordinales pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \gamma + \omega^b. \\ \beta & = & \gamma' + \omega^c. \\ \alpha + \beta & = & \gamma + \omega^b + \gamma' + \omega^c. \end{array}$$

Por lo que, asumiendo que c es límite y haciendo uso de la propiedad asociativa de la suma para ordinales

$$\begin{array}{rcl} d(\alpha + \beta, n) & = & \big((\gamma + \omega^b) + \gamma'\big) + \omega^{d(c,n)} \\ & = & \big(\gamma + \omega^b\big) + \big(\gamma' + \omega^{d(c,n)}\big) \\ & = & \alpha + d(\beta, n). \end{array}$$

Si $c = \delta + 1$ es sucesor

$$\begin{aligned} d(\alpha + \beta, n) &= \big((\gamma + \omega^b) + \gamma'\big) + \omega^\delta n \\ &= \alpha + d(\beta, n). \end{aligned}$$

$\square$

3.2. Jerarquía de Löb-Wainer

La jerarquía Löb-Wainer se define de la siguiente manera:

Definición 3.2.1.

1) $\Phi_0(n) = n + 1$*,*

2) $\Phi_{\alpha+1}(n) = \Phi_\alpha^n(n)$ *para* $\alpha < \varepsilon_0$*,*

3) $\Phi_\alpha(n) = \Phi_{d(\alpha,n)}(n)$ *para todo ordinal límite* $\alpha < \varepsilon_0$*.*

Ejemplo 3.2.2.

- $\Phi_1(n) = \Phi_0^n(n) = \underbrace{\Phi_0(\Phi_0(\dots(\Phi_0(n))\dots))}_{\textit{n-veces}} = (((n+1)+1)\dots)+1 = 2n,$
- $\Phi_2(n) = n2^n,$
- $\Phi_3(n) \gg {}^n2 = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{\textit{n-veces}}.$

  La notación ${}^n2$ *corresponde a la operación tetración: la exponenciación iterada* $n-$*veces.*
- $\Phi_\omega(0) = \Phi_{d(\omega,0)}(0) = \Phi_0(0) = 1,$
- $\Phi_\omega(1) = \Phi_1(1) = 2,$
- $\Phi_\omega(2) = \Phi_2(2) = 8,$
- $\Phi_\omega(3) = \Phi_3(3) \gg 2^{2^2} = 16.$

3.2.1. Funciones demostrablemente totales en PA

Definición 3.2.3. *Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva es **demostrablemente total en PA** si existe una prueba en PA de que su "proceso" se detiene en un número finito de pasos dando así el valor de $f(n)$ para todo n, es decir, en PA se puede demostrar $(\forall n)(\exists m)(f(n) = m)$.*

A continuación se enuncian algunas propiedades de la jerarquía de Löb-Wainer y su relación con PA[7]. Su respectiva demostración se puede encontrar en Wainer, "A Classification of the Ordinal Recursive Functions".

Proposición 3.2.4. *Wainer Wainer, "A Classification of the Ordinal Recursive Functions"*

(1) Cada Φ_α es estrictamente creciente.

(2) Si $\beta < \alpha < \varepsilon_0$ entonces Φ_β es eventualmente dominada por Φ_α (ver Definición 2.1.16).

(3) Cada Φ_α es recursiva y demostrablemente total en la aritmética de Peano.

Teorema 3.2.5. *Wainer Wainer, "A Classification of the Ordinal Recursive Functions"*
Toda función recursiva f demostrablemente total en la aritmética de Peano es eventualmente dominada por Φ_α, para algún $\alpha < \varepsilon_0$.

El teorema de Goodstein es un ejemplo de un enunciado que no es demostrable en PA, pues a pesar de que $\mathcal{G}(n)$ está definida para todo n, veremos al final de este capítulo, que el crecimiento de $\mathcal{G}$ supera a cualquier Φ_α, es decir, no existe ningún Φ_α que domine eventualmente a $\mathcal{G}$.

3.3. Jerarquía de Hardy

Otra jerarquía que se utiliza en el trabajo de Caicedo, "Goodstein's function" es la de Hardy, que definiremos a continuación.

Definición 3.3.1.

(1) $H_0(n) = n$.

[7] S. Wainer. "A Classification of the Ordinal Recursive Functions". En: *Archive for Mathematical Logic* 13.3-4 (1970), págs. 136-153. DOI: 10.1007/bf01973619.

(2) $H_{\alpha+1}(n) = H_\alpha(n+1)$ *para todo* $\alpha < \varepsilon_0$.

(3) $H_\alpha(n) = H_{d(\alpha,n+1)}(n)$ *si* $\alpha < \varepsilon_0$ *es un ordinal límite.*

Otra forma de probar el Teorema 1.4.5 es presentando una fórmula "explícita"para $\mathcal{G}(n)$ como lo hace Caicedo, "Goodstein's function" a través de las funciones enunciadas en 3.2.1 y 3.3.1 que pertenecen a jerarquías de crecimiento rápido.
El siguiente resultado fue adaptado de Fairtlough y Wainer[8].

Lema 3.3.2. *Si* $\alpha \geq \beta$

$$H_{\alpha+\beta} = H_\alpha \circ H_\beta.$$

Demostración. Procedemos mediante inducción en β. El caso $\beta = 0$ es evidente porque H_0 es la función identidad y $H_{\alpha+0} = H_\alpha = H_\alpha \circ H_0$. Para el caso sucesor $\beta + 1$ utilizando la hipótesis de inducción además de la Definición 3.3.1 tenemos que

$$\begin{aligned} H_{\alpha+(\beta+1)}(n) &= H_{(\alpha+\beta)+1}(n) \\ &= H_{\alpha+\beta}(n+1) \\ &= H_\alpha(H_\beta(n+1)) \\ &= H_\alpha(H_{\beta+1}(n)). \end{aligned}$$

Para el caso límite β, haciendo uso del Lema 3.1.6 tenemos que

$$\begin{aligned} H_{\alpha+\beta}(n) &= H_{d(\alpha+\beta)}(n) \\ &= H_{\alpha+d(\beta,n)}(n) \\ &= H_\alpha(H_{d(\beta,n)}(n)) \\ &= H_\alpha(H_\beta(n)). \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.3. *Caicedo, "Goodstein's function" Sea* $\alpha < \varepsilon_0$*. Entonces*

$$H_{\omega^\alpha}(n) = \Phi_\alpha(n+1) - 1.$$

Demostración. La demostración se realizará mediante inducción en α. Para el caso inicial

---

8 Fairtlough, M. y Stanley S. "Chapter III - Hierarchies of Provably Recursive Functions". En: *Handbook of Proof Theory*. Ed. por Samuel R. Buss. Vol. 137. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1998, págs. 149-207. DOI: `https://doi.org/10.1016/S0049-237X(98)80018-9`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X98800189`.

$\alpha = 0$ tenemos la siguiente igualdad:

$$H_{\omega^0}(n) = H_1(n) = H_0(n+1) = n+1 = \Phi_0(n+1) - 1.$$

Para el caso sucesor $\alpha + 1$, utilizando las Definiciones 3.3.1 y 3.2.1, además del Lema 3.3.2 obtenemos:

$$\begin{aligned} H_{\omega^{\alpha+1}}(n) &= H_{d(\omega^{\alpha+1},n)}(n) \\ &= H_{\omega^\alpha \cdot n}(n) \\ &= H^n_{\omega^\alpha}(n) \\ &= \Phi^n_\alpha(n+1) - 1 \\ &= \Phi_{\alpha+1}(n+1) - 1 \end{aligned}$$

Para el caso límite α

$$\begin{aligned} H_{\omega^\alpha}(n) &= H_{d(\omega^\alpha,n)}(n) \\ &= H_{\omega^{d(\alpha,n)}}(n) \\ &= \Phi_{d(\alpha,n)}(n+1) - 1 \\ &= \Phi_\alpha(n+1) - 1 \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado compara las jerarquía de Hardy con las de Löb-Wainer.

Teorema 3.3.4. *Caicedo, "Goodstein's function" Para* $0 < \alpha < \varepsilon_0$*, sea*

$$\alpha = \omega^{\beta_0} n_0 + \cdots + \omega^{\beta_k} n_k$$

la forma normal de Cantor de α*, donde* $\alpha > \beta_0 > \ldots > \beta_k$ *y* $n_i > 0$ *para todo* i*. Entonces*

$$H_\alpha(n) = \Phi^{n_0}_{\beta_0}(\ldots(\Phi^{n_k}_{\beta_k}(n+1))) - 1.$$

Demostración. Sea α escrito en su forma normal, $\alpha = \omega^\beta_0 n_0 + \cdots + \omega^\beta_k n_k$, donde $\alpha > \beta_0 > \ldots > \beta_k$ y $n_i > 0$ para todo i. Entonces por el Lema 3.3.2

$$H_\alpha(n) = H_{\omega^{\beta_0} \cdot n_0}(\ldots(H_{\omega^{\beta_k} \cdot n_k}(n+1))).$$

Utilizando el Lema 3.3.3

$$H_\alpha(n) = \Phi^{n_0}_{\beta_0}(\ldots(\Phi^{n_k}_{\beta_k}(n+1))) - 1.$$

□

3.4. La función B_a

Para las siguientes demostraciones haremos uso de una función auxiliar cuyo propósito es simplificar las expresiones para la función de Goodstein.

Definición 3.4.1. *La función $B_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está definida de la siguiente manera: $B_a(n)$ es la primer base para la cual la sucesión de Goodstein $(n, a)_k$ que inicia siendo expresada en base completa a alcanza cero. Mas precisamente, si $\mathcal{G}(n) = k$, entonces $(n)_k = 0$. Luego la primer base para que la sucesión de Goodstein se hace cero es $k+1$, es decir,*

$$B_2(n) = \mathcal{G}(n) + 1.$$

Si $\mathcal{G}_a(n) = k$, entonces $(n, a)_k = 0$ (ver Definición 1.4.10). Como $(n, a)_c$ está escrito en base $c + a - 1$, tenemos que

$$B_a(n) = \mathcal{G}_a(n) + (a - 1).$$

Ejemplo 3.4.2. *$B_a(0) = a$. Por definición, la primer base para la cual la sucesión de Goodstein iniciando en 0 alcanza cero es precisamente la base inicial a.*

Ejemplo 3.4.3. *En el Ejemplo 1.4.4 vimos que $\mathcal{G}(3) = 6$, por la definición anterior concluimos que $B_2(3) = 7$, es decir, la primer base para la cual la sucesión de Goodstein alcanza cero iniciando con 3 es 7.*

Es conveniente resaltar que $R_2(m) - 1 = (m)_2$ es el segundo término de la sucesión de Goodstein iniciando en m. Por consiguiente, evaluar $B_2(m)$ es equivalente a evaluar $B_3((m)_2)$. Esta observación la podemos expresar de la siguiente manera.

$$B_2(m) = B_3(R_2(m) - 1) = B_3((m)_2).$$

El siguiente lema, a pesar de que no se encuentra en el artículo Caicedo, “Goodstein’s function” nos muestra un resultado importante que generaliza el anterior ejemplo para cualquier base a.

Lema 3.4.4. *Considere la sucesión de Goodstein $(m, a)_k$ iniciando en m con su representación completa en base a. Si $a + c \leq \mathcal{G}_a(m)$, entonces*

$$B_a(m) = B_{a+c}((m, a)_{c+1}).$$

Demostración. Para empezar, por definición $B_a(m) = \mathcal{G}_a(m) + (a - 1)$ es la primer base para la cual la sucesión de Goodstein iniciando en m con base a se hace cero, de ahí

la necesidad de restringir la base a $a+c \leq \mathcal{G}_a(m)$, pues de otro modo se excedería la primer base en la cual la sucesión alcanza cero.
La demostración la haremos por inducción en c. En primer lugar, para $c = 1$ recordemos que por la Definición 1.4.9 $(m,a)_1 = m$ y $(m,a)_2 = R_a(m) - 1$ por lo que

$$B_a(m) = B_{a+1}((m,a)_2). \tag{3.1}$$

El a utilizado en la ecuación (3.1) es arbitrario, por lo que podemos asumir que se cumple para todo $a \in \mathbb{N}$. Asuma el resultado para todo c tal que $a + c < \mathcal{G}_a(m)$, procederemos para $c+1$.
Nuestra hipótesis de inducción nos dice que

$$B_a(m) = B_{a+c}((m,a)_{c+1}))$$

para todo a tal que $a + c < \mathcal{G}_a(m)$. Por otra parte, al utilizar la ecuación (3.1) con $a + c$ en lugar de a obtenemos la igualdad

$$B_{a+c}((m,a)_{c+1}) = B_{a+c+1}((((m,a)_{c+1}, a+c)_2).$$

Por otra parte, $((m,a)_{c+1}, a+c)_2 = R_{a+c}((m,a)_{c+1}) - 1 = (m,a)_{c+2}$ por lo que

$$B_a(m) = B_{a+c}((m,a)_{c+1}) = B_{a+c+1}((m,a)_{c+2}).$$

Concluyendo de esta manera la prueba. □

Como consecuencia de las Definiciones 1.2.3 y 1.4.10 obtenemos los siguientes lemas importantes para los próximos teoremas que no se encuentran en Caicedo, “Goodstein's function”.

Lema 3.4.5. *Sea m un número escrito en base completa a.*

$$m = a^{b_0}n_0 + \ldots a^{b_k}n_k.$$

Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
R_a(m) &= \sum_{i=0}^{k} R_a(a^{b_i} n_i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} R_a(a^{b_i}) n_i \\
&= \sum_{i=0}^{k} (a+1)^{R_a(b_i)} n_i.
\end{aligned}$$

Demostración. En primer lugar, debido a su definición, la función $R_a(m)$ es lineal puesto que lo único que se hace es reemplazar en la representación completa base a todos los a por $a+1$, de este modo

$$R_a(a^b + a^c) = R_a(a^b) + R_a(a^c).$$

En segundo lugar, si $n < a$, entonces

$$R_a(a^b \cdot n) = R_a(a^b) \cdot n.$$

Y por último, siguiendo la definición de R_a, entonces $R_a(a^{b_0}) = (a+1)^{R_a(b_0)}$. $\square$

Lema 3.4.6. *Sea m un número escrito en base completa a,*

$$m = a^{b_0} n_0 + \cdots + a^{b_k} n_k,$$

y $M = a^b n > m$, con $0 < n < a$. Considere la sucesión de Goodstein $(m, a)_k$ que inicia en m con base completa a. Si $\mathcal{G}_a(m) = c$ entonces

$$((M+m), a)_c = R_a^{a+c-1}(M).$$

Donde $R_a^{a+c-1}(M)$ es la función que reemplaza cada a por $a+c-1$ en la representación completa en base a de M.

Demostración. Como $M = a^b n > m$ entonces $b > b_0$ y podemos utilizar el Lema 3.4.5, observe que la sucesión de Goodstein para el número $M+m$ con base a es:

$$\begin{aligned}
(M+m,a)_1 &= M+m. \\
\\
(M+m,a)_2 &= R_a(M+m)-1 \\
&= R_a(M)+(R_a(m)-1) \\
&= R_a(M)+(m,a)_2. \\
\\
(M+m,a)_3 &= R_{a+1}(R_a(M)+(m,a)_2)-1 \\
&= R_a^{a+2}(M)+(R_{a+1}((m,a)_2)-1) \\
&= R_a^{a+2}(M)+(m,a)_3. \\
&\ \vdots \\
(M+m,a)_c &= R_a^{a+c-1}(M)+(m,a)_c \\
&= R_a^{a+c-1}(M).
\end{aligned}$$

□

R_a es una función que reemplaza cada a por $a+1$ en la representación completa base a. Definiremos un polinomio $p(x)$ que se obtiene al reemplazar un símbolo específico por x en una determinada expresión numérica, tal como sucede en la siguiente definición.

Definición 3.4.7. *Para $\alpha < \varepsilon_0$, definimos los* ***polinomios exponenciales*** *$p_\alpha(x)$ mediante recursión: Suponga que $\alpha > 0$ y*

$$\alpha = \omega^{\beta_0}n_0 + \cdots + \omega^{b_k}n_k$$

es la forma normal de α (en particular, $\alpha > \beta_0 > \ldots > \beta_k$ y $n_i \geq 0$ para todo i). Sea

$$p_\alpha(x) = x^{p_{\beta_0}(x)}n_0 + \cdots + x^{p_{\beta_k}(x)}n_k$$

y $p_n(x) = n$ si $n < \omega$.

En otras palabras, el polinomio $p_\alpha(x)$ es aquel que se obtiene al reemplazar en α cada ω por x de su forma normal de Cantor. Por ejemplo, si $\alpha = \omega^{\omega^\omega+\omega 2} + \omega^\omega + \omega^4 + 5$, entonces

$$p_\alpha(x) = x^{x^x+2x} + x^x + x^4 + 5.$$

Definición 3.4.8. *Sea $\alpha = \omega^{\beta_0}n_0 + \cdots + \omega^{b_k}n_k$ la forma normal de α, así $\alpha > \beta_0 > \ldots > \beta_k$ y $n_i \geq 0$ para todo i. Defina $N(\alpha)$ como el mayor entero que se encuentra en la forma* *normal de α. Mas precisamente, $N(n) = n$ para todo $n < \omega$ y recursivamente*

$$N(\alpha) = \text{máx}\{N(\beta_0), \ldots, N(\beta_k), n_0, \ldots, n_k\}.$$

Veamos un par de ejemplos:

- Si $\alpha = \omega^{\omega^{\omega}+\omega 2} + \omega^{\omega} + \omega^{4} + 5$, entonces $N(\alpha) = 5$.
- Si $\beta = \omega^{\omega^{7}+\omega 2} + \omega^{\omega} + \omega^{4} + 5$, entonces $N(\beta) = 7$.
- Si $\gamma = \omega^{\omega^{\omega^{\omega 2}}} + 9$, entonces $N(\gamma) = 9$

Las Definiciones 3.4.7 y 3.4.8 implican la siguiente desigualdad e identidad.

Lema 3.4.9. *Caicedo, "Goodstein's function"*

(1) $N(R_a^{\omega}(m)) < a$.

(2) $p_{R_a^{\omega}(m)}(a) = m$ *para todo* a, m.

Demostración.

(1) Sea $m = a^{b_0} n_0 + \cdots + a^{b_k} n_k$ la representación completa en base a, entonces $n_i < a$ para todo i. Así mismo, b_i está escrito en su representación completa base a por lo que al evaluar $R_a^{\omega}(m)$ cualquier número entero que se encuentre en $R_a^{\omega}(m)$ será menor que a.

(2) Recordemos que $p_{R_a^{\omega}(m)}(x)$ es el polinomio que se obtiene al reemplazar en $R_a^{\omega}(m)$ cada ω por x y, por otra parte, $R_a^{\omega}(m)$ es el ordinal escrito en forma normal que se obtiene al reemplazar cada a por ω en la representación completa de m base a. Por lo anterior, $p_{R_a^{\omega}(m)}(a)$ es la representación completa de m en base a.

□

Lema 3.4.10. *Caicedo, "Goodstein's function"* $B_a\left(a^{p_{\alpha}(a)} - 1\right) = \Phi_{\alpha}(a) - 1$ *para todo* $\alpha < \varepsilon_0$ *y todo* $a \geq N(\alpha)$.

La demostración detallada del anterior lema es lo suficientemente extensa como para dedicarle una sección exclusiva al final de este capítulo. La supondremos y continuaremos con el objetivo principal de presentar la función de Goodstein en términos de las jerarquías de crecimiento rápido.

Lema 3.4.11. *Caicedo, "Goodstein's function"* $B_a(a^m - 1) = \Phi_{R_a^\omega(m)}(a) - 1$ *para todo* a *y todo* m.

Demostración. Por el Lema 3.4.9, $p_{R_a^\omega(m)}(a) = m$ y, por el Lema 3.4.10,

$$B_a(a^{p_{R_a^\omega(m)}(a)} - 1) = B_a(a^m - 1) = \Phi_{R_a^\omega(m)}(a) - 1.$$

□

3.5. $\mathcal{G}$ en términos de las jerarquías de crecimiento rápido

Gracias a la teoría expuesta previamente en esta sección podremos definir la función de Goodstein a partir de las jerarquías de crecimiento rápido.

Teorema 3.5.1. *Caicedo, "Goodstein's function".*

(1) *Sea* $n = 2^{m_1} + 2^{m_2} + \cdots + 2^{m_k}$ *con* $m_1 > m_2 > \ldots > m_k$. *Además sea* $\alpha_i = R_2^\omega(m_i)$. *Entonces*

$$\mathcal{G}(n) = \Phi_{\alpha_1}(\Phi_{\alpha_2}(\ldots(\Phi_{\alpha_k}(3)))) - 2.$$

(2) *Más general, sea* $\mathcal{G}_b(n)$ *definida como* $\mathcal{G}$ *pero iniciando con la representación de* n *en base* b. *Sea*

$$n = b^{m_1} n_1 + \cdots + b^{m_k} n_k$$

con $m_1 > m_2 > \ldots > m_k$. *Además sea* $\alpha_i = R_b^\omega(m_i)$. *Entonces*

$$\mathcal{G}_b(n) = \Phi_{\alpha_1}^{n_1}(\Phi_{\alpha_2}^{n_2}(\ldots(\Phi_{\alpha_k}^{n_k}(b+1)))) - b.$$

Demostración. Para comenzar con la demostración hace falta señalar una propiedad importante de la función R_b (ver la Defininción 1.2.3). Para cualquier $m, a \in \mathbb{N}$ y $b \leq \omega$

$$R_{a+1}^b(R_a(m)) = R_a^b(m).$$

Esto se deduce de la definición, pues $R_a(m)$ reemplaza todos los a por $a+1$ en la representación completa base a de m, mientras que $R_{a+1}^b(R_a(m))$ reemplaza todos los $a+1$ por b de la representación completa base $a+1$ de $R_a(m)$.

Para (1) procederemos mediante inducción en k de la siguiente forma: Para $k = 1$, tenemos que $(n)_1 = n = 2^m$ y $(n)_2 = 3^{R_2(m)} - 1$. Por el Lema 3.4.4, sabemos que

$G(n)+1 = B_3(3^{R_2(m)}-1)$. Mientras que por el Lema 3.4.11

$$B_3(3^{R_2(m)}-1) = \Phi_{R_3^\omega(R_2(m))}(3)-1 = \Phi_{R_2^\omega(m)}(3)-1.$$

Con esto queda establecida la base de la inducción.
Asumiendo que se cumple para k, probaremos para $k+1$. Supongamos que

$$n = 2^{m_1}+\cdots+2^{m_k}+2^{m_{k+1}}.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl}(n)_1 &=& 2^{m_1}+\cdots+2^{m_k}+2^{m_{k+1}}\\ (n)_2 &=& 3^{R_2(m_1)}+\cdots+3^{R_2(m_k)}+3^{R_2(m_{k+1})}-1.\end{array}$$

La hipótesis de inducción nos dice que

$$B_3(3^{R_2(m_2)}+\cdots+3^{R_2(m_k)}+3^{R_2(m_{k+1})}-1) = \Phi_{R_2(m_2)}(\Phi_{R_2(m_3)}(\ldots(\Phi_{R_2(m_{k+1})}(3))\ldots))-1$$

En consecuencia, por la Definición 3.4.1,

$$G_3(3^{R_2(m_2)}+\cdots+3^{R_2(m_k)}+3^{R_2(m_{k+1})}-1) = \Phi_{R_2(m_2)}(\Phi_{R_2(m_3)}(\ldots(\Phi_{R_2(m_{k+1})}(3))\ldots))-3.$$

Definamos

$$c = \Phi_{R_2(m_2)}(\Phi_{R_2(m_3)}(\ldots(\Phi_{R_2(m_{k+1})}(3))\ldots))-4.$$

Haciendo uso de los Lemas 3.4.6 y 3.4.4, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl}G(n)+1 &=& B_2(n)\\ &=& B_3((n)_2)\\ &=& B_3\left(3^{R_2(m_1)}+\cdots+3^{R_2(m_k)}+3^{R_2(m_{k+1})}-1\right)\\ &=& B_{3+c}\left((3^{R_2(m_1)}+\cdots+3^{R_2(m_k)}+3^{R_2(m_{k+1})}-1,3)_{c+1}\right)\\ &=& B_{3+c}\left(R_3^{3+(c+1)-1}(3^{R_2(m_1)})\right)\\ &=& B_{3+c}\left(R_3^{3+c}(3^{R_2(m_1)})\right)\\ &=& B_{3+(c+1)}\left(R_{3+c}(R_3^{3+c}(3^{R_2(m_1)})-1\right)\\ &=& B_{3+(c+1)}\left((R_3^{3+c+1}(3^{R_2(m_1)})-1\right)\\ &=& B_{4+c}\left((4+c)^{R_2^{4+c}(m_1)}-1\right).\end{array}$$

Y nuevamente por el Lema 3.4.11

$$B_{4+c}\left((4+c)^{R_2^{4+c}(m_1)}-1\right) = \Phi_{R_{4+c}^\omega(R_2^{4+c}(m_1))}(4+c)-1 = \Phi_{R_2^\omega(m_1)}(4+c)-1.$$

Finalmente, reemplazando c

$$\begin{aligned} G(n)+1 &= \Phi_{R_2^\omega(m_1)}(4+c)-1 \\ &= \Phi_{R_2^\omega(m_1)}(\Phi_{R_2(m_2)}(\Phi_{R_2(m_3)}(\ldots(\Phi_{R_2(m_{k+1})}(3))\ldots)))-1. \end{aligned}$$

Con esto queda verificado el paso inductivo y queda establecido (1).
Para (2) se utiliza un argumento similar a la demostración anterior y a la demostración del Lema 3.4.10 como se evidencia a continuación. Se hará una demostración por inducción en k. Para $k=1$, supongamos que $n=b^{m_1}n_1$. Entonces

$$\begin{aligned} (n,b)_1 &= b^{m_1}n_1 \\ (n,b)_2 &= (b+1)^{R_b(m_1)}n_1-1 \;=\; (b+1)^{R_b(m_1)}(n_1-1)+(b+1)^{R_b(m_1)}-1. \end{aligned}$$

Observe que de no ser por la presencia de n_1, la demostración seguiría un argumento similar al usado para la parte (1). Nuestro objetivo será eliminar n_1, esto se logra de la siguiente manera:

Por el Lema 3.4.11

$$B_{b+1}((b+1)^{R_b(m_1)}-1)=\Phi_{R_{b+1}^\omega(R_b(m_1))}(b+1)-1=\Phi_{\alpha_1}(b+1)-1.$$

Por los Lemas 3.4.6 y 3.4.4 se obtiene que

$$\begin{aligned} G_b(n)+(b-1) &= B_{b+1}((b+1)^{R_b(m_1)}(n_1-1)+(b+1)^{R_b(m_1)}-1) \\ &= B_{\Phi_{\alpha_1}(b+1)-1}\left((\Phi_{\alpha_1}(b+1)-1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)-1}(m)}(n_1-1)\right) \\ &= B_{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}\left(\Phi_{\alpha_1}(b+1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1)}(n_1-1)-1\right) \\ &= B_{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}\left(\Phi_{\alpha_1}(b+1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1)}(n_1-2)+\Phi_{\alpha_1}(b+1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1)}-1\right). \end{aligned}$$

Nuevamente es aplicable el lema 5.23 para $\Phi_{\alpha_1}(b+1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1)}-1$, pues

$$\begin{aligned} B_{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}\left(\Phi_{\alpha_1}(b+1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1)}-1\right) &= \Phi_{R^\omega_{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(R_b^{\Phi_{\alpha_1}(b+1)}(m_1))}(\Phi_{\alpha_1}(b+1))-1 \\ &= \Phi_{R_b^\omega(m_1)}(\Phi_{\alpha_1}(b+1))-1 \\ &= \Phi_{\alpha_1}(\Phi_{\alpha_1}(b+1))-1 \\ &= \Phi_{\alpha_1}^2(b+1)-1. \end{aligned}$$

Repitiendo los pasos anteriores para $i \leq n_1 - 1$ concluimos que

$$G_b(n) + (b-1) = B_{\Phi_{\alpha_1}^{i+1}(b+1)-1}\left((\Phi_{\alpha_1}^{i+1}(b+1)-1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}^{i+1}(b+1)-1}(m_1)}(n_1-(i+1))\right).$$

En particular, para $i = n_1 - 1$

$$B_{\Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1)-1}\left((\Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1)-1)^{R_b^{\Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1)-1}(m_1)}(n_1-n_1)\right) = B_{\Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1)-1}(0) = \Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1)-1$$

Por lo que

$$G_b(n) = \Phi_{\alpha_1}^{n_1}(b+1) - b.$$

Concluyendo la demostración para $k = 1$.
El paso inductivo se hace del mismo modo que se hizo en la parte (1), añadiendo el argumento anteriormente mencionado. $\square$

Ejemplo 3.5.2. *La representación completa de* 3 *en base* 2 *es* $2+1$

$$\mathcal{G}(3) = \Phi_1(\Phi_0(3)) - 2 = \Phi_1(4) - 2 = 6.$$

Ejemplo 3.5.3. *La representación completa de* 4 *en base* 2 *es* 2^2*.*

$$\mathcal{G}(4) = \Phi_\omega(3) - 2 = \Phi_3(3) - 2 = 3 \cdot 2^3 \cdot 2^{3\cdot 2^3} \cdot 2^{3\cdot 2^3 \cdot 2^{3\cdot 2^3}} - 2.$$

Ejemplo 3.5.4. *La representación completa de* 266 *en base* 2 *es* $2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$*.*

$$\mathcal{G}(266) = \Phi_{\omega^{\omega+1}}(\Phi_{\omega+1}(\Phi_1(3))) - 2.$$

A pesar de que encontramos una fórmula para la función de Goodstein, los valores son extremadamente grandes por lo que resulta una tarea ineficaz calcular de manera rudimentaria estas expresiones.
Como consecuencia inmediata de los Teoremas 3.5.1 y 3.3.4 surge el siguiente corolario donde expresamos la función $\mathcal{G}$ en términos de la jerarquía de Hardy.

Corolario 3.5.5. *Caicedo, "Goodstein's function" Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$g(n) = H_{R_2^\omega(n)}(1).$$

Demostración. Utilizando la Proposición 1.4.8, los Teoremas 3.3.4 y 3.5.1 obtenemos la siguiente igualdad.

$$g(n+1) = \mathcal{G}(n) + 1 = \Phi_{\alpha_1}(\Phi_{\alpha_2}(\ldots(\Phi_{\alpha_k}(3)))) - 1 = H_{R_2^\omega(n)}(2) = H_{R_2^\omega(n)+1}(1) = H_{R_2^\omega(n+1)}(1)$$

$\square$

Corolario 3.5.6. *En PA no se puede demostrar que $\mathcal{G}$ es total.*

Demostración. La fórmula dada por el Teorema 3.5.1 muestra que $\mathcal{G}$ no es dominada por ningún Φ_α. Si a este argumento se añade el Teorema 3.2.5 podemos concluir que $\mathcal{G}$ no es demostrablemente total en PA. $\square$

3.6. Demostracion del Lema 3.4.10

En el artículo original (Caicedo, "Goodstein's function"), la demostración del Lema 3.4.10 abarca una página completa. La siguiente demostración es una extensión de aquella página donde se da una explicación más profunda a todos los detalles.
La demostración del Lema 3.4.10 se hará por inducción en α. Para tratar el caso inductivo cuando α es un ordinal límite hace falta introducir una nueva definición seguida de varios lemas relevantes.

Definición 3.6.1. *Sean $\beta \leq \alpha < \varepsilon_0$. Decimos que $\alpha \underset{n}{\rightarrow} \beta$ si y solo si existe una sucesión $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$ donde $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_k = \beta$ y para todo $i < k$, α_i es sucesor y $\alpha_{i+1} = \alpha_i$ o α_i es límite y $\alpha_{i+1} = d(\alpha_i, n)$.*

Ejemplo 3.6.2. *$\omega^\omega \underset{2}{\rightarrow} \omega + 2$. Para empezar, siguiendo la Definición 3.1.2 de d podemos observar que $d(\omega^\omega, 2) = \omega^{d(\omega,2)} = \omega^2$, luego*

$$\begin{array}{rclcl}
\alpha_0 & = & \omega^\omega & & \\
\alpha_1 & = & d(\omega^\omega, 2) & = & \omega^2 \\
\alpha_2 & = & d(\omega^2, 2) & = & \omega 2 \\
\alpha_3 & = & d(\omega 2, 2) & = & \omega + 2.
\end{array}$$

Como existe una sucesión $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq a_3$ con $\alpha_0 = \omega^\omega$ y $\alpha_3 = \omega + 2$ entonces podemos concluir que $\omega^\omega \underset{2}{\rightarrow} \omega + 2$.

Siguiendo la Definición 3.6.1 obtenemos los siguientes resultados que se pueden encontrar mencionados sin su demostración en Caicedo, "Goodstein's function" a excepción del último.

Lema 3.6.3. *Caicedo, "Goodstein's function".*
Si $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$ *entonces*

(1) Si $a \leq N(\alpha)$*, entonces* $N(\alpha) \geq N(\beta)$*.*

(2) $\Phi_\alpha(a) = \Phi_\beta(a)$*.*

(3) Si $\alpha \geq N(\alpha)$*, entonces* $p_\alpha(a) = p_\beta(a)$*.*

(4) $\omega^\alpha \underset{a}{\rightarrow} \omega^\beta$*.*

Demostración.

(1) Si $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$, entonces existe una sucesión $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$ donde $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_k = \beta$. Si α es sucesor, entonces $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k$ y por lo tanto $N(\alpha) = N(\beta)$; por otra parte, si α es límite, entonces $\alpha_1 = d(\alpha, a)$ donde es claro que $N(\alpha) \geq N(\alpha_1)$, el anterior argumento se repite hasta llegar a a_k y por consiguiente $N(\alpha) \geq N(\beta)$.

(2) Por la Definición 3.2.1 $\Phi_\alpha(a) = \Phi_{\alpha_1}(a) = \cdots = \Phi_\beta(a)$.

(3) Si α es sucesor, entonces $\alpha = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta$, por lo tanto $p_{\alpha_i}(a) = p_\beta(a)$. Si α es un ordinal límite, entonces $\alpha_1 = d(\alpha, a)$. Sea $\alpha = \gamma_0 + \omega^{\xi_0}$, Si $\xi_0 = \delta + 1$, entonces $\alpha_1 = \gamma_0 + \omega^\delta a$, luego

$$\begin{aligned} p_{\alpha_1}(a) &= p_{\gamma_0}(a) + a^{p_\delta(a)} a \\ &= p_{\gamma_0}(a) + a^{p_\delta(a)+1} \\ &= p_{\gamma_0}(a) + a^{p_{\delta(a)+1}} \\ &= p_{\gamma_0}(a) + a^{p_{\xi_0}} \\ &= p_{\gamma_0}(a) + p_{\omega^{\xi_0}}(a) \\ &= p_\alpha(a). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Si $\xi_0 = \gamma_1 + \omega^{\xi_1}$ y de manera inductiva $\xi_n = \gamma_{n+1} + \omega^{\xi_{n+1}}$ entonces $\alpha_1 = \gamma_0 + \omega^{d(\xi_0, a)}$, pero $\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \xi_3, \ldots$ es una sucesión decreciente de ordinales por lo que tarde o temprano se estabilizará para algún $\xi_m = \delta + 1$ sucesor, es decir

$$\alpha_1 = \gamma_0 + \omega^{\gamma_1 + \omega^{\gamma_2 + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\gamma_m + \omega^\delta a}}}}}}}.$$

Por la ecuación (3.2) podemos concluir que $p_{\alpha_1}(a) = p_\alpha(a)$. Aplicando un argumento similar para $\alpha_2, \ldots, \alpha_k$ concluimos que $p_\alpha(a) = p_\beta(a)$.

(4) Si α es sucesor entonces $\alpha = \beta$ y es evidente que $\omega^\alpha = \omega^\beta$ por lo que $\omega^\alpha \underset{a}{\rightarrow} \omega^\beta$. Si α es límite entonces defina de manera inductiva la sucesión decreciente

$$\begin{array}{lcl} c_0 & = & \omega^\alpha \\ c_1 = d(c_0, a) & = & \omega^{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_n = d(c_{n-1}, a) & = & \omega^{\alpha_n}. \end{array}$$

Como $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$ entonces existe algún $\alpha_k = \beta$, luego $c_k = \omega^\beta$ y $\omega^\alpha \underset{a}{\rightarrow} \omega^\beta$.

□

Los siguientes lemas son adaptados de Ketonen y Solovay[9] a nuestra definición. Este primer lema nos muestra la transitividad de la relación $\underset{a}{\rightarrow}$.

Lema 3.6.4. *Si* $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$ *y* $\beta \underset{a}{\rightarrow} \gamma$ *entonces* $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \gamma$.

Demostración. Por definición si $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$ entonces existe una sucesión $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$ donde $\alpha_0 = \alpha$ y $\alpha_k = \beta$. Si $\beta \underset{a}{\rightarrow} \gamma$ entonces existe una sucesión $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_{k'}$ donde $\beta_0 = \beta$ y $\beta_{k'} = \gamma$. Es posible unir estas dos sucesiones pues $\alpha_k = \beta_0 = \beta$ por lo que $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \gamma$. □

Lema 3.6.5. *Sea* $\lambda = \omega^{\lambda_1} m_1 + \cdots + \omega^{\lambda_k} m_k$ *y* $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{a_{k'}} n_{k'}$ *números ordinales expresados en su forma normal. Si* $\lambda_k > \alpha_1$ *y* $\alpha \underset{a}{\rightarrow} \beta$ *entonces* $\lambda + \alpha \underset{a}{\rightarrow} \lambda + \beta$.

Demostración. Al ser $\lambda_k > \alpha_1$ eso significa que $\lambda > \alpha$ y la suma de estos dos se puede ver como la concatenación de sus expresiones en forma normal, es decir:

$$\lambda + \alpha = \omega^{\lambda_1} m_1 + \cdots + \omega^{\lambda_k} m_k + \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{a_{k'}} n_{k'}.$$

El caso relevante es para α límite, pero por el Lema 3.1.6, tenemos que

$$d((\lambda + \alpha), a) = \lambda + d(\alpha, a) = \lambda + \alpha_1.$$

Por lo que se muestra que $\lambda + \alpha \underset{a}{\rightarrow} \lambda + \beta$. □

Con respecto al próximo lema, es necesario mencionar que el esfuerzo para dar una explicación más detallada de la demostración condujo a 3 demostraciones distintas para el caso cuando α es un ordinal límite que se presentarán a continuación.

---

[9] R. Ketonen J. y Solovay. “Rapidly Growing Ramsey Functions”. En: *Annals of Mathematics* 113.2 (1981), págs. 267-314. URL: `http://www.jstor.org/stable/2006985` (visitado 14-04-2024).

Lema 3.6.6. *Caicedo, “Goodstein’s function”.*
Para todo $0 < \alpha < \varepsilon_0$ *y todo* $a \geq N(\alpha)$, $\alpha \underset{a}{\rightarrow} R_a^{\omega}(p_\alpha(a) - 1) + 1$.

Demostración. Una vez más, la prueba se hace por inducción. Si $\alpha = \beta + 1$, en particular si $\alpha = 1$, entonces $p_\alpha(a) = p_\beta(a) + 1 = 1$, además $R_a^{\omega}(p_\beta(a)) = \beta$ siempre que $a > N(\beta)$, es decir $a \geq N(\alpha)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} R_\alpha^{\omega}(p_\alpha(a) - 1) + 1 &= R_\alpha^{\omega}(p_{\alpha-1}) + 1 \\ &= R_\alpha^{\omega}(p_\beta(a)) + 1 \\ &= \beta + 1 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Supongamos que α es límite y el resultado se mantiene para todo ordinal menor a α.

Forma 1: Es conveniente recordar que α se puede reescribir de la forma $\alpha = \gamma + \omega^\beta$, en consecuencia

$$p_\alpha(a) - 1 \;=\; p_\gamma(a) + p_{\omega^\beta}(a) - 1$$

Integrando el anterior resultado junto con el Lema 3.4.5

$$\begin{aligned} R_a^{\omega}(p_\alpha(a) - 1) + 1 &= R_a^{\omega}(p_\gamma(a) + p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1 \\ &= R_a^{\omega}(p_\gamma(a)) + R_a^{\omega}\,(p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1 \\ &= \gamma + R_a^{\omega}\,(p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, para que $\alpha \underset{a}{\rightarrow} R_a^{\omega}(p_\alpha(a) - 1) + 1$ basta con ver que $\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^{\omega}\,(p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1$ a lo que dedicaremos el resto de la demostración. mediante inducción probaremos que la propiedad se satisface para $\alpha = \omega^\beta$ con $\beta < \alpha$.
En primer lugar consideremos el caso en el que $\alpha = \omega$, es decir $\beta = 1$. En este caso $p_\alpha(a) - 1 = a - 1$ por lo que $R_a^{\omega}(p_\alpha(a) - 1) + 1 = a$. Supongamos que se cumple para β probaremos que se cumple para $\beta + 1$. $\alpha = \omega^{\beta+1}$ por lo que

$$\begin{aligned} d(\omega^{\beta+1}, a) &= \omega^\beta a \\ &= \omega^\beta(a - 1) + \omega^\beta \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción $\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^{\omega}(p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1$ así que por los Lemas 3.6.4 y 3.6.5

$$\alpha \underset{a}{\rightarrow} d(\alpha, a) \underset{a}{\rightarrow} \omega^\beta(a - 1) + R_a^{\omega}(p_{\omega^\beta}(a) - 1) + 1$$

Pero

$$\begin{aligned}\omega^\beta(a-1)+R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)-1\right)+1 &= R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)\cdot(a-1)+p_{\omega^\beta}(a)-1\right)+1\\ &= R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)\cdot a-1\right)+1\\ &= R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta\omega}(a)-1\right)+1\\ &= R_a^\omega\left(p_{\omega^{\beta+1}}(a)-1\right)+1\end{aligned}$$

Por lo que $\alpha \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega\left(p_\alpha(a)-1\right)+1$. Por último supongamos que β es límite. Al ser $\beta<\alpha$ y $a\geq N(\alpha)\geq N(\beta)$, por nuestra hipótesis de inducción $\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)+1$, aplicando el Lema 3.6.3

$$\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} \omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)+1} \underset{a}{\rightarrow} \omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)}a=\omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)}(a-1)+\omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)}$$

Note que $\omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}<\alpha$, así que para este ordinal también se satisface la hipótesis de inducción $\omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)} \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega\left(p_{\omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}}(a)-1\right)+1$. Por el Lema 3.4.9

$$R_a^\omega\left(p_{\omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}}(a)-1\right)+1=R_a^\omega\left(a^{p_{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}(a)}-1\right)+1=R_a^\omega\left(a^{(p_\beta(a)-1)}-1\right)+1$$

Nuestro objetivo es probar que $\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}-1\right)+1$, sin embargo se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}-1\right)+1 &= R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}a-1\right)+1\\ &= R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}(a-1)+a^{p_\beta(a)-1}-1\right)+1\\ &= R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}(a-1)\right)+R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}-1\right)+1\\ &= \omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}(a-1)+R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}-1\right)+1\end{aligned}$$

Por lo que utilizando los Lemas 3.6.4 y 3.6.5

$$\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} \omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)}a \underset{a}{\rightarrow} \omega^{R_a^\omega\left(p_\beta(a)-1\right)}(a-1)+R_a^\omega\left(a^{p_\beta(a)-1}-1\right)+1=R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}-1\right)+1$$

De esta manera concluimos la proposición para todo ordinal de la forma ω^β y por consiguiente para todo ordinal límite.

Forma 2: Es conveniente recordar que α se puede reescribir de la forma $\alpha=\gamma+\omega^\beta$, en consecuencia

$$p_\alpha(a)-1 \;=\; p_\gamma(a)+p_{\omega^\beta}(a)-1$$

Integrando el anterior resultado junto con el Lema 3.4.5

$$\begin{aligned} R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1 &= R_a^\omega(p_\gamma(a)+p_{\omega^\beta}(a)-1)+1 \\ &= R_a^\omega(p_\gamma(a))+R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)-1\right)+1 \\ &= \gamma+R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)-1\right)+1 \end{aligned}$$

Como puede apreciarse, para que $\alpha \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1$ basta con ver que $\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega\left(p_{\omega^\beta}(a)-1\right)+1$ a lo que dedicaremos el resto de la demostración.

Supongamos que $\alpha=\omega^\beta$ para algún $\beta<\alpha$. Debido a la hipótesis de inducción $\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega(p_\beta(a)1)+1$ si $a\geq N(\alpha)\geq N(\beta)$. Tenemos que

$$p_\alpha(a)-1=a^{p_\beta(a)}-1=a^{p_\beta(a)-1}(a-1)+a^{p_\beta(a)-1}-1$$

$$R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1=\omega^{R_a^\omega(p_\beta(a)-1)}(a-1)+R_a^\omega(a^{p_\beta(a)-1}-1)+1$$

Tome $\lambda=R_a^\omega(p_\beta(a)-1)$. Puesto que $\beta<\alpha$, por la hipótesis de inducción $\beta \underset{a}{\rightarrow} \lambda+1$. Por el Lema 3.6.3 $\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} \omega^{\lambda+1}$ y

$$\omega^\lambda \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega(a^{p_\lambda(a)}-1)+1.$$

Entonces

$$\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} \omega^{\lambda+1} \underset{a}{\rightarrow} d(\omega^{\lambda+1},a)=\omega^\lambda a=\omega^\lambda(a-1)+\omega^\lambda \underset{a}{\rightarrow} \omega^\lambda(a-1)+R_a^\omega(a^{p_\lambda(a)}-1)+1. \quad (3.3)$$

Finalmente por el Lema 3.4.9, $p_\lambda(a)=p_\beta(a)-1$. Por lo que en (3.3) haciendo uso del Lema 3.4.5 tenemos que

$$\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} R_a^\omega(a^{p_\beta(a)-1}(a-1))+R_a^\omega(a^{p_\beta(a)-1}-1)+1=R_a^\omega(a^{p_\beta(a)})+1=R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1.$$

Concluyendo de esta manera la prueba.

Forma 3:
Es conveniente recordar que α se puede reescribir de la forma $\alpha=\gamma+\omega^\beta$, en consecuencia

$$\begin{aligned} p_\alpha(a)-1 &= p_\gamma(a)+p_{\omega^\beta}(a)-1 \\ &= p_\gamma(a)+a^{p_\beta(a)}-1 \\ &= p_\gamma(a)+\sum_{i=1}^{p_\beta(a)} a^{p_\beta(a)-i}(a-1). \end{aligned}$$

Integrando el anterior resultado junto con el Lema 3.4.5

$$\begin{aligned}R^\omega_a(p_\alpha(a)-1)+1 &= R^\omega_a\left(p_\gamma(a)+\sum_{i=1}^{p_\beta(a)} a^{p_\beta(a)-i}(a-1)\right)+1\\ &= R^\omega_a(p_\gamma(a))+R^\omega_a\left(\sum_{i=1}^{p_\beta(a)} a^{p_\beta(a)-i}(a-1)\right)+1\\ &= \gamma+\sum_{i=1}^{p_\beta(a)-1}\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-i)}(a-1)+a.\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\beta<\alpha$ y $a\geq N(\alpha)\geq N(\beta)$ se satisface la hipótesis de inducción, $\beta \underset{a}{\rightarrow} R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1$; con el uso del Lema 3.6.3 se obtiene que

$$\gamma+\omega^\beta \underset{a}{\rightarrow} \gamma+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1}.$$

En atención al ordinal $\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1}$, observe las siguientes igualdades que surgen como consecuencia directa de la Definición 3.1.2 (ver Ejemplo 3.1.5)

$$\begin{aligned}d(\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1},a) &= \omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}a,\\ d(\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}a,a) &= \omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}(a-1)+\omega^{d(R^\omega_a(p_\beta(a)-1),a)}\end{aligned}\tag{3.4}$$

asumiendo que $R^\omega_a(p_\beta(a)-1)$ es límite, pues de otro modo se tendría

$$d(\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}a,a)=\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}(a-1)+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)-1}a.$$

Para efectos prácticos supondremos que $R^\omega_a(p_\beta(a)-1)$ es límite, pues si es sucesor repetiríamos el argumento anterior. Nuevamente se cumple la hipótesis de inducción pues $R^\omega_a(p_\beta(a)-1)<\alpha$, es decir $R^\omega_a(p_\beta(a)-1) \underset{a}{\rightarrow} R^\omega_a(p_{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}(a)-1)+1$ pero por el Lema 3.4.9, $R^\omega_a(p_{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}(a)-1)+1=R^\omega_a(p_\beta(a)-2)+1$. Por lo que

$$\gamma+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1} \underset{a}{\rightarrow} \gamma+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)}(a-1)+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-2)+1}\tag{3.5}$$

Repitiendo los argumentos hechos en (3.4) y (3.5) concluimos que

$$\gamma+\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-1)+1} \underset{a}{\rightarrow} \gamma+\sum_{i=1}^{p_\beta(a)-1}\omega^{R^\omega_a(p_\beta(a)-i)}(a-1)+a.$$

En conclusión $\alpha \underset{a}{\rightarrow} R^\omega_a(p_\alpha(a)-1)$.

$\square$

Como resultado de la teoría introducida anteriormente presentamos la demostración del Lema 3.4.10

Lema. *Caicedo, "Goodstein's function".*
Para todo $\alpha < \varepsilon_0$ *y todo* $a \geq N(\alpha)$, $B_a\left(a^{p_\alpha(a)} - 1\right) = \Phi_\alpha(a) - 1$.

Demostración. La prueba será por inducción en α. Para $\alpha = 0$, tenemos que

$$B_a(a^0 - 1) = B_a(0) = a = (a+1) - 1 = \Phi_0(a) - 1.$$

Asuma el resultado para α, procederemos para $\alpha + 1$. En primer lugar observe que $p_{\alpha+1}(a) = p_\alpha(a) + 1$ así que

$$a^{p_{\alpha+1}(a)} - 1 = a^{p_\alpha(a)}(a-1) + a^{p_\alpha(a)} - 1. \tag{3.6}$$

La hipótesis de inducción nos dice que

$$B_a(a^{p_\alpha(a)} - 1) = \Phi_\alpha(a) - 1.$$

Como $\mathcal{G}_a(a^{p_\alpha(a)} - 1) + (a-1) = B_a(a^{p_\alpha(a)} - 1)$, la base en la que la sucesión de Goodstein se hace cero iniciando en $a^{p_\alpha(a)} - 1$ con base completa a es $\Phi_\alpha(a) - a$, es decir

$$((a^{p_\alpha(a)} - 1)_a)_{\Phi_\alpha(a)-a} = 0.$$

Utilizando los Lemas 3.4.4, 3.4.5 y 3.4.6, además de la Ecuación (3.6)

$$\begin{aligned}
B_a(a^{p_{\alpha+1}(a)} - 1) &= B_a(a^{p_\alpha(a)}(a-1) + a^{p_\alpha(a)} - 1) \\
&= B_{\Phi_\alpha(a)-1}\left(((a^{p_\alpha(a)}(a-1) + a^{p_\alpha(a)} - 1)_a)_{\Phi_\alpha(a)-a}\right) \\
&= B_{\Phi_\alpha(a)-1}\left(R_a^{\Phi_\alpha(a)-1}(a^{p_\alpha(a)}(a-1)) + ((a^{p_\alpha(a)} - 1)_a)_{\Phi_\alpha(a)-a}\right) \\
&= B_{\Phi_\alpha(a)-1}\left(R_a^{\Phi_\alpha(a)-1}(a^{p_\alpha(a)}(a-1))\right) \\
&= B_{\Phi_\alpha(a)-1}\left((\Phi_\alpha(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a)-1)}(a-1)\right).
\end{aligned}$$

Para $a > 1$, utilizando nuevamente el Lema 3.4.4

$$\begin{aligned}
B_{\Phi_\alpha(a)-1}\left((\Phi_\alpha(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a)-1)}(a-1)\right) &= B_{\Phi_\alpha(a)}\left(\Phi_\alpha(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a))}(a-1) - 1\right) \\
&= B_{\Phi_\alpha(a)}\left(\Phi_\alpha(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a))}(a-2) + \Phi_\alpha(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a))} - 1\right).
\end{aligned}$$

Podemos aplicar la hipótesis de inducción al término $\Phi_\alpha(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha(a))} - 1$ para repetir el proceso anterior obteniendo la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} B_a(a^{p_{\alpha+1}(a)-1}-1) &= B_{\Phi_\alpha^2-1}\left((\Phi_\alpha^2(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_\alpha^2(a)-1)}(a-2)\right) \\ &= B_{\Phi_\alpha^2}\left(\Phi_\alpha^2(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha^2(a))}(a-3)+\Phi_\alpha^2(a)^{p_\alpha(\Phi_\alpha^2(a))}-1\right). \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso para $k \leq a-1$ nos muestra que

$$B_a(a^{p_{\alpha+1}(a)}-1) = B_{\Phi_\alpha^{k+1}(a)-1}\left((\Phi_a^{k+1}(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_a^{k+1}(a)-1)}(a-1-k)\right),$$

en particular para $k = a-1$, $B_a(a^{p_{\alpha+1}(a)}-1) = B_{\Phi_\alpha^a(a)-1}(0) = \Phi_{\alpha+1}(a)-1$. Concluyendo de esta manera la inducción para α sucesor.

Supongamos que α es límite y que el resultado se mantiene para $\beta < \alpha$. Sea $\gamma = R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)$. Utilizando la ecuación (3.6) y un argumento similar a la demostración para α sucesor obtenemos la siguiente igualdad

$$B_a(a^{p_\alpha(a)}-1) = B_{\Phi_\gamma(a)-1}\left((\Phi_\gamma(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_\gamma(a)-1)}(a-1)\right),$$

Un proceso inductivo para $k \leq a-1$ (como se realizó para α sucesor) nos muestra que,

$$B_a(a^{p_{\alpha+1}(a)}-1) = B_{\Phi_\gamma^{k+1}(a)-1}\left((\Phi_\gamma^{k+1}(a)-1)^{p_\alpha(\Phi_\gamma^{k+1}(a)-1)}(a-1-k)\right),$$

en particular para $k = a-1$ tenemos

$$B_a(a^{p_\alpha(a)}-1) = \Phi_\gamma^a(a)-1 = \Phi_{R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1}(a)-1.$$

Por el Lema 3.6.3 y 3.6.6 $\Phi_\alpha(a) = \Phi_{R_a^\omega(p_\alpha(a)-1)+1}(a)$ y queda demostrado el lema para α límite. □

Bibliografía

Brainerd W. y Landweber, L. *Theory of Computation*. (A Wiley-Interscience publication). Wiley, 1974, págs. 49-65. URL: https://books.google.com.co/books?id=hS0XAAAACAAJ (vid. págs. 22, 24).

Caicedo, A. “Goodstein’s function”. en. En: *Revista Colombiana de Matemáticas* 41 (dic. de 2007), págs. 381-391. URL: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-74262007000200008&nrm=iso (vid. págs. 5, 6, 8, 35, 38-42, 45, 46, 49-51, 53, 57).

Cichon, E. “A Short Proof of Two Recently Discovered Independence Results Using Recursion Theoretic Methods”. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 87.4 (1983), págs. 704-706. URL: http://www.jstor.org/stable/2043364 (visitado 05-02-2024) (vid. pág. 8).

Goodstein, R. L. “On the Restricted Ordinal Theorem”. En: *The Journal of Symbolic Logic* 9.2 (1944), págs. 33-41. URL: http://www.jstor.org/stable/2268019 (visitado 01-06-2024) (vid. págs. 5, 6, 18).

Hrbacek K. y Jech, T. *Introduction to Set Theory*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. M. Dekker, 1978. URL: https://books.google.com.co/books?id=KvnuAAAAMAAJ (vid. págs. 11, 12, 16).

Ketonen J. y Solovay, R. “Rapidly Growing Ramsey Functions”. En: *Annals of Mathematics* 113.2 (1981), págs. 267-314. URL: http://www.jstor.org/stable/2006985 (visitado 14-04-2024) (vid. pág. 52).

Kirby L. y Paris, J. “Accessible independence results for Peano arithmetic”. En: *Bulletin of the London Mathematical Society* 14.4 (1982), pp.285–293. DOI: 10.1112/blms/14.4.285 (vid. pág. 8).

Matthew K. y Reimann, J. *An introduction to ramsey theory: Fast functions, Infinity, and Metamathematics*. American Mathematical Society, 2018, págs. 105-113 (vid. págs. 22, 27).

Fairtlough, M. y Stanley S. “Chapter III - Hierarchies of Provably Recursive Functions”. En: *Handbook of Proof Theory*. Ed. por Samuel R. Buss. Vol. 137. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier, 1998, págs. 149-207. DOI: https://doi.org/10.1016/S0049-237X(98)80018-9. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X98800189 (vid. pág. 39).

Wainer, S. “A Classification of the Ordinal Recursive Functions”. En: *Archive for Mathematical Logic* 13.3-4 (1970), págs. 136-153. DOI: 10.1007/bf01973619 (vid. pág. 38).