

**IMPLEMENTACIÓN DE LA TEORÍA POROELÁSTICA EN EL ANÁLISIS DE LA  
ESTABILIDAD DE POZOS MEDIANTE EL DESARROLLO DE UNA  
HERRAMIENTA SOFTWARE, APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS  
FINITAS.**

**JINNA MARCELA PALACIOS BAYONA  
GUSTAVO HERNÁNDEZ VARGAS**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEOS  
BUCARAMANGA**

**2008**

**IMPLEMENTACIÓN DE LA TEORÍA POROELÁSTICA EN EL ANÁLISIS DE LA  
ESTABILIDAD DE POZOS MEDIANTE EL DESARROLLO DE UNA  
HERRAMIENTA SOFTWARE, APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS  
FINITAS.**

**JINNA MARCELA PALACIOS BAYONA  
GUSTAVO HERNÁNDEZ VARGAS**

**Trabajo de Grado como requisito parcial para optar al título de  
Ingeniero de Petróleos**

**Director**

***ELKIN RODOLFO SANTAFÉ***

*Ingeniero de Petróleos*

**Codirector**

***REINEL CORZO RUEDA***

*Ingeniero de Petróleos.*

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICOQUÍMICAS  
ESCUELA DE INGENIERIA DE PETROLEOS  
BUCARAMANGA**

**2008**

## **DEDICATORIA**

Los autores dedican este trabajo de investigación a sus padres, familiares y amigos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer a Dios, por ser el creador de nuestras vidas, a Maria Auxiliadora por ser mi guía, mi compañía y la artífice de todos mis logros.

A mis padres Gustavo y Elizabeth, por haberme brindado mi formación y educación, por su cariño y comprensión y por haber creído en mí siempre. A mi hermanita Eliza por ser mi amiga y consejera, y a mi hermanita Yasmín por regalarme tantas alegrías.

A Elkin Santafé, por ser tan excelente Director de Tesis, gracias por todo el tiempo dedicado, por sus conocimientos, consejos y por su amistad.

A Reinel Corzo por su ayuda y colaboración.

Al Doctor Gildardo Osorio, por sus sugerencias, conocimiento y disponibilidad.

Al Grupo de Investigación Estabilidad de Pozo y a todos sus integrantes, por haberme brindado la oportunidad de realizar esta investigación.

A la Escuela de Ingeniería de Petróleos y a todos sus profesores, por su entrega y dedicación en mi formación personal e intelectual.

A la Universidad Industrial de Santander, por haberme brindado la oportunidad de realizar y culminar mis estudios.

A mis amigos de la U, Yorguin, Cristian, Jonatan, Oscar, Carlos Jerez, Jorge Torres, Julián, Maoly, Nataly, Alba y Marlhin por haber compartido conmigo y por hacer que mi estancia en la Universidad fuera mucho más agradable.

A mis amigos de infancia y de toda la vida, Diego, Daniel, Pipe, Nelson, Wilmer, Freddy, Juan Carlos, por todos los momentos compartidos.

Y por supuesto a Jinnita, por ser fundamental e indispensable en este dúo conformado para cumplir nuestros sueños.

*Gustavo Hernández Vargas*

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero agradecer a Dios, por ser mi guía constante y por permitirme estudiar tan excelente carrera.

A mi papá, Luis Alfredo Palacios y a mi mamá Luz Marina Bayona, por apoyarme en todo momento y confiar en mí. A mis hermanas, Zorita y Karen por ser mis amigas y confidentes. A mi segunda mamá: mi tía Olga, a mi tía Carmenza y a toda mi familia. Gracias por toda el apoyo que me han brindado; ustedes son mi motivación para hacer las cosas bien.

A la mejor Universidad del país, La Universidad Industrial de Santander.

Al grupo de Investigación Estabilidad de Pozo y al Instituto Colombiano del Petróleo, ICP por darme la oportunidad de aprender y crecer con ellos durante todo este tiempo.

A Elkin Santafé, que más que mi Director de Tesis, es mi amigo. Gracias por compartir con nosotros tan buenos momentos!

A Reinel Corzo, por confiar en nosotros y en nuestro proyecto de Investigación.

Al Doctor Gildardo Osorio, de BP Exploration, por brindarme la oportunidad de aprender con él, por guiarme y por ser un autor más de este proyecto.

Agradezco todo el apoyo recibido en Halliburton Latin America durante la investigación de mi Proyecto de grado; especialmente al Ingeniero Edgar Villamil, a Juan Ramón Eraso, Álvaro Rocha, Jahir Martínez, Jairo Garcés, Cesar Marín y Ciro Ayala.

A mis amiguitos con los que compartí momentos muy especiales en la Universidad: Osquitar, Jonatan, Albita, Marlhin, Yorguin, gracias porque ustedes fueron una parte primordial de mi aprendizaje y crecimiento. A mi amiguita Nataly Peña: ya sabes que tenemos muchas metas que cumplir.

A todos mis grandes amigos que han hecho que las vacaciones en Cúcuta sean inolvidables: Dieguito, Yor, Naty, Mundito, Andrea, Juli, Henry y Gordis.

A las calificadoras de nuestra tesis, Zully Calderón y Olga Patricia Ortiz, por participar de la fase final del Proyecto.

Y agradezco a Tavito, porque ante todo...hicimos un excelente equipo de trabajo!!!!

*Jinnita M. Palacios B.*

## TABLA DE CONTENIDO

Pág.

### INTRODUCCIÓN

### REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA GEOMECAICA APLICADA A LA ESTABILIDAD DE POZOS.....	23
1.1 GEOMECÁNICA .....	23
1.1.1. Definición de Geomecanica.....	23
1.2 ESTABILIDAD DE POZOS.....	23
2 CONCEPTOS BASICOS.....	25
2.1 SISTEMA DE PARTICULAS .....	25
2.2 PARTICULAS Y FLUIDOS.....	25
2.3 CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE LOS MATERIALES GEOLÓGICO.	25
2.4 FUERZAS EN ROCAS .....	25
3. CONCEPTOS DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN .....	29
3.1 ANÁLISIS DE ESFUERZOS.....	31
3.1.1 Estado de esfuerzo y el Tensor de esfuerzo. ....	32
3.1.2 Clases de estado de esfuerzo.....	36
3.1.3 Esfuerzo medio y esfuerzo desviatorio .....	38
3.2. ANÁLISIS DE DEFORMACIONES .....	40
3.2.1 Deformación normal.....	40
3.2.2 Deformación de cizalla.....	43
3.2.3 Tensor de deformación y Estados de deformación para varios modos de deformación .....	44
4. TEORIA ELASTICA.....	48
4.1 ELASTICIDAD LINEAL .....	48
4.1.1 Relaciones esfuerzo-deformación para un sólido elástico lineal isotrópico...49	

4.1.2 Constantes elásticas.....	55
4.1.3 Teoría elástica lineal anisotrópica .....	54
4.2. ELASTICIDAD NO LINEAL.....	55
5 TEORIA POROELASTICA.....	57
5.1 PRESIÓN DE PORO.....	58
5.2 INFLUENCIA DE LA PRESIÓN DE PORO Y ESFUERZO EFECTIVO.....	59
5.3 CONSTANTE POROELÁSTICA DE BIOT.....	61
5.4 RESPUESTA DRENADA Y NO DRENADA.....	61
5.5 MEDICIONES DE LABORATORIO.....	62
5.5.1 Prueba enchaquetada drenada.....	63
5.5.2 Prueba enchaquetada no drenada.....	64
6 MECANISMOS DE FALLA.....	66
6.1. GENERALIDADES.....	66
6.2. PRUEBAS DE LABORATORIO.....	66
6.2.1 Prueba de resistencia a la compresión.....	66
6.2.2 Prueba de resistencia a la tensión.....	69
6.3 CRITERIOS DE FALLA.....	70
6.3.1 Criterios de Falla por Cizalladura.....	70
6.3.1.1 Criterio de Falla de Mohr-Coulomb.....	71
6.3.1.2 Criterio de Falla de Drucker-Prager.....	73
6.3.1.3 Criterio de Falla de Lade Modificado.....	74
6.3.2. Criterios de Falla por Tensión.....	75
7. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS.....	77
7.1 MODELO FÍSICO.....	78
7.2 MODELO MATEMÁTICO.....	80
7.2.1 Modelo Diferencial.....	81
7.2.1.1 Modelo de Flujo de Fluidos.....	81
7.2.1.2 Modelo de Deformación de Geomecánica.....	81
7.2.1.3 Modelo de Falla.....	91

7.2.2 Condiciones Auxiliares.....	93
7.2.2.1 Condiciones Iniciales.....	93
7.2.2.2 Condiciones de Frontera.....	94
7.2.2.3 Generación de la Malla.....	99
7.2.3 Modelo Numérico.....	100
7.2.3.1 Diferencias Finitas.....	101
7.2.3.1 Aproximaciones para la Primera y Segunda Derivada.....	101
7.3 MODELO DE COMPUTADOR.....	105
CONCLUSIONES.....	120
RECOMENDACIONES.....	121
NOMENCLATURA.....	123
BIBLIOGRAFÍA.....	127
ANEXO A.....	130
ANEXO B.....	144
ANEXO C.....	158
ANEXO D.....	162
ANEXO E.....	167
ANEXO F.....	170
ANEXO G.....	173
ANEXO H.....	177
ANEXO I.....	183

## LISTA DE TABLAS

		<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1.</b>	Relación entre las constantes elásticas	54
<b>Tabla 2.</b>	Descripción de algunas pruebas de Laboratorio.	62
<b>Tabla 3.</b>	Aproximación de la primera derivada progresiva, regresiva y central.	104
<b>Tabla 4.</b>	Módulos del Programa	107
<b>Tabla 5.</b>	Datos de entrada	112
<b>Tabla 6.</b>	Datos de entrada	114
<b>Tabla 7.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 0 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	115
<b>Tabla 8.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 10 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	115
<b>Tabla 9.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 20 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	116
<b>Tabla 10.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 30 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	116
<b>Tabla 11.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 40 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	117
<b>Tabla 12.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 50 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	117
<b>Tabla 13.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 70 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	118
<b>Tabla 14.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 80 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	118
<b>Tabla 15.</b>	Número de nodos fallados para un azimut de 90 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal	119

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1.</b> Diagrama de fases para materiales Geológicos	26
<b>Figura 2.</b> Tipos de fuerzas Superficiales: Simple, Tensil y Compresiva	28
<b>Figura 3.</b> Fuerza aplicada sobre un punto descompuesta en su componente normal y en su componente de cizalla	28
<b>Figura 4.</b> Fuerza vs. Alargamiento para diferentes cilindros del mismo material.	29
<b>Figura 5.</b> Alargamientos para diferentes cilindros del mismo material	30
<b>Figura 6.</b> Cuerpo en equilibrio sujeto a un conjunto de Fuerzas $F_j$ .	31
<b>Figura 7.</b> Nueve componentes de un estado de esfuerzo.	33
<b>Figura 8.</b> Esfuerzos principales en un elipsoide.	35
<b>Figura 9.</b> Descomposición de un estado de esfuerzo general compresivo.	39
<b>Figura 10.</b> Elemento de forma cúbica con sus lados orientados hacia los ejes cartesianos.	41
<b>Figura 11.</b> Deformación normal homogénea resultado de los desplazamientos lineales homogéneos donde no cambia la geometría.	41
<b>Figura 12.</b> Deformación de cizalla resultado de los desplazamientos angulares relativos.	43
<b>Figura 13.</b> Barra de sección uniforme sometida a una deformación uniaxial pura.	45
<b>Figura 14.</b> Deformación Hidrostática.	46
<b>Figura 15.</b> Deformación Triaxial.	47
<b>Figura 16.</b> Deformación de Corte Simple	47

<b>Figura 17.</b>	Diagrama tensión- deformación. El Módulo de Young o Módulo de Elasticidad es la tangente en cada punto.	51
<b>Figura 18.</b>	Material elástico lineal y Material perfectamente elástico.	56
<b>Figura 19.</b>	Carga compartida por la presión de poro. Esfuerzo total = Presión de poro + Esfuerzo efectivo soportado por los granos.	59
<b>Figura 20.</b>	Prueba de compresión sin confinar.	67
<b>Figura 21.</b>	Prueba de compresión triaxial.	68
<b>Figura 22.</b>	Prueba Brasilera	69
<b>Figura 23.</b>	Criterio de Mohr-Coulomb	72
<b>Figura 24.</b>	Inclinación máxima para el plano de falla, según el criterio de Mohr-Coulomb	73
<b>Figura 25.</b>	Representación del criterio de falla tensil en el círculo de Mohr.	76
<b>Figura 26.</b>	Modelamiento numérico.	78
<b>Figura 27.</b>	Modelamiento físico del yacimiento, empleando coordenadas cilíndricas.	80
<b>Figura 28.</b>	Elemento diferencial radial.	83
<b>Figura 29.</b>	Esquema de malla discretizada para nodo distribuido.	99
<b>Figura 30.</b>	Bloque tenidos en cuenta en la aproximación progresiva de la primera derivada	102
<b>Figura 31.</b>	Ventana de inicio del modelo computacional.	108
<b>Figura 32.</b>	Ventana de datos de perforación.	109
<b>Figura 33.</b>	Ventana de datos de fluido y roca.	110
<b>Figura 34.</b>	Ventana de propiedades mecánicas.	111
<b>Figura 35.</b>	Nodos fallados por tensión según herramienta de modelamiento elástico.	113
<b>Figura 36.</b>	Nodos fallados por tensión según herramienta de modelamiento poroelástico.	113

**TÍTULO: IMPLEMENTACIÓN DE LA TEORÍA POROELÁSTICA EN EL ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE POZOS MEDIANTE EL DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA SOFTWARE, APLICANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.**

**AUTORES: GUSTAVO HERNÁNDEZ VARGAS<sup>1</sup>  
JINNA MARCELA PALACIOS BAYONA<sup>2</sup>**

**PALABRAS CLAVES:** Poroelasticidad, Estabilidad de Pozo, Modelamiento Numérico, Geomecánica, Distribución de Esfuerzos, Criterios de Falla, Ventana Segura de Lodo, Falla por tensión, Falla por cizalladura, Peso de Lodo.

## **RESUMEN**

La remoción de roca durante la perforación de un pozo causa una perturbación en el estado inicial de esfuerzos in situ, lo cual produce una redistribución de esfuerzos en o cerca de la cara del pozo. Si esta redistribución excede la resistencia tensil o compresiva de la roca, se producirá problemas de Estabilidad de pozo tales como fracturamiento, cierre y-o colapso de pozo, entre otros.

La inestabilidad mecánica de pozos ocurre debido a una selección no adecuada de las condiciones de perforación, tales como la trayectoria de perforación (azimut e inclinación), densidad del lodo, ángulo de ataque, entre otros. Este problema se hace mayor cuando los pozos son perforados en zonas tectónicamente activas, en yacimientos de formación geológica reciente, formaciones naturalmente fracturadas y en pozos direccionales de trayectorias complejas.

Con el desarrollo de una herramienta software basada en la Teoría Poroelástica no lineal, se pretende modelar numéricamente la estabilidad mecánica de pozos en formaciones que están siendo perforadas, mediante la selección de los criterios de falla adecuados.

Esta herramienta se basa en un acoplamiento entre un modelo de flujo de fluidos y un modelo de deformación geomecánica, en donde se empleó coordenadas cilíndricas en tres dimensiones. El planteamiento numérico se realiza empleando diferencias finitas, tomando una malla de discretización de nodo distribuido y espaciamiento irregular.

---

<sup>1</sup> Proyecto de Grado.

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Físicoquímicas. Escuela de Ingeniería de Petróleos. Director Elkin Rodolfo Santafé.  
Codirector Reinel Corzo Rueda.

**TITLE: APPLY OF THE POROELASTIC THEORY FOR THE ANALYSIS OF WELLBORE STABILITY, BY THE DEVELOPMENT OF A SOFTWARE TOOL, USING FINITE DIFFERENCES.**

**AUTHORS: GUSTAVO HERNÁNDEZ VARGAS<sup>3</sup>  
JINNA MARCELA PALACIOS BAYONA<sup>4</sup>**

**KEYWORDS:** Poroelasticity, Wellbore Stability, Numerical Model, Geomechanics, Stresses Distribution, Failure Criteria, Safe Mud Window, Tensil Failure, Shear Failure, Mud Weigh.

### **ABSTRACT**

The rock removal when a well is being drilling cause a disturbance in the initial state of stress, which produces stresses redistribution near the Wellbore. If this redistribution exceeds the tensil and/or compressive strength of the rock, instability problems such as fracturing and/or collapse of the well, take place.

The mechanical instability happens because of an inappropriate selection of the drilling conditions, such as perforation trajectory (azimuth and inclination), mud weigh and attack angle. This problem becomes bigger when wells are drilled in tectonically active areas, recent geologic formation reservoirs, naturally fractured formations and complicated directional trajectories wells. With the development of a Software Tool based in non-linear Poroelastic Theory, we pretend to model numerically Mechanical Wellbore Stability while a well is being drilled, with the selection of the adequate failure criteria.

This Model was built coupling Fluid Flow Equations with Geomechanics Deformation equations, using cylindrical coordinates in 3D. Numerical planning is carried out in Finite Differences with a completely implicit outline, taking a discretization mesh with distributed node and irregular spacing.

---

<sup>3</sup> Graduation of Project.

<sup>4</sup> Faculty of Physic-Chemical. Petroleum Engineering School. Director Elkin Rodolfo Santafé.  
Codirector Reinel Corzo Rueda.

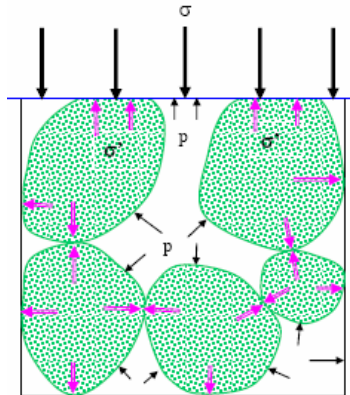
## INTRODUCCIÓN

La Geomecánica juega un papel muy importante en diversas áreas de la industria del Petróleo, particularmente en la Estabilidad de Pozo, Fracturamiento Hidráulico, Compactación y Subsistencia. En estas áreas, los esfuerzos in-situ, las deformaciones de la roca y el flujo de fluidos son parámetros clave en el análisis del peso de lodo y fallas en pozos que conducen a evitar pérdida de tiempo en trabajos a pozos, de fluido de perforación y en muchas instancias, la pérdida total del pozo.

En el Grupo de Estabilidad de Pozo, Convenio Universidad Industrial de Santander- ICP, se está buscando herramientas que permitan analizar de manera confiable los problemas relacionados con la inestabilidad del pozo. La inestabilidad de un pozo es función primaria de cómo la roca responde a la concentración de esfuerzos inducidos alrededor del pozo durante la perforación. Así, un pozo permanecerá estable si la roca soporta los esfuerzos inducidos, pero si la redistribución de esfuerzos excede la resistencia de la roca, puede ocurrir fallamiento. Generalmente, un pozo falla si se excede la resistencia a la tensión de la formación o si se excede la resistencia a la compresión.

La interacción entre la geomecánica y el flujo de fluidos es el centro de estudio de la Teoría Poroelástica (entendiéndose por "interacción, como un efecto mecánico de esfuerzo en lugar de reacciones químicas entre el fluido y el sólido). La respuesta poroelástica de un medio poroso saturado de fluido sujeto a perturbaciones en los esfuerzos y/o la presión de poro, ha sido en la última década de interés crítico en muchas aplicaciones ingenieriles.

Existen diferentes factores que tienen influencia sobre la interacción entre la deformación de la roca y el flujo de fluidos en distintos yacimientos. Algunos de estos factores son: las propiedades mecánicas del yacimiento y sus alrededores, la compresibilidad del fluido, la permeabilidad del yacimiento y la carga inicial (estado de esfuerzos inicial).



La interacción de estos parámetros y el análisis de cómo éstos afectan el acoplamiento entre la deformación de la roca y el flujo de fluidos en el yacimiento es complejo. Algunos factores pueden tener efectos significativos, otros representan efectos despreciables o el efecto de algunos factores puede ser una función del estado de esfuerzos del yacimiento. La interacción entre los factores que afectan los procesos acoplados flujo de fluido - geomecánica sugirieron un estudio numérico de la estabilidad de pozo, donde el yacimiento es considerado como un sistema poroelástico que consiste de un esqueleto sólido deformable que contiene un fluido levemente compresible. El modelo está basado en la solución simultánea de cuatro ecuaciones diferenciales parciales no lineales, que se pueden agrupar en dos modelos: (i) un modelo de flujo de fluidos, que describe la distribución de la presión de poro en el sistema poroso y (ii) un modelo de esfuerzo-deformación, que describe la deformación de la parte sólida de la roca.

## **REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.**

Estudios poroelásticos anteriormente reportados son de especial interés en este trabajo de investigación, y están enfocados principalmente hacia la determinación de esfuerzos in-situ, concentración de esfuerzos alrededor del pozo, propiedades mecánicas de la roca y condiciones óptimas para la estabilidad del pozo.

Los fundamentos de geomecánica están basados en el concepto de esfuerzo efectivo de Terzagui (1936). Basado en el concepto de esfuerzo efectivo de Terzagui, Biot (1941, 1955), fue el primero que presentó una teoría basada en el acoplamiento entre los esfuerzos y la presión de poro en un medio poroso y desarrolló una teoría generalizada de consolidación en tres dimensiones; aunque las publicaciones de Biot están más orientadas hacia la mecánica de rocas que al flujo de fluidos.

Skempton desarrolló una relación entre el esfuerzo total y la presión de poro del fluido bajo condiciones iniciales de carga no drenadas mediante los parámetros de Skempton A y B.

Geerstma (1957), desarrolló una relación entre la presión, el esfuerzo y el volumen. Van der Knaap (1959) extendió el trabajo de Geerstma a geomateriales elásticos no lineales.

Nur y Byerlee (1971), demostraron que la ley de esfuerzo efectivo propuesta por Biot es más general y físicamente sensible que la propuesta por Terzagui.

Rice y Cleary (1976), resolvieron algunos problemas poroelásticos asumiendo la presión de poro y el esfuerzo como variables primarias, en lugar de los desplazamientos como lo empleó Biot.

Otros trabajos recientes fueron realizados por Koutsabeloulis y Hope (1998), Settari y Mourits (1998), Settari y Walters (2001), Chin, Raghavan y Thomas (1998), Yale (2002), Tran, Settari y Nghiem (2002) y Gutierrez (1994).

Todos los trabajos anteriormente mencionados estuvieron limitados a la investigación de relaciones constitutivas lineales y flujo de fluido en una sola fase en un medio poroso.

El rápido progreso computacional en los últimos años ha permitido el desarrollo de soluciones a problemas asociados con materiales no lineales y flujo de fluidos en medios porosos. Debido a la complejidad de estas soluciones, el problema acoplado requiere de más estudio que mejore la exactitud, convergencia y eficiencia computacional, entre otros.

Muchos investigadores han estado debatiendo acerca de cuál aproximación de acoplamiento es la más acertada en el cálculo de las interacciones entre el fluido y la roca.

## **1. ASPECTOS GENERALES DE LA GEOMECÁNICA APLICADA A LA ESTABILIDAD DE POZOS.**

### **1.1. GEOMECÁNICA.**

#### **1.1.1. DEFINICIÓN DE GEOMECÁNICA.**

La geomecánica es la disciplina que estudia el *comportamiento de los materiales geológicos ante campos de esfuerzos y cambios en el ambiente físico* (Sánchez et al, 1997). Esta disciplina está basada en los conceptos y teorías de la mecánica de rocas y la mecánica de suelos, que relacionan el comportamiento de la formación bajo los cambios de esfuerzo, producto de las operaciones petroleras de perforación, completamiento y producción de pozos. Aunque las bases de la geomecánica fueron realizadas a principios de la década de los 90, las aplicaciones en la Industria del Petróleo empiezan a tener mayor divulgación a comienzo de la década de los 70 y por lo tanto esta es una disciplina novedosa para la Ingeniería de Petróleos. La geomecánica utiliza resultados experimentales de campo y laboratorio conjuntamente con soluciones analíticas y numéricas para resolver problemas particulares.

### **1.2. ESTABILIDAD DE POZOS.**

La geomecánica trata problemas donde se relacionan esfuerzos con resistencia de la formación. Es entonces de esperar, que aquellas operaciones de pozos que afecten y causen daño a la formación también tengan una gran influencia en el análisis de cualquier problema (estabilidad del pozo, arenamiento, fracturamiento, etc.). Por lo tanto, se deben analizar todas las operaciones de pozo que puedan ser negativas desde el punto de vista de la formación, para luego optimizarlas en

función de las características de la roca. Por ejemplo, la magnitud y dirección de los esfuerzos in-situ van a definir la trayectoria de mayor estabilidad para pozos horizontales y de gran desviación.

Estos pozos tendrán una mayor estabilidad si son perforados en dirección perpendicular al esfuerzo principal mínimo, ya que este problema de estabilidad se complica porque el eje del pozo no coincide con la dirección del esfuerzo principal máximo. Si se puede determinar experimentalmente la envolvente de falla de la roca de formación, entonces se puede calcular el rango de pesos de lodo que mantenga la integridad del pozo. Los problemas de estabilidad pueden existir aún después de la perforación, debido a que la mayoría de los pozos horizontales son completados a hueco abierto y la reducción de presiones de poro del yacimiento causa un aumento en los esfuerzos efectivos.

## 2. CONCEPTOS BÁSICOS.

### 2.1 SISTEMA DE PARTÍCULAS.

Los materiales geológicos están compuestos por un sistema multifásico de partículas minerales que crean una estructura rocosa donde residen fluidos tales como agua, hidrocarburos y aire. El sistema de partículas es lo que distingue a los materiales geológicos de los materiales continuos como los metales y fluidos.

Las partículas representan una fase sólida conocida como esqueleto mineral. Debido a esto, la deformación del material geológico está controlada por la interacción entre partículas individuales, la deformación de partículas y el movimiento relativo entre partículas. El fluido intersticial puede fluir a través de los poros interactuando con el esqueleto mineral, *alternando la magnitud de las fuerzas en el contacto entre partículas e influenciando la resistencia y compresibilidad del material geológico*<sup>1</sup>.

### 2.2. PARTÍCULAS Y FLUIDOS.

Los materiales geológicos son agregados de partículas, sin embargo se toman conceptos del área de mecánica de medios continuos para comprender y modelar su comportamiento mecánico.

Tal como se muestra en la Figura 1, los materiales geológicos son compuestos multifásicos donde existen tres fases:

1. Sólidos (Partículas de minerales).
2. Gas (Aire, gas, etc.)
3. Líquidos (Agua, petróleo, etc.)

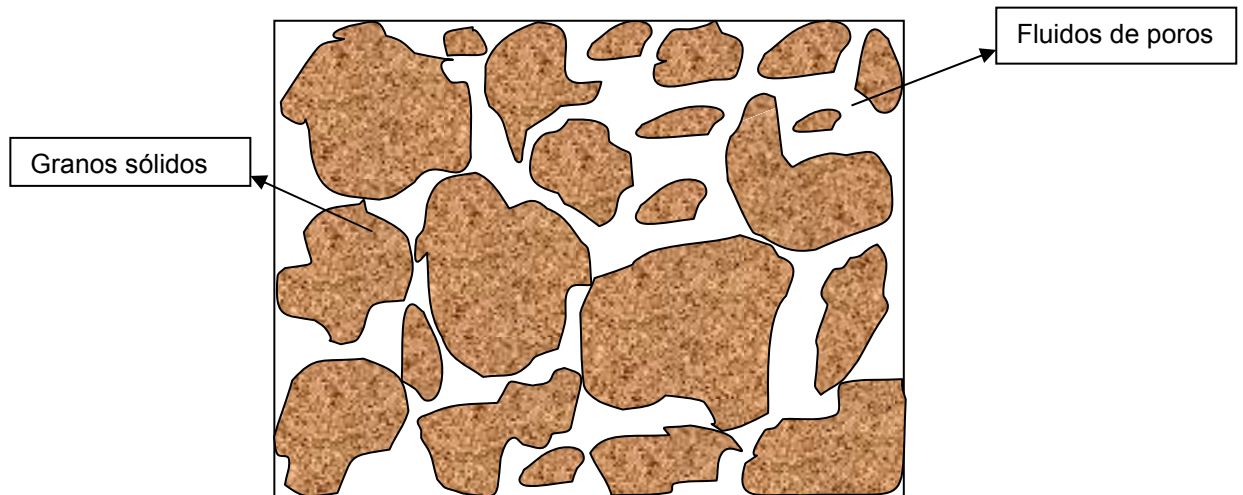


Figura 1. Diagrama de fases para materiales geológicos.

### 2.3 CARACTERÍSTICAS ESPECIALES DE LOS MATERIALES GEOLÓGICOS.

Los materiales geológicos presentan características muy particulares y por lo tanto los problemas son diferentes. Algunas de las características particulares de los problemas que involucran materiales geológicos son las siguientes:

- Los materiales geológicos son esencialmente diferentes en cada localidad, es decir, no existe un material geológico de propiedades constantes para una zona: Existen variaciones areales y verticales que se deben tener en cuenta en la caracterización geomecánica.
- El comportamiento de los materiales geológicos depende de la historia de esfuerzos y de las condiciones ambientales: La historia pasada de los materiales geológicos afecta su comportamiento futuro.
- El comportamiento de los materiales geológicos depende de la presión, el tiempo y las condiciones ambientales, y por lo tanto estos factores deben ser determinados para evaluar su comportamiento.

- Los materiales geológicos son sensibles a la perturbación por las operaciones de muestreo y por lo tanto, las propiedades medidas en el laboratorio pueden no ser representativas del comportamiento in-situ.
- Los materiales geológicos no poseen una relación esfuerzo-deformación única y lineal ya que ésta depende de los esfuerzos, la temperatura y el tiempo. Un mismo material presenta diferencias a diferentes presiones confinantes<sup>1</sup>.

#### **2.4. FUERZAS EN ROCAS.**

Se define como fuerza una magnitud vectorial que tiende a producir un cambio en el movimiento de un cuerpo o en su estructura interna, es decir, tiende a producir una deformación (Martínez, 2003). Debido a su carácter vectorial, varias fuerzas actuando sobre un mismo punto pueden combinarse o sumarse en una sola y, similarmente, puede considerarse que una fuerza está compuesta de varias, y puede descomponerse en ellas.

Las fuerzas aplicadas sobre rocas se clasifican en:

**a. Fuerzas de cuerpo o másicas:** Son fuerzas que dependen de la cantidad de masa de la roca como por ejemplo, las fuerzas gravitacionales, las fuerzas centrífugas y las fuerzas magnéticas.

**b. Fuerzas de superficie:** Son fuerzas que actúan a través de superficies de contacto entre partes adyacentes de un sistema rocoso. Éstas se subdividen en *simples* y en *compuestas*. Las simples tienden a producir movimiento y las compuestas tienden a producir distorsión; que realmente produzcan o no deformación, dependerá de su intensidad y de las propiedades y de las propiedades del cuerpo o de su situación. Las fuerzas compuestas, que consisten en dos fuerzas actuando en sentidos contrarios a lo largo de una línea recta se

dividen en *tensionales*, cuando son divergentes y las partículas a ambos lados del plano tienden a separarse, y en *compresivas*, cuando convergen hacia el cuerpo y las partículas a ambos lados del plano tienden a estar más cercanas (Figura 2).

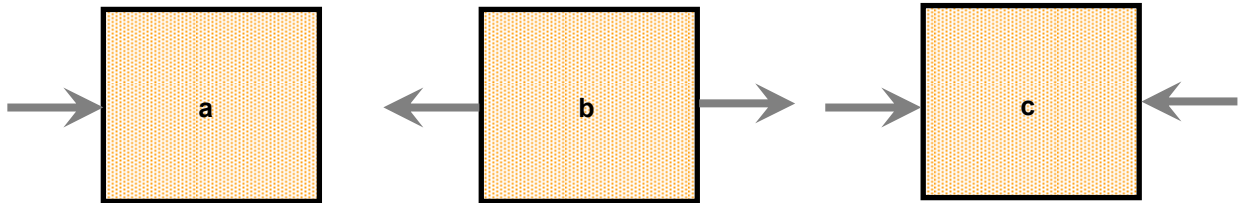


Figura 2. Tipos de fuerzas superficiales. (a) Fuerza simple, (b) Fuerza tensil, (c) Fuerza compresiva.

Las fuerzas de superficie se pueden clasificar también como *fuerzas normales*, si ésta es aplicada de manera perpendicular al plano, o *fuerzas de cizalla*, si la fuerza es aplicada paralela al plano.

En el caso general, una fuerza de superficie *no* es completamente perpendicular ni completamente paralela al plano. En este caso, la fuerza puede ser expresada como la suma de dos componentes: una componente normal y una componente de cizalla (Figura 3).

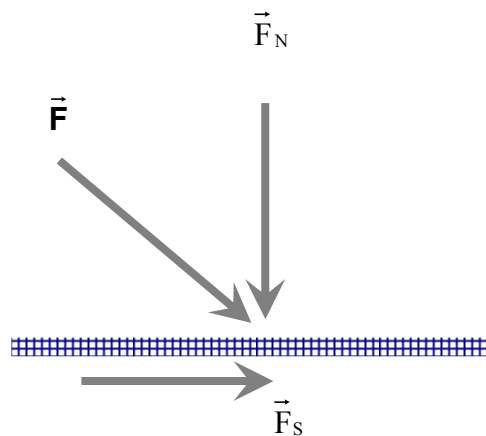


Figura 3. Fuerza aplicada sobre un punto descompuesta en su componente normal y en su componente de cizalla.

### 3. CONCEPTOS DE ESFUERZO Y DEFORMACIÓN.

Si un cilindro recto de área transversal uniforme  $A_0$  y longitud  $L_0$  se somete a una fuerza de tensión uniaxial  $F$ , éste se alargará una cantidad que incrementa cuando la fuerza es incrementada.

Si se grafica la fuerza  $F$  vs. el alargamiento  $\Delta L$ , se obtiene la Figura 4, donde el área bajo la curva representa el trabajo hecho durante la deformación.

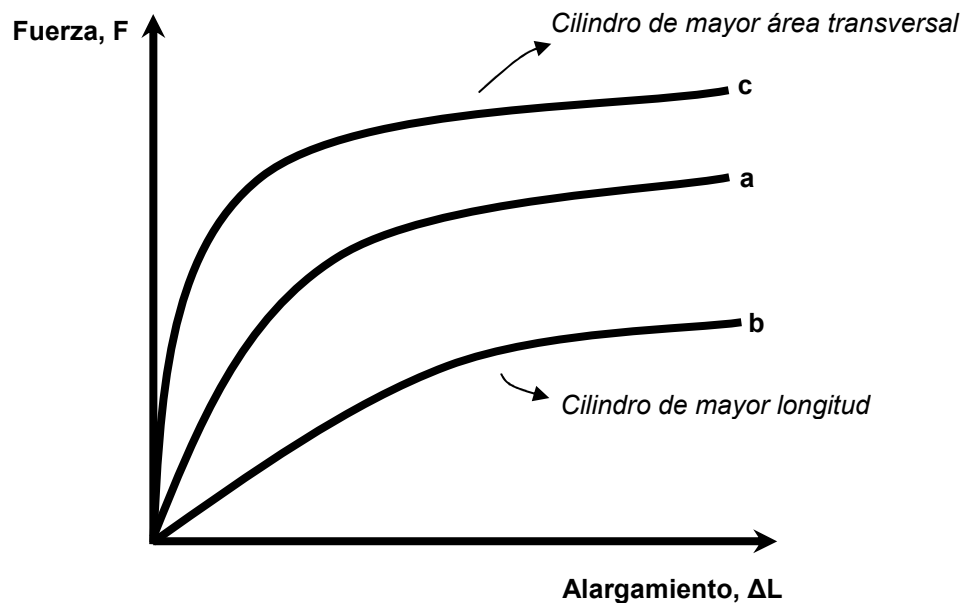


Figura 4. Fuerza vs. alargamiento para diferentes cilindros del mismo material.

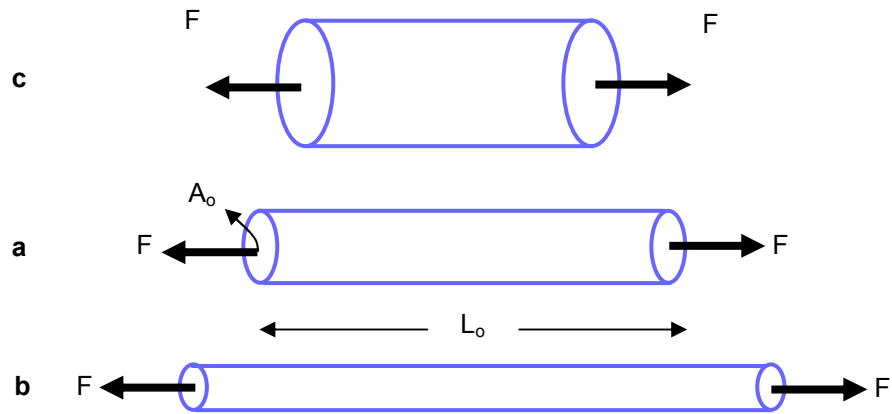


Figura 5. Alargamientos para diferentes cilindros del mismo material.

Si se considera otros cilindros del mismo material pero con diferente dimensión y se grafican relaciones fuerza-alargamiento, se obtendrán diferentes curvas  $b$  y  $c$  (Figura 4) para los cilindros con mayor longitud y mayor área transversal, respectivamente. Esto significa que hay un número ilimitado de curvas fuerza-alargamiento de acuerdo a las dimensiones del cilindro.

Ahora, si éstas curvas se grafican en términos de  $F/A_0$  y  $\Delta L/L_0$  se obtendrá una sola curva para todos los cilindros del mismo material.

Esta curva expresa las características mecánicas del material del cilindro y el área bajo esta curva representa el trabajo hecho por unidad de volumen en una tensión uniaxial.

La cantidad  $F/A_0$  es el *esfuerzo*  $\sigma$  y la relación  $\Delta L/L_0$  es la *deformación*  $\varepsilon$ . La idea de usar  $\sigma$  y  $\varepsilon$  provee un concepto unificado para describir el comportamiento mecánico de los sólidos.

En general, un miembro estructural no posee geometría uniforme en proporciones de tamaño y forma como el cilindro descrito anteriormente. Las fuerzas aplicadas serán también más complejas que una simple fuerza tensil<sup>2</sup>. Para estos casos

generales, se necesitan desarrollar los conceptos de esfuerzo y deformación en un punto.

### 3.1 ANÁLISIS DE ESFUERZOS.

El concepto de esfuerzo es usado para describir la intensidad de las fuerzas internas en un cuerpo que se encuentra sujeto a la aplicación de un conjunto de fuerzas externas<sup>2</sup>.

Esta idea es cuantificada mediante la definición del estado de esfuerzos en un punto de un cuerpo, en términos de la intensidad de las fuerzas que actúan sobre las superficies de un cuerpo libre centrado en el punto orientadas ortogonalmente.

La Figura 6 muestra un cuerpo finito en equilibrio, al cual se aplica un conjunto de fuerzas superficiales,  $F_j$ . Para determinar el estado de carga sobre alguna superficie interior,  $S_i$ , se puede determinar la distribución de la carga sobre  $S_i$  requerida para mantener el equilibrio del cuerpo.

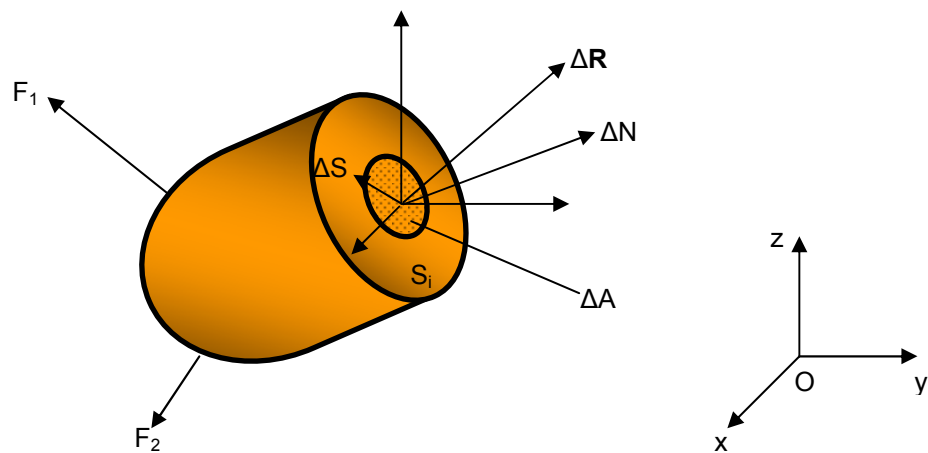


Figura 6. Cuerpo en equilibrio sujeto a un conjunto de fuerzas  $F_j$ .

Si se supone que sobre un elemento de superficie  $\Delta A$  alrededor del punto O, la fuerza resultante requerida para mantener el equilibrio es  $\Delta \mathbf{R}$ , como se muestra en la figura 6. La magnitud del *esfuerzo resultante*  $\sigma_r$  en O, o el vector esfuerzo está definido como:

$$\sigma_r = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta A} \quad (1)$$

Si las componentes del vector  $\Delta \mathbf{R}$  que actúan normalmente y tangencialmente a  $\Delta A$  son  $\Delta S$ ,  $\Delta N$ , la componente del *esfuerzo normal*,  $\sigma_v$ , y la componente del *esfuerzo de cizalla*,  $\tau$ , en O se definen como:

$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (2)$$

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta A} \quad (3)$$

### 3.1.1. ESTADO DE ESFUERZO Y EL TENSOR DE ESFUERZO.

Cualquier punto del interior de la Tierra está sometido a un complejo sistema de esfuerzos. Esto es debido a que sobre él actúa el peso de las rocas que se encuentran sobre éste, que no sólo se aplica en dirección vertical sino que es en cierto modo transmitido en todas las direcciones, aunque no siempre con el mismo valor<sup>1</sup>. Además, las rocas adyacentes pueden transmitirle fuerzas que pueden provenir de causas diversas. El conjunto de fuerzas que actúan, dan su vez esfuerzos sobre todos y cada uno de los planos que pasan por el punto. Puede considerarse que los esfuerzos que actúan sobre cada plano se componen dando un único esfuerzo resultante. No obstante, dado que por un punto pasan infinitos

planos, habrá infinitos vectores esfuerzo actuando. Además, la configuración de los esfuerzos puede variar de un instante a otro.

El *estado de esfuerzo* se define como el conjunto de los infinitos vectores que actúan sobre los infinitos planos que pasan por un punto en un instante dado. No es una magnitud vectorial sino una cantidad física compuesta de infinitos vectores, denominada tensor de segundo orden.

Los tensores pueden ser de orden cero, llamados escalares; de primer orden, llamados vectores; y de segundo orden, que expresan infinitos vectores.

Normalmente, un tensor de segundo orden necesita *nueve cantidades o componentes* para ser definido. En el caso del *tensor de esfuerzo*, se eligen los tres planos, perpendiculares a cada uno de los tres ejes cartesianos de coordenadas, y se escogen en cada plano tres componentes del vector esfuerzo que actúa sobre él: la componente normal y las dos componentes de cizalla que actúan según las direcciones paralelas a los ejes de coordenadas paralelos al plano (Figura 7).

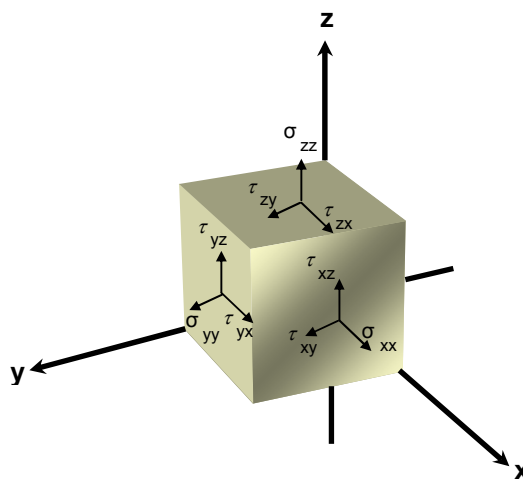


Figura 7. Las nueve componentes de un estado de esfuerzo.

Las componentes se denotan como  $\sigma_{ij}$ , donde  $i$  es el eje de coordenadas al cual es perpendicular el plano, y  $j$  es el eje al cual es paralela la componente. El tensor de esfuerzo se expresa entonces como:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (4a)$$

O bien,

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (4b)$$

Las componentes de cizalla, aquellas en las que  $i$  es distinto de  $j$ , se denota a menudo  $\tau$ .

Si se cambia el sistema de ejes cartesianos elegido, pero no el estado de esfuerzo, las componentes del tensor de esfuerzo cambian, pero el tensor no cambia. Es decir, las componentes sobre los tres planos perpendiculares cambian, pues al cambiar los ejes, cambian los planos. Las nueve componentes expresan lo mismo, sólo que en relación a otro sistema de referencia.

En general, un estado de esfuerzo puede ser representado por una figura geométrica, que es la superficie tridimensional que se obtendría uniendo todos los extremos de los vectores esfuerzo que actúan sobre un punto en un instante dado.

Esta figura no es irregular, como intuitivamente podría parecer, sino que los estados de esfuerzo son tales que todos los vectores esfuerzo están relacionados entre sí, y sus extremos suelen definir la superficie de un elipsoide de tres ejes, en el caso general.

Esta figura se denomina elipsoide de esfuerzo (Figura 8). En dos dimensiones, la figura sería una elipse.

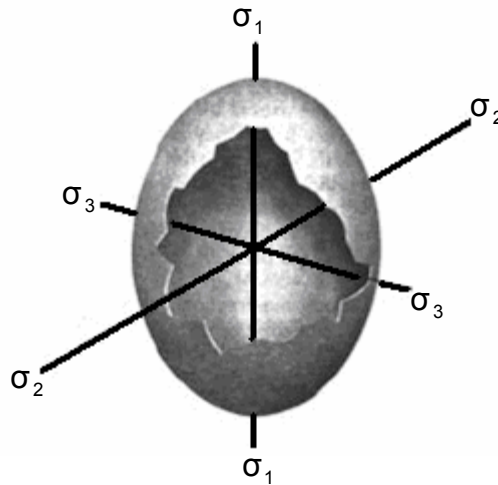


Figura 8. Esfuerzos principales en un elipsoide. Modificada de Geología Estructural y dinámica global.

Cada elipsoide de esfuerzo tiene tres ejes perpendiculares entre sí, llamados *esfuerzos principales*, y las direcciones según las cuales actúan se denominan *direcciones principales*. Uno de ellos es el mayor de todos los esfuerzos de ese estado particular, otro es el menor, y el tercero es un esfuerzo de valor intermedio entre los anteriores que actúa según una dirección perpendicular a los dos. Se denotan como  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , de forma que  $\sigma_1$  es mayor que  $\sigma_2$  y así mismo este último es mayor que  $\sigma_3$ . Una propiedad importante de los esfuerzos principales es

que son siempre esfuerzos normales, es decir, son perpendiculares al plano sobre el que actúan. Por tanto, los tres planos perpendiculares entre sí que contienen a los ejes del elipsoide son aquellos sobre los que actúan los esfuerzos principales y se llaman *planos principales* del elipsoide de esfuerzo.

Debido a que los planos principales no experimentan esfuerzos de cizalla, y si se escoge los ejes de coordenadas de forma que sean paralelos a los ejes del elipsoide, el tensor de esfuerzos se reduce a:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} \quad (5)$$

pues las componentes de cizalla en ese caso son cero. La magnitud y orientación de los esfuerzos principales caracterizan completamente el estado de esfuerzo.

### 3.1.2. CLASES DE ESTADO DE ESFUERZO.

Los estados de esfuerzo se clasifican en uniaxial, biaxial y triaxial, según si dos, uno o ninguno de los esfuerzos principales es cero<sup>2</sup>.

- **Estado de esfuerzo uniaxial.** Sólo existe un esfuerzo principal. La figura geométrica que lo representa es un par de flechas de igual magnitud y sentidos opuestos.
- **Estado de esfuerzo biaxial.** Sólo existen dos esfuerzos principales. La figura que lo representa es, en el caso general, una elipse formada por las

puntas de todos los vectores, si éstos son tensionales, o por el extremo de las colas si son compresivos. Si  $\sigma_1 = \sigma_2$ , la figura geométrica es una circunferencia. Si  $\sigma_1$  es compresivo y  $\sigma_2$  es tensional, la figura que une las puntas o las colas no es una elipse y no puede hablarse de elipse de esfuerzos en ese caso.

- **Estado de esfuerzo triaxial.** Existen tres esfuerzos principales:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . La figura en este caso es un elipsoide a menos que  $\sigma_1$  sea compresivo y  $\sigma_3$  sea tensional, en cuyo caso no puede hablarse de elipsoide de esfuerzo, aunque sí de estado y de tensor de esfuerzo. Los esfuerzos triaxiales son los comunes y se subdividen en poliaxiales, axiales e hidrostáticos:
  - **Estado de esfuerzo poliaxial.** En este caso  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Los tres esfuerzos principales son diferentes y la figura que lo representa es un elipsoide de tres ejes.
  - **Estado de esfuerzo axial.** En este caso  $\sigma_1 = \sigma_2$  o bien  $\sigma_2 = \sigma_3$ . Dos de los esfuerzos principales son iguales y la figura que lo representa es un elipsoide de revolución, es decir, un elipsoide cuya superficie puede ser generada girando una elipse alrededor de uno de sus ejes. En este caso hay infinitos planos principales, el perpendicular al eje de revolución y todos los que lo contienen.
  - **Estado de esfuerzo hidrostático.** En este caso  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Los tres esfuerzos principales son iguales y la figura que lo representa es una superficie esférica. En este caso, los esfuerzos en todas las

direcciones son iguales y todos son principales, es decir, todos actúan sobre planos perpendiculares a ellos. Por tanto, en un estado de esfuerzo de este tipo, que es el que se da en los fluidos en reposo, no hay ningún plano que esté sometido a esfuerzos de cizalla.

### 3.1.3. ESFUERZO MEDIO Y ESFUERZO DESVIATORIO.

Un estado de esfuerzo puede descomponerse en otros estados de esfuerzo. La descomposición más utilizada es la que divide un estado de esfuerzo cualquiera en dos estados diferentes, llamados esfuerzo medio y esfuerzo desviatorio.

El *esfuerzo medio* es un estado de esfuerzo hidrostático cuyo valor es la media aritmética de los esfuerzos principales.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (6a)$$

Y en dos dimensiones,

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad (6b)$$

El *esfuerzo desviatorio* es un estado de esfuerzo caracterizado por tres esfuerzos principales cuyos valores son:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_1 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}{3} \quad (7a)$$

$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m = \sigma_2 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)}{3} \quad (7b)$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m = \sigma_3 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}{3} = \frac{(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)}{3} \quad (7c)$$

En dos dimensiones, los esfuerzos principales del esfuerzo desviatorio son:

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m = \sigma_1 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \quad (8a)$$

$$\sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m = \sigma_2 - \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \quad (8b)$$

El esfuerzo medio es la parte hidrostática del estado de esfuerzo, es decir, la que tiende a producir cambios de volumen pero no de forma. El esfuerzo desviatorio, en cambio, es la parte del esfuerzo que tiende a producir distorsión. En la Figura 9 puede verse como un estado de esfuerzo bidimensional compresivo (a la izquierda), se descompone en un esfuerzo medio (centro) más un esfuerzo desviatorio (derecha).

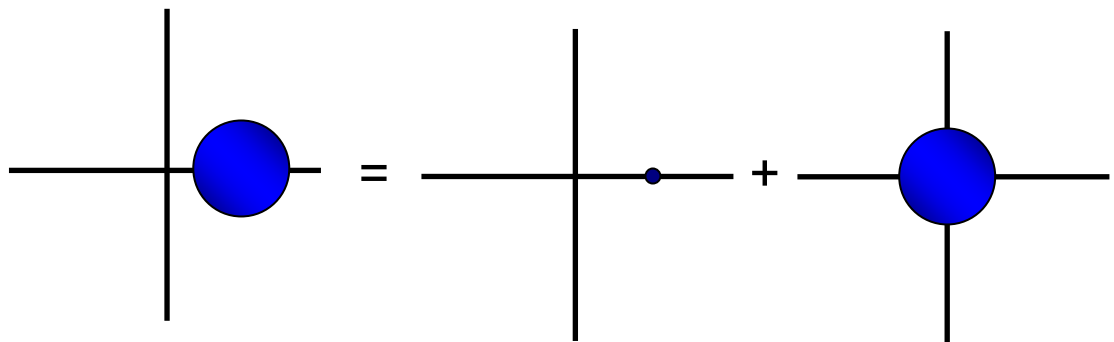


Figura 9. Descomposición de un estado de esfuerzo general compresivo.

El esfuerzo desviatorio tiene un esfuerzo principal positivo y otro negativo y no se representa por una elipse o un elipsoide. Se trata de un estado de tipo cizallamiento puro.

El esfuerzo medio se llama en ocasiones, *presión confinante*, y es igual en cualquier dirección dado que es hidrostático. El esfuerzo desviatorio, en cambio, varía.

### **3.2. ANÁLISIS DE DEFORMACIONES.**

El comportamiento mecánico de un material, tal como del cilindro recto de área transversal constante ilustrado, se identifica por la relación esfuerzo-deformación. El concepto de deformación, debe ser generalizado del caso simple de un cilindro recto sometido a una tensión, al caso general de un sólido deformable.

Existen dos modos de deformación que pueden ocurrir simultáneamente o separadamente: la deformación normal y la deformación de cizalla.

#### **3.2.1 DEFORMACIÓN NORMAL.**

Al considerar un elemento de forma cúbica, como se muestra en la Figura 10, con sus lados orientados a las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y por simplicidad, que éste se deforma sólo en las direcciones  $x$  y  $y$ , es decir no hay deformación en la dirección  $z$ , se representa el caso de deformación llamado estado de deformación en el plano.

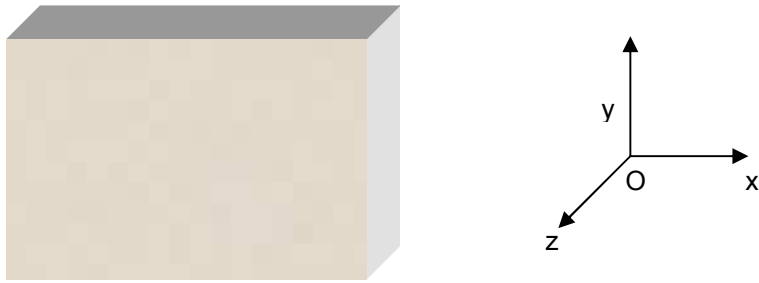


Figura 10. Elemento de forma cúbica con sus lados orientados hacia los ejes cartesianos.

El modo de deformación normal en el plano se muestra en la Figura 11, donde se tiene en cuenta las deformaciones en las direcciones  $x$  y  $y$ .

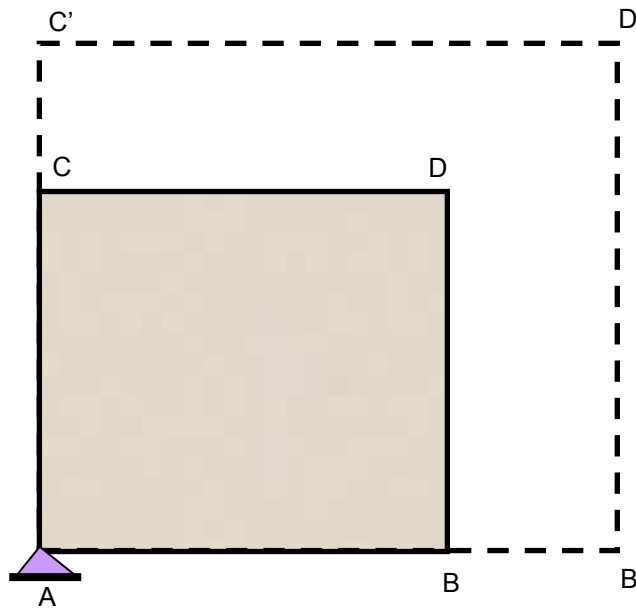


Figura 11. Deformación normal homogénea resultado de los desplazamientos lineales homogéneos donde no cambia la geometría.

El elemento no deformado es ilustrado por el rectángulo  $ABCD$ , en la cual el punto  $A$  es fijado en una posición para excluir el desplazamiento lineal del cuerpo rígido. El elemento deformado se indica por  $AB'C'D'$ .

En el primer modo de deformación mostrado en la Figura 11, el elemento permanece rectangular y la deformación es un desplazamiento lineal a lo largo de cada lado. La deformación a lo largo de  $AB$  es  $BB'/AB$ , la cual es igual a la deformación a lo largo de  $CD$  para condiciones homogéneas. La deformación a lo largo de  $AC$  es  $CC'/AC$ , la cual es igual a la deformación a lo largo de  $BD$ , pero no necesariamente igual a la deformación a lo largo de  $AB$ . Estas deformaciones son llamadas *deformaciones normales* en analogía a los esfuerzos normales, y algunas veces se denominan deformaciones lineales o directas.

Si  $AB$  y  $AC$  son paralelas a las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente, las componentes de la deformación normal en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  para la deformación en el plano se expresan mediante:

$$\epsilon_x = \frac{BB'}{AB} \quad (9a)$$

$$\epsilon_y = \frac{CC'}{AC} \quad (9b)$$

$$\epsilon_z = 0 \quad (9c)$$

Las deformaciones normales que se muestran en la Figura 11, son positivas si  $BB'$  y  $CC'$  son desplazamientos positivos en las direcciones  $x$  y  $y$ , respectivamente. Esto significa que las deformaciones tensiles son positivas mientras que las deformaciones compresivas son negativas, convención de signos adoptada para deformaciones normales.

### 3.2.2. DEFORMACIÓN DE CIZALLA.

El segundo modo de deformación es el que se muestra en la Figura 12, en la cual el elemento cambia de forma, de un rectángulo a un paralelogramo de lados iguales a los lados del elemento original.

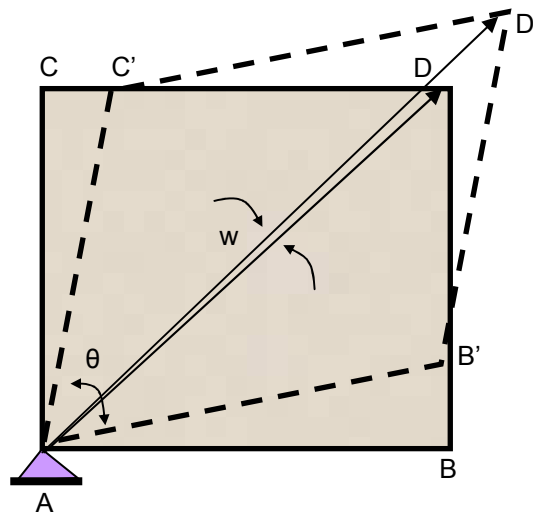


Figura 12. Deformación de cizalla resultado de los desplazamientos angulares relativos. Un rectángulo cambia de forma a un paralelogramo.

En este modo de deformación, los desplazamientos  $BB'$  y  $CC'$  son normales a  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, y ocurre cuando las superficies de los lados del elemento rectangular están sujetas a esfuerzos de corte o cizalla.

Para deformaciones pequeñas, la deformación de cizalla está definida como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (10a)$$

Donde  $\theta$  es el ángulo entre  $AB'$  y  $AC'$ , expresado para las pequeñas desviaciones por la relación:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \left[ \tan^{-1}\left(\frac{BB'}{AB}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{CC'}{AC}\right) \right] \quad (10b)$$

Sustituyendo la expresión (10b) en la expresión (10a), y considerando que para ángulos pequeños la tangente es aproximadamente igual al valor del ángulo mismo, se tiene que:

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{BB'}{AB}\right) + \left(\frac{CC'}{AC}\right) \quad (10c)$$

La deformación de cizalla mostrada en la Figura 12, es positiva si  $BB'$  y  $CC'$  son desplazamientos positivos en las direcciones  $y$  y  $x$ , respectivamente. La deformación de cizalla es positiva cuando el ángulo  $\theta$  es un ángulo agudo.

### 3.2.3. TENSOR DE DEFORMACIÓN Y ESTADOS DE DEFORMACIÓN PARA VARIOS MODOS DE DEFORMACIÓN.

Para el caso generalizado de cuerpos en tres dimensiones, se consideran nueve componentes de la deformación, lo cual bajo la ausencia de momentos de cuerpo, se reducen a seis componentes de deformación debido a que  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Asumiendo pequeñas deformaciones, el tensor simétrico de estas componentes es definido como:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (11)$$

A través de seis componentes en el tensor de deformación  $\epsilon_{ij}$ , se puede expresar el estado acoplado de las deformaciones de un cuerpo sometido a fuerzas externas. Esto es conveniente algunas veces para considerar estados específicos de deformación general.

- **Estado de deformación uniaxial.** En la Figura 13, se muestra una barra de sección uniforme, sometida a una deformación uniaxial pura, mientras que las otras deformaciones son restringidas. Bajo estas condiciones, se asume que las deformaciones ocurren sólo en una dirección, a lo largo del eje del cuerpo y el tensor de deformación se reduce a:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (12)$$



Figura 13. Barra de sección uniforme sometida a una deformación uniaxial pura.

- **Estado hidrostático de deformación.** En la Figura 14 se muestra una deformación hidrostática, en donde el cuerpo experimenta sólo deformaciones volumétricas iguales en todas las direcciones. El tensor de

deformación para el elemento de material isotrópico sometido a esfuerzo hidrostático (presión) se convierte en:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{xx} \end{vmatrix} \quad (13)$$

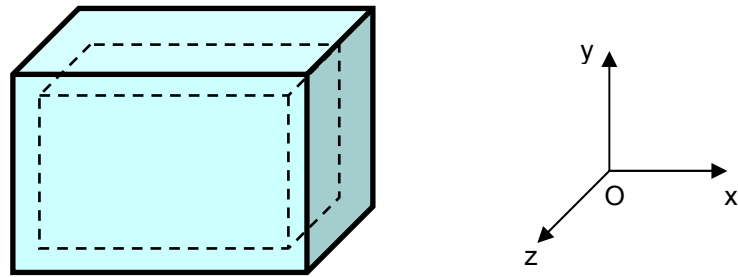


Figura 14. Deformación hidrostática.

- **Estado triaxial de deformación.** En la Figura 15 se muestra una deformación triaxial, estado causado en un espécimen cúbico de un material, en el cual las tres deformaciones aplicadas a estas caras son las deformaciones principales, así:

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (14)$$

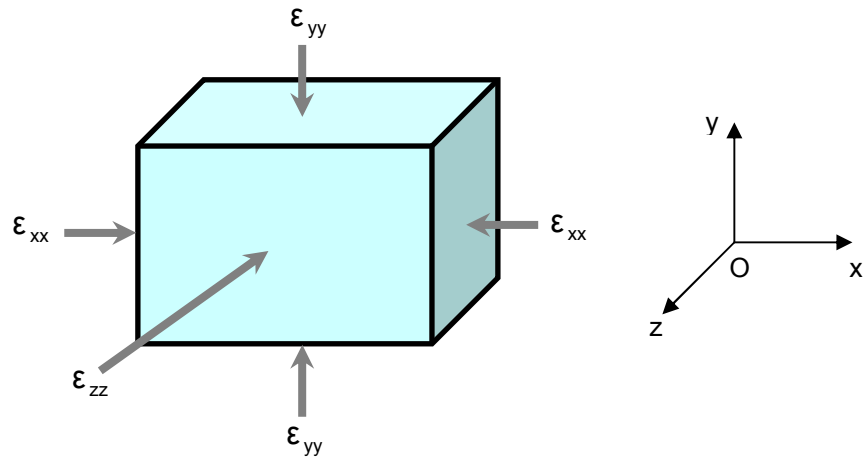


Figura 15. Deformación triaxial.

- **Deformación de corte simple.** En la Figura 16 se muestra este tipo de deformación, en donde un elemento de material es sometido a corte sin ningún cambio de volumen. De aquí,

$$\epsilon_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (15)$$

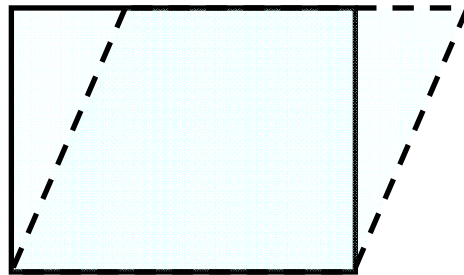


Figura 16. Deformación de corte simple.

## 4. TEORÍA ELÁSTICA.

La relación esfuerzo-deformación en rocas es muy compleja, por lo cual se hace necesario generar soluciones a los problemas más complicados de la mecánica de rocas. Es entonces necesario idealizar y simplificar el comportamiento de la relación esfuerzo-deformación mediante teorías que logren explicar el comportamiento real de las rocas sometidas a esfuerzos<sup>2,11</sup>.

### 4.1. ELASTICIDAD LINEAL.

La teoría de la elasticidad lineal asume una relación lineal única entre el esfuerzo y la deformación, aunque la mayoría de las rocas se comportan de una forma no lineal cuando están sometidas a grandes esfuerzos. Pero *para cambios suficientemente pequeños de esfuerzos de esfuerzo*, este comportamiento puede ser generalmente descrito por *relaciones lineales*. Por ejemplo, para el caso de una prueba de compresión uniaxial:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 \tag{16}$$

Donde el coeficiente de proporcionalidad **E**, es el Módulo de Young, que pertenece a un grupo de coeficientes llamados *módulos elásticos* y es una medida de la rigidez de una muestra, es decir, la resistencia de ésta a ser comprimida por un esfuerzo uniaxial. La ecuación (16) es conocida como la *Ley de Hook*.

#### 4.1.1 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA UN SÓLIDO ELÁSTICO LINEAL ISOTRÓPICO.

En un sólido isotrópico, la relación entre el esfuerzo vertical y la deformación vertical es la misma que la relación entre el esfuerzo horizontal y la deformación horizontal, etc.

Una consecuencia importante de la propiedad de isotropía es que los ejes principales de la deformación deben coincidir con los ejes principales del esfuerzo<sup>2,3</sup>.

La teoría de la elasticidad lineal asume básicamente que las componentes del esfuerzo son funciones lineales de las componentes de la deformación, lo que indica implícitamente que el esfuerzo no depende de la tasa de cambio de la deformación, la historia de las deformaciones, etc.

Las relaciones generales entre esfuerzos y deformaciones para estos materiales pueden ser expresadas como:

$$\sigma_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y + \lambda\epsilon_z \quad (17a)$$

$$\sigma_y = \lambda\epsilon_x + (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_z \quad (17b)$$

$$\sigma_z = \lambda\epsilon_x + \lambda\epsilon_y + (\lambda + 2G)\epsilon_z \quad (17c)$$

$$\tau_{xy} = 2G\gamma_{xy} \quad (17d)$$

$$\tau_{xz} = 2G\gamma_{xz} \quad (17e)$$

$$\tau_{yz} = 2G\gamma_{yz} \quad (17f)$$

Los coeficientes  $\lambda$  y  $G$  son los módulos elásticos conocidos como Parámetros de Lamé y Módulo de Rigidez o Módulo de Corte.

El módulo de corte  $G$ , es considerado una medida de la resistencia de la muestra a la deformación de corte.

Si se define la deformación volumétrica como la suma de las tres deformaciones normales principales, es decir:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (18)$$

Entonces las ecuaciones (17a), (17b) y (17c) se pueden escribir de la forma:

$$\sigma_x = \lambda\varepsilon_v + 2\varepsilon_x \quad (19a)$$

$$\sigma_y = \lambda\varepsilon_v + 2\varepsilon_y \quad (19b)$$

$$\sigma_z = \lambda\varepsilon_v + 2\varepsilon_z \quad (19c)$$

#### 4.1.2. CONSTANTES ELÁSTICAS.

Se denomina módulo de elasticidad a la razón entre el incremento del esfuerzo y el cambio correspondiente a la deformación unitaria. Para la teoría lineal isotrópica de la elasticidad, sólo dos constantes elásticas son independientes, las demás se pueden expresar en función de las otras constantes<sup>3</sup>.

- **Módulo de Young (E):** Es la medida de la rigidez de un material y está definido como la relación esfuerzo-deformación bajo un estado de carga uniaxial. El principio básico es que si a un cuerpo se le aplica un esfuerzo que después de un tiempo se retira, el cuerpo retorna a su tamaño original.

Para un material elástico lineal e isótropo, el módulo de Young tiene el mismo valor para un esfuerzo de tensión que para uno de compresión, siendo una constante independiente del esfuerzo siempre que no exceda el límite elástico, y es siempre mayor que cero<sup>3</sup>.

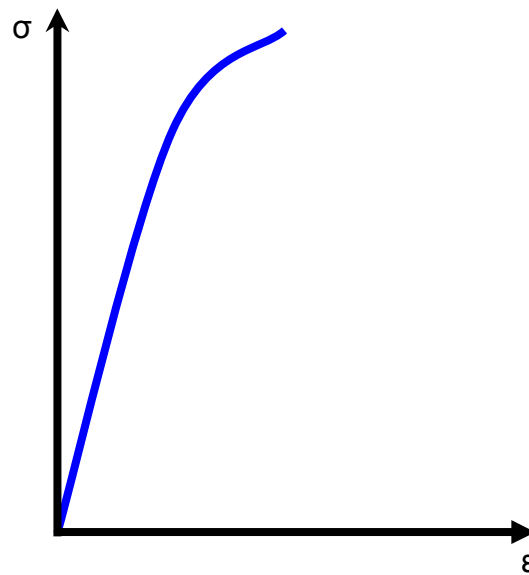


Figura 17. Diagrama tensión – deformación, el Módulo de Young o Módulo de elasticidad es la tangente en cada punto. Para algunos materiales, resulta aproximadamente constante dentro del límite elástico.

Para este estado de carga uniaxial,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , y solamente  $\sigma_1$  es diferente de cero, por lo que se tiene:

$$\sigma_1 = \lambda \epsilon_v + 2\epsilon_1 \tag{20a}$$

$$0 = \lambda \epsilon_v + 2\epsilon_2 \tag{20b}$$

$$0 = \lambda \epsilon_v + 2\epsilon_3 \tag{20c}$$

Y entonces,

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \varepsilon_1 \quad (21)$$

De donde,

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (22)$$

- **Módulo de Poisson ( $\nu$ ):** Medida del estrechamiento de un material elástico lineal e isótropo cuando se estira longitudinalmente y se adelgaza en las direcciones perpendiculares a la del estiramiento. Es decir, es la razón entre razón entre el alargamiento longitudinal producido dividido por el acortamiento de una longitud situada en un plano perpendicular a la dirección de la carga aplicada<sup>3,4</sup>:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad (23)$$

En la ecuación (23), el signo negativo se incluye porque la expansión se considera negativa y el Modulo de Poisson, por definición, es una cantidad positiva.

Para un material isótropo elástico perfectamente incompresible que no cambia de volumen, esta relación es igual a 0.5. Normalmente el Módulo de Poisson para rocas de yacimiento tiene un valor que varía entre 0.15 y 0.25.

- **Módulo volumétrico ( $K$ ).** Coeficiente de proporcionalidad entre el esfuerzo promedio,  $\sigma_m$ , y la deformación volumétrica,  $\varepsilon_v$ , durante una prueba hidrostática en la que los tres esfuerzos normales aplicados a una muestra

son iguales,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = P$ . Representa la resistencia opuesta por el material a la compresión hidrostática aplicada<sup>4</sup>.

$$K = \frac{\sigma_m}{\epsilon_v} = \frac{P}{\epsilon_v} \quad (24)$$

O expresado en términos de los módulos E y  $\nu$ ,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (25)$$

- **Módulo de corte o Rigidez (G).** Representa la medida de la resistencia de un cuerpo a cambiar de forma<sup>3,4</sup>. Matemáticamente, está dado por:

$$G = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Resistencia de corte}} = \frac{\tau}{\gamma} \quad (26)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (27)$$

Para la teoría elástica lineal, *sólo se necesita conocer dos parámetros para describir de manera completa un medio*, los otros parámetros elásticos pueden ser conocidos por medio de relaciones como se muestra en la Tabla 1.

$E = 3K(1 - 2\nu)$	$K = \lambda \frac{1 + \nu}{3\nu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + G} = \frac{2\nu}{3}$
$E = 2G(1 + \nu)$	$K = \frac{2}{3}G \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{G}{\lambda + G} = 1 - 2\nu$
$E = \frac{9KG}{3K + G}$	$K = \lambda + \frac{2}{3}G$	$\frac{\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 - \nu)$
$E = G \frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G}$	$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$	$\frac{3\lambda + 2G}{\lambda + G} = 2(1 + \nu)$
$E = \frac{\lambda}{\nu}(1 + \nu)(1 - 2\nu)$	$\frac{\lambda}{G} = \frac{2\nu}{1 - 2\nu}$	$\frac{3\lambda + 4G}{\lambda + G} = 2(2 - \nu)$

Tabla 1. Relación entre las constantes elásticas. Tomada de "Petroleum Related Rock Mechanics".

FJÆR et al.

#### 4.1.3. TEORÍA ELÁSTICA LINEAL ANISOTRÓPICA.

Se dice que un material es anisotrópico cuando la respuesta elástica de éste depende de la dirección del material, entonces los módulos elásticos para un material anisotrópico son diferentes para diferentes direcciones del material<sup>2,5</sup>.

El origen de la anisotropía viene dado por la heterogeneidad de la composición de un material, por lo que las rocas son anisotrópicas en algún punto.

En cálculos de elasticidad, algunas veces la anisotropía es ignorada más por necesidad que por comodidad ya que la descripción de la anisotropía requiere mucha información sobre la orientación de un material que puede no estar

disponible. Sin embargo, ignorar la anisotropía en ciertos casos induce a grandes errores.

## 4.2. ELASTICIDAD NO LINEAL.

Algunos materiales no obedecen la relación lineal esfuerzo-deformación, comportándose de una manera no lineal, descripción que resulta matemáticamente más complicada que la formulación matemática de la elasticidad lineal<sup>6</sup>. Para un material elástico no lineal, la relación esfuerzo-deformación puede ser escrita como:

$$\sigma = E_1\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + E_3\varepsilon^3 + E_4\varepsilon^4 + \dots \quad (28)$$

El comportamiento no lineal puede tener varias causas y aparece en muchas formas diferentes.

En la Figura (18a) se muestra un material lineal elástico en el cual existe una relación constante entre el esfuerzo aplicado y la deformación resultante y el módulo elástico correspondiente a esta pareja esfuerzo-deformación es la pendiente de la recta.

En la Figura (18b) se muestra una relación esfuerzo-deformación no lineal, pero que es idéntica para un proceso de carga y descarga. A estos materiales se les conoce como *perfectamente elásticos*. El módulo elástico en esta curva no está únicamente definido, para un específico nivel de esfuerzo su valor es la tangente a la curva en este punto.

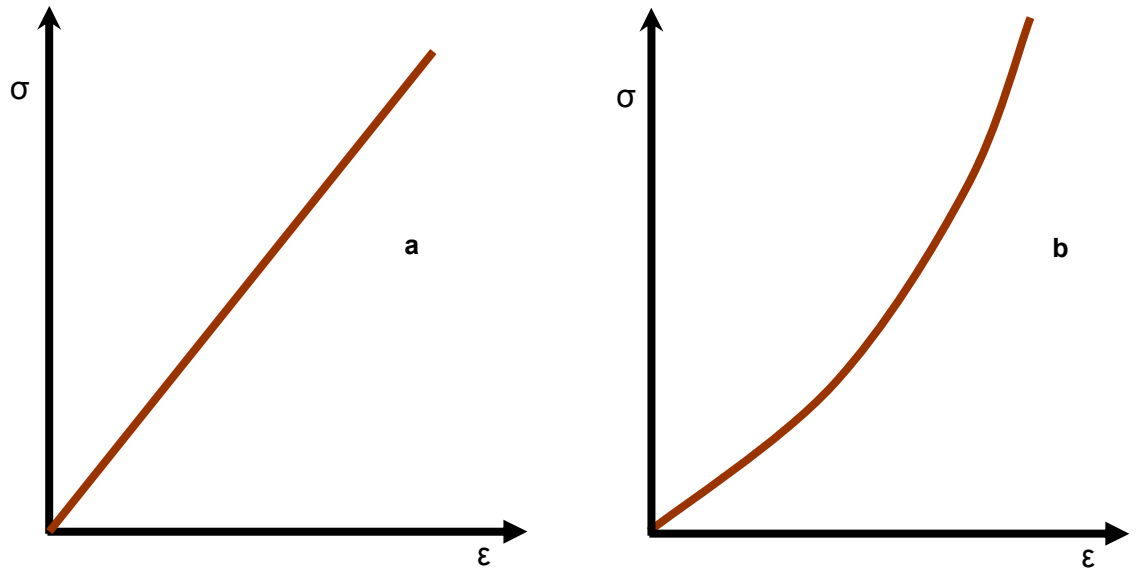


Figura 18. (a) Material elástico lineal, (b) Material perfectamente elástico.

## 5. TEORÍA POROELÁSTICA.

Las rocas del subsuelo están compuestas de poros saturados de fluidos (agua, aceite, etc.) que tienen una gran influencia en el comportamiento mecánico de la masa rocosa. Pero muchas veces, en el análisis de los problemas de mecánica de rocas se ignora el efecto de los fluidos de poros en las rocas, asumiendo que la masa rocosa es completamente sólida.

Existen muchas situaciones en que se debe tener en cuenta un *acoplamiento* entre el modelo de deformación geomecánica y el modelo de flujo de fluidos para obtener soluciones a estos problemas de una manera más aproximada. Tales situaciones son por ejemplo, la deformación alrededor de un pozo, fracturamiento hidráulico y los deslizamientos a lo largo de fallas activas.

La teoría poroelástica tiene estudio el cambio entre el esfuerzo y la presión del fluido. Esta teoría fue desarrollada por Maurice A. Biot (1941) y extendida más adelante por, entre otros, Verruijt (1969), Rice y Cleary (1976) y Detournay y Cheng (1993)<sup>7</sup>.

Dos fenómenos son el fundamento del comportamiento poroelástico.

1. El acoplamiento *sólido-fluido* ocurre cuando un cambio en el esfuerzo aplicado produce un cambio en la presión del fluido o la masa del fluido.
2. El acoplamiento *fluido-sólido* ocurre cuando un cambio en la presión del fluido o en la masa del fluido produce un cambio en el volumen del material poroso.

La palabra *sólido* hace referencia al esqueleto sólido de la roca porosa. El término *presión del fluido* hace referencia a la *presión de poro*.

Se desprecia el acoplamiento *sólido-fluido* cuando el fluido es altamente compresible como el aire. Un ejemplo de acoplamiento *fluido-sólido* es la subsidencia debida a grandes cantidades de extracción de fluido de un acuífero o yacimiento de hidrocarburos.

La descripción matemática más simple de las dos formas básicas de acoplamiento entre sólido y fluido es un conjunto de ecuaciones lineales constitutivas, que son generalizaciones de la teoría elástica donde se tiene en cuenta la presión de poro (presión del fluido).

### **5.1. PRESIÓN DE PORO.**

La presión de poro se desarrolla en una formación saturada de agua a medida que los sedimentos son depositados en su superficie.

Normalmente, en los cálculos se considera que el gradiente de presión de poro es constante, dado por el peso de la columna de fluido desde la formación hasta la superficie. Un gradiente de presión de poro normal está dado por la densidad del agua salada (agua de mar) y su rango típico es 0.447-0.45 psi/ft. Presiones de poro altas en un yacimiento pueden conducir a que el campo sea más productivo, pero zonas de alta presión o sobrepresionadas se consideran de alto riesgo durante la perforación.

La presión de poro se puede determinar por medio de geología regional, sísmica, registros (sónico, resistividad, gamma ray y densidad), parámetros de perforación y por medio de la ecuación modificada de Eaton:

$$p = \sigma_v - \left[ (\sigma_v - P_{nor}) \left( \frac{t_{normal}}{t_{observado}} \right)^3 \right] \quad (29)$$

Donde  $p$  es la presión de la formación o presión de poro,  $P_{nor}$  es la presión normal de la formación, y  $t$  es el tiempo de tránsito normal y el observado para el cálculo de la presión de poro.

## 5.2. INFLUENCIA DE LA PRESIÓN DE PORO Y ESFUERZO EFECTIVO.

Los fluidos de los poros en un yacimiento juegan un papel muy importante debido a que ellos soportan una parte del esfuerzo total aplicado. Sólo una porción del esfuerzo total, llamada la componente de *esfuerzo efectivo*, es soportado por la matriz de la roca (Figura 19).

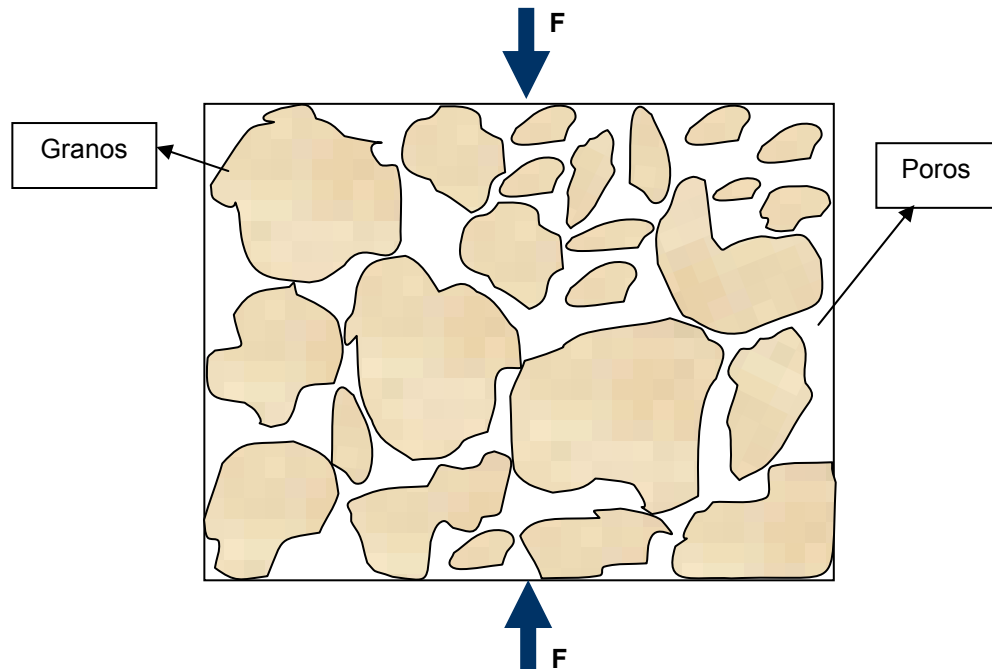


Figura 19. Carga compartida por la presión de poro. Esfuerzo total = Presión de poro + Esfuerzo efectivo soportado por los granos.

El esfuerzo efectivo cambia a través de la vida de un yacimiento y el comportamiento mecánico de una roca porosa modifica la respuesta del fluido.

En este comportamiento *acoplado*:

- Un incremento de la presión de poro induce la dilatación de la roca.
- La compresión de la roca produce un incremento en la presión de poro si se previene que el fluido no escape del medio poroso.

En 1923, Terzagui introdujo el concepto de esfuerzo efectivo para consolidación en una dimensión y propuso la siguiente relación:

$$\sigma' = \sigma - p \quad (30)$$

Donde  $\sigma$  es el esfuerzo total aplicado,  $\sigma'$  es el esfuerzo efectivo que gobierna la consolidación del material, y  $p$  es la presión de poro.

Sin embargo, Biot propuso una teoría consistente que tiene en cuenta el proceso acoplado de difusión/deformación que se observa en materiales elásticos. Tal acoplamiento se debe al hecho que algún cambio en la presión de poro es acompañado por la variación en el volumen poroso, que afecta todo el mecanismo de respuesta de la roca. La relación que gobierna la deformación de un medio poroso es:

$$\sigma' = \sigma - \alpha p \quad (31)$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de Biot, un coeficiente poroelástico que puede tomar el valor de 0 a 1 y describe la eficiencia de la presión del fluido para contrarrestar el

esfuerzo total aplicado. Este valor depende de la geometría del poro, de las propiedades físicas de los constituyentes del sistema sólido y de la carga aplicada.

### 5.3. CONSTANTE POROELÁSTICA DE BIOT.

La constante poroelástica de Biot está dada en términos de las constantes C y M las cuales son los módulos elásticos requeridos para describir un medio de dos fases, donde C tiene en cuenta la deformación del sólido y del fluido y M caracteriza las propiedades elásticas del fluido de poro.

Además, se puede expresar en términos de  $C_m$ , compresibilidad de la matriz de roca o módulo total del esqueleto, y  $C_{bc}$ , compresibilidad total de de la roca o módulo total del sólido.

$$\alpha = \frac{C}{M} = 1 - \frac{C_m}{C_{bc}} \quad (32)$$

Siempre se va a cumplir que  $C_m < C_{bc}$ , donde teóricamente el límite superior para  $C_m$  es:  $(1 - \phi) \cdot C_{bc}$  y el límite inferior es cero. La constante de Biot está restringida a la región  $1 \geq \alpha > \phi$ , y en rocas no consolidadas o débiles  $\alpha$  tiene un valor cercano a 1.

### 5.4. RESPUESTA DRENADA Y NO DRENADA.

Existen dos comportamientos límites: una respuesta *drenada* y *no drenada*.

El primer caso límite se da cuando se aplica una carga instantáneamente a una roca porosa. En este caso el exceso en la presión del fluido no tiene tiempo para

difundirse y el medio reacciona como si éste fuera un medio no drenado, comportándose de una manera “inmóvil”.

En el segundo caso límite, la tasa de presurización es suficientemente lenta y las áreas de presión en exceso tiene un tiempo amplio para drenar por difusión, siendo la roca “suave”.

### 5.5. MEDICIONES DE LABORATORIO.

Comúnmente se usan tres tipos de pruebas para determinar los parámetros poroelásticos:

1. La prueba enchaquetada drenada,
2. La prueba enchaquetada no drenada,
3. La prueba no enchaquetada.

PRUEBA	MEDICIONES	PARAMETROS POROELASTICOS
Enchaquetada drenada	$\Delta V/V$ $\Delta V_f/V$	$K$ $\alpha$
Enchaquetada no drenada	$\Delta V/V$ $\rho$	$K_u$ $B$
No enchaquetada	$\Delta V/V$ $\Delta V_f/V$	$K'_s$ $\gamma$

Tabla 2. Descripción de las pruebas. Tomada de: Fundamentals of Poroelasticity, Detournay y Cheng.

### 5.5.1. PRUEBA ENCHAQUETADA DRENADA.

En la prueba enchaquetada drenada, la muestra saturada de fluido es encapsulada en una chaqueta plástica y se ejerce sobre ella una presión hidrostática externa de confinamiento  $\Delta P$  donde los esfuerzos aplicados son de igual magnitud en todas las direcciones. Esta presión es aplicada a una tasa muy lenta, permitiéndosele al fluido de poro salir durante el proceso de carga, donde se mantiene la *presión de poro constante*. Debido a las condiciones anteriormente establecidas, se interpreta que el esfuerzo es soportado completamente por el esqueleto sólido.

Una vez la presión de poro está en equilibrio, se pueden hacer dos medidas:  $\Delta V$ , el cambio volumétrico de la muestra, y  $\Delta V_f$  el volumen de fluido expulsados de la roca. El cambio volumétrico de la muestra  $\Delta V$  puede ser estimado usando medidores de deformación montados sobre la muestra en direcciones transversales y longitudinales, o el cambio en el volumen de aceite en la celda (este último método requiere sin embargo calibración para medir la compresibilidad del volumen de fluido confinado y la celda).

De las dos mediciones  $\Delta V$  y  $\Delta V_f (= \Delta V_p)$ , el modulo volumétrico drenado  $K$  y el coeficiente  $\alpha$  puede ser determinado de acuerdo a:

$$K = \frac{\Delta P V}{\Delta V} \quad (33)$$

$$\alpha = \frac{\Delta V_f}{\Delta V} \quad (34)$$

### 5.5.2. PRUEBA ENCHAQUETADA NO DRENADA.

En esta prueba, una presión de confinamiento incremental  $\Delta P$  es aplicada a la muestra de roca, sin permitir la salida de fluido de la muestra. Se pueden hacer dos medidas directas después de la aplicación de la carga: el cambio volumétrico  $\Delta V$  para la determinación de  $K_u$ :

$$K_u = \frac{\Delta PV}{\Delta V} \quad (35)$$

y el cambio en la presión de poro  $\Delta p$  para B:

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta P} \quad (36)$$

Determinaciones precisas de B requieren que el volumen de fluido exterior a la muestra se mantenga mínimo, pues la existencia de este volumen permite al fluido escapar de la muestra.

### 5.5.3. PRUEBA NO ENCHAQUETADA DRENADA.

En una prueba no enchaquetada drenada, la muestra de roca se sumerge en un fluido, donde se encuentra en contacto directo con la presión de confinamiento (e hidrostática), y se tiene una condición en donde la presión de poro se balancea con la presión externa,  $p = P$ .

Como en el caso de la prueba drenada, se pueden hacer dos medidas:  $\Delta V$  y  $\Delta V_f$ , la cantidad de fluido inyectado, (la presión de poro inducida en la muestra

tiene que estar en equilibrio antes de que estas medidas lleguen a ser significativas). Se necesita una calibración del sistema de medida, porque la presión de poro está cambiando, para determinar la variación del volumen de fluido contenido en la muestra.

De estas medidas, se pueden determinar dos parámetros: La compresibilidad no enchaquetada:

$$\delta = \frac{1}{K'_s} = \frac{\Delta V}{\Delta p' V} \quad (37)$$

y un coeficiente de almacenamiento,

$$\gamma = \frac{\Delta V_f}{\Delta p' V} \quad (38)$$

La constante  $\gamma$ , denotada como el coeficiente de contenido de fluido (Biot y Willis), se puede expresar en términos de las otras constantes poroelásticas:

$$\gamma = \frac{1}{M} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{K} \quad (39)$$

## **6. MECANISMOS DE FALLA.**

### **6.1. GENERALIDADES.**

Cuando una muestra de roca sólida es sometida a grandes esfuerzos puede generarse una falla en ella que dependerá del estado de esfuerzos, del tipo de material, de la geometría de la muestra y de la historia de esfuerzos de la muestra. Las técnicas sugeridas para determinar la deformabilidad, resistencia y las constantes elásticas son dadas por la ISRM (Sociedad Internacional de Mecánica de Rocas).

Las muestras para pruebas estándar de mecánica de rocas, según los parámetros estándar de la ISRM, deben ser rectas, cilindros circulares y con una relación de longitud a diámetro entre 2 y 3.

### **6.2. PRUEBAS DE LABORATORIO.**

Mediante experimentos de laboratorio se pueden determinar las propiedades que controlan la deformación y resistencia de la roca. Para estas pruebas de laboratorio es necesario hacer una serie de suposiciones con respecto a la condición ideal de la roca, esto es, que sean homogéneas, continuas, isotrópicas y elástica<sup>13</sup>. Algunas de éstas son las pruebas de resistencia a la compresión y las pruebas de resistencia a la tensión.

#### **6.2.1. PRUEBAS DE RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN.**

Los ensayos de compresión se desarrollan para dar parámetros de resistencia y deformabilidad a la roca que de forma teórica se ajusten a un modelo de falla.

Existen dos tipos de pruebas para calcular la resistencia a la compresión: la prueba uniaxial y la prueba triaxial.

- **Prueba de resistencia a la compresión uniaxial:** La prueba consiste en someter a una carga un cilindro recto de muestra de roca con una presión de confinamiento igual a cero, hasta que falle (Figura 20). Esta prueba es una de las más convenientes y útiles para la determinación de las propiedades de la roca. El valor del esfuerzo en el momento de la falla es definido como la UCS (Uniaxial Compressive Strength) o resistencia a la compresión uniaxial:

$$C_o = \frac{F_{max}}{A} \quad (40)$$

El valor de la UCS es influenciado por la tasa de carga de la prueba. La UCS de una roca generalmente se incrementa al incrementar la tasa de carga en el momento de la prueba. La ISMR sugiere que la tasa de carga en pruebas de laboratorio se debe mantener dentro del rango  $0.5 \text{ MPa/s} < \dot{\epsilon} < 1.0 \text{ MPa/s}$ .

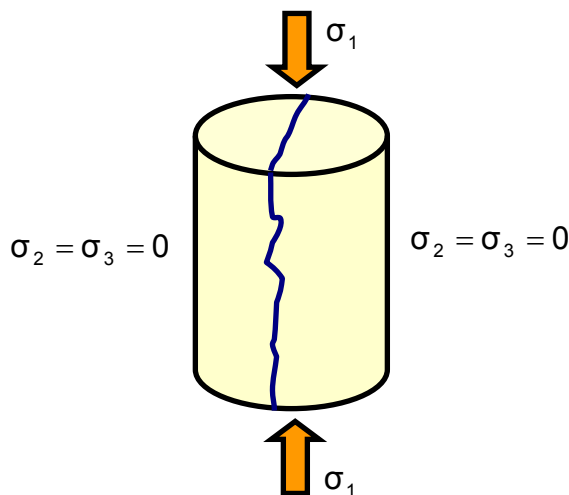


Figura 20. Prueba de compresión sin confinar.

- **Prueba de resistencia a la compresión triaxial:** La prueba consiste en someter a una carga axial y de confinamiento, a un cilindro recto de muestra de roca, incrementando estas cargas (axial y de confinamiento) hasta alcanzar un nivel de esfuerzo hidrostático recomendado (Figura 21). Entonces, la presión de confinamiento es mantenida constante mientras la carga axial se va incrementando hasta que la muestra falle. Normalmente la carga axial es aplicada originando una tasa de deformación axial constante.

Este ensayo ha probado ser la prueba más útil en el estudio de las propiedades mecánicas de la roca en un amplio rango de valores de esfuerzos y temperaturas.

En general, una falla en una prueba triaxial resulta en una fractura de cizalla simple, plana áspera, inclinada en un ángulo cercano a la dirección del esfuerzo principal máximo. Para caracterizar adecuadamente la muestra, la prueba debe ser realizada usando varias presiones de confinamiento.

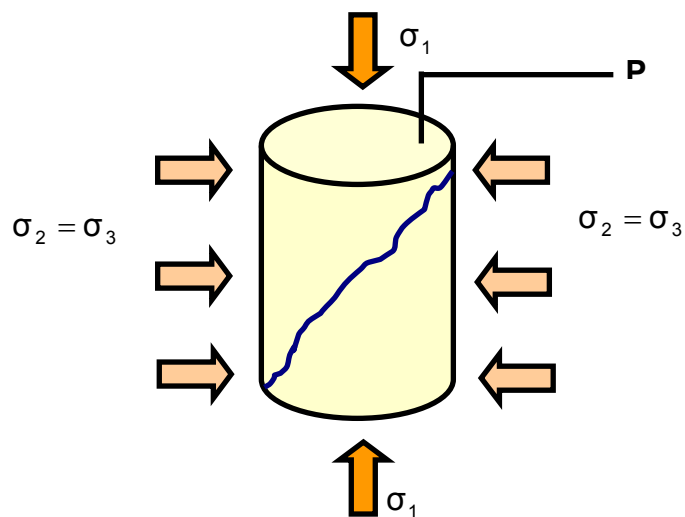


Figura 21. Prueba de compresión triaxial.

## 6.2.2. PRUEBAS DE RESISTENCIA A LA TENSIÓN.

Es importante conocer la resistencia a la tensión en una roca puesto que la falla ocurre a menudo en este modo. En general, las rocas son mucho más débiles cuando son sometidas a tensión que a compresión. En la práctica, las mediciones directas de la resistencia a la tensión son difíciles y tienen problemas asociados al agarre de la muestra.

La resistencia a la tensión de una roca es más variable y está más influenciada por la forma del espécimen que por cualquier otra propiedad mecánica de la roca.

- **Prueba Brasilera:** La llamada también prueba de tensión indirecta consiste en la compresión en el punto de soporte de una muestra cilíndrica. Con esta prueba se determina la resistencia a la tensión inducida ( $T_0$ ). Asumiendo que la roca es homogénea e isotrópica y que la elasticidad lineal se mantiene, la fractura primaria empezará en tensión desde el centro del espécimen (Figura 22).

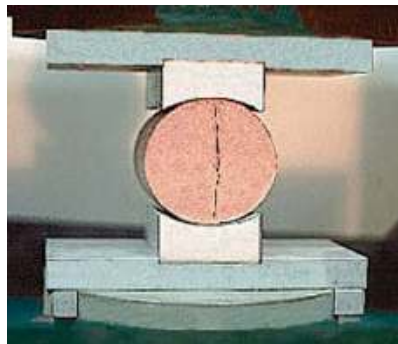


Figura 22. Prueba Brasilera, Figura tomada de Cabrera, 2003.

- **Prueba de punto de carga:** Es una prueba donde se aplica carga a una muestra en sentido diametral hasta alcanzar la fractura del material. Se utiliza en la clasificación de materiales rocosos y para estimar otros parámetros de esfuerzo, como por ejemplo la tracción o la compresión uniaxial.

### **6.3. CRITERIOS DE FALLA.**

Un criterio de falla es usualmente una relación entre los esfuerzos efectivos principales, que representan un límite a partir del cual la inestabilidad o fallamiento ocurre (el esfuerzo efectivo de Terzagui se usa en los criterios de falla)<sup>15</sup>.

Los criterios de falla se clasifican de acuerdo al mecanismo que ocasiona la falla en criterios de falla por tensión y criterios de falla por cizalladura. Muchos tipos de criterios se han propuesto en la literatura y han sido usados para varias aplicaciones. Los criterios mas usados son los descritos a continuación.

#### **6.3.1. CRITERIOS DE FALLA POR CIZALLADURA.**

Una formación puede fallar por cizalladura debido a los esfuerzos compresivos y/o de tensión. Esta falla puede atribuirse a lodos livianos y a lodos pesados. En ambos casos se originan rompimientos y la formación se derrumba, creando hueco elíptico (breakouts) o agrandamientos uniformes (washed-outs). Los recortes pueden acumularse en el pozo y ocasionar aprisionamientos e incluso el colapso del pozo. (Terán, 2006).

Algunos de los criterios de falla por cizalladura son los que se describen a continuación:

### 6.3.1.1 CRITERIO DE FALLA DE MOHR-COULOMB.

En este modelo, solamente se utiliza el esfuerzo efectivo máximo y el esfuerzo efectivo mínimo (representados en el esfuerzo normal y de corte con respecto al plano de falla) para predecir la falla.

El modelo de Mohr-Coulomb muestra como la resistencia de la roca a la cizalladura se incrementa en la medida que el esfuerzo compresivo efectivo aumenta, y basa su hipótesis en *que la cadencia y/o falla debe ocurrir cuando el esfuerzo de corte exceda la suma de la resistencia cohesiva del material,  $S_o$ , y la resistencia friccional de los planos de deslizamiento:*

$$\tau = S_o + \mu\sigma_N \quad (41)$$

Donde  $S_o$  es el coeficiente de cohesión del material, una medida de la cementación o adherencia entre las partículas;  $\mu$  es el coeficiente de fricción interna, el cual depende del tamaño, forma y distribución de los granos,  $\tau$  es el esfuerzo de corte o de cizalla generado en la roca; y  $\sigma_N$  es el esfuerzo efectivo aplicado a la roca.

Al graficar la ecuación (41) se obtiene una línea recta en la cual  $\mu$  es la pendiente definida por  $\tan\phi = \mu$ , y  $S_o$  es el punto de corte con la ordenada  $\tau$ , como se muestra en la Figura 22. La línea o envoltura divide el plano  $\tau - \sigma_N$  en dos regiones: una estable por debajo de esta recta, y una región de falla por encima de la misma.

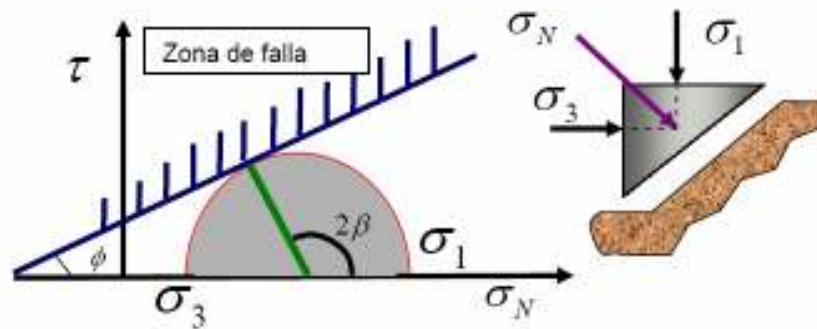


Figura 23. Criterio de Mohr- Coulomb. Fuente: Cabrera, 2003.

En la Figura 24 se muestra la inclinación máxima para el plano de falla, según el criterio de Mohr-Coulomb, donde  $\beta$  representa el ángulo de falla, donde se puede escribir el criterio de falla de Mohr-Coulomb en función de este último:

$$\sigma_1 \geq C_o + \sigma_3 \tan^2 \beta \quad (42)$$

Que expresa que la falla ocurrirá cuando el esfuerzo principal máximo  $\sigma_1$  sea mayor que la suma de la resistencia compresiva uniaxial  $C_o$  (o esfuerzo compresivo uniaxial mas grande que puede ser aplicado a un material sin que este falle) y el producto del esfuerzo principal mínimo  $\sigma_3$  con la tangente del ángulo de falla al cuadrado.

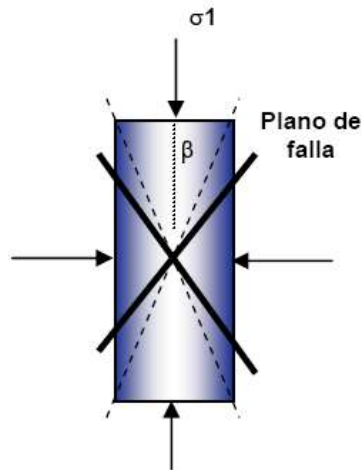


Figura 24. Inclinación máxima para el plano de falla, según el criterio de Mohr-Coulomb. Tomada de Lenin- Darwin (2005)

### 6.3.1.2 CRITERIO DE FALLA DE DRUCKER-PRAGER.

Este criterio de falla también se conoce con el nombre de criterio de falla modificado de Von Mises. La diferencia entre el criterio de falla de Drucker-Prager (CFDP) y el criterio de falla de Mohr-Coulomb es que el CFDP tiene en cuenta los tres esfuerzos principales, mientras que el criterio de Mohr-Coulomb solamente considera los esfuerzos principales máximo y mínimo.

El criterio de Drucker-Prager le da tanta importancia al esfuerzo principal intermedio como a los esfuerzos principales máximo y mínimo. Este criterio considera que el esfuerzo intermedio influye no sólo en la forma en que falla la roca sino también en la magnitud de la deformación de la roca. Diversos estudios han revelado que el esfuerzo principal intermedio causa un efecto de fortalecimiento de la roca, el cual ignora el criterio de Mohr-Coulomb; sin embargo, este no es tan importante como lo considera el criterio de Drucker-Prager. Entonces, bajo condiciones específicas el criterio de Mohr-Coulomb subestima la

resistencia de la roca, mientras que el criterio de Drucker-Prager sobreestima dicho parámetro; por lo cual las predicciones del criterio de Mohr-Coulomb son mas conservativas. (Lenin, 2005).

El criterio de Drucker-Prager está expresado en términos del primer invariante de esfuerzos y del esfuerzo deviatorico de segundo orden, los cuales a su vez se definen en términos de los esfuerzos principales.

$$J_2^{1/2} = A(I_1) + D \quad (43)$$

Donde  $I_1'$  es el primer invariante del tensor esfuerzo y  $J_2$  es el esfuerzo deviatorico de segundo orden. Las invariantes  $I_1$  y  $J_2$  presentan una analogía con el esfuerzo promedio y un esfuerzo de corte equivalente. Los parámetros A y D dependen del material, se determinan mediante pruebas triaxiales y también se pueden calcular mediante los parámetros del criterio de Mohr-Coulomb ( $S_0$  y  $\phi$ ).

### 6.3.1.3 CRITERIO DE FALLA DE LADE MODIFICADO.

El criterio de falla de Lade Modificado asume que el esfuerzo principal intermedio es tan influyente en la resistencia de la roca como los esfuerzos principales mínimo y máximo, lo que implica que este criterio prediga resultados muy optimistas en la estabilidad de pozo.

La expresión para este criterio se define por:

$$\frac{(I_1'')^3}{I_3''} = 27 + \eta \quad (44)$$

Donde  $I_1''$  es el primer invariante modificado de esfuerzos,  $I_3''$  es el tercer invariante modificado de esfuerzos y  $\eta$  es un parámetro adimensional relacionado con la fricción.

### 6.3.2. CRITERIOS DE FALLA POR TENSION.

Los esfuerzos de tensión dan lugar a unos mecanismos de fallas. Estas ocurren cuando la presión hidrostática ejercida por la columna de lodo toma valores muy altos, originando esfuerzos de tensión sobre la pared del pozo (la roca entra en estado de tensión) que pueden exceder la resistencia de la roca a la tensión. Esto provoca fracturas en la roca a lo largo de un plano perpendicular al mínimo esfuerzo in-situ, lo cual puede provocar pérdidas de circulación. En cuencas pasivas, este esfuerzo corresponde a uno de los esfuerzos horizontales. (Terán, 2006).

Un criterio de falla por tensión permite establecer si se supera la resistencia de la roca a la tensión.

Si el esfuerzo mínimo principal efectivo es menor que la resistencia tensil de la roca, se genera una falla por tensión. Esto puede expresarse como:

$$\sigma_3' \leq -|T_0| \quad (45)$$

En la Figura 25 se puede observar la representación del criterio de falla por tensión en el círculo de Mohr. Cuando el esfuerzo efectivo principal menor,  $\sigma_3'$  disminuye, el círculo crece hacia la izquierda y cuando este toca la línea de tensión  $T_0$ , ocurre la falla por tensión.

Las rocas bajo un estado tensil pueden presentar los modos de falla: falla de exfoliación (o spalling) y fracturamiento hidráulico (que pueden ser horizontales o verticales)

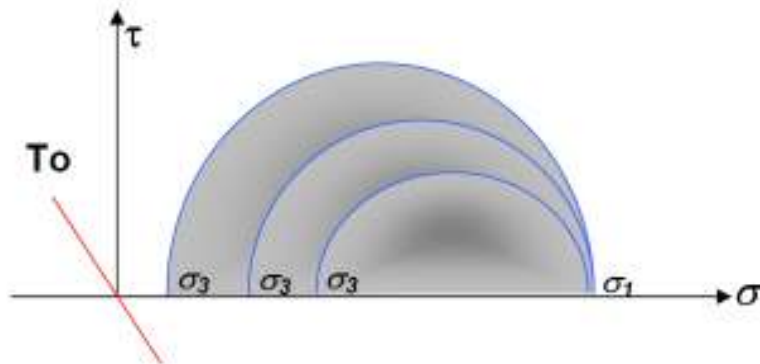


Figura 25. Representación del criterio de falla tensil en el círculo de Mohr. Tomada de Lenin-Darwin, (2005).

## 7. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS.

En la Ingeniería de Petróleos, es de gran interés representar las condiciones reales de un yacimiento dado. Éstas se pueden aproximar mediante un modelo, que se puede definir como una entidad que permite el estudio de un fenómeno bajo condiciones de prueba apropiadas, que tiene la probabilidad de que ocurra en la práctica (Osorio et al).

La búsqueda por tratar de una forma más aproximada un yacimiento dió origen a la *Simulación Numérica de Yacimientos*. La simulación de yacimientos permite representar un modelo físico mediante un modelo matemático, que según la complejidad del conjunto de ecuaciones que conforman dicho modelo, se puede solucionar analíticamente o numéricamente.

Una *solución analítica* es un proceso de solución en donde se obtienen los parámetros deseados mediante la manipulación de las ecuaciones matemáticas que conforman el modelo matemático en estudio<sup>8</sup>.

Una *solución matemática* se obtiene al reemplazar las ecuaciones originales por un conjunto más simple de ecuaciones que se pueden resolver más fácilmente. Se puede llegar a soluciones de dichas ecuaciones en puntos discretos en el espacio y en el tiempo dentro de la región en estudio<sup>8</sup>.

Un simulador *numérico* permite representar un **modelo físico** mediante un modelo **matemático** y un **modelo de computador**.

Para comprender el esquema de un modelamiento numérico, se presenta el siguiente mapa conceptual.

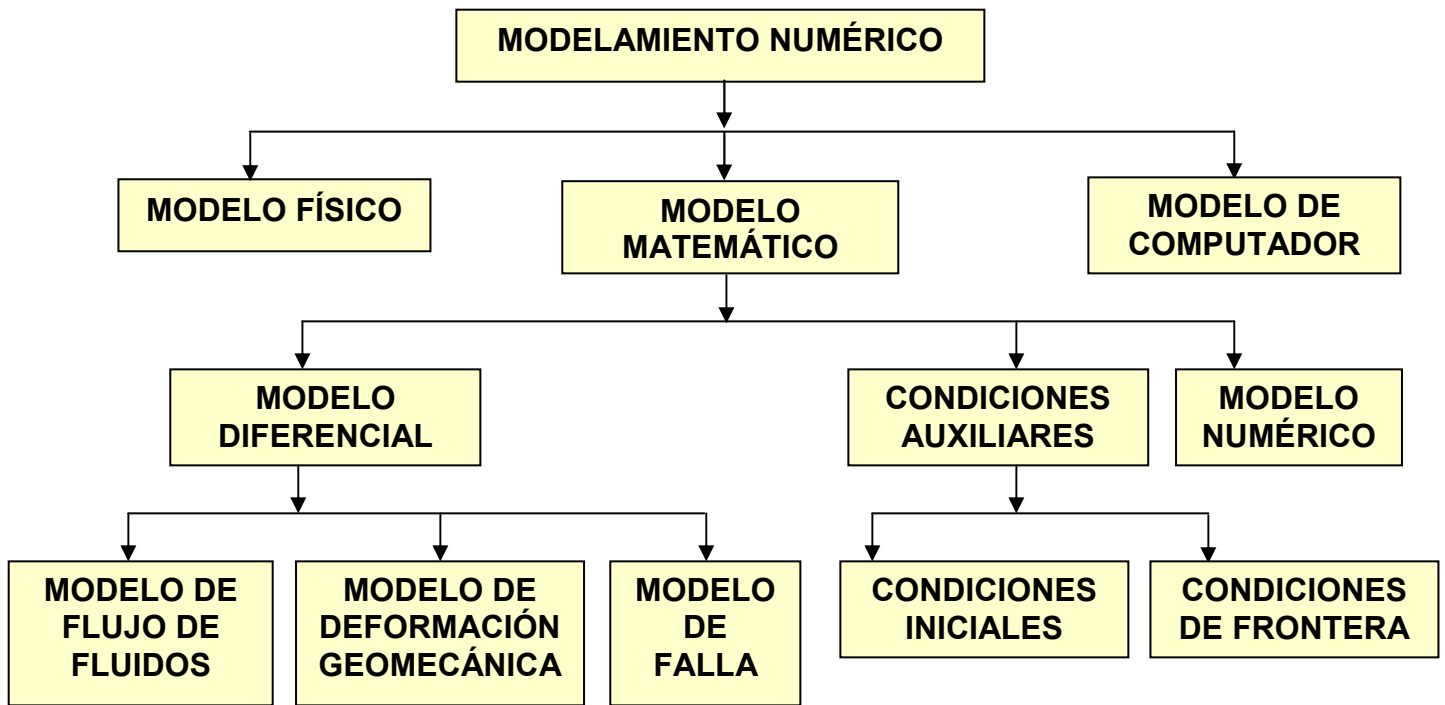


Figura 26. Esquema del modelamiento numérico.

### 7.1. MODELO FÍSICO.

En el modelo físico se determinan las características del medio poroso y de los fluidos a estudiar, las consideraciones o suposiciones que se tienen en cuenta y las delimitaciones del objeto de estudio.

Las suposiciones del modelo son las siguientes:

1. El yacimiento es considerado como un sistema proelástico e isotérmico, donde el esqueleto sólido de la roca presenta deformación elástica no lineal.
2. Se asume que el yacimiento presenta la siguiente configuración: radialmente se representa por una serie de cilindros concéntricos de espesor variable,

verticalmente se divide en estratos de diferente espesor y tangencialmente se divide en ángulos de longitud de arco variable o constante.

3. En el centro del modelo se ubica un pozo, vertical o inclinado, el cual está siendo perforado y a través del cual no ocurre flujo de fluidos.
4. Las propiedades de la roca pueden variar espacial y temporalmente, debido a su dependencia del esfuerzo efectivo (estado de esfuerzos totales y la presión de poro).
5. La presión de poro en el yacimiento puede variar temporalmente debido a su dependencia del esfuerzo efectivo.
6. Los estratos que conforman el yacimiento pueden presentar tanto isotropía (y posiblemente anisotropía en sus propiedades).
7. Se supone que la roca tiene muy baja permeabilidad o que tiene alta permeabilidad (fracturada) pero se ha sellado para evitar pérdidas de lodo. En tales casos, no existe flujo de fluidos y se considera entonces que la permeabilidad es despreciable.
8. El modelo se desarrolla utilizando un sistema de coordenadas cilíndricas.

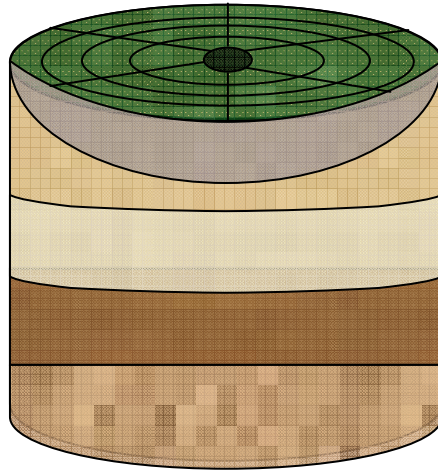


Figura 27. Modelamiento físico del yacimiento, empleando coordenadas cilíndricas.

## 7.2. MODELO MATEMÁTICO.

El modelo matemático es un acoplamiento de dos modelos: un modelo de flujo de fluidos y un modelo de deformación geomecánica.

El modelo de flujo de fluidos está conformado por:

- Ecuación de conservación de masa del fluido.
- Ecuación de conservación de masa del sólido.
- La Ley de Darcy.
- Ecuación de Estado.

El modelo de deformación geomecánica está conformado por:

- Ecuaciones de equilibrio de esfuerzos en un sólido.
- Ecuaciones de deformación-desplazamiento.
- Ecuaciones de esfuerzo-deformación-presión.

## 7.2.1. MODELO DIFERENCIAL.

### 7.2.1.1. MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS.

En el Anexo A se presenta de forma detallada la deducción de las ecuaciones escritas a continuación.

- Ecuación de conservación de masa del fluido.

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi v_{r\phi} \rho_f) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\phi v_{\theta\phi} \rho_f) - \frac{\partial}{\partial z} (\phi v_{z\phi} \rho_f) = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (46)$$

- Ecuación de conservación de masa del sólido.

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(1-\phi)v_{sr}\rho_s) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ((1-\phi)v_{s\theta}\rho_s) - \frac{\partial}{\partial z} ((1-\phi)v_{sz}\rho_s) = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) + \tilde{q}_s \quad (47)$$

- La Ley de Darcy.

$$q = -\frac{kA_T}{\mu} \nabla P \quad (48)$$

- Ecuación de Estado.

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (49)$$

### 7.2.1.2. MODELO DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA.

Mediante el modelo de deformación geomecánica se obtienen los desplazamientos generados en el yacimiento como respuesta a una caída de presión dada. Para obtener los desplazamientos mencionados, se desarrollan

expresiones para los mismos en función de los esfuerzos iniciales, las propiedades geomecánicas, las características geométricas del yacimiento y el diferencial de presión que lo afecta. El modelo supone deformación elástica no-lineal.

Inicialmente, se aborda el problema para un cuerpo sólido, combinando las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos, las relaciones de deformación-desplazamiento y las relaciones esfuerzo-deformación-presión. Posteriormente, se adapta lo obtenido a un medio poroso al introducir el concepto de esfuerzo efectivo.

Dado que los desplazamientos en el yacimiento a un tiempo inicial se desconocen, las ecuaciones se reescriben en términos incrementales.

En el Anexo B se presenta detalladamente la deducción de las ecuaciones escritas a continuación.

- **Ecuaciones de equilibrio de esfuerzos en un sólido.**

La variación en el espacio del estado de esfuerzos está descrita por las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos. A partir de un elemento diferencial radial como el que se presenta en la Figura 28, y despreciando las fuerzas del cuerpo, tales ecuaciones pueden escribirse para cada dirección en forma incremental como:

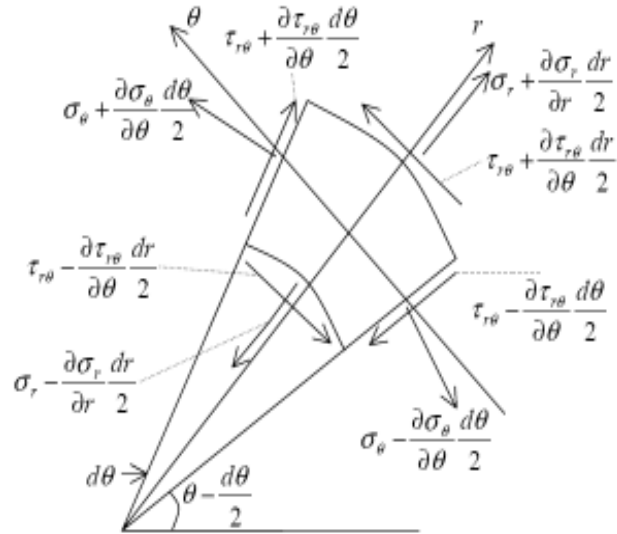


Figura 28. Tomada de Simulación composicional de pruebas de presión en yacimientos sensitivos a esfuerzos y deformaciones. Benavides y Maya, 2003.

En dirección radial:

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{\partial \Delta \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_r - \Delta \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (50)$$

En dirección tangencial:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \Delta \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\Delta \tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (51)$$

En dirección vertical:

$$\frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{\partial \Delta \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\Delta \tau_{rz}}{r} = 0 \quad (52)$$

En las ecuaciones anteriores se asume que las fuerzas de cuerpo (fuerzas gravitacionales) son despreciables o permanecen constantes con el tiempo, debido a que tienen poca o ninguna influencia sobre los objetivos de este estudio.

El superíndice 0 se refiere al esfuerzo total inicial en la dirección indicada,  $\Delta\sigma_i$  es el incremento del esfuerzo total normal en la dirección  $i=r,\theta,z$  y los términos  $\Delta\tau_{r\theta}$ ,  $\Delta\tau_{rz}$ , y  $\Delta\tau_{\theta z}$  son los incrementos de los esfuerzos de cizalla, donde el primer subíndice se refiere al plano sobre el cual actúa el esfuerzo de cizalla y el segundo da la dirección de este esfuerzo.

- **Ecuaciones de deformación-desplazamiento.**

El sistema de ecuaciones de equilibrio de esfuerzos no es suficiente para relacionar todas las variables allí involucradas. Esto es debido a que se tienen seis cantidades independientes desconocidas ( $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ ) y solamente tres ecuaciones que las relacionan; por tal motivo, es necesario utilizar información adicional, la cual la proporciona las ecuaciones de deformación - desplazamiento y la ley generalizada de Hooke.

El desplazamiento de un punto, denotado por la letra  $n$ , se define como el vector distancia desde la posición inicial a la final. Cuando una fuerza se aplica sobre un cuerpo, la posición de cualquiera de ellos es perturbada.

En la deformación, denotada como  $\epsilon$ , se habla de deformación normal y deformación de cizalla (así como para los esfuerzos), siendo la primera el cambio en la distancia entre dos por unidad de longitud, y la segunda el cambio en el ángulo (originalmente recto) entre dos ejes coordenados del sistema.

El modelo presentado supone deformación infinitesimal en función del incremento en los desplazamientos. Las deformaciones en función de los desplazamientos están dadas en forma incremental para coordenadas cilíndricas por las siguientes ecuaciones:

$$\Delta\varepsilon_r = \frac{\partial\Delta U_r}{\partial r} \quad (53)$$

$$\Delta\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial\theta} \right) \quad (54)$$

$$\Delta\varepsilon_z = \frac{\partial\Delta U_z}{\partial z} \quad (55)$$

$$\Delta\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\Delta U_r}{\partial\theta} - \Delta U_\theta \right) + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial r} \right] \quad (56)$$

$$\Delta\gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial\Delta U_r}{\partial z} \right) \quad (57)$$

$$\Delta\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Delta U_z}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta U_\theta}{\partial z} \right) \quad (58)$$

En las ecuaciones anteriores,  $\Delta\varepsilon_r$ ,  $\Delta\varepsilon_\theta$  y  $\Delta\varepsilon_z$  son los incrementos de las deformaciones normales en las direcciones radial, tangencial y vertical, respectivamente,  $\Delta\gamma_{r\theta}$ ,  $\Delta\gamma_{rz}$  y  $\Delta\gamma_{\theta z}$  son los incrementos de las deformaciones de cizalladura y finalmente,  $\Delta U_r$ ,  $\Delta U_\theta$  y  $\Delta U_z$  son los incrementos de los desplazamientos en las direcciones radial, tangencial y vertical, respectivamente.

- **Ecuaciones de esfuerzo-deformación-presión.**

La relación existente entre los esfuerzos y las deformaciones está dada por la ley de Hooke, que para materiales isotrópicos puede ser expresada en su forma generalizada e incremental así:

$$\Delta\sigma_r = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \Delta\varepsilon_r \quad (59)$$

$$\Delta\sigma_\theta = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \Delta\varepsilon_\theta \quad (60)$$

$$\Delta\sigma_z = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \Delta\varepsilon_z \quad (61)$$

$$\tau_{r\theta} = 2 \cdot G \gamma_{r\theta} \quad (62)$$

$$\tau_{rz} = 2 \cdot G \gamma_{rz} \quad (63)$$

$$\tau_{\theta z} = 2 \cdot G \gamma_{\theta z} \quad (64)$$

En las ecuaciones anteriores, G es el módulo de cizalladura,  $\gamma$  es el parámetro de la Lamé y  $\varepsilon_v$  es la deformación volumétrica.

Las ecuaciones anteriores de esfuerzo – deformación son utilizadas para medios sólidos no porosos; por lo tanto, son aplicables al esqueleto sólido del medio poroso.

En el caso del medio poroso total (parte sólida y parte porosa) se debe tener en cuenta la variación de las propiedades de la roca y los desplazamientos en función del esfuerzo efectivo; el esfuerzo total sobre el medio poroso es la suma del esfuerzo efectivo (que actúa sobre la parte sólida) y el efecto de la presión de poro (que actúa sobre la parte porosa). Las ecuaciones anteriores para un medio poroelástico (en el cual se considera el esfuerzo efectivo) y en forma incremental toman la siguiente forma:

$$\Delta\sigma_r = 2 \cdot G\Delta\varepsilon_r + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v + \alpha \cdot \Delta P \quad (65)$$

$$\Delta\sigma_\theta = 2 \cdot G\Delta\varepsilon_\theta + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v + \alpha \cdot \Delta P \quad (66)$$

$$\Delta\sigma_z = 2 \cdot G\Delta\varepsilon_z + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v + \alpha \cdot \Delta P \quad (67)$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{r\theta} \quad (68)$$

$$\Delta\tau_{rz} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{rz} \quad (69)$$

$$\Delta\tau_{\theta z} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{\theta z} \quad (70)$$

Como se observa en las ecuaciones (65) a (70), los esfuerzos efectivos de cizalla no sufren cambios al involucrar el efecto de la presión. Esto es debido a que la presión de poro actúa en dirección normal a la superficie de la roca con lo que ambos esfuerzos serán iguales.

La solución de las ecuaciones sin el término incremental ( $\Delta$ ), implica tener un conocimiento de la variación total de los desplazamientos desde la formación del yacimiento hasta el momento de estudio. Como se desconoce esta información, las ecuaciones del modelo se deben expresar en función de los incrementos de los desplazamientos.

Esta aproximación incremental se puede interpretar físicamente así: cualquier compresión/expansión de la roca (deformación) genera un cambio en los desplazamientos.

Al combinar los sistemas de ecuaciones anteriormente desarrollados, y luego de simplificar y reorganizar, se obtiene el sistema de ecuaciones finales para el modelo acoplado de flujo de fluidos y de deformación geomecánica en cada una de las direcciones:

$$\vec{\nabla} \left( \rho_f \frac{\mathbf{k} \cdot \vec{\nabla} P}{\mu} \right) = \frac{1}{B} \left[ (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}}{\partial t} \right] + \tilde{q} \quad (71)$$

$$\left[ \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} \right] + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_r)] + \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial t} \right] + \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u})]}{\partial t} \quad (72)$$

$$+ \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G}{r^2} \Delta u_r - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u})]}{\partial \theta} + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_\theta)] + \frac{1}{r} \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial t} \right] \quad (73)$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial \theta} + \frac{G}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial r} + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} = 0$$

$$\left[ \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} \right] + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_z)] + \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta \mathbf{u})}{\partial z} \right] + \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta \mathbf{u})]}{\partial z} + \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial z} = 0 \quad (74)$$

De manera extensa se puede expresar el sistema de ecuaciones así:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k_r}{B_f \mu_f} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{k_\theta}{B_f \mu_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k_z}{B_f \mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right) =$$

$$\frac{1}{B} \left[ (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r u_r)}{\partial r} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_z)}{\partial z} \right) \right] + \tilde{q} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G \Delta u_r}{r^2} - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}$$

(76)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) - \frac{G}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial (G \Delta \Delta_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (G \Delta \Delta_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}$$

(77)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

(78)

Considerando que el tensor permeabilidad es despreciable y que no existen fuentes ni sumideros, el modelo diferencial final es:

$$\frac{1}{B} \left[ \begin{aligned} & (\mathbf{c}_{bc} - (1+\phi)\mathbf{c}_s + \phi\mathbf{c}_f - \alpha(\mathbf{c}_{bc} - \mathbf{c}_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{\mathbf{c}_{bc} - \mathbf{c}_s}{\mathbf{c}_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathbf{u}_r)}{\partial r} \right) - \left( \frac{\mathbf{c}_{bc} - \mathbf{c}_s}{\mathbf{c}_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(\mathbf{u}_\theta)}{\partial \theta} \right) - \\ & \left( \frac{\mathbf{c}_{bc} - \mathbf{c}_s}{\mathbf{c}_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(\mathbf{u}_z)}{\partial z} \right) \end{aligned} \right] = 0 \quad (79)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(r\Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\alpha \Delta P)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(G\Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G\Delta u_r}{r^2} - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(r\Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) - \frac{G}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial(G\Delta u_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(G\Delta u_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\alpha \Delta P)}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(r\Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\alpha \Delta P)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (82)$$

### 7.2.1.3. MODELO DE FALLA.

Para este modelo se utilizaron los siguientes criterios de falla:

**Criterio de falla por tensión:** el criterio de falla utilizado es:

$$P_{i,j,k} \geq \frac{\sigma_{3\ i,j,k} + T_o}{\alpha_{i,j,k}} \quad (83)$$

Si el nodo  $i$  no cumple con la anterior ecuación se dice que el nodo está fracturado.

En la ecuación (83):

$P_{i,j,k}$ : Presión de poro en el nodo  $i,j,k$

$\sigma_{3\ i,j,k}$ : Esfuerzo total mínimo compresivo actuando en la roca

$T_o$ : Resistencia a la tensión de la roca.

$\alpha_{i,j,k}$ : Parámetro de Biot.

**Criterios de falla por cizalladura:** los criterios que se utilizaron son:

- *Criterio de falla de Mohr-Coulomb.* La expresión para este criterio es:

$$\sigma_{1i,j,k} \geq C_o + \sigma_{3\ i,j,k} \tan\beta^2 \quad (84)$$

Que expresa que la falla ocurrirá cuando el esfuerzo principal máximo  $\sigma_1$  sea mayor que la suma de la resistencia compresiva uniaxial  $C_o$  (o esfuerzo compresivo uniaxial mas grande que puede ser aplicado a un material sin que este

falle) y el producto del esfuerzo principal mínimo  $\sigma_3$  con la tangente del ángulo de falla al cuadrado.

Donde

$\sigma_1$ : Esfuerzo principal máximo.

$\sigma_3$ : Esfuerzo principal mínimo.

$C_0$ : Esfuerzo compresivo uniaxial

$\beta$ : Angulo de falla.

- *Criterio de Drucker-Prager*. La expresión para este criterio de falla es:

$$J_2^{1/2} = A(I_1) + D \quad (85)$$

Donde

$I_1$ : Primer invariante del tensor esfuerzo

$J_2$ : Esfuerzo deviatorico de segundo orden.

- *Criterio de falla de Lade Modificado*. La expresión para este criterio se define por:

$$\frac{(I_1'')^3}{I_3''} = 27 + \eta \quad (86)$$

Donde:

$I_1''$ : Primer invariante modificado de esfuerzos.

$I_3''$ : Tercer invariante modificado de esfuerzos.

$\eta$ : Parámetro adimensional relacionado con la fricción.

## 7.2.2. CONDICIONES AUXILIARES.

Un modelo numérico siempre requiere de condiciones iniciales y de frontera para solucionar adecuadamente el sistema de ecuaciones planteado, de manera que se asegure unicidad en la solución.

A continuación se describen las condiciones auxiliares utilizadas en este estudio.

### 7.2.2.1. CONDICIONES INICIALES.

Las incógnitas en el sistema de ecuaciones diferenciales planteado son los incrementos en los desplazamientos y la presión de poro. Como los valores de los desplazamientos en el tiempo inicial no son conocidos, se deben utilizar valores en forma incremental así:

- **Condiciones iniciales para el modelo de deformación geomecánica:** Al tiempo inicial de la simulación, el incremento en los desplazamientos en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  son iguales a cero:

$$\Delta u_r(r, \theta, z, 0) = 0 \quad (87)$$

$$\Delta u_\theta(r, \theta, z, 0) = 0 \quad (88)$$

$$\Delta u_z(r, \theta, z, 0) = 0 \quad (89)$$

Además, los esfuerzos de cizalla iniciales en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  se consideran iguales a cero debido a que se asume que el sistema de coordenadas  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  inicialmente está alineado con la orientación de los esfuerzos principales.

- **Condiciones iniciales para el modelo de flujo de fluidos:** En un tiempo inicial, la presión de poro inicial se considera constante en cada punto del sistema ya que ha alcanzado condiciones de presión estática, lo cual matemáticamente se expresa como:

$$P(i,j,k) = P^0 \quad \text{en } t = 0 \quad (90)$$

Donde  $P^0$  es el valor de presión de poro en el tiempo inicial.

#### 7.2.2.2. CONDICIONES DE FRONTERA.

Se supone para las condiciones de frontera del modelo:

1. La deformación en el límite exterior e inferior del yacimiento es igual a cero.
2. Hay un esfuerzo constante en el tiempo y en el espacio actuando en el límite interno de los nodos que están siendo perforados.
3. Hay un esfuerzo vertical constante actuando sobre el límite superior del yacimiento.

Las condiciones de frontera para cada modelo se expresan a continuación:

- **Condiciones de frontera para el modelo de deformación geomecánica:** para el modelo de deformación geomecánica se consideran las siguientes suposiciones:
  1. En la *condición de frontera interna* en *dirección radial* para los nodos perforados, se asume que la perforación no genera una perturbación suficiente

para generar deformación en las paredes del pozo, es decir, que el incremento en los desplazamientos en  $r=r_w$  para todo tiempo es nulo.

$$\Delta u_r(1, j, k) = 0 \quad (91)$$

$$\Delta u_\theta(1, j, k) = 0 \quad (92)$$

$$\Delta u_z(1, j, k) = 0 \quad (93)$$

2. La *condición de frontera externa en dirección radial* ( $r=r_e$ ), es que para todo tiempo no hay incremento en los desplazamientos, es decir, se asume que la perforación no afecta el estado de esfuerzos en el límite externo (Condición tipo Dirichlet):

$$\Delta u_r \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (94)$$

$$\Delta u_\theta \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (95)$$

$$\Delta u_z \Big|_{r=r_e} = 0 \quad (96)$$

Es decir:

$$\Delta u_r(nr, j, k) = 0 \quad (97)$$

$$\Delta u_\theta(nr, j, k) = 0 \quad (98)$$

$$\Delta u_z(nr, j, k) = 0 \quad (99)$$

3. En *dirección tangencial* se aplican condiciones periódicas, ya que no es posible diferenciar un límite físico pues el sistema es continuo en esta dirección. Los desplazamientos en el límite  $\theta=0$  serán iguales a los

desplazamientos del plano real  $\theta=n\theta$ , debido a que espacialmente corresponden a la misma posición:

$$\Delta u_n|_{\theta=0} = \Delta u_n|_{\theta=n\theta} \quad (100)$$

En donde  $n= r, \theta, z$ :

$$\Delta u_r(i,0,k) = \Delta u_r(i,n\theta,k) \quad (101)$$

$$\Delta u_r(i,n\theta+1,k) = \Delta u_r(i,1,k) \quad (102)$$

$$\Delta u_\theta(i,0,k) = \Delta u_\theta(i,n\theta,k) \quad (103)$$

$$\Delta u_\theta(i,n\theta+1,k) = \Delta u_\theta(i,1,k) \quad (104)$$

$$\Delta u_z(i,0,k) = \Delta u_z(i,n\theta,k) \quad (105)$$

$$\Delta u_z(i,n\theta+1,k) = \Delta u_z(i,1,k) \quad (106)$$

4. En ***dirección vertical*** para el limite inferior, se asume que la dirección positiva del eje vertical es hacia abajo y que en la base del yacimiento ( $z=z_{inferior}$ ) la roca es demasiado dura como para sufrir alguna deformación. Por esta razón, se aplica una condición tipo Dirichlet:

$$\Delta u_r|_{z=z_{inferior}} = 0 \quad (107)$$

$$\Delta u_\theta|_{z=z_{inferior}} = 0 \quad (108)$$

$$\Delta u_z|_{z=z_{inferior}} = 0 \quad (109)$$

Es decir:

$$\Delta u_r(i,j,nz) = 0 \quad (110)$$

$$\Delta u_{\theta}(i, j, nz) = 0 \quad (111)$$

$$\Delta u_z(i, j, nz) = 0 \quad (112)$$

5. En *dirección vertical* para el límite superior,  $z=z_{\text{superior}}$ , se asume que los esfuerzos de cizalla son nulos y que el incremento del esfuerzo vertical es cero ya que actúa un esfuerzo vertical *constante* igual al peso de los estratos superiores (con incremento igual a cero):

$$\Delta u_r(i, j, 1) = 0 \quad (113)$$

$$\Delta u_{\theta}(i, j, 1) = 0 \quad (114)$$

$$\Delta u_z(i, j, 1) = 0 \quad (115)$$

- **Condiciones de frontera para el modelo de flujo de fluidos:** para el modelo de flujo de fluidos se consideran las siguientes suposiciones:

1. La condición en el límite interno en la *dirección radial* es que la presión es igual a la presión existente al tiempo actual de simulación más la presión ejercida por el fluido de perforación,  $P_w$ , es decir:

$$P(1, j, k) = P^n(1, j, k) + P_w \quad (116)$$

2. La *condición en el límite externo en la dirección radial* es que no hay flujo de fluidos. Esta condición puede expresarse matemáticamente así:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{1,j,k} = 0 \quad (117)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)_{nr,j,k} = 0 \quad (118)$$

Donde nr son los nodos totales en dirección vertical.

3. En la dirección **tangencial** se aplican condiciones periódicas, generando las siguientes ecuaciones para los límites en esta dirección:

$$P(i,0,k) = P(i,n\theta,k) \quad (119)$$

$$P(i,n\theta+1,k) = P(i,1,k) \quad (120)$$

En las ecuaciones (119) y (120) los subíndices  $\theta=0$  y  $\theta=n\theta+1$  indican el nodo fantasma en dirección tangencial a los cuales se les asigna la presión del último y del primer nodo, respectivamente, por coincidir espacialmente con ellos y el subíndice  $n\theta$  indica el último nodo real en dicha dirección.

4. En la dirección **vertical**, en el límite superior e inferior, al igual que en la dirección radial es de no flujo. Esto se expresa matemáticamente como:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{i,j,1} = 0 \quad (121)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{i,j,nz} = 0 \quad (122)$$

En las anteriores ecuaciones, nz son los nodos totales en la dirección vertical.

### 7.2.2.3 GENERACION DE LA MALLA.

En las zonas aledañas al pozo se presentan los mayores cambios en el valor de la presión debido a la producción de fluidos, por lo que ocurren los mayores cambios en las variables dependientes de dicho valor. En el presente estudio, con el objeto de tener un buen ajuste del comportamiento del yacimiento, es necesario construir una malla de espaciamiento irregular *con mayor refinamiento en las cercanías del pozo*.

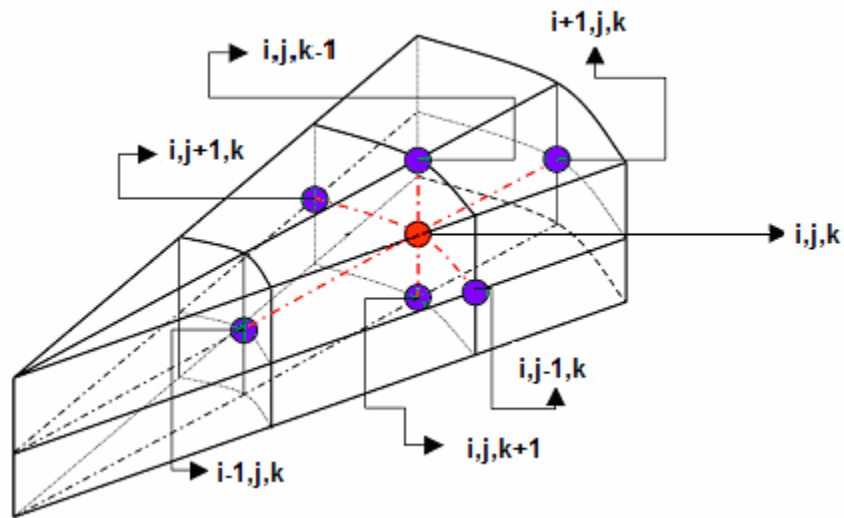


Figura 29. Esquema de malla discretizada para nodo distribuido.

En dirección radial, la malla se genera mediante la siguiente progresión geométrica:

$$r_{i+1} = r_i \left( \frac{r_e}{r_w} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (123)$$

En donde  $r_w$  es el radio del pozo,  $r_e$  es el radio del yacimiento y  $N$  es el número de nodos en dirección  $r$ .

Para obtener el punto intermedio entre los diferentes nodos radiales, necesario para la programación de las ecuaciones discretizadas, se utilizan las siguientes relaciones:

$$r_{i+1/2} = \frac{r_{i+1} - r_i}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} \quad (124)$$

$$r_{i-1/2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)} \quad (125)$$

### 7.2.3. MODELO NUMÉRICO.

En esta investigación se realizó una aproximación de las ecuaciones diferenciales a *diferencias finitas*. Las cuatro ecuaciones finales que se obtuvieron en el modelo matemático son ecuaciones diferenciales parciales no lineales y extremadamente complejas, por lo que la solución de estas por medios analíticos es, generalmente, imposible. Las soluciones, cuando existen, proporcionan una distribución continua de los parámetros dependientes. (Osorio, Simulación de Yacimientos).

En la mayoría de las aplicaciones la única manera de obtener solución de estas ecuaciones es mediante la solución numérica. Esta solución numérica produce resultados en puntos discretos dentro del sistema, y se puede transformar una ecuación diferencial a una forma discreta mediante el uso de *diferencias finitas*,

proceso en el que el espacio y el tiempo son discretizados. (Osorio, Simulación de Yacimientos).

### **7.2.3.1 DIFERENCIAS FINITAS.**

El método de diferencias finitas proporciona una solución a una ecuación diferencial en puntos discretos del espacio y del tiempo. El dominio espacial se divide en un número de celdas (o grids) superponiendo algún tipo de malla que puede ser rectangular, cilíndrica, entre otras). El tiempo también se discretiza en un número de pasos de tiempo, durante cada uno de los cuales se resuelve el problema para obtener nuevos valores de los parámetros dependientes. A diferencia de una solución analítica en donde se obtiene una función, con este método se obtienen soluciones como valores discretos, cada uno de los cuales corresponde a un bloque determinado del sistema discretizado (en este caso un yacimiento)<sup>8</sup>.

La *discretización* es la acción de dividir un sistema (yacimientos) en un número determinado de bloques e intervalos de tiempo, mientras que las *diferencias finitas* son las longitudes de cada bloque, por ejemplo,  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$ , etc., y de cada intervalo de tiempo  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ , etc.<sup>8</sup>.

### **7.2.3.2 APROXIMACIONES PARA LA PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA.**

Comúnmente se utiliza la serie de Taylor como método para expresar una función  $f(x)$  continua, donde esta se expande alrededor de un punto "a" localizado a una distancia  $x-a$  del punto "x" (Figura 30):

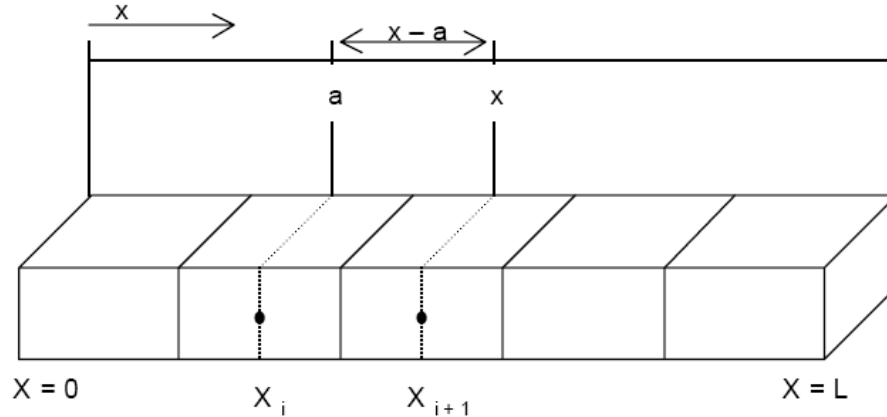


Figura 30. Bloque tenidos en cuenta en la aproximación progresiva de la primera derivada. Tomada de curso de Simulación Gildardo Osorio, Capítulo 3.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \quad (126)$$

En la ecuación (126)  $f^{(n)}$  es la n-esima derivada de f evaluada en el punto  $x = a$ . es decir, la ecuación xx puede ser escrita como:

$$f(x) = f(a) \cdot \frac{(x-a)^0}{0!} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)}{1!} + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + \left. \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (127)$$

En la figura (30) se observa un sistema lineal de bloques con  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ . Si se define  $a = x_i$  y  $x = x_{i+1}$  entonces  $x-a = x_{i+1} - x_i = \Delta x$  (por ser bloques de igual longitud) y además, una función H que se desea expandir mediante la serie de Taylor se tiene:

$$H(x_{i+1}) = H(x_i) + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_i} \cdot (\Delta x) + \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{x_i} \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_{x_i} \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \left. \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right|_{x_i} \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (128)$$

Donde:

$H(x_{i+1})$  = Función H evaluada en el bloque  $i+1 = H_{i+1}$

$H(x_i)$  = Función H evaluada en el bloque  $i = H_i$

Es decir,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x_i} = \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i \quad (129)$$

Entonces la ecuación (128) se puede escribir como:

$$H_{i+1} = H_i + \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i \cdot (\Delta x) + \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots + \left. \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (130)$$

Despejando  $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i$  de la ecuación (130) se llega a:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i = \frac{H_{i+1} - H_i}{(\Delta x)} - \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \dots - \left. \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (131)$$

Lo que se puede expresar como:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i = \frac{H_{i+1} - H_i}{(\Delta x)} + R_i \quad (132)$$

Con

$$R_i = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left. \frac{\partial^3 H}{\partial x^3} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \dots - \left. \frac{\partial^n H}{\partial x^n} \right|_i \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!} \quad (133)$$

Cuando  $\Delta x$  tiende a cero,  $R_i$  tiende a cero, por lo cual se puede escribir:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_i \cong \frac{H_{i+1} - H_i}{(\Delta x)} \quad (134)$$

La ecuación (134) se conoce como la aproximación progresiva ya que permite evaluar la primera derivada del bloque “i” en términos de la función evaluada en el bloque “i” e “i+1”. El término  $R_i$  es el *error de truncamiento* de la aproximación progresiva, que es de primer orden ya que la menor potencia a la cual se encuentra elevada la diferencia finita  $\Delta x$  es uno (Ecuación 134). A mayor orden del error de truncamiento, mejor es la aproximación numérica de la aproximación diferencial

Realizando un proceso similar al descrito anteriormente se llega para la aproximación de la primera derivada a:

Aproximación	Progresiva	Regresiva	Central
Primera derivada	$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right _i \cong \frac{H_{i+1} - H_i}{(\Delta x)}$	$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right _i \cong \frac{H_i - H_{i-1}}{(\Delta x)}$	$\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right _i \cong \frac{H_{i+1} - H_{i-1}}{2(\Delta x)}$
Error de truncamiento	$O[(\Delta x)^1]$	$O[(\Delta x)^1]$	$O[(\Delta x)^2]$

Tabla 3. Aproximación de la primera derivada progresiva, regresiva y central.

Como se puede ver, el error de truncamiento de la aproximación central para la primera derivada de la función H es menor que para la aproximación progresiva y regresiva.

Para obtener las aproximaciones numéricas para la segunda derivada de la función H se realiza el mismo procedimiento que el descrito anteriormente pero despejando  $\partial^2 H / \partial x^2$  de la ecuación (134), donde se obtiene:

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_i \cong \frac{H_{i-1} - 2H_i + H_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (135)$$

Con un error de truncamiento de segundo orden,  $O[(\Delta x)^2]$

En el Anexo C se muestra las aproximaciones empleadas en la discretización del modelo de flujo de fluidos y de deformación geomecánica.

## 7.2. MODELO DE COMPUTADOR.

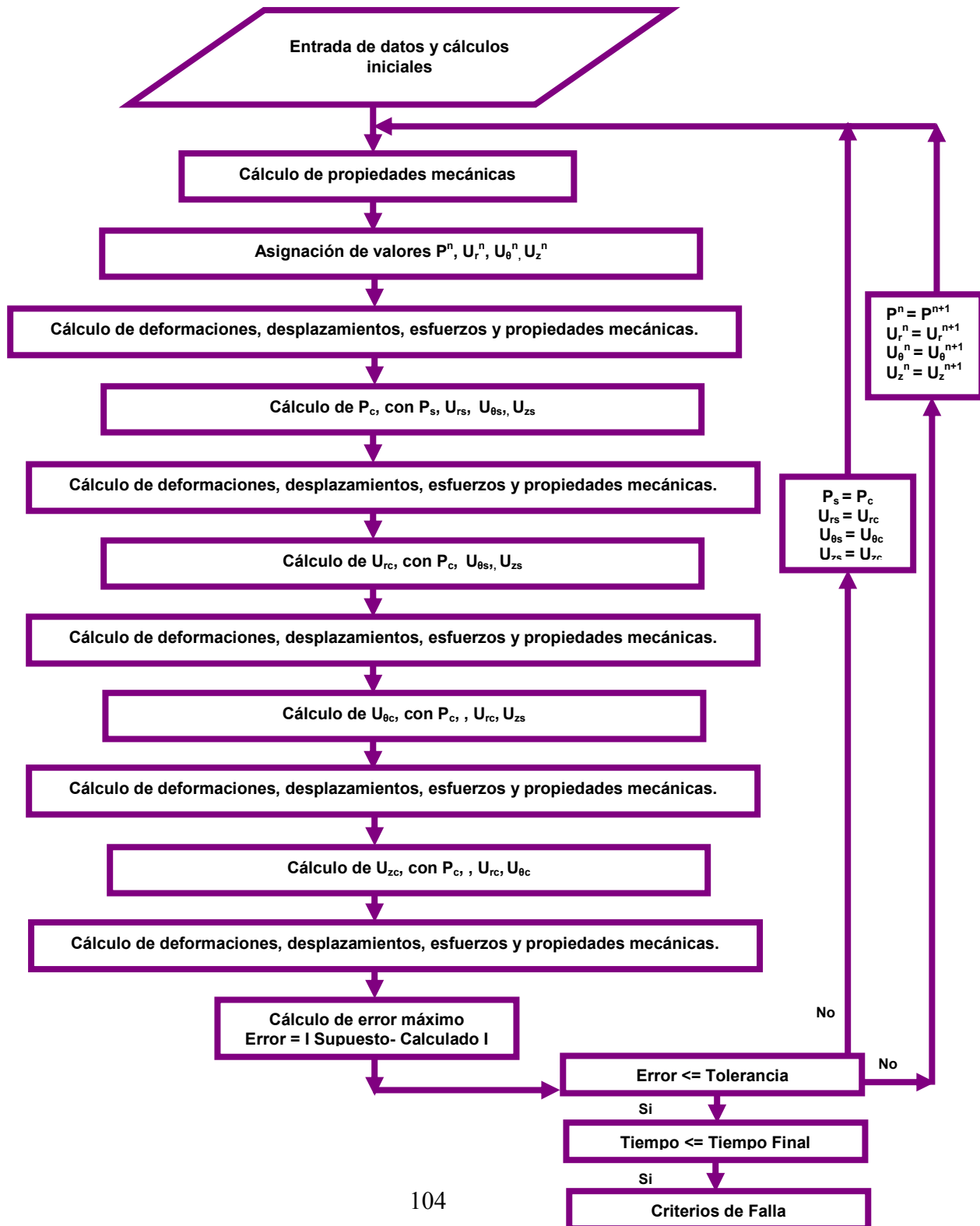
Una vez definido el modelo matemático a simular y las condiciones iniciales y de frontera que lo definen completamente, se elabora un modelo computacional con el que se obtendrá la solución al sistema de ecuaciones planteado, de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas.

El Lenguaje de programación empleado fue Compac Visual Fortran 90, un lenguaje de tipo científico diseñado especialmente para realizar cálculos complejos y de gran magnitud.

El tipo de matrices que se obtuvo en el sistema de ecuaciones fueron matrices diagonalmente dominantes, razón por la cual se escogió como método de solución el método iterativo de Gauss-Seidel.

En la construcción del modelo computacional se empleó la ecuación de porosidad de Zimmerman, las correlaciones<sup>10</sup> del Módulo de Young y el Módulo de Poisson en función de los esfuerzos principales y la ecuación exponencial para generación de la malla en dirección radial con mayor refinamiento en la cara del pozo.

El procedimiento que se siguió en el algoritmo es el siguiente:



El modelo consta de cuatro módulos, los cuales se muestran y describen a continuación:

MÓDULO	DATOS DE ENTRADA
<b>DATOS INICIALES</b>	Nodos en r, $\theta$ y z, tope, base, rw, re, espesor bruto, presión inicial, presión supuesta, iteraciones máximas, plano z, delta t, tolerancia, desplazamiento supuesto: radial, vertical y tangencial.
<b>DATOS DE PERFORACIÓN</b>	Inclinación, Azimut, Densidad de fluido de perforación, Gradiente esfuerzo vertical, Gradiente esfuerzo mínimo horizontal, Gradiente esfuerzo máximo horizontal, Tasa de perforación, duración.
<b>DATOS DE FLUIDO Y ROCA</b>	Gravedad API, Gravedad Específica del Crudo, Cf, Cbc, Cs, Porosidad.
<b>DATOS MECÁNICOS</b>	Resistencia a la tensión, Resistencia a la compresión Uniaxial, Cohesión, Ángulo de Fricción.
<b>RESULTADOS</b>	Número y ubicación de nodos fallados: Por tensión o por cizalladura (Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Presión de poro, Esfuerzo en r, $\theta$ y z, esfuerzo total, desplazamientos en r, $\theta$ y z

Tabla 4. Módulos del programa.

### 1. Datos iniciales.

En esta sección del programa se hace la lectura de datos para la generación de la malla de simulación, los parámetros requeridos por el método de solución numérica usado en el simulador y la información básica del yacimiento. Entre estos datos se tienen:

- Nodos en los cuales se desea dividir el yacimiento en dirección radial, tangencial y vertical.
- Radio del pozo, del yacimiento y espesor bruto.
- Presión inicial y presión supuesta.
- Número de iteraciones máximas.
- Tolerancia para el método de solución numérica.

**Datos**

Iniciales | Perforacion | Fluido y Roca | Mecanicos | Resultados

Datos de la malla Static

Nodos de Dirección Radial	3	Radio del pozo	0.25	ft
Nodos en Dirección Tangencial	6	Radio del yacimiento	100	ft
Nodos en Dirección Vertical	3	Espesor Bruto	24	ft

Datos de Inicialización

Presión inicial	6000	psi	Plano z	2
Presión supuesta	6000	psi	Delta t	150
Interacciones máximas	100		Tolerancia	0.01

Desplazamiento supuesto

Vertical	1
Tangencial	1
Radial	1

Estrato

Tope	Base
12439	12463


Cerrar
Siguiete


Cerrar
Siguiete

Figura 31. Ventana de inicio del Modelo Computacional.

## 2. Módulo Perforación.

En esta sección se hace el registro de la información correspondiente a la perforación del pozo y a los esfuerzos in-situ. Está constituida por los siguientes datos a introducir:

- Datos operacionales: Inclinación, azimut y Densidad del Fluido de perforación.
- Esfuerzos in situ: Gradiente esfuerzo vertical, Gradiente esfuerzo mínimo horizontal, Gradiente esfuerzo máximo horizontal.
- Tasa de perforación y duración.  
Tipo de pared: permeable o impermeable.



The screenshot shows a software window titled "Datos" with a blue header and a light blue background. The window has a tabbed interface with the following tabs: "Iniciales", "Perforacion", "Fluido y Roca", "Mecanicos", and "Resultados". The "Perforacion" tab is currently selected. The window is divided into three main sections for data entry:

- Datos operacionales:** Contains three input fields: "Inclinación" (24.97 degrees), "Azimut" (47.33 degrees), and "Densidad fluido de perforación" (14 ppg).
- Esfuerzos in situ:** Contains three input fields: "Gradiente esfuerzo vertical" (1.07 psi/ft), "Gradiente esfuerzo mínimo Horizontal" (0.65 psi/ft), and "Gradiente Esfuerzo máximo horizontal" (1.2 psi/ft).
- Tasa de perforación:** Contains two input fields: "Tasa de perforación" (70 ft/min) and "Duración" (10 min).

At the bottom of the window, there are two buttons: "Cerrar" and "Siguiente". A logo for "CENTRO DE INVESTIGACIONES Y SERVICIOS DE PERFORACION" is visible in the bottom left corner, and a decorative image of a globe is in the bottom right corner.

Figura 32. Ventana de datos de perforación.

### 3. Modulo Fluido y Roca.

En este módulo se introducen las propiedades del fluido:

- Gravedad API.
- Gravedad específica del crudo.
- Compresibilidad del fluido, Cf
- Compresibilidad del esqueleto sólido, Cs
- Compresibilidad total, Cbc.
- Porosidad.

The screenshot shows a software window titled "Datos" with a tabbed interface. The active tab is "Fluido y Roca". The window is divided into two main sections: "Propiedades del fluido" and "Propiedades de roca".

**Propiedades del fluido:**

Gravedad API	35
Gravedad específica del crudo	0.85
Compresibilidad del fluido	0.0000007

**Propiedades de roca:**

Porosidad	0.3
Compresibilidad	
Cbc	0.0000007 psi <sup>-1</sup>
Cs	0.0000007 psi <sup>-1</sup>

At the bottom left, there is a logo for "GRUPO DE INVERSIÓN DE PETRO" featuring a stylized globe. At the bottom right, there is a blue sphere icon. The window has "Cerrar" and "Siguiete" buttons in the bottom right corner, and "Cerrar" and "Siguiete" buttons in the bottom center.

Figura 33. Ventana de Datos de Fluido y Roca.

#### 4. Módulo Mecánica.

En esta sección se hacen las lecturas correspondientes a las propiedades mecánicas de la roca requeridas por el modelo de deformación geomecánica y por los criterios de falla. Tales datos son:

- Resistencia a la Tensión.
- Resistencia a la Compresión Uniaxial.
- Cohesión.
- Ángulo de Fricción.
- Criterios de Falla: Por Tensión o por Cizalladura (Mohr-Coulomb o Drucker-Prager).

Datos

Iniciales | Perforacion | Fluido y Roca | Mecánicos | Resultados |

Propiedades mecánicas

Resistencia a la tensión	1000
Resistencia Compresiva Uniaxial	1800
Cohesión	2500
Ángulo de fricción	28

Criterios de falla

Tensión

Cizalladura

- Mohr-Coulomb
- Drucker-Prager

Interno

Medio

Externo

Cerrar Siguiente

Cerrar Siguiente

Figura 34. Ventana de Propiedades Mecánicas.

Se destaca en este punto que no es posible comparar las herramientas Software desarrolladas anteriormente en el Grupo de Investigación de Estabilidad de Pozo bajo los mismos datos de entrada; pero, con el fin de hacer un contraste entre la herramienta desarrollada con la herramienta elástica anteriormente propuesta<sup>11</sup>, se emplearon los datos mostrados por Lopez-Quintero del Piedemonte Llanero:

$r_w$ (ft)	0.875
$r_e$ (ft)	20
Nodos en dirección radial	6
Nodos en dirección tangencial	16
Nodos en dirección vertical	10
Tope (ft)	8600
Base (ft)	10200
Espesor bruto (ft)	1600
Cohesión (psi)	3353
Ángulo de fricción interna	32
Resistencia a la tensión (psi)	3790
Gradiente esfuerzo máximo (psi/ft)	1
Gradiente esfuerzo mínimo (psi/ft)	0.71
Gradiente esfuerzo vertical (psi/ft)	1.1

Tabla 5. Datos de entrada.

Se introdujo además,  $C_s = C_f = C_{bc} = 10^{-7}$ .

Se obtuvo que los nodos fallados por tensión para la herramienta poroelástica fueron ocho nodos ubicados en la cara del pozo, mientras que la herramienta poroelástica arrojó un total de diez nodos fallados por tensión ubicados en la cara del pozo (Figura 35 y 36).

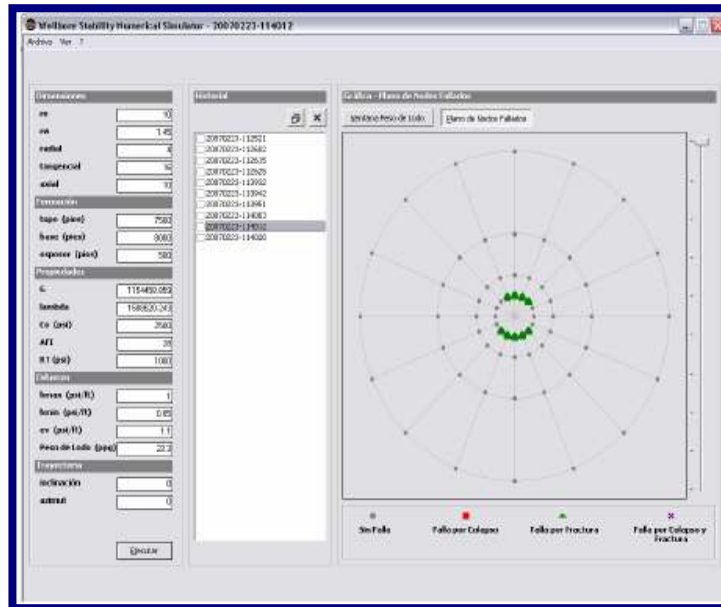


Figura 35. Nodos fallados por tensión según herramienta de modelamiento elástico.

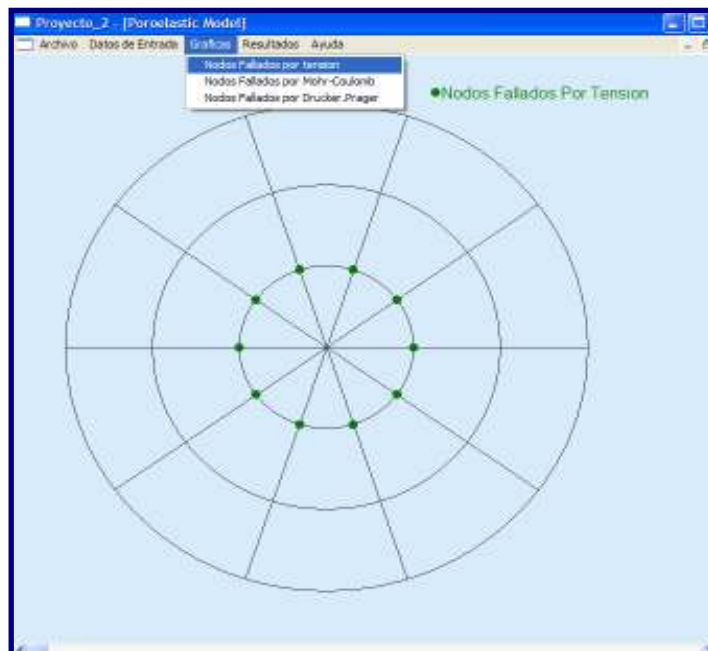


Figura 36. Nodos fallados por tensión según herramienta de modelamiento poroelástico.

Según los resultados obtenidos, se tiene que la herramienta poroelástica arroja un mayor número de nodos fallados por tensión que los arrojados por la herramienta elástica.

No se puede asegurar que los nodos que se muestran fallados sean fracturas reales generadas y propagadas en la formación ya que no se están considerando todos los factores de propagación de fracturas, lo que se puede decir es que en realidad se está mostrando una concentración de esfuerzos que indican las zonas con fallas potenciales, y que la herramienta poroelástica muestra una zona más amplia de generación potencial de fallas porque se está considerando la influencia de la presión de poro como variable adicional; que es otro esfuerzo más que actúa en la formación.

Teniendo en cuenta el estudio mostrado en el paper SPE 51929, Osorio et. Al, Numerical Simulation of the Impact of Flow-Induced Geomechanical Respose on the productivity of Stress-Sensitive Reservoirs, con los de entrada, y los demás valores ingresados anteriormente:

$C_s$ (psi <sup>-1</sup> )	$5 \times 10^{-7}$
$C_{bc}$	$7 \times 10^{-6}$
Nodos en dirección radial	3
Nodos en dirección tangencial	6
Nodos en dirección vertical	3
Gravedad API	32
Porosidad	0.235

Tabla 6. Datos de entrada.

Los valores anteriores se mantuvieron fijos y se realizaron corridas fijando el azimut y variando la inclinación en 15 grados.

<b>Azimut: 0</b> <b>Inclinación del pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Interno</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Medio</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Externo</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	5	5	5	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 7. Número de nodos fallados para un azimut de 0 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 10</b> <b>Inclinación del pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Interno</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Medio</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Externo</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	5	5	5	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 8. Número de nodos fallados para un azimut de 10 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 20</b> <b>Inclinación del</b> <b>pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Interno</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Medio</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Externo</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	5	5	5	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 9. Número de nodos fallados para un azimut de 20 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 30</b> <b>Inclinación del</b> <b>pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Interno</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Medio</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Externo</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	5	5	5	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 10. Número de nodos fallados para un azimut de 30 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 40</b> <b>Inclinación del</b> <b>pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Interno</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Medio</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Externo</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	5	5	5	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 11. Número de nodos fallados para un azimut de 40 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 50</b> <b>Inclinación del</b> <b>pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Interno</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Medio</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Drucker-Prager</b> <b>Externo</b>	<b>Nodos fallados</b> <b>por Criterio de</b> <b>Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	6	5	6	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 12. Número de nodos fallados para un azimut de 50 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 70</b> <b>Inclinación del pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Interno</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Medio</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Externo</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	6	5	6	5
75	5	6	5	6	5
90	5	5	5	5	5

Tabla 13. Número de nodos fallados para un azimut de 70 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 80</b> <b>Inclinación del pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Interno</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Medio</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Externo</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	6	6	5	6	5
75	5	6	5	6	6
90	5	5	5	5	6

Tabla 14. Número de nodos fallados para un azimut de 80 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

<b>Azimut: 90 Inclinación del pozo, grados</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Mohr-Coulomb</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Interno</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Medio</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Drucker-Prager Externo</b>	<b>Nodos fallados por Criterio de Tensión</b>
0	5	5	5	5	5
15	5	5	5	5	5
30	5	5	5	5	5
45	5	5	5	5	5
60	5	5	5	5	5
75	5	6	5	6	6
90	5	6	6	6	6

Tabla 15. Número de nodos fallados para un azimut de 90 respecto a la orientación del esfuerzo máximo horizontal

De los resultados anteriores se puede concluir que:

- Es más conservativo el Criterio de Mohr-Coulomb que el Criterio de Drucker Prager.
- Se notó variación importante cuando el azimut alcanzó un valor de 50 grados con una Inclinación de 75 grados.
- La mayor probabilidad de ocurrencia de Falla ocurre en pozos con inclinaciones entre 80 y 90 grados.
- El mayor potencial de falla se da en pozos con azimut altos, lo que implica que se una perforación más estable se obtiene cuando se perfora con azimut en dirección paralela al esfuerzo horizontal máximo.
- Además se variaron valores de Cohesión, otra variable que tiene alta influencia en la variación de los resultados, concluyéndose que a mayor valor de Cohesión de la Roca, menor potencial de falla de la formación.

## CONCLUSIONES

1. Según los resultados obtenidos, se tiene que la herramienta poroelástica arroja un mayor número de nodos fallados que los arrojados por la herramienta elástica. Con estos resultados no se puede asegurar que los nodos que se muestran fallados sean fracturas reales generadas y propagadas en la formación ya que no se están considerando todos los factores de propagación de fracturas, lo que se puede decir es que en realidad se está mostrando una concentración de esfuerzos que indican las zonas con fallas potenciales, y que la herramienta poroelástica muestra una zona más amplia de generación potencial de fallas porque se está considerando la influencia de la presión de poro como variable adicional; que es otro esfuerzo más que actúa en la formación.
2. El estado de esfuerzos in situ al cual está sometida una formación que se está perforando juega un rol muy importante en la estabilidad mecánica de un pozo, pues éste y la presión de poro determinan el potencial de la formación para soportar la perturbación causada durante la perforación.
3. La trayectoria de perforación, así como las propiedades mecánicas de las rocas, son un factor primordial en la determinación del potencial de generación de fallas compresivas y/o tensiles.
4. La implementación de una herramienta numérica para modelar la estabilidad de un pozo, es fundamental para el análisis de cantidad de cavings que pueden ser potencialmente producidos por fallas compresivas o de colapso, y para analizar los estados de esfuerzos que pueden generar fallas por tensión o por cizalladura.

## RECOMENDACIONES.

1. Es fundamental en la determinación del método de solución más adecuado a implementar en el conjunto de ecuaciones, el análisis de las matrices, recordando que se debe buscar que éstas tengan sus coeficientes concentrados en la diagonal principal.
2. Si en la implementación de otro modelo numérico, las matrices resultantes son muy dispersas, se debe cambiar en primera instancia el esquema de ordenamiento. Si esto no elimina o reduce la dispersión, se debe aplicar un método que maneje dicha característica.
3. El programa construido está como "Código duro". Se recomienda usar la POO (Programación orientada a objetos) como alternativa de reacondicionamiento del programa. Esto permite mejorar el proceso de mantenimiento del software y facilita la implementación de nuevos módulos.
4. El uso de librerías numéricas como LAPACK, puede ser implementado en futuras versiones del programa, con el ánimo de añadir robustez al solver numérico y de optimizar tanto el tamaño del programa como la ejecución de los códigos.
5. Se puede optimizar igualmente el la forma y cantidad de operaciones que se realicen dentro del programa con el ánimo de reducir el tiempo de cómputo.
5. Se recomienda la implementación de librerías gráficas como OPENGL o VTK, para mejorar la definición de los resultados gráficos que se muestran en el programa.

7. Dado que este proyecto está enmarcado dentro de un proyecto más grande que busca el desarrollo de una herramienta propia, se recomienda que se mejore el proceso de desarrollo de este tipo de software, incluyendo el uso de una metodología de desarrollo de software y una estructura de codificación.

## NOMENCLATURA

- $\rho_f$  : Densidad del fluido en la matriz.
- $\rho_s$  : Densidad del sólido.
- $\varphi$  : Porosidad.
- $v_f$  : Velocidad del fluido en la matriz.
- $v_s$  : Velocidad del sólido.
- $V_T$  : Volumen total.
- $\tilde{q}$  : Término de flujo másico.
- $k$  : Permeabilidad.
- $\mu$  : Viscosidad del fluido en la matriz.
- $P$  : Presión.
- $C_f$  : Compresibilidad del fluido.
- $C_s$  : Compresibilidad de los poros primarios
- $C_{bc}$  : Compresibilidad total que expresa el efecto de la variación del esfuerzo medio sobre el volumen total a una presión de poro constante.
- $\alpha$  : Coeficiente de Biot.
- $r$  : Dirección radial de coordenadas cilíndricas.
- $\theta$  : Dirección tangencial de coordenadas cilíndricas.
- $z$  : Dirección vertical de coordenadas cilíndricas.
- $\sigma_r$  : Esfuerzo normal en dirección radial.
- $\sigma_\theta$  : Esfuerzo normal en dirección tangencial.
- $\sigma_z$  : Esfuerzo normal en dirección vertical.
- $\bar{\sigma}$  : Esfuerzo normal promedio.

- $\sigma_v$  : Esfuerzo vertical in-situ.
- $\sigma_H$  : Esfuerzo horizontal máximo.
- $\sigma_h$  : Esfuerzo horizontal mínimo.
- $\tau_{r\theta}$  : Esfuerzos de cizalla en el plano r en la dirección  $\theta$ .
- $\tau_{rz}$  : Esfuerzos de cizalla en el plano r en la dirección z.
- $\tau_{\theta z}$  : Esfuerzo de cizalla en el plano  $\theta$  en dirección z.
- $\varepsilon_r$  : Deformación normal en la dirección r.
- $\varepsilon_\theta$  : Deformación normal en la dirección  $\theta$ .
- $\varepsilon_z$  : Deformación normal en la dirección z.
- $\gamma_{r\theta}$  : Deformación de cizalla en el plano r en dirección  $\theta$
- $\gamma_{rz}$  : Deformación de cizalla en el plano r en dirección z.
- $\gamma_{\theta z}$  : Deformación de cizalla en el plano  $\theta$  en dirección z.
- $\varepsilon_V$  : Deformación volumétrica.
- $U_r$  : Desplazamiento en la dirección radial.
- $U_\theta$  : Desplazamiento en la dirección tangencial.
- $U_z$  : Desplazamiento en la dirección vertical.
- $E$  : Modulo de elasticidad normal ó Young.
- $\lambda$  : Constantes de Lamé.
- $G$  : Modulo de elasticidad en cizalladura ó modulo de rigidez.
- $\nu$  : Relación de Poisson.
- $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  : Esfuerzos principales efectivos.
- $T_o$  : Resistencia tensil.
- $C_o$  : Resistencia compresiva uniaxial.
- $\beta$  : Ángulo de falla.

$I_1, I_2, I_3$  : Invariantes del tensor de esfuerzos.

$J_1, J_2, J_3$  : Invariantes de esfuerzos deviatoricos.

$A$  : Parámetro del criterio de Drucker – Prager.

$D$  : Parámetro del criterio de Drucker – Prager.

$\Delta \bar{U}$  : Vector de desplazamientos.

$\nabla$  : Operador gradiente.

$\nabla \bullet$  : Operador divergente.

$\nabla$  : Incremento.

$\partial$  : Derivada parcial.

**BC** : Componente del stencil que representa la variable ubicada encima de la celda de referencia.

**S** : Componente del stencil que representa la variable ubicada al sur de la celda de referencia.

**W** : Componente del stencil que representa la variable ubicada al oeste de la celda de referencia.

**N** : Componente del stencil que representa la variable ubicada al norte de la celda de referencia.

**TC** : Componente del stencil que representa la variable ubicada debajo de la celda de referencia.

**C** : Componente del stencil que representa la variable dependiente ubicada en la celda de referencia.

**E** : Componente del stencil que representa la variable ubicada al este de la celda de referencia.

**F** : Componente del stencil de términos independientes.

**i, j, k** : Ubicación de los nodos en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  respectivamente.

$r_{i+1/2}$  : Las fronteras en los bloques que delimitan el volumen específico del yacimiento sobre el cual cada nodo tiene influencia en la dirección radial.

$r_e$  : Radio externo del yacimiento.

$r_w$  : Radio del pozo.

$N$  : Número de nodos en los cuales se divide el yacimiento.

$m$  : Nodos en dirección  $r$ .

$n$  : Nodos en dirección  $s$ .

$F_m, F_n, C_m, C_{m-1}$  : Constantes de espaciado.

## **SUBÍNDICES**

$i, j, k$  : Índice de malla en las direcciones  $r, \theta$  y  $z$ , respectivamente

$1, 2, 3$  : Índice de los esfuerzos principales mayor, intermedio y menor, respectivamente.

$e$  : Externo.

$w$  : Pozo.

$b$  : Bulk (total).

$r$  : Roca-sólido.

$f$  : Fluido.

## **SUPERÍNDICES**

$n$  : Nivel actual de tiempo en la simulación.

$n+1$  : Nivel de tiempo futuro en la simulación.

$0$  : Estado inicial o de referencia en la simulación.

## BIBLIOGRAFÍA

1. FJAER. Erling, HOLT. Rune M, HORSRUD. Per and RAAEN. Arne M. Petroleum related Rock Mechanics. Elsevier, Amsterdam. 1996.
2. VILLADIEGO, D.; MORA, L. Desarrollo de una herramienta para analizar la inestabilidad de pozo, mediante el uso de las teorías elástica y poroelástica: Aplicación al piedemonte Colombiano. Tesis de grado, Universidad Industrial de Santander. 2005.
3. OSORIO GALLEGO, José G. Seminario: Aspectos geomecánicos de la estabilidad de pozos.
4. OSORIO GALLEGO, José Gildardo. Notas para un curso de aplicaciones geomecánicas a la estabilidad de pozo. Universidad Nacional de Colombia. Medellín 2004.
5. SUGAR LAND LEARNING CENTER, Rock Mechanics.
6. TORRES, Manuel Ernesto. Determinación de esfuerzos in situ en la cordillera oriental de Colombia.
7. CASTILLA, J.; VASQUEZ, H. Modelamiento numérico de la estabilidad mecánica de pozos. Tesis de grado. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Medellín 2004.

8. OSORIO GALLEGO, José Gildardo, Ph D. "Notas sobre simulación numérica de yacimientos". Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. 2002.
9. GARCIA. M. Felix. Lenguaje de programación Fortran 90. Editorial Paraninfo. Madrid, España. 1999
10. TERAN, Claudia. Acoplamiento de un modelo de flujo de fluidos y geomecánica con el análisis de estabilidad mecánica de pozos en yacimientos naturalmente fracturados. Aplicación a un caso colombiano. Tesis de grado, Universidad Industrial de Santander. 2006.
11. LOPEZ, Cesar; QUINTERO, Yair. Desarrollo de una herramienta software mediante el uso de diferencias finitas para analizar la inestabilidad de pozos, aplicando la teoría elástica. Tesis de grado, Universidad Industrial de Santander. 2007
12. BENAVIDES, Yanury; MAYA, Gustavo. Simulación composicional de pruebas de presión en yacimientos sensitivos a esfuerzos y deformaciones. Tesis de grado. Universidad Nacional de Colombia sede Medellín. Medellín 2003.
13. CABRERA J.R. y DE GENNARO S. Aplicaciones Prácticas de la Geomecánica en la Industria Petrolera y Gasífera, ICP, Diciembre 2003.

14. DAFONTOURA S. Rock Mechanics Principles and Engineering Applications, 1980.
15. ZURICH, Geotechnical Testing in Engineering Geology.
16. HAN G. Rock Stability under Different Fluid Flow Condition, Thesis University of Waterloo Ontario, Canadá, 2003.

## **ANEXO A. MODELO DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA EN COORDENADAS CILÍNDRICAS**

El modelo de deformación geomecánica está conformado por tres relaciones básicas constitutivas, que se acoplan para describir los problemas de elasticidad en medios porosos:

- Ecuaciones de equilibrio.
- Ecuaciones de deformación-desplazamiento.
- Ecuaciones de esfuerzo - deformación – presión.

Las ecuaciones anteriores se obtendrán para un medio poroso a partir de las relaciones para un medio sólido utilizando el concepto de esfuerzo efectivo, las ecuaciones se desarrollan para el sistema de coordenadas cilíndricas.

### **A.1 ECUACIONES MECÁNICAS PARA UN MEDIO SÓLIDO**

#### **A.1.1 Ecuaciones de equilibrio**

A partir de un elemento infinitesimal de volumen en coordenadas cilíndricas en cuyas caras actúan esfuerzos normales y de cizalla, pueden demostrarse las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos.

Suponiendo que las componentes de la fuerza gravitacional, que actúa sobre el elemento están dadas por  $g_r$ ,  $g_\theta$  y  $g_z$ , en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$  respectivamente son despreciables.

Se efectúa un balance de fuerzas en las direcciones  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ . Teniendo en cuenta que:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \text{ por lo tanto: } F = \sigma \cdot A$$

Donde:

$F$  = Fuerza.

$\sigma$  = Esfuerzo.

$A$  = Área.

**En dirección radial:** Efectuando un balance de fuerzas en la dirección  $r$  ( $\sum \text{Fuerzas}$ ) $_r = 0$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot \frac{dr}{2} \right) \left( r + \frac{dr}{2} \right) d\theta \cdot dz - \left( \sigma_r - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot \frac{dr}{2} \right) \left( r - \frac{dr}{2} \right) d\theta \cdot dz + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{d\theta}{2} \right) dr \cdot dz \\ & - \left( \tau_{\theta r} - \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{2} \right) \left( \cos \frac{d\theta}{2} \right) dr \cdot dz - \left( \sigma_\theta - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{2} \right) \left( \sin \frac{d\theta}{2} \right) dr \cdot dz - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{2} \right) \left( \sin \frac{d\theta}{2} \right) dr \cdot dz \\ & + \left( \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \left( \cos \frac{d\theta}{2} \right) r \cdot dr \cdot d\theta - \left( \tau_{zr} - \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) r \cdot dr \cdot d\theta + F_r \cdot dr \cdot d\theta = 0 \end{aligned}$$

Escrita de forma incremental.

$$\begin{aligned} & \sigma_r r \Delta \theta \cdot \Delta z - \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \cdot \Delta r \right) \left[ (r + \Delta r) \Delta \theta \cdot \Delta z \right] + \tau_{\theta r} \Delta r \cdot \Delta z - \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} \Delta \theta \right) \Delta r \cdot \Delta z - \\ & \sigma_\theta \left( \sin \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta r \cdot \Delta z - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \cdot \Delta \theta \right) \left( \sin \frac{\Delta \theta}{2} \right) \Delta r \cdot \Delta z + \tau_{zr} r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta - \\ & \left( \tau_{zr} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} \Delta z \right) r \cdot \Delta r \cdot \Delta \theta = 0 \end{aligned}$$

Efectuando los productos, agrupando términos semejantes, dividiendo la ecuación resultante entre el volumen total del elemento,  $r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$ , y considerando que no actúan fuerzas de cuerpo en dirección radial ( $F_r$ ) se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} \cdot \cos \frac{\partial \theta}{2} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{2\sigma_\theta}{r \cdot d\theta} \cdot \text{sen} \frac{d\theta}{2} = 0$$

Debido a que  $d\theta$  es muy pequeño ( $d\theta \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\text{sen} \frac{d\theta}{2} \cong \frac{d\theta}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{d\theta}{2} \cong 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

**En dirección tangencial:** De forma análoga, efectuando un balance de fuerzas en la dirección  $\theta$ , se obtiene:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.2})$$

**En dirección vertical:** Así mismo, efectuando un balance de fuerzas en la dirección  $z$ , se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (\text{A.3})$$

En las ecuaciones anteriores  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  y  $\sigma_z$  son los esfuerzos normales en dirección radial, tangencial y vertical respectivamente; y  $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ ,  $\tau_{rz} = \tau_{zr}$  y  $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta}$  son los esfuerzos de cizalladura en los planos  $r-\theta$ ,  $r-z$  y  $\theta-z$  respectivamente; las igualdades son debidas a que el elemento de volumen no presenta rotación.

### **A.1.2 Ecuaciones de deformación – desplazamiento**

Las relaciones existentes entre las deformaciones y los desplazamientos presentes en un medio sólido están dadas por:

***Deformación normal en dirección radial:***

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \quad (\text{A.4})$$

***Deformación normal en dirección tangencial:***

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \quad (\text{A.5})$$

***Deformación normal en dirección vertical:***

$$\varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

***Deformación de cizalladura en el plano  $r-\theta$ :***

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2r} \left( \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - U_\theta \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} \quad (\text{A.7})$$

**Deformación de cizalladura en el plano  $r - z$  :**

$$\gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} \right] \quad (\text{A.8})$$

**Deformación de cizalladura en el plano  $\theta - z$  :**

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right] \quad (\text{A.9})$$

En las ecuaciones anteriores  $U_r$ ,  $U_\theta$  y  $U_z$ , son los desplazamientos en dirección radial, tangencial y vertical respectivamente.

### **A.1.3 Ecuaciones de esfuerzo – deformación**

Las expresiones que relacionan los esfuerzos y las deformaciones están dadas por:

$$\sigma_r = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \varepsilon_r \quad (\text{A.10})$$

$$\sigma_\theta = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \varepsilon_\theta \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_z = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G \varepsilon_z \quad (\text{A.12})$$

$$\tau_{r\theta} = 2 \cdot G \gamma_{r\theta} \quad (\text{A.13})$$

$$\tau_{rz} = 2 \cdot G \gamma_{rz} \quad (\text{A.14})$$

$$\tau_{\theta z} = 2 \cdot G \gamma_{\theta z} \quad (\text{A.15})$$

En las ecuaciones anteriores:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} = \text{Constante de Lamé.}$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{E}{1 + \nu} \right) = \text{Módulo de rigidez ó módulo de elasticidad en cizalladura.}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_r}{r} \right) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \text{Deformación volumétrica.}$$

E = Módulo de elasticidad normal ó módulo de Young.

$\nu$  = Relación de Poisson.

## **A.2 ECUACIONES GEOMECÁNICAS EN FORMA INCREMENTAL PARA UN MEDIO SÓLIDO.**

La solución de las ecuaciones geomecánicas hasta aquí planteadas implica conocer la variación total de los desplazamientos desde la formación del yacimiento hasta el momento del estudio. Como tal información se desconoce, las ecuaciones del modelo de deformación geomecánica se deben expresar en función de los incrementos de los desplazamientos; para ello se debe formular las deformaciones y los esfuerzos en forma incremental. Con lo anterior, solo se necesitaría conocer los incrementos a partir del momento en que empieza la observación.

La siguiente expresión matemática permite evaluar la variable M en un incremento de tiempo  $\Delta t$  :

$$M_{t+\Delta t} = M^0 + \Delta M_{t \rightarrow t+\Delta t} \tag{A.16}$$

Donde:

$M_{t+\Delta t}$  = Variable evaluada al tiempo actual  $t + \Delta t$ .

$M^0$  = Variable evaluada al tiempo  $t$ , es decir al comienzo de cada intervalo  $\Delta t$ . Cuando el tiempo es cero, corresponde a los valores iniciales de la variable presentes en el yacimiento.

$\Delta M_{t \rightarrow t+\Delta t}$  = Cambio en el valor de la variable entre los niveles de tiempo  $t$  y  $t + \Delta t$ .

Con lo anterior se logra obtener un nivel cero de referencia ( $t_0$ ) de las variables, para todos los estudios posteriores del yacimiento.

Es importante hacer notar que durante el modelamiento, el término  $M^0$  para la variable deformación es cero para todos los intervalos. Es decir, el valor de deformación es tomado siempre como  $\varepsilon = \sum \Delta \varepsilon$  con respecto a  $t = t_0$  (nivel de referencia) y para un  $t = \sum \Delta t$ .

### A.2.1 Ecuaciones de equilibrio

Expresar las ecuaciones de equilibrio en forma incremental, asegura el hecho de tener en cuenta la historia de la trayectoria de esfuerzos en el yacimiento en función del tiempo y con respecto a un nivel de referencia.

Como las ecuaciones de equilibrio de la sección **A.1.1** serán evaluadas al tiempo actual, se utilizará la ecuación **(A.16)** para expresarlas en forma incremental desde un nivel de referencia, así:

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{\partial \Delta \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Delta \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\Delta \sigma_r - \Delta \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \Delta \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\Delta \tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{\partial \Delta \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \Delta \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\Delta \tau_{rz}}{r} = 0 \quad (\text{A.19})$$

### A.2.2 Ecuaciones de deformación – desplazamiento

Utilizando la ecuación (A.16) para expresar las ecuaciones de deformación – desplazamiento en forma incremental se obtiene:

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \quad (\text{A.20})$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta \varepsilon_z = \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \quad (\text{A.22})$$

$$\Delta \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} - \Delta U_\theta \right) + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right) \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial z} \right) \quad (\text{A.25})$$

Donde:  $\varepsilon_r^0 = \varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_z^0 = \gamma_{r\theta}^0 = \gamma_{rz}^0 = \gamma_{\theta z}^0 = 0$

### A.2.3 Ecuaciones de esfuerzo – deformación

Utilizando la ecuación (A.16) para expresar las ecuaciones de esfuerzo – deformación en forma incremental se obtiene:

$$\Delta\sigma_r = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G\Delta\varepsilon_r \quad (\text{A.26})$$

$$\Delta\sigma_\theta = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G\Delta\varepsilon_\theta \quad (\text{A.27})$$

$$\Delta\sigma_z = \lambda \cdot \varepsilon_v + 2 \cdot G\Delta\varepsilon_z \quad (\text{A.28})$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{r\theta} \quad (\text{A.29})$$

$$\Delta\tau_{rz} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{rz} \quad (\text{A.30})$$

$$\Delta\tau_{\theta z} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{\theta z} \quad (\text{A.31})$$

### A.3 ECUACIONES GEOMECÁNICAS EN FORMA INCREMENTAL PARA UN MEDIO POROSO

#### A.3.1 Ecuaciones de equilibrio

Son las mismas ecuaciones que aparecen en la sección **A.2.1**; debido a que son ecuaciones de los esfuerzos totales, en este caso sobre el medio poroso. Es importante mencionar que el efecto de la presión de poro solo se incluye en las ecuaciones de esfuerzo – deformación – presión.

$$\frac{\partial\sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta r}^0}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{\partial\Delta\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\Delta\tau_{\theta r}}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r} = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_\theta^0}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Delta\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\Delta\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial\Delta\tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\Delta\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial\sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\theta z}^0}{\partial\theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{\partial\Delta\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\Delta\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Delta\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\Delta\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (\text{A.34})$$

#### A.3.2 Ecuaciones deformación – desplazamiento

Son las mismas ecuaciones de la sección **A.2.2**; debido a que son las relaciones entre la deformación y el desplazamiento que presenta un cuerpo en general, es

decir, independiente de su presión de poro, la cual es tomada en cuenta en las ecuaciones de esfuerzo – deformación – presión.

$$\Delta \varepsilon_r = \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \quad (\text{A.35})$$

$$\Delta \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \Delta U_r + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$\Delta \varepsilon_z = \frac{\partial \Delta U_z}{\partial z} \quad (\text{A.37})$$

$$\Delta \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} - \Delta U_\theta \right) + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\Delta \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} + \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right) \quad (\text{A.39})$$

$$\Delta \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta U_z}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial z} \right) \quad (\text{A.40})$$

Donde;  $\varepsilon_r^0 = \varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_z^0 = \gamma_{r\theta}^0 = \gamma_{rz}^0 = \gamma_{\theta z}^0 = 0$

### A.3.3 Ecuaciones de esfuerzo - deformación – presión

Las ecuaciones de esfuerzo – deformaciones utilizadas para el medio sólido son las mismas que para la parte sólida del medio poroso. En el caso del medio poroso total (parte sólida y parte porosa) se debe tener en cuenta la variación de las propiedades de la roca y los desplazamientos en función del esfuerzo efectivo. El esfuerzo total sobre el medio poroso es la suma del esfuerzo efectivo (que actúa sobre la parte sólida) y el efecto de la presión de poro ( $\Delta(\alpha \cdot \Delta P)$ ), que actúa sobre la parte porosa), así:

$$\Delta\sigma_r = \underbrace{2 \cdot G\Delta\varepsilon_r + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v}_I + \underbrace{\alpha \cdot \Delta P}_{II} \quad (\text{A.41})$$

I = Esfuerzo radial efectivo sobre la parte sólida del medio poroso.

II = Esfuerzo radial sobre la parte porosa por el efecto de la presión de poro.

$$\Delta\sigma_\theta = 2 \cdot G\Delta\varepsilon_\theta + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v + \alpha \cdot \Delta P \quad (\text{A.42})$$

$$\Delta\sigma_z = 2 \cdot G\Delta\varepsilon_z + \lambda \cdot \Delta\varepsilon_v + \alpha \cdot \Delta P \quad (\text{A.43})$$

$$\Delta\tau_{r\theta} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{r\theta} \quad (\text{A.44})$$

$$\Delta\tau_{rz} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{rz} \quad (\text{A.45})$$

$$\Delta\tau_{\theta z} = 2 \cdot G\Delta\gamma_{\theta z} \quad (\text{A.46})$$

#### A.4 ECUACIONES DEL MODELO DE DEFORMACIÓN GEOMECÁNICA

A continuación se acoplan las ecuaciones desarrolladas en la sección **A.3** para obtener las ecuaciones que constituyen el modelo de deformación geomecánica para medios porosos en coordenadas cilíndricas.

Reemplazando las ecuaciones **(A.35) - (A.40)** y **(A.41) – (A.46)** en las ecuaciones **(A.32) – (A.34)** y desarrollando las respectivas derivadas, se obtienen las siguientes ecuaciones:

***Primera ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos:***

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G \Delta u_r}{r^2} - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}
\tag{A.47}$$

**Segunda ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos:**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) - \frac{G}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}
\tag{A.48}$$

**Tercera ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos:**

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial z} = 0
\end{aligned}
\tag{A.49}$$

Se debe resaltar que en las ecuaciones (A.47) a (A.49), las propiedades geomecánicas ( $\lambda, \alpha, G$ ) son función del esfuerzo efectivo promedio, y por lo tanto

del tiempo y el espacio. Además, como son evaluadas siempre al nivel de tiempo superior ( $t + \Delta t$ ), no son tomadas como parte de los incrementos.

Agrupando términos semejantes en cada una de las ecuaciones anteriores, utilizando los operadores gradiente y divergente y expresándolas en forma no lineal para las propiedades geomecánicas ( $\lambda, \alpha, G$ ), se obtiene:

**Primera ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos y en términos de operadores:**

$$\left[ \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} \right] + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_r)] + \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial r} \right] + \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial r} + \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G}{r^2} \Delta u_r - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A.50})$$

**Segunda ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos y en términos de operadores:**

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial \theta} + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_\theta)] + \frac{1}{r} \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial \theta} + \frac{G}{r^2} \Delta u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial r} + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} = 0 \quad (\text{A.51})$$

**Tercera ecuación geomecánica de equilibrio para un medio poroso en función de los desplazamientos y en términos de operadores:**

$$\left[ \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} \right] + \nabla \cdot [G \nabla (\Delta u_z)] + \nabla \cdot \left[ G \frac{\partial (\Delta u)}{\partial z} \right] + \frac{\partial [\lambda \nabla \cdot (\Delta u)]}{\partial z} + \frac{\partial (\alpha \Delta p)}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.52})$$

En las ecuaciones anteriores,  $\Delta \vec{u}$  es el vector de desplazamientos,  $\nabla$  es el operador gradiente y  $\vec{\nabla} \cdot$  es el operador divergente.

## ANEXO B. MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS EN COORDENADAS CILINDRICAS

El modelo de flujo de fluidos lo constituyen cuatro relaciones básicas: La conservación de masa del fluido, La conservación de masa del sólido, La ley de Darcy y La ecuación de estado.

Al desarrollar un modelo de flujo de fluidos se debe garantizar la conservación de la masa del fluido y del sólido. Para lograr este objetivo, se realiza un balance de masa:

### B.1. CONSERVACION DE MASA DEL FLUIDO.

Se hace un balance de masa para el fluido en un periodo infinitesimal de tiempo  $\Delta t$ :

$$\{ \text{Masa que entra} \}_{\Delta t} - \{ \text{Masa que sale} \}_{\Delta t} \pm \{ \text{Fuentes o sumideros} \}_{\Delta t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Acumulacion} \\ \text{o agotamiento} \end{array} \right\}_{\Delta t} \quad \text{(B1)}$$

Recordando que:

$$m_f = V_f \rho_f = A_t \Delta t \phi v_f \rho_f \quad \text{(B2)}$$

Donde:

$V_f$  = volumen del fluido.

$v_f$  = velocidad del fluido.

$\rho$  = densidad

$m$  = masa

$\phi$  = porosidad

Según (B1),

$$a. \{ \text{Masa que entra} \}_{\Delta t} = r\Delta z\Delta\theta\Delta t\phi_{fr}\rho_f + \Delta r\Delta z\Delta t\phi_{f\theta}\rho_f + r\Delta\theta\Delta r\Delta t\phi_{fz}\rho_f \quad (\text{B3})$$

$$b. \{ \text{Masa que sale} \}_{\Delta t} = \frac{[\phi_{fr}\rho_f + \Delta(\phi_{fr}\rho_f)](r + \Delta r)\Delta z\Delta\theta\Delta t + [\phi_{f\theta}\rho_f + \Delta(\phi_{f\theta}\rho_f)]\Delta r\Delta z\Delta t + [\phi_{fz}\rho_f + \Delta(\phi_{fz}\rho_f)]r\Delta\theta\Delta r\Delta t}{\quad} \quad (\text{B4})$$

Recordando además que:

$$\tilde{q}_f = \frac{\text{masa de fluido que entra o sale por fuentes o sumideros}}{(\text{volumen del diferencial})(\text{tiempo})} \quad (\text{B5})$$

Termino que es positivo en el caso de una inyección y negativo para producción.

$$c. \{ \text{Fuentes o sumideros} \}_{\Delta t} = \tilde{q}_f \Delta r\Delta z\Delta\theta\Delta t \quad (\text{B6})$$

$$d. \{ \text{Acumulación o agotamiento} \}_{\Delta t} = \{ \text{Masa de fluido} \}_{t+\Delta t} - \{ \text{Masa de fluido} \}_t \quad (\text{B7})$$

$$\{ \text{Acumulación o agotamiento} \}_{\Delta t} = (v_f \rho_f)_{t+\Delta t} - (v_f \rho_f)_t$$

$$\{ \text{Acumulación o agotamiento} \}_{\Delta t} = (V_T \rho_f \phi)_{t+\Delta t} - (V_T \rho_f \phi)_t$$

Reemplazando en el balance de masa:

$$r\Delta\theta\Delta t\Delta z\phi_{fr}\rho_f + \Delta z\Delta r\Delta t\phi_{f\theta}\rho_f + r\Delta r\Delta\theta\Delta t\phi_{fz}\rho_f + [\phi_{fr}\rho_f + \Delta(\phi_{fr}\rho_f)](r + \Delta r)\Delta\theta\Delta z\Delta t + [\phi_{f\theta}\rho_f + \Delta(\phi_{f\theta}\rho_f)]\Delta z\Delta r\Delta t + [\phi_{fz}\rho_f + \Delta(\phi_{fz}\rho_f)]r\Delta\theta\Delta r\Delta t = (V_T \rho_f \phi)_{t+\Delta t} - (V_T \rho_f \phi)_t + \tilde{q}_f \Delta r\Delta z\Delta\theta\Delta t \quad (\text{B8})$$

Simplificando,

$$\begin{aligned}
 & -\phi_{fr}\rho_f\Delta r\Delta z\Delta t\Delta\theta - \Delta(\phi_{fr}\rho_f)r\Delta\theta\Delta z\Delta t - \Delta(\phi_{fr}\rho_f)\Delta r\Delta z\Delta t\Delta\theta - \Delta(\phi_{f\theta}\rho_f)\Delta r\Delta z\Delta t - \\
 & \Delta(\phi_{fz}\rho_f)r\Delta\theta\Delta r\Delta t = (V_T\rho_f\phi)_{t+\Delta t} - (V_T\rho_f\phi)_t + \tilde{q}_f\Delta r\Delta z\Delta\theta\Delta t
 \end{aligned} \tag{B9}$$

Dividiendo entre  $r\Delta\theta\Delta r\Delta z\Delta t = (V_T\Delta t)$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\phi_{fr}\rho_f}{r} - \frac{\Delta(\phi_{fr}\rho_f)}{\Delta r} - \frac{\Delta(\phi_{fr}\rho_f)}{r} - \frac{\Delta(\phi_{f\theta}\rho_f)}{r\Delta\theta} - \frac{\Delta(\phi_{fz}\rho_f)}{\Delta z} = \frac{1}{V_T} \left( \frac{(V_T\rho_f\phi)_{t+\Delta t} - (V_T\rho_f\phi)_t}{\Delta t} \right) + \tilde{q}_f
 \end{aligned} \tag{B10}$$

Tomando el límite cuando los incrementos infinitesimales tienden a cero, se tiene,

Para el fluido,

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_{fr}\rho_f) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\phi_{f\theta}\rho_f) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi_{fz}\rho_f) = \frac{1}{V_T}\frac{\partial}{\partial t}(V_T\rho_f\phi) + \tilde{q}_f \tag{B11}$$

Para el sólido,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r(1-\phi)v_{sr}\rho_s) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}((1-\phi)v_{s\theta}\rho_s) - \frac{\partial}{\partial z}((1-\phi)v_{sz}\rho_s) = \frac{1}{V_T}\frac{\partial}{\partial t}(V_T\rho_s(1-\phi)) + \tilde{q}_s \\
 & -\nabla \cdot ((1-\phi)v_s\rho_s) = \frac{1}{V_T}\frac{\partial}{\partial t}(V_T\rho_s(1-\phi)) + \tilde{q}_s
 \end{aligned} \tag{B12}$$

## B.2. LEY DE DARCY.

Si se define la velocidad relativa del fluido,  $v_{rf}$

$$v_{rf} = v_f - v_s = \frac{q}{\phi A_T} \quad (\text{B13})$$

Y según la Ley de Darcy,

$$q = -\frac{kA_T}{\mu} \nabla P \quad (\text{B14})$$

Igualando las ecuaciones (B13) y (B14) se tiene:

$$\phi(v_f - v_s) = -\frac{k}{\mu} \nabla P \quad (\text{B15})$$

De donde,

$$\phi v_f = \phi v_s - \frac{k}{\mu} \nabla P \quad (\text{B16})$$

Pudiéndose escribir:

$$\phi v_{fr} = \phi v_{sr} - \frac{k_r}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{B17})$$

$$\phi v_{f\theta} = \phi v_{s\theta} - \frac{k_\theta}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (\text{B18})$$

$$\phi v_{fz} = \phi v_{sz} - \frac{k_z}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (\text{B19})$$

Las ecuaciones (B17), (B18) y (B19) se reemplazan en la ecuación 1:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho_f \left( \phi \mathbf{v}_{sr} - \frac{\mathbf{k}_r}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial r} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \rho_f \left( \phi \mathbf{v}_{s\theta} - \frac{\mathbf{k}_\theta}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho_f \left( \phi \mathbf{v}_{sz} - \frac{\mathbf{k}_z}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right] = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B20})$$

Multiplicando término a término,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho_f \frac{\mathbf{k}_r}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_f \phi \mathbf{v}_{sr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}_\theta}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho_f \phi \mathbf{v}_{s\theta}] + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}_z}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho_f \phi \mathbf{v}_{sz}) = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B21})$$

Reorganizando,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \rho_f \frac{\mathbf{k}_r}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}_\theta}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}_z}{\mu_f} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_f \phi \mathbf{v}_{sr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho_f \phi \mathbf{v}_{s\theta}] + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_f \phi \mathbf{v}_{sz}) + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B22})$$

La ecuación (B22) se puede escribir como:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \nabla \cdot (\rho_f \phi \mathbf{v}_s) + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B23})$$

La expresión (B24) es la ecuación fundamental de flujo en un medio poroso deformable que resulta de reemplazar la ecuación de Darcy en la ecuación de conservación de masa del fluido.

Si expresamos la velocidad del sólido,  $v_s$  como  $u_s$ , y derivando el primer término de lado derecho de la ecuación **(B24)** se tiene:

$$\nabla \cdot (\rho_f \phi \mathbf{u}_s) = \underbrace{\mathbf{u}_s \nabla \cdot (\rho_f \phi)}_{\text{Despreciable}} + \rho_f \phi \nabla \cdot \mathbf{u}_s \quad (\text{B25})$$

Suponiendo que no hay producción de sólidos, es decir, que el yacimiento se deforma pero se mantiene en estado estacionario, la velocidad del sólido es despreciable comparada con la velocidad del fluido. Por tal motivo, el primer término del lado derecho de la ecuación **(B25)** se aproxima a cero.

No obstante, el gradiente de velocidad puede tener un valor considerable. De esta manera, la ecuación **(B25)** se reduce a:

$$\nabla \cdot (\rho_f \phi \mathbf{u}_s) = \rho_f \phi \nabla \cdot \mathbf{u}_s \quad (\text{B26})$$

Reemplazando la ecuación **(B26)** en la ecuación **(B24)** se obtiene:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f \phi \nabla \cdot (\mathbf{u}_s) + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B27})$$

Según la ecuación de continuidad del sólido **(B12)**,

$$-\nabla \cdot ((1-\phi) \mathbf{u}_s \rho_s) = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) + \tilde{q}_s \quad (\text{B28})$$

$$-\underbrace{\mathbf{u}_s \nabla \cdot ((1-\phi) \rho_s)} - (1-\phi) \rho_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) + \tilde{q}_s \quad (\text{B29})$$

Este primer término, análogo a la ecuación **(B25)**, puede despreciarse, entonces:

$$-(1-\phi)\rho_s \nabla \cdot \mathbf{u}_s = \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) + \tilde{q}_s \quad (\text{B30})$$

Despejando  $\nabla \cdot \mathbf{u}_s$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) - \frac{\tilde{q}_s}{(1-\phi)\rho_s} \quad (\text{B31})$$

Al desarrollar la derivada (primer término del lado derecho),

$$-\frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} V_T \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1-\phi)) - \frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} (\rho_s (1-\phi)) \frac{\partial}{\partial t} V_T \quad (\text{B32})$$

Entonces,

$$-\frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) = \underbrace{-\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s (1-\phi))}_{\text{Primer término}} - \underbrace{\frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} V_T}_{\text{Segundo término}} \quad (\text{B33})$$

Si

$$\phi = \frac{(V_T - V_s)}{V_T} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{m_s}{V_s} \quad (\text{B34}) \text{ y } (\text{B35})$$

Reemplazando en el primer término,

$$\rho_s(1-\phi) = \frac{m_s}{V_s} \left[ 1 - \frac{(V_T - V_s)}{V_T} \right] = \frac{m_s}{V_T} \quad (\text{B36})$$

$$-\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_s(1-\phi)) = -\frac{V_T}{m_s} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_s}{V_T} \right) \quad (\text{B37})$$

Entonces la suma del primer término y el segundo término es:

$$-\frac{V_T}{m_s} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_s}{V_T} \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) \quad (\text{B38})$$

Considerando que no hay flujo de sólidos, la masa del sólido es constante,  $m_s = \text{cte}$ .

$$\begin{aligned} -\frac{V_T}{m_s} m_s \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{V_T} \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) &= -V_T \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{V_T} \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) = -V_T \left( 0(V_T) - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial}{\partial t} V_T \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) = \\ -V_T \left( -\frac{1}{V_T^2} \frac{\partial}{\partial t} V_T \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) &= \left( \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} V_T \right) - \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B39})$$

Por consiguiente la suma del primer y el Segundo término es igual a cero.

$$-\frac{1}{(1-\phi)\rho_s V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_s (1-\phi)) = 0 \quad (\text{B40})$$

Reemplazando en la ecuación (B31),

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = -\frac{\tilde{q}_s}{(1-\phi)\rho_s} \quad (\text{B41})$$

Al reemplazar esta expresión en la ecuación (B27) se tiene.

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = -\rho_f \phi \frac{\tilde{q}_s}{(1-\phi)\rho_s} + \frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) + \tilde{q}_f \quad (\text{B42})$$

Al derivar el segundo término del lado derecho y teniendo en cuenta que  $V_T = V_p / \phi$ :

$$\frac{1}{V_T} \frac{\partial}{\partial t} (V_T \rho_f \phi) = \frac{\phi}{V_p} \rho_f \frac{\partial}{\partial t} (V_p) + \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f) \quad (\text{B43})$$

Reemplazando la ecuación (B43) en la ecuación (B42), resulta:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = -\rho_f \phi \frac{\tilde{q}_s}{(1-\phi)\rho_s} + \frac{\phi}{V_p} \rho_f \frac{\partial}{\partial t} (V_p) + \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f) + \tilde{q}_f \quad (\text{B44})$$

Que es el resultado de la ecuación de continuidad y la Ley de Darcy.

### B.3. ECUACIÓN DE ESTADO.

La ecuación general de estado relaciona:

$$c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad (\text{B45})$$

La ecuación de estado para un fluido incompresible es:

$$\frac{dV}{dP} = 0 \quad (\text{B46}) \text{ y } (\text{B47})$$

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

Para un fluido levemente compresible,

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = \text{cte} \quad (\text{B48})$$

Para un fluido compresible,

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = f(P) \quad (\text{B49})$$

El comportamiento de un fluido levemente compresible se describe de la siguiente forma:

$$\rho_f = \rho_f^0 e^{c_f(P_f - P_f^0)} \quad (\text{B50})$$

Donde es superíndice cero indica estado inicial.

La variación de la densidad con el tiempo está relacionada de forma directa con la variación de la presión con el tiempo de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \frac{\partial \rho_f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B51.a})$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = c_f \rho_f \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B51.b})$$

Reemplazando en la ecuación (B44),

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = -\rho_f \phi \frac{\tilde{q}_s}{(1-\phi)\rho_s} + \frac{\phi}{V_p} \rho_f \frac{\partial}{\partial t} (V_p) + \phi c_f \rho_f \frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (\text{B52})$$

La ecuación **(B52)** es la ecuación de flujo de fluidos de un medio poroso deformable.

Dado que en este modelo el flujo de fluidos depende del estado de esfuerzos, es necesario expresar la ecuación **(B52)** en función del mismo. Para lo anterior, se utiliza la ecuación deducida con base en la compresibilidad de medios porosos de Zimmerman et al. (1986):

$$\frac{1}{V_p} \frac{\partial V_p}{\partial t} = \left( \frac{c_{bc} - c_s}{\phi} - c_s \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{\phi} \right) \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \quad (\text{B53})$$

Reemplazando la **(B53)** en la ecuación **(B52)**, y despreciando la producción o inyección de sólidos en el yacimiento:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \phi \rho_f \left[ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{\phi} - c_s \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{\phi} \right) \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \right] + \phi c_f \rho_f \frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (\text{B54})$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f [(c_{bc} - c_s) - c_s \phi] \frac{\partial P}{\partial t} - \rho_f (c_{bc} - c_s) \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} + \phi c_f \rho_f \frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{q}_f \quad (\text{B55})$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f \left\{ [(c_{bc} - c_s) - c_s \phi + \phi c_f] \frac{\partial P}{\partial t} - (c_{bc} - c_s) \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \right\} + \tilde{q}_f \quad (\text{B56})$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f \left\{ [c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f] \frac{\partial P}{\partial t} - (c_{bc} - c_s) \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \right\} + \tilde{q}_f \quad (\text{B57})$$

En la ecuación **(B57)** es posible relacionar el esfuerzo total medio,  $\sigma_m$ , en función de los desplazamientos. Para ello, se considera las ecuaciones esfuerzo-deformación-presión en un medio poroso:

$$\sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_v + \alpha P \quad (\text{B58})$$

$$\sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_v + \alpha P \quad (\text{B59})$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_v + \alpha P \quad (\text{B60})$$

Sumando las ecuaciones **(B58)**, **(B59)** y **(B60)**, y dividiendo la resultante a ambos lados entre tres, se tiene:

$$\sigma_m = \left( \frac{2G}{3} + \lambda \right) \varepsilon_v + \alpha P \quad (\text{B61})$$

Derivando el incremento del esfuerzo total con el tiempo,

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon_v \left( \frac{2G}{3} + \lambda \right) \right] + \frac{\partial (\alpha P)}{\partial t} \quad (\text{B62})$$

La deformación volumétrica  $\varepsilon_v$ , se define como:

$$\varepsilon_v = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{B63})$$

$$\varepsilon_v = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{B64})$$

Reemplazando la ecuación **(B64)** en la ecuación **(B62)** y teniendo en cuenta la siguiente relación:

$$\frac{1}{c_{bc}} = \frac{2G}{3} + \lambda \quad (\text{B65})$$

Se obtiene:

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial t} = \left( \frac{1}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{u}] + \alpha \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{B66})$$

Reemplazando la ecuación (B66) en la ecuación (B57) se obtiene la ecuación diferencial de flujo de fluidos en función de los desplazamientos:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f \left\{ [c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f] \frac{\partial P}{\partial t} - (c_{bc} - c_s) \left( \left( \frac{1}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{u}] + \alpha \frac{\partial P}{\partial t} \right) \right\} + \tilde{q}_f \quad (\text{B67})$$

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \rho_f \left\{ [c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f - (c_{bc} - c_s)\alpha] \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{(c_{bc} - c_s)}{c_{bc}} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{u}] \right\} + \tilde{q}_f \quad (\text{B68})$$

En la ecuación (B68) la densidad está expresada a condiciones de yacimiento. Ésta se puede expresar en función del Factor Volumétrico de Formación, B, a través de la densidad del fluido:

$$B = \frac{\text{Volumen del fluido a condiciones de yacimiento}}{\text{Volumen del fluido a condiciones de superficie}} = \frac{\rho_{\text{cond superficie}}}{\rho_{\text{cond yacimiento}}} \quad (\text{B69})$$

Despejando la densidad del fluido a condiciones de yacimiento se tiene:

$$\rho_{\text{cond yacimiento}} = \frac{\rho_{\text{cond superficie}}}{B} \quad (\text{B70})$$

La ecuación (B68) expresada a condiciones de superficie es entonces:

$$\nabla \cdot \left( \rho_f \frac{\mathbf{k}}{\mu_f} \nabla P \right) = \frac{\rho_f}{B} \left\{ [c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f - (c_{bc} - c_s)\alpha] \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{(c_{bc} - c_s)}{c_{bc}} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot \mathbf{u}] \right\} + \tilde{q}_f \quad (\text{B71})$$

La ecuación **(B71)** es la ecuación de flujo de fluidos en un medio poroso en función de los esfuerzos, que de manera extensa se expresa como:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_f \frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \rho_f \frac{k_\theta}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_f \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{B} \left\{ \begin{array}{l} \left[ c_{bc} - (1 + \phi) c_s + \phi c_f - (c_{bc} - c_s) \alpha \right] \frac{\partial P}{\partial t} - \\ \frac{(c_{bc} - c_s)}{c_{bc}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) - \\ \frac{(c_{bc} - c_s)}{c_{bc}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta) \right) \\ - \frac{(c_{bc} - c_s)}{c_{bc}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_z) \right) \end{array} \right\} + \tilde{q}_f \quad \text{(B72)}$$

## **ANEXO C. MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN**

Las ecuaciones diferenciales presentes en el modelo desarrollado en este trabajo deben ser resueltas numéricamente debido a su alto grado de no linealidad. La solución numérica de estas ecuaciones se obtiene solamente para puntos discretos en el sistema. Para transformar las ecuaciones diferenciales continuas a una forma discreta se utilizará el método de aproximación en diferencias finitas sobre un sistema de malla irregular con nodos distribuidos.

Se utilizarán aproximaciones centrales para las derivadas espaciales de primer y segundo orden (las cuales pueden ser mixtas), ya que así se obtiene un mejor error de truncamiento (de orden dos).

Teniendo en cuenta que para las derivadas temporales la aproximación central tiene problemas de estabilidad, se utilizarán aproximaciones progresivas para su discretización; además, se necesita conocer el comportamiento del yacimiento con el tiempo futuro.

### **C.1 DISCRETIZACIÓN DE LAS DERIVADAS**

En el caso de una malla se tienen nodos  $m$  en dirección  $r$  y nodos  $n$  en dirección  $s$ .

#### **C.1.1 Discretización de una derivada de segundo orden mixta.**

El término más general que aparece en las ecuaciones diferenciales del modelo que se desea aproximar mediante diferencias finitas toma la siguiente forma:

$\frac{\partial}{\partial r} \left[ T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (U \cdot V) \right] \Big|_{m,n}$ , el cual está evaluado en el punto  $(r,s) = (r_m, s_n)$  y en donde T

es un término no lineal. La forma discretizada para este término está dado por:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (U \cdot V) \right] \Big|_{m,n} \cong F_m \cdot F_n \cdot \left\{ \begin{array}{l} T_{m+1/2,n} \cdot \left[ \begin{array}{l} U_{m+1/2,n+1/2} \cdot (V_{m,n} + V_{m,n+1} + V_{m+1,n+1} + V_{m+1,n}) \\ - U_{m+1/2,n-1/2} \cdot (V_{m,n} + V_{m+1,n} + V_{m+1,n-1} + V_{m,n-1}) \end{array} \right] \\ - T_{m-1/2,n} \cdot \left[ \begin{array}{l} U_{m-1/2,n+1/2} \cdot (V_{m,n} + V_{m,n+1} + V_{m-1,n+1} + V_{m-1,n}) \\ - U_{m-1/2,n-1/2} \cdot (V_{m,n} + V_{m,n-1} + V_{m-1,n-1} + V_{m-1,n}) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (C1)$$

Los términos  $F_m$  y  $F_n$ , se definen así:

$$F_m = \frac{1}{(\Delta r_m + \Delta r_{m-1})} \text{ y } F_n = \frac{1}{(\Delta s_n + \Delta s_{n-1})} \quad (C2) \text{ y } (C3)$$

Esta forma de derivada se puede presentar en la discretización según se realice o no la derivada mas interna (derivada de  $U \cdot V$  respecto a  $s$ ).

### C.1.2 Discretización de una derivada de primer orden

El segundo término que se desea aproximar mediante diferencias finitas toma la

siguiente forma:  $\left[ \frac{\partial}{\partial r} (T \cdot V) \right] \Big|_m$  el cual está evaluado en el punto  $r = r_m$ . Donde T es

un término no lineal y la derivada se expande en dirección  $r$ , alrededor del nodo **m**.

La ecuación toma la forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} (T \cdot V) \right]_m \cong F_m \cdot T_{m+1/2} \cdot (V_{m+1} + V_m) - F_m \cdot T_{m-1/2} \cdot (V_m + V_{m-1}) \quad (\text{C4})$$

### C.1.3 Discretización de una derivada de segundo orden

El tercer término que se desea aproximar mediante diferencias finitas toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ T \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right]_m \cong 2 \cdot C_m \cdot T_{m+1/2} \cdot (V_{m+1} - V_m) - 2 \cdot C_{m-1} \cdot T_{m-1/2} \cdot (V_m + V_{m-1}) \quad (\text{C5})$$

En donde se han definido los siguientes términos:

$$C_m = \frac{F_m}{\Delta r_m} = \frac{1}{\Delta r_m \cdot (\Delta r_m + \Delta r_{m-1})} \quad (\text{C6})$$

$$C_{m-1} = \frac{F_m}{\Delta r_{m-1}} = \frac{1}{\Delta r_{m-1} \cdot (\Delta r_m + \Delta r_{m-1})} \quad (\text{C7})$$

### C.1.4 Discretización de una derivada de segundo orden mixta.

El cuarto término que se desea aproximar mediante diferencias finitas toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ T \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right]_{m,n} &\cong F_m \cdot F_n \cdot T_{m+1/2,n} \cdot (V_{m,n+1} + V_{m+1,n+1} - V_{m+1,n-1} - V_{m,n-1}) \\ &\quad - F_m \cdot F_n \cdot T_{m-1/2,n} \cdot (V_{m,n+1} + V_{m-1,n+1} - V_{m,n-1} - V_{m-1,n-1}) \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

### C.1.5 Discretización de una derivada de primer orden

El quinto término que se desea aproximar mediante diferencias finitas toma la siguiente forma:

$$\left[ \frac{\partial V}{\partial r} \right]_m = F_m \cdot (V_{m+1} - V_{m-1}) \quad (\text{C9})$$

## ANEXO D. DISCRETIZACIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN GEOMECÁNICA.

Siguiendo la teoría del Anexo (C), se presenta a continuación el procedimiento detallado de la discretización de la primera ecuación geomecánica de equilibrio.

En los Anexos (E) y (F) se muestra la segunda y la tercera ecuación geomecánica de equilibrio ya discretizadas.

Partiendo de la primera ecuación geomecánica de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} + \frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rG \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (G \Delta u_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2G \Delta u_r}{r^2} - \frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned} \tag{D1}$$

Se llega a:

$$\frac{\partial \sigma_r^0}{\partial r} \approx F_i (\sigma_{r,i+1,j,k}^0 - \sigma_{r,i-1,j,k}^0) \tag{D2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}^0}{\partial \theta} \approx \frac{1}{r_{i,j,k}} F_j (\tau_{\theta r,i,j+1,k}^0 - \tau_{\theta r,i,j-1,k}^0) \tag{D3}$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}^0}{\partial z} \approx F_k (\tau_{zr,i,j,k+1}^0 - \tau_{zr,i,j,k-1}^0) \tag{D4}$$

$$\frac{\sigma_r^0 - \sigma_\theta^0}{r} \approx \frac{\sigma_{r,i,j,k}^0 - \sigma_{\theta,i,j,k}^0}{r_{i,j,k}} \tag{D5}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r G \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \approx \frac{1}{r_{i,j,k}} \left\{ \begin{array}{l} 2C_i r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k} (\Delta U_{r,i+1,j,k} - \Delta U_{r,i,j,k}) \\ - 2C_{i-1} r_{i-1/2,j,k} G_{i-1/2,j,k} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i-1,j,k}) \end{array} \right\} \quad (D6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta U_r}{\partial \theta} \right) \approx \frac{1}{r_{i,j,k}} \left\{ \begin{array}{l} 2C_j G_{i,j+1/2,k} \frac{1}{r_{i,j,k}} (\Delta U_{r,i,j+1,k} - \Delta U_{r,i,j,k}) \\ - 2C_{j-1} G_{i,j-1/2,k} \frac{1}{r_{i,j,k}} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i,j-1,k}) \end{array} \right\} \quad (D7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta U_r}{\partial z} \right) \approx 2C_k G_{i,j,k+1/2} (\Delta U_{r,i,j,k+1} - \Delta U_{r,i,j,k}) - 2C_{k-1} G_{i,j,k-1/2} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i,j,k-1}) \quad (D8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r G \frac{\partial \Delta U_r}{\partial r} \right) \approx \frac{1}{r_{i,j,k}} \left\{ \begin{array}{l} 2C_i r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k} (\Delta U_{r,i+1,j,k} - \Delta U_{r,i,j,k}) \\ - 2C_{i-1} r_{i-1/2,j,k} G_{i-1/2,j,k} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i-1,j,k}) \end{array} \right\} \quad (D9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial r} \right) \approx \frac{1}{r_{i,j,k}} \left\{ \begin{array}{l} F_j F_i G_{i,j+1/2,k} (\Delta U_{\theta,i+1,j,k} + \Delta U_{\theta,i+1,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i-1,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i-1,j,k}) \\ - F_j F_i G_{i,j-1/2,k} (\Delta U_{\theta,i+1,j,k} + \Delta U_{\theta,i+1,j-1,k} - \Delta U_{\theta,i-1,j,k} - \Delta U_{\theta,i-1,j-1,k}) \end{array} \right\} \quad (D10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta U_z}{\partial r} \right) \approx \left\{ \begin{array}{l} F_k F_i G_{i,j,k+1/2} (\Delta U_{z,i+1,j,k} + \Delta U_{z,i+1,j,k+1} - \Delta U_{z,i-1,j,k+1} - \Delta U_{z,i-1,j,k}) \\ - F_k F_i G_{i,j,k-1/2} (\Delta U_{z,i+1,j,k} + \Delta U_{z,i+1,j,k-1} - \Delta U_{z,i-1,j,k} - \Delta U_{z,i-1,j,k-1}) \end{array} \right\} \quad (D11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta U_r)}{\partial r} \right) &\approx 2C_i \lambda_{i+1/2,j,k} (\Delta U_{r,i+1,j,k} - \Delta U_{r,i,j,k}) + \frac{F_i \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} (\Delta U_{r,i+1,j,k} - \Delta U_{r,i,j,k}) \\ &- 2C_{i-1} \lambda_{i-1/2,j,k} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i-1,j,k}) + \frac{F_i \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} (\Delta U_{r,i,j,k} - \Delta U_{r,i-1,j,k}) \end{aligned} \quad (D12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (\Delta U_\theta)}{\partial \theta} \right) &\approx F F_j \lambda_{i+1/2,j,k} \frac{1}{r_{i+1/2,j,k}} (\Delta U_{\theta,i,j+1,k} + \Delta U_{\theta,i+1,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i+1,j-1,k} - \Delta U_{\theta,i,j-1,k}) \\ &- F F_j \lambda_{i-1/2,j,k} \frac{1}{r_{i-1/2,j,k}} (\Delta U_{\theta,i,j+1,k} + \Delta U_{\theta,i-1,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i,j-1,k} - \Delta U_{\theta,i-1,j-1,k}) \end{aligned} \quad (D13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\lambda \partial (\Delta U_z)}{\partial z} \right) &\approx F_i F_k \lambda_{i+1/2,j,k} (\Delta U_{z,i,j,k+1} + \Delta U_{z,i+1,j,k+1} - \Delta U_{z,i+1,j,k-1} - \Delta U_{z,i,j,k-1}) \\ &- F_i F_k \lambda_{i-1/2,j,k} (\Delta U_{z,i,j,k+1} + \Delta U_{z,i-1,j,k+1} - \Delta U_{z,i,j,k-1} - \Delta U_{z,i-1,j,k-1}) \end{aligned} \quad (D14)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\alpha \Delta P) \approx F_i \alpha_{i+1/2,j,k} (\Delta P_{i+1,j,k} + \Delta P_{i,j,k}) - F_i \alpha_{i-1/2,j,k} (\Delta P_{i,j,k} + \Delta P_{i-1,j,k}) \quad (D15)$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G \partial (\Delta U_\theta)}{\partial \theta} \right) \approx -\frac{1}{r_{i,j,k}^2} \left\{ F_j G_{i,j+1/2,k} (\Delta U_{\theta,i,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i,j,k}) - F_j G_{i,j-1/2,k} (\Delta U_{\theta,i,j,k} - \Delta U_{\theta,i,j-1,k}) \right\} \quad (D16)$$

$$-\frac{2G \Delta G_r}{r^2} \approx -\frac{2G_{i,j,k} \Delta U_{r,i,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \quad (D17)$$

$$-\frac{2G}{r^2} \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \approx -\frac{2G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}^2} F_j (\Delta U_{\theta,i,j+1,k} - \Delta U_{\theta,i,j-1,k}) \quad (D18)$$

En forma de Stencil:

- $\Delta U_{r,i,j,k-1}^{n+1}$

$$2C_{k-1} G_{i,j,k-1/2} (\Delta U_{r,i,j,k-1}) = \mathbf{B} C_{r,i,j,k} \quad (D19)$$

- $\Delta U_{r,i,j-1,k}^{n+1}$

$$\frac{2C_{j-1} G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} (\Delta U_{r,i,j-1,k}) = \mathbf{S} r_{i,j,k} \quad (D20)$$

- $\Delta U_{r,i-1,j,k}^{n+1}$

$$\frac{4C_{i-1} r_{i-1/2,j,k} G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + 2C_{i-1} \lambda_{i-1/2,j,k} - \frac{F_i \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} = \mathbf{W} r_{i,j,k} \quad (D21)$$

- $\Delta U_{r,i,j,k}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_{i,j,k}} 2C_r r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k} - \frac{1}{r_{i,j,k}} 2C_{i-1} r_{i-1/2,j,k} G_{i-1/2,j,k} - \frac{1}{r_{i,j,k}} 2C_j G_{i,j+1/2,k} \frac{1}{r_{i,j,k}} - \frac{1}{r_{i,j,k}} 2C_{j-1} G_{i,j-1/2,k} \frac{1}{r_{i,j,k}} \\
& - 2C_k G_{i,j,k+1/2} - 2C_{k-1} G_{i,j,k-1/2} - \frac{1}{r_{i,j,k}} 2C_r r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k} - \frac{2C_{i-1}}{r_{i,j,k}} r_{i,j,k} G_{i-1/2,j,k} - 2C_i \lambda_{i+1/2i,j,k} - 2C_{i-1} \lambda_{i+1/2i,j,k} \\
& + \frac{F_i \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} - \frac{F_i \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} - \frac{2G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}^2} = \\
& \frac{4C_r r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{4C_{i-1} r_{i-1/2,j,k} G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{2C_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2C_{j-1} G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - 2C_k G_{i,j,k+1/2} - 2C_{k-1} G_{i,j,k-1/2} \\
& - 2C_i \lambda_{i+1/2,j,k-1/2} - 2C_{i-1} \lambda_{i-1/2,j,k} + \frac{F_i \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} - \frac{F_i \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} - \frac{2G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}^2} = \mathbf{C}_{r,i,j,k}
\end{aligned} \tag{D22}$$

- $\Delta U_{r,i+1,j,k}^{n+1}$

$$\frac{2C_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} = \mathbf{N}_{r,i,j,k} \tag{D23}$$

- $\Delta U_{r,i,j,k+1}^{n+1}$

$$2C_k G_{i,j,k+1/2} = \mathbf{TC}_{r,i,j,k} \tag{D24}$$

- $\Delta U_{r,i+1,j,k}^{n+1}$

$$\frac{4C_r r_{i+1/2,j,k} G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} + 2C_i \lambda_{i+1/2,j,k} = \mathbf{Er}_{i,j,k} \tag{D25}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{r,i,j,k} = & - \left( \frac{F_j F_i G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j F_i G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i+1,j,k}^{n+1} + \left( \frac{F_j F_i G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j F_i G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i-1,j,k}^{n+1} \\
& - \left( \frac{FF_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{FF_j \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i+1,j+1,k}^{n+1} - \left( \frac{FF_j \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} + \frac{FF_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i-1,j+1,k}^{n+1} \\
& - \left( -\frac{FF_j G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{FF_j \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i-1,j-1,k}^{n+1} + \left( \frac{FF_j G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{FF_j \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} \right) \Delta U_{\theta,i+1,j-1,k}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{FF_j \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} + \frac{FF_j \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} + \frac{F_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2G_{i,j,k} F_j}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta U_{\theta,i,j+1,k}^{n+1} \\
& + \left( \frac{FF_j \lambda_{i+1/2,j,k}}{r_{i+1/2,j,k}} - \frac{FF_j \lambda_{i-1/2,j,k}}{r_{i-1/2,j,k}} - \frac{2G_{i,j,k} F_j}{r_{i,j,k}^2} - \frac{F_j G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta U_{\theta,i,j-1,k}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{F_j G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{F_j G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta U_{\theta,i,j,k}^{n+1} - (FF_k G_{i,j,k+1/2} - FF_k G_{i,j,k-1/2}) \Delta U_{z,i+1,j,k}^{n+1} \\
& + (FF_k G_{i,j,k+1/2} - FF_k G_{i,j,k-1/2}) \Delta U_{z,i-1,j,k}^{n+1} - (FF_k G_{i,j,k-1/2} + FF_k \lambda_{i-1/2,j,k}) \Delta U_{z,i-1,j,k-1}^{n+1} \\
& + (FF_k \lambda_{i+1/2,j,k} - FF_k \lambda_{i-1/2,j,k}) \Delta U_{z,i,j,k-1}^{n+1} - (FF_k G_{i,j,k+1/2} + FF_k \lambda_{i+1/2,j,k}) \Delta U_{z,i+1,j,k+1}^{n+1} \\
& + (FF_k G_{i,j,k+1/2} + FF_k \lambda_{i-1/2,j,k}) \Delta U_{z,i-1,j,k+1}^{n+1} + (FF_k G_{i,j,k-1/2} + FF_k \lambda_{i+1/2,j,k}) \Delta U_{z,i+1,j,k-1}^{n+1} \\
& - (FF_k \lambda_{i+1/2,j,k} - FF_k \lambda_{i-1/2,j,k}) \Delta U_{z,i,j,k+1}^{n+1} + F_i \alpha_{i-1/2,j,k} \cdot \Delta P_{i-1,j,k} \\
& - \left( F_i \alpha_{i+1/2,j,k} - F_i \alpha_{i-1/2,j,k} \cdot \Delta P_{i,j,k} - F_i \alpha_{i+1/2,j,k} \cdot \Delta P_{i+1,j,k} - F_i (\delta_{r,i+1,j,k}^\circ - \delta_{r,i-1,j,k}^\circ) \right) \\
& - \left( -\frac{F_i}{r_{i,j,k}} (\tau_{r\theta,i,j+1,k}^\circ - \tau_{r\theta,i,j-1,k}^\circ) - F_k (\tau_{rz,i,j,k+1}^\circ - \tau_{rz,i,j,k-1}^\circ) - \left( \frac{\delta_{r,i,j,k}^\circ - \delta_{\theta,i,j,k}^\circ}{r_{i,j,k}} \right) \right)
\end{aligned} \tag{D26}$$

Lo que se expresa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{BC}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i,j,k-1}^{n+1} + \mathbf{S}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i,j-1,k}^{n+1} + \mathbf{W}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i-1,j,k}^{n+1} + \mathbf{C}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i,j,k}^{n+1} + \mathbf{E}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i+1,j,k}^{n+1} \\
+ \mathbf{N}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i,j+1,k}^{n+1} + \mathbf{TC}_{r,i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{r,i,j,k+1}^{n+1} = \mathbf{F}_{r,i,j,k}
\end{aligned} \tag{D27}$$

**ANEXO E. DISCRETIZACION DE LA SEGUNDA ECUACION GEOMECANICA  
DE EQUILIBRIO PARA UN MEDIO POROSO EN FUNCION DE LOS  
DESPLAZAMIENTOS.**

La segunda ecuación geomecánica de equilibrio es:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}^0}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}^0}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}^0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial (r \Delta u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r G \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{\partial \theta} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) - \frac{G}{r^2} \Delta u_{\theta} + \frac{G}{r} \frac{\partial \Delta u_{\theta}}{r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial (G \Delta \Delta_r)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial (G \Delta \Delta_{\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned}
 \tag{E1}$$

La discretización de la ecuación (E1) se realiza aplicando la teoría del Anexo (C)

**E.1. SEGUNDA ECUACIÓN GEOMECÁNICA EN FORMA DE STENCIL.**

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{BC}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i,j,k-1}^{n+1} + \mathbf{S}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i,j-1,k}^{n+1} + \mathbf{W}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i-1,j,k}^{n+1} + \mathbf{C}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i,j,k}^{n+1} + \mathbf{E}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i+1,j,k}^{n+1} \\
 & + \mathbf{N}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i,j+1,k}^{n+1} + \mathbf{TC}_{\theta i,j,k} \Delta \mathbf{u}_{\theta i,j,k+1}^{n+1} = \mathbf{F}_{\theta i,j,k}
 \end{aligned}
 \tag{E2}$$

Cada uno de los términos anteriores que acompañan a los incrementos de los desplazamientos se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{BC}_{\theta i,j,k} = 2 \cdot C_{k-1} \cdot G_{i,j,k-1/2}
 \tag{E3}$$

$$\mathbf{S}_{\theta i,j,k} = \frac{2 \cdot C_{j-1} \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{4 \cdot C_{j-1} \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2}
 \tag{E4}$$

$$\mathbf{W}_{\theta_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_{i-1} \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_i \cdot G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \quad (\text{E5})$$

$$\mathbf{N}_{\theta_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_j \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{4 \cdot C_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \quad (\text{E6})$$

$$\mathbf{TC}_{\theta_{i,j,k}} = 2 \cdot C_k \cdot G_{i,j,k+1/2} \quad (\text{E7})$$

$$\mathbf{C}_{\theta_{i,j,k}} = -\frac{2 \cdot C_j \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2 \cdot C_{j-1} \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2 \cdot C_i \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{2 \cdot C_{i-1} \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \\ - \frac{F_i \cdot G_{i+1/2,j,k} \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \quad (\text{E8})$$

$$\mathbf{E}_{\theta_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_i \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot G_{i,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_i \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \quad (\text{E9})$$

$$\mathbf{F}_{\theta_{i,j,k}} = \left( \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i+1,j+1,k}}^{n+1} + \left( -\frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{r_{i+1,j,k}}^{n+1} \\ + \left( \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i-1,j+1,k}}^{n+1} + \left( \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{r_{i-1,j,k}}^{n+1} \\ + \left( \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i+1,j-1,k}}^{n+1} - \left( \frac{F_j \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i-1,j-1,k}}^{n+1} \\ + \left( -\frac{F_j \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2 \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i,j+1,k}}^{n+1} \\ + \left( -\frac{F_j \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{F_i \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{2 \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{2 \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i,j,k}}^{n+1} \\ + \left( \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} - \frac{F_i \cdot F_j \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{2 \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} + \frac{F_j \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \right) \Delta u_{r_{i,j-1,k}}^{n+1} \\ - \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z_{i+1,j+1,k+1}}^{n+1} + \left( -\frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z_{i,j,k+1}}^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j+1,k-1}^{n+1} + \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j,k-1}^{n+1} \\
& - \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j-1,k-1}^{n+1} + \left( -\frac{F_j \cdot F_k \cdot G_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j+1,k}^{n+1} \\
& + \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot G_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j-1,k+1}^{n+1} + \left( \frac{F_j \cdot F_k \cdot G_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta u_{z \ i,j-1,k}^{n+1} \\
& + \frac{F_j \cdot \alpha_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \cdot \Delta P_{i,j-1,k} - \left( \frac{F_j \cdot \alpha_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_j \cdot \alpha_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \cdot \Delta P_{i,j,k} - + \frac{F_j \cdot \alpha_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} \cdot \Delta P_{i,j+1,k} \\
& - \frac{F_j}{r_{i,j,k}} (\sigma_{\theta \ i,j+1,k}^0 - \sigma_{\theta \ i,j-1,k}^0) - F_i (\tau_{r\theta \ i+1,j,k}^0 - \tau_{r\theta \ i-1,j,k}^0) - F_k (\tau_{z \ \theta \ i,j,k+1}^0 - \tau_{z \ \theta \ i,j,k-1}^0) - \frac{2\tau_{r\theta \ i,j,k}^0}{r_{i,j,k}}
\end{aligned}$$

(E10)

**ANEXO F. DISCRETIZACION DE LA TERCERA ECUACION GEOMECANICA  
DE EQUILIBRIO PARA UN MEDIO POROSO EN FUNCION DE LOS  
DESPLAZAMIENTOS.**

La tercera ecuación geomecánica de equilibrio se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \sigma_z^0}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}^0}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{G}{r} \cdot \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) \\
 & + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot G \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G \frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( G \frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \Delta U_r)}{\partial r} \right) \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial \Delta U_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (\alpha \Delta P)}{\partial \theta} = 0
 \end{aligned} \tag{F1}$$

La discretización de la anterior ecuación se realiza aplicando la teoría del Anexo (C).

**F.1. TERCERA ECUACIÓN GEOMECÁNICA EN FORMA DE STENCIL.**

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{BC}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k-1}}^{n+1} + \mathbf{S}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j-1,k}}^{n+1} + \mathbf{W}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i-1,j,k}}^{n+1} + \mathbf{C}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k}}^{n+1} + \mathbf{E}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i+1,j,k}}^{n+1} \\
 & + \mathbf{N}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j+1,k}}^{n+1} + \mathbf{TC}_{z_{i,j,k}} \Delta \mathbf{u}_{z_{i,j,k+1}}^{n+1} = \mathbf{F}_{z_{i,j,k}}
 \end{aligned} \tag{F2}$$

Cada uno de los términos anteriores que acompañan a los incrementos de los desplazamientos se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{BC}_{z_{i,j,k}} = 4 \cdot C_{k-1} \cdot G_{i,j,k-1/2} + 2 \cdot C_{k-1} \cdot \lambda_{i,j,k-1/2} \tag{F3}$$

$$\mathbf{S}_{z_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_{j-1} \cdot \lambda_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \tag{F4}$$

$$\mathbf{W}_{z_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_{i-1} \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \quad (\text{F5})$$

$$\mathbf{N}_{z_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_j \cdot \lambda_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}^2} \quad (\text{F6})$$

$$\mathbf{TC}_{z_{i,j,k}} = 4 \cdot C_k \cdot G_{i,j,k+1/2} + 2 \cdot C_k \cdot \lambda_{i,j,k+1/2} \quad (\text{F7})$$

$$\mathbf{C}_{z_{i,j,k}} = -\mathbf{N}_{z_{i,i,k}} - \mathbf{S}_{z_{i,i,k}} - \mathbf{TC}_{z_{i,i,k}} - \mathbf{BC}_{z_{i,i,k}} - \frac{2 \cdot C_i \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{2 \cdot C_{i-1} \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \quad (\text{F8})$$

$$\mathbf{E}_{z_{i,j,k}} = \frac{2 \cdot C_i \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} \quad (\text{F9})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{z_{i,j,k}} = & - \left( \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k+1/2} \right) \Delta U_{r_{i+1,j,k+1}}^{n+1} + \\ & \left( -F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k+1/2} + F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k-1/2} \right) \Delta U_{r_{i+1,j,k}}^{n+1} \\ & + \left( -F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k+1/2} - F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k-1/2} \right) \Delta U_{r_{i-1,j,k}}^{n+1} \\ & + \left( -\frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot \lambda_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{r_{i,j,k+1}}^{n+1} \\ & + \left( \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k-1/2} \right) \Delta U_{r_{i+1,j,k-1}}^{n+1} \\ & + \left( \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i+1/2,j,k} \cdot G_{i+1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot \lambda_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{r_{i,j,k-1}}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k+1/2} \right) \Delta U_{r_{i-1,j,k+1}}^{n+1} \\
& + \left( \frac{F_i \cdot F_k \cdot r_{i-1/2,j,k} \cdot G_{i-1/2,j,k}}{r_{i,j,k}} + F_k \cdot F_i \cdot \lambda_{i,j,k-1/2} \right) \Delta U_{r_{i-1,j,k-1}}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{F_k \cdot \lambda_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot \lambda_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{r_{i,j,k}}^{n+1} + \left( -\frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j+1,k+1}}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j,k+1}}^{n+1} + \left( \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j+1,k-1}}^{n+1} \\
& + \left( \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j+1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j,k-1}}^{n+1} + \left( \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j-1,k+1}}^{n+1} \\
& + \left( -\frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j-1/2,k}}{r_{i,j,k}} - \frac{F_k \cdot F_j \cdot G_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j-1,k-1}}^{n+1} + \left( -\frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j+1,k}}^{n+1} \\
& + \left( \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k+1/2}}{r_{i,j,k}} + \frac{F_k \cdot F_j \cdot \lambda_{i,j,k-1/2}}{r_{i,j,k}} \right) \Delta U_{\theta_{i,j-1,k}}^{n+1} \\
& + F_k \cdot \alpha_{i,j,k-1/2} \cdot \Delta P_{i,j,k-1} - \left( F_k \cdot \alpha_{i,j,k+1/2} - F_k \cdot \alpha_{i,j,k-1/2} \right) \cdot \Delta P_{i,j,k} - F_k \cdot \alpha_{i,j,k+1/2} \cdot \Delta P_{i,j,k+1} \\
& - F_k \left( \sigma_{Z_{i,j,k+1}}^0 - \sigma_{Z_{i,j,k-1}}^0 \right) - F_i \left( \tau_{rz_{i+1,j,k}}^0 - \tau_{rz_{i-1,j,k}}^0 \right) - \frac{F_j}{r_{i,j,k}} \left( \tau_{\theta z_{i,j+1,k}}^0 - \tau_{\theta z_{i,j-1,k}}^0 \right) - \frac{\tau_{rz_{i,j,k}}^0}{r_{i,j,k}}
\end{aligned} \tag{F10}$$

## ANEXO G. DISCRETIZACION DEL MODELO DE FLUJO DE FLUIDOS

El modelo de flujo de fluidos a discretizar es:

$$\frac{1}{B} \left[ (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}}{\partial t} \right] = 0 \quad (\text{G1})$$

O de manera extensa:

$$\frac{1}{B} \left[ (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_z)}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (\text{G2})$$

Que es lo mismo que:

$$\left[ (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_\theta)}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (u_z)}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (\text{G3})$$

Para la derivada de la presión se tiene que:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i,j,k} = \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (\text{G4})$$

Por lo que la discretización del primer termino de la ecuación **(G3)** es:

$$(c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{\partial P}{\partial t} = (c_{bc} - (1+\phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (\text{G5})$$

Para la discretización del término  $\left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}}{\partial t}$  y dado que el término

$\left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right)$  se evaluara en el tiempo (n+1) se tiene que:

$$\left[ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}}{\partial t} \right]_n^{n+1} = \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right)_{n+1} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{r_{i+1/2,j,k} u_{r\ i+1/2,j,k} - r_{i-1/2,j,k} u_{r\ i-1/2,j,k}}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})/2} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{u_{\theta\ i,j+1/2,k} - u_{\theta\ i,j-1/2,k}}{(\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})/2} \right] + \left[ \frac{u_{z\ i,j,k+1/2} - u_{z\ i,j,k-1/2}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})/2} \right] \right]_n \end{aligned} \right\}^{n+1} \quad (\text{G6})$$

Recordando que:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial m} = \frac{\Psi_{m+1} - \Psi_{m-1}}{\Delta m_n + \Delta m_{n-1}}; n=i,j,k \quad (\text{G7})$$

La ecuación (G6) puede escribirse como:

$$\left[ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}}{\partial t} \right]_n^{n+1} = \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right)_{n+1} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{r_{i+1/2,j,k} (u_{r\ i+1/2,j,k}^{n+1} + u_{r\ i,j,k}^{n+1}) - r_{i-1/2,j,k} (u_{r\ i,j,k}^{n+1} + u_{r\ i-1/2,j,k}^{n+1})}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{u_{\theta\ i,j+1/2,k}^{n+1} - u_{\theta\ i,j-1/2,k}^{n+1}}{(\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})} \right] + \left[ \frac{u_{z\ i,j,k+1}^{n+1} - u_{z\ i,j,k-1}^{n+1}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \right] \right] \\ & \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right)_{n+1} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{r_{i+1/2,j,k} (u_{r\ i+1/2,j,k}^n + u_{r\ i,j,k}^n) - r_{i-1/2,j,k} (u_{r\ i,j,k}^n + u_{r\ i-1/2,j,k}^n)}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{u_{\theta\ i,j+1/2,k}^n - u_{\theta\ i,j-1/2,k}^n}{(\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})} \right] + \left[ \frac{u_{z\ i,j,k+1}^n - u_{z\ i,j,k-1}^n}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \right] \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{G8})$$

Teniendo en cuenta que:

$$\Delta U_m = U_m^{n+1} - U_m^n \quad (\text{G9})$$

Con  $m=r,\theta,z$  para cualquier punto  $(i,j,k)$  del modelo físico, la ecuación (G8) puede escribirse en forma incremental de la siguiente manera:

$$\left[ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{\partial \vec{V} \cdot \mathbf{u}}{\partial t} \right]_n^{n+1} = \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i+1,j,k} + \Delta u_{r\ i,j,k}) - r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i,j,k} + \Delta u_{r\ i-1,j,k})}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \right] + \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{\Delta u_{\theta\ i,j+1,k} - \Delta u_{\theta\ i,j-1,k}}{(\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})} \right] + \left[ \frac{\Delta u_{z\ i,j,k+1} - \Delta u_{z\ i,j,k-1}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \right] \right\} \quad (\text{G10})$$

Entonces la ecuación que representa el modelo de flujo de fluidos de manera discreta es:

$$(c_{bc} - (1 + \phi) c_s + \phi c_f - \alpha (c_{bc} - c_s)) \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \left\{ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i+1,j,k} + \Delta u_{r\ i,j,k}) - r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i,j,k} + \Delta u_{r\ i-1,j,k})}{(\Delta r_i + \Delta r_{i-1})} \right] + \frac{1}{r_{i,j,k}} \left[ \frac{\Delta u_{\theta\ i,j+1,k} - \Delta u_{\theta\ i,j-1,k}}{(\Delta \theta_j + \Delta \theta_{j-1})} \right] + \left[ \frac{\Delta u_{z\ i,j,k+1} - \Delta u_{z\ i,j,k-1}}{(\Delta z_k + \Delta z_{k-1})} \right] \right] \right\} = 0 \quad (\text{G11})$$

Recordando que:

$$F_m = \frac{1}{\Delta r_m + \Delta r_{m-1}} \quad (\text{G12})$$

Se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 & (c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{P_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \\
 & \left\{ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{F_i}{r_{i,j,k}} \left[ r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i+1,j,k} + \Delta u_{r\ i,j,k}) - r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i,j,k} + \Delta u_{r\ i-1,j,k}) \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{F_j}{r_{i,j,k}} [\Delta u_{\theta\ i,j+1,k} - \Delta u_{\theta\ i,j-1,k}] + F_k [\Delta u_{z\ i,j,k+1} - \Delta u_{z\ i,j,k-1}] \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{G13}$$

En forma de Stencil:

$$\mathbf{C}_{p\ i,j,k} = \frac{(c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s))}{\Delta t} \tag{G14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{p\ i,j,k} = & (c_{bc} - (1 + \phi)c_s + \phi c_f - \alpha(c_{bc} - c_s)) \frac{P_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \\
 & \left\{ \left( \frac{c_{bc} - c_s}{c_{bc}} \right) \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{F_i}{r_{i,j,k}} \left[ r_{i-1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i-1,j,k}^{n+1} - \Delta u_{r\ i-1,j,k}^n) - r_{i+1/2,j,k} (\Delta u_{r\ i+1,j,k}^{n+1} - \Delta u_{r\ i+1,j,k}^n) \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. + (r_{i-1/2,j,k} - r_{i+1/2,j,k}) (\Delta u_{r\ i,j,k}^{n+1} + \Delta u_{r\ i,j,k}^n) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{F_j}{r_{i,j,k}} [(\Delta u_{\theta\ i,j-1,k}^{n+1} - \Delta u_{\theta\ i,j-1,k}^n) - (\Delta u_{\theta\ i,j+1,k}^{n+1} - \Delta u_{\theta\ i,j+1,k}^n)] \right. \\
 & \left. + F_k [(\Delta u_{z\ i,j,k-1}^{n+1} - \Delta u_{z\ i,j,k-1}^n) - (\Delta u_{z\ i,j,k+1}^{n+1} - \Delta u_{z\ i,j,k+1}^n)] \right\}
 \end{aligned} \tag{G13}$$

Resultando:

$$\mathbf{C}_{p\ i,j,k} P_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{F}_{p\ i,j,k} \tag{G15}$$

## ANEXO H. ECUACION DE CAMBIO DE VOLUMEN POROSO Y ECUACION DE POROSIDAD.

Para resolver la ecuación de flujo de fluidos acoplada con el modelo geomecánico, esta suele expresarse en función de los desplazamientos. Para lograr esto, se deduce la ecuación de porosidad y del cambio de volumen poroso unitario.

### H.1. CAMBIO DEL VOLUMEN POROSO.

Se hace uso de las ecuaciones y expresiones que propone Zimmerman (1986) en su teoría de compresibilidad para medios porosos, donde el volumen poroso depende del esfuerzo total promedio y de la presión de poro, matemáticamente:

$$V_p = f(\bar{\sigma}, P) \quad (\text{H1})$$

Donde  $V_p$  es el volumen poroso,  $\bar{\sigma}$  es el esfuerzo total promedio y  $P$  es la presión de poro.

Tomando la derivada del volumen poroso con respecto al tiempo en la ecuación (H1) y dividiendo por  $V_p$  se obtiene:

$$\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial p} \right)_{\bar{\sigma}} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \frac{d\bar{\sigma}}{dt} \quad (\text{H2})$$

Para un medio poroso, se definen las siguientes cuatro compresibilidades (Zimmerman, 1986):

$$c_{bc} = -\frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \quad (\text{H3})$$

$$c_{pc} = -\frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial \bar{\sigma}} \right)_p \quad (\text{H4})$$

$$c_{bp} = \frac{1}{V_b} \left( \frac{\partial V_b}{\partial P} \right)_{\bar{\sigma}} \quad (\text{H5})$$

$$c_{pp} = \frac{1}{V_p} \left( \frac{\partial V_p}{\partial P} \right)_{\bar{\sigma}} \quad (\text{H6})$$

En las ecuaciones **(H3)** a **(H6)**,  $V_b$  es el volumen total. En las definiciones de compresibilidades, el primer subíndice se refiere al volumen variante ( $p$ , poroso y  $b$ , total) y el segundo subíndice indica si varía la presión de poro,  $P$ , o el esfuerzo total promedio,  $\bar{\sigma}$ .

En este estudio, los esfuerzos de compresión se consideran positivos. La deformación volumétrica porosa se define de la siguiente forma:

$$d\varepsilon_p = -\frac{dV_p}{V_p} \quad (\text{H7})$$

Llevando las ecuaciones **(H3)**, **(H7)** y **(H4)** a la ecuación **(H2)**, se obtiene:

$$-\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = c_{pc} \frac{d\bar{\sigma}}{dt} - c_{pp} \frac{dP}{dt} \quad (\text{H8})$$

Zimmerman et al (1986) desarrollaron las siguientes relaciones entre las diferentes compresibilidades de la roca:

$$C_{bc} = C_{bp} + C_r \quad (\text{H9})$$

$$C_{pc} = C_{pp} + C_r \quad (\text{H10})$$

$$C_{bp} = \phi C_{pc} \quad (\text{H11})$$

De acuerdo con las ecuaciones **(H6)** y **(H11)**, la ecuación **(H8)** puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = c_{pc} \frac{d\bar{\sigma}}{dt} - (c_{pc} - c_r) \frac{dP}{dt} \quad (\text{H12})$$

Las compresibilidades  $c_r$  y  $c_{bc}$  se pueden obtener fácilmente a partir de datos de laboratorio, razón por la cual la ecuación **(H12)** se expresa en términos de estas propiedades.

Debido a que el modelo geomecánico se plantea en función de los desplazamientos, se emplea la Ley de Hooke para escribir la ecuación **(H12)** en términos de esta variable. La ley de Hooke se expresa de la siguiente forma:

$$\bar{\sigma} = \frac{\varepsilon_v}{C_{bc}} \quad (\text{H13})$$

Llevando la ecuación **(H13)** a la ecuación **(H12)**, se obtiene:

$$-\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = c_{pc} \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_v}{C_{bc}} \right) - (c_{pc} - c_r) \frac{dP}{dt} \quad (\text{H14})$$

Finalmente, al reemplazar las ecuaciones **(H9)** y **(H11)** en la ecuación **(H12)**, y agrupando términos semejantes, se obtiene:

$$-\frac{1}{V_p} \frac{dV_p}{dt} = \frac{1}{\phi} \left[ (c_{bc} - c_r(1 + \phi)) \frac{dP}{dt} - (c_{bc} - c_r) \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon_v}{c_{bc}} \right) \right] \quad \text{(H15)}$$

La ecuación **(H15)** es la expresión que permite acoplar el modelo geomecánico al modelo de flujo de fluidos; de esta forma, será explícitamente dependiente de la presión de poro y de la deformación volumétrica del medio poroso.

## H.2. ECUACION DE POROSIDAD.

La porosidad esta en función de la presión de poro y de los esfuerzos totales, por tal razón es necesario encontrar una expresión que relaciones estas variables (Zimmerman, 1986).

Por definición, la porosidad esta dada por:

$$\phi = \frac{V_p}{V_b} \quad \text{(H16)}$$

Derivando a ambos lados de la ecuación **(H16)** y reagrupando términos:

$$d\phi = \frac{dV_p}{V_b} - V_p \frac{dV_b}{V_b^2} \quad \text{(H17)}$$

La ecuación **(H17)** se puede escribir como:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{1}{V_p} dV_p - \frac{1}{V_b} dV_b \quad (\text{H18})$$

Aplicando la Ley de Hooke tanto para el volumen poroso como para el volumen total:

$$\frac{dV_p}{V_p} = -c_{pc} (d\sigma - \alpha_p dP) \quad (\text{H19})$$

$$\frac{dV_b}{V_b} = -c_{bc} (d\sigma - \alpha_b dP) \quad (\text{H20})$$

Reemplazando las ecuaciones (H19) y (H20) en la ecuación (H18), teniendo en cuenta las ecuaciones (H12) - (H12) y de acuerdo con la teoría de Zimmerman et al.(1986),  $\alpha_p = \alpha_b = 1$ , se obtiene:

$$d\phi = -(c_{bc}(1 + \phi) - c_r)(d\sigma - dP) \quad (\text{H21})$$

La ecuación (H21) define la variación de porosidad con el esfuerzo efectivo.

### H.3. DISCRETIZACION DE LA ECUACION DE POROSIDAD.

La ecuación de porosidad (H21), puede discretizarse de la siguiente forma, utilizando un esquema totalmente implícito:

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n = \left( -c_{bc\ i,j,k}^{n+1} + c_{bc\ i,j,k}^{n+1} \phi_{i,j,k}^{n+1} + c_r \right) \left( \bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - \bar{\sigma}_{i,j,k}^n \right) \quad (\text{H22})$$

En la ecuación (H22)  $\bar{\sigma}^i$  corresponde al esfuerzo efectivo promedio  $\bar{\sigma}^i = \bar{\sigma} - \alpha P$ .

Reagrupando términos semejantes en la ecuación **(H22)**, se obtiene la forma final de la ecuación de porosidad discretizada:

$$\phi_{i,j,k}^{n+1} = \frac{\phi_{i,j,k}^n - (c_{bc\ i,j,k}^{n+1} - c_r) \left[ (\bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}) - (\bar{\sigma}_{i,j,k}^n - P_{i,j,k}^n) \right]}{1 - c_{bc\ i,j,k}^{n+1} \left[ (\bar{\sigma}_{i,j,k}^{n+1} - P_{i,j,k}^{n+1}) - (\bar{\sigma}_{i,j,k}^n - P_{i,j,k}^n) \right]} \quad \text{(H23)}$$

## ANEXO I. CONDICIONES DE FRONTERA.

### I.1. CONDICIONES DE FRONTERA PARA LAS ECUACIONES DE DEFORMACION GEOMECANICA.

#### I.1.1. LIMITE RADIAL EXTERNO, ( $r = r_e$ )

Para los incrementos en los desplazamientos  $\Delta u_r, \Delta u_\theta$ , y  $\Delta u_z$  en el limite exterior, nodo  $i = nr + 1/2$ , se especifica la variable dependiente en el nodo, es decir, se utilizan condiciones de tipo Dirichlet.

- Condición para  $\Delta u_r$ .

$$\Delta u_{r,nr+1/2,j,k} = 0 \quad (I1)$$

Discretizando (I1) resulta:

$$\frac{\Delta u_{r,nr+1,j,k} + \Delta u_{r,nr,j,k}}{2} = 0 \quad (I2)$$

Que en forma de stencil es:

$$W_{r,nr+1,j,k} \Delta u_{r,nr,j,k} + C_{r,nr+1,j,k} \Delta u_{r,nr+1,j,k} = F_{r,nr+1,j,k} \quad (I3)$$

Donde  $W_{r,nr+1,j,k} = 1$ ,  $C_{r,nr+1,j,k} = 1$ ,  $F_{r,nr+1,j,k} = 0$

- **Condición para  $\Delta u_\theta$ .**

Análogo a lo realizado para  $\Delta u_r$ , se obtiene la siguiente expresión para el *stencil*:

$$W_{\theta,nr+1,j,k} \Delta u_{\theta,nr,j,k} + C_{\theta,nr+1,j,k} \Delta u_{\theta,nr+1,j,k} = F_{\theta,nr+1,j,k} \quad (14)$$

Donde  $W_{\theta,nr+1,j,k} = 1$ ,  $C_{\theta,nr+1,j,k} = 1$ ,  $F_{\theta,nr+1,j,k} = 0$

- **Condición para  $\Delta u_z$ .**

Como en los casos anteriores se obtiene:

$$W_{z,nr+1,j,k} \Delta u_{z,nr,j,k} + C_{z,nr+1,j,k} \Delta u_{z,nr+1,j,k} = F_{z,nr+1,j,k} \quad (15)$$

Donde  $W_{z,nr+1,j,k} = 1$ ,  $C_{z,nr+1,j,k} = 1$ ,  $F_{z,nr+1,j,k} = 0$

### I.1.2. LIMITE RADIAL INTERNO ( $r = r_w$ ).

Utilizando también una condición tipo Dirichlet en este limite, nodo  $i = 1/2$ , se deducen las siguientes ecuaciones:

- **Condición para  $\Delta u_r$ .**

$$C_{r,0,j,k} \Delta u_{r,0,j,k} + E_{r,0,j,k} \Delta u_{r,1,j,k} = F_{r,0,j,k} \quad (16)$$

Donde  $C_{r,0,j,k} = 1, E_{r,0,j,k} = 1, F_{r,0,j,k} = 0$

- **Condición para  $\Delta u_\theta$ .**

$$C_{\theta,0,j,k} \Delta u_{\theta,0,j,k} + E_{\theta,0,j,k} \Delta u_{\theta,1,j,k} = F_{\theta,0,j,k} \quad (17)$$

Donde  $C_{\theta,0,j,k} = 1, E_{\theta,0,j,k} = 1, F_{\theta,0,j,k} = 0$

- **Condición para  $\Delta u_z$ .**

Como en los casos anteriores se obtiene:

$$C_{z,0,j,k} \Delta u_{z,0,j,k} + E_{z,0,j,k} \Delta u_{z,1,j,k} = F_{z,0,j,k} \quad (18)$$

Donde  $C_{z,0,j,k} = 1, E_{z,0,j,k} = 1, F_{z,0,j,k} = 0$

### I.1.3. LIMITE TANGENCIAL ( $\theta = 0$ ).

Para las condiciones de frontera de los desplazamientos en dirección  $\theta$ , se utilizan las llamadas condiciones periódicas, Figura (I1), según las cuales una variable en el nodo  $j=0$  debe ser igual a la variable en el nodo  $j=N_\theta$ , y una variable en el nodo  $j=1$  debe ser igual a la variable en el nodo  $j=N_{\theta+1}$ . De acuerdo con lo anterior se tiene:

- **Desplazamientos en  $\Delta u_r$ .**

De acuerdo con lo explicado anteriormente se tiene:

$$\Delta u_{r,i,0,k} = \Delta u_{r,i,n\theta,k} \quad (I9)$$

Que en forma de stencil es:

$$C_{r,i,0,k} \Delta u_{r,i,0,k} = F_{r,i,0,k} \quad (I10)$$

Donde  $C_{r,i,0,k} = 1$ ,  $F_{r,0,j,k} = \Delta u_{r,i,n\theta,k}$

- **Desplazamientos en  $\Delta u_\theta$ .**

De igual manera que en el caso anterior, se obtiene el siguiente *stencil*:

$$C_{\theta,i,0,k} \Delta u_{\theta,i,0,k} = F_{\theta,i,0,k} \quad (I11)$$

Donde  $C_{\theta,i,0,k} = 1$ ,  $F_{\theta,i,0,k} = \Delta u_{\theta,i,n\theta,k}$

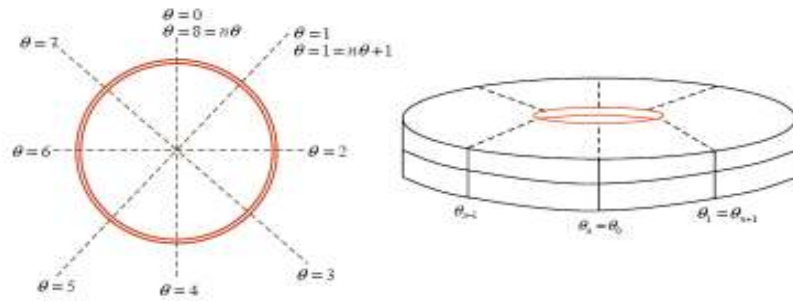


Figura 11. Representación de las condiciones de frontera periódicas.

- **Desplazamientos en  $\Delta u_z$ .**

En este caso para el *stencil* resulta:

$$C_{z,i,0,k} \Delta u_{z,i,0,k} = F_{z,i,0,k} \quad (I12)$$

Donde  $C_{z,i,0,k} = 1$ ,  $F_{z,i,0,k} = \Delta u_{z,i,n\theta,k}$

#### I.1.4. LIMITE TANGENCIAL ( $\theta = n\theta + 1$ ).

En este caso, en forma análoga que para  $\theta=0$ , se obtienen las siguientes expresiones:

- **Desplazamientos en  $\Delta u_r$ .**

$$C_{r,i,n\theta+1,k} \Delta u_{r,i,n\theta+1,k} = F_{r,i,n\theta+1,k} \quad (I13)$$

Donde  $C_{r,i,n\theta+1,k} = 1$ ,  $F_{r,i,n\theta+1,k} = \Delta u_{r,i,1,k}$

- **Desplazamientos en  $\Delta u_r$ .**

$$C_{\theta,i,n\theta+1,k} \Delta u_{\theta,i,n\theta+1,k} = F_{\theta,i,n\theta+1,k} \quad (I14)$$

Donde  $C_{\theta,i,n\theta+1,k} = 1$ ,  $F_{\theta,i,n\theta+1,k} = \Delta u_{\theta,i,1,k}$

- **Desplazamientos en  $\Delta u_z$ .**

$$C_{z,i,n\theta+1,k} \Delta u_{z,i,n\theta+1,k} = F_{z,i,n\theta+1,k} \quad (I15)$$

Donde  $C_{z,i,n\theta+1,k} = 1$ ,  $F_{z,i,n\theta+1,k} = \Delta u_{z,i,1,k}$

### 1.1.5. LIMITE VERTICAL INFERIOR ( $z = nz + 1$ ).

Al igual que para los límites radiales y tangenciales, la condición utilizada en este caso es  $\Delta u_i = 0$  con  $i = r, \theta$  y  $z$ . siguiendo el mismo procedimiento se obtiene:

- **Desplazamientos en  $\Delta u_r$ .**

$$\Delta u_{r,i,j,nz+1/2} = 0 \quad (I16)$$

Que en forma de *stencil* es:

$$BC_{r,i,j,nz+1} \Delta u_{r,i,j,nz} + C_{r,i,j,nz+1} \Delta u_{r,i,j,nz+1} = F_{r,i,j,nz+1} \quad (I17)$$

Donde  $BC_{r,i,j,nz+1} = 1$ ,  $C_{r,i,j,nz+1} = 1$   $F_{r,i,j,nz+1} = 0$

- **Desplazamientos en  $\Delta u_{\theta}$ .**

$$C_{\theta,i,j,nz+1} \Delta u_{\theta,i,j,nz+1} + BC_{\theta,i,j,nz+1} \Delta u_{\theta,i,j,nz} = F_{\theta,i,j,nz+1} \quad (I18)$$

Donde  $C_{\theta,i,j,nz+1} = 1$ ,  $BC_{\theta,i,j,nz+1} = 1$   $F_{\theta,i,j,nz+1} = 0$

- **Desplazamientos en  $\Delta u_z$ .**

$$C_{z,i,j,nz+1} \Delta u_{z,i,j,nz+1} + BC_{z,i,j,nz+1} \Delta u_{z,i,j,k} = F_{z,i,j,nz+1} \quad (I19)$$

Donde  $C_{z,i,j,nz+1} = 1$ ,  $BC_{z,i,j,nz+1} = 1$   $F_{z,i,j,nz+1} = 0$

### **I.1.6. LIMITE VERTICAL SUPERIOR ( $z = 0$ ).**

Esta dirección difiere de todas las anteriores en cuanto a la condición de frontera aplicada sobre ella. Para esta, se supone que el cambio en el esfuerzo es igual a cero ( $\Delta S = 0$ ), lo cual acarrea que la perturbación generada por la producción/inyección de fluidos no afecta este plano.

A partir de un balance de esfuerzos en cada dirección se aplican algunas de las ecuaciones presentadas en el **ANEXO 2** para llevarlo a término de desplazamientos, en esta frontera puede obtenerse:

$$\frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} = -\frac{\partial \Delta u_r}{\partial z} \quad (\text{I20})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u_z}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Delta u_\theta}{\partial z} \quad (\text{I21})$$

$$\frac{\partial \Delta u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{I22})$$

Las ecuaciones (I20), (I21), (I22) son las condiciones de frontera para el limite superior en  $\Delta u_r, \Delta u_\theta$  y  $\Delta u_z$  respectivamente. Discretizando resulta:

- Condición para  $\Delta u_r$ .

Partiendo de la ecuación (I20) se obtiene:

$$\Delta u_{r,i,j,1} - \Delta u_{r,i,j,0} = -\frac{F_i \Delta z_0}{2} (\Delta u_{z_{i+1,j,1}} + \Delta u_{z_{i+1,j,0}} - \Delta u_{z_{i-1,j,1}} - \Delta u_{z_{i-1,j,0}}) \quad (\text{I23})$$

Donde:

$$F_{r,i,j,0} = -\frac{F_i \Delta z_0}{2} (\Delta u_{z_{i+1,j,1}} + \Delta u_{z_{i+1,j,0}} - \Delta u_{z_{i-1,j,1}} - \Delta u_{z_{i-1,j,0}}), C_{r,i,j,0} = -1 \text{ y } TC_{r,i,j,0} = 1$$

- Condición para  $\Delta u_\theta$ .

$$\Delta u_{\theta,i,j,1} - \Delta u_{\theta,i,j,0} = -\frac{F_j \Delta z_0}{2r_i} (\Delta u_{z_{i,j+1,1}} + \Delta u_{z_{i,j+1,0}} - \Delta u_{z_{i,j-1,1}} - \Delta u_{z_{i,j-1,0}}) \quad (\text{I24})$$

Donde:

$$F_{\theta,i,j,0} = -\frac{F_j \Delta z_0}{2r_i} (\Delta u_{z_{i,j+1,1}} + \Delta u_{z_{i,j+1,0}} - \Delta u_{z_{i,j-1,1}} - \Delta u_{z_{i,j-1,0}}), C_{\theta,i,j,0} = -1 \text{ y } TC_{\theta,i,j,0} = 1$$

- Condición para  $\Delta u_z$ .

$$\Delta u_{z,i,j,1} - \Delta u_{z,i,j,0} = 0 \quad (I25)$$

Donde:

$$F_{z,i,j,0} = 0, C_{z,i,j,0} = -1 \text{ y } TC_{z,i,j,0} = 1$$

Las ecuaciones (I23), (I24), (I25) son la forma final de las condiciones de frontera para el límite superior.

## I.2. CONDICIONES DE FRONTERA PARA LA ECUACION DE FLUJO DE FLUIDOS.

### I.2.1. LIMITE RADIAL EXTERNO ( $r = r_e$ ).

Las condiciones de frontera son:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{1,j,k} = 0 \quad \frac{P_{2,j,k} - P_{1,j,k}}{\Delta r_1} = 0 \quad (I26)$$

$$C_{1,j,k} P_{1,j,k}^{n+1} + E_{1,j,k} P_{2,j,k}^{n+1} = F_{1,j,k} \quad (I27)$$

Donde  $C_{1,j,k} = -1$ ;  $E_{1,j,k} = 1$ ;  $F_{1,j,k} = 0$

$$\left( \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{nr,j,k} = 0 \quad \frac{P_{nr+1,j,k} - P_{nr,j,k}}{\Delta r_{nr}} = 0 \quad (I28)$$

$$C_{nr+1,j,k} P_{nr+1,j,k}^{n+1} + W_{nr+1,j,k} P_{nr,j,k}^{n+1} = F_{nr+1,j,k} \quad (I29)$$

Donde  $C_{nr+1,j,k} = 1$ ;  $W_{nr+1,j,k} = -1$ ;  $F_{nr+1,j,k} = 0$

### I.2.2. LIMITE RADIAL INTERNO ( $r = r_w$ ).

La condición para el límite radial interno es:

$$P(1, j, k) = P^n(1, j, k) + P_w \quad (I30)$$

### I.2.3. DIRECCION TANGENCIAL.

La condición de frontera para la dirección tangencial es:

$$P(i, 0, k) = P(i, n\theta, k) \quad P_{i,0,k} = P_{i,n\theta,k} \quad (I31)$$

$$C_{i,0,k} P_{i,0,k}^{n+1} = F_{i,0,k} \quad (I32)$$

Donde  $C_{i,0,k} = 1$ ;  $F_{i,0,k} = P_{i,n\theta,k}$

$$P(i, n\theta + 1, k) = P(i, 1, k) \quad P_{i,n\theta,k} = P_{i,1,k} \quad (I33)$$

$$C_{i,n\theta+1,k} P_{i,n\theta+1,k}^{n+1} = F_{i,n\theta+1,k} \quad (I34)$$

$C_{i,n\theta+1,k} = 1$ ;  $F_{i,n\theta+1,k} = P_{i,n\theta+1,k}^{n+1}$

### I.2.4. LIMITE VERTICAL SUPERIOR.

La condición de frontera para el límite vertical superior es:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{i,j,1} = 0 \quad \frac{P_{i,j,2} - P_{i,j,1}}{\Delta z_1} = 0 \quad (I35)$$

$$C_{i,j,1} P_{i,j,1}^{n+1} + TC_{i,j,1} P_{i,j,2}^{n+1} = F_{i,j,1} \quad (I36)$$

$$C_{i,j,1} = -1; \quad TC_{i,j,1} = 1; \quad F_{i,j,1} = 0$$

#### I.2.4. LIMITE VERTICAL INFERIOR.

La condición de frontera para el límite vertical inferior es:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{i,j,nz} = 0 \quad \frac{P_{i,j,nz+1} - P_{i,j,nz}}{\Delta z_{nz}} = 0 \quad (I37)$$

$$C_{i,j,nz+1} P_{i,j,nz+1}^{n+1} + BC_{i,j,nz+1} P_{i,j,nz+1}^{n+1} = F_{i,j,nz+1} \quad (I38)$$

$$C_{i,j,nz+1} = 1; \quad BC_{i,j,nz+1} = -1 \quad F_{i,j,nz+1} = 0$$