IDENTIFICACIÓN DE LOS ERRORES EN LA APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

DANNY SAMUEL MARTÍNEZ LOBO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

IDENTIFICACIÓN DE LOS ERRORES EN LA APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

DANNY SAMUEL MARTÍNEZ LOBO

Trabajo de grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

DIRECTOR
CARLOS BAUTISTA DUQUE
ESP. EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CO-DIRECTOR
EDITH JOHANNA MENDOZA HIGUERA
ESP. EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010

A mi familia, por todo el apoyo brindado en esta travesía.

A Nathalia por llenar con su luz mis días.

AGRADECIMIENTOS

A mis amigos, por todos los buenos momentos que compartimos en esta vida universitaria.

A la profesora Edith Johanna Mendoza Higuera, codirectora de este trabajo de grado, por sus concejos, correcciones, entusiasmo, paciencia…en fin por todo.

Al profesor Carlos Bautista Duque, sin su colaboración no hubiera sido posible este trabajo.

A la Maestra Ana Dulcelina, su colaboración fue indispensable durante el proyecto.

A la Institución Educativa Las Américas, gracias por abrir sus puertas a mi investigación.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Fotografías

RESUMEN

TÍTULO: IDENTIFICACIÓN DE LOS ERRORES EN LA APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN*

AUTOR: DANNY SAMUEL MARTÍNEZ LOBO**

PALABRAS CLAVES: POTENCIACIÓN, ERRORES, TIPOS DE ERRORES Y CLASIFICACIÓN.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO:

El objetivo de esta investigación es identificar y clasificar los errores más comunes que presentan los estudiantes al aplicar las propiedades de la potenciación.

La pregunta, que sirvió de guía durante la investigación fue: ¿Cuáles son los tipos de errores más comunes cometidos por los estudiantes de séptimo grado al aplicar el concepto y las propiedades de la potenciación?

Para responder a la pregunta guía de esta investigación se diseñó un test diagnóstico que permitió identificar los errores más comunes que presentan los estudiantes al usar las propiedades de la potenciación. Se realizaron entrevistas a cinco estudiantes de la Institución Educativa Las Américas. Estas entrevistas fueron audio grabadas. El objetivo era confirmar mediante las entrevistas la clasificación dada a cada uno de los errores.

Después se procedió a clasificar todos y cada uno de los errores presentados. Primero se clasificaron según la clasificación dada por Radatz, que se basa en la teoría del procesamiento de la información. Durante el estudio se hizo evidente lo corta que se quedaba la propuesta de Radatz para los errores de la potenciación, luego se diseñó un nuevo tipo de clasificación que explicaba de manera más objetiva los errores que se presentaban en la potenciación.

Finalmente, se encontró que la mayoría de los errores que se presentan al aplicar las propiedades de la potenciación son los errores debidos al dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes).

---

* Proyecto de Grado

** Faculta de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Esp. Carlos Bautista Duque. Codirectora: Esp. Edith Johanna Mendoza Higuera

ABSTRACT

TITLE: IDENTIFICATION OF THE ERRORS IN THE APPLICATION OF THE PROPERTIES OF THE EXPONENTIATION. *

AUTHOR: DANNY SAMUEL MARTÍNEZ LOBO**

KEY WORDS: Exponentiation, errors, types of errors and classification.

DESCRIPTION:

The aim of this research is to identify and classify the most common errors by students when applying the properties of exponentiation.

The question used as the guide during the research was: What are the most common types of errors made by students of seventh grade when applying the concept of exponentiation itself and its properties?

To answer the guide question of this research, it was designed a diagnostic test that allowed identify the most common errors made by students when using the properties of exponentiation. Interviews were applied to five students at Institución Educativa Las Américas. Those interviews were audio recorded. The objective was to confirm through them the classification given to each one of the errors.

After that, each error presented was classified. First, they were classified according to the classification given by Radatz that is based on the theory of the information processing. During the research it was evident how short the Radatz' proposal was for the errors of exponentiation, then it was designed a new type of classification that explained more objectively the errors that were present in the exponentiation.

Finally, it was found that the majority of the errors that are present when applying the properties of the exponentiation are the ones owing to the insufficient control of the symbols and concepts needed (Previous knowledge).

* Work of Grade

** Ability of Sciences. Degree in Mathematics. Director: Esp. Carlos Bautista Duque.

1. PRESENTACIÓN

Durante el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos, la presencia de errores es frecuente y en el aprendizaje del concepto de potenciación, no es la excepción. Como tutor de estudiantes de ingeniería de diferentes universidades he podido observar que muchos de los errores que presentan los alumnos, ocurren cuando se enfrentan a ejercicios en los cuales se requiere aplicar el concepto de potenciación y sus propiedades.

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) es la entidad encargada de regular los fines de la educación, definir las áreas obligatorias y los contenidos específicos.

Para cumplir con dichos objetivos se crearon los Estándares Curriculares. En ellos están los contenidos y conceptos mínimos, por grado de escolaridad, que cada institución debe brindar, a sus estudiantes, para garantizar condiciones de igualdad. En una de sus propuestas, los Estándares Curriculares, en relación con la potenciación determina que al finalizar los estudios de secundaria los estudiantes deben:

> *Identificar la base y el exponente de una potencia y sus propiedades, multiplicar y dividir potencias de la misma base, explicar por qué un número elevado al exponente cero es igual a uno e interpretar las potencias con exponentes fraccionarios y negativos y realizar operaciones combinadas con ellas*[1].

Lo preocupante es que los estudiantes llegan a las universidades teniendo dificultades en la aplicación de estas propiedades, cuando las tuvieron que haber aprendido en secundaria.

---

[1]MINISTERIO DE EDUACIÓN NACIONAL. Estándares para la excelencia en la educación. Bogotá: MINEDUCACIÓN, 2002. 144p. p.30

El estudio de los errores se ha convertido en los últimos años en una línea de investigación en Educación Matemática, que busca identificar y clasificar los errores, con el fin de buscar estrategias didácticas de solución. Ahora, los errores siempre han estado presentes en el desarrollo del conocimiento humano, dado que para tomar un conocimiento como verdadero, en algunos casos, ha sido necesario sortear desde sus inicios, diferentes errores. Palarea cita a Lakatos (1981) para dar muestra de esta afirmación:

> *Lakatos en algunos de sus artículos muestra cómo la discusión de los errores detectados en algunas teorías permite la transformación o enriquecimiento de éstas, por ejemplo, cuando analiza el trabajo de Cauchy señala: "¿qué decir de los bien conocidos "errores" de Cauchy?" Y concluye: "Cauchy no cometió en absoluto ningún error, sino que probó un teorema completamente distinto, sobre secuencias transfinitas de funciones que Cauchy-convergen sobre el continuo de Leibniz." Éste es un buen ejemplo en lo referente a los errores cometidos en el desarrollo histórico del conocimiento matemático.*[2]

A lo largo del proceso de construcción de nuevos conocimientos, como la potenciación, los errores aparecen de manera constante. Cuando se detectan y se corrigen, los conceptos y las ideas alrededor del tema pueden volverse aún más claros y significativos. De ahí la importancia del maestro al detectar, interpretar y corregir los errores.

Si los errores se siguen presentando de manera constante y "si pretendemos que los aprendizajes sean significativos, es prioritario el conocimiento y el tratamiento"[3]. Un análisis de los errores más frecuentes de los estudiantes sirve de ayuda al docente para organizar estrategias que permitan un mejor aprendizaje.

---

[2] LAKATOS. Citado por PALAREA, María. La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. La Laguna: Universidad de La Laguna, 1998, p. 78

[3] ENGLER, Adriana; GREGORINI, María Inés; MULLER, Daniela; VRANCKEN, Silvia y HECKLEIN, Marcela. Los errores en el aprendizaje de la matemática. En: Los Errores en el aprendizaje de Matemática. Boletín de la SOAREM.(2004), p.1

Dada la necesidad de identificar los errores, se plantea la pregunta que orientó este trabajo. **¿Cuáles son los tipos de errores más comunes cometidos por los estudiantes de séptimo grado al aplicar el concepto y las propiedades de la potenciación?** De la pregunta se deriva el objetivo general el cual es: **Identificar y clasificar los errores que comenten los estudiantes de grado séptimo en la aplicación del concepto de potenciación y sus propiedades.** Reconocer los errores de los estudiantes es la base de este trabajo, por lo cual se realizó un test que permitió determinar los errores más comunes. La población a la que se le aplicó el test, fueron estudiantes de la Institución Educativa Las Américas.

Para la elaboración del test, se diseñaron pruebas piloto con el fin de identificar el tipo de pregunta más acorde y los ítems más adecuados que permitirían identificar un mayor número de errores, e incluso determinar la población más idónea para la investigación.

El test final se aplicó a estudiantes de octavo grado octavo de la Institución Educativa Las Américas, con el apoyo de la docente encargada de la asignatura de matemáticas Carmen Alicia Velasco. Además, se realizaron entrevistas a los estudiantes para ahondar en sus soluciones y en las posibles causas de los errores cometidos, lo cual permitió clasificar con mayor fiabilidad los errores.

El desarrollo y análisis de esta experiencia se divide en cinco capítulos, el primero presenta el *"Marco teórico"* que sirve como base de este trabajo, donde se presentan los fundamentos teóricos en la investigación de errores y las clasificaciones ya planteadas por otros autores, entre ellas la de Radatz. En el segundo capítulo se presentan los "*Antecedentes"* donde se exponen las investigaciones en esta línea desde principios de siglo, desde las primeras escuelas que comenzaron a interesarse por la importancia del error en el aprendizaje e investigaciones en errores, donde los autores crean sus propias clasificaciones que responden de manera adecuada a los objetivos de sus investigaciones. En el tercer capítulo “*Metodología*” donde se muestran el conjunto de pasos que se llevaron a cabo durante la investigación y el cuarto capítulo “*Clasificación de los errores*” se describe el proceso de la clasificación y las razones de la categorización propuesta. Finalmente, en las *Conclusiones* se encuentran los resultados de esta investigación.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta la fundamentación teórica que sustenta el trabajo. En la primera parte se muestra la conexión existente entre la aritmética y el álgebra. Después, hablamos de los errores las diferentes categorías elaboradas por algunos autores para su análisis y la teoría del procesamiento de la información.

2.1 Aritmética y álgebra.

Los Lineamientos Curriculares es el documento que divide el currículo de matemáticas en cinco componentes: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Y en los Estándares Curriculares se propone de forma específica los desempeños, básicos, que los estudiantes deben alcanzar en los niveles de educación preescolar, básica y media, es decir, especifican lo que deben saber y ser capaces de hacer, los estudiantes, en un determinado grado y situación.

Ahora, el componente del currículo, pensamiento numérico, se refiere a la “comprensión sólida tanto de los números, las relaciones y operaciones que existen entre ellos, como de las diferentes maneras de representarlos”[4]. Dicho pensamiento “va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos”[5], así como de aplicar las propiedades de los números bajo las

[4] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Op. Cit., p. 15
[5] Ibíd., p. 25

operaciones básicas, esta aplicación de propiedades es posible cuando el estudiante comprende las propiedades, las descompone y recompone dependiendo de la situación a la cual se enfrente.

Es en el Pensamiento numérico donde se ubica la aritmética, rama de la matemática que tiene como objetivo el estudio de los números y sus propiedades. Es en este pensamiento donde se definen las competencias aritméticas que cada estudiante debe alcanzar por grado de escolaridad. En los primeros años, entiéndase hasta quinto primaria, se les enseña ha contar conjuntos de objetos, a leer y escribir los números, y se crean las nociones de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Junto con las operaciones de suma y multiplicación se muestran las propiedades que cumplen los números naturales y fraccionarios: asociativa, conmutativa y distributiva. Reconocen propiedades de los números naturales y los clasifica como pares, impares, primos, compuestos, etc. Aprenden el concepto de fraccionarios y el manejo de las operaciones básicas. Conoce los números decimales, su significado y aprende a trabajar las operaciones básicas con estos números. Finalmente en quinto primaria, aprenden el concepto de potenciación, raíz cuadrada, raíz cúbica y logaritmación.

Al comenzar la secundaria, sexto grado, ya deben estar en capacidad de hacer operaciones, con números enteros, fraccionarios y decimales. Al finalizar deben comprender los conceptos de potenciación, radicación y la relación inversa entre las dos operaciones. En séptimo grado, la institución debe garantizar que el estudiante alcance los siguientes estándares:

- *Identifica la base y el exponente de una potencia y sus propiedades.*
- *Multiplica y divide potencias de la misma base.*
- *Explica por qué un número elevado al exponente cero es igual a uno.*
- *Interpreta las potencias con exponentes fraccionarios, negativos y realiza operaciones combinadas con ellos.*[6]

[6] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Op. Cit., p.30

Es de resaltar que en séptimo grado, los estándares para el Pensamiento numérico sólo están relacionados con potenciación. Donde se espera que teniendo una noción desde el grado anterior, sea aquí donde se fortalezcan estas nociones hasta alcanzar el nivel de conceptos matemáticos, donde los estudiantes los construyen teniendo en cuenta todas sus implicaciones.

Todas estas herramientas conceptuales y operativas, mencionadas anteriormente, que los estudiantes deben lograr en sus primeros siete años de escolaridad son las necesarias, en mayor o menor medida para poder comenzar el estudio del álgebra. Es así, como algunos autores afirman que: “La aritmética es el fundamento del álgebra”[7]. Autores como Drijvers y Hendrikus argumentan “el álgebra tiene sus raíces en la aritmética y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, mientras que la aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente”[8], por último Gómez señala “el álgebra generaliza a la aritmética y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis”[9].

Lamentablemente, muchos alumnos llegan con muchas deficiencias conceptuales al iniciar el estudio del álgebra. A pesar que en los cursos de aritmética tienen la posibilidad de explorar ideas algebraicas, de generalizar ciertas propiedades y observar patrones que cumplen los conjuntos numéricos bajo ciertas operaciones. Hasta los alumnos “más capacitados para las matemáticas, encuentran grandes dificultades cuando inician su aprendizaje del en álgebra”[10].

---

[7] KIERAN. Citado por PALAREA. Op. Cit., p. 17

[8] MOLINA, Marta. Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. En: Investigación en educación matemática. (2007), p. 3

[9] GOMEZ. Citado por MOLINA. Ibíd., p. 3

[10] RUANO, R., SOCAS, M. Y PALAREA M. Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En: Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. (2003), p. 1

¿Y por qué hablar de esta relación?, el concepto de potenciación y sus aplicaciones es el concepto matemático fundamental en este trabajo, y como se infiere en los Estándares curriculares, es un concepto que transita de lo aritmético a lo algebraico. Mientras que en los grados de quinto, sexto y séptimo, trabajan esta operación con conjuntos numéricos, en el álgebra, se trabajan los mismos conceptos y propiedades, pero aplicadas a expresiones algebraicas donde están presentes las variables. Además, algunas veces, se enseñan y aprende las operaciones y las propiedades aritméticas como un conjunto de reglas que en la práctica los estudiantes no saben cómo ni cuándo aplicarlas.

Un estudiante puede resolver $2^3 \times 2^2$, aplicando o no las propiedades de la potenciación. Es suficiente con hallar cada una de la potencias y multiplicarlas para obtener el resultado o aplicar la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base y después hallar el resultado resolviendo la potencia. Al ver la imposibilidad de aplicar el primer procedimiento en $m^3 \times m^2$, donde deben hacer uso de la misma propiedad para simplificar la expresión surgen diferentes respuestas erróneas.

Los símbolos que el estudiante ha usado "en aritmética- signos de operaciones, paréntesis y números- son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra"[11] limitando su significado al usarlos en el álgebra, por ejemplo, con referencia a los signos de suma e igualdad, los estudiantes "los interpretan en acciones a realizar"[12], lo cual se podría extender a la multiplicación, dado que en ejercicios como $m^3 \times m^2$ no se aplica la acción de multiplicar, solo una propiedad que involucran la multiplicación y que simplifica la expresión.

[11] PALAREA, Op. Cit., p. 66
[12] Ibíd., p. 69

Otro de los signos que juegan un papel importante en la transición de la aritmética al álgebra, y que tienen relevancia comentarlo es el signo de igualdad:

> *En Aritmética se entiende como una acción física. Es usado para conectar un problema con su resultado numérico; se utiliza casi siempre con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado numérico. […] con menor frecuencia, se utiliza para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado en cambio en el álgebra muchas propiedades se pueden manejar en los dos sentidos de la igualdad.*[13]*,*

Al presentar en forma general propiedades como, para todo $a, m, n \in \mathbb{R}$ se tiene que $a^m \times a^n = a^{m+n}$, una de las dificultades que encuentra el estudiante para interpretarla, es ver la doble dirección de la igualdad, es decir, no solamente como el resultado de una operación.

> *"El signo igual tiene en álgebra un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Aparece así un cambio importante en el sentido del signo $(=)$ en su paso de la aritmética al álgebra. Por tanto, para simbolizar en álgebra es necesario haber realizado un verdadero cambio conceptual en el uso del signo igual, manteniendo al mismo tiempo el que tenía en aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma"*[14]

En general,

> *"Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico. Estas dificultades, en general, no se pueden evitar*

[13] PALAREA, Op. Cit., p. 68
[14] Ibíd., p. 69

ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático"[15]

Y como ya se ha mencionado, los profesores debemos conocer y reflexionar éstas dificultades, y de ser necesario, hacerlas explícitas a los alumnos. Cuando los docentes dejan implícitas estas dificultades, provocan que los estudiantes cometan errores, como aplicar la propiedad de linealidad a expresiones como $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, posiblemente a causa de la analogía con $(ab)^2 = a^2b^2$ y de la poca conciencia de los requerimientos implícitos de una propiedad para ser aplicada.

Muchas dificultades del aprendizaje del álgebra son debidas a las deficiencias en la aritmética o a dificultades de tipo epistemológico de la misma transición entre la aritmética y el álgebra como ya se ha mostrado. Teniendo en cuenta las dificultades en la aritmética, se observa que generan errores en el aprendizaje del álgebra.

2.2 Los Errores

A lo largo de los siglos pensadores e investigadores han dedicado su vida a estudiar la capacidad del hombre por conocer y comprender el universo. En su afán de encontrar respuestas a todas sus preguntas, han aceptado una gran cantidad de conocimientos que hoy día sabemos que son erróneos, pero como el hombre siempre está "examinando persistentemente su conocimiento mediante la infatigable crítica racional y mediante la autocrítica"[16], descubre que estos errores son el resultado de contradicciones, interpretaciones o justificaciones falsas.

Teniendo en cuenta lo anterior, y las problemáticas que se presentan en la enseñanza de la matemática, la investigación en educación matemática

---

[15] Ibíd., p. 74
[16] SOCRATES. Citado por RICO, Luis; KILPATRICK, J. y GÓMEZ, P. Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericana, p. 71

presentó y aún presenta un interés en el estudio de los errores generados en el aula.

El estudio de los errores se ha apoyado en algunas teorías de la psicología cognitiva. Las teorías cognitivas centran sus estudios en los procesos al interior de la mente humana que conducen al aprendizaje. Dentro de sus objetos de estudio también se encuentra el cómo se asimila la nueva información y cómo se transforma para ser asimilada. Además, el cognitivismo asegura que las mentes de los hombres no se encuentran totalmente en blanco, por el contrario, existen conocimientos anteriores, que le permiten interactuar con el medio que lo rodea.

Es decir, para el aprendizaje significativo de nuevos conocimientos, el individuo debe reestructurar y acomodar los antiguos conocimientos, para poder encontrarle significado y responder a sus reflexiones y preguntas. Y es aquí, cuando surgen los errores, al intentar acomodar los saberes anteriores con los nuevos. Bien lo señala Matz "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación"[17]. Los errores son producto de esquemas cognitivos equivocados en la mente de cada hombre y "no sólo son consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste"[18].

Los errores, en matemáticas son evidencia de esquemas cognitivos inadecuados en la mente que "impiden el aprendizaje de nuevos contenidos, su análisis sirve de ayuda al docente en el momento de planificar las actividades áulicas"[19].

Por otro lado, dentro de las diversas categorías existentes que pueden ayudar a profundizar el estudio de los errores, se destacan las construidas por: Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar "que clasifican los errores desde una

---

[17] MATZ. Citado por RUANO, R., SOCAS, M. Y PALAREA M. Op. Cit., p. 2
[18] Ibíd., p. 2
[19] MATA, PORCEL y ROMERO, Op. Cit., p.1

base empírica, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizada por expertos”[20]. Estos autores proponen seis categorías:

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Inferencias no válidas lógicamente.
- Teoremas o definiciones deformadas.
- Falta de verificación en la solución y errores técnicos.

La clasificación anterior se basa más en el conocimiento matemático que en los procesos mentales, cuando se intenta avanzar desde la descripción de los patrones de error y las técnicas falsas hasta llegar a un análisis de las causas de los errores en las cogniciones de los alumnos; la base teórica que la sustenta se queda corta al intentar dar explicación a ciertos errores que se presentan.

Algunos autores han propuesto categorizaciones, desde un punto de vista epistemológico, estas categorizaciones no pasan los niveles básicos meramente descriptivos y no existe un sustento teórico que permita clasificar, interpretar y predecir los errores como consecuencia de argumentos epistemológicos.

Dentro de las categorías existentes, la de Radatz surge a partir de la teoría del procesamiento de la información, que se encuentra dentro de las teorías de la psicología cognitiva, de la cual se habla a continuación para entender con mayor claridad dichas categorías.

[20] RICO, y KILPATRICK, Op. Cit., p.90

2.2.1 LA TEORÍA DEL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

La idea de esta teoría es que el hombre es un procesador de información, su actividad fundamental es recibir información, procesarla, descomponerla en partes sencillas de utilizar y actuar conforme a ella. Por lo tanto, todo hombre es un ser continuo procesador de información que recibe del mundo. Éste la acumula, la descompone, la transforma y posteriormente la utiliza.

El pensamiento matemático según el método del procesamiento de la información, puede descomponerse en varias partes de fácil procesamiento, pero como dichas partes son internas hay que utilizar métodos indirectos de observación. "Entre estos métodos indirectos se encuentra el análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas"[21].

La utilidad de esta aproximación se incrementa con el hecho de que hay patrones consistentes en los errores. La consistencia puede considerarse a dos niveles, por un lado, a nivel individual, ya que los sujetos muestran una regularidad considerable en su modo de realizar tareas y resolver problemas matemáticos similares con poca variabilidad en períodos cortos de tiempo y por otro lado, también hay consistencias en los grupos humanos, de carácter colectivo; en general, se trata de ciertos errores que personas diferentes cometen en ciertas etapas de su desarrollo educativo.

La clasificación hecha por Radatz[22], a partir de la teoría del procesamiento de la información, será el marco de referencia durante este estudio. Establece cinco categorías generales:

---

[21]RICO, y KILPATRICK, Op. Cit., p. 87
[22] RADATZ. Citado por Rico, Op. Cit., p.88

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje. Señala que el aprendizaje de los conceptos, símbolos y vocabulario matemático es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos es fuente de errores; por ello, la resolución de problemas verbales está específicamente abierta a errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial. Aunque se trata de un campo de estudio cuyo desarrollo se está iniciando, es cierto que las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades para muchos jóvenes y niños en la realización de tareas matemáticas.
   Algunas representaciones icónicas de situaciones matemáticas pueden suponer dificultades en el procesamiento de la información, el análisis y síntesis perceptivas implican una demanda considerable para algunos alumnos, presentando dificultades y produciendo errores.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. En este tipo de errores se incluye todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas anteriores pueden producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. En estos casos los alumnos desarrollan operaciones cognitivas, que continúan empleando aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se hayan

modificado. Persisten en la mente algunos aspectos del contenido o del proceso de solución, inhibiendo el procesamiento de nueva información. Dentro de esta clase de errores se encuentran los siguientes:

- Errores por perseveración, en los que predomina elementos singulares de una tarea o problema
- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares
- Errores de interferencia, en los que las operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas verbales.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Este tipo de errores surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

3. ANTECEDENTES

El estudio de los errores en el aprendizaje de la matemática ha sido una problemática que ha tenido un gran interés para investigadores en educación matemática, el cual tiene un largo desarrollo histórico, por lo cual dicho estudio se puede ver desde diferentes perspectivas.

El estudio de los errores comienza en Alemania con los trabajos de Weiner (1922) como el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de los errores, entre sus diversos aportes trató de establecer patrones de errores que explicaran las equivocaciones individuales de todos los grupos escolares.

En la antigua Unión Soviética, Kuzmitskaya, determinó cuatro causas de error en el estudio de las dificultades: “insuficiencia de la memoria a corto plazo, comprensión insuficiente de las condiciones del problema, errores debidos a la ausencia de reglas verbales para la realización de cálculos y errores por uso incorrecto de las cuatro operaciones básicas”[23]; y Menchinskaya enfatizó en la complejidad de los procesos que están entre las causas potenciales de error, este señala cuatro áreas de causas, “no totalmente diferenciadas: errores debidos a una realización incorrecta en una operación, errores por una comprensión conceptual cualitativamente insuficiente, errores mecánicos por distracción o pérdida de interés y errores debidos a la aplicación de reglas o algoritmos inadecuados”[24].

En los Estados Unidos Buswell (1925) logró identificar una multitud de errores en las cuatro operaciones básicas, aplicando un método de análisis más complejo, en el que incluía no sólo los ejercicios escritos, sino también observaciones en el aula y entrevistas para el diagnóstico.

[23]RICO, y KILPATRICK, Op. Cit., p. 78
[24] Ibíd., p. 79

Otros autores se destacan por aportar al crecimiento de esta línea de investigación con metodologías para el análisis de errores o por utilizarla como método de investigación, entre ellos se encuentran Judd (1925), Thorndike (1917), Brueckner (1935), Ashlock (1975), Reisman (1972), Ginsburg (1977) y Erlwanger (1975).

Finalmente en España Villarejo y Fernández determinaron los errores más usuales en aritmética escolar y presentaron bases para su enseñanza orientados en los métodos diagnósticos derivados de los errores detectados. Otros investigadores destacados por tener en cuenta el análisis de errores en el momento de la enseñanza y por desarrollar diferentes métodos para analizar el origen de los errores son Centeno (1988) y Browell (1941).

Después de este recorrido histórico se inicia la revisión bibliográfica de investigaciones relacionadas con los errores en la aplicación del concepto de potenciación. Es de resaltar que no se encontraron, a nivel nacional y regional, reportes de investigación relacionados con la temática aquí planteada. Se encontraron investigaciones de errores en estadística, en geometría y en álgebra; estas investigaciones crean diferentes clasificaciones que responden de forma adecuada a los objetivos de sus investigaciones.

Algunas de estas investigaciones son:

- *Tipología de errores en el área de la geometría plana por Lissete Franchi y Ana Hernández*; este estudio se realizó durante dos semestres con alumnos de Geometría de la Facultad de ingeniería de la Universidad del Zulia, Venezuela, el cual tenía como objetivo, identificar y clasificar los errores más comunes que se presentan en la geometría plana. Como resultado del trabajo construyeron una la clasificación de errores que consta de 8 categorías, esta clasificación nace de las ya hechas por Radatz, Brousseau, Socas, Movshovitz y Astolfi y de las necesidades propias de la Geometría.

- *Observación y análisis de errores en una expresión con valor absoluto cometidos en una evaluación: un estudio de caso, por Irma Martínez, Marta Lentini, Sergio Crespo y María Lentini,* en este trabajo los autores argentinos de la Universidad Nacional de Salta, dan a conocer algunos de los errores que cometieron un grupo de estudiantes en una evaluación, con el fin de dar explicación del por qué se han producido y así generar eventuales propuestas de superación, para contrarrestar la deserción en la Universidad.

- *Conocimientos previos sobre operaciones en Reales y sus propiedades de ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina. Liliana Mato, Eduardo Porcel y Celeste Romero*, en este trabajo los autores argentinos pretendían identificar los errores algebraicos cometidos por estudiantes de primer semestre, para ello crean y aplican un test de diagnóstico inicial acerca de las operaciones en reales y sus propiedades, con el fin de identificar las respuestas incorrectas, esto con el propósito de tenerlos en cuenta al momento de planificar las clases.

- *Justificando el resultado de la suma de dos números pares. Dificultades y errores por María Cañadas y Encarnación Castro.* En este estudio de la Universidad de Granada de España, las autoras proponen la tarea a doce alumnos de secundaria, de justificar por qué la suma de dos números pares da como resultado otro número par. Ellas utilizaron una entrevista semiestructurada en la cual se orienta a los alumnos por el camino a seguir. Respecto a las conclusiones del estudio, en la investigación se encontró que los errores estaban asociados a la complejidad del lenguaje matemático.

- *Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en* *álgebra. Tesis Doctoral de María Mercedes Palarea. Universidad de La Laguna, España.* En este trabajo se estudia tres aspectos del lenguaje algebraico: la sustitución formal, generalización y la modelización. Se aplicó un cuestionario a estudiantes de secundaria obligatoria (E.S.O.), España. Se realizó una clasificación de los errores y se analizaron sus posibles causas.

En las conclusiones se muestran las repercusiones de los resultados de la investigación.

4. METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cualitativo y está enmarcada en la línea de investigación de matemática educativa, denominada análisis de los errores, que busca identificar y categorizar los errores cometidos por estudiantes de octavo grado.

4.1. Población

La población de estudio fue de 120 alumnos de octavo grado de la Institución Educativa las Américas (Bucaramanga, Santander), cuyas edades están entre los 14 y 16 años. Para tener mayor seguridad al categorizar los errores, se entrevistaron cinco estudiantes que se escogieron en forma aleatoria.

4.2. Instrumento de recolección de datos

El instrumento principal para la recolección de datos, consistió en un test de 20 preguntas, que fue prediseñado y aplicado a una población piloto, para depués rediseñarlo y aplicarlo a la población estudio. Igualmente se hicieron grabaciones de entrevistas realizadas a los estudiantes.

4.3. Etapas de la investigación

La investigación se llevó a cabo en cuatro etapas. La primera etapa consistió en el pre diseño y aplicación del test a la población piloto, la segunda etapa fue el diseño final, en la tercera etapa se llevó a cabo la aplicación del test a la población y la cuarta etapa consistió en las entrevistas a los estudiantes.

Primera etapa

Esta primera etapa consistió en el pre diseño del test. Para ir mejorando y diseñando el test final, se aplicaron pruebas iniciales a estudiantes de diferentes grados (7º, 8º, 10º, universitarios) de instituciones de los municipios de Floridablanca y Bucaramanga.

La aplicación permitió hacer diferentes análisis. El primero de éstos se enfocó en lo relacionado con el tipo de preguntas que se podían utilizar en el test final. Alrededor de este análisis podemos decir que:

- Al usar preguntas para indicar si la premisa era falsa o verdadera, los estudiantes no sabían lo que se les preguntaba e intentaban adivinar. Como había dos posibilidades de respuesta marcaban aleatoriamente alguna. Por lo cual, la probabilidad de que obtuvieran el resultado verdadero sin tener claros los conceptos era alta, así como obtener un resultado falso sin mostrar los procesos que generaban sus errores.

$$5^2 = 25 \quad F\ (\quad)\ \text{ó}\ V(\quad)$$

- Completar el espacio en blanco. Los estudiantes siempre hacían las operaciones aritméticas e intentaban cuadrar el resultado conforme la respuesta esperada.

$$5^2 = \_ \times \_ = 25$$

- Al proponer preguntas de correspondencia uno-uno, en caso de no saber la respuesta los jóvenes en su afán de contestar la prueba hacían asociaciones que en muchos casos podían ser correctas pero no reflejaban el saber de los estudiantes, o en el caso contrario los errores.

- En uno de los test se preguntó por el resultado de un número entero elevado a la cero. Este ítem, no fue resuelto por un gran porcentaje de estudiantes.

- Los ítems de opción múltiple se descartaron debido a que los muchachos en caso de no saber, simplemente se dedicaban a hacer enlaces al azar, y esto dificultaba poder observar los errores en las aplicaciones de las propiedades de la potenciación.

De acuerdo con las pruebas iniciales se determinó que el mejor tipo de preguntas para este test eran las de respuesta abierta donde los estudiantes tendrían que mostrar un procedimiento matemático para llegar a la respuesta correcta, haciendo un análisis más detallado.

Se realizaron ocho pruebas piloto donde se fue probando la fiabilidad de los resultados para que el test respondiera con la mayor certeza posible las necesidades del estudio.

Ante la necesidad de saber si los jóvenes en realidad sabían las propiedades de potenciación, fue necesario diseñar ciertos ítems donde el evaluado tenía la obligación de usar las propiedades de potenciación para poder llegar la respuesta correcta.

En el desarrollo de esta primera experiencia con las pruebas piloto se observó, que la redacción del enunciado es fundamental para su solución. En las primeras pruebas el número de preguntas no contestadas eran numerosas, se hicieron las entrevistas y los estudiantes manifestaron que no entendían las preguntas. Se cambiaron varias veces los enunciados pero el número de ítems sin contestar seguía siendo muy significativo. Por lo tanto, en la siguiente oportunidad, con estudiantes de grado décimo de una institución de Bucaramanga, se decidió guiarlos durante la solución del test. Y aquí surgió una problemática bastante conocida por los docentes, los estudiantes no comprendían lo que leían, a pesar que los enunciados estaban diseñados para estudiantes de séptimo grado y con un lenguaje sencillo, fue necesario leerles todos y cada uno de estos. Así que en la siguiente oportunidad, se leyeron los enunciados a los evaluados. Como resultado, los ítems dejados en blanco disminuyeron notablemente.

Como ya se mencionó, la aplicación de los test iniciales se llevó a cabo con diferentes poblaciones, pero las observaciones y análisis relacionados con el cambio de población de estudio, el tiempo necesario para la prueba, las indicaciones previas a la aplicación del test y el inicio de la clasificación de los errores se realizaron con la aplicación del test a estudiantes de séptimo y octavo grado de un colegio en especial. A continuación se contará la experiencia vivida en esta institución.

En el municipio de Lebrija, Santander, en el Colegio Integrado Nuestra Señora De Las Mercedes, la Maestra Ana Dulcelina López, coordinadora de la institución, nos abrió las puertas para la aplicación del test inicial. Su apoyo fue valiosísimo, ya que ella también tenía un enorme interés en aplicar pruebas externas a los estudiantes de su institución.

La primera visita a la institución fue el 1 de Julio de 2010, se aplicó primero la prueba a los cursos de 7-1, 7-2, 7-3 y el 7 de Julio a 7-4 y 7-5.

Durante el desarrollo de la prueba los estudiantes de 7-1, 7-2 y 7-3 mostraron desinterés en resolver el test, se cree que sucedió porque no estaba ligado a algún tipo de incentivo académico. Por lo tanto, el número de ítems dejados sin responder fue numeroso.

En la siguiente oportunidad, el 7 de Julio de 2010, se decidió con el apoyo de la coordinadora decirles a los alumnos de los grados 7-4 y 7-5, que si pasaban la prueba tendrían una nota extra para la definitiva de la materia. Como resultado las preguntas dejadas en blanco disminuyeron, aunque se siguieron presentando. Se da relevancia a esta situación debido a que muy posiblemente no los manejaban.

Se había decidido aplicar la prueba a estudiantes de séptimo grado basados en lo que piden los estándares curriculares para el Pensamiento numérico:

> "identificar la base y el exponente de una potencia y sus propiedades, multiplicar y dividir potencias de la misma base, explicar por qué un número elevado al exponente cero es igual a uno e interpretar las potencias con exponentes fraccionarios y negativos y realizar operaciones combinadas con ellas"[25]

A pesar de que en el momento de la prueba los docentes ya habían trabajado los temas relacionados con la potenciación muchos de los ítems no fueron contestados. Analizando esta situación se percibió que en este nivel los estudiantes no están familiarizados con las potencias y para ellos el uso de este concepto es menos frecuente. Por lo tanto, el nivel de comprensión de las potencias es menor, al igual que la utilización las propiedades en ciertos ejercicios. Además, los profesores recomendaron aplicar la prueba a estudiantes de octavo grado para los que el uso del concepto de la potenciación y sus propiedades es más habitual y lo utilizan de forma más frecuente. Por tanto se decidió cambiar el grupo objeto de estudio por octavo grado, teniendo también en cuenta que los ítems en blanco no son prueba de errores, sino de falta de conocimientos, entonces para cumplir el objetivo de este trabajo dicha situación no era favorable. Los estudiantes de octavo grado responderían la mayor cantidad de ítems.

[25] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Op. Cit., p.30

Fotografía 1. Estudiantes del colegio Las Mercedes, Lebrija.

El día 15 de Julio del 2010 se aplicó la prueba a los grados 8-1 y 8-2 del Colegio Integrado Nuestra Señora de las Mercedes. Los estudiantes respondieron con aciertos o errores, pero respondieron las preguntas.

Se creó un banco de errores con los más comunes, lo que sirvió como guía para la clasificación final y posteriormente la elaboración del test final. Se asumió como *error común* aquel que lo presentaban por lo menos tres alumnos. En este primer intento de clasificación, se tuvo en cuenta la propuesta de Radatz para clasificar los errores encontrados.

Los errores presentados durante las pruebas de los grados séptimo se ubican en las categorías tres y cuatro, de la propuesta de Radatz, estas categorías no explican de forma concisa las diferencias entre cada uno de los errores presentados. Aunque es de resaltar que la teoría de Radatz, basada en la teoría del procesamiento de la información, era la que mejor se ajustaba al estudio no hace diferencias significativas para los errores presentados en la potenciación. Luego, se comenzó a hacer evidente la necesidad de crear una categoría que explicara de forma más explícita los errores presentados por los alumnos.

La siguiente tabla muestra el tipo de error y el número de errores diferentes, analizados en esta etapa, según las categorías propuestas por Radatz.

Clasificación Radatz	Tipo	Se presentan
Errores debidos a dificultades del lenguaje	1	0
Errores debidos a dificultad espacial	2	0
Dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes); ignorancia del algoritmo, error de tipo aritmético, conocimiento inadecuado de hechos básicos y dominio insuficiente de símbolos	3	36
Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	4	25
Errores debidos a la aplicación de reglas irrelevantes	5	0

Tabla 1. Clasificación de los errores, según Radatz, de los estudiantes de octavo grado

Finalmente, se escogió el tiempo adecuado para la solución del test. Media hora fue el tiempo considerado suficiente para responder todos los veinte ítems.

Segunda etapa

Finalmente en esta etapa se diseñó el test, teniendo en cuenta las consideraciones observadas en la primera etapa.

La prueba final tenía 20 ítems entorno al concepto de potenciación y del uso de sus propiedades.

Ítem	Número
$5^2 =$	1
$(-4)^3=$	2
$-(3)^2=$	3
$-3^2=$	4
$3^{-2} =$	5
$(1/3)^{-2} =$	6
$(3/2)^{-3} =$	7
$1/3^{-2} =$	8
$[(x)^3]^2=$	9
$[y^{3-2}]^2=$	10
$(a+b)^2=$	11
$(ab)^2=$	12
$[xyz]^3=$	13
$10^{69}/10^{68} =$	14
$(-2)^{25} \times (-2)^{25}/(-2)^{49} =$	15
$[(1/x^2) \times (x^{23})^5]^2/[x^{30} \times x^{-15}]^{15}=$	16
$2^{10}/2^8 = 256$	17
$(3 \times 4)^3 = (12)^3 = 1728$	18
$(3)^2(5)^2 = 9 \times 25 = 225$	19
$2^0 = 1$	20

Tabla 2. Enumeración de cada ítem

A continuación se muestra el test final.

NOMBRE: **GRADO:**

INSTITUCIÓN EDUCATIVA:

Resuelva los siguientes ejercicios, escribiendo el procedimiento que utilizó:

$5^2 =$

$(-4)^3 =$

$-(3)^2 =$

$-3^2 =$

$3^{-2} =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

$\frac{1}{3^{-2}} =$

$[x^3]^2 =$

$[y^{3-2}]^2 =$

$(a+b)^2 =$

$(ab)^2 =$

$[xyz]^3 =$

Simplificar la expresión, aplicando propiedades de potenciación:

$$\frac{10^{69}}{10^{68}} =$$

$$\frac{(-2)^{25} \times (-2)^{25}}{(-2)^{49}} =$$

$$\frac{\left[\frac{1}{x^2} \times (x^{23})^5\right]^2}{[x^{30} \times x^{-15}]^{15}} =$$

Escriba otro procedimiento para simplificar la expresión utilizando propiedades de potenciación:

$$\frac{2^{10}}{2^2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1024}{4} = 256$$

$$(3 \times 4)^3 = (12)^3 = 1728$$

$$(3)^2(5)^2 = 9 \times 25 = 225$$

Observe el siguiente procedimiento. Si hay algún error márquelo y escriba su respuesta, si no lo hay justifique cada paso.

$$2^0 = 2^{1-1} = \frac{2^1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$$

La prueba final se dividió en cuatro partes:

- La primera contiene 13 ítems que los estudiantes debían resolver escribiendo todo el procedimiento llevado a cabo. En esta primera parte del test, se buscaba que los estudiantes aplicaran el concepto de potenciación y sus propiedades para llegar a la respuesta.

- La segunda parte consta de 3 ítems (14, 15 y 16). Aquí los estudiantes debían simplificar las expresiones utilizando las propiedades de la potenciación. En estos ítems, la forma más corta de llegar a la respuesta era aplicando las propiedades. Dado que el interés del trabajo es identificar los errores cometidos era necesario que aplicaran las propiedades, por ello se colocaron exponentes grandes en los ejercicios, así los estudiantes debían buscar caminos más cortos y no simplemente multiplicando y dividiendo.

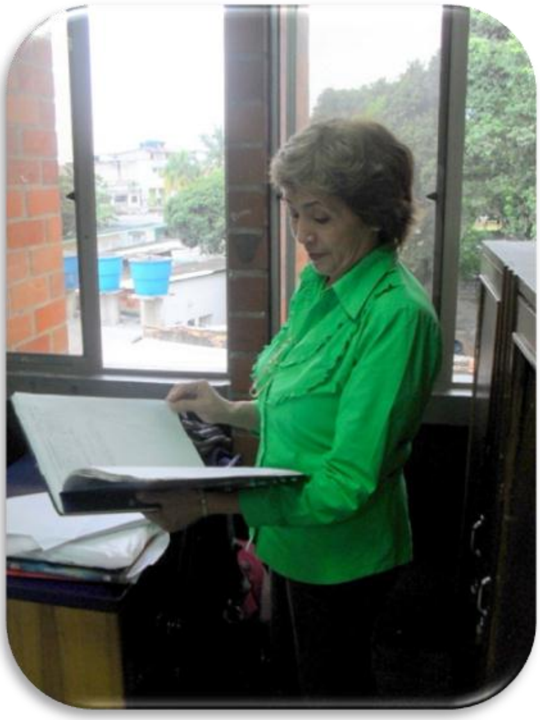
- La tercera parte consta de 3 ítems (17, 18 y 19), aquí se mostró un procedimiento para llegar a la respuesta y los estudiantes debían escribir otro procedimiento para llegar a la misma respuesta. Otro procedimiento posible era aplicar las propiedades de potenciación.

- La cuarta parte consta de un solo ítem (20), el estudiante tenía que observar un procedimiento, si éste tenía algún error debía señalarlo y escribir su propia respuesta. Si el procedimiento era correcto, debían justificar cada paso. Este ítem se diseñó para poner de manifiesto la capacidad del estudiante para "explicar por qué un número elevado a la exponente cero es igual a uno"[26], dado que en las pruebas iniciales al test, los estudiantes justificaban su respuesta aludiendo a la memoria, es decir, que conocían la respuesta pero no la justificaban con algún procedimiento. Y por otro lado algunos expresaban no recordarla.

[26] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL, Op. Cit., p.30

Tercera etapa

En esta etapa del trabajo, se aplicó el test final a la población de estudio: cuatro cursos de octavo grado, 8-1, 8-2, 8-3 y 8-4, de la Institución Educativa Las Américas. La profesora de estos cursos es la señora Carmen Alicia Velasco, Ingeniera Industrial de la Universidad Industrial de Santander. Junto con la docente se llegó al acuerdo de aplicar la prueba sin anunciarla previamente a los estudiantes. La prueba se aplicó el martes 3 de agosto de 2010 en la hora de clase de la materia.



Fotografía 2. Carmen Alicia Velasco

En la aplicación del test, la profesora Carmen manifestó a los estudiantes que si respondían todos los ítems de manera correcta, la prueba valdría como una nota extra al final del periodo académico. Antes de dar inicio a la prueba se leyó cada uno de los enunciados del test.

La prueba, la presentaron 120 estudiantes. En dicho día, se eligieron los alumnos que serían entrevistados, estos fueron escogidos por la profesora de forma aleatoria, con el fin de ser totalmente imparcial respecto a las posibles explicaciones dadas por los alumnos a los errores presentados en la prueba.

Fotografía 3. 8-2 durante la prueba.

Cuarta etapa

En esta etapa de la investigación, se realizó la entrevista a cinco estudiantes. Esta actividad se realizó el martes 10 de agosto de 2010 después de contados y clasificados los errores. La entrevista fue individual y el objetivo fue indagar el por qué de cada una de sus respuestas.

5. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

En este capítulo se presentará la clasificación de los errores que surgieron de la aplicación del test. La clasificación propuesta, surge de analizar los errores cometidos por los estudiantes por medio de las categorías de Radatz y del banco de errores construido en la etapa de aplicación de la prueba piloto, el cual daba una idea de los errores que aparecerían en la prueba final.

A continuación se presenta una tabla que muestra el tipo de error y el número de errores diferentes en cada categoría, según las categorías de Radatz

Clasificación Radatz	Tipo	Se presentan
Errores debidos a dificultades del lenguaje	1	0
Errores debidos a dificultad espacial	2	0
Dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes); ignorancia del algoritmo, error de tipo aritmético, conocimiento inadecuado de hechos básicos y dominio insuficiente de símbolos	3	53
Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	4	32
Errores debidos a la aplicación de reglas irrelevantes	5	0

Tabla 3. Clasificación de los errores, según Radatz

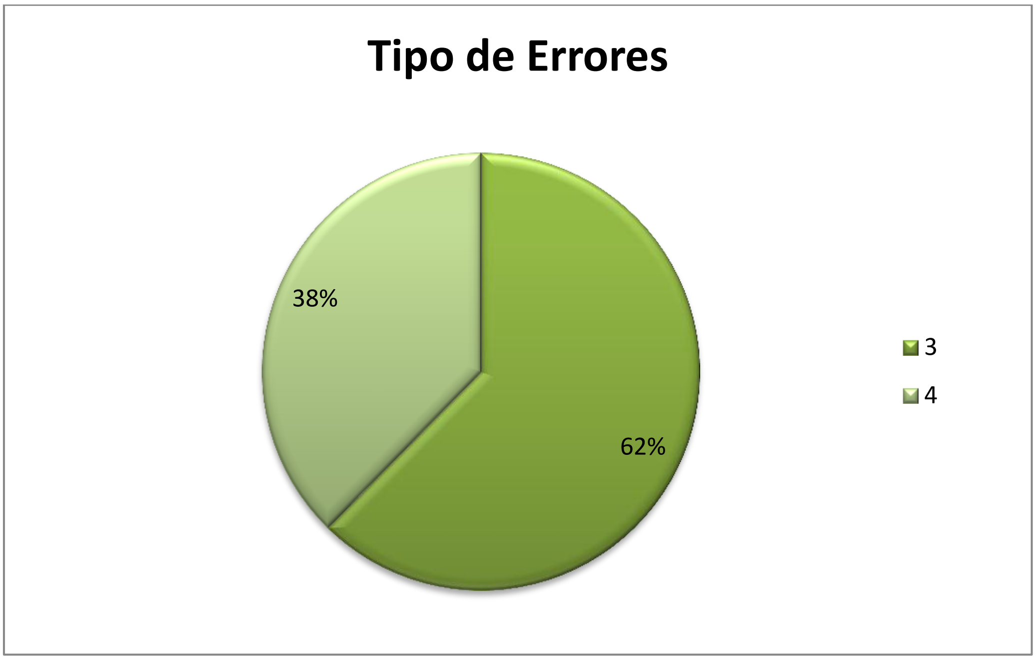


Figura 1. Porcentaje por Tipo de Errores

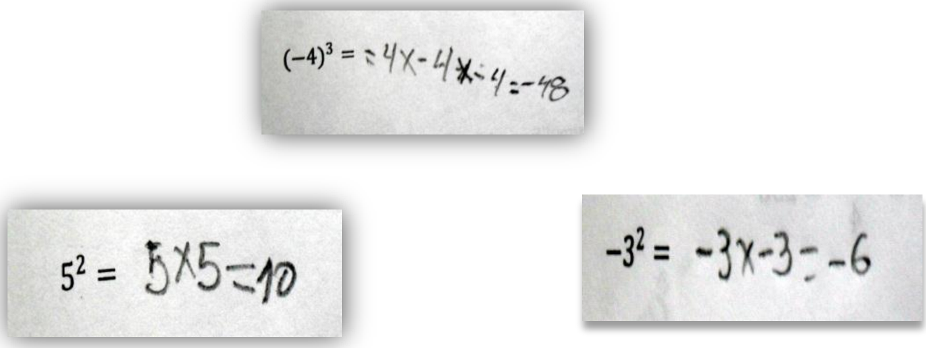
De la tabla y el diagrama de torta podemos concluir lo siguiente:

- Los errores que se presentan en el concepto de la potenciación se clasifican en las categorías tres y cuatro.

- La mayor cantidad de errores se presentan en la categoría tres. Esto es corresponde, entre otras causas, a que todos los tipos de errores debidos a fallas con la aritmética, al manejo insuficiente de los símbolos y pre-saberes, son fallas debidas al manejo equivocado de conceptos anteriormente aprendidos. Por lo tanto, estos errores no son debidos al aprendizaje de la potenciación, son obstáculos no superados de conceptos anteriormente vistos.

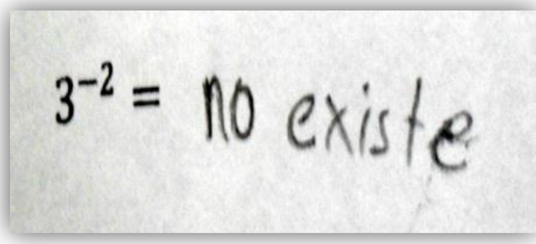
- Los errores presentes en la segunda categoría son debidos a que el estudiante no es capaz de superar aprendizajes anteriores. Por ello, intenta responder conforme a lo que recuerda de conceptos, tareas, problemas, ejercicios...etc., resueltos anteriormente.

A continuación se muestran algunos ejemplos de errores que se encuentran dentro de la categoría tres, propuesta por Radatz, debido que aquí se encuentran la mayor cantidad de errores.



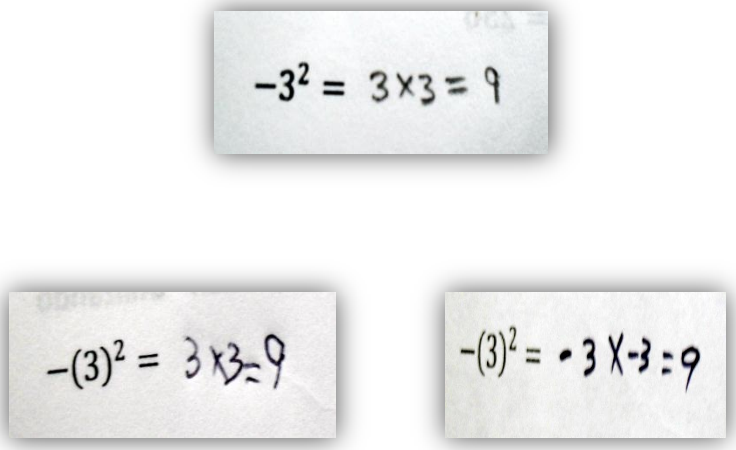
Fotografías 4. Errores de Tipo Aritmético

En las imágenes anteriores se observan errores de tipo aritmético, donde se observa claramente que el alumno sabía el procedimiento, multiplicar la base tantas veces como lo indica el exponente. Lamentablemente, se equivoca en la multiplicación.



Fotografía 5. Error debido a la ignorancia del algoritmo

En la imagen anterior el alumno asegura que no existe respuesta para dicho problema, demostrando que ignora el procedimiento (algoritmo) necesario para resolver el problema.



Fotografía 6. Errores debidos a manejo insuficiente de los símbolos

En las fotografías anteriores los estudiantes saben el concepto de potenciación, multiplican la base tantas veces como lo indica el exponente, pero omiten el símbolo negativo. Esto hace evidente el poco manejo del signo negativo.

Al recordar que el objetivo del estudio es identificar los errores más comunes al aplicar las propiedades de potenciación y observar el resultado de la clasificación de los errores encontrados con las categorías de Radatz, se decide dividir la clasificación. Pues en la clasificación de Radatz, se establece dentro de un mismo rango los errores que en este estudio se deben diferenciar, los cuales son: los de tipo aritmético, los errores debidos a la ignorancia del algoritmo y al manejo inadecuado de símbolos y pre-saberes necesarios.

La ignorancia del algoritmo es de significativo interés para el objetivo del estudio, esto demuestra una falta de conocimiento del conjunto de operaciones que permiten hallar la solución del problema, además en este estudio se buscan los errores al aplicar las propiedades de potenciación, no indagar sobre la naturaleza de los errores aritméticos. Por tanto, ignorancia del algoritmo y errores aritméticos no pueden estar dentro de una misma categoría.

Otro tipo de error, es el que se presenta debido al manejo inadecuado de los símbolos matemáticos, ya que, éstos pueden influir en el manejo de las propiedades, por ejemplo muchos estudiantes conocen el concepto de la potenciación pero se equivocan cuando tiene que usar el signo negativo.

Por lo tanto, se decidió separar la categoría número tres, propuesta por Radatz, en tres partes diferentes, esto para poder indagar de manera más profunda la naturaleza de los mismos.

Luego, surge una nueva clasificación que tiene cuatro categorías, en la siguiente figura se presentan las nuevas categorías y el significado a cada tipo de error.

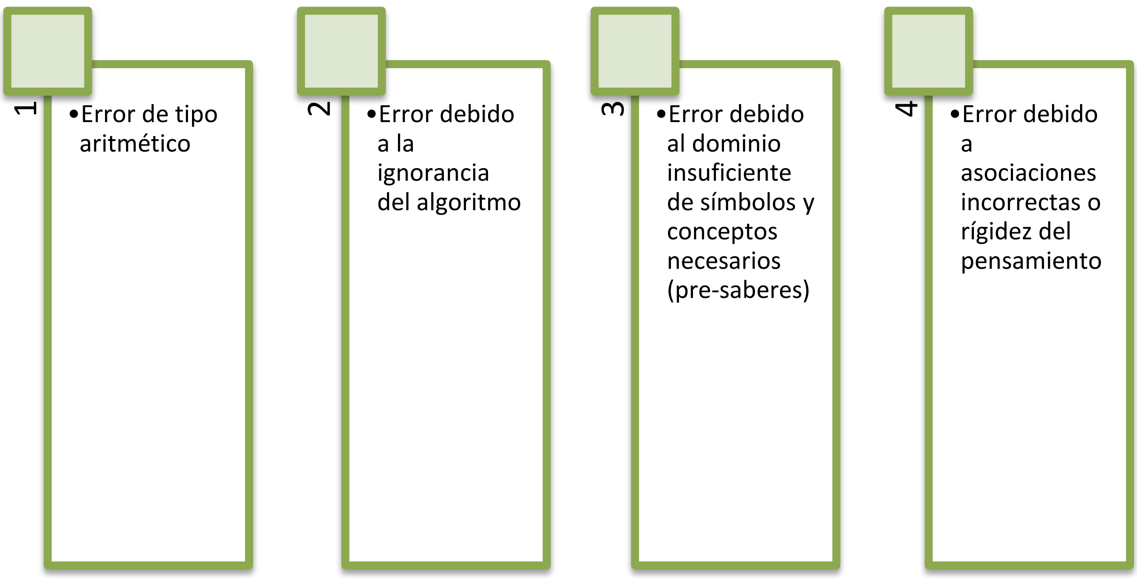


Figura 2. Clasificación de los errores, según Martínez

Esta nueva clasificación, que surgió de separar la categoría número tres y utilizar las cuatro propuestas por Radatz, muestra con mayor claridad las diferencias entre cada uno de los tipos de errores que se presentan en la potenciación.

Error de tipo aritmético

Cuando hablamos de error de tipo aritmético, hace referencia a los errores debidos al mal uso de las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división.

Error debido a la ignorancia del algoritmo

Un error se clasifica en esta categoría cuando los estudiantes olvidan el conjunto de procesos que permiten hallar la solución al problema o desconocen las operaciones.

Error debido al manejo insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre saberes)

Los errores debidos al dominio insuficiente de símbolos, son las fallas debidas a su manejo inadecuado o al desconocimiento de corchetes, paréntesis y signos a la hora de resolver los ejercicios. Los errores debidos al manejo insuficiente de los conceptos necesarios, son aquellos que se presentan cuando el estudiante no maneja de forma correcta el conjunto de reglas necesarias para responder de forma correcta el problema planteado.

Los errores debidos al manejo insuficiente de símbolos y conceptos necesarios se clasifican dentro de una misma categoría debido a que en ambos casos el error responde a una falla debida al poco manejo de los conceptos necesarios para resolver la tarea propuesta.

Error debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento

Las asociaciones incorrectas se deben a que el estudiante intenta resolver un nuevo ejercicio aplicando procedimientos que usó en ejercicios anteriores en los cuales tuvo éxito. La rigidez del pensamiento, se presenta cuando el estudiante sólo responde a reglas memorizadas y no es capaz de dar explicaciones a sus respuestas.

Las asociaciones incorrectas y la rigidez del pensamiento se clasifican dentro de una misma categoría debido a que en ambos casos los errores responden a que el estudiante no es capaz de diferenciar entre los aprendizajes anteriores y los nuevos.

Aunque el número de errores debidos a la ignorancia del algoritmo y a errores en las operaciones básicas, no fueron muy significativos, son alarmantes debido a que este concepto, en octavo grado deben manejarlo de manera excelente para un buen desempeño académico.

Se procedió a clasificar todos y cada uno de los errores presentados en la prueba y se obtuvo lo siguiente:

Clasificación Martínez	Tipo	Se presentan
Error de tipo aritmético	1	4
Ignorancia del algoritmo	2	6
Dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes)	3	43
Asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento	4	32

Tabla 4. Clasificación de los errores según Martínez

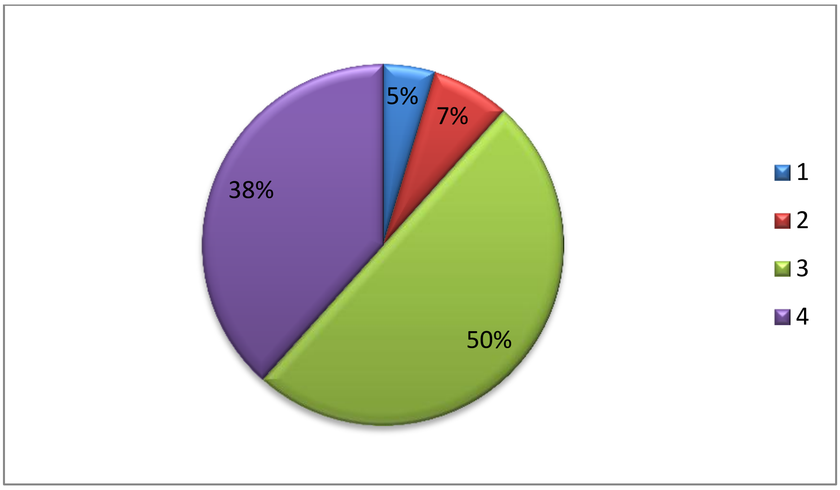
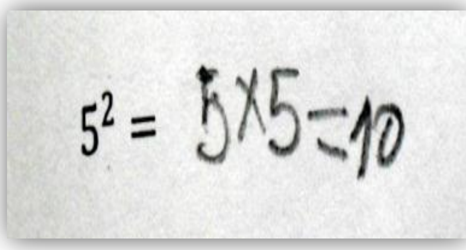


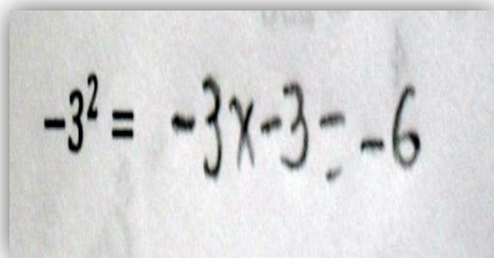
Figura 3. Porcentaje por Tipo de Error según Martínez

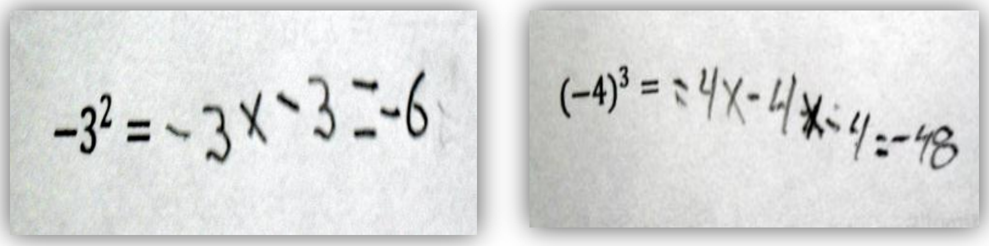
A continuación se ejemplificarán cada una de las categorías, con algunos errores encontrados.

5.1. ERRORES DE TIPO ARITMÉTICO

Los errores que a continuación se muestran, corresponden a los mismos presentados para la categoría de Radatz, teniendo en cuenta que solamente se identificaron cuatro errores en esta categoría.



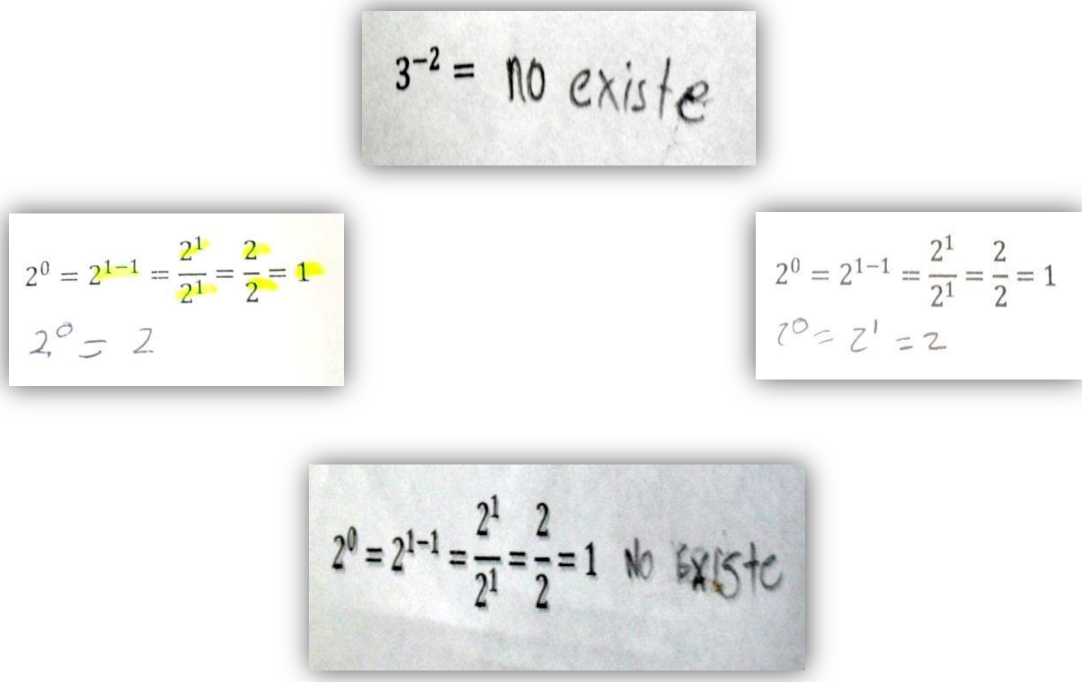




Fotografías 7. Errores de tipo aritmético

Aunque se hace evidente el adecuado manejo del concepto de la potenciación, multiplican la base tantas veces como lo indica el exponente, los estudiantes se equivocan en la operación. En una de las entrevistas *Óscar David* lo confirmó de manera muy directa: *“me quedó mal la multiplicación”.*

5.2 ERRORES DEBIDOS A LA IGNORANCIA DEL ALGORÍTMO



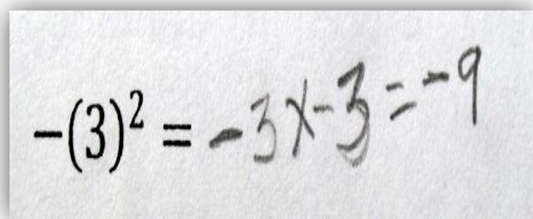
Fotografías 8. Errores debidos a la ignorancia del algoritmo

En total se presentaron 6 errores de tipo 2. En las fotografías se observan ejemplos de errores debidos a la ignorancia del algoritmo. En todas las fotografías, se hace evidente un olvido completo o parcial de los procedimientos para llegar a la respuesta. No tienen en cuenta, por completo, en tres de las fotografías, todo el procedimiento y aseguran que el resultado es *2.* Y en la primera fotografía el estudiante asegura que no existe respuesta para dicho ejercicio. *Shirley Viviana* en la entrevista respondió de manera muy elocuente, para el último ítem *"se me olvidaron las reglas".*

5.3 Errores debidos al manejo inadecuado de símbolos y conceptos necesarios

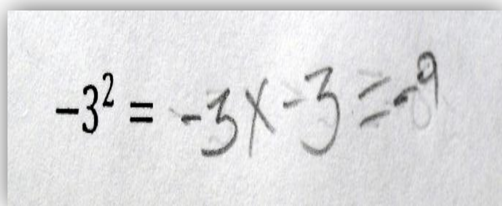
En esta categoría se están evidenciando los errores donde los estudiantes no mostraron procedimientos correctos haciendo de un lado los símbolos, sin tener en cuenta la función de éstos en cada ejercicio. Se presentaron en total 43 errores de este tipo.

En las siguientes imágenes se muestran ejemplos de estos errores:



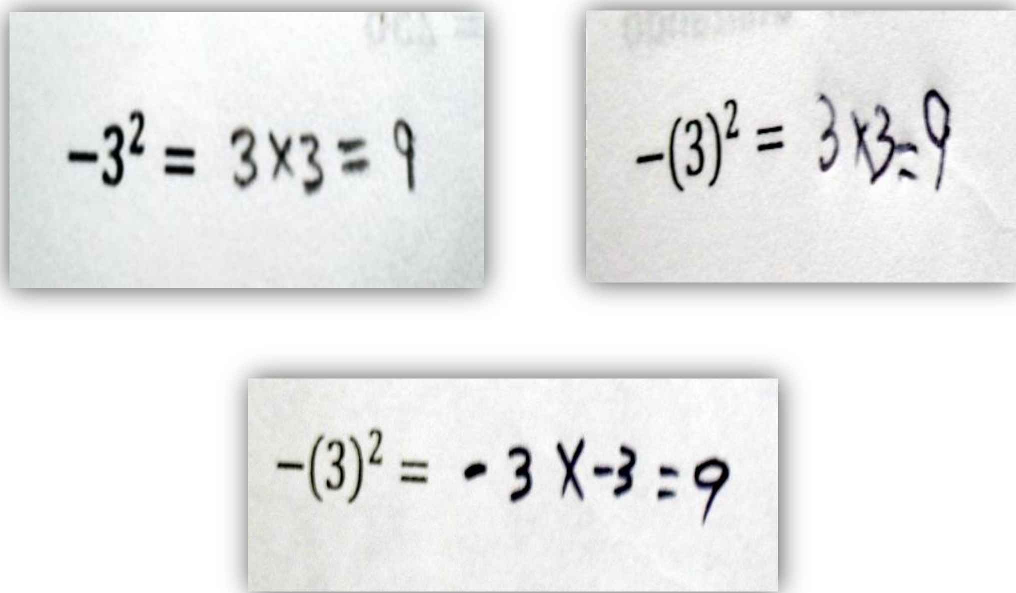
Fotografías 9. Error debido al manejo inadecuado de símbolos

En el anterior error, el estudiante se equivoca con el signo "menos" lo repite, hace caso omiso del paréntesis que es el símbolo que le está indicando a quien debe afecta el exponente. Ahora, cuando multiplica hay dos opciones pone en la respuesta el signo negativo, porque sabe que la respuesta debe ser negativa o se equivoca al hacer el producto de los signos.



Fotografías 10. Error debido al manejo inadecuado de símbolos

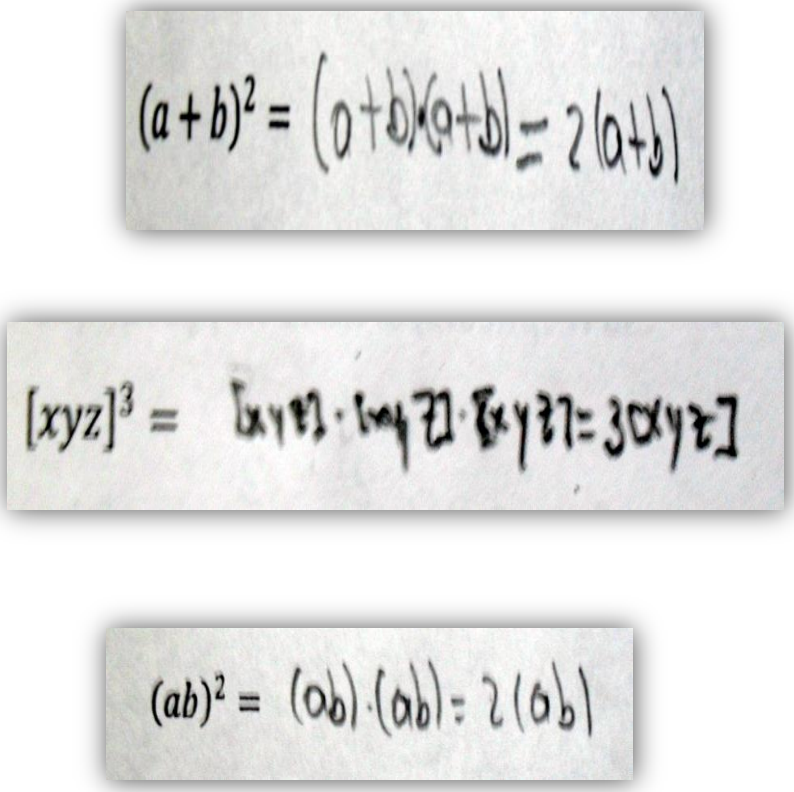
En esta fotografía, nuevamente sucede lo mismo que con el anterior o se equivoca con el producto de los signos o pone el signo negativo porque sabe que la respuesta debe ser negativa. Lo que sí es evidente es que los 26 estudiantes que cometieron este error no tienen claro el manejo del signo menos.



Fotografías 11. Errores debidos al manejo inadecuado de símbolos y conceptos necesarios

En las tres imágenes anteriores se pueden apreciar errores, donde los estudiantes o no saben qué hacer con el signo negativo o no le dan importancia, e intentan responder cualquier cosa. Esto denota un manejo precario del signo menos. Sebastián comento al respecto “*es que no sé muy bien manejar el negativo*”

Ahora se muestran ejemplos de errores debidos al manejo insuficiente de conceptos necesarios:



Fotografías 12. Errores debidos a dominio insuficiente de conceptos necesarios

En la primera fotografía se hace evidente una deficiencia en el manejo del concepto de producto de binomios. El estudiante demuestra no manejar el concepto necesario para resolver dicho problema.

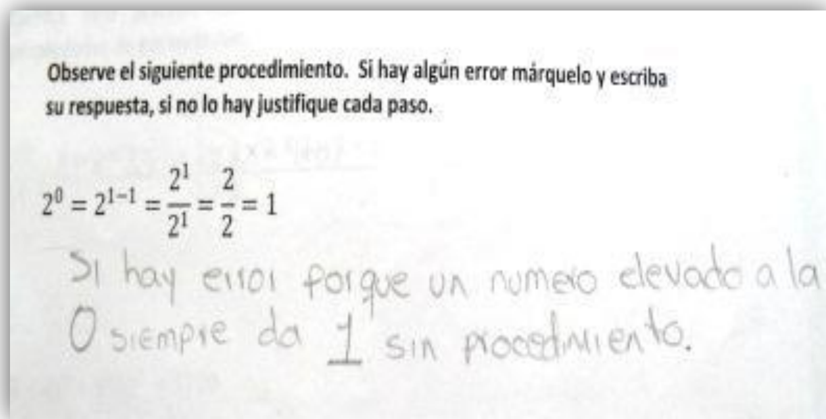
En la segunda fotografía, se encuentra un error debido a una falla en el producto de los términos, esto pone de manifiesto el poco manejo del concepto de la potenciación. Óscar David comentó al respecto “*es que yo no entiendo muy bien la matemática*”.

En la tercera fotografía se muestra un error debido a una falla en el concepto de multiplicaciones de expresiones algebraicas, el estudiante asume como dos veces el producto de dichas bases.

Todos los errores anteriores tienen como característica que, para los estudiantes, el producto de dichas expresiones algebraicas es lo mismo que la sumarlas.

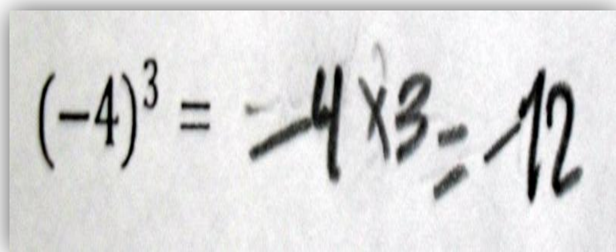
5.4 Error debido a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento

Los estudiantes hicieron evidente asociaciones de procedimientos usados en problemas o ejercicios anteriores. En total, se presentaron 32 errores de este tipo.



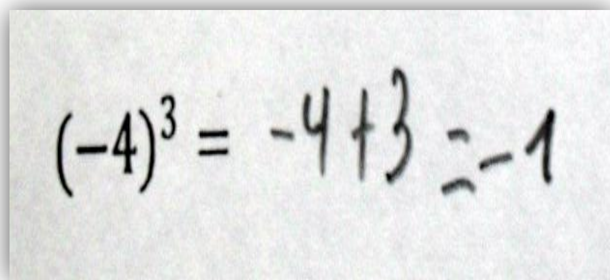
Fotografías 13. Error debido a rigidez de pensamiento

El estudiante manifiesta conocer una regla memorizada, pero desconoce por completo las propiedades de la potenciación, todo el procedimiento para el alumno es innecesario. Lamentablemente, en muchas ocasiones los maestros y alumnos enseñan y aprenden, las propiedades de la potenciación como un conjunto de reglas sin significado.



Fotografía 14. Error debido a asociaciones incorrectas

En esta fotografía se hace evidente una asociación incorrecta del estudiante, baja el exponente y lo multiplica por la base. El error se debe al intentar aplicar la misma técnica usada en ejercicios anteriores para resolver. Smithcherine comento al respecto "*respondí como un ejercicio parecido resuelto anteriormente en clase*"



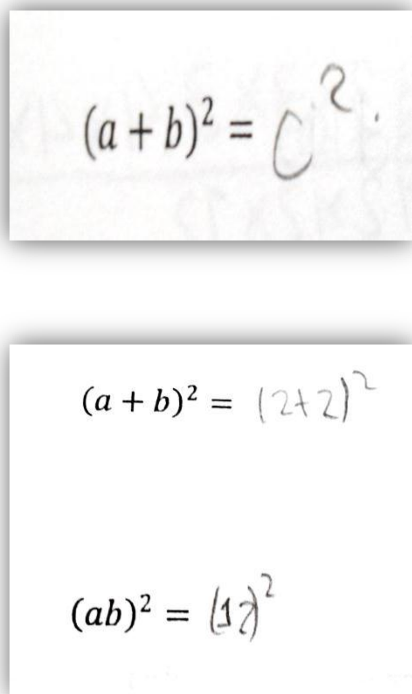
Fotografía 15. Error debido a asociación incorrecta

Aquí tenemos otra asociación incorrecta, al sumar la base y el exponente, de nuevo, este error se debe al aplicar las mismas técnicas, usadas en problemas anteriormente resueltos. Mariflor confirmo el tipo de error, de una manera muy particular “*había visto un ejercicio muy parecido*”.

Es de aclarar que este error se clasificó en esta categoría debido a que había resuelto, de forma exitosa, el ejercicio $5^2 =$. Luego, conocía el algoritmo de la potenciación. Por lo tanto, este error no se podía deber a una ignorancia del algoritmo. Este criterio, el éxito en la solución de dicho ítem, se tuvo muy en cuenta a la hora de clasificar cada uno de los errores.

Es de aclarar que del total de los 120 alumnos que presentaron la prueba 89 tuvo éxito en dicho punto, escribieron la solución de la forma correcta multiplicando la base tantas veces como lo indica el exponente, 16 no escribieron nada y 13 tuvieron otro tipo de error.

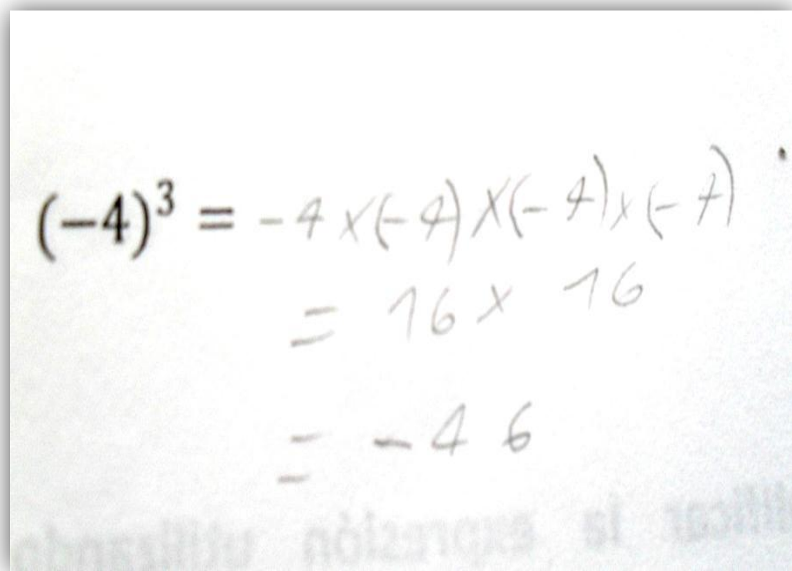
Otros errores observados fueron:



Fotografías 16. Errores debidos a asociaciones incorrectas

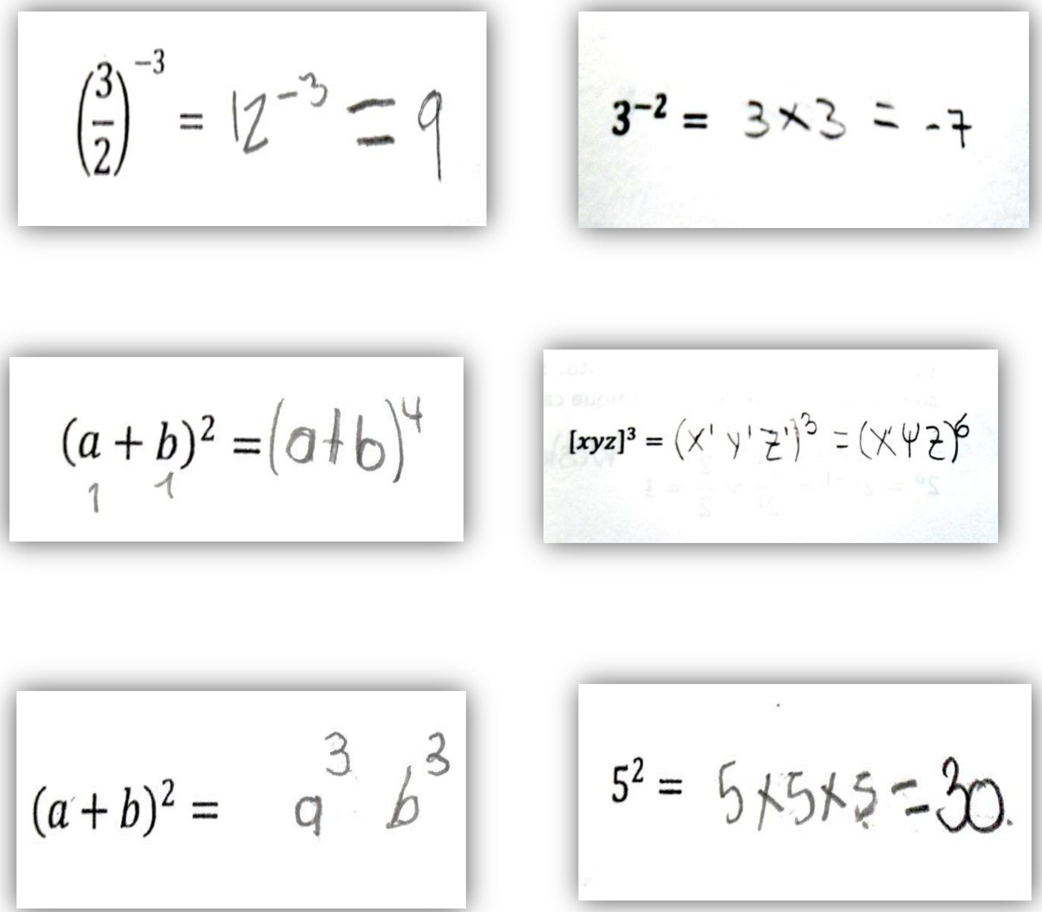
Aquí, se pueden apreciar errores debidos a que el estudiante reemplaza las variables por valores inexistentes, esto debido a que intentan resolver aplicando procedimientos que uso en ejercicios anteriores en los cuales tuvo éxito. “El desea eliminar la incertidumbre que le produce trabajar con algo no conocido y asigna a la letra un valor elegido por él de forma personal”[27]. Óscar David durante la entrevista confirmó el argumento de este error “*como me acordaba, de ejercicios anteriores, resolví*”. Shirley Viviana comentó, lo mismo “*intente responder a los ejercicios parecidos*”, aquí ella se refiere a ejercicios parecidos resueltos anteriormente en clase.

En la última parte, se muestran ejemplos de diferentes tipos de respuestas que son muy elocuentes, ninguna de estas respuestas se encontraba dentro del banco de errores, y por lo tanto, a lo más la presentaban dos estudiantes. Estos errores no se tuvieron en cuenta. Smithcherine, lo explica de mejor manera “*intente responder lo que fuera, para no dejar la hoja en blanco*” estos tipos de errores al azar o debidos a los nervios, no fueron tenidos en cuenta por qué bien lo dijo Rico “los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia”[28].



Fotografía 17. Error debido al azar

[27] PALAREA, Op. Cit., p. 61
[28] RICO, y KILPATRICK, Op. Cit., p. 84



Fotografías 18. Errores debidos al azar

En los anexos se encuentra el banco de errores organizado en una tabla.

6. CONCLUSIONES

Con base en lo hallado en la clasificación propuesta en el estudio, se puede concluir que los tipos de errores que se presentan con mayor frecuencia, al aplicar las propiedades de la potenciación son: los errores debidos al dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios (pre-saberes), le siguen los debidos a asociaciones incorrectas o con rigidez del pensamiento, después los debidos a la ignorancia del algoritmo y finalmente los de tipo aritmético.

Es de resaltar, que muchos estudiantes comienzan el aprendizaje del concepto de la potenciación con deficiencias en conceptos anteriores, en la comprensión del lenguaje matemático y de sus símbolos de representación. Lo anterior, provoca obstáculos en la construcción de nuevos conceptos, que a corto plazo harán que el estudiante cometa errores.

Algunos estudiantes reconocen la matemática como un conjunto de reglas y fórmulas por memorizar. Esta concepción hace que el estudiante deje a un lado los procedimientos que justifican las propiedades o resultados que son presentados por el docente, que no intente entenderlos y que sólo busque memorizarlos para aplicarlos en otros ejercicios. Y en muchas ocasiones, la aplicación de procedimientos memorizados se lleva a cabo, sin ser conscientes de las condiciones que cada ejercicio debe cumplir, intentan seguir el procedimiento utilizado para resolver un ejercicio anterior, en el nuevo ejercicio que está resolviendo.

Ahora, esta clasificación es una entre muchas. Lo que sigue es determinar estrategias enfocadas en la enseñanza de la matemática. Los docentes deben ser conscientes de los errores y dificultades que generan la propia naturaleza de la matemática y además su enseñanza, esto con el fin de planear clases y actividades donde se considere el error como un instrumento de aprendizaje que permita al estudiante comparar diferentes procesos y elaborar los propios.

7. BIBLIOGRAFÍA

CAÑADAS, María C. y CASTRO, Encarnación. Justificando el resultado de la suma de dos números pares. Dificultades y errores. En: XI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (XI JAEM). [En línea]. (2004); 7 p. [Consultado 2 de enero del 2010]. Disponible en <http://fqm193.urg.es/producción-cientifica/congreso/ver_detalles/115784/>

ENGLER, Adriana; GREGORINI, María Inés; MULLER, Daniela; VRANCKEN, Silvia y HECKLEIN, Marcela. En: Los Errores en el aprendizaje de Matemática. Boletín de la SOAREM. [En línea]. (2004); 5 p. [Consultado 8 de septiembre del 2009.]. Disponible en http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf

FRANCHI, Lissete y HERNÀNDEZ De Rincón, Ana I. Tipología de errores en el área de la geometría plana. En: La revista venezolana de educación. Vol. 8, No. 025 (2004); p. 196-204.

INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Documentación: Citas y notas de pie de página. Bogotá: ICONTEC, 2002. 23 p. (NTC 1487)

KILPATRICK, J.; Gómez, P. y Rico L. Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana, 1995. 131 p.

MATA, Liliana E.; PORCEL, Eduardo A. y ROMERO, Celeste R. Conocimientos previos sobre operaciones en reales y sus propiedades de ingresantes a Fa.C.E.N.A. En: Comunicaciones Científicas y Tecnológicas. [En línea]. (2005). [Consultado 1 de dic. del 2009.]. Disponible en <http:// www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-008.pdf >

MARTÍNEZ, Irma Z.; LENTINI, Marta L.; CRESPO, Sergio H. y LENTINI, María C. Observación y análisis de errores en una expresión con valor absoluto cometidos en una evaluación: un estudio de caso. En: Libro de resúmenes. (2006); p. 54-59

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares para la excelencia en la educación. 1 ed. Bogotá: MINEDUCACIÓN, 2002. 144 p.

MOLINA, Marta. Análisis y clasificación de los errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En: Investigación en educación matemática. (2007); p. 53-69

PALAREA, María de las Mercedes. La adquisición y la detección de errores comunes en álgebra por alumnos de 12 a 14 años. La Laguna, 1998, 532 p. Tesis (Doctora en Ciencias Matemáticas). Universidad de la Laguna. Facultad de matemáticas. Departamento de Análisis Matemático.

RUANO, Raquel M.; SOCAS, Martín M. y PALAREA, Mercedes M. Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. En: Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. (2003); p. 311-322

Tipos de Errores presentados por los Estudiantes		
Tipo	N° que lo presentan	Clasificación del error
$5 \times 5 = 10$	7	1
$5 \times 2 = 10$	8	4
$(-4)^3 = -4 \times -4 \times -4 \neq -64$	40	1
$(-4)^3 = 12$	4	4
$(-4)^3 = -4/3$	3	4
$(-4)^3 = -1$	1	4
$-(3)^2 = 6$	4	4
$-(3)^2 = -3/2$	1	4
$-(3)^2 = -3 \times -3 = 9$	17	3
$-(3)^2 = -3 \times -3 = -9$	15	3
$-(3)^2 = 3 \times 3 = 9$	4	3
$-(3)^2 = -6$	6	4
$-3^2 = -3 \times -3 \times -3 = -27$	1	4
$-3^2 = -3 - 3 = -6$	8	2
$-3^2 = -3 \times -3 = -6$	6	1
$-3^2 = 3 \times 3 = 9$	6	3
$-3^2 = -3 \times -3 = -9$	26	3
$-3^2 = -3 \times -3 = 6^2$	2	4
$3^{-2} = 6 - 2 = 4$	0	3
$3^{-2} = 3 \times 3 - 2 = 7$	1	3
$3^{-2} = 6$	10	3
$3^{-2} = 1$	6	4
$3^{-2} = 2^3 = 8$	1	4
$3^{-2} = 3$	8	3
$3^{-2} = 3 \times 3 = -9$	17	3
$3^{-2} = 3 \times 3 = 9$	22	3
$3^{-2} = 3 \times 3 = 9^{-2}$	1	3
$No\ existe$	6	2

Tipos de Errores presentados por los Estudiantes		
Tipo	N° que lo presentan	Clasificación del error
$(1/3)^{-2} = 1/3 \cdot -2/1 = -1/6$	10	1
$(1/3)^{-2} = 1/1 = 1$	6	3
$(1/3)^{-2} = 1/3 \cdot 1/3 = 1/3$	19	3
$(1/3)^{-2} = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$	21	3
$(3/2)^{-3} = 2/3 \cdot -3/3 = -9/6$	12	3
$(3/2)^{-3} = 3/2 \cdot 3/2 = 6/4$	3	3
$(3/2)^{-3} = -3/2 \cdot -3/2 = -9/4$	7	3
$(3/2)^{-3} = 3/2 \cdot 3/2 \cdot 3/2 = 27/8$	23	3
$(3/2)^{-3} = -4$	5	3
$1/3^{-2} = 1/6$	14	3
$1/3^{-2} = 1/3 \times 3 = 1/9$	24	3
$1/3^{-2} = 1/1 = 1$	12	3
$1/3^{-2} = -3/1 = 1$	3	3
$1/3^{-2} = -2$	1	3
$[x^3]^2 = x^5$	11	3
$[x^3]^2 = (a^3)^2$	4	4
$[x^3]^2 = x^2$	4	3
$[x^3]^2 = x^{3-2} = x$	6	3
$[x^3]^2 = x^9$	7	4
$(y^{3-2})^2 = y^a$	2	4
$(y^{3-2})^2 = (a^{3-2})^2$	2	4
$(y^{3-2})^2 = y^{1+2} = y^3$	13	3
$(y^{3-2})^2 = y^{-1}$	11	4
$(a+b)^2 = c^2$	11	4
$(a+b)^2 = 2(a+b)$	4	3
$(a+b)^2 = a+b$	7	3
$(a+b)^2 = a+b^2$	8	3
$(a+b)^2 = a^2/b^2$	2	4
$(a+b)^2 = a^2+b^2$	21	3
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	2	4

Tipos de Errores presentados por los Estudiantes		
Tipo	N° que lo presentan	Clasificación del error
$(ab)^2 = 2ab$	9	3
$(ab)^2 = x^2$	1	4
$(ab)^2 = ab$	9	3
$(ab)^2 = a^2/b^2$	3	4
$(ab)^2 = ab^2$	23	3
$[xyz]^3 = xyz^3$	13	3
$[xyz]^3 = a^3$	1	4
$[xyz]^3 = 3xyz$	4	3
$[xyz]^3 = xyz$	3	3
$[xyz]^3 = x^3 + y^3 + z^3$	7	3
$10^{69}/10^{68} = 1$	0	4
$10^{69}/10^{68} = 10^{69+68}$	2	4
$10^{69}/10^{68} = 690/680$	4	4
$10^{69}/10^{68} = 69/68$	1	4
$10^{69}/10^{68} = x$	0	4
$Número\ Extraño$	1	2
$[(1/x^2) \times (x^{23})^5]^2/[x^{30} \times x^{-15}]^{15} =$	2	3
$(-2)^{25} \times (-2)^{25}/(-2)^{49} = (-2)^{25}$ $cancelación$	1	4
$(-2)^{25} \times (-2)^{25}/(-2)^{49} = 4^{25}/(-2)^{49}$	7	3
$(-2)^{25} \times (-2)^{25}/(-2)^{49} = (-2)^{50}/(-2)^{49}$	1	3
$(3)^2(5)^2 = (3/5)^2$	0	4
$(3 \times 4)^2 = (4/3)^3$	0	4
$2^0 = 0$	1	4
$2^0 = 1\ (regla)$	8	4
$2^0\ no\ existe$	6	2
$2^0 = 2$	4	2
$2^1 = 1$	3	2