

**FUNCIONES MONÓTONAS SOBRE CONTINUOS  
IRREDUCIBLES**

**ROSANA MARTÍNEZ GALVIS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2013**

**FUNCIONES MONÓTONAS SOBRE CONTINUOS  
IRREDUCIBLES**

**ROSANA MARTÍNEZ GALVIS**

**Trabajo de grado presentado para optar al  
título de Magister en Matemáticas**

**Director  
JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2013**

## AGRADECIMIENTOS

*Agradezco a mi familia y amigos por el apoyo brindado en la realización de este proyecto.*

*Al profesor Javier Camargo, por la paciencia, enseñanza y amistad y a todos los maestros que me enseñaron en estos años.*

*A mis compañeros que participaron directa o indirectamente en el desarrollo del este libro, en particular, a mis hermanos académicos Dúwang Prada, Michael Rincón y Sergio Pérez.*

# Tabla de Contenido

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>4</b>
1.1. CONTINUOS . . . . .	4
1.2. LÍMITES INVERSOS . . . . .	10
<b>2. CONTINUOS IRREDUCIBLES</b>	<b>11</b>
2.1. DEFINICIÓN, EJEMPLOS Y PROPIEDADES. . . . .	11
2.2. COMPOSANTES DE UN CONTINUO . . . . .	14
2.3. CONTINUOS INDESCOMPONIBLES . . . . .	16
2.3.1. Componentes de continuos indescomponibles . . . . .	18
<b>3. FUNCIONES ENTRE CONTINUOS</b>	<b>23</b>
3.1. DEFINICIONES, RELACIONES Y EJEMPLOS . . . . .	23
3.2. PROPIEDAD DE COMPOSICIÓN . . . . .	29
3.3. RELACIONES ESPECIALES . . . . .	32
3.3.1. Funciones entre localmente conexos . . . . .	32
3.3.2. Otras relaciones . . . . .	34
<b>4. IMAGEN DE CONTINUOS IRREDUCIBLES</b>	<b>37</b>
4.1. FUNCIONES QUE PRESERVAN IRREDUCIBILIDAD . . . . .	37
4.2. OTRAS IMÁGENES . . . . .	40
4.3. RESULTADOS ADICIONALES . . . . .	44
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>46</b>

# Lista de Figuras

1.1. Arco, curva senoidal del topólogo, curva cerrada simple y triodo . . . . .	5
1.2. Continuo de Knaster . . . . .	6
2.1. Función cociente $q: Z \rightarrow M$ . . . . .	12
2.2. Continuo indescomponible en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	17
2.3. Continuo descomponible no localmente conexo . . . . .	18
3.1. Función casimonótona no monótona . . . . .	24
3.2. Función débilmente monótona no cuasimonótona . . . . .	26
3.3. Libremente descomponible no fuertemente libremente descomponible . . . . .	27
3.4. Libremente descomponible no fuertemente libremente descomponible . . . . .	28
3.5. Función fuerte no débilmente monótona . . . . .	29
3.6. $g \circ f$ no débilmente monótona . . . . .	31
4.1. Función abierta que no preserva irreducibilidad . . . . .	41
4.2. Función libremente descomponible que no preserva irreducibilidad . . . . .	44

## RESUMEN

**TÍTULO:** FUNCIONES MONÓTONAS SOBRE CONTINUOS IRREDUCIBLES\*

**AUTOR:** ROSANA MARTÍNEZ GALVIS\*\*

**PALABRAS CLAVES:** continuo, continuo irreducible, función monótona, función casimonótonas, función cuasimonótonas, función débilmente monótonas, función confluyente, función fuertemente libremente descomponibles y función libremente descomponible.

**DESCRIPCIÓN:**

En la teoría de continuos se estudian espacios métricos, compactos no vacíos llamados continuos. Un continuo es irreducible si existen dos puntos tales que no existe un subcontinuo propio que los contiene. Esta propiedad topológica no se preserva por la continuidad de la función. Por esto, la importancia de encontrar condiciones para que la imagen de un continuo irreducible sea irreducible.

Con respecto a este problema, es conocido que las funciones monótonas preservan puntos de irreducibilidad y en particular, continuos irreducibles. Sin embargo, esta clase de funciones es muy reducida. Así, se definen algunas clases de funciones más generales para determinar si estas preservan o no la irreducibilidad del espacio.

Este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo además de revisar algunos conceptos generales de topología, se muestran la construcción de continuos a través de la intersección anidada de continuos, el espacio producto entre continuos y límites inversos de continuos.

En el segundo capítulo profundizamos sobre continuos irreducibles mostrando ejemplos y propiedades.

Luego, en el tercer capítulo, estudiamos las funciones entre continuos casimonótonas, cuasimonótonas, confluentes, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles y mostramos las relaciones entre dichas clases.

Por último, se estudia la imagen de continuos irreducibles a través de las funciones definidas en el Tercer Capítulo. Se muestra cuáles de estas funciones preservan irreducibilidad. Se establece además, una relación entre las funciones fuertemente libremente descomponibles y las funciones casimonótonas, cuando el dominio es irreducible.

---

\*Dr. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Director del Trabajo de Grado.

\*\*Programa de Maestría en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

## ABSTRACT

**TITLE:** MONOTONE MAPS ON IRREDUCIBLE CONTINUUM<sup>\*\*\*</sup>

**AUTHOR:** ROSANA MARTÍNEZ GALVIS<sup>\*\*\*\*</sup>

**KEYWORDS:** continuum, irreducible continuum, monotone function, almost monotone function, quasi-monotone function, weakly monotone function, confluent function, strongly freely decomposable function and freely decomposable function.

**DESCRIPTION:**

The continuum theory studies a nonempty compact, connected and metric space named continuum. A continuum is irreducible if there exist two points such that a proper subcontinuum which contains those points does not exist. Generally, this topological property is not preserved by continuous functions. Therefore, it is important to find conditions for mapping irreducible continuum become irreducible.

It is known that monotone function preserve irreducible points, in particular irreducible continuums. However, this class of functions is very reduced. Then, some classes general function are defined to determine if they preserve or not irreducible space.

This monograph is developed of the following way: on the first chapter some topological general concepts are reviewed, also the construction of continuum are shown via the nested intersection on continuum, product space between continuum and inverse limits of continuum. On the second chapter we go on detail about irreducible continuums introducing some examples and properties.

On the third chapter, we study almost monotone function, quasi-monotone function, weakly monotone function, confluent function, strongly freely decomposable function y freely decomposable function and some results are shown.

Finally, we study mapping irreducible continuum via the same function already defined on Chapter third. It is shown which of those functions preserve irreducible continuum. A relationship between strongly freely decomposable function and almost monotone function is established when the domain is irreducible.

---

<sup>\*\*\*</sup>Dr. JAVIER ENRIQUE CAMARGO GARCÍA, Graduate Dissertation Director.

<sup>\*\*\*\*</sup>Graduate Program of Master in Mathematics, Department of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

## INTRODUCCIÓN

La teoría de continuos es una rama de la topología que estudia espacios métricos compactos conexos no vacíos. Es conocido que la imagen de un continuo, bajo una función continua en un espacio de Hausdorff, es un continuo. Sin embargo, propiedades topológicas como normalidad, unicoherencia o ser segundo numerable, no se preservan con la continuidad de la función. Este hecho orienta el estudio hacia las propiedades topológicas que se preservan a través de ciertas clases de funciones continuas.

En 1909 Ludovic Zoretti definió los continuos irreducibles y en 1910 L. J. E. Brouwer construyó el primer continuo indescomponible. En principio, estas clases de continuos se trataron de forma independiente sin una relación aparente entre ellos. En 1920 con el trabajo de Janiszewski y Kuratowski, mostraron que todo continuo indescomponible es irreducible, y desarrollaron propiedades y caracterizaciones de estos continuos.

Nuestro trabajo se enfoca en términos generales, en encontrar condiciones para que la imagen de un continuo irreducible sea irreducible. Con respecto a este problema, es conocido que las funciones monótonas preservan puntos de irreducibilidad y en particular, continuos irreducibles. Sin embargo, esta clase de funciones es muy reducida. Así, se definen funciones más generales conocidas como casimonótonas, cuasimonótonas, confluentes, débilmente monótonas, fuertemente libremente descomponibles y libremente descomponibles, donde se estudia la preservación de propiedades de irreducibilidad.

Esta tesis tiene como objetivo principal estudiar las clases de funciones mencionadas en el párrafo anterior y relacionarlas con la irreducibilidad y elementos propios de la teoría de continuos.

Este trabajo se desarrolla de la siguiente manera: en el primer capítulo revisamos algunos conceptos generales de topología general; en particular, resultados sobre espacios métricos compactos que usaremos con frecuencia como: el Teorema del Cable Cortado y el Teorema de Golpes en la Frontera. También se muestran mecanismos para construir continuos como: la intersección anidada de continuos, el espacio producto entre continuos y el límites inversos de continuos.

En el segundo capítulo profundizamos sobre continuos irreducibles e indescomponibles. Mostramos algunos ejemplos y propiedades que cumplen dichos continuos; propiedades que fueron desarrolladas por Janiszewski y Kuratowski.

Luego, en el tercer capítulo, se definen algunas clases de funciones entre continuos. Además de mostrar las relaciones naturales entre dichas clases de funciones se restringen los espacios a espacios localmente conexos para determinar si las relaciones recíprocas también se tienen.

Por último, mostramos qué sucede con la imagen de continuos irreducibles e indescomponibles a través de las funciones definidas en el Capítulo 3. Se muestra cuáles de estas funciones preservan irreducibilidad. Se establece además, una relación entre las funciones fuertemente libremente descomponibles y las funciones casimonótonas, cuando las primeras preservan puntos de irreducibilidad.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

En este capítulo revisamos definiciones y propiedades de topología general y en particular, de la teoría de continuos. En primera instancia, después de algunas definiciones y ejemplos, vemos algunos resultados importantes que usaremos constantemente como el Teorema del Cable Cortado y el Teorema de Golpes en la Frontera. También se muestra que la intersección anidada de continuos y el espacio producto de continuos son técnicas, para obtener continuos a partir de otros ya conocidos. Finalmente, definimos los límites inversos y mostramos que el límite inverso de continuos es un continuo.

Dado  $X$  un espacio métrico y  $K \subset X$ , en el desarrollo de este trabajo notaremos por  $\text{Int}_X(K)$  al interior del conjunto  $K$  con respecto al espacio  $X$ ;  $\text{Cl}_X(K)$ , la cerradura del conjunto  $K$  con respecto al espacio  $X$  y  $\text{Fr}_X(K)$ , la frontera del conjunto  $K$  con respecto al espacio  $X$ .  $B_d(x, \varepsilon)$  denota la bola abierta con centro en el punto  $x$  y radio  $\varepsilon$ .  $\text{diám}(A)$  denota el diámetro del conjunto  $A$ .

### 1.1. CONTINUOS

Este trabajo lo desarrollamos en espacios topológicos con propiedades especiales que llamamos continuos y los definimos a continuación.

**Definición 1.1.1.** Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente del vacío. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en algún espacio métrico.

Diremos que un continuo  $K$  es un *subcontinuo propio* de un continuo  $X$  si  $K \subset X$  y  $K \neq X$ . Además, llamaremos *continuos no degenerados* aquellos continuos que tienen más de un punto. Ahora mostramos ejemplos de continuos. En particular, algunos ejemplos en el plano  $\mathbb{R}^2$  se muestran en el siguiente enunciado:

**Ejemplo 1.1.2.** 1. Un *arco*, es un continuo. Un arco es cualquier espacio homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Además, si  $\alpha$  es un arco y  $h: [0, 1] \rightarrow \alpha$  es un homeomorfismo, entonces  $h(0) = a$  y  $h(1) = b$  son los puntos extremos de  $\alpha$ . También diremos que  $\alpha$  es un arco de  $a$  a  $b$ .

2. Sea  $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$  y  $C = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2}(A)$ . Como  $f: (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  definida por  $f(t) = \sin \frac{1}{t}$  es continua,  $A$  es conexo y por tanto,  $C$  es un continuo. El continuo  $C$  se conoce como *la curva senooidal del topólogo*, y la usaremos frecuentemente en este escrito.
3. Una *curva cerrada simple* es un continuo. Una curva cerrada simple es cualquier espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ . A menudo se denota por  $S^1$  a cualquier curva cerrada simple.
4. Un *triodo simple*  $T$ , es un continuo. Un triodo simple es un continuo homeomorfo a la letra "T", o al subespacio de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$([0, 1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times [0, 1]).$$

Los continuos enunciados en el Ejemplo 1.1.2 los representamos en la FIGURA 1.1.

Figura 1.1: Arco, curva senooidal del topólogo, curva cerrada simple y triodo



A continuación describimos uno de los primeros ejemplos de Janiszewski en su versión más sencilla descrita por Knaster, de quien recibe su nombre. Este continuo es descrito en [12, pág 204]. Para tal descripción consideramos el conocido conjunto ternario de Cantor, cuya construcción se estudia en cursos de topología general y cuyas propiedades son mencionadas en [8, 2.15 pág 97].

**Ejemplo 1.1.3.** *El continuo de Knaster.*

Sea  $Z \subset [0, 1]$  el conjunto de Cantor. El continuo de Knaster es la unión de:

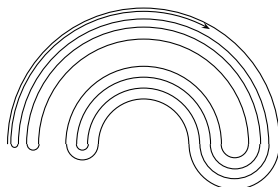
1. Todos los semicírculos con ordenada mayor o igual a 0 con centro en  $(\frac{1}{2}, 0)$  y que pasan a través de todos los puntos de  $Z$ , y
2. Todos los semicírculos con ordenada menor o igual a 0, tales que para  $n \geq 1$  tiene centro en  $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$  y pasa a través de cada punto de el conjunto  $Z$  y contenidos en el intervalo  $(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}})$

Una componente es un conexo maximal de un espacio métrico; es decir:

**Definición 1.1.4.** Sea  $X$  un espacio métrico y  $C$  un subconjunto de  $X$ .  $C$  es una *componente* de  $X$ , si  $C$  es conexo y para todo  $D$  subconjunto conexo de  $X$  tal que  $C \subset D$  se tiene que  $C = D$ .

Claramente los espacios conexos tienen una sola componente. En un espacio no conexo sus componentes son disjuntas y estas forman una partición del espacio.

Figura 1.2: Continuo de Knaster



**Definición 1.1.5.** Sean  $X$  un espacio y  $x \in X$ .  $X$  es localmente conexo en  $x$ , si para cualquier abierto  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U$  existe un abierto conexo  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subset U$ . Se dice que  $X$  es localmente conexo si para todo  $x \in X$ ,  $X$  es localmente conexo en  $x$ .

Nótese que si  $X$  es un continuo localmente conexo,  $U$  es un abierto de  $X$  y  $C$  una componente de  $U$ , para cada  $x \in C$  existe una vecindad conexa  $V_x$  en  $X$ . Luego,  $C \cup V_x$  es conexo. Como  $C$  es una componente,  $V_x \subset C$ . Por lo tanto,  $C$  es abierta. Así, mostramos que un espacio localmente conexo es la unión de sus componentes conexas. En el Ejemplo 1.1.2 el arco, el triodo y la curva cerrada simple son continuos localmente conexos. Sin embargo, en la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 1.1.2 podemos ver que para cada punto de acumulación  $z$  de  $A = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$ , existen vecindades que no contienen un abierto conexo. Así, la curva senoidal del topólogo no es un continuo localmente conexo. Con este ejemplo vemos que la conexidad no implica la conexidad local.

Enunciamos la siguiente definición de convergencia que utilizaremos en alguna prueba. Esta clase de convergencia se puede consultar en [9].

**Definición 1.1.6.** Sean  $X$  un continuo y  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de subconjuntos de  $X$ . Definimos el límite inferior de  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  que denotaremos por  $\liminf A_n$ , y el límite superior de  $(A_n)_{n=1}^{\infty}$  que denotaremos  $\limsup A_n$ , de la siguiente manera:

1.  $\liminf A_n = \{x \in X : \text{para cualquier abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \text{ excepto un número finito de índices}\};$
2.  $\limsup A_n = \{x \in X : \text{para cualquier abierto } U \text{ en } X \text{ con } x \in U, \text{ tenemos que } U \cap A_n \neq \emptyset \text{ para un número infinito de índices}\}.$

Además, diremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  para algún  $A \subset X$ , si  $\liminf A_n = A = \limsup A_n$ .

Una de las técnicas conocidas para construir continuos es la intersección de continuos anidados. El siguiente teorema nos será de utilidad para probar que esta intersección es un continuo, ver [16, Proposición 1.7].

**Teorema 1.1.7.** Sea  $(X_i)_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de espacios compactos métricos tales que  $X_{i+1} \subset X_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots$  y sea  $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ . Si  $U$  es un abierto de  $X_1$  tal que  $X \subset U$ , entonces existe  $N$  tal que  $X_i \subset U$  para todo  $i \geq N$ .

*Demostración.* Supongamos que para cada  $i = 1, 2, \dots$ , existe  $x_i \in X_i \setminus U$ , donde  $U$  es un abierto de  $X_1$  tal que  $X \subset U$ . Como  $X_1 \setminus U$  es un espacio métrico compacto, se tiene que la sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  converge a algún punto  $p \in X_1 \setminus U$ . Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_i \in X_k$  para todo  $i \geq k$ . Así,  $p \in X_k$  para cada  $k$ , luego  $p \in X$ . Como  $p \notin U$ , entonces  $X \not\subset U$ . Luego, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $X_i \subset U$  para toda  $i \geq N$ , entonces  $X \neq \emptyset$  si cada  $X_i \neq \emptyset$ .  $\square$

El siguiente teorema es de gran utilidad para encontrar ejemplos de continuos. La prueba de éste, la tomamos de [16, Teorema 1.8].

**Teorema 1.1.8.** *Sea  $(X_i)_{i=1}^{\infty}$  una sucesión de continuos tal que  $X_{i+1} \subset X_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots$ . Si  $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ , entonces  $X$  es un continuo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  no es conexo. Entonces, existen  $A$  y  $B$  conjuntos cerrados disjuntos no vacíos tales que  $X = A \cup B$ . Como  $X_1$  es un espacio normal existen subconjuntos abiertos  $V$  y  $W$  de  $X$  tal que  $A \subset V$  y  $B \subset W$ . Sea  $U = V \cup W$ , entonces  $X_n \subset U$  para algún  $n$ . Así,  $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$ . Como  $X = A \cup B \subset X_1$ ,  $A \neq \emptyset$  y  $B \neq \emptyset$ . Tenemos que  $X_n \cap V \neq \emptyset$  y  $X_n \cap W \neq \emptyset$ . Esto contradice la conexidad de  $X_n$ . Por lo tanto  $X$  es conexo.  $\square$

Otra manera de encontrar ejemplos de continuos es haciendo productos a lo más numerables; es decir, si  $\{X_l : l \in L\}$  es una familia de continuos, tal que  $|L| < \omega$  donde  $|\mathbb{R}| = \omega$ , entonces  $\prod_{l \in L} X_l$  es un continuo (ver por ejemplo [16, Teorema 2.1]). Así, en particular,  $[0, 1]^n$  la denominada  $n$ -celda, es un ejemplo de un continuo.

En la prueba de algunos teoremas utilizaremos ciertos resultados de topología general, uno de ellos es el Teorema de Baire el cual enunciamos de la manera que nos será de utilidad, a continuación. La prueba se puede deducir de la versión mostrada en [19, Teorema 25.3].

**Teorema 1.1.9.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $(K_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de cerrados no vacíos tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$ , entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{Int}_X(K_{n_0}) \neq \emptyset$ .*

A continuación enunciamos y demostraremos el Teorema del Cable Cortado. Este teorema lo usaremos para demostrar el Teorema de Golpes en la Frontera, que nos será de gran utilidad en el desarrollo de esta tesis. Pero antes, daremos algunas definiciones y resultados previos.

**Definición 1.1.10.** Sean  $X$  un continuo y  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  una familia finita de subconjuntos no vacíos de  $X$ . Decimos que  $\mathcal{U}$  es una *cadena* si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$ . Además, si  $a$  y  $b$  son puntos de  $X$  tales que  $a \in U_1$  y  $b \in U_n$ , diremos que  $\mathcal{U}$  es una *cadena de  $a$  a  $b$* .

Tendremos la siguiente terminología: si los elementos de  $\mathcal{U}$  son abiertos, diremos que  $\mathcal{U}$  es una *cadena abierta*. Si existe  $\varepsilon > 0$ ,  $\text{diám}(U_j) < \varepsilon$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces decimos que  $\mathcal{U}$  es una  $\varepsilon$ -*cadena*. Los elementos  $U_i$  de  $\mathcal{U}$  son llamados *eslabones*.

Con el siguiente resultado cuya demostración la tomamos de [8, Teorema 3.4], se muestra que en un espacio conexo para cualquier par de puntos  $a$  y  $b$ , podemos encontrar una cadena abierta de  $a$  a  $b$ .

**Teorema 1.1.11.** *Si  $X$  es un espacio conexo,  $a$  y  $b$  son dos puntos de  $X$  y  $\mathcal{A}$  es una cubierta abierta de  $X$ , entonces podemos encontrar una cadena de  $a$  a  $b$  formada con elementos de  $\mathcal{A}$ .*

*Demostración.* Sean  $a, b \in X$  y  $\mathcal{A}$  una cubierta abierta de  $X$ . Consideremos el conjunto  $D = \{x \in X : \text{existe una cadena de elementos de } \mathcal{A} \text{ de } a \text{ a } x\}$ . Dado que  $\mathcal{A}$  cubre a  $X$ , existe  $U \in \mathcal{A}$  tal que  $a \in U$ . Luego, si  $x \in U$  entonces  $x \in D$  y, por consiguiente,  $D \neq \emptyset$ . Ahora veamos que  $D$  es abierto y cerrado. Sea  $x \in D$ . Por definición de  $D$ , existen  $U_1, U_2, \dots, U_n \in \mathcal{A}$  tal que  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  es una cadena de  $a$  a  $x$ . Observemos que para todo  $y \in U_n$ ,  $y \in D$  ya que podemos tomar la misma cadena de  $a$  a  $x$ ,  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  como la cadena de  $a$  a  $y$ . Por lo tanto  $U_n \subset D$ . Así  $D$  es abierto en  $X$ .

Supongamos que  $D$  no es cerrado. Entonces,  $\text{Cl}_X(D) \setminus D \neq \emptyset$ . Sea  $z \in \text{Cl}_X(D) \setminus D$ . Como  $\mathcal{A}$  cubre a  $X$ , existe un  $U_\alpha$  tal que  $z \in U_\alpha$ . Además,  $U_\alpha \cap D \neq \emptyset$ , pues  $z \in \text{Cl}_X(D)$ . Para un  $y \in U_\alpha \cap D$  existe una cadena  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  de  $a$  a  $y$ .

Sea  $m = \min\{i \in \{1, \dots, n\} : U_i \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ . Así, es claro que  $\{U_1, U_2, \dots, U_m, U_\alpha\}$  es una cadena de  $a$  a  $z$ . Por lo tanto  $z \in D$  y tenemos una contradicción. De esto  $D$  es cerrado. Finalmente, como  $X$  es conexo y  $D$  es abierto y cerrado, tenemos que  $X = D$  y  $b \in D$ , concluyendo nuestra prueba.  $\square$

Ahora estamos listos para enunciar el Teorema del Cable Cortado. La demostración va tener algunos resultados citados del Capítulo 4 de [16] que, aunque son importantes, sus demostraciones implicarían hacer una extensión considerable del capítulo, con inclusión de nuevos conceptos que no son relevantes para el desarrollo del trabajo.

**Teorema 1.1.12.** *Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados no vacíos de  $X$ . Si no existe un conexo que interseque a  $A$  y  $B$ , entonces existen  $X_1$  y  $X_2$  cerrados de  $X$  tales que  $X = X_1 \cup X_2$ ,  $A \subset X_1$ ,  $B \subset X_2$  y  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  cerrados no vacíos de  $X$  tales que no existe un conexo que interseque simultáneamente a  $A$  y  $B$ . Probemos primero la siguiente afirmación:

**Afirmación 1.1.13.** *Existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que no existe una  $\frac{1}{2^i}$ -cadena de algún punto de  $A$  a algún punto de  $B$ .*

Supongamos que para cada  $i \in \mathbb{N}$  existe una  $\frac{1}{2^i}$ -cadena, llamémosla la  $\mathcal{K}_i = \{U_1, \dots, U_{n_i}\}$  de  $a_i$  a  $b_i$ , para algunos puntos  $a_i \in A$  y  $b_i \in B$ . Sea  $K_i = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_i}\}$  donde  $x_1 = a_i$ ,  $x_{n_i} = b_i$  y  $x_j \in U_j$  para cada  $j \in \{2, \dots, n_i - 1\}$ . Es claro que  $K_i$  es compacto de  $X$ , de donde  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de compactos de  $X$ . Por [16, Teorema 4.14], existe una subsucesión  $(K_{i(j)})_{j=1}^\infty$  de  $(K_i)_{i=1}^\infty$  que converge a  $K$  un compacto de  $X$ . Además, por la manera como construimos los  $K_i$ ,  $K$  es un continuo, por [16, Teorema 4.16]. Así,  $K$  es un continuo tal que  $K \cap A \neq \emptyset$  y  $K \cap B \neq \emptyset$ . Contradiciendo nuestra suposición y concluyendo la prueba de la Afirmación 1.1.13.

Sea  $k \in \mathbb{N}$  que satisface la Afirmación 1.1.13. Definamos

$$\mathcal{C}(A, k) = \{x \in X : \text{existe } \frac{1}{2^k}\text{-cadena abierta de algún punto de } A \text{ a } x\}.$$

Por la Afirmación 1.1.13,  $B \cap \mathcal{C}(A, k) = \emptyset$ . Sea  $z \in \mathcal{C}(A, k)$ . Entonces existe una  $\frac{1}{2^k}$ -cadena de  $a$  a  $z$ , para algún  $a \in A$ . Sea  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  tal cadena de  $a$  a  $z$ . Es claro que para cada  $y \in U_n$ ,  $\mathcal{U}$  es una  $\frac{1}{2^k}$ -cadena de  $a$  a  $y$ . Así,  $U_n \subset \mathcal{C}(A, k)$  y  $\mathcal{C}(A, k)$  es abierto. Veamos ahora que  $\mathcal{C}(A, k)$  es cerrado. Sea  $x \in \text{Cl}_X(\mathcal{C}(A, k))$ . Entonces  $B(x, \frac{1}{2^k}) \cap \mathcal{C}(A, k) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in B(x, \frac{1}{2^k}) \cap \mathcal{C}(A, k) \neq \emptyset$ . Entonces existe una  $\frac{1}{2^k}$ -cadena abierta  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  de  $a$  a  $z$  para algún  $a \in A$ .

Sea  $m = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : U_j \cap B(x, \frac{1}{2^k}) \neq \emptyset\}$ . Así,  $\{U_1, \dots, U_m, B(x, \frac{1}{2^k})\}$  es una  $\frac{1}{2^k}$ -cadena abierta de  $a$  a  $x$ . Con lo que  $x \in \mathcal{C}(A, k)$  y  $\mathcal{C}(A, k)$  es cerrado.

Finalmente, como  $\mathcal{C}(A, k)$  es abierto y cerrado, basta tomar  $X_1 = \mathcal{C}(A, k)$  y  $X_2 = X \setminus \mathcal{C}(A, k)$  y concluimos la prueba del teorema.  $\square$

El siguiente resultado es llamado el Teorema de Golpes en la Frontera que, como mostramos, es una fácil consecuencia del Teorema del Cable Cortado.

**Teorema 1.1.14.** *Sean  $X$  un continuo y  $U$  un abierto propio de  $X$  diferente del vacío. Si  $K$  es una componente de  $\text{Cl}_X(U)$ , entonces  $K \cap \text{Fr}_X(U) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Sean  $U$  abierto propio de  $X$  diferente del vacío y  $K$  una componente de  $\text{Cl}_X(U)$ . Supongamos que  $K \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$ . Nótese que  $K$  y  $\text{Fr}_X(U)$  son cerrados de  $\text{Cl}_X(U)$  tales que no existe un conexo que intersekte simultáneamente a  $K$  y  $\text{Fr}_X(U)$ , pues  $K$  es una componente. Así, existen  $X_1$  y  $X_2$  cerrados disjuntos de  $\text{Cl}_X(U)$  tales que  $K \subset X_1$ ,  $\text{Fr}_X(U) \subset X_2$  y  $\text{Cl}_X(U) = X_1 \cup X_2$ , por el Teorema 1.1.12.

Sea  $X_3 = X_2 \cup (X \setminus U)$ . Obsérvese que  $X_3$  es cerrado no vacío en  $X$  y  $X = X_1 \cup X_3$ . Finalmente,  $X_1 \cap X_3 = \text{Cl}_X(U) \cap (X \setminus U) = \text{Fr}_X(U) \subset X_2$  y como  $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ ,  $X_1 \cap X_3 = \emptyset$ , contradiciendo la conexidad de  $X$ .  $\square$

Un resultado inmediato del Teorema 1.1.14 se sigue a continuación.

**Corolario 1.1.15.** *Todo continuo no degenerado tiene subcontinuos propios no degenerados.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces dados dos puntos  $p, q \in X$ , existe un abierto  $U$  tal que  $p \in U$  y  $q \notin \text{Cl}_X(U)$ . Sea  $L$  la componente de  $\text{Cl}_X(U)$  tal que  $p \in L$ . Claramente  $L$  es un continuo. Como  $L \cap \text{Fr}_X(U) \neq \emptyset$ ,  $L$  no es degenerado. Además  $L \neq X$  porque  $q \notin L$ .  $\square$

El siguiente teorema nos será de gran utilidad, para mostrar algunas propiedades que preservan los continuos con relación a sus subcontinuos propios.

**Teorema 1.1.16.** *Sean  $X$  un continuo y  $A$  un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $X \setminus A$  es desconexo y  $X \setminus A = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos y diferentes del vacío, entonces  $A \cup U$  y  $A \cup V$  son subcontinuos propios de  $X$ .*

*Demostración.* Sean  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos diferentes de vacío tales que  $X \setminus A = U \cup V$ . Como  $U \cap V = \emptyset$ , es claro que  $X \setminus (A \cup V) = U$  es abierto, con lo que  $A \cup V$  es cerrado de  $X$ . De la misma forma se muestra que  $A \cup U$  es cerrado en  $X$ . Así, debemos probar que  $A \cup U$  y  $A \cup V$  son conexos. Mostremos que  $A \cup V$  es conexo. Supongamos que  $A \cup V = K \cup L$ , donde  $K$  y  $L$  son dos cerrados disjuntos de  $X$ . Como  $A$  es conexo,  $A \subset K$  o  $A \subset L$ . Sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que  $A \subset K$ . Con lo que  $L \subset U$ . Así,  $L \cap \text{Cl}_X(K \cup V) = \emptyset$ . Como  $X = L \cup (K \cup V)$ , contradecimos la conexidad de  $X$ . De la misma forma mostramos que  $A \cup U$  es conexo.  $\square$

## 1.2. LÍMITES INVERSOS

En esta sección mostramos otra manera de construir continuos a partir de un subespacio de un espacio producto. Este subespacio es conocido como espacio límite inverso y lo definimos a continuación.

Sea  $(X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^{\infty}$  una sucesión doble, donde  $X_n$  es un espacio métrico compacto no vacío y  $f_n^{n+1}: X_{n+1} \rightarrow X_n$  una función continua, para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Esta sucesión es llamada *sucesión inversa* y las funciones son llamadas *funciones de ligadura*.

**Definición 1.2.1.** El *límite inverso* de una sucesión inversa  $(X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ , denotado por  $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^{\infty}$  o algunas veces por  $X_{\infty}$ , se define por

$$\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^{\infty} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

El siguiente resultado nos muestra otra forma de construir continuos.

**Teorema 1.2.2.** *Un límite inverso de continuos es un continuo.*

*Demostración.* Sean  $X_n$  continuos y  $(X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^{\infty}$  una sucesión inversa. Denotamos  $X_{\infty} = \varprojlim \{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Veamos que  $X_{\infty}$  es la intersección numerable de continuos anidados. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos el conjunto

$$Q_k(X_n, f_n) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } k \leq n\}.$$

Por la definición de  $Q_k(X_n, f_n)$  es fácil ver que  $Q_{k+1}(X_n, f_n) \subset Q_k(X_n, f_n)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  y que  $X_{\infty} = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k(X_n, f_n)$ . Para mostrar que para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q_k(X_n, f_n)$  es un continuo, definimos el homeomorfismo  $h: Q_k(X_n, f_n) \rightarrow \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$ , dado por  $h((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=k+1}^{\infty}$ . Como  $\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$  es un continuo,  $Q_k(X_n, f_n)$  también lo es.

Así por el Teorema 1.1.8,  $X_{\infty}$  es un continuo.  $\square$

En [2] se muestra en detalle que el continuo *Knaster* descrito en el Ejemplo 1.1.3 es homeomorfo al límite inverso de arcos con funciones de ligadura  $f(x) = 1 - |2x - 1|$ . Allí se muestran los continuos llamados tipo Knaster, los cuales tienen una representación geométrica similar al continuo de Knaster.

# Capítulo 2

## CONTINUOS IRREDUCIBLES

Como se definió en el capítulo anterior, la teoría de continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos, compactos y conexos diferentes del vacío. Un continuo *irreducible* es un continuo en el cual existen dos puntos tales que no existe un subcontinuo propio que los contiene. Estos continuos fueron definidos por Ludovic Zoratti en 1909 [11, pág. 12].

Es conocido que dados dos puntos en un continuo existe un subcontinuo irreducible entre esos dos puntos [12, Teorema 1, pág. 192]. Además, dada una  $n$ -celda o el cubo de Hilbert, la familia de los subcontinuos irreducibles forma un subconjunto  $G_\delta$  denso en la familia de todos los subcontinuos de la  $n$ -celda o el cubo de Hilbert, respectivamente [16, Ejercicio 1.17, Corolario 11.15.1]. Esto en cierta forma dice que la cantidad de continuos irreducibles es mayor que los que no lo son. Por estas y otras razones es importante el estudio de los continuos irreducibles en teoría de continuos.

En este capítulo definimos los continuos irreducibles e indescomponibles. Probamos que todo continuo indescomponible es irreducible y estudiamos algunas propiedades de esta clase de continuos. También estudiamos algunos resultados de los trabajos desarrollados por Brouwer, Mazurkiewicz, Janiszewski y Kuratowski.

### 2.1. DEFINICIÓN, EJEMPLOS Y PROPIEDADES.

En esta sección definimos continuos irreducibles, mostramos algunos ejemplos y estudiamos algunas propiedades importantes.

**Definición 2.1.1.** Sea  $X$  un continuo. Decimos que  $X$  es *irreducible*, si existen dos puntos  $a$  y  $b$  en  $X$  tales que para cualquier subcontinuo  $K$  de  $X$  tal que  $\{a, b\} \subset K$  se tiene que  $K = X$ . En tal caso se dice que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ ;  $a$  y  $b$  son llamados *puntos de irreducibilidad*.

**Ejemplo 2.1.2.** *Algunos ejemplos sencillos de continuos irreducibles son:*

1. Un arco  $\alpha$  es irreducible. Si  $f: [0, 1] \rightarrow \alpha$  es un homeomorfismo, entonces  $\alpha$  es irreducible entre  $f(0)$  y  $f(1)$ .

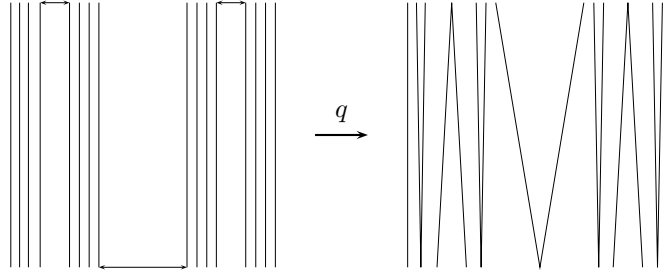
2.  $X = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2} \{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x \in (0, 1]\}$ , la curva senoidal del topólogo, ver Ejemplo 1.1.2 (2), es irreducible entre  $(1, \sin(1))$  y cualquier punto en  $\{0\} \times [-1, 1]$ .
3.  $S^1$  y el triodo simple no son continuos irreducibles.

A continuación definimos un continuo irreducible muy interesante, que nos será de utilidad para construir ejemplos más adelante.

**Ejemplo 2.1.3.** *El espacio conocido como continuo de  $V$ 's y  $\Lambda$ 's que definimos a continuación es irreducible.*

Sean  $\mathcal{C}$  el conjunto de Cantor definido en  $[0, 1]$  y  $Z = \mathcal{C} \times [0, 1]$ . Tomamos los puntos de la forma  $\{\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\}$ , en  $\mathcal{C}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq k \leq n$ , e identificamos alternadamente parejas de puntos siguiendo la siguiente secuencia:  $(\frac{1}{3}, 0) \sim (\frac{2}{3}, 0)$ ,  $(\frac{1}{9}, 1) \sim (\frac{2}{9}, 1)$ ,  $(\frac{7}{9}, 1) \sim (\frac{8}{9}, 1)$ ,  $(\frac{1}{27}, 0) \sim (\frac{2}{27}, 0)$ , .... Si  $q: Z \rightarrow M$  es la función cociente, donde  $M = Z/\sim$ , entonces el continuo  $M$  lo podemos visualizar como mostramos en la FIGURA 2.1.

Figura 2.1: Función cociente  $q: Z \rightarrow M$



El continuo  $M$  o continuo de  $V$ 's y  $\Lambda$ 's es irreducible entre cualquier punto de  $\{0\} \times [0, 1]$  y cualquier punto de  $\{1\} \times [0, 1]$ . Para una construcción más detallada de este continuo y una prueba que  $M$  es en efecto irreducible ver [12, 4, pág. 191].

Con el siguiente teorema mostramos que en los continuos irreducibles, el complemento de los subcontinuos que separan el espacio es la unión de dos abiertos conexos.

**Teorema 2.1.4.** *Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $p$  y  $q$ , y  $K$  un subcontinuo de  $X$ . Si  $X \setminus K$  es desconexo, entonces  $X \setminus K = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abierto conexos y disjuntos en  $X$ , con  $p \in U$  y  $q \in V$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X \setminus K$  es desconexo, entonces existen abiertos disjuntos  $U$  y  $V$  diferentes de vacío tales que  $X \setminus K = U \cup V$ . Además,  $U \cup K$  y  $K \cup V$  son subcontinuos de  $X$ , por el Teorema 1.1.16. Como  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ ,  $\{p, q\} \not\subseteq U \cup K$  y  $\{p, q\} \not\subseteq K \cup V$ . Es claro que  $X = U \cup K \cup V$  y como  $\{p, q\} \cap K = \emptyset$ , tenemos que  $p \in U$  y  $q \in V$ .

Ahora, supongamos que  $U$  no es conexo. Entonces existen  $U_1$  y  $U_2$  abiertos disjuntos no vacíos de  $X$  tales que  $U = U_1 \cup U_2$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p \in U_1$ . Como  $U \cup K$  es un continuo y  $(U \cup K) \setminus K = U_1 \cup U_2$ ,  $U_1 \cup K$  es un subcontinuo propio de  $U \cup K$ , por el

Teorema 1.1.16. Así  $U_1 \cup K \cup V$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $\{p, q\}$ , pero esto contradice la irreducibilidad de  $X$  entre  $p$  y  $q$ . Por lo tanto  $U$  es conexo. De la misma forma se muestra que  $V$  es conexo.  $\square$

Del teorema anterior podemos ver los siguientes resultados.

**Corolario 2.1.5.** Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $p$  y  $q$  y  $K$  un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $p \in K$ , entonces  $X \setminus K$  es conexo.

*Demostración.* Nótese que como  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$  y  $K$  es un subcontinuo propio tal que  $p \in K$ , tenemos que  $q \notin K$ . Supongamos  $X \setminus K$  es desconexo. Entonces existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos no vacíos de  $X$  tales que  $X \setminus K = U \cup V$ . Como  $q \notin K$ ,  $q \in U$  o  $q \in V$ . Supongamos que  $q \in U$ . Así  $U \cup K$  es un subcontinuo propio de  $X$  y  $\{p, q\} \subset U \cup K$ ; esto contradice la irreducibilidad de  $X$  entre  $p$  y  $q$ . Por lo tanto  $X \setminus K$  es conexo.  $\square$

**Corolario 2.1.6.** Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $p$  y  $q$  y  $K$  un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $p \in \text{Fr}_X(K)$ , entonces  $\text{Int}_X(K) = \emptyset$ .

*Demostración.* Como  $K$  es continuo y  $p \in K$ , tenemos que  $X \setminus K$  es conexo, por el Corolario 2.1.5. Además,  $q \in X \setminus K$ . Así,  $\{p, q\} \subseteq \text{Cl}_X(X \setminus K)$  pues,  $p \in \text{Fr}_X(K)$ . De lo que  $X = \text{Cl}_X(X \setminus K)$ . De lo anterior  $\text{Int}_X(K) = X \setminus \text{Cl}_X(X \setminus K) = \emptyset$ .  $\square$

En los Corolarios 2.1.5 y 2.1.6, se muestran dos propiedades de los subcontinuos de un continuo irreducible que contienen puntos de irreducibilidad. Siguiendo esta idea, mostramos la prueba de [12, Teorema 4 pág. 193], el cual se refiere al complemento de la unión de dos subcontinuos propios que contienen a los puntos de irreducibilidad.

**Proposición 2.1.7.** Sea  $X$  un continuo irreducible entre  $p$  y  $q$ . Si  $A$  y  $B$  son subcontinuos de  $X$  tales que  $p \in A$  y  $q \in B$ , entonces  $X \setminus (A \cup B)$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $A \cap B \neq \emptyset$ . Como  $X$  es irreducible  $X = A \cup B$ . Así,  $X \setminus (A \cup B) = \emptyset$  es conexo.

Ahora, supongamos que  $A \cap B = \emptyset$ . Entonces,  $X \setminus A$  es conexo, por el Corolario 2.1.5. Supongamos además que  $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \setminus B$  es desconexo. Entonces, existen dos conjuntos no vacíos  $U$  y  $V$  tales que  $U \cap \text{Cl}_X(V) = \emptyset$  y  $V \cap \text{Cl}_X(U) = \emptyset$  y  $X \setminus (A \cup B) = U \cup V$ . Así,  $B$  separa a  $X \setminus A$  y  $B \cup U$  y  $B \cup V$  son conexos, por el Teorema 1.1.16. Luego  $B \cup \text{Cl}_X(U)$  y  $B \cup \text{Cl}_X(V)$  son continuos. Como  $X = (A \cup B) \cup \text{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B)$  y  $A \cap B = \emptyset$ , se tiene que  $A \cap \text{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B) \neq \emptyset$ . De lo contrario  $X = A \cup \text{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B)$ , lo cual contradice la conexidad de  $X$ .

Así,  $A \cap \text{Cl}_X((X \setminus A) \setminus B) = A \cap \text{Cl}_X(U \cap V) \neq \emptyset$ , entonces  $A \cap \text{Cl}_X(U) \neq \emptyset$  o  $A \cap \text{Cl}_X(V) \neq \emptyset$ . Supongamos que  $A \cap \text{Cl}_X(U) \neq \emptyset$ . Entonces,  $A \cup \text{Cl}_X(U) \cup B$  es un continuo de  $X$  que contiene a  $p$  y  $q$ . Como  $X$  es irreducible,  $X = A \cup \text{Cl}_X(U) \cup B$  y  $V = \emptyset$ . Por lo tanto  $X \setminus (A \cup B)$  es conexo.  $\square$

Con la siguiente proposición mostramos que el interior de cualquier subcontinuo de un continuo irreducible es conexo, ver [12, Teoremas 5, pág. 194].

**Proposición 2.1.8.** Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $p$  y  $q$ . Si  $K$  es un subcontinuo de  $X$ , entonces  $\text{Int}_X(K)$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $p \in K$ . Entonces,  $X \setminus K$  es conexo, por el Corolario 2.1.5. Así,  $\text{Cl}_X(X \setminus K)$  es un subcontinuo de  $X$  que contiene a  $q$ . Luego  $\text{Int}_X(K) = X \setminus \text{Cl}_X(X \setminus K)$  es conexo.

Supongamos  $X \setminus K$  es desconexo. Entonces, existen  $U$  y  $V$  abiertos conexos de  $X$  tales que  $p \in U$ ,  $q \in V$  y  $X \setminus K = U \cup V$ , por el Teorema 2.1.4. Notemos que los continuos  $\text{Cl}_X(U)$  y  $\text{Cl}_X(V)$  contienen a  $p$  y  $q$  respectivamente. Luego,  $\text{Int}_X(K) = X \setminus \text{Cl}_X(X \setminus K) = X \setminus (\text{Cl}_X(U) \cup \text{Cl}_X(V))$  es conexo, por la Proposición 2.1.7.  $\square$

## 2.2. COMPOSANTES DE UN CONTINUO

En esta sección trataremos un conjunto definido por Janiszewski y Kuratowski llamado composante, con el propósito de establecer algunas propiedades y relaciones de los continuos irreducibles.

**Definición 2.2.1.** Sean  $X$  un continuo no degenerado y  $p \in X$ . La *composante* de  $p$  en  $X$ , que denotaremos por  $\kappa(p)$ , es definida por:

$$\kappa(p) = \bigcup \{K : p \in K \text{ y } K \text{ es un subcontinuo propio de } X\}$$

Las composantes de algunos continuos son:

**Ejemplo 2.2.2.** 1. Sea  $X = [0, 1]$ , las composantes de  $X$  son:  $\kappa(0) = [0, 1]$ ,  $\kappa(1) = (0, 1]$  y  $\kappa(p) = [0, 1]$  si  $p \in (0, 1)$

2. Sea  $X = S^1$  entonces,  $\kappa(p) = S^1$ , para todo  $p \in S^1$

3. Consideremos el continuo  $X = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2} \{(x, \text{sen} \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\}$ , la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 1.1.2(2), donde  $J = \{0\} \times [-1, 1]$ . Tenemos que:

a) si  $p \in J$ ,  $\kappa(p) = X \setminus \{(1, \text{sen} 1)\}$ .

b) si  $c \in \{(x, \text{sen} \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1)\}$ ,  $\kappa(c) = X$  y

c)  $\kappa((1, \text{sen} 1)) = \{(x, \text{sen} \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$

De la definición es fácil ver que las composantes son conexas, pero no todas son compactas. Así en algunos contextos se dice que las composantes son semicontinuos de  $X$ . Janiszewski y Kuratowski mostraron que toda composante es densa como mostramos en el siguiente resultado [12, Teorema 2, pág. 209].

**Teorema 2.2.3.** Sea  $X$  un continuo no degenerado. Si  $p \in X$  entonces  $\kappa(p)$  es denso en  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\kappa(p) \neq X$ . Sea  $x \in X \setminus \kappa(p)$ . Supongamos que  $x \notin \text{Cl}_X(\kappa(p))$ . Entonces, existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V$  y  $V \cap \kappa(p) = \emptyset$ . Como  $X$  es métrico, existe un conjunto abierto  $U$  en  $X$  tal que  $(X \setminus V) \subset U$  y  $x \notin \text{Cl}_X(U)$  [8, Teorema 2.5]. Nótese que  $\kappa(p) \subset U$  y  $\kappa(p) \cap \text{Fr}_X(U) = \emptyset$ .

Sea  $L$  la componente de  $\text{Cl}_X(U)$  tal que  $\kappa(p) \subset L$ . Entonces,  $L \cap \text{Fr}_X(U) \neq \emptyset$  por el Teorema 1.1.14 y  $\kappa(p) \neq L$ . Ahora, como  $L$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $p$ ,  $L \subset \kappa(p)$ . Esto contradice que  $\kappa(p) \neq L$ . Así,  $V \cap \kappa(p) \neq \emptyset$  y  $\kappa(p)$  es denso.  $\square$

El anterior resultado fue demostrado por Janiszewski y Kuratowski para espacios conexos, compactos, Hausdorff y no vacíos, los cuales son llamados continuos Hausdorff [11, pág. 42]. Otra de las propiedades mostradas por Kuratowski es sobre el complemento de las composantes [12, Teorema 3, pág. 210].

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Si  $p \in X$ , entonces  $X \setminus \kappa(p)$  es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X \setminus \kappa(p) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in X \setminus \kappa(p)$  y supongamos que  $X \setminus \kappa(p)$  no es conexo. De esto, existen  $E$  y  $F$  conjuntos de  $X$  tales que  $X \setminus \kappa(p) = E \cup F$  con  $\text{Cl}_X(E) \cap F = \emptyset$  y  $E \cap \text{Cl}_X(F) = \emptyset$ . Supongamos que  $x \in E$ . Como  $X$  es un espacio métrico, tenemos que existen abiertos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $E \subset U$ ,  $F \subset V$  y  $\text{Cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ . Nótese que  $\text{Fr}_X(U) \cap (E \cup F) = \emptyset$ . Sea  $L$  la componente de  $\text{Cl}_X(U)$  tal que  $x \in L$ . Entonces,  $(L \cap \text{Fr}_X(U)) \neq \emptyset$ , por el Teorema 1.1.14. Así,  $L \cap \kappa(p) \neq \emptyset$ . Sean  $z \in L \cap \kappa(p)$  y  $K$  un subcontinuo propio de  $X$  tales que  $\{z, p\} \subset K$ ; es claro que  $L \cup K$  es un subcontinuo de  $X$ . Como  $(L \cup K) \subset (\kappa(p) \cup \text{Cl}_X(U)) \subset X \setminus V$ .  $L \cup K$  es un subcontinuo propio de  $X$ , así  $x \in \kappa(p)$  contradiciendo nuestra suposición. Por lo tanto  $X \setminus \kappa(p)$  es conexo.  $\square$

Con el siguiente resultado notamos que dado un continuo  $X$ , la composante de un punto  $p$  se puede expresar como la unión numerable de subcontinuos propios de  $X$ .

**Teorema 2.2.5.** *Sean  $X$  un continuo no degenerado y  $p \in X$ . Entonces existe una familia numerable  $\{D_i : i \in \mathbb{N}\}$  de subcontinuos propios de  $X$ , tal que  $\kappa(p) = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ .*

*Demostración.* Sea  $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$  una base numerable abierta de  $X \setminus \{p\}$ . Sea  $D_i$  la componente de  $X \setminus U_i$  tal que  $p \in D_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Como  $U_i$  es un abierto diferente de vacío,  $D_i$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Así  $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \subset \kappa(p)$ . Sea  $z \in \kappa(p)$ . Existe un subcontinuo propio  $L$  tal que  $\{z, p\} \subset L$ . Sea  $V = X \setminus L$ . Como  $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$  es una base de  $X \setminus \{p\}$ , existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $U_j \subset V$  y dado que  $L$  es conexo,  $L \subset D_j$ . Así  $z \in \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ . Por tanto  $\kappa(p) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ .  $\square$

Las composantes nos permiten determinar si un continuo es o no un continuo irreducible. Veamos el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.6.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Entonces,  $X$  es irreducible si y sólo si existe  $p \in X$  tal que  $\kappa(p) \neq X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es irreducible. Sean  $a$  y  $b$  puntos de  $X$  tales que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ . Nótese que  $b \notin \kappa(a)$ . Así,  $\kappa(a) \neq X$ . Recíprocamente, sea  $p \in X$  tal que  $\kappa(p) \neq X$ . Sea  $a \in X \setminus \kappa(p)$ . Luego por la Definición 2.2.1, no existe  $K$  subcontinuo propio de  $X$  tal que  $\{a, p\} \subset K$ . Por lo tanto  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $p$ .  $\square$

**Corolario 2.2.7.** *Sea  $X$  un continuo no degenerado. Si  $p$  no es un punto de irreducibilidad de  $X$  entonces  $\kappa(p) = X$ .*

La siguiente caracterización, hecha por Kuratowski y mencionada en [12, Teorema 4 pág. 192], nos permite determinar si un punto es o no de irreducibilidad.

**Teorema 2.2.8.** *Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Entonces  $p$  es punto de irreducibilidad de  $X$  si y sólo si no existen dos subcontinuos propios  $A$  y  $B$  en  $X$ , tales que  $X = A \cup B$  y  $p \in A \cap B$ .*

*Demostración.* Supongamos que existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  y  $p \in A \cap B$ . Para todo  $x \in X$ , con  $x \neq p$  se tiene que  $x \in A$  o  $x \in B$ ; esto es,  $\{x, p\} \subset A$  o  $\{x, p\} \subset B$ . Por lo tanto  $p$  no es un punto de irreducibilidad. Supongamos que  $p$  no es un punto de irreducibilidad. Probemos que existen subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $p \in A \cap B$ . Entonces  $\kappa(p) = X$ , por el Corolario 2.2.7. Además,  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$  donde cada  $K_i$  es un subcontinuo propio de  $X$ , por el Teorema 2.2.5. Como

para algún  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in K_n$  tomamos  $D_1 = K_n$ ,  $D_2 = K_n \cup K_j$  donde  $K_n \cap K_j \neq \emptyset$  y en general  $D_{i+1} = D_i \cup K_m$  donde  $D_i \cap K_m \neq \emptyset$ . Tomemos la sucesión  $(D_i)_{i=1}^\infty$ . Por construcción se tiene que  $p \in D_i$  y  $D_i \subsetneq D_{i+1}$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Sea  $x_j \in (D_{j+1} \setminus D_j)$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe  $x \in X$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_i = x$ . Como  $x_j \in X \setminus D_i$ , para cada  $j \geq i$  tenemos que  $x \in \text{Cl}_X(X \setminus D_i)$  para todo  $i$ . Observemos que  $x \in D_m$ , para algún entero positivo  $m$ . De esta manera tenemos que  $\text{Cl}_X(X \setminus D_j) \cap D_m \neq \emptyset$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Nótese que  $X \setminus D_m = \bigcup_{i=1}^\infty (D_i \setminus D_m)$  donde cada  $D_i \setminus D_m$  es abierto en  $D_i$ . Entonces,  $D_i \setminus D_m = \bigcup_{j=1}^\infty B_{ij}$  donde  $B_{ij}$  es cerrado en  $X$  para cada  $i, j \in \mathbb{N}$ , pues  $D_i \setminus D_m$  es un  $F_\sigma$  conjunto [19, Ejercicio 3H]. Reemplazando, tenemos que  $X \setminus D_m = \bigcup_{i=1}^\infty (\bigcup_{j=1}^\infty B_{ij})$ . Como  $X \setminus D_m$  es un abierto de  $X$  diferente de vacío, por el Teorema 1.1.9 (Teorema de Baire), existen  $n$  y  $l$  tales que  $\text{Int}_X(B_{nl}) \neq \emptyset$ , entonces  $\text{Int}_X(D_n \setminus D_m) \neq \emptyset$  y  $\text{Cl}_X(X \setminus (D_n \setminus D_m)) = \text{Cl}_X(X \setminus D_n) \cup D_m \neq X$ . Consideremos dos casos:

1.  $X \setminus D_n$  es desconexo. Entonces existen abiertos  $U$  y  $V$  de  $X$  tales que  $X \setminus D_n = U \cup V$  donde  $U \cap V = \emptyset$ . De lo anterior tomamos  $A = D_n \cup U$  y  $B = D_n \cup V$  entonces  $A$  y  $B$  son subcontinuos propios de  $X$ , por el Teorema 1.1.16. De esta manera  $X = A \cup B$  y  $p \in A \cap B$ .
2.  $X \setminus D_n$  es conexo. Entonces,  $\text{Cl}_X(X \setminus D_n) \cup D_m$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Así  $X = D_n \cup (\text{Cl}_X(X \setminus D_n) \cup D_m)$  donde  $p \in D_n \cap (\text{Cl}_X(X \setminus D_n) \cup D_m)$ .

□

### 2.3. CONTINUOS INDESCOMPONIBLES

En esta sección definimos los continuos indescomponibles, mostramos algunos ejemplos y propiedades.

**Definición 2.3.1.** Un continuo  $X$  es *descomponible* si existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Si un continuo  $X$  no es descomponible se dice que  $X$  es *indescomponible*.

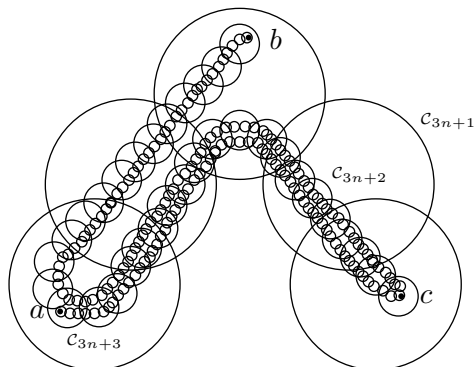
El primer continuo indescomponible fue construido por L. J. E. Brouwer en 1910. Ésta construcción fue simplificada por Janiszewski, pero la versión más conocida es la de Knaster cuya descripción hicimos en el Ejemplo 1.1.3. A continuación mostramos la construcción de un continuo indescomponible utilizando el Teorema 1.1.8. La construcción la tomamos de [16, pág 7].

**Ejemplo 2.3.2.** *Existe un continuo indescomponible en  $\mathbb{R}^2$ .*

Sea  $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  es una colección de subconjuntos de un conjunto  $M$ .  $\mathcal{C}$  es una cadena simple de  $x$  a  $y$  que pasa por  $z$  si cumple las siguientes condiciones:

1.  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$ ;
2.  $x \in A_i$  si y sólo si  $i = 1$ ;
3.  $y \in A_i$  si y sólo si  $i = n$ ;
4.  $z \in A_i$  para algún  $i$ .

Figura 2.2: Continuo indescomponible en  $\mathbb{R}^2$ .



Los elementos  $A_i$  son llamados eslabones.

Sean  $a, b$  y  $c$  tres puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$ . Existe una cadena simple  $\mathcal{C}_n$  en  $\mathbb{R}^2$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que cada eslabón es una 2\_celda con diámetro menor que  $2^{-n}$  que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\mathcal{C}_{3n+1}$  va de  $a$  a  $c$  pasando por  $b$ ,  $\mathcal{C}_{3n+2}$  va de  $b$  a  $c$  pasando por  $a$ , y  $\mathcal{C}_{3n+3}$  va de  $a$  a  $b$  pasando por  $c$ ,
2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\cup \mathcal{C}_{n+1} \subset \cup \mathcal{C}_n$ .

Consideremos  $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\cup \mathcal{C}_n)$ . Nótese que  $X$  es un continuo, por el Teorema 1.1.8.

Probemos que  $X$  es indescomponible. Sea  $L$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $\{a, c\} \subset L$ . Supongamos que  $X \setminus L \neq \emptyset$ . Sea  $x \in X \setminus L$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $B_d(x, \delta) \cap L = \emptyset$ . Como el diámetro de los eslabones de las cadenas tiende a cero, tenemos que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que un eslabón de  $\mathcal{C}_{3n_0+1}$  está contenido en  $B_d(x, \delta)$ . Tomemos  $\mathcal{C}_{3n_0+1} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}$ . Como  $\mathcal{C}_{3n_0+1}$  es una cadena de  $a$  a  $c$  y  $\{a, c\} \subset L$ , tenemos que  $E_r \subset B_d(x, \delta)$ , para algún  $r \in \{2, 3, \dots, l-1\}$ . Notemos que  $L \subset (\cup_{i=1}^{r-1} E_i) \cup (\cup_{i=r+1}^l E_i)$ , donde  $(\cup_{i=1}^{r-1} E_i) \cap (\cup_{i=r+1}^l E_i) = \emptyset$ . Esto contradice la conexidad de  $L$ . Por lo tanto, si  $\{a, c\} \subset L$  para algún subcontinuo  $L$  de  $X$ , entonces  $L = X$ . De la misma forma podemos probar que si  $\{a, b\} \subset L$  o  $\{b, c\} \subset L$ , entonces  $L = X$ . Sean  $A$  y  $B$

subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Como  $a, b, c \in X$ ,  $|\{a, b, c\} \cap A| \geq 2$  o  $|\{a, b, c\} \cap B| \geq 2$ . Así,  $A = X$  o  $B = X$  por lo anterior. De lo que  $X$  es indescomponible.

La siguiente caracterización fue probada por Janiszewski en el artículo escrito junto con Kuratowski " Sur les Continus Indécomposables" en 1920 [10].

**Teorema 2.3.3.** *Un continuo  $X$  es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de  $X$  tiene interior vacío.*

*Demostración.* Supongamos que existe un subcontinuo propio  $K$  tal que  $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ . Consideremos los siguientes casos:

1. Si  $X \setminus K$  es conexo. Entonces,  $\text{Cl}_X(X \setminus K)$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Además,  $K \setminus \text{Cl}_X(X \setminus K) \neq \emptyset$ . Tenemos que  $X = K \cup \text{Cl}_X(X \setminus K)$ .

2. Si  $X \setminus K$  es desconexo. Entonces, existen  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos de  $X$  tales que  $X \setminus K = U \cup V$  y  $K \cup U$  y  $K \cup V$  son subcontinuos de  $X$ , por el Teorema 1.1.16. Así,  $X = (K \cup U) \cup (K \cup V)$ .

1 y 2 contradicen que  $X$  es indescomponible. Por lo tanto  $\text{Int}_X(K) = \emptyset$ .

Para demostrar el recíproco supongamos que  $X$  es descomponible. Entonces, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Como  $A \setminus B$  es un abierto no vacío de  $X$  tal que  $A \setminus B \subset A$ , entonces  $\text{Int}_X(A) \neq \emptyset$ .  $\square$

El Teorema 2.3.3 lo podemos escribir como mostramos en el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.4.** *Un continuo  $X$  es descomponible si y sólo si existe un subcontinuo propio  $K$  de  $X$  tal que  $\text{Int}_X(K) \neq \emptyset$*

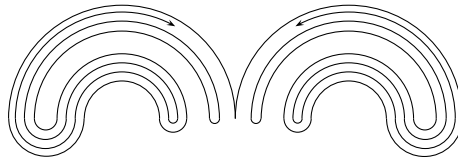
El siguiente resultado aunque no fue enunciado por Janiszewski ni Kuratowski, es fácil ver que es una consecuencia del Teorema 2.3.3.

**Corolario 2.3.5.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible no degenerado, entonces  $X$  no es localmente conexo en ninguno de sus puntos.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es localmente conexo en un punto  $a$ . Sean  $b \in X \setminus \{a\}$  y  $U = X \setminus \{b\}$  un abierto de  $X$  que contiene a  $a$ . Como  $X$  es localmente conexo en  $a$  existe  $V$  abierto conexo de  $X$  tal que  $V \subset \text{Cl}_X(V) \subset U$ .  $\text{Cl}_X(V)$  es un subcontinuo propio de  $X$  con interior no vacío. Así,  $X$  es descomponible, por el Teorema 2.3.3.  $\square$

El recíproco del Corolario 2.3.5 no es cierto. Consideremos el continuo de Knaster definido en el Ejemplo 1.1.3, que denotamos  $\mathcal{K}$  y sea  $\mathcal{Z}$  la reflexión de  $\mathcal{K}$  con respecto al eje  $x = 0$ . El continuo  $X = \mathcal{K} \cup \mathcal{Z}$  es un continuo descomponible que no es localmente conexo en ninguno de sus puntos. Ver FIGURA 2.3.

Figura 2.3: Continuo descomponible no localmente conexo



### 2.3.1. Composantes de continuos indescomponibles

El arco y la circunferencia son los ejemplos más simples de continuos descomponibles. Como vimos en el Ejemplo 2.2.2, el arco tiene 3 composantes y la circunferencia 1 composante. Con el siguiente resultado probamos que este hecho se puede extender a cualquier continuo descomponible; es decir, no existe un continuo descomponible con una cantidad de composantes diferente a 1 o 3.

**Teorema 2.3.6.** *Sea  $X$  un continuo descomponible. Entonces  $X$  tiene una o tres composantes. Además, si  $X$  no es irreducible tiene una composante y si es irreducible tiene tres composantes.*

*Demostración.* Sea  $X$  un continuo descomponible. Supongamos primero que  $X$  no es irreducible. Sea  $p \in X$ . Como  $p$  no es un punto de irreducibilidad, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  y  $p \in A \cap B$ , por el Teorema 2.2.8. Entonces,  $A \subset \kappa(p)$  y  $B \subset \kappa(p)$ . Así,  $X \subset \kappa(p)$  y  $X = \kappa(p)$ . De lo anterior  $\kappa(x) = X$  para todo  $x \in X$  y  $X$  tiene una composante. Supongamos ahora que  $X$  es irreducible. Sean  $p$  y  $q$  puntos de  $X$  tales que  $X$  es irreducible entre  $p$  y  $q$ . Nótese que  $p \in \kappa(p) \setminus \kappa(q)$  y  $q \in \kappa(q) \setminus \kappa(p)$ . Además, como  $X$  es descomponible, existe  $r \in X$  tal que  $\kappa(r) = X$ . Así,  $\kappa(p), \kappa(q)$  y  $X$  son tres composantes diferentes. Sea  $z \in X$ . Probemos que  $\kappa(z)$  es una de estas composantes. Supongamos que  $\kappa(z) \neq X$  y  $\kappa(z) \neq \kappa(q)$ . Como  $X$  es descomponible  $p \in \kappa(z)$ . Veamos que  $\kappa(z) = \kappa(p)$ . Sea  $x \in \kappa(z)$ . Como  $\{x, p\} \subset \kappa(z)$  existen subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $\{x, r\} \subset A$  y  $\{x, p\} \subset B$ . Nótese que  $q \notin A \cup B$  y  $A \cup B \subset \kappa(z)$ . Así,  $x \in \kappa(p)$ . Luego  $\kappa(z) \subset \kappa(p)$ . Análogamente se prueba que  $\kappa(p) \subset \kappa(z)$ . Por lo tanto  $\kappa(z) = \kappa(p)$ . Así,  $X$  sólo tiene tres composantes.  $\square$

El siguiente resultado muestra una implicación del hecho que las composantes son densas en continuos indescomponibles, lo mostramos como un corolario del Teorema 2.2.3.

**Corolario 2.3.7.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces para cada  $x \in X$ ,  $\text{Cl}_X(\kappa(x)) = X$  y  $\kappa(x) \subset \text{Cl}_X(X \setminus \kappa(x)) = X$ .*

*Demostración.* Sea  $x \in X$ . Sabemos que  $\text{Cl}_X(\kappa(x)) = X$  por el Teorema 2.2.3. Veamos que  $\text{Cl}_X(X \setminus \kappa(x)) = X$ . Para cualquier  $x \in X$ , se tiene que  $\kappa(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$  donde  $K_n$  es un subcontinuo propio de  $X$ , por el Teorema 2.2.5. Así,  $X \setminus \kappa(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n)$ . Observemos que cada  $X \setminus K_n$  es un abierto de  $X$  y  $\text{Int}_X(K_n) = \emptyset$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\text{Cl}_X(X \setminus K_n) = X$ . Esto es,  $X \setminus K_n$  es denso en  $X$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n)$  es denso en  $X$ , por el Teorema 1.1.9. Por lo tanto  $\text{Cl}_X(X \setminus \kappa(x)) = X$ .  $\square$

El siguiente teorema fue probado por Janiszewski y Kuratowski en donde se muestra que dados dos puntos de un continuo indescomponible sus composantes son disjuntas o iguales; es decir, la familia de composantes forma una partición del espacio.

**Teorema 2.3.8.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible y  $\kappa(x)$  y  $\kappa(y)$  son composantes de  $X$  entonces se tiene que  $\kappa(x) \cap \kappa(y) = \emptyset$  o  $\kappa(x) = \kappa(y)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\kappa(x) \cap \kappa(y) \neq \emptyset$ . Sea  $z \in \kappa(x) \cap \kappa(y)$ . Veamos que  $\kappa(x) \subset \kappa(y)$ . Sea  $w \in \kappa(x)$ . Entonces, existe un subcontinuo propio  $W$  de  $X$  tal que  $\{x, w\} \subset W$ . Dado que  $z \in \kappa(x) \cap \kappa(y)$ , existen  $L_1$  y  $L_2$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $\{x, z\} \subset L_1$  y  $\{y, z\} \subset L_2$ . Sabemos que  $W \cup L_1$  es un subcontinuo de  $X$  ya que  $x \in W \cap L_1$ . Así,  $\{w, x, z\} \subset W \cup L_1$ . Como  $X$  es indescomponible  $W \cup L_1 \neq X$ . Luego  $W \cup L_1 \cup L_2$  es un subcontinuo de  $X$ , porque  $z \in (W \cup L_1) \cap L_2$ . Además,  $\{w, z, x, y\} \subset W \cup L_1 \cup L_2$ . Nuevamente usando el hecho que  $X$  es indescomponible  $W \cup L_1 \cup L_2 \neq X$ . Lo anterior implica que  $w \in \kappa(y)$  y  $\kappa(x) \subset \kappa(y)$ . Análogamente se prueba que  $\kappa(y) \subset \kappa(x)$ . Por lo tanto  $\kappa(x) = \kappa(y)$ .  $\square$

Con el siguiente resultado mostramos el número de composantes en un continuo indescomponible.

**Teorema 2.3.9.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces  $X$  tiene una cantidad no numerable de composantes.*

*Demostración.* Sea  $\{K_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  la familia de las composantes de  $X$ . Entonces, para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ , existe una familia numerable  $\{D_{\alpha i} : i \in \mathbb{N}\}$  de subcontinuos propios de  $X$ , tal que  $K_\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\alpha i}$ , por el Teorema 2.2.5. Notemos que  $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (\bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\alpha i})$ . Como cada  $D_{\alpha j}$  es un subcontinuo propio de  $X$ ,  $\text{Int}_X(D_{\alpha j}) = \emptyset$ , por el Teorema 2.3.3. Así,  $\mathcal{A}$  debe ser un conjunto no numerable, por el Teorema 1.1.9.  $\square$

De los Teoremas 2.3.6 y 2.3.9 un continuo  $X$  tiene una, tres o una cantidad no numerable de componentes. Además, podemos inferir que un continuo indescomponible tiene una componente al espacio. Así, el siguiente corolario se sigue del Teorema 2.2.6.

**Corolario 2.3.10.** *Si  $X$  es un continuo indescomponible, entonces  $X$  es irreducible.*

Ahora veamos otras caracterizaciones de los continuos indescomponibles.

**Teorema 2.3.11.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces,  $X$  es un continuo indescomponible si y sólo si cada punto de  $X$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in X$ . Por la Teorema 2.3.8,  $\kappa(p) \neq X$ . Así,  $p$  es un punto de irreducibilidad por el Teorema 2.2.6.

Recíprocamente, si  $X$  es descomponible, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Entonces para cualquier punto  $z \in A \cap B$  se tiene que  $\kappa(z) = X$ . Así,  $z$  no es un punto de irreducibilidad de  $X$ .  $\square$

En el Ejemplo 2.3.2, concluimos que el continuo  $X$  era indescomponible porque existían  $a, b$  y  $c$  en  $X$  tales que el continuo era irreducible entre cualquier par de estos tres puntos. Esta es otra caracterización de los continuos indescomponibles como mostramos en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.12.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $X$  es un continuo indescomponible
2. Existe un conjunto no numerable  $J$  tal que  $X$  es irreducible entre cada par de puntos de  $J$ .
3. Existen tres puntos tales que  $X$  es irreducible entre cualquier par de ellos.

*Demostración.* Veamos que 1 implica 2. Como  $X$  es indescomponible,  $X$  tiene una cantidad no numerable de componentes, por el Teorema 2.3.9. Sabemos también que las componentes son disjuntas dos a dos, por el Teorema 2.3.8. Formamos el conjunto  $J$  tomando un punto de cada componente de  $X$ . Así,  $X$  es irreducible entre cada par de puntos de  $J$  y concluimos la afirmación 2.

2 implica 3 se tiene de manera trivial si tomamos tres elementos de  $J$ .

Finalmente, probemos que 3 implica 1. Sean  $a, b$  y  $c$  los tres puntos de  $X$  tales que  $X$  es irreducible entre cualquier par de ellos. Supongamos que  $X$  es descomponible. Entonces, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Es claro que  $|\{a, b, c\} \cap A| \geq 2$  o  $|\{a, b, c\} \cap B| \geq 2$ . Esto contradice la irreducibilidad de  $X$  entre  $a$  y  $b$ ,  $b$  y  $c$  o  $a$  y  $c$ . Por lo tanto  $X$  es indescomponible.  $\square$

Después de estas caracterizaciones veamos que se pueden construir continuos indescomponibles a través de límites inversos los cuales fueron definidos en el Capítulo 1. Recordamos que una sucesión inversa es una doble sucesión  $\{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $X_n$  es un espacio métrico compacto no vacío, y  $f_n: X_{n+1} \rightarrow X_n$  una función continua.

Además, el espacio límite inverso es:

$$X_\infty = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n=1}^\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^\infty X_n : f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Definición 2.3.13.** Una sucesión inversa  $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$  es llamada *sucesión inversa indescomponible* si para cada  $i \in \mathbb{N}$  se tiene que siempre que  $A_{i+1}$  y  $B_{i+1}$  sean subcontinuos de  $X_{i+1}$  tales que  $X_{i+1} = A_{i+1} \cup B_{i+1}$ , entonces  $f_i^{i+1}(A_{i+1}) = X_i$  o  $f_i^{i+1}(B_{i+1}) = X_i$ .

Como mostramos en el Capítulo 1, en el Teorema 1.2.2 el límite inverso es un continuo. A continuación mostraremos que el límite inverso de una sucesión inversa indescomponible es un continuo indescomponible. Consideremos primero el siguiente lema, ver [16, Lema 2.6]

**Lema 2.3.14.** Si  $A$  es un subcontinuo de  $X_\infty$ , entonces  $A = [\prod_{n=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$ .

*Demostración.* Es claro que  $A \subset [\prod_{n=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$ . Veamos que  $[\prod_{n=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty \subset A$ . Sea  $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in [\prod_{n=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$ . Definimos  $K_i = A \cap \pi_i^{-1}(y_i)$ . Como  $A$  es compacto y  $\pi_i$  es continua, para todo  $i = 1, 2, \dots$ ,  $K_i$  es compacto para todo  $i = 1, 2, \dots$ . Veamos que  $K_{i+1} \subset K_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots$ . Sea  $z \in X_\infty$  tal que  $z \in \pi_{i+1}^{-1}(y_{i+1})$ . Tenemos que  $\pi_i(z) = f_i(\pi_{i+1}(z)) = f_i(y_{i+1}) = y_i$ . Así,  $z \in \pi_i^{-1}(y_i)$ . Por lo tanto  $K_{i+1} \subset K_i$ .

Como  $K_i$  es compacto para cada  $i = 1, 2, \dots$  y  $K_{i+1} \subset K_i$  tenemos que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$ . Sea  $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \subset A$ . La  $i$ -ésima coordenada de  $p$  es  $y_i$  para cada  $i = 1, 2, \dots$ . Así  $p = y$ . Por lo tanto  $A = [\prod_{n=1}^{\infty} \pi_i(A)] \cap X_\infty$   $\square$

**Corolario 2.3.15.** Si  $Y$  es un continuo propio de  $X_\infty$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\pi_n(Y)$  es subcontinuo propio de  $X_n$ , para todo  $n \geq N$ .

*Demostración.* Sea  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X_\infty \setminus Y$ . Entonces, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_N \notin \pi_N(Y)$ , así  $\pi_N(Y)$  es un subcontinuo propio de  $X_N$  por el Lema 2.3.14. Supongamos que para algún  $m > N$ ,  $\pi_m(Y) = X_m$ . Dado que  $f_i^{i+1} \circ \pi_{i+1} = \pi_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots$ , por la Definición 1.2.1, se tiene que

$$\pi_N(Y) = f_N^{N+1}(f_{N+1}^{N+2}(\dots(f_{m-1}^m(\pi_m(Y)))))) = f_N^{N+1}(f_{N+1}^{N+2}(\dots(f_{m-1}^m(X_m)))) = X_N.$$

Esto contradice que  $Y$  es propio. Por lo tanto,  $\pi_N(Y)$  es subcontinuo propio de  $X_N$  para todo  $m \geq N$ .  $\square$

Probemos que el continuo generado por esta sucesión es un continuo indescomponible. Esta prueba fue tomada de [16, Teorema 2.7].

**Teorema 2.3.16.** Si  $\{X_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión inversa indescomponible con límite inverso  $X_\infty$ , entonces  $X_\infty$  es un continuo indescomponible.

*Demostración.* Sabemos que  $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es un continuo por el Teorema 1.2.2. Supongamos que  $X_\infty$  es descomponible; esto es, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X_\infty = A \cup B$ . Como  $A$  y  $B$  son propios, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\pi_i(A) \neq X_i$  y  $\pi_i(B) \neq X_i$  para cada  $i \geq N$ . Como cada función de ligadura  $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$  es sobreyectiva, cada proyección  $\pi_i: X_\infty \rightarrow X_i$  es una función sobreyectiva en  $X_i$ , por [13, 2.14]. Así,  $\pi_i(A) \cup \pi_i(B) = X_i$  para cada  $i \in \mathbb{N}$ . Como  $\{X_i, f_i^{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión inversa indescomponible  $f_N^{N+1}(\pi_{N+1}(A)) = X_N$  o  $f_N^{N+1}(\pi_{N+1}(B)) = X_N$ . Pero  $f_N^{N+1} \circ \pi_{N+1} = \pi_N$ . Así,  $\pi_N(A) = X_N$  o  $\pi_N(B) = X_N$ , pero esto claramente contradice que  $\pi_i(A) \neq X_i$  y  $\pi_i(B) \neq X_i$ , para todo  $i \geq N$ . Así,  $X_\infty$  es indescomponible.  $\square$

Como consecuencia de este teorema podemos ver que el continuo de Knaster  $\mathcal{K}$ , descrito en el Ejemplo 1.1.3 es un continuo indescomponible.

El siguiente ejemplo es un continuo indescomponible llamado solenoide diádico.

**Ejemplo 2.3.17.** Sea  $f_i: S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f_i(z) = z^2$  para cada  $z \in S^1$ , el conjunto

$$\Sigma_2 = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} : z_{n+1}^2 = z_n \text{ para cada } n \geq 1\} = \varprojlim \{S^1, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

es un continuo indescomponible.

# Capítulo 3

## FUNCIONES ENTRE CONTINUOS

En cursos de Topología General se definen las funciones continuas para relacionar espacios topológicos. Además se muestran funciones continuas con propiedades adicionales, como funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos, con el fin de preservar alguna propiedad que no se mantiene únicamente con la continuidad. En este capítulo definiremos las funciones monótonas, casimonótonas, cuasimonótonas, débilmente monótonas, confluentes, libremente descomponibles y fuertemente libremente descomponibles. Estudiaremos relaciones entre estas clases de funciones y mostraremos ejemplos cuando una implicación no se cumpla. Además, presentaremos algunas propiedades que satisfacen estas funciones cuando se definen entre continuos con condiciones particulares.

### 3.1. DEFINICIONES, RELACIONES Y EJEMPLOS

La noción de función monótona es conocida de cursos básicos de cálculo como una función de valores reales que preserva orden. A continuación definiremos función monótona entre espacios no necesariamente ordenados. No es difícil ver que la definición que presentamos es una generalización de la noción de función monótona definida en los reales.

**Definición 3.1.1.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva, definida entre continuos. Diremos que  $f$  es *monótona*, si para cada subcontinuo  $K$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(K)$  es subcontinuo de  $X$ .

El siguiente resultado muestra que para que una función sea monótona es suficiente verificar la conexidad de la preimagen de los puntos.

**Teorema 3.1.2.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Entonces,  $f$  es monótona si y sólo si  $f^{-1}(y)$  es un continuo, para todo  $y \in Y$ .

*Demostración.* Como  $\{y\}$  es un subcontinuo de  $Y$ ,  $f^{-1}(y)$  es continuo, pues  $f$  es monótona. Así, sólo debemos probar que si  $f^{-1}(y)$  es un continuo, para cada  $y \in Y$ , entonces  $f$  es monótona. Sea  $K$  un subcontinuo de  $Y$ . Supongamos que  $f^{-1}(K)$  no es un continuo. Como  $f$  es continua y sobreyectiva,  $f^{-1}(K)$  es un compacto no vacío. De esta forma  $f^{-1}(K)$  no es conexo. Sean  $U$  y  $V$  una separación de  $f^{-1}(K)$ ; es decir,  $f^{-1}(K) \subset U \cup V$ ,  $U \cap \text{Cl}_X(V) = \emptyset$ ,  $V \cap \text{Cl}_X(U) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(K) \cap U \neq \emptyset$  y  $f^{-1}(K) \cap V \neq \emptyset$ . Como  $f^{-1}(y)$  es conexo, para cada  $y \in K$ , entonces  $f^{-1}(y) \subset U$  o  $f^{-1}(y) \subset V$ , por [19, Corolario 26.6].

Sean  $M = \{y \in K : f^{-1}(y) \subset U\}$  y  $N = \{y \in K : f^{-1}(y) \subset V\}$ . Notemos que  $K = M \cup N$ . Además, si  $x \in U \cap f^{-1}(K)$ , entonces  $f^{-1}(f(x)) \subset U$ . Por lo tanto,  $M \neq \emptyset$ . De manera similar mostramos que  $N \neq \emptyset$ .

Como  $K$  es conexo, podemos suponer que existe  $y \in \text{Cl}_Y(M) \cap N$ . Entonces existe una sucesión  $(y_n)_{n=1}^\infty$  en  $M$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ , donde  $y \in N$ ; es decir,  $f^{-1}(y) \subset V$ . Como  $y_n \in M$ ,  $f^{-1}(y_n) \subset U$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $x_n \in f^{-1}(y_n)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $X$  es compacto, existe una subsucesión  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  de la sucesión  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ , para algún  $x \in X$  [19, Teorema 17.4]. Observe que  $x \in \text{Cl}_X(U)$  y por continuidad,  $x \in f^{-1}(y)$ . Así,  $V \cap \text{Cl}_X(U) \neq \emptyset$ , pero esto contradice que  $\text{Cl}_X(U) \cap V = \emptyset$ . Por lo tanto  $f^{-1}(K)$  es conexo y  $f$  es una función monótona.  $\square$

A continuación definimos una clase de funciones continuas que contienen a las funciones monótonas.

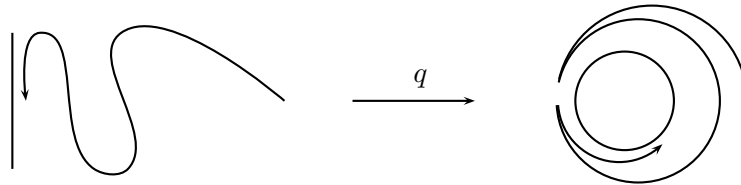
**Definición 3.1.3.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Diremos que  $f$  es *casimonótona* si para cualquier subcontinuo  $K$  de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$ ,  $f^{-1}(K)$  es un continuo.

De las Definiciones 3.1.1 y 3.1.3, es inmediato verificar que si  $f$  es una función monótona, entonces  $f$  es casimonótona. Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco no se cumple [5, 2.3(a) pág 17].

**Ejemplo 3.1.4.** Existe una función casimonótona que no es monótona.

Sea  $X = \text{Cl}_{\mathbb{R}^2}(\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : 0 < x \leq 1\})$ , la curva senoidal del topólogo (ver Ejemplo 1.1.2). Sean  $Y = X/\{(-1, 0), (1, 0)\}$  y  $q: X \rightarrow Y$  la función cociente. (FIGURA 3.1.)

Figura 3.1: Función casimonótona no monótona



Note que  $K = \{q(-1, 0)\}$  es un subcontinuo de  $Y$  tal que  $q^{-1}(K) = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ , donde claramente  $\{(-1, 0), (1, 0)\}$  no es conexo. Así,  $q$  no es monótona. Veamos que  $q$  es casimonótona. Sea  $S = q(\{0\} \times [-1, 1])$ . Note que si  $K$  es un subcontinuo de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$ , entonces  $K \cap S = \emptyset$  o  $S \subsetneq K$ . Así,  $q^{-1}(K)$  es un subcontinuo de  $X$  y  $q$  es casimonótona.

La siguiente clase de funciones que estudiaremos y mostramos a continuación, fue definida por el profesor Janusz J. Charatonik en [4].

**Definición 3.1.5.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Diremos que  $f$  es *confluyente*, si para cada subcontinuo  $K$  de  $Y$  y cada componente  $D$  de  $f^{-1}(K)$ , tenemos que  $f(D) = K$ .

Note que toda función monótona es confluyente. Además, si  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es definida por  $f(t) = 1 - |2t - 1|$ , para cada  $t \in [0, 1]$ , entonces  $f$  es confluyente y no es casimonótona ni monótona.

Si  $K = q(\{(0, y) : y \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]\})$ , donde  $q$  es la función cociente definida en el Ejemplo 3.1.4, entonces  $K$  es un continuo y  $\{0\} \times [-1, -\frac{1}{2}]$  es una componente de  $q^{-1}(K)$  tal que  $q(\{0\} \times [-1, -\frac{1}{2}]) \neq K$ ; es decir,  $q$  es una función casimonótona que no es confluyente.

Las funciones abiertas son estudiadas en cursos básicos de topología general. Esta clase de funciones no hace parte de la familia de funciones que nos propusimos estudiar en el desarrollo de este trabajo. Sin embargo, la definimos a continuación pues nos será de utilidad en algunos resultados que presentaremos más adelante.

**Definición 3.1.6.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua definida entre continuos. Diremos que  $f$  es *abierto* si  $f(U)$  es abierto para cada abierto  $U$  de  $X$ .

En general no existe ninguna relación entre las funciones monótonas y funciones abiertas; es decir, podemos encontrar ejemplos de funciones abiertas que no son monótonas como  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(t) = 1 - |2t - 1|$ , y funciones monótonas que no son abiertas como  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}); \\ 1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

También, como toda función monótona es confluyente, la función definida anteriormente es confluyente y no es abierta. Con el siguiente resultado mostramos que no es posible encontrar una función abierta que no sea confluyente [16, Teorema 13.14 pág. 284].

**Teorema 3.1.7.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es abierta, entonces  $f$  es confluyente.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es confluyente. Entonces existe un subcontinuo  $Q$  de  $Y$  tal que  $f^{-1}(Q)$  tiene una componente  $K$  tal que  $f(K) \neq Q$ . Como  $f(K) \subset Q$ , existe  $p \in Q$  tal que  $K \cap f^{-1}(p) = \emptyset$ . Así podemos afirmar que  $f^{-1}(Q) = M \cup N$ , donde  $M$  y  $N$  son cerrados de  $X$ ,  $K \subset M$  y  $f^{-1}(p) \subset N$ , por Teorema 1.1.12 (Teorema del Cable Cortado). Como  $f^{-1}(p) \subset N$  y  $f(M) \subsetneq Q$ , existen  $z_0 \in f(M)$  y  $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset Q \setminus f(M)$  tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ . Sea  $w_0 \in M$  tal que  $f(w_0) = z_0$ . Así tenemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-1}(z_n) \subset N$  y como  $N$  es compacto,  $\liminf f^{-1}(z_n) \subset N$ , por [17, (0.6.2), pág. 4]. Por lo tanto  $w_0 \notin \liminf f^{-1}(z_n)$  y  $f$  no es abierta, por [20, Teorema 4.32].  $\square$

A continuación definimos otras clases de funciones continuas entre continuos que fueron estudiadas por el profesor T. Maćkowiak en [14].

**Definición 3.1.8.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Diremos que  $f$  es *débilmente monótona* si para cualquier subcontinuo  $K$  de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$ , y cualquier componente  $D$  de  $f^{-1}(K)$ , tenemos que  $f(D) = K$ . Además, diremos que  $f$  es *cuasimonótona* si para cualquier subcontinuo  $K$  de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$ , tenemos que  $f^{-1}(K)$  tiene un número finito de componentes y si  $D$  es una componente de  $f^{-1}(K)$ ,  $f(D) = K$ .

De las Definiciones 3.1.3, 3.1.5 y 3.1.8 podemos observar fácilmente que se cumplen las relaciones que presentamos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.9.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Entonces,

1. Si  $f$  es cuasimonótona, entonces  $f$  es débilmente monótona.
2. Si  $f$  es débilmente monótona, entonces  $f$  es cuasimonótona.

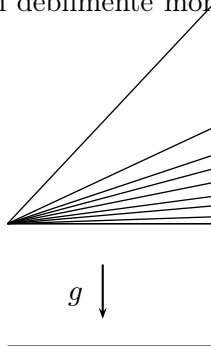
3. Si  $f$  es confluente, entonces  $f$  es débilmente monótona.

Note que, usando nuevamente la función  $f(t) = 1 - |2t - 1|$ ,  $f$  es cuasimonótona y no es casimonótona. Además, la función definida en el Ejemplo 3.1.4, es una función casimonótona, cuasimonótona y por tanto débilmente monótona, que no es confluente. Con el siguiente ejemplo mostramos una función débilmente monótona que no es cuasimonótona, así, podemos ver que los recíprocos de la Proposición 3.1.9 no se tienen [14, 4.47 pág. 27].

**Ejemplo 3.1.10.** *Existe una función débilmente monótona que no es cuasimonótona.*

Consideremos el continuo  $X = \{(x, \frac{x}{n}) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Este continuo se conoce como *abanico armónico*. Sea  $g: X \rightarrow [0, 1]$  definida por  $g(x, y) = x$ , representada en la FIGURA 3.2.

Figura 3.2: Función débilmente monótona no cuasimonótona



Si  $Q$  es un subcontinuo propio de  $[0, 1]$  con  $\text{Int}_{[0,1]}(Q) \neq \emptyset$  tal que  $0 \notin Q$ , toda componente  $D$  de  $g^{-1}(Q)$  satisface que  $g(D) = Q$ . Sin embargo, el número de componentes de  $g^{-1}(Q)$  es infinita, por lo tanto  $g$  es débilmente monótona pero no cuasimonótona.

Las siguientes clases de funciones fueron definidas por G. R. Gordh y C. B. Hughes en [7]. Algunas otras propiedades de estas clases de funciones se pueden encontrar en [14]. Las funciones fuertemente libremente descomponibles también fueron estudiadas por J. J. Charatonik en [5], donde fueron llamadas funcionesseudomonótonas. En este trabajo utilizaremos el nombre original dado por Gordh y Hughes.

**Definición 3.1.11.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Decimos que  $f$  es *libremente descomponibles*, siempre que  $Y = C \cup D$ , donde  $C$  y  $D$  son subcontinuos propios de  $Y$ , existen  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ ,  $f(A) \subset C$  y  $f(B) \subset D$ . Si además,  $f^{-1}(C)$  y  $f^{-1}(D)$  son subcontinuos de  $X$  diremos que  $f$  es *fuertemente libremente descomponible*.

De la definición anterior tenemos que toda función fuertemente libremente descomponible es libremente descomponible. Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco de esta afirmación es falso [7, pág. 142].

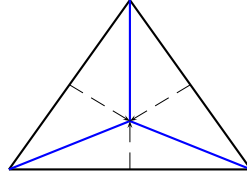
**Ejemplo 3.1.12.** *Existe una función libremente descomponible que no es fuertemente libremente descomponible.*

Sea  $X$  el triángulo en  $\mathbb{R}^3$  con vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ ; es decir,  $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$  donde  $X_1 = \{(1 - t, 0, t) : 0 \leq t \leq 1\}$ ,  $X_2 = \{(1 - t, t, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$  y  $X_3 = \{(0, t, 1 - t) : 0 \leq t \leq 1\}$ . Sea  $f: X \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^3$  definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (2x - 1, 0, 0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x, \\ (0, 2y - 1, 0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq y, \\ (0, 0, 2z - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq z. \end{cases}$$

La FIGURA 3.3 representa la función  $f$ . Donde el triángulo negro representa el dominio de la función, que se proyecta como muestran las flechas punteadas sobre el triodo azul, el cual representa el continuo  $Y$ .

Figura 3.3: Libremente descomponible no fuertemente libremente descomponible



Denotemos por  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$  y  $c = (0, 0, 1)$ . Veamos que  $f$  es una función libremente descomponible. Para ver esto demosntremos primero la siguiente afirmación:

**Afirmación 3.1.13.** *Sea  $K$  un subcontinuo de  $Y$ . Si  $|K \cap \{a, b, c\}| \geq 2$ , entonces  $f^{-1}(K)$  es un subcontinuo de  $X$ .*

Nótese que si  $\{a, b, c\} \subset K$ , entonces  $K = Y$ . Así  $f^{-1}(K) = X$  y por tanto subcontinuo de  $X$ . Luego, sin pérdida de generalidad supongamos que  $K \cap \{a, b, c\} = \{a, b\}$ . Es claro que existe  $t \in [0, 1)$  tal que  $K = ([0, 1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times [0, t])$ . Calculando  $f^{-1}(K) = X_1 \cup \{(\frac{1-s}{2}, \frac{s+1}{2}, 0) : 0 \leq s < t\} \cup \{(\frac{1-s}{2}, 0, \frac{s+1}{2}) : 0 \leq s < t\}$ . Con lo que concluimos la prueba de la afirmación.

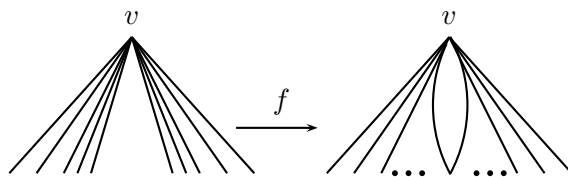
Sean  $C$  y  $D$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = C \cup D$ . No es difícil ver que  $|C \cap \{a, b, c\}| = 2$  o  $|D \cap \{a, b, c\}| = 2$ . Supongamos que  $|C \cap \{a, b, c\}| = 2$ . Así,  $f^{-1}(C)$  es un subcontinuo de  $X$ , por la Afirmación 3.1.13. Sean  $A = f^{-1}(C)$  y  $B = \text{Cl}_X(X \setminus A)$ . Como  $X$  es una curva cerrada simple,  $B$  es un subcontinuo de  $X$ . Además,  $f(B) \subset D$ , pues  $f(X \setminus A) \subset D$ . De lo anterior  $f$  es libremente descomponible.

Para mostrar que  $f$  no es fuertemente libremente descomponible tomemos la descomposición  $Y = C \cup D$  donde  $C = [0, 1] \times \{0\} \times \{0\}$  y  $D = (\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times [0, 1])$ . Se puede ver que  $f^{-1}(C) = \{(x, y, z) \in X : \frac{1}{2} \leq x\} \cup \{(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  no es conexo. Por lo tanto  $f$  no es fuertemente libremente descomponible.

A continuación mostramos otro ejemplo de una función libremente descomponible que no es fuertemente libremente descomponible. Este ejemplo es importante porque muestra una construcción diferente para generar funciones con esta característica [1, Ejemplo 2.1].

Sean  $\mathcal{C}$  el conjunto ternario de Cantor definido en  $[0, 1]$  y  $X = (\mathcal{C} \times [0, 1]) / (\mathcal{C} \times \{1\})$ . El continuo  $X$  es conocido como el *cono o abanico de Cantor*. Sean  $Y = X / \{(\frac{1}{3}, 0), (\frac{2}{3}, 0)\}$  y  $f: X \rightarrow Y$  la función cociente (ver FIGURA 3.4).

Figura 3.4: Libremente descomponible no fuertemente libremente descomponible



Sean  $T = \{(x, y) \in X : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$  y  $W = \{(x, y) \in X : \frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ . Es claro que si tomamos  $M = f(T)$  y  $N = f(W)$ , se tiene que  $Y = M \cup N$  y  $f^{-1}(M) = T \cup \{(\frac{2}{3}, 0)\}$  y  $f^{-1}(N) = W \cup \{(\frac{1}{3}, 0)\}$ . Esto muestra que la función cociente  $f$  no es fuertemente libremente descomponible. No es difícil aceptar que  $f$  es libremente descomponible. Una prueba formal resulta difícil de escribir por la cantidad de subcontinuos con interior no vacío que tiene  $Y$ .

En [5], el profesor J. Charatonik enuncia la relación entre las funciones casimonótonas y fuertemente libremente descomponibles. Proposición que mostramos a continuación.

**Proposición 3.1.14.** *Sea  $f$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es una función casimonótona, entonces  $f$  es fuertemente libremente descomponible.*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$ . Como  $(Y \setminus A) \subset B$  y  $(Y \setminus B) \subset A$ ,  $A$  y  $B$  tienen interior diferente de vacío. Así,  $f^{-1}(A)$  y  $f^{-1}(B)$  son continuos, pues  $f$  es casimonótona. Luego,  $f$  es fuertemente libremente descomponible.  $\square$

**Ejemplo 3.1.15.** *Existe una función fuertemente libremente descomponible que no es casimonótona.*

Sea  $f: S^1 \rightarrow [-1, 1]$  la función definida por  $f((x, y)) = x$ . Veamos que  $f$  satisface las condiciones enunciadas en el ejemplo. Note que si  $K = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , entonces  $\text{Int}_{[-1, 1]}(K) \neq \emptyset$  y  $f^{-1}(K)$  no es conexo. Así  $f$  no es casimonótona. Por otra parte, si  $[-1, 1] = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son subcontinuos propios, entonces podemos decir que  $A = [-1, b]$  y  $B = [a, 1]$  para algunos  $a$  y  $b$  con  $a \leq b$ . Nótese que  $f^{-1}(A) = \{(x, y) \in S^1 : -1 \leq x \leq b\}$  y  $f^{-1}(B) = \{(x, y) \in S^1 : a \leq x \leq 1\}$  son subcontinuos de  $S^1$ . Así,  $f$  es fuertemente libremente descomponible.

Observe que la función tienda que hemos considerado varias veces  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(t) = 1 - |2t - 1|$  es débilmente monótona y no es libremente descomponible. Con el siguiente ejemplo vemos que la condición de fuertemente libremente descomponible no implica ser débilmente monótona.

**Ejemplo 3.1.16.** *Existe una función fuertemente libremente descomponible que no es débilmente monótona.*

Sean  $Z$  la curva senoidal del topólogo,  $I_1 = \{tp + (1 - t)q_1 : t \in [0, 1]\}$  y  $I_2 = \{tp + (1 - t)q_2 : t \in [0, 1]\}$ , donde  $p = (-1, 0)$ ,  $q_1 = (0, 1)$  y  $q_2 = (0, -1)$ . Sea  $X = Z \cup I_1 \cup I_2$ . Definimos la función cociente  $f$  que relaciona a  $y$  con  $w$  en  $X$ , si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

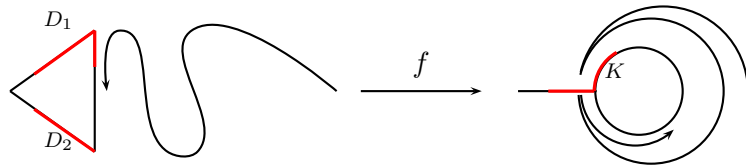
1.  $\{y, w\} \subset I_1 \cup I_2$ , ó,
2. existe  $t_0$  tal que  $y = t_0p + (1 - t_0)q_1$  y  $w = t_0p + (1 - t_0)q_2$ .

Consideremos  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $f(X)$  tales que  $f(X) = A \cup B$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $f(p) \in A$ . Entonces,  $f(Z) \subset B$  o  $B$  es un continuo cuya preimagen es un arco sobre el conjunto

$$\left\{ \left( x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\}.$$

Así  $f^{-1}(A)$  y  $f^{-1}(B)$  son subcontinuos de  $X$  y  $f$  es fuertemente libremente descomponible. Ahora tomemos el subcontinuo  $K = [f(r), f(q_2)] \cup f([q_1, (0, \frac{1}{4}]])$  con  $r \neq p$ . Observe que el  $\operatorname{Int}_Y(K) \neq \emptyset$  y  $f^{-1}(K)$  tiene dos componentes  $D_1$  y  $D_2$ . Además,  $f(D_2) \neq K$ , como muestra la Figura 3.5. Luego  $f$  no es débilmente monótona.

Figura 3.5: Función fuerte no débilmente monótona



El siguiente diagrama ilustra algunas de las relaciones entre las funciones. Denotaremos las funciones fuertemente libremente descomponibles con F.L.D. y las funciones libremente descomponibles con L.D.

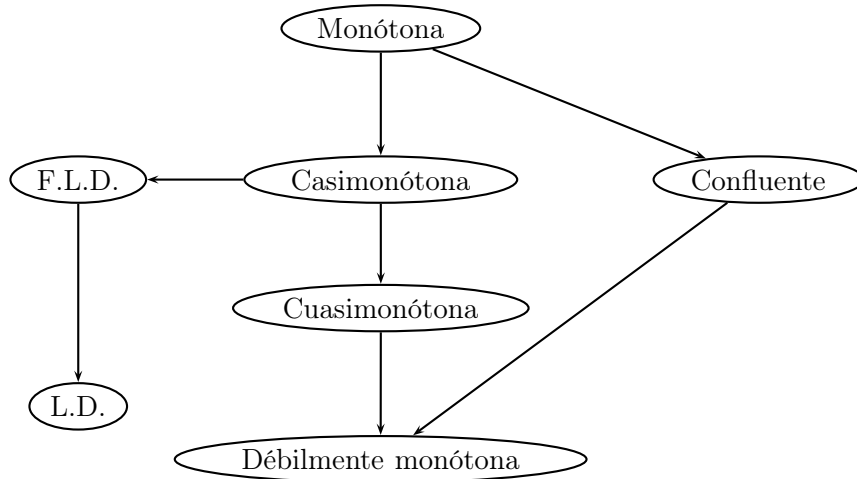


DIAGRAMA 3.1

## 3.2. PROPIEDAD DE COMPOSICIÓN

Siempre que se define una clase de funciones es importante, desde un punto de vista algebraico, verificar si esta clase es cerrada con la operación composición. Si una clase de funciones tiene

esta característica diremos que tiene la propiedad de composición. A continuación mostramos cuales de las funciones definidas en este capítulo tienen la propiedad de composición. Iniciamos definiendo formalmente esta propiedad.

**Definición 3.2.1.** Sea  $M$  una clase de funciones. Decimos que  $M$  tiene la propiedad de composición si para cada dos funciones  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  de  $M$  se tiene que  $g \circ f \in M$ .

Es bien conocido que las funciones continuas, inyectivas o sobreyectivas son clases de funciones que cumplen la propiedad de composición. En los siguientes resultados mostramos que con excepción de las funciones débilmente monótonas, todas las clases definidas en este capítulo tienen esta propiedad [14, Teorema 5.1].

**Proposición 3.2.2.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas sobreyectivas definidas entre continuos. Si  $f$  y  $g$  son funciones monótonas o casimonótonas entonces  $g \circ f$  es una función monótona o casimonótona, respectivamente.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  y  $g$  son casimonótonas y probemos que  $g \circ f$  es casimonótona. Sea  $K$  un subcontinuo de  $Z$  tal que  $\text{Int}_Z(K) \neq \emptyset$ . Como  $g$  es casimonótona,  $g^{-1}(K)$  es un subcontinuo de  $Y$ . Como  $g^{-1}(\text{Int}_Z(K)) \neq \emptyset$  y  $g^{-1}(\text{Int}_Z(K)) \subset g^{-1}(K)$ ,  $\text{Int}_Y(g^{-1}(K)) \neq \emptyset$ . De lo anterior  $f^{-1}(g^{-1}(K)) = (g \circ f)^{-1}(K)$  es un subcontinuo de  $X$ , pues  $f$  es casimonótona. Por lo tanto  $g \circ f$  es una función casimonótona.

La prueba para las funciones monótonas es similar. □

La prueba del siguiente teorema la tomamos de [14, Teorema 5.6].

**Teorema 3.2.3.** Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas sobreyectivas definidas entre continuos. Si  $f$  y  $g$  son funciones cuasimonótonas entonces  $g \circ f$  es una función cuasimonótona.

*Demostración.* Sean  $f$  y  $g$  funciones cuasimonótonas. Veamos que  $g \circ f$  es cuasimonótona. Sea  $Q$  un subcontinuo de  $Z$  tal que  $\text{Int}_Z(Q) \neq \emptyset$ . Como  $g$  es cuasimonótona,  $g^{-1}(Q)$  tiene una cantidad finita de componentes  $K_1, K_2, \dots, K_n$  en  $Y$  y  $g(K_i) = Q$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Además  $\text{Int}_Y(K_i) \neq \emptyset$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Como  $f$  es cuasimonótona,  $f^{-1}(K_i)$  tiene una cantidad finita de componentes  $L_1, L_2, \dots, L_{m_i}$  en  $X$  tal que  $f(L_j) = K_i$  para  $j = 1, 2, \dots, m_i$  y  $i = 1, 2, \dots, n$ . Así,  $Q$  tiene una cantidad finita de componentes  $N_{i,j}$  en  $X$  para  $j = 1, 2, \dots, m_i$  y  $i = 1, 2, \dots, n$  tales que  $(g \circ f)(N_{i,j}) = g(f(N_{i,j})) = g(K_i) = Q$ . Por lo tanto  $g \circ f$  es cuasimonótona. □

Con el siguiente ejemplo, tomado de [14, 5.8], mostramos dos funciones débilmente monótonas cuya composición no es débilmente monótona.

**Ejemplo 3.2.4.** La clase de funciones débilmente monótonas no tiene la propiedad de composición.

Sea  $Z$  el abanico armónico definido en el Ejemplo 3.1.10 y  $I = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ . Sea  $f: Z \cup I \rightarrow Z$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in Z, \\ (x, 0) & \text{si } (x, y) \in I. \end{cases}$$

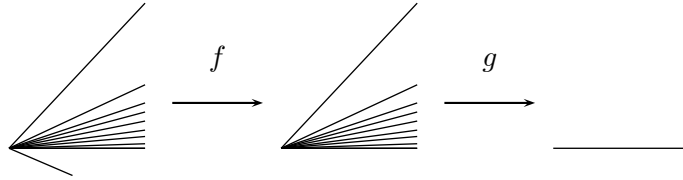
Veamos que  $f$  es una función casimonótona. Sea  $K$  un subcontinuo de  $Z$  tal que  $\text{Int}_Z(K) \neq \emptyset$ . Si  $(0, 0) \notin K$ , entonces  $K \cap ([0, 1] \times \{0\}) = \emptyset$  y  $f^{-1}(K) = K$ . Por tanto  $f^{-1}(K)$  es conexo. Así,

supongamos que  $(0, 0) \in K$ . En este caso  $f^{-1}(K) = K \cup J$ , donde  $J$  es un arco contenido en  $I$  tal que  $(0, 0) \in J$ . De lo que se sigue que  $K \cup J$  es conexo y  $f$  es casimonótona.

Sea  $g: Z \rightarrow [0, 1]$  definida por  $g(x, y) = x$ , para cada  $(x, y) \in Z$ . La función  $g$  es débilmente monótona, por el Ejemplo 3.1.10.

Veamos que  $g \circ f$  no es débilmente monótona. Sea  $L = [\frac{1}{3}, \frac{4}{5}]$ . Nótese que  $L$  es un subcontinuo de  $[0, 1]$ ,  $\text{Int}_{[0,1]}(L) \neq \emptyset$  y  $(g \circ f)^{-1}(L)$  tiene una componente  $D \subset I$  tal que  $(g \circ f)(D) \neq L$ . Por lo tanto  $g \circ f$  no es una función débilmente monótona.

Figura 3.6:  $g \circ f$  no débilmente monótona



En [14, Teorema 5.4] se enuncia el siguiente resultado.

**Proposición 3.2.5.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas sobreyectivas entre continuos. Si  $f$  y  $g$  son funciones confluentes entonces  $g \circ f$  es una función confluyente.*

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones confluentes. Sea  $K$  un subcontinuo de  $Z$ . Como  $g$  es confluyente, tenemos que para cada componente  $C$  de  $g^{-1}(K)$ ,  $g(C) = K$ . Sea  $L$  una componente de  $(g \circ f)^{-1}(K)$ . Veamos que  $g(f(L)) = K$ . Como  $f$  es continua,  $f(L)$  es un subcontinuo de  $Y$ . Además,  $g(f(L)) \subset K$ . Por lo tanto, existe una componente  $C_0$  de  $g^{-1}(K)$  tal que  $f(L) \subset C_0$ . Nótese que  $L$  es componente de  $f^{-1}(C_0)$ . Así, como  $f$  es confluyente,  $f(L) = C_0$  y por tanto,  $g(f(L)) = g(C_0) = K$ . De lo que  $g \circ f$  es confluyente.  $\square$

Para terminar esta sección estudiamos la propiedad de composición en las funciones libremente y fuertemente libremente descomponibles [7, pág. 139].

**Proposición 3.2.6.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas sobreyectivas definidas entre continuos. Si  $f$  y  $g$  son funciones libremente descomponibles o fuertemente libremente descomponibles entonces  $g \circ f$  es una función libremente descomponible o fuertemente libremente descomponible, respectivamente.*

*Demostración.* Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones libremente descomponibles y  $E$  y  $F$  subcontinuos propios de  $Z$  tales que  $Z = E \cup F$ . Como  $g$  es libremente descomponible, existen  $C$  y  $D$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = C \cup D$ ,  $g(C) \subset E$  y  $g(D) \subset F$ . También  $f$  es libremente descomponible. Existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ ,  $f(A) \subset C$  y  $f(B) \subset D$ . Así,  $g(f(A)) \subset g(C) \subset E$  y  $g(f(B)) \subset g(D) \subset F$ . Por lo tanto  $g \circ f$  es libremente descomponible.

La prueba para funciones fuertemente libremente descomponibles es similar.  $\square$

Es natural preguntarnos como consecuencia del Ejemplo 3.2.4 lo siguiente:

**Pregunta 3.2.7.** *Sean  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  funciones continuas sobreyectivas definidas entre continuos. ¿ Si  $f$  es confluyente y  $g$  es débilmente monótona, entonces  $g \circ f$  es débilmente monótona?*

### 3.3. RELACIONES ESPECIALES

En esta sección estudiamos relaciones entre las funciones que estamos desarrollando en este capítulo, cuando éstas, están definidas entre continuos con condiciones específicas. Esta sección la dividimos en dos partes: una primera parte donde estudiamos estas implicaciones para funciones definidas entre espacios localmente conexos y una segunda parte donde incluimos algunos resultados adicionales.

#### 3.3.1. Funciones entre localmente conexos

Como se sigue de la definición, toda función monótona es casimonótona. En el siguiente resultado mostramos que el recíproco de esta implicación es cierto si el recorrido de la función es localmente conexo [1, Teorema 4.1]. Para probar esto veamos el siguiente lema.

**Lema 3.3.1.** *Sean  $y \in Y$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua entre continuos. Si  $U$  es un abierto de  $X$  tal que  $f^{-1}(y) \subset U$ , entonces existe  $r > 0$ , tal que  $f^{-1}(B(y, r)) \subset U$ .*

*Demostración.* Supongamos que para todo  $r > 0$ ,  $f^{-1}(B(y, r)) \cap X \setminus U \neq \emptyset$ . Sea  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  en  $Y$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ ,  $y_n \in B(y, \frac{1}{n})$  y  $f^{-1}(y_n) \cap X \setminus U \neq \emptyset$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$ , por la continuidad de  $f$ . Además  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$ , por [9, Lema 4.5]. Como  $X \setminus U$  es compacto  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) \cap X \setminus U \neq \emptyset$ . Así,  $f^{-1}(y) \cap X \setminus U \neq \emptyset$  lo que claramente contradice que  $f^{-1}(y) \subset U$ .  $\square$

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es casimonótona y  $Y$  es localmente conexo, entonces  $f$  es monótona.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es monótona, entonces existe un subcontinuo  $K$  de  $Y$  tal que  $f^{-1}(K)$  no es conexo. Entonces existen  $D$  y  $E$  cerrados disjuntos de  $X$  tales que  $f^{-1}(K) = D \cup E$ . Como  $X$  es normal, existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos en  $X$  tales que  $D \subset U$  y  $E \subset V$ , por [19, Definición 15.1]. Tomando  $y \in K$ , podemos ver que  $f^{-1}(y) \subset U \cup V$ , y por el Lema 3.3.1 existe  $r > 0$  tal que  $f^{-1}(B(y, r)) \subset U \cup V$ . Como  $Y$  es localmente conexo y  $y \in B(y, r)$  existe un abierto conexo  $R$  tal que  $y \in R \subset \text{Cl}_Y(R) \subset B(y, r)$ , luego  $K \cup \text{Cl}_Y(R)$  es un subcontinuo de  $Y$  con  $\text{Int}_Y(K \cup \text{Cl}_Y(R)) \neq \emptyset$ . Nótese que  $f^{-1}(K \cup \text{Cl}_Y(R)) \subset U \cup V$ . Así,  $f^{-1}(K \cup \text{Cl}_Y(R))$  no es conexo y  $f$  no es casimonótona.  $\square$

Observe que la función del Ejemplo 3.1.4 esta definida entre continuos no localmente conexos. Como la imagen continua de un continuo localmente conexo es localmente conexo [8, Teorema 3.22], es importante resaltar que si  $f$  es una función casimonótona que no es monótona, entonces  $f$  debe estar definida entre continuos no localmente conexos [16, Teorema 13.20].

**Teorema 3.3.3.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es una función débilmente monótona y  $Y$  es localmente conexo, entonces  $f$  es confluyente.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es confluyente, entonces existen  $Q$  un subcontinuo de  $Y$  y  $D$  una componente de  $f^{-1}(Q)$  tales que  $f(D) \neq Q$ . Sea  $p \in Q \setminus f(D)$ . Entonces,  $f^{-1}(p)$  y  $D$  son compactos de  $X$  tales que  $f^{-1}(p) \cap D = \emptyset$ . Así, existen  $U$  y  $V$  abiertos de  $X$  tales que  $f^{-1}(p) \subset U$  y  $D \subset V$ . Por el Lema 3.3.1, existe  $r > 0$  tal que  $f^{-1}(B(p, r)) \subset U$ . Como  $Y$  es localmente conexo existe  $R$  un abierto conexo en  $Y$  tal que  $R \subset \text{Cl}_Y(R) \subset B(p, r)$ . Sea  $L = Q \cup \text{Cl}_Y(R)$ . Tenemos que  $L$  es un subcontinuo con interior no vacío de  $Y$  y  $D$  es una componente de  $f^{-1}(L)$ . Además  $f^{-1}(p) \subset U$  y  $y \notin f(D)$ . Así,  $f(D) \neq K$  y por lo tanto,  $f$  no es débilmente monótona.  $\square$

En el Ejemplo 3.1.10 mostramos una función confluyente, por lo tanto débilmente monótona, sobre un espacio localmente conexo que no es cuasimonótona. Con el siguiente resultado mostramos una condición para que una función débilmente monótona sea cuasimonótona. La demostración que presentamos es análoga a [16, Teorema 13.23].

**Teorema 3.3.4.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es una función débilmente monótona y  $X$  es localmente conexo, entonces  $f$  es cuasimonótona.*

*Demostración.* Como  $X$  es localmente conexo y  $f$  es continua,  $Y$  es localmente conexo. Tomemos  $Q$  un subcontinuo propio de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$ . Sea  $p \in \text{Int}_Y(Q)$ . Como  $Y$  es localmente conexo, existe un abierto conexo  $U$  de  $Y$  tal que  $p \in U \subset \text{Int}_Y(Q)$ . Además, para cada componente  $E$  de  $f^{-1}(Q)$ ,  $f^{-1}(p) \cap E \neq \emptyset$ , pues  $f$  es débilmente monótona y  $f(E) = Q$ . Como  $X$  es localmente conexo, cada componente de  $f^{-1}(U)$  es un abierto de  $X$ . Sea  $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} K_i$ , donde  $K_i$  es una componente de  $f^{-1}(U)$ . De esto,  $\{U_i : i \in I\}$  es un cubrimiento abierto de  $f^{-1}(p)$ . Como  $f^{-1}(p)$  es un compacto, existe una cantidad finita de componentes  $K_i$  de  $f^{-1}(U)$  tal que  $f^{-1}(p) \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$ . Así tenemos que  $K_1, K_2, \dots, K_n$  deberían ser todas las componentes de  $f^{-1}(U)$  que a su vez intersecan todas las componentes de  $f^{-1}(Q)$ . Por esto  $f^{-1}(Q)$  tiene una cantidad finita de componentes y  $f$  es cuasimonótona.  $\square$

De la Proposición 3.1.9 y los Teoremas 3.3.3 y 3.3.4 tenemos una condición necesaria para que estas tres funciones: confluentes, débilmente monótonas y cuasimonótonas, sean equivalentes.

**Teorema 3.3.5.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $X$  es localmente conexo, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.  $f$  es confluyente.
2.  $f$  es débilmente monótona.
3.  $f$  es cuasimonótona.

Para concluir esta sección mostramos que las funciones fuertemente libremente descomponibles definidas entre continuos localmente conexos se pueden relacionar con las funciones confluentes [7, Teorema 6]. El siguiente lema nos será de utilidad para demostrar esta relación.

**Lema 3.3.6.** *Sean  $X$  un continuo localmente conexo. Si  $A$  y  $B$  son subcontinuos de  $X$  tales que  $A \cap B = \emptyset$ , entonces existen  $C$  y  $D$  subcontinuos de  $X$  tales que:*

1.  $X = C \cup D$ ,
2.  $A \subset (C \setminus D)$  y  $B \subset (D \setminus C)$ .

*Demostración.* Sea  $r = \min\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Como  $A$  y  $B$  son compactos y  $A \cap B = \emptyset$ ,  $r > 0$ . Sabemos que existe un cubrimiento por continuos de  $X$ ,  $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$  tal que  $\text{diám}(E_i) < \frac{r}{2}$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , por [16, Teorema 8.4].

Sean  $\mathcal{A} = \{E_k : E_k \cap A \neq \emptyset\}$  y  $\mathcal{B} = \{E_k : E_k \notin \mathcal{A}\}$ . Consideremos dos casos:

1.  $\bigcup\{E_j : E_j \in \mathcal{B}\}$  es conexo. Como  $E_k \cap A \neq \emptyset$  para cada  $E_k \in \mathcal{A}$  y  $A$  es conexo, tenemos que  $C = \bigcup \mathcal{A}$  y  $D = \bigcup \mathcal{B}$  son subcontinuos de  $X$ ,  $X = C \cup D$ ,  $A \subset C \setminus D$  y  $B \subset D \setminus C$ .
2.  $\bigcup\{E_j : E_j \in \mathcal{B}\}$  no es conexo. Nótese que  $\bigcup \mathcal{B}$  tiene un número finito de componentes y cada componente interseca a  $\bigcup \mathcal{A}$ . Como  $B$  es conexo y  $B \subset \bigcup \mathcal{B}$ , existe una componente  $D$  de  $\bigcup \mathcal{B}$  tal que  $B \subset D$ . Sea  $C = (\bigcup \mathcal{B} \setminus D) \cup (\bigcup \mathcal{A})$ . Es claro que  $A \subset (C \setminus D)$ ,  $B \subset (D \setminus C)$  y  $X = C \cup D$ .

□

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es fuertemente libremente descomponible y  $Y$  localmente conexo, entonces  $f$  es confluyente (por lo tanto, débilmente monótona).*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  no es confluyente. Esto es, existen  $Q$  subcontinuo de  $Y$  y  $K$  una componente de  $f^{-1}(Q)$ , tales que  $f(K) \neq Q$ . Sea  $q \in Q \setminus f(K)$ . Como  $Y$  es localmente conexo, existen subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$ ,  $q \in A \setminus B$  y  $f(K) \subset B \setminus A$ , por el Lema 3.3.6. Ahora  $Y = (A \cup Q) \cup B$ , donde  $A \cup Q$  es un subcontinuo de  $Y$ . Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(A \cup Q)$  es un continuo que contiene a  $K \cup f^{-1}(A)$  y  $K \cap f^{-1}(A) = \emptyset$ .

Sea  $L$  un continuo de  $X$  tal que  $K \subset L \subset f^{-1}(A \cup Q) \setminus f^{-1}(A)$  y  $L \neq K$  (ver Teorema 1.1.14). Así  $f(L) \subset Q$ . Esto contradice el hecho que  $K$  es una componente de  $f^{-1}(Q)$ . De lo anterior  $f$  es confluyente. □

En el Ejemplo 3.1.12 mostramos una función libremente descomponible donde el dominio es localmente conexo y no es confluyente. Esto muestra que la Proposición 3.3.7 no es válida si lo enunciamos usando las funciones libremente descomponibles en lugar de las funciones fuertemente libremente descomponibles.

Es conocido que todo espacio localmente conexo es arcoconexo, pero el recíproco de esta afirmación no es cierto. Así, es natural preguntarnos si todas las relaciones mostradas en esta sección se tienen si la restricción se hace a continuos arcoconexos.

**Pregunta 3.3.8.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos.*

1. ¿Si  $Y$  es arcoconexo y  $f$  es casimonótona, entonces  $f$  es monótona?
2. ¿Si  $Y$  es arcoconexo y  $f$  es débilmente monótona, entonces  $f$  es confluyente?
3. ¿Si  $X$  es arcoconexo y  $f$  es débilmente monótona, entonces  $f$  es confluyente?

### 3.3.2. Otras relaciones

Empezamos esta sección con un resultado donde mostramos un caso particular para el cual la intersección de dos clases de funciones implica una tercer clase.

**Proposición 3.3.9.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es libremente descomponible y débilmente monótona, entonces  $f$  es fuertemente libremente descomponible.*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es libremente descomponible y no es una función fuertemente libremente descomponible. Esto es, existen  $D$  y  $E$  subcontinuos propios de  $Y$ , tales que  $Y = D \cup E$  donde alguno  $f^{-1}(D)$  o  $f^{-1}(E)$ , no es un subcontinuo de  $X$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $f^{-1}(D)$  no es conexo. Como  $f$  es libremente descomponible, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ ,  $f(A) \subset D$  y  $f(B) \subset E$ . Sea  $K$  la componente de  $f^{-1}(D)$  tal que  $A \subset K$ . Como  $f^{-1}(D)$  no es conexo, existe una componente  $L$  de  $f^{-1}(D)$  tal que  $L \subset B$ . Nótese que  $f(L) \subset E$ . Con lo que  $f(L) \neq D$  y  $f$  no es débilmente monótona. Por lo tanto  $f$  es una función fuertemente libremente descomponible. □

Para mostrar otra relación entre las funciones definidas en este capítulo, es necesario restringir el dominio a continuos unicoherentes los cuales definimos a continuación.

**Definición 3.3.10.** Sea  $X$  un continuo. Decimos que  $X$  es *unicoherente* si para todo par de subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  con  $X = A \cup B$ , se tiene que  $A \cap B$  es conexo.

En [1, Teorema 4.2] se mostró la relación entre las funciones fuertemente libremente descomponibles y las funciones casimonótonas cuando el dominio es unicoherente. Resultado que mostramos a continuación.

**Proposición 3.3.11.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función continua sobreyectiva definida entre continuos. Si  $f$  es una función fuertemente libremente descomponible y  $X$  es unicoherente, entonces  $f$  es casimonótona.*

*Demostración.* Sea  $Q$  un subcontinuo de  $Y$  con  $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$ . Veamos que  $f^{-1}(Q)$  es conexo. Consideremos dos casos:

1.  $Y \setminus Q$  es conexo. Sean  $Q$  y  $\text{Cl}_Y(Y \setminus Q)$  subcontinuos de  $Y$ . Es claro que  $Y = Q \cup \text{Cl}_Y(Y \setminus Q)$ . Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(Q)$  es un continuo de  $X$ .
2.  $Y \setminus Q = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos de  $Y$ . Nótese que  $Q \cup U$  y  $Q \cup V$  son subcontinuos de  $Y$ , por el Teorema 1.1.16. Dado que  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(Q \cup U)$  y  $f^{-1}(Q \cup V)$  son subcontinuos de  $X$  y  $X = f^{-1}(Q \cup U) \cup f^{-1}(Q \cup V)$ . Como  $X$  es unicoherente y  $f^{-1}(Q) = f^{-1}(Q \cup U) \cap f^{-1}(Q \cup V)$ ,  $f^{-1}(Q)$  es conexo.

Por lo tanto  $f$  es casimonótona. □

Por último mostraremos algunas relaciones cuando restringimos el espacio de llegada a continuos indescomponibles. Este resultado lo tomamos de [5, Teorema 4.2].

**Teorema 3.3.12.** *Sea  $Y$  un continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $Y$  es indescomponible.
2. Cada función continua sobreyectiva de un continuo en  $Y$  es casimonótona.
3. Cada función continua sobreyectiva de un continuo en  $Y$  es cuasimonótona.
4. Cada función continua sobreyectiva de un continuo en  $Y$  es débilmente monótona.
5. Cada función continua sobreyectiva de un continuo en  $Y$  es fuertemente libremente descomponible.
6. Cada función continua sobreyectiva de un continuo en  $Y$  es libremente descomponible.

*Demostración.* Veamos primero que 1 implica 2. Sean  $f: X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva entre continuos y  $Q$  un subcontinuo de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$ . Como  $Y$  es indescomponible,  $Q = Y$ , por el Teorema 2.3.3. Así,  $f^{-1}(Y) = X$  y  $f$  es casimonótona.

Las afirmaciones 2 implica 3 y 3 implica 4, se siguen de la Proposición 3.1.9.

Probemos 4 implica 1. Supongamos que  $Y$  no es indescomponible. Esto es, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$ .

Sean  $p \in A \setminus B$  y  $X = Y \times \{0\} \cup \{p\} \times [0, 1] \cup A \times \{1\}$ . Nótese que  $X$  es un continuo. Sea  $f: X \rightarrow Y \times \{0\}$  la función definida por  $f(x, y) = (x, 0)$ . Observe que  $B \times \{0\}$  es un subcontinuo con interior no vacío de  $Y \times \{0\}$ . Además, si  $K$  es la componente de  $f^{-1}(B \times \{0\})$  tal que  $(A \cap B) \times \{1\} \subset K$ , entonces  $f(K) \neq B \times \{0\}$ . Esto contradice que toda función continua sobre  $Y$  es débilmente monótona. Por lo tanto  $Y$  es indescomponible.

Por la Proposición 3.1.14, toda función casimonótona es fuertemente libremente descomponible, lo que muestra 2 implica 5. A su vez, las funciones fuertemente libremente descomponibles se definieron como un caso particular de las funciones libremente descomponibles, es decir, 5 implica 6. Luego, mostraremos 6 implica 1 para completar nuestra prueba.

Supongamos que  $Y$  no es indescomponible. Esto es, existen  $C$  y  $D$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = C \cup D$ . Sean  $p \in C \setminus D$  y  $X = Y \times \{0\} \cup \{p\} \times [0, 1] \cup Y \times \{1\}$ . Observe que  $X$  es un continuo. Sea  $f: X \rightarrow Y \times \{0\}$  la función definida por  $f(x, y) = (x, 0)$ . Se tiene que  $f^{-1}(D \times \{0\})$  tiene dos componentes en  $X$ ,  $K_0 = D \times \{0\}$  y  $K_1 = D \times \{1\}$ . Así, si tomamos  $Y \times \{0\} = (C \times \{0\}) \cup (D \times \{0\})$  no existen  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ ,  $f(A) \subset C \times \{0\}$  y  $f(B) \subset D \times \{0\}$ ; es decir, existe una función sobreyectiva  $f: X \rightarrow Y$  que no es libremente descomponible.  $\square$

# Capítulo 4

## IMAGEN DE CONTINUOS IRREDUCIBLES

Una de las preguntas naturales al definir una familia de funciones entre espacios topológicos es si esta preserva propiedades de los espacios. En este capítulo vemos cuáles de las funciones definidas en el Capítulo 3 preservan irreducibilidad y, cuándo la irreducibilidad no se preserve mostramos condiciones sobre los espacios para que esta propiedad sea preservada.

Un resultado conocido es que las funciones monótonas preservan puntos de irreducibilidad. En la primera sección mostramos este resultado. Además demostramos que las funciones casimonótonas, cuasimonótonas y fuertemente libremente descomponibles preservan irreducibilidad a pesar de no preservar puntos de irreducibilidad. También mostramos un resultado de J. Camargo y S. Macías en [3], donde se muestra que las funciones fuertemente libremente descomponibles preservan puntos de irreducibilidad si el espacio de llegada es un continuo descomponible.

En la segunda sección se presentan ejemplos donde ilustramos que las funciones libremente descomponibles y débilmente monótonas no preservan la irreducibilidad del espacio. Igualmente mostramos que si el dominio de la función tiene un punto extremo, las funciones débilmente monótonas preservan irreducibilidad.

Finalmente, proponemos una propiedad de las funciones fuertemente libremente descomponibles, cuando éstas preservan puntos de irreducibilidad. Como consecuencia de esto, veremos que las funciones fuertemente libremente descomponibles son casimonótonas si el dominio es un continuo irreducible.

### 4.1. FUNCIONES QUE PRESERVAN IRREDUCIBILIDAD

Es conocido que las funciones continuas preservan propiedades topológicas como la conexidad y la compacidad del espacio. De igual forma, se conoce que las funciones monótonas preservan puntos de irreducibilidad. En esta sección iniciamos mostrando este hecho y un par de ejemplos que muestran que las generalizaciones de las funciones monótonas estudiadas en el Capítulo 3 no preservan dichos puntos.

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$ . Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función monótona, entonces  $Y$  es un continuo irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un subcontinuo de  $Y$  tal que  $\{f(a), f(b)\} \subset K$ . Como  $f$  es monótona,  $f^{-1}(K)$  es un continuo que contiene a  $a$  y  $b$ . Dado que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ ,  $f^{-1}(K) = X$ . Por lo tanto  $K = Y$ . Así,  $Y$  es irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .  $\square$

Con el siguiente ejemplo tomado de [3, Ejemplo 3.4], mostramos una función casimonótona que no preserva puntos de irreducibilidad.

**Ejemplo 4.1.2.** *Existe una función casimonótona de un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$  cuya imagen no es irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .*

Sea  $Y$  un subcontinuo indescomponible de  $\mathbb{R}^2$ . Sean  $x, y \in Y$  tales que  $Y$  es irreducible entre  $x$  y  $y$ . Definimos el conjunto  $X = (Y \times \{0\}) \cup \{(y, t) : 0 \leq t \leq 1\} \cup (Y \times \{1\})$ . Denotemos  $a = (x, 0)$  y  $b = (x, 1)$ . Nótese que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ . Sea  $f: X \rightarrow Y$  definida por  $f(y, t) = y$ .  $f$  es casimonótona, pues  $Y$  es indescomponible por el Teorema 3.3.12. Además,  $f(a) = f(b)$ . Por lo tanto  $Y$  no es irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .

De las Proposiciones 3.1.9 y 3.1.14 y del Ejemplo 4.1.2 tenemos que a excepción de las funciones confluentes, las generalizaciones de funciones monótonas definidas en el Capítulo 3, no preservan puntos de irreducibilidad. Para mostrar que las funciones confluentes tampoco preservan puntos de irreducibilidad consideremos la función  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(x) = 1 - |2x - 1|$ .  $f$  es confluyente y  $f(0) = f(1) = 0$ , así  $f$  no preserva puntos de irreducibilidad.

Aunque las funciones casimonótonas, cuasimonótonas y fuertemente libremente descomponibles no preservan puntos de irreducibilidad, a continuación mostramos que estas funciones preservan irreducibilidad.

**Definición 4.1.3.** Sean  $X$  un continuo y  $A \subset X$ . Decimos que  $X$  es *irreducible alrededor de  $A$*  si ningún subcontinuo propio de  $X$  contiene a  $A$ . También diremos que  $S \subset X$  es un *conjunto de irreducibilidad de  $X$* , si existe un punto  $b \in X$  tal que  $X$  es irreducible alrededor del conjunto  $S \cup \{b\}$ .

**Ejemplo 4.1.4.** *Algunos ejemplos de conjuntos de irreducibilidad.*

1. En el triodo simple  $T$  definido en el Ejemplo 1.1.2 se tiene que los conjuntos  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ ,  $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  son conjuntos de irreducibilidad de  $T$ . Nótese que el único continuo que contiene a  $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  es  $T$ , es decir,  $T$  es irreducible alrededor de  $A$ .
2. Sea  $X = \{(x, \frac{x}{n}) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\}$ , el abanico armónico definido en el Ejemplo 3.1.10. El único continuo que contiene el conjunto  $\{(1, 0)\} \cup \{(1, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$  es  $X$ . Así, el conjunto  $\{(1, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$ .

Es fácil ver que todo conjunto que contenga un punto de irreducibilidad de un continuo irreducible es un conjunto de irreducibilidad. A continuación enunciamos la generalización del Teorema de Kuratowski (Teorema 2.2.8) para conjuntos de irreducibilidad. Esta generalización fue hecha por Maćkowiak en [15].

**Teorema 4.1.5.** *Sean  $X$  un continuo y  $S$  un subconjunto de  $X$ .  $S$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$  si y sólo si no existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios no vacíos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  y  $S \subset A \cap B$ .*

Se puede mostrar con facilidad una implicación. Sea  $S$  un conjunto de irreducibilidad de  $X$ . Supongamos que existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  y  $S \subset A \cap B$ . Como  $S$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$ , existe  $z \in X$  tal que  $X$  es irreducible alrededor de  $S \cup \{z\}$ . Si  $z \in A$ ,  $S \cup \{z\} \subset A$  y  $A \neq X$ . Esto contradice la irreducibilidad de  $X$  alrededor de  $S \cup \{z\}$ . Análogamente si  $z \in B$ . Por lo tanto  $S \not\subset A \cap B$ . El recíproco no es evidente, involucra nuevos conceptos y lo dejamos al estudio del lector.

Con el siguiente teorema mostramos que las funciones fuertemente libremente descomponibles preservan irreducibilidad. Este teorema fue demostrado por Charatonik en [5]. Prueba que mostramos a continuación.

**Teorema 4.1.6.** *Sean  $X$  un continuo y  $f: X \rightarrow Y$  es una función fuertemente libremente descomponible. Si  $S$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$  entonces  $f(S)$  es un conjunto de irreducibilidad.*

*Demostración.* Supongamos que  $f(S)$  no es un conjunto de irreducibilidad. Entonces, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$  y  $f(S) \subset A \cap B$ , por el Teorema 4.1.5. Como  $f$  es una función fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(A)$  y  $f^{-1}(B)$  son subcontinuos de  $X$ . Además,  $f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = X$  y  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Por lo tanto,  $S \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Esto contradice que  $S$  es un conjunto de irreducibilidad, por el Teorema 4.1.5.  $\square$

Nótese que un continuo es irreducible si y sólo si tiene un conjunto de irreducibilidad de un punto. Así, el siguiente corolario se sigue del Teorema 4.1.6.

**Corolario 4.1.7.** *Si  $X$  es irreducible y  $f: X \rightarrow Y$  es una función fuertemente libremente descomponible, entonces  $Y$  es irreducible.*

Con el siguiente resultado tomado de [3, Proposición 3.1], mostramos que cualquier subcontinuo irreducible entre la imagen de los puntos de irreducibilidad a través de una función fuertemente libremente descomponible tiene interior vacío o es todo el espacio.

**Proposición 4.1.8.** *Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función fuertemente libremente descomponible. Si  $K$  es un continuo irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$  de  $Y$ , entonces  $\text{Int}_Y(K) = \emptyset$  o  $K = Y$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $K$  un subcontinuo de  $Y$  irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$  tal que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$  y  $K \neq Y$ . Entonces, consideremos dos casos:

1.  $Y \setminus K$  es conexo. En este caso  $L = \text{Cl}_Y(Y \setminus K)$  y  $K$  son subcontinuos propios de  $Y$  tal que  $Y = L \cup K$ . Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(K)$  es un continuo y  $\{a, b\} \subset f^{-1}(K)$  entonces  $f^{-1}(K) = X$ , luego  $K = Y$ , contradicción.
2. Si  $Y \setminus K$  es disconexo. Existen  $U$  y  $V$  abiertos conexos no vacíos de  $Y$  tales que  $Y \setminus K = U \cup V$  y  $U \cap V = \emptyset$ , por el Teorema 2.1.4. Además,  $U \cup K$  y  $V \cup K$  son subcontinuos propios de  $Y$ , por el Teorema 1.1.16. Es fácil ver que  $Y = (U \cup K) \cup (V \cup K)$ . Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(U \cup K)$  es un continuo de  $X$  tal que  $\{a, b\} \subset f^{-1}(U \cup K) = X$ , entonces  $U \cup K = Y$  y  $V = \emptyset$ , contradicción.

Así, de 1 y 2, tenemos que  $\text{Int}_Y(K) = \emptyset$  o  $K = Y$ .  $\square$

En [3, Teorema 3.2] fue probado que si el espacio de llegada es descomponible, las funciones fuertemente libremente descomponibles preservan puntos de irreducibilidad. Esta prueba la mostramos a continuación.

**Teorema 4.1.9.** *Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$  y  $Y$  es un continuo descomponible. Si  $f: X \rightarrow Y$  es una función fuertemente libremente descomponible, entonces  $Y$  es irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un subcontinuo de  $Y$  irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ ,  $K$  existe por [12, Teorema 1, pág. 192]. Supongamos que  $\text{Int}_Y(K) \neq \emptyset$ , como  $Y$  es descomponible existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$ . Además  $K \subset Y$ , de lo que  $A \cap K \neq \emptyset$  o  $B \cap K \neq \emptyset$ . Veamos que  $K \neq A$ . Supongamos  $K = A$ , como  $f$  es fuertemente libremente descomponible  $f^{-1}(A)$  es un subcontinuo propio de  $X$  que contiene a  $\{a, b\}$ . Esto contradice

la irreducibilidad de  $X$  entre  $a$  y  $b$ . Así,  $K \neq A$ . Análogamente  $K \neq B$ . Tomemos  $K \cap A \neq \emptyset$ . Nótese que  $K \cup A$  es un subcontinuo propio de  $Y$ . Como  $Y = (K \cup A) \cup B$  y  $f$  es fuertemente libremente descomponible  $f^{-1}(K \cup A)$  es un subcontinuo de  $X$  y  $\{a, b\} \subset f^{-1}(K \cup A) = X$ , entonces  $K \cup A = Y$ . Por lo tanto  $K = Y$ .  $\square$

El resultado que mostramos en el Teorema 4.1.9 es válido para funciones casimonótonas ya que estas funciones son fuertemente libremente descomponibles. Para funciones cuasimonótonas no lo es; consideremos la función  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por  $f(t) = 1 - |2t - 1|$ .  $f$  es una función cuasimonótona y  $[0, 1]$  es descomponible. Como  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f$  no preserva puntos de irreducibilidad.

Para terminar esta sección veamos que las funciones cuasimonótonas preservan irreducibilidad [14, 8.1, pág 71].

**Teorema 4.1.10.** *Si  $S$  es un conjunto de irreducibilidad de un continuo  $X$  y  $f: X \rightarrow Y$  es una función cuasimonótona, entonces  $f(S)$  es un conjunto de irreducibilidad de  $Y$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f(S)$  no es un conjunto de irreducibilidad en  $Y$ . Entonces, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = A \cup B$  y  $f(S) \subset A \cap B$ , por el Teorema 4.1.5. Como  $f$  es cuasimonótona,  $f^{-1}(A)$  tiene una cantidad finita de componentes, digamos  $K_i$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  y  $f^{-1}(B)$  tiene una cantidad finita de componentes;  $L_j$  con  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Además,  $f(K_i) = A$  y  $f(L_j) = B$  para cada  $i, j$ . Dado que  $S \subset f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ , se tiene que  $S \subset K_i \cap L_j$  para cada  $i, j$ .

Sea  $p \in X$ , tal que  $X$  es irreducible alrededor de  $\{p\} \cup S$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p \in (f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)) \cap K_1$ . Entonces, si  $m < n$ ,  $\{p\} \cup S \subset (\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \cup \bigcup_{j=1}^m L_j)$ . Es fácil ver que  $(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \cup \bigcup_{j=1}^m L_j)$  es un subcontinuo propio de  $X$ . Si  $n < m$  consideramos el subcontinuo propio  $(\bigcup_{i=1}^n K_i \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} L_j)$  que contiene a  $\{p\} \cup S$ . Esto contradice que  $S$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$ . Así,  $f(S)$  es un conjunto de irreducibilidad de  $Y$ .  $\square$

Un caso particular del Teorema 4.1.10 lo enunciamos en el siguiente corolario.

**Corolario 4.1.11.** *Si  $X$  es irreducible y  $f: X \rightarrow Y$  es una función cuasimonótona, entonces  $Y$  es irreducible.*

*Demostración.* Sea  $a$  un punto de irreducibilidad de  $X$ . Entonces  $\{a\}$  es un conjunto de irreducibilidad de  $X$ . Como  $f$  es cuasimonótona  $\{f(a)\}$  es un conjunto de irreducibilidad de  $Y$ , por el Teorema 4.1.10. Así, existe  $y \in Y$  tal que  $Y$  es irreducible alrededor de  $\{f(a), y\}$  y  $Y$  es irreducible.  $\square$

## 4.2. OTRAS IMÁGENES

En esta sección veremos que las funciones débilmente monótonas y libremente descomponibles no preservan irreducibilidad. También, mostramos que si  $X$  tiene un punto extremo las funciones débilmente monótonas preservan irreducibilidad.

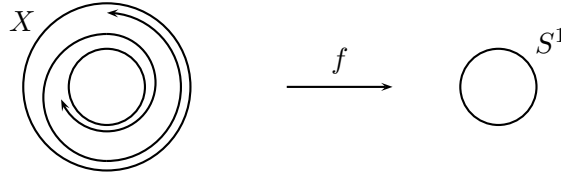
**Ejemplo 4.2.1.** *Existe una función abierta de un espacio hereditariamente descomponible e irreducible cuya imagen no es irreducible.*

Consideremos los conjuntos  $Z = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ ,  $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  y  $R$  una copia de  $\mathbb{R}$  que converge a  $Z$  y a  $S^1$  dado por: y  $R$  el rayo que converge a  $Z$  y a  $S^1$  dado por:

$$R = \begin{cases} x = (\frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{3}{2}) \cos(t) \\ y = (\frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{3}{2}) \text{sen}(t) \end{cases}$$

Sea  $X = Z \cup R \cup S^1$ .  $X$  es un continuo irreducible entre cualquier punto de  $Z$  y cualquier punto de  $S^1$ . La función  $f: X \rightarrow S^1$  la función proyección a  $S^1$  dada por  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ , una función abierta, por lo tanto confluyente y débilmente monótona. Claramente  $S^1$  no es un espacio irreducible.

Figura 4.1: Función abierta que no preserva irreducibilidad



Con el siguiente ejemplo vemos además que las funciones débilmente monótonas no preservan espacios indescomponibles.

**Ejemplo 4.2.2.** *Existe una función abierta de un continuo indescomponible cuya imagen no es irreducible.*

Sea  $\Sigma_2$  el solenoide diádico definido en el Ejemplo 2.3.17 como:

$$\Sigma_2 = \{(z_n)_{n \in \mathbb{N}} : z_{n+1}^2 = z_n \text{ para cada } n \geq 1\}$$

Sabemos por el Teorema 2.3.16 que  $\Sigma_2$  es un continuo indescomponible. Sea  $f: \Sigma_2 \rightarrow S^1$  la función proyección dada por  $f((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) = z_1$ . Como  $f_n^{n+1}: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f_n^{n+1}(z) = z^2$  es abierta,  $f$  es abierta por [13, Corolario 2.1.10].

Hasta ahora hemos notado que las funciones abiertas y por lo tanto confluentes, y débilmente monótonas no preservan irreducibilidad, incluso cuando se condiciona el espacio a hereditariamente descomponibles o indescomponible. Para determinar una condición del espacio que hace que estas funciones preserven irreducibilidad consideremos la siguiente definición.

**Definición 4.2.3.** Sean  $X$  un continuo y  $p \in X$ . Diremos que  $p$  es un *punto extremo* de  $X$  si para todo par de subcontinuos  $A$  y  $B$  de  $X$  que contienen a  $p$  se tiene que  $A \subset B$  o  $B \subset A$ .

**Ejemplo 4.2.4.** *Algunos ejemplos de puntos extremos.*

1. Los puntos 0 y 1 son puntos extremos del arco  $[0, 1]$ .
2. Consideremos  $X$  la curva senoidal del topólogo, definido en el Ejemplo 1.1.2. Los puntos  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, \text{sen}(1))$  son puntos extremos de  $X$ .
3. En el continuo de *Knaster*  $\mathcal{K}$  definido en el Ejemplo 1.1.3 el punto  $(0, 0)$  es un punto extremo.

4. En el continuo  $V'$  y  $\Lambda'$  definido en el Ejemplo 2.3.17 los puntos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$  son puntos extremos.

Nótese que todos los ejemplos que mostramos son continuos irreducibles donde los puntos extremos son puntos de irreducibilidad. Con el siguiente resultado mostramos que todo punto extremo es de irreducibilidad.

**Proposición 4.2.5.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $p$  es un punto extremo de  $X$ , entonces  $p$  es un punto de irreducibilidad de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $p$  no es un punto de irreducibilidad. Entonces, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  con  $p \in A \cap B$ , por el Teorema 2.2.8. Como  $p$  es un punto extremo de  $X$ ,  $A \subset B$  o  $B \subset A$ , así  $A = X$  o  $B = X$ . Esto contradice que  $A$  y  $B$  son propios, por lo tanto  $p$  es un punto de irreducibilidad.  $\square$

Con el siguiente ejemplo mostramos que el recíproco de la Proposición 4.2.5 no es cierta.

**Ejemplo 4.2.6.** *Existen puntos de irreducibilidad que no son puntos extremos.*

1. Consideremos el rayo que converge a  $S^1$ ,

$$Z = \begin{cases} x = (\frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{3}{2}) \cos(t) \\ y = (\frac{1}{\pi} \arctan(t) + \frac{3}{2}) \sin(t) \end{cases}$$

Sea  $X = Z \cup S^1$ . Los puntos sobre  $S^1$  son puntos de irreducibilidad de  $X$  pero no son punto extremos de  $X$ , ya que si  $(a, b)$  es un punto sobre  $S^1$  podemos encontrar subcontinuos no degenerados  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $A \subset S^1$  y  $B \subset S^1$ , y  $A \cap B = \{(a, b)\}$

2. En el continuo de Knaster,  $\mathcal{K}$ , los puntos diferentes de  $(0, 0)$  son puntos de irreducibilidad pero no son puntos extremos.

Sea  $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$  un punto en  $\mathcal{K}$ . Como  $\mathcal{K}$  es indescomponible  $y$  es un punto de irreducibilidad, por el Teorema 2.3.11. Como  $y \neq (0, 0)$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $y_k \neq 0$ . Si  $y_k \neq 1$ , existen  $t, s \in (0, 1)$  tales que  $t < y_k < s$ . Así,  $y_k \in [0, s] \cap [t, 1]$  y los subcontinuos

$$A = \left( \prod_{i=1}^{k-1} [0, 1] \times [0, s] \times \prod_{i=k+1}^{\infty} [0, 1] \cap \mathcal{K} \right)$$

y

$$B = \left( \prod_{i=1}^{k-1} [0, 1] \times [t, 1] \times \prod_{i=k+1}^{\infty} [0, 1] \cap \mathcal{K} \right)$$

contienen a  $y$  pero  $A \not\subseteq B$  ni  $B \not\subseteq A$ .

Si  $y_k = 1$ ,  $y = (0, 0, \dots, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$  o  $y = (0, 0, \dots, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots)$ . Tomamos la coordenada  $y_j$  con  $j > k$  y tenemos el caso anterior.

Así,  $y$  no es un punto extremo de  $\mathcal{K}$ .

3. El solenoide diádico  $\Sigma_2$  definido en el Ejemplo 2.3.17, no tiene puntos extremos pero todos sus puntos son puntos de irreducibilidad.

Sea  $z = (z_i)_{i=1}^{\infty}$  un punto en  $\Sigma_2$ . Como  $\Sigma_2$  es un continuo indescomponible  $z$  es un punto de irreducibilidad, por el Teorema 2.3.11. Tomemos la coordenada  $z_k = (a_k, b_k) \in S^1$ .

Los subcontinuos  $M = ([a_k, 1] \times [-1, 1]) \cap S^1$  y  $N = ([-1, a_k] \times [-1, 1]) \cap S^1$  contienen a  $z_k$ . Así, los subcontinuos

$$A = \left( \prod_{i=1}^{k-1} S^1 \times M \times \prod_{i=k+1}^{\infty} S^1 \right) \cap \Sigma_2$$

y

$$B = \left( \prod_{i=1}^{k-1} S^1 \times N \times \prod_{i=k+1}^{\infty} S^1 \right) \cap \Sigma_2$$

contienen a  $z$  y  $A \not\subseteq B$  ni  $B \not\subseteq A$ . Por lo tanto,  $z$  no es un punto extremo.

Con el siguiente resultado mostramos que las funciones débilmente monótonas preservan irreducibilidad si  $X$  tiene un punto extremo.

**Teorema 4.2.7.** *Sea  $a$  es un punto extremo de  $X$  y  $f: X \rightarrow Y$  es débilmente monótona, entonces  $Y$  es irreducible.*

*Demostración.* Supongamos que  $f(a)$  no es un punto de irreducibilidad. Luego, existen  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $Y$ , tales que  $Y = A \cup B$  y  $f(a) \in A \cap B$ , por el Teorema 2.2.8. Sean  $K$  y  $L$  las componentes de  $f^{-1}(A)$  y  $f^{-1}(B)$ , respectivamente, tales que  $a \in K \cap L$ . Además, como  $a$  es un punto extremo  $K \subset L$  o  $L \subset K$ . Si  $K \subset L$ , entonces, como  $f(K) = A$  y  $f(L) = B$ ,  $A \subset B$ . Esto contradice que  $B$  es un subcontinuo propio de  $Y$ . Por lo tanto,  $f(a)$  es un punto de irreducibilidad y así,  $Y$  es irreducible.  $\square$

Observemos que en el Ejemplo 4.2.1, el continuo  $X$  no tiene puntos extremos y la función no preserva irreducibilidad.

Para terminar la sección, mostramos que en general las funciones libremente descomponibles no preservan irreducibles. El siguiente ejemplo tomado de [7] nos muestra este hecho.

**Ejemplo 4.2.8.** *Existe una función libremente descomponible de un continuo irreducible cuya imagen no es irreducible.*

Consideremos el continuo de Knaster descrito en el Ejemplo 1.1.3, que denotamos  $\mathcal{K}$  y sea  $\mathcal{Z}$  la reflexión de  $\mathcal{K}$  con respecto al eje  $x = 0$ . Sean  $X = \mathcal{K} \cup \mathcal{Z}$  y  $f: X \rightarrow Y$  la función cociente que identifica puntos de la forma  $(x, y)$  con  $(-x, y)$  siempre que  $|x| \leq \frac{1}{2}$ .

Para ver que  $f$  es una función libremente descomponible, nótese que para cualquier par de subcontinuos  $A'$  y  $B'$  tales  $Y = A' \cup B'$ , se tiene que  $f(\mathcal{K}) \subset A'$  y  $f(\mathcal{Z}) \subset B'$ , o viceversa. Supongamos que  $f(\mathcal{K}) \subset A'$  y  $f(\mathcal{Z}) \subset B'$ . Así es suficiente tomar la descomposición  $A = \{f(x, y) : -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$  y  $B = \{f(x, y) : -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ . No es difícil ver que:

$$f^{-1}(A) = \mathcal{Z} \cup \{(x, y) \in X : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$$

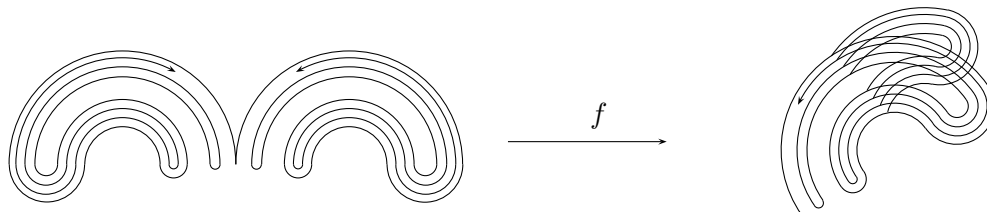
y

$$f^{-1}(B) = \mathcal{K} \cup \{(x, y) \in X : -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$$

Como  $X = \mathcal{K} \cup \mathcal{Z}$  y  $f(\mathcal{Z}) \subset A$  y  $f(\mathcal{K}) \subset B$ ,  $f$  es libremente descomponible.

Observemos que  $\text{Int}_Y(A \cap B) \neq \emptyset$ , y que para cualquier par de puntos  $a \in A \setminus B$  y  $b \in B \setminus A$ , existe un subcontinuo propio de  $Y$  que los contiene. Tomamos  $\kappa(a)$  la composante de  $a$  en  $A$ . Como  $\kappa(a)$  es denso en  $A$  existe un subcontinuo propio de  $L$  de  $A$  tal que  $a \in L$  y  $L \cap B \neq \emptyset$ .

Figura 4.2: Función libremente descomponible que no preserva irreducibilidad



Nótese que  $\text{Int}_A(L) = \emptyset$  y  $\{a, b\} \subset B \cup L$ . Así, el continuo  $B \cup L$  es un subcontinuo propio de  $Y$  ya que  $Y \setminus B$  es un abierto en  $Y$  que interseca a  $L$ , por tanto  $Y \setminus B \not\subseteq L$ . Con lo que concluimos que  $Y$  no es irreducible.

Aunque las funciones libremente descomponibles no preservan irreducibilidad, podemos notar de la Definición 3.1.11, que estas funciones preservan continuos indescomponibles. Nótese también que si restringimos a continuos con puntos extremos, estas funciones no preservan irreducibilidad.

Por esto nos preguntamos qué condiciones son necesarias en el espacio  $X$  para que las funciones libremente descomponibles preserven irreducibilidad.

Un continuo irreducible que admite una descomposición donde cada elemento es un subcontinuo y el espacio de descomposición es un arco es llamado continuo tipo  $\Lambda$ , ver [18]. Además notemos que si  $X$  es un continuo tipo  $\Lambda$  existe una función monótona  $g: X \rightarrow [0, 1]$  tal que el espacio de descomposición - un arco - esta dado por  $\mathcal{D}_g = \{g^{-1}(t) : t \in [0, 1]\}$ . Un ejemplo fácil de ver es la curva senoidal del topólogo, este continuo es un continuo tipo  $\Lambda$  cuya función monótona esta dada por  $m(x, y) = x$ . Así, podemos pensar que dado un continuo tipo  $\Lambda$ , los subcontinuos de  $X$  pueden estar controlados por las fibras de la imagen inversa de la función monótona de los elementos del arco. Por lo tanto nos hacemos la siguiente pregunta.

**Pregunta 4.2.9.** Sean  $X$  un continuo tipo  $\Lambda$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función libremente descomponible. Entonces,

1. ¿ $Y$  es irreducible?, ¿ $Y$  es un continuo tipo  $\Lambda$  ?
2. ¿Si  $x, z \in X$  y  $f(z) = f(x)$  entonces existe  $t \in [0, 1]$  tal que  $\{x, z\} \subset m^{-1}(t)$ ?, donde  $m: X \rightarrow [0, 1]$  es monótona.

### 4.3. RESULTADOS ADICIONALES

En el Capítulo 3 se mostró que en general las funciones fuertemente libremente descomponibles no son casimonótonas y en la Proposición 3.3.7 mostramos que esta relación se da si el espacio  $X$  es unicoherente. En esta sección mostramos que las funciones fuertemente libremente descomponible son casimonótonas si estas preservan puntos de irreducibilidad. Como consecuencia de esto también mostramos que si  $X$  es irreducible se tiene la misma relación.

**Teorema 4.3.1.** Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$  y  $f: X \rightarrow Y$  una función fuertemente libremente descomponible. Si  $Y$  es irreducible entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , entonces  $f$  es casimonótona.

*Demostración.* Si  $Y$  es indescomponible, entonces  $f$  es casimonótona, por el Teorema 3.3.12. Supongamos que  $Y$  es descomponible. Sea  $Q$  un subcontinuo de  $Y$  tal que  $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$ . Veamos que  $f^{-1}(Q)$  es un continuo.

1. Si  $f(a) \in Q$ ,  $Y \setminus Q$  es conexo, por el Corolario 2.1.5. Entonces  $Q$  y  $\text{Cl}_Y(Y \setminus Q)$  son subcontinuos propios de  $Y$  tales que  $Y = Q \cup \text{Cl}_Y(Y \setminus Q)$ . Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(Q)$  es un subcontinuo de  $X$ .
2. Si  $f(a)$  y  $f(b)$  no pertenecen a  $Q$ . Entonces,  $Y \setminus Q$  es desconexo. Así, existen  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos y conexos de  $Y$  tales que  $Y \setminus Q = U \cup V$  con  $f(a) \in U$  y  $f(b) \in V$ , por el Teorema 2.1.4. Así,  $U \cup Q$  y  $Q \cup V$  son dos subcontinuos propios de  $Y$ , tales que  $Y = (U \cup Q) \cup (Q \cup V)$ , por el Teorema 2.1.4. Como  $f$  es fuertemente libremente descomponible,  $f^{-1}(U \cup Q)$  y  $f^{-1}(Q \cup V)$  son subcontinuos de  $X$  y  $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(Q) \cup f^{-1}(V)$ .

Así,  $\text{Cl}_Y(U)$  es un continuo en  $Y$  que contiene a  $f(a)$  y  $Y = \text{Cl}_Y(U) \cup (Y \setminus U)$ . Por esto  $f^{-1}(\text{Cl}_Y(U))$  y  $f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))$  son subcontinuos de  $X$  y  $X \setminus (f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cup f^{-1}(\text{Cl}_Y(V)))$  es conexo por la Proposición 2.1.7. Además, si  $x \in X \setminus (f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cup f^{-1}(\text{Cl}_Y(V)))$ ,  $f(x) \notin \text{Cl}_Y(U) \cup \text{Cl}_Y(V)$ . Entonces,  $f(x) \in \text{Int}_Y(Q) \subset Q$ . Por lo tanto  $x \in f^{-1}(Q)$  luego  $X \setminus (f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cup f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))) \subset f^{-1}(Q)$ .

De lo anterior, existe una componente  $K$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que

$$X \setminus (f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cup f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))) \subset K.$$

Ahora supongamos que existe una componente  $L$  de  $f^{-1}(Q)$  tal que  $L \neq K$ . Sabemos que  $L \subset (f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cup f^{-1}(\text{Cl}_Y(V)))$  y  $(f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) \cap f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))) = \emptyset$ . Por lo tanto  $L \subset f^{-1}(\text{Cl}_Y(U))$  o  $L \subset f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))$ . Supongamos que  $L \subset f^{-1}(\text{Cl}_Y(V))$ . Entonces,  $L \cap \text{Cl}_X f^{-1}(\text{Cl}_Y(U)) = \emptyset$ . Sabemos que  $K \cap L = \emptyset$  y  $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(Q)$  es continuo. Para los cerrados  $\text{Cl}_X(f^{-1}(U)) \cup K$  y  $L$  no existe un conexo de  $f^{-1}(U \cup Q)$  que los interseque. Así  $f^{-1}(U \cup Q)$  no es un continuo por el Teorema 1.1.12.

□

Un resultado inmediato los Teoremas 3.3.12, 4.1.9 y 4.3.1 lo enunciamos en el siguiente corolario.

**Corolario 4.3.2.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función fuertemente libremente descomponible. Si  $X$  es irreducible entonces  $f$  es casimonótona.*

*Demostración.* Si  $Y$  es indescomponible  $f$  es casimonótona, por el Teorema 3.3.12. Si  $Y$  es descomponible  $f$  preserva puntos de irreducibilidad, por el Teorema 4.1.9. Así,  $f$  es casimonótona, por el Teorema 4.3.1. □

Con el siguiente ejemplo mostramos que el teorema anterior no es válido para funciones cuasimonótonas.

**Ejemplo 4.3.3.** *Consideremos  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ -3x + 2 & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Esta función es una función cuasimonótona que preserva puntos de irreducibilidad pero no es casimonótona.*

Una de las preguntas naturales a raíz del Corolario 4.3.2 es si podemos caracterizar las funciones fuertemente libremente descomponibles restringiendo los espacios de la siguiente manera:

**Pregunta 4.3.4.** Sea  $f: X \rightarrow Y$  una función fuertemente libremente descomponible entre continuos. Entonces,

1. ¿ $f$  es casimonótona si y sólo si  $X$  es irreducible o unicoherente?
2. ¿ $f$  no es casimonótona si y sólo si existe una función  $h: X \rightarrow S^1$  monótona?

# Bibliografía

- [1] Camargo J. y Macías S., *On freely decomposable maps*, Topology Appl., 159 (2012), 891-899.
- [2] Camargo J. y Isaacs R., *Continuos tipo Knaster y sus modelos geométricos*, Revista Colombiana de Matemáticas, 47 (2013), 67-81.
- [3] Camargo J. y Macías S., *On monotone and freely decomposable induced maps*, Preprints.
- [4] Charatonik J., *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Topology Appl., 33 (1989), 209-215.
- [5] Charatonik J., *On feebly monotone and related classes of mappings*, Topology Appl., 105 (2000), 15-29.
- [6] Dugundji J., *Topology*, Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1966.
- [7] Gordh G.R. Jr. y Hughes C.B., *On freely decomposable mappings of continua*, Glasnik Matematički., 14 (1979), 137-146.
- [8] Hocking J.G. y Young G.S., *Topology*, Dover Publications, New York, N. Y., 1988.
- [9] Illanes A. y Nadler S. B. Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York, 1999.
- [10] Janiszewski Z. y Kuratowski K., *Sur les continus indécomposables*, Fund. Math., 1 (1920), 210-222.
- [11] Jones F. L., *Historia y desarrollo de la teoría de los continuos indescomponibles*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 27, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2004.
- [12] Kuratowski K., *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [13] Macías S., *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
- [14] Maćkowiak T., *Continuos mappings on continua*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat), 158 (1979), 1-95.
- [15] Maćkowiak T., *Sets of irreducibility and mappings*, Bull. Acad. Polon. Sci. sér. sci. math. astronom. et phys. 24 (1976), 335-339.
- [16] Nadler S. B. Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [17] Nadler S. B. Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos N° 33, Sociedad Matemática Mexicana, México, 2006.

- [18] Thomas E.S. Jr., *Monotone decompositions of irreducible continua*, *Dissertationes Math.* (Rozprawy Mat), 50 (1966), 1-74.
- [19] Willard S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1998.
- [20] Whyburn G. T., *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.