

**DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL
ESCALAMIENTO DE UN MODELO FÍSICO APLICADO A
CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO**

**CÉSAR LEANDRO QUESADA SÁNCHEZ
CÉSAR ORLANDO ARRIAGA FAJARDO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA, MAYO 2006**

**DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL
ESCALAMIENTO DE UN MODELO FÍSICO APLICADO A
CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO**

**CÉSAR LEANDRO QUESADA SÁNCHEZ
CÉSAR ORLANDO ARRIAGA FAJARDO**

Trabajo de Grado para obtener el título de Ing. de Petróleos

Director

JULIO CÉSAR PÉREZ ANGULO

Ingeniero de Petróleos

Codirectora

ADRIANA MARCELA MÉNDEZ BOHÓRQUEZ

Ingeniera de Petróleos

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-QUÍMICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA DE PETRÓLEOS
BUCARAMANGA, MAYO 2006**

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a:

Universidad Industrial de Santander

Centro de Investigación del Gas y del Petróleo (CIGP), a su director el Ingeniero Julio César Pérez, a los ingenieros Edwin, Leonardo, Lina y Dayanna y a su secretaria Maria Consuelo, por su apoyo y colaboración.

Manuel Cabarcas Simancas, Ingeniero de Petróleos, por sus consejos, por la confianza depositada en nosotros y por la oportunidad que nos brindó en la realización de este proyecto.

Adriana Marcela Méndez Bohórquez, Ingeniera de Petróleos, por su gran aporte en la realización de este proyecto. Sin su apoyo no sabemos que hubiese sido de este proyecto.

Elkin Santafé, Ingeniero de Petróleos, por las sugerencias hechas siempre encaminadas hacia la excelencia de nuestro trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. MECANISMOS Y FUERZAS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO	3
1.1. FUERZAS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO	3
1.1.1 Fuerzas que Actúan sobre los Cuerpos	4
1.1.2 Fuerzas Viscosas	4
1.1.3 Fuerzas Capilares	6
1.1.3.1 Tensión superficial e interfacial	6
1.1.3.2 Humectabilidad.....	8
1.1.3.3 Presión Capilar P_c	11
1.2. MECANISMOS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO	13
1.2.1 Empuje por Agua.....	13
1.2.2 Empuje por Gas en Solución.....	14
1.2.3 Expansión de la Roca y de los Fluidos.....	15
1.2.4 Empuje por Capa de Gas	15
1.2.5 Drenaje por Gravedad.....	16
1.2.6 Producción por Empujes Combinados	16
2. BREVE DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO (CER).....	18
2.1. VENTAJAS DEL CER	19
2.2. DESVENTAJAS DEL CER.....	20
3. GENERALIDADES SOBRE ESCALAMIENTO FÍSICO	22
3.1. PRINCIPIOS DE SIMILARIDAD ENTRE EL MODELO Y EL PROTOTIPO	23

3.1.1	Similaridad Geométrica	24
3.1.2	Similaridad Mecánica	25
3.1.3	Similaridad Térmica	25
3.1.4	Similaridad Química (opcional).....	25
3.2.	TIPOS DE MODELOS FÍSICOS EMPLEADOS	26
3.2.1	Modelos No - Escalados.....	26
3.2.2	Modelos Escalados	26
3.2.3	Modelos Parcialmente Escalados	27
3.3.	TÉCNICAS DE ESCALAMIENTO	27
3.3.1	Análisis Dimensional	28
3.3.2	Análisis Inspeccional	28
3.3.3	Comparación de los Dos Métodos	29
3.4.	ESTUDIO DE LOS TIPOS DE ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL FLUJO EN MEDIOS POROSOS	30
3.5.	DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE ESCALAMIENTO.....	31
3.6.	LIMITANTES DE LOS MODELOS FÍSICOS ESCALADOS.....	31
3.7.	APLICACIONES DE LOS MODELOS FÍSICOS ESCALADOS EN LA EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE RECOBRO	32
4.	DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL PROCESO CER	35
4.1.	DETERMINACIÓN DE GRUPOS ADIMENSIONALES POR MEDIO DEL ANÁLISIS INSPECCIONAL.....	35
4.1.1	Planteamiento de las Ecuaciones que describen el Proceso CER.....	35
4.1.2	Transformación de las Ecuaciones a la Forma Adimensional	43
4.2.	DETERMINACIÓN DE GRUPOS ADIMENSIONALES POR MEDIO DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL.....	45
4.2.1	Método π de Buckingham	45

4.2.2 Variables Involucradas en el Proceso	46
4.2.3 Dimensiones Fundamentales a Emplear	48
4.2.4 Grupos de Similaridad Obtenidos.....	48
4.3. GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL PROCESO DE CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO.....	54
5. VALIDACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD	55
5.1. ESCOGENCIA DEL YACIMIENTO A ESCALAR	56
5.2. ALTERNATIVAS DE ESCALAMIENTO	58
5.3. JUSTIFICACIÓN DE LA ALTERNATIVA SELECCIONADA.....	60
5.4. FENÓMENOS NO REPRODUCIBLES EN EL MODELO	60
5.5. ESCALAMIENTO DEL YACIMIENTO	61
5.6. ETAPA DE SIMULACIÓN	72
5.7. COMPARACIÓN DE LOS PERFILES DE TEMPERATURA DEL YACIMIENTO Y DEL MODELO Y CÁLCULO DEL PORCETAJE DE DESVIACIÓN.	74
6. CONCLUSIONES.....	78
7. RECOMENDACIONES	79
BIBLIOGRAFÍA	80
CITAS Y NOTAS.....	83
ANEXO A	85
ANEXO B	119

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Posición de las moléculas con respecto a una superficie libre de un líquido (Según Green y Willhite).....	7
Figura 2. Ilustración de la fuerza de superficie (según Green y Willhite).....	8
Figura 3. Fuerzas interfaciales entre dos fluidos inmiscibles y un sólido.....	9
Figura 4. Humectabilidad en sistemas roca – sólido.	10
Figura 5. Curva típica de Presión Capilar.	12
Figura 6. Relación básica entre la Presión Capilar y la Saturación.	12
Figura 7. Vista transversal del proceso de Calentamiento Eléctrico Resistivo.	19
Figura 8. Criterio de similaridad Geométrica.	24
Figura 9. Procedimiento para realizar el dimensionamiento del modelo.	56
Figura 10. Yacimiento hipotético.	57
Figura 11. Dimensionamiento geométrico del Modelo.	62

Figura 12. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Yacimiento durante un mes de calentamiento.	72
Figura 13. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Modelo durante 1.08 minutos de calentamiento.	73
Figura 14. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Yacimiento durante 6 meses de calentamiento.	73
Figura 15. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Modelo durante 6.48 minutos de calentamiento.	74
Figura 16. Superposición de los perfiles de temperatura para el Modelo (1.08 min de calentamiento) y Prototipo (1 mes de calentamiento).	75
Figura 17. Superposición de los perfiles de temperatura para el Modelo (6.48 min de calentamiento) y Prototipo (6 meses de calentamiento).....	77

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Grupos de similaridad obtenidos por análisis inspeccional.	44
Tabla 2. Variables a considerar en el proceso CER.	46
Tabla 3. Grupos adimensionales obtenidos por análisis dimensional.	49
Tabla 4. Resumen de los grupos obtenidos por análisis dimensional.	51
Tabla 5. Grupos de similaridad obtenidos para el proceso combinando los grupos obtenidos por análisis dimensional.	53
Tabla 6. Grupos de similaridad para el proceso de calentamiento resistivo.	54
Tabla 7. Datos del yacimiento hipotético.	57
Tabla 8. Alternativas en el tratamiento y construcción de modelos escalados.	58
Tabla 9. Propiedades para el prototipo de campo y el modelo físico escalado.	70
Tabla 10. Datos del porcentaje de desviación para 1.08 min de calentamiento en el modelo y 1 mes en el yacimiento.	75
Tabla 11. Datos del porcentaje de desviación para 6.48 min de calentamiento en el modelo y 6 meses en el yacimiento.	76

TITULO: DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL ESCALAMIENTO DE UN MODELO FÍSICO APLICADO A CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO*

**AUTORES: CÉSAR LEANDRO QUESADA SÁNCHEZ
CÉSAR ORLANDO ARRIAGA FAJARDO****

PALABRAS CLAVE: Modelo Físico, Prototipo, Similaridad, Adimensional, Dimensionamiento, Escalamiento, Análisis Inspeccional, Análisis Dimensional.

RESUMEN

Básicamente se construye un modelo físico escalado, para observar comportamientos en el yacimiento que no podemos observar en un simulador de computador.

Para la construcción de un modelo físico escalado, es necesaria la obtención de ciertos grupos adimensionales, que serán utilizados para hacer la similaridad entre un yacimiento prototipo con el modelo que se va a construir.

El Calentamiento Eléctrico Resistivo (CER) es un método de recobro mejorado que ha sido poco explorado en lo que tiene que ver con modelos físicos escalados. Por lo tanto, si se piensa construir un modelo físico escalado para este proceso y en la literatura no se

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ingenierías Físicoquímicas, Programa de Ingeniería de Petróleos, Ing. Julio César Pérez, Ing. Adriana Marcela Méndez

encuentran los grupos de similitud, surge entonces la necesidad de obtener estos grupos de similitud.

Para tal efecto, el procedimiento realizado en la obtención de estos grupos fue el análisis inspeccional y el análisis dimensional.

Para obtener los grupos por análisis inspeccional, se plantearon las ecuaciones de Balance de Energía, Balance de Masa y Ley de Darcy, en coordenadas cartesianas y las condiciones límites y de frontera, para el proceso CER.

Para obtener los grupos por análisis dimensional, se plantearon los parámetros que intervienen en el proceso CER, y por medio del teorema π de Buckingham se procedió a la obtención de los grupos.

Después de tener todos los grupos se realizó un análisis de dichos grupos para simplificarlos entre sí y así obtener los grupos finales de similitud.

Para la etapa de validación, se dimensionó un modelo escalado del proceso CER tomando como prototipo un yacimiento hipotético. Luego se compararon las curvas de Temperatura vs. Distancia del prototipo y del modelo, obtenidas en un simulador comercial. El porcentaje de desviación entre la curva de temperatura del modelo con respecto al yacimiento fue de 0.81%. Este porcentaje tan bajo de desviación, indica que el modelo representa el comportamiento de la temperatura del yacimiento; por lo tanto, que los grupos de similitud sirven para escalar un modelo físico del proceso de Calentamiento Eléctrico Resistivo.

TITTLE: DETERMINATION OF THE SIMILARITY GROUPS FOR SCALING AN ELECTRICAL RESISTANCE HEATING PHYSICAL MODEL*

**AUTHORS: CÉSAR LEANDRO QUESADA SÁNCHEZ
CÉSAR ORLANDO ARRIAGA FAJARDO****

KEYWORDS: Physical Model, Prototype, Similarity, Dimensionless, Sizing, Scaling, Inspectional Analyses, Dimensional Analyses.

ABSTRACT

Basically a scaled physical model is built, to observe behaviors in reservoir that we can not observe in a computer simulator.

Designing a scaled physical model, it is necessary to have certain dimensionless groups that they will be used to make similarity among a reservoir prototype and the model which it is pretended to build.

Electrical Resistance Heating (ERH) is an improved recovery method which has been explored little in physical scaled model subject. Therefore, if is planning to design a physical scaled model in which similarity groups are not found in literature; then, it is necessary to obtain these similarity groups.

* Degree Project

** Physic – Chemistry Engineering, Faculty, Petroleum Engineering Department, Ing. Julio César Pérez, Ing. Adriana Marcela Méndez.

The procedures carried out to obtain these groups were inspectional analysis and dimensional analysis.

Obtaining dimensionless groups by means of inspectional analysis, Energy Balance, Mass Balance and Darcy's Law equations in Cartesian coordinates, and boundary and frontier conditions, were established for ERH.

Obtaining dimensionless groups by means of dimensional analysis, ERH parameters were established, and these groups were obtained by using Buckingham's theorem.

After having all the groups, they were simplified to acquire the final similarity groups.

At Validation stage, ERH scaled model was sized by taking as prototype a hypothetical reservoir. Then, Temperature vs. Distance curves were built in a commercial simulator for both prototype and model. Finally, the curves were compared. Deviation percentage regards Model Temperature Behavior and Reservoir Temperature Behavior was 0.81%. This low deviation percentage, shows that this model represents the Reservoir Temperature Behavior; therefore, similarity groups are able to size an Electrical Resistance Heating physical model.

INTRODUCCIÓN

Gran parte de las reservas de petróleo del mundo, se encuentran en los yacimientos de crudo pesado. La principal dificultad para su extracción, consiste en la alta viscosidad que poseen los hidrocarburos. Como alternativa para solucionar este problema, surge el proceso denominado Calentamiento Eléctrico Resistivo.

El Calentamiento Eléctrico Resistivo es un método de recobro probado en diversos lugares del mundo, donde muchos estudios han sido realizados, en un gran esfuerzo por mejorar este proceso.

Con el objetivo de evaluar el desempeño de un yacimiento bajo cualquier proceso de recobro secundario, se deben realizar estudios para analizar las diversas fuerzas y mecanismos presentes en el proceso, con el fin de diseñar un esquema de explotación óptimo, que nos permita hacer la mayor recuperación posible de hidrocarburos líquidos. Estos estudios se llevan a cabo en su mayoría por medio de simuladores numéricos y modelos físicos.

Se podría pensar que con el avance de la tecnología en la construcción de simuladores numéricos no necesitaríamos de los modelos físicos para analizar el desempeño de un reservorio, pero esto no es totalmente cierto. Aunque los simuladores numéricos son una herramienta poderosa a la hora de hacer predicciones, estos aún poseen falencias, debido a que dichos simuladores se limitan solo a representar el proceso físico para el cual fueron diseñados. Se hace entonces necesario, la utilización de modelos físicos escalados en conjunto con modelos de computador con el objetivo analizar el comportamiento del yacimiento.

Los experimentos en los modelos escalados han sido ampliamente utilizados para la predicción del comportamiento de la producción del yacimiento, tales experimentos son representativos si dichos modelos están debidamente escalados.

Para realizar un apropiado escalamiento necesitamos agrupar las variables que gobiernan el proceso en grupos adimensionales que nos permitan hacer la similaridad entre el yacimiento y el modelo.

La importancia de este trabajo radica en la derivación de dichos grupos adimensionales aplicados al proceso de Calentamiento Eléctrico Resistivo y la validación de dichos grupos para un caso específico. Antes de la derivación de estos grupos, se realiza una descripción del proceso de Calentamiento Eléctrico Resistivo y una introducción a la teoría general del diseño de modelos escalados.

1. MECANISMOS Y FUERZAS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO

1.1. FUERZAS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO

Según Sylvain Pirson¹ (1965), los fluidos que se encuentran en el yacimiento están sometidos a la acción de un número de fuerzas naturales que desplazan el petróleo y el gas hasta los pozos de producción o retienen el petróleo dentro del yacimiento. Estas fuerzas varían durante la historia de producción del campo de acuerdo al tipo de estructura y roca de acumulación. En forma semejante la energía acumulada disponible que es responsable de los procesos de producción natural varía con las condiciones del yacimiento, y su forma de disipación es una función de la historia y proceso de producción.

Las fuerzas que actúan en el yacimiento son:

- ⊕ Fuerzas que actúan sobre los cuerpos
- ⊕ Fuerzas Viscosas
- ⊕ Fuerzas Capilares

¹ PIRSON, Sylvain. *Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos*. Segunda edición. Ediciones Omega S.A.1965.

1.1.1 Fuerzas que Actúan sobre los Cuerpos

Según Pirson (1965)¹ existen tres tipos de fuerzas que actúan sobre los cuerpos que son: fuerzas gravitacionales, magnéticas y eléctricas. Solamente la primera fuerza mencionada es de interés en los estudios de ingeniería de yacimientos, ya que los fluidos del yacimiento no están suficientemente cargados eléctrica o magnéticamente.

Sin embargo, debido a las diferencias entre densidades del gas libre, del petróleo y del agua, las que respectivamente se designarán por ρ_g , ρ_o y ρ_w , estos fluidos están sujetos a las siguientes fuerzas gravitacionales por unidad volumétrica $g\rho_g$, $g\rho_o$, $g\rho_w$. Donde g es la aceleración de la gravedad. Las fuerzas diferenciales de gravedad tienen, por lo general, un efecto insignificante sobre el funcionamiento del yacimiento en campos de alta presión, excepto cuando el empuje es por segregación y en donde existe una permeabilidad vertical de considerable magnitud como en el caso de calizas drusas o fisuradas. Sin embargo, cuando la presión de yacimiento se agota y las estructuras geológicas son de suficiente relieve, la recuperación por drenaje gravitacional puede adquirir gran importancia.

1.1.2 Fuerzas Viscosas

Según Magdalena Paris de Ferrer (2001)², las fuerzas viscosas se reflejan en la caída de presión que ocurre como resultado del flujo de un fluido a través de un medio poroso. Una de las aproximaciones más simples utilizada para calcular dichas fuerzas considera que el medio poroso está formado por un conjunto de tubos capilares paralelos. Con esta suposición, la caída de presión para flujo laminar a través de un solo tubo vendrá dada por la ley de Poiseuille:

² PARIS de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

$$\Delta P = -(6.22E - 8) \frac{\mu L v}{r^2 g_c} \dots\dots\dots(1)$$

Donde:

$\Delta P_c = P_2 - P_1$ es la caída de presión a través del tubo capilar (*psi*)

L_c : Longitud del tubo capilar (*ft*)

r : Radio del tubo capilar (*in*)

v_c : Velocidad promedio en el tubo capilar (*ft/día*)

μ : Viscosidad del fluido (*cp*)

g_c : Factor de conversión

Las fuerzas viscosas también pueden expresarse en términos de la ley de Darcy, y en este caso:

$$\Delta P = -0.158 \frac{\mu L v \phi}{k} \dots\dots\dots(2)$$

Donde:

$\Delta P = P_2 - P_1$ es la caída de presión a través del medio poroso (*psi*)

L : Longitud del medio poroso (*ft*)

r : Radio del tubo capilar (*ft*)

v : Velocidad promedio del fluido en el medio poroso (*ft/día*)

μ : Viscosidad del fluido (*cp*)

ϕ : Porosidad del medio poroso

k : Permeabilidad del medio poroso (*darcy*)

Para un conjunto de tubos de igual tamaño capilar, la permeabilidad viene dada por:

$$k = 20E6d^2\phi \dots\dots\dots(3)$$

Donde k y ϕ son la permeabilidad en darcy y la porosidad efectiva del conjunto de tubos capilares, respectivamente; y d , el diámetro de los capilares en pulgadas.

1.1.3 Fuerzas Capilares

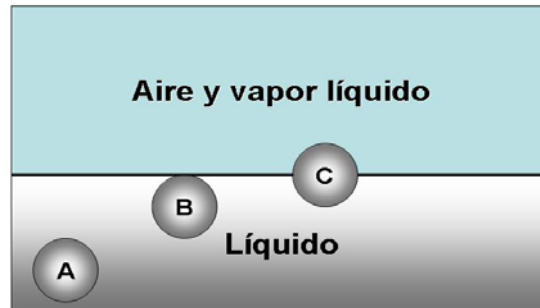
Según Magdalena Paris de Ferrer (2001)², las fuerzas capilares son:

- ⊕ Tensión superficial e interfacial
- ⊕ Humectabilidad
- ⊕ Presión Capilar P_c

1.1.3.1 Tensión superficial e interfacial: Cuando dos fases inmiscibles coexisten en un medio poroso, la energía de superficie relacionada con las interfases de los fluidos influye en su saturación, distribución y desplazamiento. El agua y el petróleo coexisten en el yacimiento a pesar de que este no haya sido invadido con agua. Aún en el caso de que el agua sea inmóvil, las fuerzas interfaciales pueden tener influencia en los procesos de flujo subsiguientes. Si el yacimiento ha sido invadido con agua o tiene la influencia de un acuífero, las saturaciones de agua serán altas y la fase agua será móvil.

Una superficie libre de un líquido se ilustra en la **figura 1**, donde A, B y C representan moléculas de líquido. Las moléculas como A, que se encuentran en la parte más baja de la superficie, en promedio, son atraídas igualmente en todas direcciones de las fuerzas de cohesión y su movimiento no tiende a ser afectado por ellas. En cambio las moléculas B y C, que se encuentran en la interfase agua-aire, o cerca de ella, si lo están: una fuerza tiende a bajar las moléculas y a que se mantengan dentro del líquido, mientras que la superficie actúa como una membrana tensa que tiende a reducirse lo más posible.

Figura 1. Posición de las moléculas con respecto a una superficie libre de un líquido (Según Green y Willhite)



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

Esta fuerza de tensión se cuantifica en términos de tensión de superficie, σ , y es la fuerza que actúa en el plano de la superficie por unidad de longitud. Esta tensión de superficie se puede visualizar en la **figura 2**, donde una fuerza normal F se aplica a la superficie líquida de longitud L .

La fuerza por unidad de longitud, F/L , requerida para crear un área superficial adicional es la tensión superficial, la cual se expresa usualmente en *dinas/cm* y se relaciona con el trabajo requerido para formar la nueva área de superficie. Si se supone que la fuerza F en la **figura 2** se mueve una distancia dx , se crea una nueva superficie en la cantidad Ldx . El trabajo realizado se expresa por $W = Fdx$ o $W = \sigma dA$.

Donde:

F : fuerza aplicada en la superficie (*dinas*).

L_f : longitud sobre la cual se aplica esta fuerza (*cm*).

σ : tensión interfacial F/L (*dinas/cm*).

dA : la nueva área superficial Ldx (cm^2).

Figura 2. Ilustración de la fuerza de superficie (según Green y Willhite).



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

Así, el trabajo realizado para crear la nueva área superficial es proporcional a σ . Por lo tanto, σdA , también representa un término de energía de superficie.

El término tensión superficial se utiliza usualmente en el caso específico donde la superficie de contacto es entre un líquido y su vapor o aire; así por ejemplo, la tensión superficial del agua en contacto con su vapor y a la temperatura ambiente, es de 73 dinas/cm . Si la superficie es entre dos líquidos inmiscibles, se usa la expresión tensión interfacial (TIF); así, la TIF entre el agua y los hidrocarburos puros varía entre 30 y 50 dinas/cm , mientras que en las mezclas de hidrocarburos será menor, dependiendo de la naturaleza y complejidad del líquido. Ambas tensiones varían fuertemente según la temperatura.

1.1.3.2 Humectabilidad: La humectabilidad o mojabilidad es una propiedad importante debido a que afecta el comportamiento capilar y de desplazamiento de las rocas yacimiento, y se define como la habilidad de la fase de un fluido para adherirse preferencialmente a una superficie sólida en presencia de otra segunda fase inmiscible. Así, en el caso de yacimientos de hidrocarburos, la superficie sólida es la roca y los fluidos son: agua, petróleo y gas. Una medida de la humectabilidad es el ángulo de contacto, θ_c , el cual se relaciona con las energías de superficie, por medio de la siguiente ecuación:

$$A_t = \sigma_{os} - \sigma_{ws} = \sigma_{ow} \cos \theta_c \dots\dots\dots(4)$$

Donde:

σ_{os} : Energía interfacial entre el sólido y el petróleo (*dinas/cm*)

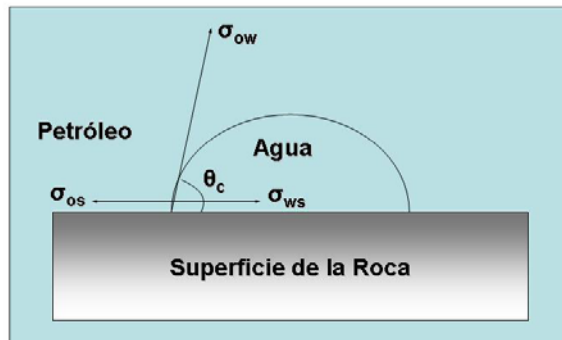
σ_{ws} : Energía interfacial entre el sólido y el agua (*dinas/cm*)

σ_{ow} : Energía interfacial entre el agua y el petróleo (*dinas/cm*)

θ_c : Ángulo de contacto petróleo-sólido-agua, medido a través del agua (*grados*)

La ecuación anterior representa el balance de fuerzas que actúa en el punto de contacto de los dos fluidos con la superficie sólida, lo cual genera una tensión de adhesión, A_t , tal como se muestra en la **figura 3**.

Figura 3. Fuerzas interfaciales entre dos fluidos inmiscibles y un sólido.



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

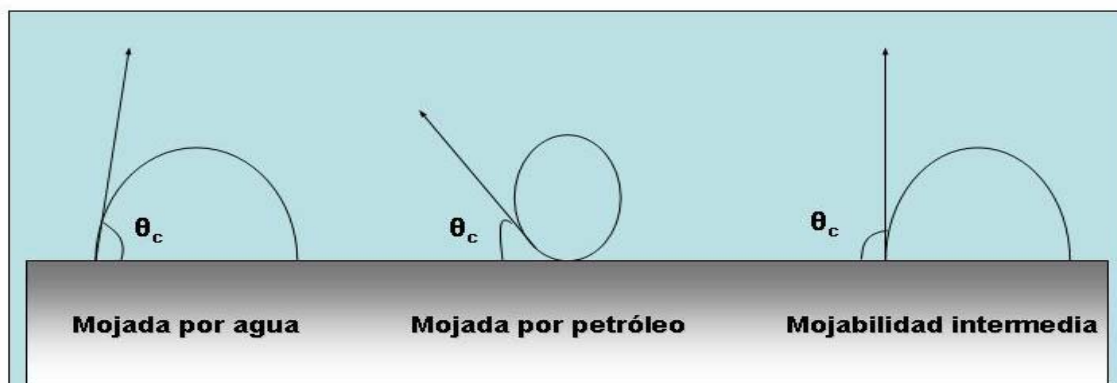
Tal como se observa en la **figura 4**, el ángulo de contacto se utiliza como una medida cualitativa de la humectabilidad, de la siguiente manera:

Si A_t es positiva, indica que el líquido más denso (agua) moja preferencialmente la superficie sólida y $\theta_c < 90^\circ$. Además, $\sigma_{ws} < \sigma_{os}$.

Si A_t es negativa, indica que el líquido menos denso moja preferencialmente la superficie sólida y $\theta_c > 90^\circ$. Además, $\sigma_{ws} > \sigma_{os}$.

Si A_t es cero, indica que ambas fases tienen igual afinidad por la superficie sólida y $\theta_c = 90^\circ$.

Figura 4. Humectabilidad en sistemas roca – sólido.



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

De lo anterior puede inferirse que el ángulo de contacto además de ser una medida de la humectabilidad de una superficie sólida, también muestra el efecto de histéresis en el cual el ángulo depende de si la interfase aumenta o disminuye. En síntesis, la humectabilidad es también una función de la fase inicialmente presente en la roca.

Los factores que pueden ser afectados por la humectabilidad son:

- La localización y la saturación de agua irreducible
- La distribución de los fluidos en el yacimiento, esto es, la localización del petróleo y del agua en el espacio poroso.
- El valor y la localización del petróleo residual.
- El mecanismo de desplazamiento.

1.1.3.3 Presión Capilar P_c : Se define como la diferencia de presión a través de la interfase que separa dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja preferencialmente la roca. Si se toma positiva, entonces se definirá como la presión de la fase no mojante menos la presión de la fase mojante, es decir:

$$P_c = P_{nm} - P_m \dots\dots\dots (5)$$

Así, para un sistema agua-petróleo será:

$$P_c = P_o - P_w \dots\dots\dots (6)$$

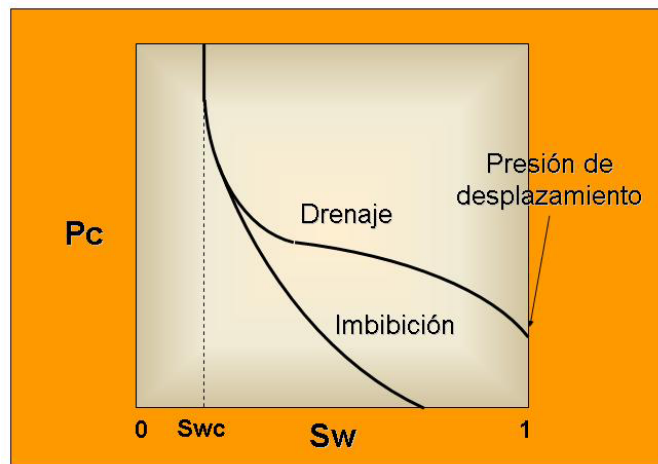
y para un sistema gas-petróleo se tiene:

$$P_c = P_g - P_o \dots\dots\dots (7)$$

Las características de una curva de presión capilar son:

1. Requiere de cierta presión capilar denominada presión de umbral o presión mínima de desplazamiento, para que la fase mojante sea desplazada por la fase no mojante
2. La pendiente de la curva durante el drenaje es una buena medida cualitativa del rango de distribución del tamaño de los poros: a mayor horizontalidad de la curva de P_c , mayor uniformidad del tamaño de los poros.
3. La saturación de la fase mojante a la cual P_c aumenta sin cambios de saturación, se denomina saturación irreducible de la fase mojante.
4. Las curvas de presión capilar (**figura 5**) muestran un fenómeno de histéresis, es decir, dependen de la historia del proceso de saturación. Los términos imbibición y drenaje se aplican en la dirección del cambio de saturación: El primero se refiere al proceso que origina el aumento de saturación de la fase mojante y el segundo, al que ocasiona una disminución de la fase mojante.

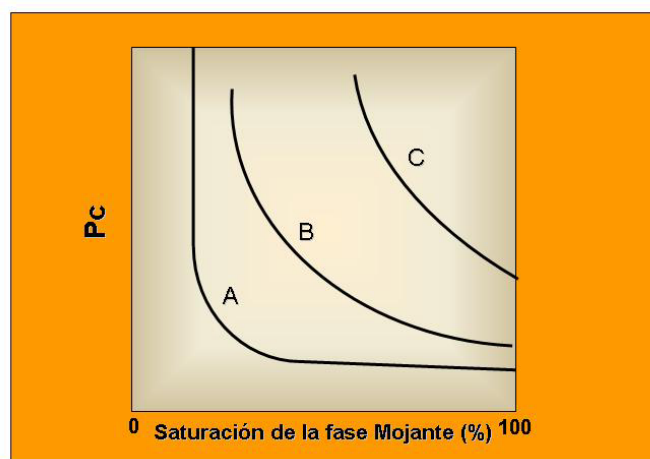
Figura 5. Curva típica de Presión Capilar.



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

Para una roca permeable la relación entre la presión capilar y saturación también depende del tamaño y distribución de los poros. La **figura 6**, muestra esta relación: la curva C es para una roca de baja permeabilidad que muestra una alta presión de desplazamiento inicial; la curva B, para una de permeabilidad intermedia y la curva A, para una de alta permeabilidad y baja presión de desplazamiento inicial.

Figura 6. Relación básica entre la Presión Capilar y la Saturación.



Fuente: Paris de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

1.2. MECANISMOS ACTUANTES EN UN YACIMIENTO

Según Magdalena Paris de Ferrer (2001)², la recuperación primaria resulta de la utilización de las fuentes de energía natural presentes en los yacimientos para el desplazamiento del petróleo hacia los pozos productores. Tales fuentes son:

- Empuje por agua
- Empuje por gas en solución
- Expansión de la roca y los fluidos
- Empuje por capa de gas
- Drenaje por gravedad
- Empujes combinados³

1.2.1 Empuje por Agua

Un yacimiento con empuje de agua tiene una conexión hidráulica entre el yacimiento y una roca porosa saturada con agua denominada acuífero, que puede estar por debajo del yacimiento, o de parte de él.

El agua en un acuífero está comprimida, pero a medida que la presión del yacimiento se reduce debido a la producción de petróleo, se expande y crea una invasión natural de agua en el límite yacimiento-acuífero. Cuando este es muy grande y contiene suficiente energía, todo el yacimiento puede ser invadido con esa agua. En algunos yacimientos se han obtenido eficiencias de recobro de entre un 30% y un 50% del petróleo original in situ.

³ AHMED, Tarek. *Reservoir Engineering HandBook*. Segunda Edición. Editorial Gulf Professional Publishing. 2002.

La extensión del acuífero y su capacidad energética no se conoce hasta que se tienen datos de producción primaria, a menos que se cuente con una extensa información geológica. Una medida de la capacidad del empuje con agua, se obtiene de la presión del yacimiento a determinada tasa de extracción de los fluidos, lo cual permite calcular el influjo de agua.

Si el acuífero no puede suministrar la suficiente energía para alcanzar las tasas deseadas, se puede implementar un programa de inyección de agua para suplementar su energía natural.

1.2.2 Empuje por Gas en Solución

El petróleo bajo ciertas condiciones de presión y temperatura en los yacimientos puede contener grandes cantidades de gas disuelto. Cuando la presión del yacimiento disminuye, debido a la extracción de los fluidos, el gas se desprende, se expande y desplaza el petróleo del yacimiento hacia los pozos productores.

La eficiencia de este mecanismo de empuje depende de la cantidad del gas en solución, de las propiedades de la roca y del petróleo y de la estructura geológica del yacimiento. Los recobros obtenidos son bajos, en el orden de 10% al 30% del petróleo *in situ*, debido a que el gas en el yacimiento es más móvil que la fase petróleo. A medida que la presión declina, el gas fluye a una tasa más rápida que la del petróleo, provocando un rápido agotamiento de la energía del yacimiento. Los yacimientos por gas en solución, son usualmente buenos candidatos para la inyección de agua.

1.2.3 Expansión de la Roca y de los Fluidos

Cuando el petróleo crudo es altamente subsaturado, mucha de la energía del yacimiento se almacena por la compresibilidad de la roca y de los fluidos; como consecuencia, la presión declina rápidamente a medida que se extraen los fluidos hasta que se alcanza la presión de burbuja. Entonces, el empuje por gas en solución se transforma en la fuente de energía para el desplazamiento de los fluidos.

Un yacimiento subsaturado se puede identificar por los datos de presión de yacimiento, realizando un análisis de los fluidos del yacimiento o mediante un comportamiento PVT. Estos yacimientos son buenos candidatos para la inyección de agua con el fin de mantener alta presión del yacimiento y para incrementar la recuperación de petróleo.

1.2.4 Empuje por Capa de Gas

Cuando un yacimiento tiene una capa de gas muy grande, debe existir una gran cantidad de energía almacenada en forma de gas comprimido, lo cual provoca la expansión de la capa a medida que los fluidos se extraen del yacimiento, de modo que el petróleo se desplaza por el empuje del gas ayudado por el drenaje por gravedad. La expansión de la capa de gas está limitada por el nivel deseado de la presión del yacimiento y por la producción de gas después que los conos de gas llegan a los pozos productores.

Los yacimientos con capa de gas son buenos candidatos para la inyección de gas para mantener la presión en la capa. Si existe un acuífero activo, se puede implementar un programa combinado de inyección de agua y gas.

1.2.5 Drenaje por Gravedad

El drenaje por gravedad puede ser un método primario de producción en yacimientos de gran espesor que tienen una buena comunicación vertical y en los que tienen un marcado buzamiento. El drenaje por gravedad es un proceso lento porque el gas debe migrar a la parte más alta de la estructura o al tope de la formación para llenar el espacio formalmente ocupado por el petróleo y crear una capa secundaria de gas. La migración del gas es relativamente rápida comparada con el drenaje de petróleo, de forma que las tasas de petróleo son controladas por la tasa de drenaje de petróleo.

1.2.6 Producción por Empujes Combinados

Según Tarek Ahmed (2002)³, el mecanismo de empuje más encontrado es el de empuje de agua combinado con el de capa de gas. Por lo tanto el mecanismo más encontrado es una combinación de empujes.

Dos combinaciones de empujes pueden estar presentes en yacimientos de empujes combinados. Estas combinaciones son:

- ⊕ Empuje por depleción y un empuje débil de agua.
- ⊕ Empuje por depleción con capa de gas y un empuje débil de agua.

La segregación por gravedad puede jugar un papel importante en alguno de los empujes anteriormente mencionados.

Los empujes combinados se pueden identificar por la ocurrencia de alguno de los siguientes factores:

- a. Declinación de la presión relativamente rápida. La invasión de agua y la expansión del gas son insuficientes para mantener la presión
- b. Invasión lenta de agua en la parte más baja del yacimiento. Los pozos productores más profundos presentarán un incremento lento en la tasa de producción de agua.
- c. Si una capa de gas está presente se observará un incremento continuo en el GOR en los pozos menos profundos (más cercanos al contacto Gas-Petróleo). Es posible que la capa de gas se disminuya debido a la producción de gas, lo que se verá reflejado en una disminución del GOR en los pozos más cercanos a la capa de gas. Esta condición debe ser evitada en lo posible ya que se pueden perder grandes volúmenes de petróleo por la disminución de la capa de gas.
- d. Un porcentaje sustancial del recobro total es debido al empuje por depleción. El GOR de los pozos productores en general se incrementará debido a que al ir disminuyendo la presión, el gas en solución se liberará.
- e. El factor de recobro para yacimientos de empujes combinados es usualmente más grande que el obtenido por depleción pero menor que el obtenido por empuje de agua o por empuje por capa de gas. El recobro verdadero dependerá del grado al cual sea posible reducir el recobro por depleción.

Un aspecto común en todos los mecanismos de agotamiento o de recuperación primaria es el hecho de que para que estos mecanismos actúen debe existir una reducción de la presión de yacimiento; por esta razón, cuando en algún momento de la vida de un yacimiento se inicia un proceso de inyección de fluidos que mantiene total o parcialmente la presión, se está reemplazando un mecanismo primario por uno secundario o adicional, basado principalmente en el desplazamiento inmisible del fluido en el yacimiento (petróleo) por el fluido inyectado (agua o gas).

2. BREVE DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO (CER)

Según Wattenbager et al. (1988)⁴, el calentamiento eléctrico resistivo (CER), es un método muy fácil de entender. Un delta de voltaje se instaura a través de la formación. El calentamiento ocurre cuando la corriente circula a través del medio resistivo. Al agua connata tiende a dar la trayectoria de la corriente en un medio homogéneo. En un medio heterogéneo, las líneas de shale, capas de arena y grandes saturaciones de agua probablemente dan la trayectoria de la corriente. Debido a que el agua proporciona el circuito eléctrico, la temperatura no debe exceder el punto de ebullición del agua a dicha presión. Según Harvey et al. (1980)⁵, el agua salada puede inyectarse simultáneamente con el calentamiento eléctrico para reducir el flujo de electricidad por el casing hacia zonas de poco interés. La tubería debe estar totalmente aislada con el fin de no generar pérdidas de corriente a través de ella.

La **figura 7** nos brinda un esquema del proceso. El calor se genera por la corriente eléctrica inducida. El aumento en la temperatura causa una disminución de la viscosidad. La producción se estimula por el aumento en la movilidad y el aceite que fluye hacia el *wellbore* aumenta.

El calor generado se disipa en la formación de tres formas:

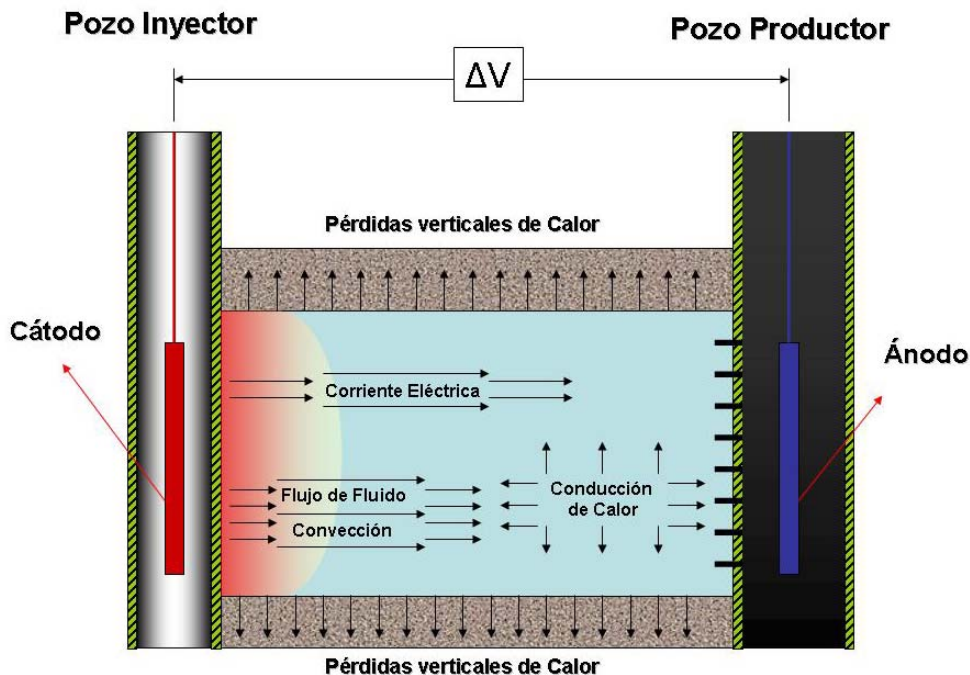
- ☼ Producción de fluido caliente (convección).
- ☼ Conducción de calor hacia las formaciones adyacentes de arriba y abajo.

⁴ WATTENBARGER, R. A. y McDOUGAL, F. W. *Oil Production Response to in situ Electrical Resistance Heating*. JCPT. 1988.

⁵ HARVEY, Herbert A. y ARNOLD, M.D. *Estimation of Heat Distribution in Selective Electric Reservoir Heating*. JCPT.1980.

- ☛ Conducción de calor hacia los límites externos.

Figura 7. Vista transversal del proceso de Calentamiento Eléctrico Resistivo.



Fuente: Wattenbarger, R. A. y McDougal, F. W. *Oil Production Response to in situ Electrical Resistance Heating*. JCPT. 1988).

2.1. VENTAJAS DEL CER

El proceso del calentamiento eléctrico, no ha sido muy utilizado, debido a los costos que éste conlleva, aún así, podemos tener en cuenta algunas de sus ventajas:

Según Wattenbarger et al (1988)⁴ las ventajas que tiene el CER son:

1. El calor es aplicado continuamente mientras que el pozo produce. Esto permite que producción y calentamiento ocurran simultáneamente en un pozo.

2. El calentamiento continuo causa menor fatiga en los equipos que en los procesos cíclicos de producción.
3. No se requiere transporte de fluido. Esto elimina los problemas asociados con la generación y transporte de fluido.
4. Las heterogeneidades verticales no causan disminución en la producción. Los procesos de inyección de fluido por otro lado tienen perfiles desiguales de inyección como resultado de dichas heterogeneidades.
5. Debido a que no vamos a inyectar ningún fluido, un pozo con inyectividad baja o nula puede ser calentado.
6. CER tiene menores pérdidas de energía en el wellbore comparado con los procesos de vapor.
7. Los procesos de CER tienen producción baja o nula de agua lo que disminuye en gran medida los tratamientos posteriores a la producción.
8. Este método es deseable desde el punto de vista ambiental.

Adicional a estas ventajas, Harvey et al. (1980)⁵ consideran las siguientes:

1. Buena utilización en yacimientos profundos donde el sistema de calentamiento por inyección de vapor no es económicamente posible por las condiciones de baja permeabilidad y alta presión.
2. Harvey et al. (1980)⁵ dicen que la aplicación más útil para este proceso, es calentar porciones de un yacimiento que no pueden ser fácilmente contactadas por inyección de fluidos.

2.2. DESVENTAJAS DEL CER

Según Wattenbarger et al (1988)⁴ las desventajas que tiene el CER son:

1. La continuidad eléctrica debe mantenerse para que el calentamiento ocurra. Por lo tanto, la temperatura no debe exceder el punto de burbuja del agua. Esto nos pone un tope en el aumento de temperatura, lo cual también limita la producción.
2. La energía eléctrica es usualmente una forma costosa de energía.
3. El yacimiento debe tener suficiente resistencia a la corriente para prevenir la finalización temprana del circuito.
4. El proceso requiere equipo de completamiento especializado y usualmente costoso. El equipo debe lograr un alto grado de eficiencia en la transmisión de potencia eléctrica en el pozo, creando y manteniendo buen contacto eléctrico entre la arena y el electrodo.

3. GENERALIDADES SOBRE ESCALAMIENTO FÍSICO

Los experimentos de laboratorio de los métodos de recobro mejorado son de gran valor en el entendimiento del mecanismo de un proceso de recobro dado. El uso de simuladores numéricos avanzados nos exige la realización de experimentos de laboratorio llevados a cabo por modelos físicos para así poder validar el modelo numérico y viceversa.

Los procesos más ampliamente modelados son:

1. Inyección de agua
2. Inyección de químicos
3. Inyección de emulsión
4. Inyección de espumas
5. Inyección de CO₂
6. Combustión *in situ*

Para estos procesos los investigadores han derivado los diferentes grupos adimensionales para poder escalar estos fenómenos. Dichos grupos adimensionales se pueden adquirir en la literatura⁶.

Para representar el comportamiento de un prototipo de campo, el modelo debe ser geoméricamente similar. En complemento a esto, las relaciones de todas las fuerzas actuando sobre el prototipo deben ser iguales a las relaciones de las fuerzas actuando en el modelo. Para construir un modelo escalado es por lo tanto obvio conocer de antemano todas las fuerzas que afectan el comportamiento del prototipo aún cuando todas las

⁶ ALI, Farouq. *Design of Scaled Models*. University of Alberta, Edmonton Canada. 1993.

relaciones matemáticas que involucran estas fuerzas sean desconocidas. En la mayoría de los casos, es imposible construir un modelo de manera que cada una de las fuerzas que juegan un papel en el comportamiento del yacimiento, sean simultáneamente escaladas. En esta situación, es posible eliminar una o más de las fuerzas, empleando el juicio ingenieril, de forma que solo las fuerzas más representativas sean consideradas⁷.

3.1. PRINCIPIOS DE SIMILARIDAD ENTRE EL MODELO Y EL PROTOTIPO

Antes de adquirir los grupos adimensionales es importante mencionar el principio de similitud el cual tiene que ver básicamente con la forma. De acuerdo con Johnstone y Thring (1957)⁸ la configuración espacial y temporal de un sistema es determinada por las magnitudes dentro del sistema y no dependen de los valores o del tipo de unidades que se empleen para medir estas magnitudes.

Para un sistema sólido fluido la forma no solo envuelve las proporciones geométricas de los miembros sólidos sino también otros factores tales como: patrones de flujo, gradientes de temperatura, perfiles de concentración, etc. Los sistemas que tienen las mismas configuraciones se llaman “similares”.

Según S.M. Farouq Ali (1993)⁹, para modelar adecuadamente los procesos que se desarrollan en yacimientos petrolíferos, especialmente si se desea construir un modelo a escala del evento, es necesario tener en cuenta los siguientes principios:

⁷ DOSCHER, Todd M. y GHARIB, Siavash. *Physically Scaled Model Studies Simulating the Displacement of Residual Oil by Miscible Fluids*, Society of Petroleum Engineers of AIME, 1983.

⁸ JOHNSTONE, R. E. y THRING M. W. *Pilot Plants, Models and Scale-up Methods in Chemical Engineering*. New York, McGraw-Hill Book Company Inc, 1957.

⁹ ALI, Farouq. *Video Conferencia: Diseño de Modelos Escalados*. ICP. 1993.

3.1.1 Similitud Geométrica

Indica que el modelo y el prototipo son similares geoméricamente con respecto a sus dimensiones espaciales. Un ejemplo de este tipo de criterio se observa en la **figura 8**.

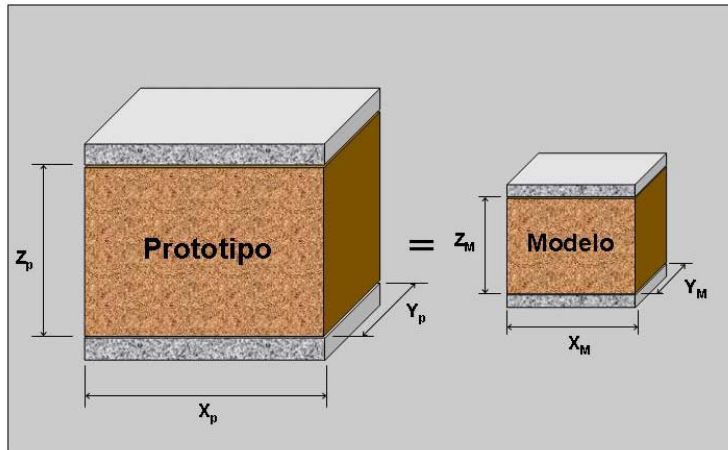
$$\frac{X_P}{X_M} = \frac{Y_P}{Y_M} = \frac{Z_P}{Z_M} = R_L \dots\dots\dots (8)$$

Donde R_L es la razón de un grupo n entre el prototipo (P) y el modelo (M).

La similitud geométrica también puede ser distorsionada así $\frac{X_p}{X_m} = R_x$, $\frac{Y_p}{Y_m} = R_y$ y

$$\frac{Z_p}{Z_m} = R_z.$$

Figura 8. Criterio de similitud Geométrica.



3.1.2 Similaridad Mecánica

Existen tres tipos:

- a) **Estática:** Cuerpos similares geoméricamente serían similares en sentido estático, si la similaridad geométrica se mantiene en presencia de fuerzas externas.

- b) **Cinemática:** Sistemas similares en sentido geométrico son similares en sentido cinemático si las trayectorias de las partículas en los dos sistemas son similares.

- c) **Dinámica:** Sistemas similares geoméricamente son similares en sentido dinámico, si las relaciones de fuerzas del mismo tipo que actúan sobre partículas geoméricamente similares son iguales.

3.1.3 Similaridad Térmica

Sistemas similares mecánicamente son similares en sentido térmico cuando las diferencias de temperatura mantienen una razón constante.

3.1.4 Similaridad Química (opcional)

Sistemas similares mecánicamente son similares en sentido químico, cuando las diferencias de concentraciones mantienen una razón constante.

En un modelo escalado por lo general no se pueden satisfacer todos los tipos de similaridad.

3.2. TIPOS DE MODELOS FÍSICOS EMPLEADOS

Según Farouq Ali (1993)⁹ los modelos físicos para un proceso particular de recobro pueden ser no escalados, escalados o parcialmente escalados.

3.2.1 Modelos No - Escalados

Es también una representación del proceso en consideración, sin embargo, sus materiales y condiciones de operación son escogidas de tal forma que ellos representen las condiciones en algún punto del yacimiento (también se les conoce como modelos elementales), mientras sus dimensiones son seleccionadas basadas en el aspecto del recobro a ser estudiado y/o las limitantes físicas del equipo de prueba (ejemplo: corazonamientos). Son importantes para identificar los parámetros del proceso, efectos de borde, obtener magnitudes relativas y valores de ciertos parámetros en los puntos finales (S_{or} y S_{wir}).

3.2.2 Modelos Escalados

Son diseñados sobre el principio de similaridad. Este tipo de modelos se caracterizan porque tanto el modelo como el prototipo presentan la misma relación de dimensiones, fuerzas, velocidades, diferencias de temperaturas y diferencias de concentración.

De acuerdo con Farouq Ali¹⁰, los modelos escalados son los mejores porque sus resultados pueden ser usados directamente en predicciones de campo, sin embargo, debido a las grandes complicaciones que se presenta al momento de escalarlos se hace

¹⁰ ALI, Farouq. *Physical Modeling of In Situ Recovery Methods for Oil Sands*. University Park Pennsylvania.

muy difícil su construcción. En tales casos, un modelo parcialmente escalado puede ser lo más adecuado.

3.2.3 Modelos Parcialmente Escalados

Son diseñados bajo las mismas condiciones de los modelos totalmente escalados, con la diferencia de que algunos criterios de escalamiento son relajados. Lo más importante que debemos tener en cuenta al relajar algunos parámetros es el error que nos puede producir esto. La respuesta la podemos obtener realizando experimentos en dos modelos similares pero de diferente tamaño.

Una aproximación sería no realizar el escalamiento y confiar completamente en el modelo matemático para predecir los resultados de campo o de laboratorio. El modelo físico (normalmente no escalado o parcialmente escalado), se usa entonces para validar las predicciones del modelo matemático y/o para obtener parámetros para su uso en la representación matemática¹⁰.

Los experimentos de laboratorio son ampliamente usados para investigar, directa o indirectamente, el comportamiento de la producción de yacimientos petrolíferos. Tales experimentos son representativos del comportamiento de los yacimientos, si sus características y procesos en el modelo son adecuadamente escalados.

3.3. TÉCNICAS DE ESCALAMIENTO

Según Farouq Ali¹⁰, el criterio de escalamiento para el experimento de interés se puede derivar utilizando el principio de similaridad. Asumiendo que el proceso está claramente definido (con respecto a las variables que lo gobiernan), pueden aparecer dos situaciones. En el primer caso, las ecuaciones diferenciales que describen el proceso son

desconocidas (solo las variables son conocidas) en este caso para derivar los grupos adimensionales usamos el análisis dimensional. En el segundo caso conocemos las ecuaciones diferenciales que gobiernan el proceso, aquí se puede aplicar el análisis dimensional y/o el análisis inspeccional. Estos dos métodos que sirven para obtener los grupos adimensionales son descritos a continuación.

3.3.1 Análisis Dimensional

El primer paso a realizar en este procedimiento es la determinación de las variables relevantes al problema en estudio. Todas las variables que intervienen en el proceso deben ser consideradas para alcanzar obtener resultados confiables. Después de su determinación, las variables son agrupadas en un conjunto de grupos adimensionales. Esta combinación de variables se hace por prueba y error¹¹.

El número de grupos adimensionales es determinado por medio del Teorema π de Buckingham que especifica:

$$\# \text{ Grupos adimensionales} = \# \text{ Total de variables} - \# \text{ Dimensiones fundamentales}$$

3.3.2 Análisis Inspeccional

Su formulación está basada en las ecuaciones básicas, condiciones iniciales y de frontera que describen el fenómeno, por ello, sus resultados además de ser bastante acertables, tienen un significado físico. Todas las ecuaciones físicas son relaciones entre variables independientes, variables dependientes y constantes. Todas las variables independientes, dependientes y constantes son integradas en grupos llamados grupos adimensionales

¹¹ LEVERETT, M.C.; LEWIS, W.B.; TRUE, M.E. *Dimensional-Model Studies of Oil-Field Behavior*. Trans. AIME (1942). 146, 175.

independientes, grupos adimensionales dependientes y grupos adimensionales de similitud. Estos grupos logran la forma adimensional, dividiéndolos por algún valor de la misma dimensión, característico del sistema¹¹.

3.3.3 Comparación de los Dos Métodos

Según Geertsma et al. (1956)¹², Un rasgo característico de análisis inspeccional es la existencia de una expresión matemática del fenómeno. Esto ocasiona la introducción de un número de aproximaciones como consecuencia de que algunos grupos, los cuales son de importancia bajo condiciones reales puedan ser omitidos. Por ejemplo podemos mencionar los grupos asociados con tamaño de poro y distribución de tamaño de poro los cuales se omiten cuando usamos la ecuación de Darcy.

Además, algunas veces es necesario introducir variables empíricas tales como permeabilidades relativas, cuyo significado físico no siempre es claro.

Por otro lado, una inspección de las ecuaciones puede revelar que dos o más grupos similares solo ocurren en conjunto. Esta combinación se puede considerar como un solo grupo; el resultado es un pequeño número de grupos y una mayor flexibilidad en cuanto a la realización de un modelo que se continuaría con análisis dimensional.

El set de grupos obtenido por análisis dimensional es completo y las variables contenidas en los grupos tienen un claro significado físico, pero ese significado es aun más claro si obtenemos un grupo similar por análisis inspeccional.

La eliminación de uno o más de los grupos, lo cual es necesario para la realización de un modelo es más conveniente por lo tanto basados en el análisis inspeccional.

¹² GEERTSMA, J.; CROES, G. A.; SCHWARZ, N. *Theory of Dimensionally Scaled Models of Petroleum Reservoirs*. Koninklijke / Shell Laboratorium Amsterdam. 1956, Vol. 207, 118-127.

Como consecuencia de las consideraciones anteriores es más conveniente comenzar con el análisis inspeccional y luego complementarlo con el análisis dimensional. Con esto se espera aprovechar la ventaja de los dos métodos.

3.4. ESTUDIO DE LOS TIPOS DE ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL FLUJO EN MEDIOS POROSOS

Siguiendo la teoría de Geertsma et al. (1956)¹² para el escalamiento de procesos de recobro, las ecuaciones que describen el fenómeno del flujo en medios porosos pueden ser clasificadas en:

- ✚ Ecuaciones que describen la conservación de las cantidades básicas en el sistema (ecuación de conservación de la materia, ecuación de conservación de *momentum* y ecuación de balance térmico).
- ✚ Ecuaciones que describen la dependencia de ciertas propiedades del yacimiento, de aspectos como son la temperatura y la presión; es decir; influencia de la presión y la temperatura sobre la densidad de los fluidos e influencia de la temperatura sobre la viscosidad de los líquidos.
- ✚ Ecuaciones que describen la interacción mutua de los componentes. Este aspecto está relacionado con la definición de las ecuaciones que describen fenómenos de difusión entre dos líquidos miscibles, y fenómenos de presión capilar entre fases.

3.5. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE ESCALAMIENTO

Los parámetros de similitud son determinados por análisis inspeccional, siguiendo la siguiente secuencia dada por Stegemeier et al. (1980)¹³:

- Formulación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el proceso.
- Transformación de las ecuaciones diferenciales del proceso a forma adimensional.
- Identificación de los parámetros adimensionales independientes.
- Selección de las cantidades características basados en los valores de las propiedades más importantes y en las restricciones impuestas por el proceso.

Estos parámetros de similitud son modificados mediante juicio ingenieril para obtener un juego de parámetros de escalamiento que generalmente pueden ser ajustados entre el modelo y el prototipo.

3.6. LIMITANTES DE LOS MODELOS FÍSICOS ESCALADOS

Las limitaciones de los modelos físicos surgen debido a la no disponibilidad de materiales y fluidos que tengan propiedades físicas que puedan satisfacer todos los requerimientos de escalamiento¹³. En la mayoría de los casos, el escalamiento debe someterse a los materiales disponibles comercialmente.

Una de las limitantes más comunes en el proceso de escalamiento es la referida al comportamiento de las curvas de permeabilidades relativas y presiones capilares tanto en el modelo como en el prototipo. La aplicación de las leyes de escalamiento requiere la

¹³ STEGEMEIER, G.L.; LAUMBACH, D.D.; VOLEK, C.W. *Representing Steam Processes with Vacuum Models*. SPE 6787, 1980.

consideración de un medio poroso que tenga permeabilidades y porosidades específicas diferentes, pero que a su vez sus curvas de permeabilidades relativas y presiones capilares sean similares en forma. En la práctica es difícil tener este aspecto ajustado, y en muchos casos, es imposible encontrar un material conveniente para la construcción del modelo que permita el escalamiento cuantitativo del proceso de flujo que está ocurriendo en el yacimiento dado. Sin embargo, pueden emplearse aproximaciones que usen las ecuaciones de escalamiento para extrapolar datos del modelo a yacimientos hipotéticos que puedan tener las mismas curvas de permeabilidades relativas y presiones capilares similares a las del modelo. La reproducción de las permeabilidades relativas y la similaridad de las funciones de presión capilar representan limitaciones definitivas en la aplicación del procedimiento de extrapolación¹⁴.

La mojabilidad de la roca es otro aspecto crítico en el diseño de modelos escalados. Incluso, si las características de mojabilidad son conocidas, un apropiado escalamiento puede ser difícil de realizar. Un ejemplo de incertidumbre en este aspecto es el trabajo desarrollado por Naar y Henderson (1961)¹⁵. Sus resultados teóricos mostraron que para la arena que emplearon que a condiciones de yacimiento mostraba ser mojada por aceite, en el modelo escalado actuaba como una roca preferiblemente mojada por agua.

Ninguno de los grupos de escalamiento para métodos de recobro térmico han procurado escalar la destilación, la emulsificación, la solubilidad del gas o la interacción roca-fluido¹³.

3.7. APLICACIONES DE LOS MODELOS FÍSICOS ESCALADOS EN LA EVALUACIÓN DE MÉTODOS DE RECOBRO

Los modelos escalados han contribuido significativamente al diseño e implementación de diversos proyectos de campo. Para los procesos de recobro térmico (vapor, combustión *in*

¹⁴ RAPOPORT, L.A. y LEAS W.J. *Properties of Linear Waterfloods*. Trans., AIME (1953) 198, 139.

¹⁵ NAAR J. y HENDERSON J.H, Trans., AIME, Part II (1961), 222, 61-70.

situ, inyección de agua caliente), inyección de agua y procesos de desplazamiento miscible (gas y dióxido de carbono) se han desarrollado grupos de escalamiento específicos que tienen en cuenta los efectos y mecanismos actuantes en cada proceso y en ocasiones la forma más apropiada de abordarlos.

Leverett et al. (1942)¹¹ publicaron el primer estudio de modelos escalados isotérmicos, el cual presentó la teoría fundamental para el flujo radial y lineal en yacimientos.

Rapoport y Leas (1953)¹⁴ estudiaron en gran detalle el flujo lineal y presentaron leyes de escalamiento para el flujo en corazones. Ellos extendieron la teoría original de Buckley-Leverett, incluyendo efectos de presión capilar.

Croes y Schwarz (1955)¹⁶ presentaron un estudio detallado de los principales grupos adimensionales que gobiernan los procesos de inyección de agua. Con los experimentos llevados a cabo determinaron la eficiencia del proceso de inyección de agua.

Geertsma et al. (1956)¹² extendieron las leyes de escalamiento para incluir efectos térmicos en procesos de inyección de agua caliente. Incluso, para este proceso relativamente simple, demostraron que es virtualmente imposible satisfacer todos los grupos de escalamiento.

Los modelos físicos para procesos de inyección de vapor requieren de criterios de escalamiento más complejos que los procesos de inyección de agua. Dos clases generales de modelos escalados han sido desarrollados: aquellos que corren a altas presiones y temperaturas y aquellos que corren a presiones sub-atmosféricas y bajas temperaturas. Estos estudios han sido desarrollados en un esfuerzo por mejorar el comportamiento de la inyección de vapor. Algunos de los experimentos fueron diseñados para permitir la influencia relativa de los diversos mecanismos observados. En este contexto, los efectos de varios parámetros, tales como, tasa de inyección, presión de producción, tamaño del bache, intervalos de completamiento, geometría del patrón de

¹⁶ CROES, G.A. y SCHWARZ, N. *Dimensionally Scaled Experiments and the Theories on the Water Drive Process*. Trans., AIME (1955) 204, 35.

pozos, agua de fondo, heterogeneidades del yacimiento y calidad del vapor han sido estudiadas¹⁷.

En el ámbito del diseño de modelos escalados para procesos de calentamiento eléctrico Harvey et al. (1979)⁵. y Yuan et al. (2004)¹⁸ han sido los exponentes más representativos de este método.

Harvey et al. (1979)⁵, desarrollaron su estudio para investigar la viabilidad de usar corriente eléctrica para el calentamiento selectivo de ciertas zonas de un yacimiento, no accesibles por inyección de fluidos. El modelo físico de laboratorio permitió medir la distribución de voltaje y temperatura en el patrón establecido.

Por su parte, Yuan et al. (2004)¹⁹ realizaron pruebas en modelos escalados que les permitió demostrar que la inyección de salmuera de alta salinidad alrededor de los pozos mejora significativamente el calentamiento eléctrico del yacimiento, reduciendo el sobrecalentamiento en la cara del pozo y redistribuyendo el calentamiento resistivo en profundidad dentro de la formación.

¹⁷ AHNER, P.F. y SUFI, A.H. *Physical Model Steamflood Studies Using Horizontal Wells*. SPE 20247, 1994.

¹⁸ YUAN, J.Y.; HUANG, H.; MINTZ, R.; WANG, X.; JOSSY, C.; TUNNEY, C. *Wet Electric Heating for Starting Up SAGD/VAPEX*, Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum, 2004.

4. DETERMINACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL PROCESO CER

4.1. DETERMINACIÓN DE GRUPOS ADIMENSIONALES POR MEDIO DEL ANÁLISIS INSPECCIONAL

4.1.1 Planteamiento de las Ecuaciones que describen el Proceso CER

Para el proceso en estudio y en analogía con el planteamiento matemático para modelos escalados desarrollado por Stegemeier et al. (1980)¹³, se tomaron las siguientes suposiciones:

- ✿ Presencia de dos fases: fase agua y fase aceite.
- ✿ La compresibilidad de la roca y la expansión térmica son despreciables.
- ✿ Las ecuaciones de Darcy y de Fourier son válidas.
- ✿ Los efectos de presión capilar son despreciables.
- ✿ El sistema está en equilibrio termodinámico local.
- ✿ La energía cinética y la energía de disipación viscosa son despreciables comparadas con la energía térmica y eléctrica.
- ✿ La entalpía y la energía interna son esencialmente iguales para la fase aceite y para la fase agua y son funciones lineales de la temperatura.
- ✿ La energía interna de la roca es una función lineal de la temperatura.
- ✿ Las permeabilidades relativas dependen exclusivamente de las saturaciones.

- ✿ La saturación de petróleo residual S_{or} y la saturación irreducible de agua S_{iw} son constantes y uniformes a través del modelo.
- ✿ Los cambios en la densidad del agua inmóvil y del petróleo residual son despreciables.
- ✿ El medio poroso se considera mojado por agua.

Con las anteriores suposiciones, las ecuaciones básicas del proceso son:

Ecuación de Flujo de Fluidos de la fase i en la dirección j (Ley de Darcy):

$$\vec{v}_{i,j} = -\left(\frac{K_i}{\mu_i}\right)\left(\vec{\nabla}P - \rho_i \vec{g}\right) \dots\dots\dots (9)$$

Ecuación de continuidad o balance de masa para la fase i :

$$\phi \frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \dots\dots\dots (10)$$

Relaciones constitutivas y restrictivas:

$$P_c = P_w - P_o \dots\dots\dots (11)$$

$$S_o + S_w = 1 \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi = \phi(x, y, z) \dots\dots\dots (13)$$

$$g = cte \dots\dots\dots (14)$$

$$\rho_i = \rho_i(P_i, T) \dots\dots\dots (15)$$

$$\mu_i = \mu_i(P_i, T) \dots\dots\dots (16)$$

$$\vec{K}_o = \vec{K}_o(K, S_o, S_w) \dots\dots\dots (17)$$

$$\vec{K}_w = \vec{K}_w(K, S_o, S_w) \dots\dots\dots (18)$$

$$\lambda_f = \lambda_f(T) \dots\dots\dots (19)$$

$$\rho_r = cte \dots\dots\dots (20)$$

Ecuación de continuidad de corriente eléctrica: Tomando como referencia el planteamiento matemático desarrollado por Hiebert et al. (1986)¹⁹, la ecuación de continuidad para la corriente eléctrica es:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_f} \vec{\nabla} \Phi_e \right) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

Donde R_f es la resistividad de la formación en *ohm-m*, Φ_e es el potencial eléctrico en voltios.

Ecuación de balance de energía: Se asume que la transferencia de calor entre las fases es prácticamente instantánea. Usando la notación de Prats (1982)²⁰, el balance de energía para la formación de interés es el siguiente:

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = - \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q \dots\dots\dots (22)$$

¹⁹ HIEBERT, A.D.; VERMEULEN, F.E.; CHUTE, F.S.; CAPJACK, C.E. *Numerical Simulation Results for the Electrical Heating of Athabasca Oil-Sand Formations*. SPE 13013, 1986.

²⁰ PRATS, M. *Thermal Recovery*. Monograph Volume 7. American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers Inc. 1982.

Donde:

Q = Tasa de entrada de energía por unidad de volumen [W/m^3]

u_{ej} = Flujo de energía en la dirección j [W/m^2]

Según Hiebert et al.¹⁹, el calor generado por unidad de volumen Q viene dado por:

$$Q = \frac{1}{R_f} \left[\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (23)$$

Donde:

R_f = Resistividad de la formación [$Ohm - m$]

Φ_e = Voltaje aplicado a través de la roca [Voltios]

u_{ej} = Flujo de energía en la dirección j [W/m^2]

Por lo tanto, la ecuación (22) quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{1}{R_f} \left[\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (24)$$

Para flujo en dos fases:

$$\rho e = (1 - \phi)M_\sigma \Delta T + \phi(S_o \rho_o e_o + S_w \rho_w e_w) \dots\dots\dots (25)$$

Donde:

ϕ = Porosidad

M_σ = Capacidad calorífica [$J/m^3 K$]

ΔT = Cambio de Temperatura [K]

S_i = Saturación de la fase i

ρ_i = Densidad de la fase i [Kg/m^3]

e_i = energía interna por unidad de masa de la fase i [J/Kg]

$$u_{ex} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + (v_{o,x} \rho_o h_o + v_{w,x} \rho_w h_w) \dots\dots\dots (26)$$

$$u_{ey} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + (v_{o,y} \rho_o h_o + v_{w,y} \rho_w h_w) \dots\dots\dots (27)$$

$$u_{ez} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(v_{o,z} \rho_o \left(h_o + \frac{ga}{g_c} \right) + v_{w,z} \rho_w \left(h_w + \frac{ga}{g_c} \right) \right) \dots\dots\dots (28)$$

Donde:

u_{ei} = Flujo de energía en la dirección j [W/m^2]

λ = Conductividad térmica de la roca con fluidos [W/mK]

$v_{i,j}$ = Velocidad de flujo de la fase i en la dirección j [m/s]

h_i = Entalpía de la fase i [J/kg]

g = gravedad [m/s^2]

a = distancia medida desde un plano de referencia [m]

g_c = Constante gravitacional [$1(\text{kg})(\text{m})/(\text{N})(\text{s}^2)$ o $32.17(\text{ft})(\text{lb}_m)/(\text{lb}_f)(\text{s}^2)$]

Ecuación de energía para las formaciones adyacentes: Al igual que para la formación de interés, es necesario establecer la ecuación de balance de energía para las formaciones adyacentes. De Prats (1982)²⁰ y Hiebert et al. (1986)¹⁹, el balance de energía para estos estratos es:

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} + \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} + \frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = -\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{1}{R_{fa}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (29)$$

Donde:

R_{fa} = Resistividad de la roca adyacente [$\text{Ohm} - \text{m}$]

Φ_e = Voltaje consumido por la formación adyacente [Voltios]

u_{ej} = Flujo de energía en la dirección j [W/m^2]

Asumiendo una saturación de agua del ciento por ciento en las formaciones adyacentes:

$$\rho e = (1 - \phi_{fa}) M_{fa} \Delta T + \phi_{fa} \rho_{wfa} e_{wfa} \dots \dots \dots (30)$$

Donde:

ϕ_{fa} = Porosidad de la roca adyacente

M_{fa} = Capacidad calorífica de la roca adyacente [$J/m^3 K$]

ΔT = Cambio de Temperatura [K]

ρ_{wfa} = Densidad del agua de las formaciones adyacentes [Kg/m^3]

e_{wfa} = energía interna por unidad de masa del agua en rocas adyacentes [J/Kg]

Al no existir movimiento de fluidos en las formaciones adyacentes, solo tenemos en cuenta el calor por conducción:

$$u_{ej} = -\lambda_{fa} \left(\frac{\partial T}{\partial j} \right) \dots \dots \dots (31)$$

Donde:

u_{ej} = Flujo de energía en la dirección j [W/m^2]

λ_{fa} = Conductividad térmica de la roca adyacente con fluido [W/mK]

Condiciones Iniciales:

$$S_o(i, x, y, z) = S_{oi}(x, y, z) \dots \dots \dots (32)$$

$$S_w(i, x, y, z) = S_{wi}(x, y, z) \dots \dots \dots (32)$$

$$T(i, x, y, z) = T_i \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$P_o(i, x, y, z) = P_{oi}(x, y, z) \quad \dots\dots\dots (34)$$

Condiciones Límites: Se estimó condición límite de no flujo en el exterior del yacimiento, y en el límite interior, pozos produciendo a presión constante.

☛ Para el tope o la base del yacimiento:

a) No existe flujo de fluidos:

Para la fase *i*:

$$\rho_i v_{in} = -\rho_i \frac{K_i}{\mu_i} (\nabla_n P_i + \rho_i g \nabla_n z) = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

Donde el subíndice *n* denota flujo en la dirección normal al límite.

b) Flujo de calor por conducción:

$$\lambda_r \nabla_n T = \lambda_c \nabla_n T_c \quad \dots\dots\dots (36)$$

Donde T_c es la temperatura en el tope o en la base de la roca y es igual a la temperatura inicial.

☛ Para las paredes laterales del modelo:

a) No existe flujo de fluidos:

Para la fase *i*:

$$\nabla_n P_i = -\rho_i g \nabla_n z \quad \dots\dots\dots (37)$$

b) Flujo de calor por conducción:

$$\lambda_r \nabla_n T = 0 \text{ o } q = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

☛ Pozo de producción:

$$P_o = P_{prod} \quad \dots\dots\dots (39)$$

$$P_w = P_{prod} + P_{cow} \quad \dots\dots\dots (40)$$

☛ Pozo de inyección de corriente:

Corriente inyectada por unidad de longitud consumida por la formación de interés:

$$\int_{A_{iny}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_f} \vec{\nabla} \Phi_e \right) * dA = I_{iny} \quad \dots\dots\dots (41)$$

Donde:

R_f = Resistividad de la formación [*Ohm - m*]

Φ_e = Voltaje aplicado a través de la formación [*Voltios*]

A = Área de inyección [*m²*]

I_{iny} = Corriente inyectada [*A/m*]

Corriente inyectada por unidad de longitud consumida por las formaciones adyacentes:

$$\int_{A_{iny}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_{fa}} \vec{\nabla} \Phi_{efa} \right) * dA_{fa} = I_{iny-fa} \quad \dots\dots\dots (42)$$

Donde:

R_{fa} = Resistividad de la formación adyacente [*Ohm – m*]

Φ_{e-fa} = Voltaje consumido por la formación adyacente [*Voltios*]

A_{fa} = Área de inyección [*m²*]

I_{iny-fa} = Corriente inyectada consumida por la formación adyacente [*A/m*]

🔗 Pozo de inyección de salmuera:

Tasa de salmuera inyectada:

$$\int_{A_{iny}} \rho_w \left(\frac{K_w}{\mu_w} \right) (\vec{\nabla} P_w + \rho_w g \vec{\nabla} z) \cdot dA = W_{salmuera} \dots\dots\dots (43)$$

4.1.2 Transformación de las Ecuaciones a la Forma Adimensional

Para derivar los grupos escalados por análisis inspeccional, las ecuaciones diferenciales parciales, las condiciones iniciales y de frontera y las relaciones constitutivas y restrictivas deben ser rescritas en términos de variables adimensionales.

Cada variable o parámetro que hace parte de las ecuaciones pueden llevarse a la forma adimensional dividiéndolos por una cantidad característica de referencia¹³.

Cantidades Características de Referencia: El objeto de usar cantidades características de referencia es hacer que el sistema permanezca invariable a medida que se cambia la escala del modelo al prototipo⁶.

Una cantidad característica de referencia puede ser representada por m_R , de la siguiente manera:

$$m_D = \frac{m}{m_R} \dots\dots\dots (44)$$

Donde m es la variable o parámetro importante en el proceso; m_R es la cantidad característica de referencia de la variable m ; y m_D es la razón adimensional de la variable m .

El procedimiento detallado del adimensionamiento y obtención de los grupos adimensionales por análisis inspeccional es descrito con mayor detalle en el **anexo A**.

Simplificando todos los grupos adimensionales obtenidos por análisis inspeccional y multiplicando unos con otros, se tiene el grupo final de parámetros de similitud para un proceso de calentamiento eléctrico resistivo los cuales se muestran en la **tabla 1**:

Tabla 1. Grupos de similitud obtenidos por análisis inspeccional.

#	GRUPO	#	GRUPO	#	GRUPO
I	$\left(\frac{x_R}{y_R} \right)$	VII	$\left(\frac{1}{S_{or}} \right)$	XIII	$\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{fR} I_{inyR}} \right)$
II	$\left(\frac{x_R}{z_R} \right)$	VIII	$\left(\frac{S_{wiR}}{S_{oiR}} \right)$	XIV	$\left(\frac{K_{iR} P_R \rho_{(i)R} h_{(i)R}}{\mu_{iR} \lambda_R \Delta T_R} \right)$
III	$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right)$	IX	$\left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right)$	XV	$\left(\frac{P_{prodR}}{P_{cowR}} \right)$
IV	$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \sen(\alpha)_R}{P_R} \right)$	X	$\left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}} \right)$	XVI	$\left(\frac{\phi_R S_{iR} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c \lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$

Tabla 1. Grupos de similitud obtenidos por análisis inspeccional (Continuación).

#	GRUPO	#	GRUPO	#	GRUPO
V	$\left(\frac{(1-\phi_R)M_{(\sigma)R}x_R^2}{\lambda_R t_R} \right)$	XI	$\left(\frac{W_{salmueraR}\mu_{wR}}{\rho_{wR}K_R P_R z_R} \right)$	XVII	$\left(\frac{P_{(i)R}}{P_{cR}} \right)$
VI	$\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR}\lambda_{fR}\Delta T_R} \right)$	XII	$\left(\frac{\phi_R S_{(i)R} \rho_{(i)R} e_{(i)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$		

4.2. DETERMINACIÓN DE GRUPOS ADIMENSIONALES POR MEDIO DEL ANÁLISIS DIMENSIONAL

4.2.1 Método π de Buckingham

El método π de Buckingham empleado por Farouq Ali (1993)⁹ entre otros autores para la deducción de los grupos de similitud por análisis dimensional es el siguiente.

Método para hallar los π 's:

- a. Hacer una lista de las variables y sus dimensiones.
- b. Decidir el número de dimensiones fundamentales a emplear. El número de grupos obtenidos será igual a $(n-m)$; donde n es el número de variables consideradas y m es el número de dimensiones fundamentales.
- c. Seleccionar un número de variables igual al número de las dimensiones fundamentales de manera que ante todo ninguna de éstas variables sea adimensional; segundo, las variables incluyen todas las dimensiones fundamentales y tercero, no hay dos de ellas con las mismas dimensiones.

- d. Los grupos adimensionales π 's se derivan haciendo los productos de las variables a varios exponentes. Se repite este proceso $(n-m)$ veces, de tal manera que se usan todas las variables formando $(n-m)$ productos.
- e. Hallar los exponentes de las variables usando el principio de homogeneidad adimensional.

4.2.2 Variables Involucradas en el Proceso

Las variables a considerar en un proceso de calentamiento eléctrico resistivo se presentan en la **tabla 2**:

Tabla 2. Variables a considerar en el proceso CER.

Variable	Nombre	Dimensiones
S_w	Saturación de agua	[0]
S_o	Saturación de aceite	[0]
Φ	Porosidad	[0]
K_o	Permeabilidad efectiva al aceite	[L ²]
K_w	Permeabilidad efectiva al agua	[L ²]
μ_o	Viscosidad del aceite	[ML ⁻¹ Θ ⁻¹]
μ_w	Viscosidad del agua	[ML ⁻¹ Θ ⁻¹]
T	Temperatura del yacimiento	[T]
P_o	Presión de la fase aceite	[ML ⁻¹ Θ ⁻²]
P_w	Presión de la fase agua	[ML ⁻¹ Θ ⁻²]
v_o	Velocidad de la fase aceite	[LΘ ⁻¹]
v_w	Velocidad de la fase agua	[LΘ ⁻¹]
ρ_o	Densidad del aceite	[ML ⁻³]
ρ_w	Densidad del agua	[ML ⁻³]

Tabla 2. Variables a considerar en el proceso CER (Continuación).

Variable	Nombre	Dimensiones
q_o	Tasa de aceite producido	$[L^3\Theta^{-1}]$
q_w	Tasa de agua producida o inyectada	$[L^3\Theta^{-1}]$
Q_{ciny}	Tasa de corriente inyectada	$[A\Theta^{-1}]$
R_f	Resistividad de la formación.	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]$
R_{fa}	Resistividad de las formaciones adyacentes	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]$
t	Tiempo	$[\Theta]$
P_c	Presión capilar	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
Φ_e	voltaje aplicado	$[ML^2A^{-1}\Theta^{-3}]$
M_{sal}	Masa de sal	$[M]$
σ_w	Conductividad del agua	$[MLT^{-1}\Theta^{-3}]$
σ_o	Conductividad del aceite	$[MLT^{-1}\Theta^{-3}]$
L	Longitud, espaciamento entre pozos	$[L]$
H	Espesor del yacimiento	$[L]$
W	Ancho del yacimiento	$[L]$
ρ_r	Densidad de la roca	$[ML^{-3}]$
c_o	Calor específico del aceite	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
c_w	Calor específico del agua	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
c_r	Calor específico de la roca	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
λ_{fa}	Conductividad térmica de rocas adyacentes	$[ML\Theta^{-3}T^{-1}]$
P_{prod}	Presión de producción	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
T_c	Temperatura de formaciones adyacentes	$[T]$
ΔP	Caída de presión en el yacimiento	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
λ_{hf}	Conductividad térmica de la formación	$[ML\Theta^{-3}T^{-1}]$
r_w	Radio del pozo	$[L]$
ρ_{rad}	Densidad de las rocas adyacentes	$[ML^{-3}]$
c_{rad}	Calor específico de la roca adyacente	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
α	Angulo de buzamiento de la formación.	$[0]$
A	Área de inyección o producción.	$[L^2]$

4.2.3 Dimensiones Fundamentales a Emplear

De acuerdo con las variables involucradas en el proceso, las dimensiones fundamentales a considerar son: Masa [M], Longitud [L], Tiempo [Θ], Temperatura [T] y Corriente [A].

El número de grupos a obtener será de: $(39-5)= 34$ grupos adimensionales. Se debe resaltar que no se tienen en cuenta las variables del proceso que por sí solas son adimensionales (S_w , S_o , φ y α), ya que ellas formarán cada una un grupo.

Las variables seleccionadas para el proceso son:

$$\mu_o = [\text{ML}^{-1}\Theta^{-1}]$$

$$T = [\text{T}]$$

$$R_f = [\text{ML}^3\text{A}^{-2}\Theta^{-3}]$$

$$T = [\Theta]$$

$$L = [\text{L}]$$

4.2.4 Grupos de Similitud Obtenidos

Por el principio de homogeneidad dimensional descrito en detalle en el **anexo B**, se obtuvieron los siguientes grupos adimensionales (**Tabla 3**):

Tabla 3. Grupos adimensionales obtenidos por análisis dimensional.

Parámetro	Grupo	Descripción
π_1	$\left(\frac{K_o}{L^2}\right)$	Relación de permeabilidad a las dimensiones del sistema
π_2	$\left(\frac{K_w}{L^2}\right)$	Relación de permeabilidad a las dimensiones del sistema
π_3	$\left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right)$	Relación de viscosidades de las fases presentes
π_4	$\left(\frac{tP_o}{\mu_o}\right)$	Relación de presiones a viscosidades.
π_5	$\left(\frac{tP_w}{\mu_o}\right)$	Relación de presiones a viscosidades.
π_6	$\left(\frac{tv_o}{L}\right)$	Relación de velocidades a factor geométrico.
π_7	$\left(\frac{tv_w}{L}\right)$	Relación de velocidades a factor geométrico.
π_8	$\left(\frac{L^2\rho_o}{t\mu_o}\right)$	Relación de densidades a viscosidades
π_9	$\left(\frac{L^2\rho_w}{t\mu_o}\right)$	Relación de densidades a viscosidades
π_{10}	$\left(\frac{tq_o}{L^3}\right)$	Relación de tasa de fluidos producidos a factor geométrico.
π_{11}	$\left(\frac{tq_w}{L^3}\right)$	Relación de tasa de fluidos producidos a factor geométrico
π_{12}	$\frac{t^2 Q_{iny} \sqrt{R_f}}{L^2 \sqrt{\mu_o}}$	Factor que relaciona la tasa de corriente inyectada con el factor geométrico, las propiedades del fluido y de la roca.
π_{13}	$\left(\frac{R_{fa}}{R_f}\right)$	Relación de resistividades entre las formaciones adyacentes y la formación de interés
π_{14}	$\left(\frac{tP_c}{\mu_o}\right)$	Relación de presión capilar a viscosidades.
π_{15}	$\left(\frac{t\Phi_e}{L\sqrt{\mu_o R_f}}\right)$	Factor que relaciona el voltaje aplicado con el factor geométrico y la resistividad de la formación.

Tabla 3. Grupos adimensionales obtenidos por análisis dimensional (Continuación).

Parámetro	Grupo	Descripción
Π_{16}	$\left(\frac{M_{sal}}{\mu_o t L}\right)$	Relación masa de sal en la fase agua al factor geométrico y la viscosidad del crudo.
Π_{17}	$\left(\frac{T\sigma_w t}{\mu_o L^2}\right)$	
Π_{18}	$\left(\frac{T\sigma_o t}{\mu_o L^2}\right)$	
Π_{19}	$\left(\frac{H}{L}\right)$	Factor geométrico
Π_{20}	$\left(\frac{W}{L}\right)$	Factor geométrico
Π_{21}	$\left(\frac{\rho_{rad} L^2}{\mu_o t}\right)$	
Π_{22}	$\left(\frac{c_o T t^2}{L^2}\right)$	
Π_{23}	$\left(\frac{c_w T t^2}{L^2}\right)$	
Π_{24}	$\left(\frac{c_r T t^2}{L^2}\right)$	
Π_{25}	$\left(\frac{c_{rad} T t^2}{L^2}\right)$	
Π_{26}	$\left(\frac{\lambda_f T t^2}{\mu_o L^2}\right)$	Número de Brinkman. Relación de generación de calor a calor transferido.
Π_{27}	$\left(\frac{r_w}{L}\right)$	Factor geométrico para el radio del pozo.
Π_{28}	$\left(\frac{\lambda_{fd} T t^2}{\mu_o L^2}\right)$	
Π_{29}	$\left(\frac{P_{prod} t}{\mu_o}\right)$	
Π_{30}	$\left(\frac{T_c}{T}\right)$	Relación de temperaturas entre las formaciones adyacentes y la formación de interés.

Tabla 3. Grupos adimensionales obtenidos por análisis dimensional (Continuación).

Parámetro	Grupo	Descripción
π_{31}	$\left(\frac{\Delta Pt}{\mu_o}\right)$	Relación de presiones a viscosidades.
π_{32}	$\left(\frac{gt^2}{L}\right)$	Número de Froude. Relación de fuerzas inerciales a fuerzas gravitacionales.
π_{33}	$\left(\frac{\rho_r L^2}{\mu_o t}\right)$	
π_{34}	$\frac{A}{L^2}$	Relación geométrica.
I	S_w	Factor de saturación de agua
II	S_o	Factor de saturación de aceite
III	ϕ	Factor de porosidad
IV	α	Factor de ángulo de buzamiento de la formación.

La **Tabla 4** muestra el resumen de los grupos adimensionales:

Tabla 4. Resumen de los grupos obtenidos por análisis dimensional.

Parámetro	Grupo	Descripción
1	$\left(\frac{K_R}{L^2}\right)$	Relación de permeabilidad a las dimensiones del sistema
2	$\left(\frac{\mu_w}{\mu_o}\right)$	Relación de viscosidades de las fases presentes
3	$\left(\frac{t\Delta P}{\mu_i}\right)$	Relación de presiones a viscosidades.
4	$\left(\frac{tv_{i,j}}{L}\right)$	Relación de velocidades a factor geométrico.
5	$\left(\frac{L^2 \rho_i}{t\mu_i}\right)$	Relación de densidades a viscosidades

Tabla 4. Resumen de los grupos obtenidos por análisis dimensional (Cont.).

Parámetro	Grupo	Descripción
6	$\left(\frac{tq}{L^3}\right)$	Relación de tasa de fluidos producidos a factor geométrico.
7	$\left(\frac{t^2 Q_{ciny} \sqrt{R_f}}{L^2 \sqrt{\mu_i}}\right)$	Factor que relaciona la tasa de corriente inyectada con el factor geométrico, las propiedades del fluido y de la roca.
8	$\left(\frac{R_{fa}}{R_f}\right)$	Relación de resistividades entre las formaciones adyacentes y la formación de interés
9	$\left(\frac{t\Phi_e}{L\sqrt{\mu_i R_f}}\right)$	Factor que relaciona el voltaje aplicado con el factor geométrico y la resistividad de la formación.
10	$\left(\frac{M_{sal}}{\mu_i L}\right)$	Relación masa de sal en la fase agua al factor geométrico y la viscosidad del crudo.
11	$\left(\frac{T\sigma_i t}{\mu_i L^2}\right)$	
12	$\left(\frac{H}{L}\right)$	Factor geométrico
13	$\left(\frac{W}{L}\right)$	Factor geométrico
14	$\left(\frac{c_i T t^2}{L^2}\right)$	
15	$\left(\frac{\lambda_j T t^2}{\mu_i L^2}\right)$	Número de Brinkman. Relación de generación de calor a calor transferido.
16	$\left(\frac{r_w}{L}\right)$	Factor geométrico para el radio del pozo.
17	$\left(\frac{T_c}{T}\right)$	Relación de temperaturas entre las formaciones adyacentes y la formación de interés.
18	$\left(\frac{gt^2}{L}\right)$	Número de Froude. Relación de fuerzas inerciales a fuerzas gravitacionales.
19	$\left(\frac{A}{L^2}\right)$	Relación geométrica.

Tabla 4. Resumen de los grupos obtenidos por análisis dimensional (Cont.).

Parámetro	Grupo	Descripción
20	S_i	Factor de saturación de la fase i
21	ϕ	Factor de porosidad
22	α	Factor de ángulo de buzamiento de la formación.

La combinación de los grupos adimensionales obtenidos por análisis dimensional, se puede observar en la **tabla 5**:

Tabla 5. Grupos de similitud obtenidos para el proceso combinando los grupos obtenidos por análisis dimensional.

Descripción	Grupo
Multiplicando el grupo 5 por el grupo 18 por seno del grupo 22 y dividiendo por el grupo 3	$\left(\frac{\rho_{jR} g_R L_R \text{sen}(\alpha)}{P_R} \right)$
Multiplicando el grupo 5 por el grupo 18 por coseno del grupo 22 y dividiendo por el grupo 3	$\left(\frac{\rho_{jR} g_R L_R \text{cos}(\alpha)}{P_R} \right)$
Multiplicando el grupo 5 por el grupo 14 por (1 – grupo 21) y dividiendo por el grupo 15	$\left(\frac{(1-\phi)M_R L^2}{\lambda_{jR} t_R} \right)$
Multiplicando el grupo 1 por el grupo 3 por el grupo 14 por el grupo 5 y dividiendo por el grupo 15	$\left(\frac{\rho_{jR} h_{jR} K_{jR} P_R}{\mu_{jR} \lambda_{jR} T_R} \right)$
Elevando al cuadrado el grupo 9 y dividiéndolo por el grupo 15	$\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{jR} \lambda_{jR} \Delta T_R} \right)$
Dividiendo el grupo 9 por el grupo 7	$\left(\frac{\Phi_e L}{Q_{ciny} R_f t} \right)$
Multiplicando el grupo 18 por el grupo 5 por los grupos 20 y 21 y dividiendo por el grupo 15	$\left(\frac{\phi_R S_{jR} \rho_{jR} g_R L^3}{\lambda_{jR} t_R T_R} \right)$
Multiplicando el grupo 14 por el grupo 5 por los grupos 20 y 21 y dividiendo por el grupo 15	$\left(\frac{\phi_R S_{jR} \rho_{jR} e_{iR} L^2}{\lambda_{jR} t_R T_R} \right)$
Grupo 16	$\left(\frac{r_w}{L} \right)$

Como se puede observar, combinando los grupos obtenidos por análisis dimensional, se obtuvieron los grupos hallados por análisis inspeccional.

4.3. GRUPOS DE SIMILARIDAD PARA EL PROCESO DE CALENTAMIENTO ELÉCTRICO RESISTIVO

Si se observan los grupos de similitud obtenidos por análisis dimensional se puede ver que son los mismos que se obtuvieron por análisis inspeccional, lo cual sugiere tomar los grupos de similitud obtenidos por análisis inspeccional como los grupos finales del proceso de calentamiento eléctrico resistivo, adicionando algunos grupos del análisis dimensional. Los grupos finales de similitud se pueden ver en la **Tabla 6**.

Tabla 6. Grupos de similitud para el proceso de calentamiento resistivo.

	GRUPO		GRUPO		GRUPO
I	$\left(\frac{x_R}{y_R}\right)$	VII	$\left(\frac{1}{S_{oR}}\right)$	XIII	$\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{fR} I_{inyR}}\right)$
II	$\left(\frac{x_R}{z_R}\right)$	VIII	$\left(\frac{S_{wiR}}{S_{oiR}}\right)$	XIV	$\left(\frac{K_{iR} P_R \rho_{(i)R} h_{(i)R}}{\mu_{iR} \lambda_R \Delta T_R}\right)$
III	$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R}\right)$	IX	$\left(\frac{T_{iR}}{T_R}\right)$	XV	$\left(\frac{P_{prodR}}{P_{covR}}\right)$
IV	$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \sen(\alpha)_R}{P_R}\right)$	X	$\left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}}\right)$	XVI	$\left(\frac{\phi_R S_{iR} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c \lambda_R \Delta T_R t_R}\right)$
V	$\left(\frac{(1-\phi_R) M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R}\right)$	XI	$\left(\frac{W_{salmueraR} \mu_{wR}}{\rho_{wR} K_R P_R z_R}\right)$	XVII	$\left(\frac{P_{(i)R}}{P_{cR}}\right)$
VI	$\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R}\right)$	XII	$\left(\frac{\phi_R S_{(i)R} \rho_{(i)R} e_{(i)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R}\right)$	XVIII	$\left(\frac{r_w}{x_R}\right)$

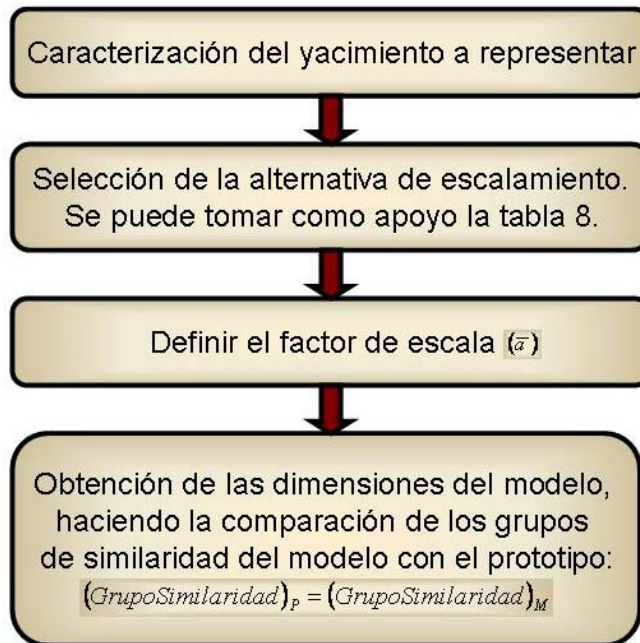
5. VALIDACIÓN DE LOS GRUPOS DE SIMILARIDAD

El procedimiento llevado a cabo para la validación de los grupos de similaridad es el siguiente:

- ✚ Planteamiento de un yacimiento hipotético a escalar.
- ✚ Dimensionamiento de un modelo físico escalado, basado en el yacimiento escogido en el numeral anterior.
- ✚ Obtención de las curvas de Temperatura vs. Distancia, para el yacimiento escogido y para el modelo escalado, por medio de una simulación llevada a cabo en el simulador comercial S.T.A.R.S. de CMG®.
- ✚ Comparación de las curvas obtenidas para el yacimiento con las del modelo, para observar si en realidad el modelo está representando el comportamiento del yacimiento.
- ✚ Cálculo del porcentaje de variación del comportamiento del modelo con respecto al yacimiento.

El procedimiento para realizar el escalamiento se ilustra en la **figura 9**:

Figura 9. Procedimiento para realizar el dimensionamiento del modelo.

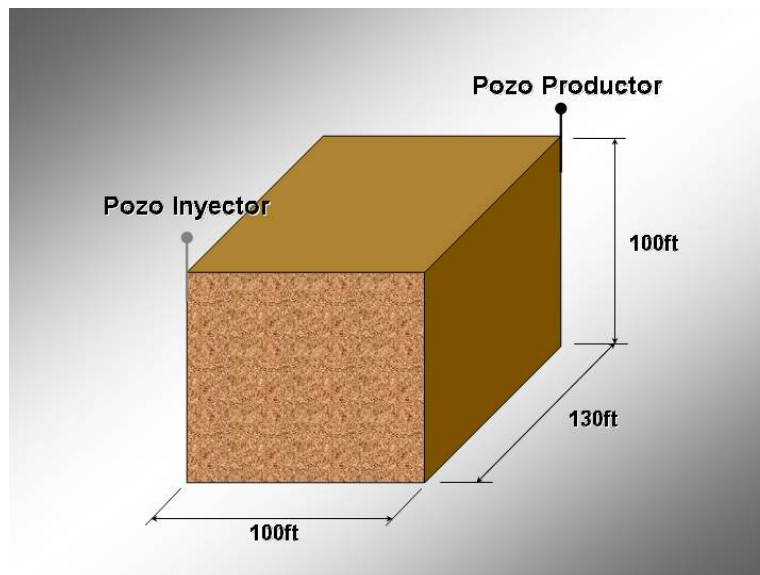


Este procedimiento se ilustra mejor en los numerales 5.1 a 5.5.

5.1. ESCOGENCIA DEL YACIMIENTO A ESCALAR

Para esto se tuvo en cuenta que la intención de este escalamiento es la de evaluar si en realidad los grupos de similitud sirven para escalar Calentamiento Eléctrico Resistivo y no la de escalar un yacimiento real como tal. Por esto se decidió escoger un yacimiento hipotético que se ajuste a lo que necesitamos. El yacimiento escogido cuenta con un pozo inyector de corriente y un pozo productor y se ilustra en la **figura 10**.

Figura 10. Yacimiento hipotético.



Los datos del yacimiento escogido se encuentran en la **tabla 7**

Tabla 7. Datos del yacimiento hipotético.

Propiedad	Descripción	Valor	Unidades
X	Ancho	100	<i>Ft</i>
Y	Largo	130	<i>Ft</i>
Z	Espesor	100	<i>Ft</i>
API	Gravedad del aceite	17	
A	Buzamiento	0	<i>Radianes</i>
P_{yac}	Presión actual de yacimiento	1500	<i>Psi</i>
P_{wf}	Presión de fondo fluyendo	200	<i>Psi</i>
ϕ_{yac}	Porosidad del yacimiento	30	%
$[]$	Concentración de NaCl en el agua	18000	ppm
M_{σ}	Capacidad Calorífica de la roca reservorio	35	<i>Btu/ft³°F</i>
$M_{(o)fa}$	Capacidad Calorífica de la roca reservorio	35	<i>Btu/hr-ft</i>

Tabla 7. Datos del yacimiento hipotético (Continuación).

Propiedad	Descripción	Valor	Unidades
λ	Conductividad térmica del yacimiento saturado de fluido	24	<i>Btu/ft-dia-°F</i>
λ_{fa}	Conductividad térmica de la formación adyacente	24	<i>Btu/ft-dia-°F</i>
Φ_e	Voltaje aplicado	600	<i>V</i>
μ_o	Viscosidad del aceite	50	<i>Cp</i>
R_w	Resistividad eléctrica del agua a 125 °F	0.23	<i>Ω-m</i>
K	Permeabilidad del yacimiento	100	<i>Md</i>
r_w	Radio del Pozo	0.3	<i>Ft</i>
S_{wi}	Saturación de Agua inicial	13	<i>%</i>
T	Temperatura del yacimiento	125	<i>°F</i>
R_f	Resistividad de la formación	151.22	<i>Ω-m</i>

5.2. ALTERNATIVAS DE ESCALAMIENTO

Las alternativas más aplicadas en el diseño de modelos están en la **Tabla 8**:

Tabla 8. Alternativas en el tratamiento y construcción de modelos escalados.

Aprox	Fuente	Tipos de modelos según la Presión	Condiciones en el modelo y en el prototipo de campo	Aspectos que permite observar
I.	Stegemeier et al ¹³	Baja presión	Diferentes fluidos, diferente medio poroso, diferente caída de presión y similaridad geométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Fenómenos de vaporización asociados con caídas de presión. • Distribución de temperaturas. • Velocidad.
II.	Pujol y Boberg ²¹	Alta presión.	Mismos fluidos, diferente medio poroso, diferente caída de presión, y similaridad geométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Geometría. • Fuerzas viscosas. • Fuerzas gravitacionales

²¹ PUJOL, L. y BOBERG, T.C. *Scaling Accuracy of Laboratory Steamflooding Models*. SPE 4191: 1-7. 1972.

Tabla 8. Alternativas en el tratamiento y construcción de modelos escalados (Continuación).

Aprox	Fuente	Tipos de modelos según la Presión	Condiciones en el modelo y en el prototipo de campo	Aspectos que permite observar
III.	Kimber et al ²² .	Alta presión.	Mismos fluidos, mismo medio poroso, misma caída de presión y similaridad geométrica	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades que dependen de la presión. • Saturaciones irreducibles. • Permeabilidades relativas. • Efectos de difusión. • Fuerzas viscosas. • Transferencia de calor.
IV.	Kimber et al ²² .	Alta presión.	Mismos fluidos, mismo medio poroso, misma caída de presión y similaridad geométrica relajada. El yacimiento debe ser horizontal y de poco espesor.	<ul style="list-style-type: none"> • Propiedades que dependen de la presión. • Saturaciones irreducibles. • Permeabilidades relativas. • Efectos de difusión. • Fuerzas viscosas. • Efectos gravitacionales
V.	Kimber et al ²² .	Alta presión.	Mismos fluidos, mismo medio poroso, misma caída de presión y similaridad geométrica relajada. El yacimiento debe ser de poco espesor.	<ul style="list-style-type: none"> • Efectos de dispersión a altas tasas. • Efectos viscosos.
VI.	Kimber et al ²² .	Alta presión.	Mismos fluidos, diferente medio poroso y caída de presión y similaridad geométrica relajada. El yacimiento debe ser de poco espesor.	<ul style="list-style-type: none"> • Efectos de gravedad. • Efectos de dispersión. • El tiempo del experimento es muy grande.

²² KIMBER, K.D.; FAROUQ, A.; PUTTAGUNTA, V.R. *New Scaling Criteria and Their Relative Merits for Steam Recovery Experiments*. J. Can. Pet. Technol, 27(4): 86-94. 1988.

5.3. JUSTIFICACIÓN DE LA ALTERNATIVA SELECCIONADA

Debido a la complejidad que conlleva escalar un proceso de calentamiento eléctrico, una fusión de la alternativa II y la alternativa III fue seleccionada como la mejor forma de abordar el escalamiento físico del fenómeno en estudio. Lo rescatable de esta alternativa III fue la de trabajar con el mismo medio poroso de la formación de interés. Esto permitirá un escalamiento indirecto de las propiedades eléctricas y térmicas del medio, que son función de la estructura de los granos, la litología, el factor de formación y los minerales presentes en la roca. Otra razón para elegir trabajar con este aspecto de la alternativa III, es buscar la reproducción de la mojabilidad del medio poroso. Se debe resaltar que aunque se trabaje con el mismo medio de la formación no necesariamente tendrá la misma porosidad y permeabilidad. Las razones por las cuales se escogió parte de la alternativa II fue la de representar diferente caída de presión. La fusión de estas dos alternativas dio como resultado: mismos fluidos, mismo medio poroso, misma caída de temperatura y diferente caída de presión.

5.4. FENÓMENOS NO REPRODUCIBLES EN EL MODELO

Aunque se trabaje con el material de la formación para reproducir el medio poroso, las condiciones de consolidación de la arena que va a representar mi yacimiento en el modelo físico escalado (totalmente diferentes a las condiciones que originaron la compactación del yacimiento), hacen que las curvas de permeabilidades relativas y funciones de presión capilar varíen entre el modelo y el prototipo. Mediante pruebas de desplazamiento y presión capilar que deben realizarse al empaque podrá corroborarse si se está cumpliendo con este aspecto; de lo contrario podría afirmarse que el modelo no escala adecuadamente saturaciones irreducibles y permeabilidades relativas.

Además ningún modelo físico escalado diseñado hasta el momento nos brinda la opción de trabajar gas como fase libre.

5.5. ESCALAMIENTO DEL YACIMIENTO

Por cuestiones de simplicidad y con el propósito de representar de la manera más adecuada posible el comportamiento del yacimiento hipotético, se decidió asumir para el modelo: mismos fluidos, mismo medio poroso (tanto para la arena productora como para las capas adyacentes), e igual porosidad debido a que existen modelos que se pueden construir con una porosidad de 30%. Además, como no se puede saber el comportamiento de las curvas de permeabilidad relativa en el modelo y cualquier suposición que se tome tiene un alto grado de incertidumbre, se decidió tomar las mismas curvas de permeabilidad relativa tanto para el yacimiento como para el modelo.

Teniendo en cuenta las suposiciones hechas, el procedimiento para realizar el Dimensionamiento del modelo fue el siguiente:

🔧 Factor de escala y geometría del modelo

El primer parámetro determinado en el diseño es el factor de escalamiento que es una relación de longitudes entre el modelo y el prototipo de campo.

En muchas aplicaciones, un factor de escalamiento \bar{a} entre 150 y 300 puede resultar en un modelo de proporciones aceptables que puede ser corrido en un solo día⁷. Para este estudio, se determino un factor de escala de 200, lo cual lleva a las siguientes dimensiones del modelo:

$$\bar{a} = \frac{x_P}{x_M} = \frac{y_P}{y_M} = \frac{z_P}{z_M} \dots\dots\dots(45)$$

Usando la ecuación (45), se tiene:

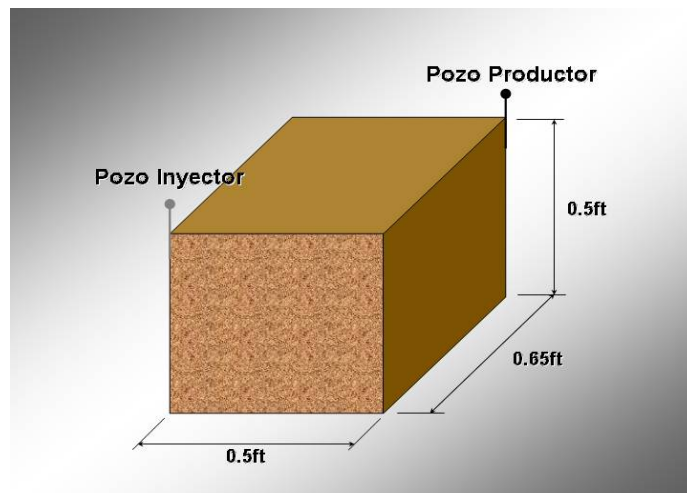
$$x_M = \frac{x_P}{a} = \frac{100 \text{ ft}}{200} = 0.5 \text{ ft}$$

$$y_M = \frac{y_P}{a} = \frac{130 \text{ ft}}{200} = 0.65 \text{ ft}$$

$$z_M = \frac{z_P}{a} = \frac{100 \text{ ft}}{200} = 0.5 \text{ ft}$$

La **figura 11** representa la configuración geométrica del modelo a desarrollar.

Figura 11. Dimensionamiento geométrico del Modelo.



🔧 **Radio del pozo:** El radio del pozo puede calcularse del **grupo XVIII**:

$$\left(\frac{r_w}{x} \right)_P = \left(\frac{r_w}{x} \right)_M \dots\dots\dots (46)$$

y despejando:

$$r_{(w)M} = r_{(w)P} \left(\frac{x_M}{x_P} \right) = \frac{r_{(w)P}}{\bar{a}} = \frac{0.3}{200} = 0.0015 \text{ ft}$$

El escalamiento geométrico de los pozos no es posible por el tamaño requerido para el modelo. Además del problema mecánico de construir tal pozo. Por esto al momento de construir el modelo, el radio debe tener el tamaño mínimo que se pueda construir.

🔗 Selección de las propiedades del fluido

Una de las condiciones más importantes en el escalamiento físico es que las propiedades adimensionales de los fluidos deben ser función de las mismas variables adimensionales en el modelo y en el prototipo de campo. Por lo tanto, si se emplean los mismos fluidos no es necesario escalar ciertas propiedades de los mismos¹⁵.

Para este caso específico se asumieron los mismos fluidos y la misma temperatura tanto para el modelo como para el prototipo por cuestiones de simplicidad, para evitar la selección de otros fluidos que se acomoden precisamente a los requerimientos del escalamiento.

🔗 Escalamiento de la presión en el modelo

En este estudio, el diferencial de presión corresponde a la diferencia de presión entre la presión de yacimiento y la presión de producción ($\Delta P = P_{yac} - P_{wf}$).

Para escalar la presión utilizamos lo **grupos III y IV**:

$$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right) \text{ y } \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{P_R} \right)$$

Como el ángulo de buzamiento es cero, el grupo IV se elimina y solo queda el **grupo III** para escalar la presión:

$$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right) = \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(0)_R}{P_R} \right) = \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R}{P_R} \right)$$

La ecuación anterior puede simplificarse recordando que para el modelo se están empleando los mismos fluidos del yacimiento, debido a que propiedades tales como la densidad y la viscosidad para un aceite muerto y para el agua, no tienen una variación significativa con la presión, asumimos que tanto en el modelo y el prototipo, estas propiedades son las mismas.

$$\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R}{P_R} \right)_P = \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R}{P_R} \right)_M$$

$$\Delta P_M = \left(\frac{z_M}{z_P} \right) \Delta P_P = \left(\frac{x_M}{x_P} \right) \Delta P_P = \left(\frac{1}{a} \right) \Delta P_P \dots\dots\dots(47)$$

El diferencial de presión en el prototipo de campo es:

$$\Delta P_P = P_{vac} - P_{wf} \dots\dots\dots(48)$$

$$\Delta P_P = (1500 - 200) = 1300 \text{ [psi]}$$

$$\Delta P_M = \left(\frac{1}{200} \right) 1300 = 6.5 \text{ [psi]}$$

Asumiendo en el modelo una $P_{(vac)M}$ igual a la del prototipo de campo, la presión de producción en el modelo es:

$$P_{(wf)M} = P_{(vac)M} - \Delta P_M \dots\dots\dots(49)$$

$$P_{(wf)M} = 1500 - 6.5 = 1493.5 \text{ [psi]}$$

🔧 Temperatura del modelo

El modelo físico escalado trabajará a las mismas condiciones de temperatura del yacimiento para mantener el escalamiento de las propiedades de los fluidos²².

🔧 Determinación de la porosidad del modelo

Debido a que la porosidad en el yacimiento escogido es del 30%, y en la industria se pueden construir empaques con esa porosidad, se asumió la misma porosidad para el modelo. Esto indirectamente señala que la conductividad térmica del yacimiento (λ) al tener mismo medio, misma porosidad y mismos fluidos es igual tanto para el modelo como para el prototipo. Si se utiliza la misma saturación de agua, los mismos fluidos, el mismo medio y la misma porosidad de la formación, se obtendrá la misma resistividad tanto para el modelo como para el prototipo, esto se observa de una manera más clara si observamos la ecuación de Archie²³.

🔧 Escalamiento de las capas adyacentes

La importancia de las capas adyacentes es muy alta en el proceso CER, debido a que por estas capas circula parte de la corriente que se está inyectando al yacimiento, lo que indica que no toda la corriente que se inyecta al yacimiento está siendo aprovechada en el calentamiento del fluido. Además, estas capas absorben parte del calor que se genera en la roca de interés. El simulador térmico S.T.A.R.S. de CMG[®], toma en cuenta solo la corriente que circula por la zona de interés. Eso quiere decir que toda la corriente que se inyecta está siendo utilizada a favor del calentamiento del fluido y las pérdidas solo se ven reflejadas como calor disipado en las formaciones adyacentes.

Para representar este aspecto en el modelo, se asumió para este caso específico, mismo medio, de tal manera que se reproduzcan las propiedades térmicas de las formaciones adyacentes. En el caso en que se desee utilizar otro medio se pueden escalar las

²³ BASSIOUNI, Z. *Theory, Measurement and Interpretation of Well Logs*. SPE Textbook Series. Volume 4. 1994.

propiedades térmicas y la porosidad de las capas adyacentes por medio del **grupo V**. También se pueden escalar propiedades del fluido de las formaciones adyacentes por medio del **grupo XII**. Para más información acerca de estos grupos, se puede revisar el **anexo A**, en la parte del balance de energía para las formaciones adyacentes.

Escalamiento de la permeabilidad en el modelo

Para satisfacer la aproximación seleccionada, es necesario que la permeabilidad en el modelo sea considerablemente más alta que la permeabilidad del prototipo de campo²². Para escalar la permeabilidad se usa el **grupo XIV**:

$$\left(\frac{\mu_w \lambda_f \Delta T}{K \Delta P \rho_w h_w} \right)_M = \left(\frac{\mu_w \lambda_f \Delta T}{K \Delta P \rho_w h_w} \right)_P$$

$$K_M = \left(\frac{\mu_{wM}}{\mu_{wP}} \right) \left(\frac{\lambda_{fM}}{\lambda_{fP}} \right) \left(\frac{\Delta T_{\max M}}{\Delta T_{\max P}} \right) \left(\frac{\Delta P_P}{\Delta P_M} \right) \left(\frac{\rho_{wP}}{\rho_{wM}} \right) \left(\frac{h_{wP}}{h_{wM}} \right) K_P \dots\dots\dots(50)$$

Como el modelo opera a las mismas condiciones de temperatura, con los mismos fluidos del yacimiento y la misma porosidad, entonces:

$$\Delta T_{\max M} = \Delta T_{\max P}$$

$$\rho_{wM} = \rho_{wP}$$

$$h_{wM} = h_{wP}$$

$$\lambda_M = \lambda_P$$

$$\mu_{(w)M} = \mu_{(w)P}$$

Con las anteriores suposiciones, la permeabilidad puede calcularse mediante la siguiente relación:

$$K_M = \left(\frac{\Delta P_P}{\Delta P_M} \right) K_P \dots\dots\dots(51)$$

Con estos datos, la permeabilidad en el modelo es igual a:

$$K_M = \left(\frac{1300}{6.5} \right) (0.1D) = 20 \text{ [darcys]}$$

Escalamiento del voltaje aplicado al modelo

El objetivo que se persigue al trabajar con arena de la misma formación es tratar de alguna forma escalar intrínsecamente las propiedades eléctricas del medio. De acuerdo con el profesor Farouq Ali*, se decidió trabajar con este material.

Para escalar adecuadamente el voltaje que se requiere aplicar al medio se emplea el **grupo VI**:

$$\left(\frac{\Phi_e^2}{R_f \lambda_f \Delta T} \right)_P = \left(\frac{\Phi_e^2}{R_f \lambda_f \Delta T} \right)_M$$

$$\Phi_{(e)M}^2 = \Phi_{(e)P}^2 \left(\frac{R_{(f)M}}{R_{(f)P}} \right) \left(\frac{\lambda_{(f)M}}{\lambda_{(f)P}} \right) \left(\frac{\Delta T_M}{\Delta T_P} \right) \dots\dots\dots(52)$$

Como el modelo opera a las mismas condiciones de temperatura, con los mismos fluidos del yacimiento y la misma porosidad, entonces:

$$\Delta T_{\max M} = \Delta T_{\max P}$$

$$\lambda_M = \lambda_P$$

$$R_{(f)M} = R_{(f)P}$$

* Entrevista con el profesor Farouq Ali. Noviembre 28 de 2005.

Como se puede observar, el voltaje aplicado es igual tanto para el yacimiento como para el modelo 600V.

La potencia disipada en el modelo y en el prototipo de campo es calculada de la siguiente relación propuesta por Wattenbarger y McDougal⁴:

$$P(r_e) = \frac{(\Phi_e)^2 2\pi h}{R_f \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right)} \dots\dots\dots(53)$$

Donde:

- $P(r_e)$ = Potencia disipada en el medio. [W].
- Φ_e = Diferencia de potencial aplicado al medio. [600V].
- R_f = Resistividad eléctrica de la roca. [151.22Ω.m].
- h = Espesor de la formación, [30.48m].
- r_e = Radio medio entre pozos. [50m].
- r_w = Radio del pozo. [0.09144m].

Potencia disipada en el prototipo:

$$P_p(r_e) = \frac{(600)^2 2\pi * 30.48}{151.22 \ln\left(\frac{50}{0.09144}\right)} = 72321 [W] = 72.3 [KW]$$

Corriente en el prototipo:

$$I = \frac{P_p(r_e)}{\Phi_{eP}} \dots\dots\dots(54)$$

$$I = \frac{72321}{600} = 120.5 [A]$$

Potencia disipada en el modelo:

$$P_M (r_e) = \frac{(600)^2 2\pi * 0.1524}{151.22 \text{Ln} \left(\frac{0.25}{0.0004572} \right)} = 365.56 [W] = 0.366 [KW]$$

Corriente en el modelo:

$$I = \frac{P_M (r_e)}{\Phi_{eM}} \dots\dots\dots(55)$$

$$I = \frac{365.56}{600} = 0.61 [A]$$

✚ **Escalamiento del tiempo en el modelo**

El escalamiento del tiempo se efectúa usando el **grupo XII** o el **grupo V** para este caso específico. Debido a las suposiciones hechas anteriormente, por cualquiera de los dos grupos se deben obtener los mismos valores. Se decidió tomar el **grupo XII**:

$$\left(\frac{\phi_M S_M \rho_{wM} e_{wM} x_M^2}{\lambda_{jM} \Delta T_M t_M} \right)_M = \left(\frac{\phi_P S_P \rho_{wP} e_{wP} x_P^2}{\lambda_{jP} \Delta T_P t_P} \right)_P$$

Recordando que:

$$\Delta T_{\max M} = \Delta T_{\max P}$$

$$\rho_{wM} = \rho_{wP}$$

$$e_{wM} = e_{wP}$$

$$\lambda_M = \lambda_P$$

El grupo adimensional para el escalamiento del tiempo queda reducido a:

$$\left(\frac{\phi_M S_M x_M^2}{t_M} \right) = \left(\frac{\phi_P S_P x_P^2}{t_P} \right)$$

Una suposición fundamental y muy común al momento de escalar las propiedades de un modelo físico es suponer que el producto ϕS es el mismo tanto para el modelo como para el prototipo de campo¹³. Con este apartado, el tiempo en el modelo es igual a:

$$t_M = \left(\frac{x_M^2}{x_P^2} \right) t_P = \frac{t_P}{a^2} \dots\dots\dots(56)$$

Reemplazando valores:

$$t_M = \frac{t_P}{200^2} = (0.000025)(t_P)$$

Lo que indica que un mes de prueba en el yacimiento serían 1.08 minutos en el modelo.

En la **Tabla 9** se resumen los resultados obtenidos del escalamiento para el prototipo.

Tabla 9. Propiedades para el prototipo de campo y el modelo físico escalado.

Parámetro	Valor Prototipo	Unidades	Valor Modelo	Unidades
Largo	130	<i>ft</i>	0.65	<i>Ft</i>
Espesor neto de la arena de interés	100	<i>ft</i>	0.5	<i>Ft</i>
Ancho	100	<i>ft</i>	0.5	<i>Ft</i>
Radio promedio del pozo	0.3	<i>ft</i>	0.0015	<i>Ft</i>
Porosidad de la formación de interés	30	%	30	%
Permeabilidad Promedio	0.1	<i>darcs</i>	20	<i>Darcys</i>
Temperatura	125	<i>°F</i>	125	<i>°F</i>
Presión	1500	<i>psi</i>	1500	<i>Psi</i>

Tabla 9. Propiedades para el prototipo de campo y el modelo físico escalado (Cont.).

Parámetro	Valor Prototipo	Unidades	Valor Modelo	Unidades
Viscosidad del crudo	50	<i>cp</i>	50	<i>Cp</i>
Gravedad API crudo	17		17	
Saturación de agua inicial en la formación de interés	0.13		0.13	
Resistividad de la formación de interés	151.22	<i>Ω.m</i>	151.22	<i>Ω.m</i>
Potencia disipada en la formación de interés	72.3	<i>KW</i>	0.366	<i>KW</i>
Corriente en la formación de interés	120.5	<i>A</i>	0.61	<i>A</i>
Conductividad térmica de la formación de interés	24	<i>Btu/dia-ft °F</i>	24	<i>Btu/dia-ft °F</i>
Conductividad térmica de las formaciones adyacentes	24	<i>Btu/dia-ft °F</i>	24	<i>Btu/dia-ft °F</i>
Presión de fondo fluyendo	200	<i>psi</i>	1493.5	<i>Psi</i>
Voltaje aplicado	600	<i>V</i>	600	<i>V</i>
Angulo de inclinación	0	<i>grados</i>	0	<i>Grados</i>
Tiempo de simulación	6	<i>meses</i>	6.48	<i>Min</i>
Tiempo de simulación	1	<i>mes</i>	1.08	<i>Min</i>
Capacidad calorífica de la roca de yacimiento ($M_{(\sigma)}$)	35	<i>Btu/ft³°F</i>	35	<i>Btu/ft³°F</i>
Capacidad calorífica de la roca adyacente ($M_{(\sigma)fa}$)	35	<i>Btu/ft³°F</i>	35	<i>Btu/ft³°F</i>

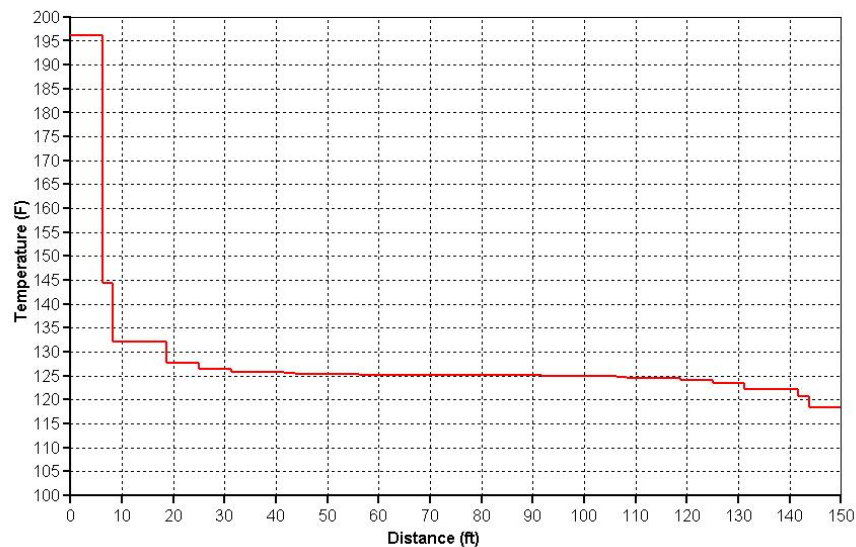
5.6. ETAPA DE SIMULACIÓN

Con el modelo ya dimensionado, se procede a cargar los datos tanto para el yacimiento como para el modelo escalado en el Builder de CMG®, para realizar una simulación de calentamiento a un mes y a seis meses (tiempo en el yacimiento), con el objetivo de observar el comportamiento de las curvas de Temperatura vs distancia.

Después de realizar el procedimiento de carga de datos, se obtuvieron las siguientes gráficas de Temperatura para el yacimiento y para el modelo:

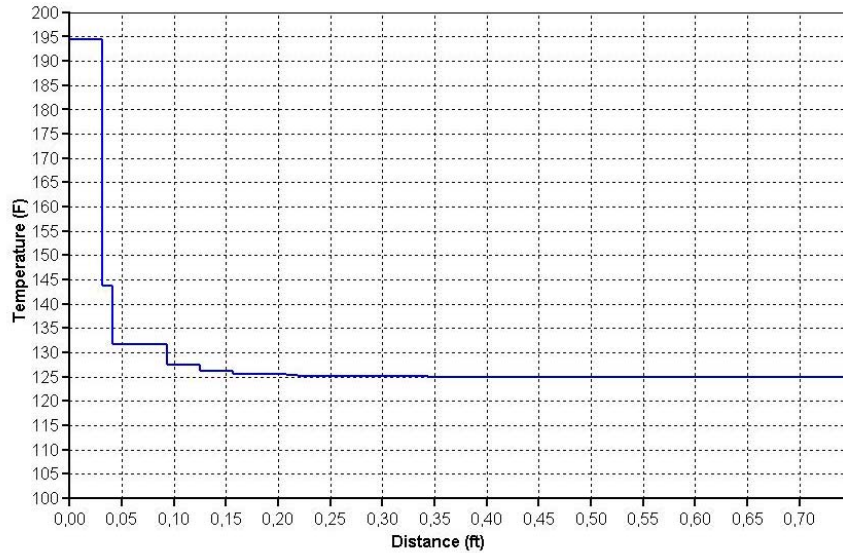
- La **Figura 12** y la **Figura 13** fueron tomadas respectivamente para un mes de calentamiento en el yacimiento y su equivalente en tiempo (1.08 min) en el modelo:

Figura 12. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Yacimiento durante un mes de calentamiento.



Fuente: Simulador S.T.A.R.S. de CMG®.

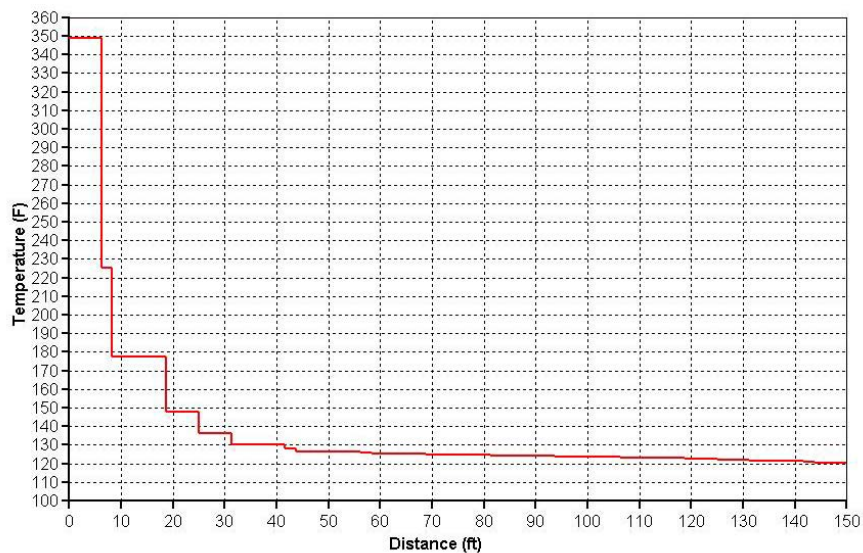
Figura 13. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Modelo durante 1.08 minutos de calentamiento.



Fuente: Simulador S.T.A.R.S. de CMG®.

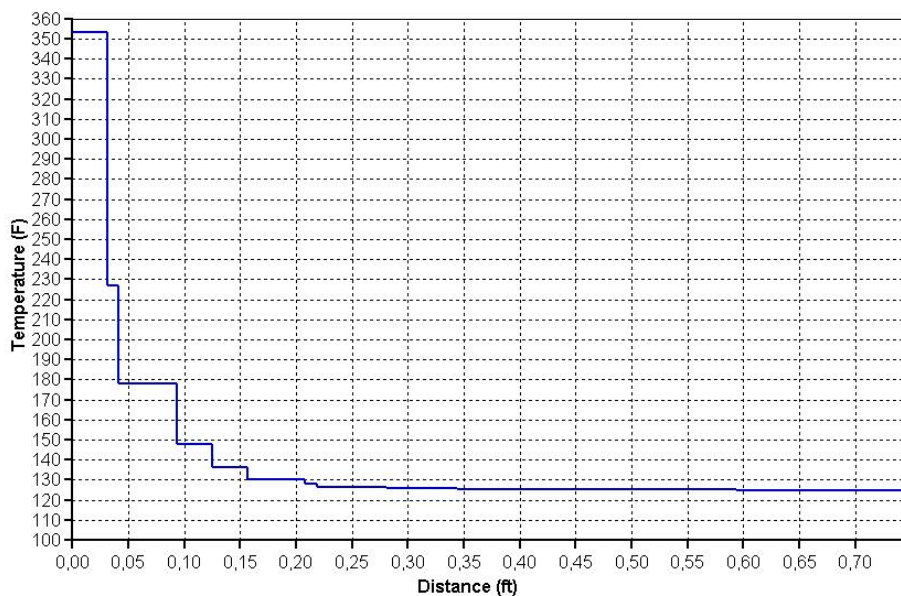
Las Figuras 14 y 15 fueron tomadas respectivamente para un 6 meses de calentamiento en el yacimiento y su equivalente en tiempo (6.48 min) en el modelo:

Figura 14. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Yacimiento durante 6 meses de calentamiento.



Fuente: Simulador S.T.A.R.S. de CMG®.

Figura 15. Perfil de Temperatura entre el pozo inyector y el pozo productor para el Modelo durante 6.48 minutos de calentamiento.



Fuente: Simulador S.T.A.R.S. de CMG®.

5.7. COMPARACIÓN DE LOS PERFILES DE TEMPERATURA DEL YACIMIENTO Y DEL MODELO Y CÁLCULO DEL PORCETAJE DE DESVIACIÓN.

Después de obtener las gráficas de Temperatura del simulador, se procede a hacer la respectiva comparación de las curvas y el respectivo cálculo de la desviación del comportamiento de la temperatura en el modelo con respecto al yacimiento.

- 🔗 Comparación de los perfiles de temperatura para un calentamiento de un mes para el prototipo y 1.08 minutos para el modelo:

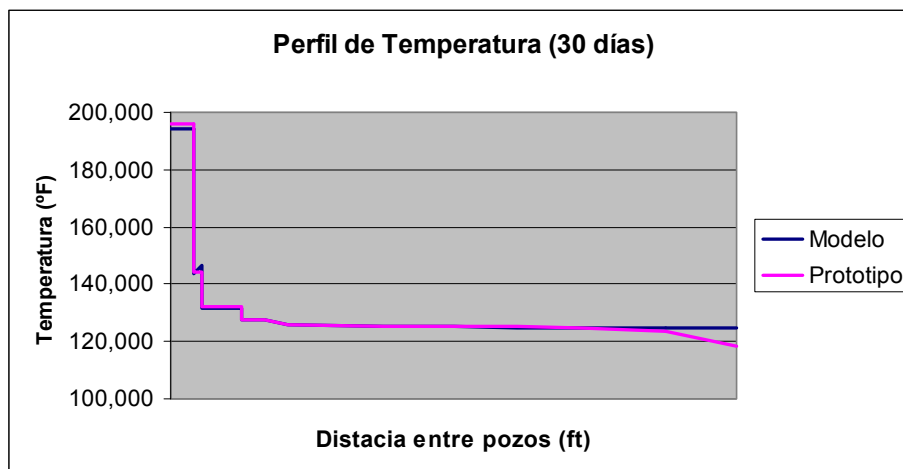
Los datos de temperatura tanto para el modelo como para el prototipo se encuentran en la **tabla 10**:

Tabla 10. Datos del porcentaje de desviación para 1.08 min de calentamiento en el modelo y 1 mes en el yacimiento.

Prototipo		Modelo		%Desviación
X	T	x	T	
0	196,071	0,000	194,508	0,80%
6,250	196,071	0,031	194,508	0,80%
6,250	144,445	0,031	143,652	0,55%
8,333	144,445	0,042	146,652	1,53%
8,333	132,078	0,042	131,608	0,36%
18,750	132,078	0,094	131,608	0,36%
18,750	127,785	0,094	127,510	0,22%
25,000	127,785	0,125	127,510	0,22%
31,250	125,767	0,156	125,613	0,12%
56,250	125,306	0,281	125,190	0,09%
75,000	125,121	0,375	125,004	0,09%
91,667	125,070	0,458	124,956	0,09%
108,333	124,599	0,542	124,940	0,27%
131,250	123,476	0,656	124,931	1,18%
150,000	118,468	0,750	124,927	5,45%
				0,8078%

La **figura 16**, muestra el comportamiento de la temperatura en el modelo y en el prototipo (no se muestran datos en el eje x debido a que modelo y prototipo se encuentran a diferente escala):

Figura 16. Superposición de los perfiles de temperatura para el Modelo (1.08 min de calentamiento) y Prototipo (1 mes de calentamiento).



El porcentaje de desviación promedio del comportamiento de la temperatura en el Modelo con respecto al prototipo fue del 0.81%. Este valor fue calculado tomando como valor real la temperatura del Prototipo.

- ☛ Comparación de los perfiles de temperatura para un calentamiento de seis meses para el prototipo y 6.48 minutos para el modelo:

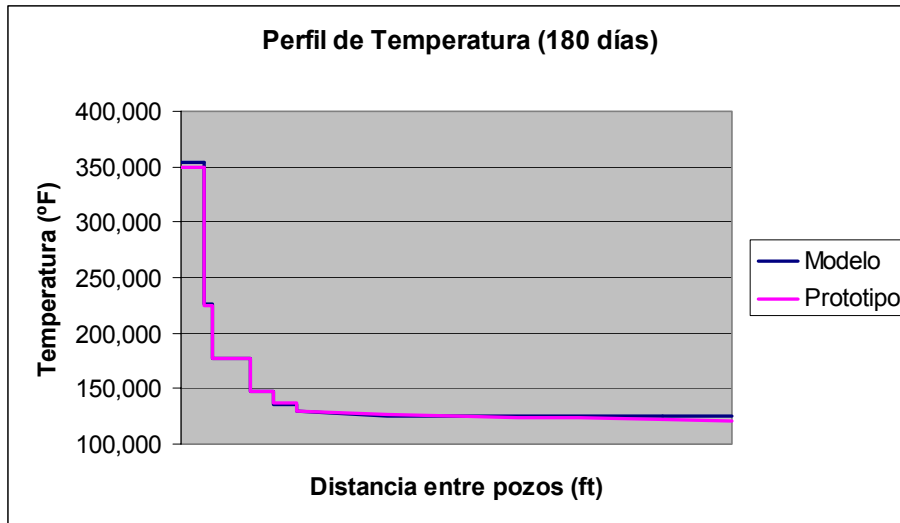
Los datos de temperatura tanto para el modelo como para el prototipo se encuentran en la **tabla 11**:

Tabla 11. Datos del porcentaje de desviación para 6.48 min de calentamiento en el modelo y 6 meses en el yacimiento.

Prototipo		Modelo		%Desviación
X	T	x	T	
0	350	0,000	353,321	0,95%
6,250	350,000	0,031	353,321	0,95%
6,250	225,116	0,031	226,684	0,70%
8,333	225,116	0,042	226,684	0,70%
8,333	177,232	0,042	177,795	0,32%
18,750	177,232	0,094	177,795	0,32%
18,750	147,682	0,094	147,749	0,05%
25,000	147,682	0,125	147,749	0,05%
25,000	136,395	0,125	136,323	0,05%
31,250	136,395	0,156	136,323	0,05%
31,250	130,420	0,156	130,327	0,07%
56,250	126,567	0,281	125,598	0,77%
75,000	124,736	0,375	125,371	0,51%
91,667	124,401	0,458	125,176	0,62%
108,333	123,318	0,542	125,035	1,39%
131,250	121,832	0,656	124,993	2,59%
150,000	120,558	0,750	124,977	3,67%
				0,8085%

La **figura 17**, muestra el comportamiento de la temperatura en el modelo y en el prototipo (no se muestran datos en el eje x debido a que modelo y prototipo se encuentran a diferente escala):

Figura 17. Superposición de los perfiles de temperatura para el Modelo (6.48 min de calentamiento) y Prototipo (6 meses de calentamiento).



El porcentaje de desviación promedio del comportamiento de la temperatura en el Modelo con respecto al prototipo fue del 0.81%. Este valor fue calculado tomando como valor real la temperatura del Prototipo.

6. CONCLUSIONES

- ✚ El porcentaje de desviación entre las perfiles de Temperatura (0.81%), indica que el modelo escalado por medio de los grupos de similaridad, representa en un gran porcentaje el comportamiento de la temperatura en el yacimiento y que por lo tanto los grupos obtenidos funcionan para escalar modelos físicos del proceso CER. Esto también revela que existe compatibilidad entre las ecuaciones que se manejaron para derivar los grupos de similaridad y las ecuaciones que utiliza el simulador STARS de CMG® para realizar sus cálculos.
- ✚ Existe una diferencia grande entre el dimensionamiento y la construcción del modelo, debido a que en la construcción existen muchas limitantes físicas que no nos van a permitir representar exactamente todos los datos dimensionados.
- ✚ La mayoría de los grupos adimensionales fueron derivados de la ecuación de balance de energía.

7. RECOMENDACIONES

- ✚ En general se recomienda al momento de escalar, trabajar en lo posible con los mismos fluidos, con la misma temperatura, con el mismo medio y con la misma porosidad, para cumplir con la mayor parte de los grupos de similaridad.
- ✚ Si se piensa construir un modelo y que dicho modelo represente también las pérdidas de corriente, es indispensable escalar las formaciones adyacentes.
- ✚ Si se desea trabajar con un medio poroso diferente, se deben tener a la mano datos de propiedades térmicas, porosidad y permeabilidad de los medios porosos que se pretendan utilizar.
- ✚ Se recomienda dimensionar un yacimiento y luego realizar una sensibilidad de parámetros para observar el comportamiento de los grupos al escoger diferentes alternativas de escalamiento.
- ✚ Se recomienda construir un modelo físico escalado del calentamiento eléctrico resistivo para observar el desempeño real del modelo.

BIBLIOGRAFÍA

AHMED, Tarek. *Reservoir Engineering HandBook*. Segunda Edición. Editorial Gulf Professional Publishing. 2002.

AHNER, P.F. y SUFI, A.H. Physical Model Steamflood Studies Using Horizontal Wells. SPE 20247. 1994.

ALI, Farouq. *Design of Scaled Models*. University of Alberta, Edmonton Canada. 1993.

_____. *Physical Modeling of In Situ Recovery Methods for Oil Sands*. University Park Pennsylvania.

_____. "Video Conferencia: Diseño de Modelos Escalados". ICP. 1993.

BASSIOUNI, Z. *Theory, Measurement and Interpretation of Well Logs*. SPE Textbook Series. Volume 4. 1994.

CROES, G.A. y SCHWARZ, N. *Dimensionally Scaled Experiments and the Theories on the Water Drive Process*. Trans. AIME (1955) 204, 35.

DOSCHER, Todd M. y GHARIB, Siavash. *Physically Scaled Model Studies Simulating the Displacement of Residual Oil by Miscible Fluids*. Society of Petroleum Engineers of AIME, 1983.

GEERTSMA, J.; CROES, G. A.; SCHWARZ, N. *Theory of Dimensionally Scaled Models of Petroleum Reservoirs*. Koninklijke / Shell Laboratorium Amsterdam. 1956, Vol. 207, 118-127.

HARVEY, A.H; ARNOLD, M.D.; EL-FEKY S.A. *Selective Electric Reservoir Heating*. Journal of Canadian Petroleum Technology, 1979.

HIEBERT, A.D.; VERMEULEN, F.E.; CHUTE, F.S.; CAPJACK, C.E. *Numerical Simulation Results for the Electrical Heating of Athabasca Oil-Sand Formations*. SPE 13013, 1986.

JOHNSTONE, R.E. y THRING, M. W. *Pilot Plants, Models and Scale-up Methods in Chemical Engineering*. New York, McGraw-Hill Book Company Inc, 1957.

KIMBER, K.D.; FAROUQ, A.; PUTTAGUNTA, V.R. *New Scaling Criteria and Their Relative Merits for Steam Recovery Experiments*. JCPT, 27(4) : 86-94. 1988.

LEVERETT, M.C.; LEWIS, W.B.; TRUE, M.E. *Dimensional-Model Studies of Oil-Field Behavior*. Trans., AIME (1942) 146, 175.

NAAR, J. y HENDERSON, J.H. Trans., AIME, Part II (1961), 222, 61-70.

PARIS de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos. Segunda Edición*. Ediciones Astro Data S.A. 2001.

PIRSON, Sylvain. *Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos*. Segunda edición. Ediciones Omega S.A.1965.

PRATS, M. *Thermal Recovery*. Monograph Volume 7, American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers Inc. 1982.

PUJOL, L. y BOBERG, T.C. *Scaling Accuracy of Laboratory Steamflooding Models*. SPE 4191: 1-7. 1972.

RAPOPORT, L.A. y LEAS, W.J. *Properties of Linear Waterfloods*. Trans. AIME (1953) 198, 139.

STEGEMEIER, G.L.; LAUMBACH, D.D.; VOLEK, C.W. *Representing Steam Processes with Vacuum Models*. SPE 6787, 1980.

WATTENBARGER, R. A. y McDOUGAL, F. W. *Oil Production Response to in situ Electrical Resistance Heating*. JCPT. 1988.

YUAN, J.Y.; HUANG, H.; MINTZ, R.; WANG, X.; JOSSY, C.; TUNNEY, C. *Wet Electric Heating for Starting Up SAGD/VAPEX*. Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum, 2004.

CITAS Y NOTAS

- ¹ PIRSON, Sylvain. *Ingeniería de Yacimientos Petrolíferos*. Segunda edición. Ediciones Omega S.A. 1965.
- ² PARIS de Ferrer, Magdalena. *Inyección de Agua y Gas en Yacimientos Petrolíferos*. Segunda Edición. Ediciones Astro Data S.A. 2001.
- ³ AHMED, Tarek. *Reservoir Engineering HandBook*. Segunda Edición. Editorial Gulf Professional Publishing. 2002.
- ⁴ WATTENBARGER, R. A. y McDOUGAL, F. W. *Oil Production Response to in situ Electrical Resistance Heating*. JCPT. 1988.
- ⁵ HARVEY, Herbert A. y ARNOLD, M.D. *Estimation of Heat Distribution in Selective Electric Reservoir Heating*. JCPT. 1980.
- ⁶ ALI, Farouq. *Design of Scaled Models*. University of Alberta, Edmonton Canada. 1993.
- ⁷ DOSCHER, Todd M. y GHARIB, Siavash. *Physically Scaled Model Studies Simulating the Displacement of Residual Oil by Miscible Fluids*, Society of Petroleum Engineers of AIME, 1983.
- ⁸ JOHNSTONE, R. E. y THRING M. W. *Pilot Plants, Models and Scale-up Methods in Chemical Engineering*. New York, McGraw-Hill Book Company Inc, 1957.
- ⁹ ALI, Farouq. *Video Conferencia: Diseño de Modelos Escalados*. ICP. 1993.
- ¹⁰ ALI, Farouq. *Physical Modeling of In Situ Recovery Methods for Oil Sands*. University Park Pennsylvania.
- ¹¹ LEVERETT, M.C.; LEWIS, W.B.; TRUE, M.E. *Dimensional-Model Studies of Oil-Field Behavior*. Trans. AIME (1942). 146, 175.
- ¹² GEERTSMA, J.; CROES, G. A.; SCHWARZ, N. *Theory of Dimensionally Scaled Models of Petroleum Reservoirs*. Koninklijke / Shell Laboratorium Amsterdam. 1956, Vol. 207, 118-127.

- ¹³ STEGEMEIER, G.L.; LAUMBACH, D.D.; VOLEK, C.W. *Representing Steam Processes with Vacuum Models*. SPE 6787, 1980.
- ¹⁴ RAPOPORT, L.A. y LEAS W.J. *Properties of Linear Waterfloods*. Trans., AIME (1953) 198, 139.
- ¹⁵ NAAR J. y HENDERSON J.H, Trans., AIME, Part II (1961), 222, 61-70.
- ¹⁶ CROES, G.A. y SCHWARZ, N. *Dimensionally Scaled Experiments and the Theories on the Water Drive Process*. Trans., AIME (1955) 204, 35.
- ¹⁷ AHNER, P.F. y SUFI, A.H. *Physical Model Steamflood Studies Using Horizontal Wells*. SPE 20247, 1994.
- ¹⁸ YUAN, J.Y.; HUANG, H.; MINTZ, R.; WANG, X.; JOSSY, C.; TUNNEY, C. *Wet Electric Heating for Starting Up SAGD/VAPEX*, Canadian Institute of Mining, Metallurgy and Petroleum, 2004.
- ¹⁹ HIEBERT, A.D.; VERMEULEN, F.E.; CHUTE, F.S.; CAPJACK, C.E. *Numerical Simulation Results for the Electrical Heating of Athabasca Oil-Sand Formations*. SPE 13013, 1986.
- ²⁰ PRATS, M. *Thermal Recovery*. Monograph Volume 7. American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers Inc. 1982.
- ²¹ PUJOL, L. y BOBERG, T.C. *Scaling Accuracy of Laboratory Steamflooding Models*. SPE 4191: 1-7. 1972.
- ²² KIMBER, K.D.; FAROUQ, A.; PUTTAGUNTA, V.R. *New Scaling Criteria and Their Relative Merits for Steam Recovery Experiments*. J. Can. Pet. Technol, 27(4): 86-94. 1988.
- ²³ BASSIOUNI, Z. *Theory, Measurement and Interpretation of Well Logs*. SPE Textbook Series. Volume 4. 1994.
- * Entrevista con el profesor Farouq Alí. Noviembre 28 de 2005.

ANEXO A
ADIMENSIONAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA CER Y GRUPOS DE
SIMILARIDAD

La transformación adimensional de las ecuaciones involucradas en el proceso de calentamiento eléctrico resistivo es:

Ecuación de Flujo de Fluidos (Ley de Darcy) en forma adimensional:

$$\vec{v}_{i,j} = \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\vec{\nabla}P + \rho_i \vec{g} \right) \dots\dots\dots (A1) \quad \text{En términos más específicos:}$$

$$v_{i,x} = \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_i g \cos(\alpha) \right) \dots\dots\dots (A2)$$

$$v_{i,y} = \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (A3)$$

$$v_{i,z} = \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_i g \sin(\alpha) \right) \dots\dots\dots (A4)$$

$$\vec{v}_i = \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_i g \cos(\alpha) \right) + \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right) + \left(\frac{K_i}{\mu_i} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho_i g \sin(\alpha) \right) \dots\dots\dots (A5)$$

Los términos de esta ecuación pueden expresarse en la siguiente forma adimensional:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= v_{iD} \vec{v}_{iR} & \rho &= \rho_D \rho_R & \mu_j &= \mu_D \mu_R & x &= x_D x_R & y &= y_D y_R & z &= z_D z_R \\ P &= P_D P_R & g &= g_D g_R & K_i &= K_{iD} K_{iR} & \text{sen}(\alpha) &= \text{sen}(\alpha)_D \text{sen}(\alpha)_R \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha)_D \cos(\alpha)_R \end{aligned}$$

Expresando las ecuaciones en forma adimensional:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{iR} \vec{v}_{iD} &= \left(\frac{K_{iD} K_{iR}}{\mu_{iD} \mu_{iR}} \right) \left(\frac{\partial(P_D P_R)}{\partial(x_D x_R)} + \rho_{iD} \rho_{iR} g_D g_R \cos(\alpha)_D \cos(\alpha)_R \right) + \left(\frac{K_{iD} K_{iR}}{\mu_{iD} \mu_{iR}} \right) \left(\frac{\partial(P_D P_R)}{\partial(y_D y_R)} \right) \\ &+ \left(\frac{K_{iD} K_{iR}}{\mu_{iD} \mu_{iR}} \right) \left(\frac{\partial(P_D P_R)}{\partial(z_D z_R)} + \rho_{iD} \rho_{iR} g_D g_R \text{sen}(\alpha)_D \text{sen}(\alpha)_R \right) \end{aligned}$$

..... (A6)

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{iR} \vec{v}_{iD} &= \left(\frac{K_{iR} P_R}{\mu_{iR} x_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(x_D)} \right) + \left(\frac{K_{iR} \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{\mu_{iR}} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) (\rho_{iD} g_D \cos(\alpha)_D) + \left(\frac{K_{iR} P_R}{\mu_{iR} y_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(y_D)} \right) \\ &+ \left(\frac{K_{iR} P_R}{\mu_{iR} z_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(z_D)} \right) + \left(\frac{K_{iR} \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{\mu_{iR}} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) (\rho_{iD} g_D \text{sen}(\alpha)_D) \end{aligned}$$

.....(A7)

Dividiendo la primera ecuación por $\left(\frac{K_{iR} P_R}{\mu_{iR} x_R} \right)$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\vec{v}_{iR} \mu_{iR} x_R}{K_{iR} P_R} \right) \vec{v}_{iD} &= \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(x_D)} \right) + \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) (\rho_{iD} g_D \cos(\alpha)_D) + \left(\frac{x_R}{y_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(y_D)} \right) + \left(\frac{x_R}{z_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) \left(\frac{\partial(P_D)}{\partial(z_D)} \right) \\ &+ \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{P_R} \right) \left(\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}} \right) (\rho_{iD} g_D \text{sen}(\alpha)_D) \end{aligned}$$

.....(A8)

Los grupos adimensionales resultantes de esta ecuación son los siguientes:

$$\left(\frac{\vec{v}_{iR} \mu_{iR} x_R}{K_{iR} P_R} \right), \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right), \left(\frac{x_R}{y_R} \right), \left(\frac{x_R}{z_R} \right), \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \sin(\alpha)_R}{P_R} \right) \dots\dots\dots (A9)$$

Ecuación de continuidad o balance de masa para la fase *i* en forma adimensional:

$$\phi \frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \dots\dots\dots (A10) \quad \text{En términos más específicos:}$$

$$\phi \frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + \left(\frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \right) \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0 \dots\dots\dots (A11)$$

$$\phi \frac{\partial(\rho_i S_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i v_{i,x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_i v_{i,y})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_i v_{i,z})}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (A12)$$

Los términos de esta ecuación pueden expresarse en la siguiente forma adimensional:

$$x = x_D x_R \quad y = y_D y_R \quad z = z_D z_R \quad S_i = S_{iD} S_{iR} \quad \rho_i = \rho_{iD} \rho_{iR} \quad t = t_D t_R$$

$$\phi = \phi_D \phi_R \quad v_i = v_{iD} v_{iR}$$

Expresando la ecuación (A12) en forma adimensional:

$$\phi_D \phi_R \frac{\partial(\rho_{iD} \rho_{iR} S_{iD} S_{iR})}{\partial(t_D t_R)} + \frac{\partial(\rho_{iD} \rho_{iR} v_{(i,x)D} v_{(i,x)R})}{\partial(x_D x_R)} + \frac{\partial(\rho_{iD} \rho_{iR} v_{(i,y)D} v_{(i,y)R})}{\partial(y_D y_R)} + \frac{\partial(\rho_{iD} \rho_{iR} v_{(i,z)D} v_{(i,z)R})}{\partial(z_D z_R)} = 0$$

..... (A13)

Agrupando términos:

$$\left(\frac{\phi_R \rho_{iR} S_{iR}}{t_R} \right) \phi_D \frac{\partial(\rho_{iD} S_{iD})}{\partial t_D} + \left(\frac{\rho_{iR} v_{(i,x)R}}{x_R} \right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,x)D})}{\partial x_D} + \left(\frac{\rho_{iR} v_{(i,y)R}}{y_R} \right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,y)D})}{\partial y_D} + \left(\frac{\rho_{iR} v_{(i,z)R}}{z_R} \right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,z)D})}{\partial z_D} = 0$$

.....(A14)

Dividiendo la ecuación anterior por $\left(\frac{\phi_R \rho_{iR} S_{iR}}{t_R}\right)$:

$$\phi_D \frac{\partial(\rho_{iD} S_{iD})}{\partial t_D} + \left(\frac{v_{(i,x)R} t_R}{\phi_R S_{iR} x_R}\right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,x)D})}{\partial x_D} + \left(\frac{v_{(i,y)R} t_R}{\phi_R S_{iR} y_R}\right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,y)D})}{\partial y_D} + \left(\frac{v_{(i,z)R} t_R}{\phi_R S_{iR} z_R}\right) \frac{\partial(\rho_{iD} v_{(i,z)D})}{\partial z_D} = 0$$

..... (A15)

Los grupos adimensionales resultantes de esta ecuación son los siguientes:

$$\left(\frac{v_{(i,x)R} t_R}{\phi_R S_{iR} x_R}\right), \left(\frac{v_{(i,y)R} t_R}{\phi_R S_{iR} y_R}\right), \left(\frac{v_{(i,z)R} t_R}{\phi_R S_{iR} z_R}\right)$$

Relaciones constitutivas y restrictivas en forma adimensional:

Relación de presión capilar:

$$P_c = P_w - P_o \quad \text{..... (A16)}$$

Los términos de esta ecuación pueden expresarse en la siguiente forma adimensional:

$$P_c = P_{cD} P_{cR} \quad P_o = P_{oD} P_{oR} \quad P_w = P_{wD} P_{wR}$$

Reemplazando en la ecuación (A16):

$$P_{cD} P_{cR} = P_{wD} P_{wR} - P_{oD} P_{oR}$$

Dividiendo toda la ecuación por P_{cR} :

$$P_{cD} = \left(\frac{P_{wR}}{P_{cR}} \right) P_{wD} - \left(\frac{P_{oR}}{P_{cR}} \right) P_{oD} \dots\dots\dots (A17)$$

Arrojando los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{P_{oR}}{P_{cR}} \right), \left(\frac{P_{wR}}{P_{cR}} \right)$$

Relación de saturaciones de las fases presentes:

$$S_o + S_w = 1 \dots\dots\dots (A18)$$

Los términos de esta ecuación pueden expresarse en la siguiente forma adimensional:

$$S_o = S_{oD} S_{oR} \quad S_w = S_{wD} S_{wR}$$

Reemplazando en la ecuación (A18):

$$S_{oD} S_{oR} + S_{wD} S_{wR} = 1$$

Dividiendo toda la ecuación por S_{oR} :

$$S_{oD} + \left(\frac{S_{wR}}{S_{oR}} \right) S_{wD} = \left(\frac{1}{S_{oR}} \right) \dots\dots\dots (A19)$$

Arrojando los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{S_{wR}}{S_{oR}} \right), \left(\frac{1}{S_{oR}} \right)$$

Relaciones fundamentales en forma adimensional:

$$\phi_D = cte$$

$$g_D = cte$$

$$\rho_{iD} = \rho_{iD}(P_{iD}, T_D)$$

$$\mu_{iD} = \mu_{iD}(P_{iD}, T_D)$$

$$\vec{K}_{oD} = \vec{K}_{oD}(K_D, S_{oD}, S_{wD})$$

$$\vec{K}_{wD} = \vec{K}_{wD}(K_D, S_{oD}, S_{wD})$$

$$\lambda_D = \lambda_D(T_D)$$

$$\rho_{rD} = cte$$

Ecuación de continuidad de corriente eléctrica en forma adimensional:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_f} \vec{\nabla} \Phi_e \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (A20)$$

En una forma más específica la ecuación anterior puede expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{R_f} \frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{R_f} \frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{R_f} \frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (A21)$$

Los términos de esta ecuación pueden expresarse en la siguiente forma adimensional:

$$R_f = R_{fD} R_{fR} \quad \Phi_e = \Phi_{eD} \Phi_{eR} \quad z = z_D z_R \quad t = t_D t_R \quad x = x_D x_R \quad y = y_D y_R$$

Expresando la ecuación (A21) en forma adimensional:

$$\frac{\partial}{\partial(x_D x_R)} \left[\frac{1}{(R_{jD} R_{jR})} \frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(x_D x_R)} \right] + \frac{\partial}{\partial(y_D y_R)} \left[\frac{1}{(R_{jD} R_{jR})} \frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(y_D y_R)} \right] + \frac{\partial}{\partial(z_D z_R)} \left[\frac{1}{(R_{jD} R_{jR})} \frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(z_D z_R)} \right] = 0$$

Agrupando nuevamente términos:

$$\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{jR} x_R^2} \right) \frac{\partial}{\partial(x_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(x_D)} \right] + \left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{jR} y_R^2} \right) \frac{\partial}{\partial(y_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(y_D)} \right] + \left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{jR} z_R^2} \right) \frac{\partial}{\partial(z_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(z_D)} \right] = 0$$

Dividiendo la anterior ecuación por el término $\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{jR} x_R^2} \right)$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial(x_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(x_D)} \right] + \left(\frac{x_R^2}{y_R^2} \right) \frac{\partial}{\partial(y_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(y_D)} \right] + \left(\frac{x_R^2}{z_R^2} \right) \frac{\partial}{\partial(z_D)} \left[\frac{1}{(R_{jD})} \frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(z_D)} \right] = 0$$

..... (A22)

De esta ecuación se obtuvieron los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{x_R^2}{y_R^2} \right), \left(\frac{x_R^2}{z_R^2} \right)$$

Ecuación de Balance de Energía en forma adimensional:

Descomponiendo la ecuación (22) para el eje x,

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + (v_{o,x} \rho_o h_o + v_{w,x} \rho_w h_w) \right)}{\partial x} \dots \dots \dots (A23)$$

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial (v_{o,x} \rho_o h_o)}{\partial x} + \frac{\partial (v_{w,x} \rho_w h_w)}{\partial x}$$

Las variables en forma adimensional para esta ecuación son las siguientes:

$$\lambda = \lambda_D \lambda_R \quad T = T_D T_R \quad x = x_D x_R \quad v_{i,x} = v_{(i,x)D} v_{(i,x)R} \quad \rho_i = \rho_{(i)D} \rho_{(i)R} \quad h_i = h_{(i)D} h_{(i)R}$$

Reemplazando las variables en la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = & -(\lambda_D \lambda_R) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (x_D x_R)^2} \right) + \frac{\partial \left((v_{(o,x)D} v_{(o,x)R}) (\rho_{(o)D} \rho_{(o)R}) (h_{(o)D} h_{(o)R}) \right)}{\partial (x_D x_R)} \\ & + \frac{\partial \left((v_{(w,x)D} v_{(w,x)R}) (\rho_{(w)D} \rho_{(w)R}) (h_{(w)D} h_{(w)R}) \right)}{\partial (x_D x_R)} \dots \dots \dots (A24) \end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = & \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} \left(-\lambda_D \frac{\partial^2 T_D}{\partial x_D^2} \right) + \frac{v_{(o,x)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{x_R} \left(\frac{\partial (v_{(o,x)D} \rho_{(o)D} h_{(o)D})}{\partial x_D} \right) \\ & + \frac{v_{(w,x)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{x_R} \left(\frac{\partial (v_{(w,x)D} \rho_{(w)D} h_{(w)D})}{\partial x_D} \right) \end{aligned}$$

Ahora descomponiendo la ecuación (22) para el eje y,

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + (v_{o,y} \rho_o h_o + v_{w,y} \rho_w h_w) \right)}{\partial y} \dots \dots \dots (A25)$$

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial (v_{o,y} \rho_o h_o)}{\partial y} + \frac{\partial (v_{w,y} \rho_w h_w)}{\partial y}$$

Variables en forma adimensional:

$$\lambda = \lambda_D \lambda_R \quad T = T_D T_R \quad y = y_D y_R \quad v_{i,y} = v_{(i,y)D} v_{(i,y)R} \quad \rho_i = \rho_{(i)D} \rho_{(i)R} \quad h_i = h_{(i)D} h_{(i)R}$$

Reemplazando las variables en la ecuación anterior para el eje y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = & -(\lambda_D \lambda_R) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (y_D y_R)^2} \right) + \frac{\partial \left((v_{(o,y)D} v_{(o,y)R}) (\rho_{(o)D} \rho_{(o)R}) (h_{(o)D} h_{(o)R}) \right)}{\partial (y_D y_R)} \\ & + \frac{\partial \left((v_{(w,y)D} v_{(w,y)R}) (\rho_{(w)D} \rho_{(w)R}) (h_{(w)D} h_{(w)R}) \right)}{\partial (y_D y_R)} \dots \dots \dots (A26) \end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = & \frac{\lambda_R T_R}{(y_R)^2} \left(-\lambda_D \frac{\partial^2 T_D}{\partial y_D^2} \right) + \frac{v_{(o,y)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{y_R} \left(\frac{\partial (v_{(o,y)D} \rho_{(o)D} h_{(o)D})}{\partial y_D} \right) \\ & + \frac{v_{(w,y)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{y_R} \left(\frac{\partial (v_{(w,y)D} \rho_{(w)D} h_{(w)D})}{\partial y_D} \right) \end{aligned}$$

Ahora descomponiendo la ecuación (22) para el eje z,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = & \frac{\partial \left(-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(v_{o,z} \rho_o \left(h_o + \frac{ga}{g_c} \right) + v_{w,z} \rho_w \left(h_w + \frac{ga}{g_c} \right) \right) \right)}{\partial z} \\ \frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = & -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial (v_{o,z} \rho_o h_o)}{\partial z} + \frac{\partial \left(v_{o,z} \rho_o \frac{ga}{g_c} \right)}{\partial z} + \frac{\partial (v_{w,z} \rho_w h_w)}{\partial z} + \frac{\partial \left(v_{w,z} \rho_w \frac{ga}{g_c} \right)}{\partial z} \dots (A27) \end{aligned}$$

Variables en forma adimensional para la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_D \lambda_R & T &= T_D T_R & z &= z_D z_R & v_{i,z} &= v_{(i,z)D} v_{(i,z)R} & \rho_i &= \rho_{(i)D} \rho_{(i)R} & h_i &= h_{(i)D} h_{(i)R} \\ g &= g_D g_R & a &= a_D a_R \end{aligned}$$

Reemplazando las variables para la ecuación del eje Z:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = & -(\lambda_D \lambda_R) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (z_D z_R)^2} \right) \\
& + \frac{\partial \left((v_{(o,z)D} v_{(o,z)R}) (\rho_{(o)D} \rho_{(o)R}) (h_{(o)D} h_{(o)R}) \right)}{\partial (z_D z_R)} + \frac{\partial \left((v_{(o,z)D} v_{(o,z)R}) (\rho_{(o)D} \rho_{(o)R}) \frac{(g_D g_R) (a_D a_R)}{g_c} \right)}{\partial (z_D z_R)} \\
& + \frac{\partial \left((v_{(w,z)D} v_{(w,z)R}) (\rho_{(w)D} \rho_{(w)R}) (h_{(w)D} h_{(w)R}) \right)}{\partial (z_D z_R)} + \frac{\partial \left((v_{(w,z)D} v_{(w,z)R}) (\rho_{(w)D} \rho_{(w)R}) \frac{(g_D g_R) (a_D a_R)}{g_c} \right)}{\partial (z_D z_R)} \\
& \dots \dots \dots \text{(A28)}
\end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = & \frac{\lambda_R T_R}{(z_R)^2} \left(-\lambda_D \frac{\partial^2 T_D}{\partial z_D^2} \right) \\
& + \frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{z_R} \left(\frac{\partial (v_{(o,z)D} \rho_{(o)D} h_{(o)D})}{\partial z_D} \right) + \frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} g_R a_R}{g_c z_R} \frac{\partial (v_{(o,z)D} \rho_{(o)D} g_D a_D)}{\partial z_D} \\
& + \frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{z_R} \left(\frac{\partial (v_{(w,z)D} \rho_{(w)D} h_{(w)D})}{\partial z_D} \right) + \frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} g_R a_R}{g_c z_R} \frac{\partial (v_{(w,z)D} \rho_{(w)D} g_D a_D)}{\partial z_D}
\end{aligned}$$

Por último, tomando los términos de acumulación y potencia disipada como calor en la formación para la ecuación (22):

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q = & - \left(\frac{\partial(M_\sigma \Delta T)}{\partial t} - \frac{\partial(\phi M_\sigma \Delta T)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi S_o \rho_o e_o)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi S_w \rho_w e_w)}{\partial t} \right) \\
& + \frac{1}{R_f} \left[\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right] \dots \dots \dots \text{(A29)}
\end{aligned}$$

Definiendo las variables en forma adimensional:

$$\begin{aligned}
\rho_i &= \rho_{(i)D} \rho_{(i)R} & t &= t_D t_R & \phi &= \phi_D \phi_R & M_\sigma &= M_{(\sigma)D} M_{(\sigma)R} & S_i &= S_{(i)D} S_{(i)R} \\
e_i &= e_{(i)D} e_{(i)R} & \Delta T &= \Delta T_D \Delta T_R & \Phi_e &= \Phi_{eD} \Phi_{eR} & R_f &= R_{fD} R_{fR} & x &= x_D x_R \\
y &= y_D y_R & z &= z_D z_R
\end{aligned}$$

Reemplazando las variables en la ecuación (A29):

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q &= -\frac{\partial(M_{(\sigma)D} M_{(\sigma)R} \Delta T_D \Delta T_R)}{\partial(t_D t_R)} + \frac{\partial(\phi_D \phi_R M_{(\sigma)D} M_{(\sigma)R} \Delta T_D \Delta T_R)}{\partial(t_D t_R)} \\
&\quad - \frac{\partial(\phi_D \phi_R S_{(o)D} S_{(o)R} \rho_{(o)D} \rho_{(o)R} e_{(o)D} e_{(o)R})}{\partial(t_D t_R)} - \frac{\partial(\phi_D \phi_R S_{(w)D} S_{(w)R} \rho_{(w)D} \rho_{(w)R} e_{(w)D} e_{(w)R})}{\partial(t_D t_R)} \\
&\quad + \frac{1}{R_{fD} R_{fR}} \left[\left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(x_D x_R)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(y_D y_R)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(z_D z_R)} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q &= -\frac{M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \left(\frac{\partial(M_{(\sigma)D} \Delta T_D)}{\partial t_D} \right) + \frac{\phi_R M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \left(\frac{\partial(\phi_D M_{(\sigma)D} \Delta T_D)}{\partial t_D} \right) \\
&\quad - \frac{\phi_R S_{(o)R} \rho_{(o)R} e_{(o)R}}{t_R} \left(\frac{\partial(\phi_D S_{(o)D} \rho_{(o)D} e_{(o)D})}{\partial t_D} \right) - \frac{\phi_R S_{(w)R} \rho_{(w)R} e_{(w)R}}{t_R} \left(\frac{\partial(\phi_D S_{(w)D} \rho_{(w)D} e_{(w)D})}{\partial t_D} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} x_R^2} \right) \frac{1}{R_{fD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(x_D)} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} y_R^2} \right) \frac{1}{R_{fD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(y_D)} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} z_R^2} \right) \frac{1}{R_{fD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(z_D)} \right)^2
\end{aligned}$$

El siguiente paso es escoger un coeficiente de cualquier término de la ecuación de balance de energía para dividirlo por la ecuación completa para así obtener los grupos adimensionales. Para este caso, se escogió el coeficiente $\frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2}$.

Después de la división, se obtienen los siguientes grupos:

En el eje x :

$$\frac{v_{(o,x)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{x_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(o,x)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R} x_R}{\lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A30)$$

$$\frac{v_{(w,x)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{x_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(w,x)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R} x_R}{\lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A31)$$

En el eje y:

$$\frac{\lambda_R T_R}{(y_R)^2} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{x_R}{y_R} \dots\dots\dots (A32)$$

$$\frac{v_{(o,y)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{y_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(o,y)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R} x_R^2}{y_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A33)$$

$$\frac{v_{(w,y)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{y_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(w,y)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R} x_R^2}{y_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A34)$$

En el eje z:

$$\frac{\lambda_R T_R}{(z_R)^2} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{x_R}{z_R} \dots\dots\dots (A35)$$

$$\frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R}}{z_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} h_{(o)R} x_R^2}{z_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A36)$$

$$\frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R}}{z_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} h_{(w)R} x_R^2}{z_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A37)$$

$$\frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} g_R a_R}{g_c z_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(o,z)R} \rho_{(o)R} g_R a_R x_R^2}{g_c z_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A38)$$

$$\frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} g_R a_R}{g_c z_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{v_{(w,z)R} \rho_{(w)R} g_R a_R x_R^2}{g_c z_R \lambda_R T_R} \dots\dots\dots (A39)$$

Tomando $T_R = \Delta T_R$:

$$\frac{M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \dots\dots\dots (A40)$$

$$\frac{\phi_R M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_R M_{(\sigma)R} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_R M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \dots\dots\dots (A41)$$

$$\frac{\phi_R S_{(o)R} \rho_{(o)R} e_{(o)R}}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_R S_{(o)R} \rho_{(o)R} e_{(o)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \dots\dots\dots (A42)$$

$$\frac{\phi_R S_{(w)R} \rho_{(w)R} e_{(w)R}}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_R S_{(w)R} \rho_{(w)R} e_{(w)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \dots\dots\dots (A43)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} x_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R} \dots\dots\dots (A44)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} y_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R y_R^2} \dots\dots\dots (A45)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} y_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_R \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R z_R^2} \dots\dots\dots (A46)$$

Ecuación de energía para las capas adyacentes en forma adimensional:

Descomponiendo la ecuación (29) para el eje x ,

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = \frac{\partial \left(-\lambda_{fa} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right)}{\partial x} \dots\dots\dots (A47)$$

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = -\lambda_{fa} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)$$

Las variables en forma adimensional para esta ecuación son las siguientes:

$$\lambda_{fa} = \lambda_{faD} \lambda_{faR} \quad T = T_D T_R \quad x = x_D x_R$$

Reemplazando las variables en la ecuación (A47):

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = -(\lambda_{faD} \lambda_{faR}) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (x_D x_R)^2} \right)$$

Reagrupando,

$$\frac{\partial u_{ex}}{\partial x} = \frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2} \left(-\lambda_{faD} \frac{\partial^2 T_D}{\partial x_D^2} \right)$$

Ahora descomponiendo la ecuación (29) para el eje y,

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = \frac{\partial \left(-\lambda_{fa} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = -\lambda_{fa} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots (A48)$$

Variables en forma adimensional:

$$\lambda_{fa} = \lambda_{faD} \lambda_{faR} \quad T = T_D T_R \quad y = y_D y_R$$

Reemplazando las variables en la ecuación anterior para el eje y:

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = -(\lambda_{faD} \lambda_{faR}) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (y_D y_R)^2} \right)$$

Reagrupando,

$$\frac{\partial u_{ey}}{\partial y} = \frac{\lambda_{faR} T_R}{(y_R)^2} \left(-\lambda_{faD} \frac{\partial^2 T_D}{\partial y_D^2} \right)$$

Ahora descomponiendo la ecuación (29) para el eje z,

$$\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = \frac{\partial \left(-\lambda_{fa} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = -\lambda_{fa} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \dots\dots\dots (A49)$$

Variables en forma adimensional para la ecuación anterior:

$$\lambda_{fa} = \lambda_{faD} \lambda_{faR} \quad T = T_D T_R \quad z = z_D z_R$$

Reemplazando las variables para la ecuación del eje z:

$$\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = -(\lambda_{faD} \lambda_{faR}) \left(\frac{\partial^2 (T_D T_R)}{\partial (z_D z_R)^2} \right)$$

Reagrupando,

$$\frac{\partial u_{ez}}{\partial z} = \frac{\lambda_{faR} T_R}{(z_R)^2} \left(-\lambda_{faD} \frac{\partial^2 T_D}{\partial z_D^2} \right)$$

Por último, tomando los términos de acumulación y potencia disipada como calor en la formación adyacente para la ecuación (29):

$$-\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q = -\left(\frac{\partial(M_{fa} \Delta T)}{\partial t} - \frac{\partial(\phi_{fa} M_{fa} \Delta T)}{\partial t} + \frac{\partial(\phi_{fa} S_{wfa} \rho_{wfa} e_{wfa})}{\partial t} \right) + \frac{1}{R_{fa}} \left[\left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} \right)^2 \right]$$

..... (A50)

Definiendo las variables en forma adimensional:

$$\begin{aligned} \rho_{wfa} &= \rho_{wfaD} \rho_{wfaR} & t &= t_D t_R & \phi_{fa} &= \phi_{faD} \phi_{faR} & M_{fa} &= M_{faD} M_{faR} & S_{wfa} &= S_{wfaD} S_{wfaR} \\ e_{wfa} &= e_{wfaD} e_{wfaR} & \Delta T &= \Delta T_D \Delta T_R & \Phi_e &= \Phi_{eD} \Phi_{eR} & R_{fa} &= R_{faD} R_{faR} & x &= x_D x_R \\ y &= y_D y_R & z &= z_D z_R \end{aligned}$$

Reemplazando las variables en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q &= -\frac{\partial(M_{faD} M_{faR} \Delta T_D \Delta T_R)}{\partial(t_D t_R)} + \frac{\partial(\phi_{faD} \phi_{faR} M_{faD} M_{faR} \Delta T_D \Delta T_R)}{\partial(t_D t_R)} \\ &\quad - \frac{\partial(\phi_{faD} \phi_{faR} S_{(w)faD} S_{(w)faR} \rho_{(w)faD} \rho_{(w)faR} e_{(w)faD} e_{(w)faR})}{\partial(t_D t_R)} \\ &\quad + \frac{1}{R_{faD} R_{faR}} \left[\left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(x_D x_R)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(y_D y_R)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial(z_D z_R)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Reagrupando,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + Q = & -\frac{M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \left(\frac{\partial(M_{faD} \Delta T_D)}{\partial t_D} \right) + \frac{\phi_{faR} M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \left(\frac{\partial(\phi_{faD} M_{faD} \Delta T_D)}{\partial t_D} \right) \\
& - \frac{\phi_{faR} S_{(w)faR} \rho_{(w)faR} e_{(w)faR}}{t_R} \left(\frac{\partial(\phi_{faD} S_{(w)faD} \rho_{(w)faD} e_{(w)faD})}{\partial t_D} \right) \\
& + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} x_R^2} \right) \frac{1}{R_{faD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(x_D)} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} y_R^2} \right) \frac{1}{R_{faD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(y_D)} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} z_R^2} \right) \frac{1}{R_{faD}} \left(\frac{\partial(\Phi_{eD})}{\partial(z_D)} \right)^2
\end{aligned}$$

El siguiente paso es escoger un coeficiente de cualquier término de la ecuación de balance de energía para dividirlo por la ecuación completa para así obtener los grupos adimensionales. Para este caso, se escogió el coeficiente $\frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2}$.

Después de la división, se obtienen los siguientes grupos:

En el eje y :

$$\frac{\lambda_{faR} T_R}{(y_R)^2} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2} = \frac{x_R}{y_R} \dots\dots\dots (A51)$$

En el eje z :

$$\frac{\lambda_{faR} T_R}{(z_R)^2} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2} = \frac{x_R}{z_R} \dots\dots\dots (A52)$$

Tomando $T_R = \Delta T_R$:

$$\frac{M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2} = \frac{M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{M_{faR} x_R^2}{\lambda_{faR} t_R} \dots\dots\dots (A53)$$

$$\frac{\phi_{faR} M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_{faR} M_{faR} \Delta T_R}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_{faR} M_{faR} x_R^2}{\lambda_{faR} t_R} \dots\dots\dots (A54)$$

$$\frac{\phi_{faR} S_{(w)faR} \rho_{(w)faR} e_{(w)faR}}{t_R} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\phi_{faR} S_{(w)faR} \rho_{(w)faR} e_{(w)faR} x_R^2}{\lambda_{faR} \Delta T_R t_R} \dots\dots\dots (A55)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} x_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R} \dots\dots\dots (A56)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} y_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R y_R^2} \dots\dots\dots (A57)$$

$$\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} z_R^2} \bigg/ \frac{\lambda_{faR} \Delta T_R}{(x_R)^2} = \frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R z_R^2} \dots\dots\dots (A58)$$

Condiciones Iniciales en la forma adimensional:

$$S_o(i, x, y, z) = S_{oi}(x, y, z)$$

Expresando las variables de está ecuación en forma adimensional:

$$S_o = S_{omD} S_{oR} \quad S_{oi} = S_{oiD} S_{oiR}$$

Reemplazando los términos anteriores:

$$S_{omD} S_{oR}(I, x_D, y_D, z_D) = S_{oiD} S_{oiR}(x_D, y_D, z_D)$$

Dividiendo la ecuación anterior por S_{oR} :

$$S_{omD}(I, x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{S_{oiR}}{S_{oR}} \right) S_{oiD}(x_D, y_D, z_D)$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo de esta ecuación:

$$\left(\frac{S_{oiR}}{S_{oR}} \right)$$

Ahora para la fase agua:

$$S_w(i, x, y, z) = S_{wi}(x, y, z)$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$S_w = S_{wmD} S_{wR} \quad S_w = S_{wmD} S_{wR}$$

Reemplazando los términos anteriores:

$$S_{wmD} S_{wR}(I, x_D, y_D, z_D) = S_{wiD} S_{wiR}(x_D, y_D, z_D)$$

Dividiendo la ecuación anterior por S_{wR} :

$$S_{wmD}(I, x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{S_{wiR}}{S_{wR}} \right) S_{wiD}(x_D, y_D, z_D)$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo de esta ecuación:

$$\left(\frac{S_{wiR}}{S_{wR}} \right)$$

Para la temperatura:

$$T(i, x, y, z) = T_i$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$T = T_D T_R \quad T_i = T_{iD} T_{iR}$$

Reemplazando los términos anteriores:

$$T_D T_R(I, x_D, y_D, z_D) = T_{iD} T_{iR}(x_D, y_D, z_D)$$

Dividiendo la ecuación anterior por T_R :

$$T_D(I, x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right) T_{iD}(x_D, y_D, z_D)$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo de esta ecuación:

$$\left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right)$$

Para la presión:

$$P_o(i, x, y, z) = P_{oi}(x, y, z)$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$P_o = P_{oD} P_{oR} \quad P_{oi} = P_{oiD} P_{oiR}$$

Reemplazando los términos anteriores:

$$P_{oD}P_{oR}(I, x_D, y_D, z_D) = P_{oiD}P_{oiR}(x_D, y_D, z_D)$$

Dividiendo la ecuación anterior por P_{oR} :

$$P_{oD}(I, x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{P_{oiR}}{P_{oR}} \right) P_{oiD}(x_D, y_D, z_D)$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo de esta ecuación:

$$\left(\frac{P_{oiR}}{P_{oR}} \right)$$

Condiciones Límites en forma adimensional:

☛ Para el tope o la base del yacimiento:

a) No existe flujo de fluidos:

Para la fase i :

$$-\rho_i \frac{K_i}{\mu_i} (\nabla_n P_i + \rho_i g \nabla_n z) = 0 \dots\dots\dots (A59)$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$\rho_w = \rho_{wD} \rho_{wR} \quad K_w = K_{wD} K_{wR} \quad \mu_w = \mu_{wD} \mu_{wR} \quad P_w = P_{wD} P_{wR} \quad g = g_D g_R$$

$$z = z_D z_R$$

Reemplazando estos términos en la ecuación anterior:

$$-\left(\rho_{iD}\rho_{iR}\right)\frac{K_{iD}K_{iR}}{\mu_{iD}\mu_{iR}}\left(\nabla_{nD}\left(P_{iD}P_{iR}\right)+\rho_{iD}\rho_{iR}g_Dg_R\nabla_{nD}z_Dz_R\right)=0 \quad \dots\dots\dots (A60)$$

$$-\left(\rho_{iD}\rho_{iR}\right)\frac{K_{iD}K_{iR}}{\mu_{iD}\mu_{iR}}\nabla_{nD}\left(P_{iD}P_{iR}\right)-\left(\rho_{iD}\rho_{iR}\right)\frac{K_{iD}K_{iR}}{\mu_{iD}\mu_{iR}}\rho_{iD}\rho_{iR}g_Dg_R\nabla_{nD}z_Dz_R=0$$

Agrupando términos:

$$-\left(\frac{\rho_{iR}K_{iR}P_{iR}}{\mu_{iR}}\right)\left(\rho_{iD}\right)\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}}\nabla_{nD}\left(P_{iD}\right)-\left(\frac{\rho_{iR}^2K_{iR}g_Rz_R}{\mu_{iR}}\right)\left(\rho_{iD}\right)\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}}\rho_{iD}g_D\nabla_{nD}z_D=0$$

Dividiendo esta ecuación por $\left(\frac{\rho_{iR}K_{iR}P_{iR}}{\mu_{iR}}\right)$:

$$-\left(\rho_{iD}\right)\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}}\nabla_{nD}\left(P_{iD}\right)-\left(\frac{\rho_{iR}g_Rz_R}{P_{iR}}\right)\left(\rho_{iD}\right)\frac{K_{iD}}{\mu_{iD}}\rho_{iD}g_D\nabla_{nD}z_D=0 \quad \dots\dots\dots (A61)$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo adimensional:

$$\left(\frac{\rho_{iR}g_Rz_R}{P_{iR}}\right)$$

b) Flujo de calor por conducción:

$$\lambda_r\nabla_n T = \lambda_c\nabla_n T_c$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$\lambda_r = \lambda_{rD} \lambda_{rR} \quad T = T_D T_R \quad \lambda_c = \lambda_{cD} \lambda_{cR} \quad T_c = T_{cD} T_{cR}$$

Reemplazando estos términos en la ecuación anterior:

$$\lambda_{rD} \lambda_{rR} \nabla_{nD} T_D T_R = \lambda_{cD} \lambda_{cR} \nabla_{nD} T_{cD} T_{cR}$$

Agrupando términos:

$$(\lambda_{rR} T_R) \lambda_{rD} \nabla_{nD} T_D = (\lambda_{cR} T_{cR}) \lambda_{cD} \nabla_{nD} T_{cD}$$

Dividiendo esta ecuación por $(\lambda_{rR} T_R)$:

$$\lambda_{rD} \nabla_{nD} T_D = \left(\frac{\lambda_{cR} T_{cR}}{\lambda_{rR} T_R} \right) \lambda_{cD} \nabla_{nD} T_{cD}$$

Como consecuencia se obtuvieron los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}} \right), \left(\frac{T_{cR}}{T_R} \right)$$

La expresión para T_c también es expresada en forma adimensional:

$$T_c(t, x, y, z) = T_i$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$T_c = T_{cD} T_{cR} \quad T_i = T_{iD} T_{iR}$$

Reemplazando estos términos en la ecuación anterior:

$$T_{cD} T_{cR} (t_D, x_D, y_D, z_D) = T_{iD} T_{iR}$$

Agrupando términos:

$$(T_{cR}) T_{cD} (t_D, x_D, y_D, z_D) = (T_{iR}) T_{iD}$$

Dividiendo esta ecuación por (T_{cR}) :

$$T_{cD} (t_D, x_D, y_D, z_D) = \left(\frac{T_{iR}}{T_{cR}} \right) T_{iD}$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo adimensional:

$$\left(\frac{T_{iR}}{T_{cR}} \right)$$

☛ Para las paredes laterales del modelo:

a) No existe flujo de fluidos:

Para la fase i :

$$\nabla_n P_i = -\rho_i g \nabla_n z \dots\dots\dots (A62)$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$\rho_i = \rho_{iD} \rho_{iR} \qquad P_i = P_{iD} P_{iR} \qquad g = g_D g_R \qquad z = z_D z_R$$

Reemplazando estos términos en la ecuación (A62):

$$\nabla_{nD} P_{iD} P_{iR} = -\rho_{iD} \rho_{iR} g_D g_R \nabla_{nD} z_D z_R$$

Agrupando términos:

$$(P_{iR}) \nabla_{nD} P_{iD} = -(\rho_{iR} g_R z_R) \rho_{iD} g_D \nabla_{nD} z_D$$

Dividiendo esta ecuación por P_{iR} :

$$\nabla_{nD} P_{iD} = -\left(\frac{\rho_{iR} g_R z_R}{P_{iR}}\right) \rho_{iD} g_D \nabla_{nD} z_D$$

Como consecuencia se obtuvo el siguiente grupo adimensional:

$$\left(\frac{\rho_{iR} g_R z_R}{P_{iR}}\right)$$

☛ Ecuación para el pozo de producción en forma adimensional:

$$P_o = P_{prod} \dots\dots\dots (A63)$$

Expresando las variables de esta ecuación en forma adimensional:

$$P_o = P_{oD} P_{oR} \quad P_{prod} = P_{prodD} P_{prodR}$$

Reemplazando:

$$P_{oD} P_{oR} = P_{prodD} P_{prodR}$$

Dividiendo la ecuación anterior por P_{oR} :

$$P_{oD} = \left(\frac{P_{prodR}}{P_{oR}} \right) P_{prodD}$$

Obteniéndose el siguiente grupo adimensional:

$$\left(\frac{P_{prodR}}{P_{oR}} \right)$$

$$P_w = P_{prod} + P_{cow} \dots\dots\dots (A64)$$

Expresando las variables de está ecuación en forma adimensional:

$$P_w = P_{woD} P_{wR} \quad P_{prod} = P_{prodD} P_{prodR} \quad P_{cow} = P_{cowD} P_{cowR}$$

Reemplazando:

$$P_{wD} P_{wR} = P_{prodD} P_{prodR} + P_{cowD} P_{cowR}$$

Dividiendo la ecuación anterior por P_{wR} :

$$P_{wD} = \left(\frac{P_{prodR}}{P_{wR}} \right) P_{prodD} + \left(\frac{P_{cowR}}{P_{wR}} \right) P_{cowD}$$

Obteniéndose los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{P_{prodR}}{P_{wR}} \right), \left(\frac{P_{cowR}}{P_{wR}} \right)$$

☛ Pozo de inyección de corriente:

Corriente inyectada por unidad de longitud:

$$\int_{A_{iny}} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_f} \vec{\nabla} \Phi_e \right) * dA = I_{iny} \dots\dots\dots (A65)$$

Resolviendo la integral:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{R_f} \vec{\nabla} \Phi_e \right) * A = I_{iny}$$

En una forma más específica esta ecuación puede expresarse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{1}{R_f} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} + \frac{1}{R_f} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} + \frac{1}{R_f} \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial z^2} \right) A = I_{iny} \dots\dots\dots (A66)$$

Expresando las variables de está ecuación en forma adimensional:

$$R_f = R_{fD} R_{fR} \quad \Phi_e = \Phi_{eD} \Phi_{eR} \quad x = x_D x_R \quad y = y_D y_R \quad z = z_D z_R \quad I_{iny} = I_{inyD} I_{inyR}$$

$$A = A_D A_R$$

Reemplazando los términos anteriores en la ecuación:

$$\left(\frac{1}{(R_{fD} R_{fR})} \frac{\partial^2 (\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial (x_D x_R)^2} + \frac{1}{(R_{fD} R_{fR})} \frac{\partial^2 (\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial (y_D y_R)^2} + \frac{1}{(R_{fD} R_{fR})} \frac{\partial^2 (\Phi_{eD} \Phi_{eR})}{\partial (z_D z_R)^2} \right) A_D A_R = I_{inyD} I_{inyR}$$

Agrupando términos:

$$\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} x_R^2}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial x_D^2}\right) + \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} y_R^2}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial y_D^2}\right) + \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} z_R^2}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial z_D^2}\right) = I_{inyD} I_{inyR}$$

Dividiendo la ecuación anterior por I_{inyR} :

$$\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} x_R^2 I_{inyR}}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial x_D^2}\right) + \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} y_R^2 I_{inyR}}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial y_D^2}\right) + \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} z_R^2 I_{inyR}}\right) \left(\frac{A_D}{R_{fD}}\right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_{eD}}{\partial z_D^2}\right) = I_{inyD}$$

Finalmente, se obtuvieron los siguientes grupos adimensionales:

$$\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} x_R^2 I_{inyR}}\right), \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} y_R^2 I_{inyR}}\right), \left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} z_R^2 I_{inyR}}\right)$$

☛ Pozo de inyección de salmuera:

$$\int_{Ainy} \rho_w \left(\frac{K_w}{\mu_w}\right) (\vec{\nabla} P_w + \rho_w g \vec{\nabla} z)^* dA = W_{salmuera} \dots \dots \dots (A67)$$

Para esta ecuación diferencial, un sin número de investigadores han determinado el siguiente grupo adimensional, que permite escalar la tasa de inyección de salmuera:

$$\left(\frac{W_{salmueraR} \mu_{wR}}{\rho_{wR} K_R P_R z_R}\right)$$

Análisis de los grupos dimensionales obtenidos por análisis inspeccional

Después del análisis inspeccional se obtuvieron los siguientes grupos:

$$1. \left(\frac{\vec{v}_{iR} \mu_{iR} x_R}{K_{iR} P_R} \right)$$

$$2. \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right)$$

$$3. \left(\frac{x_R}{y_R} \right)$$

$$4. \left(\frac{x_R}{z_R} \right)$$

$$5. \left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{P_R} \right)$$

$$6. \left(\frac{v_{(i,x)R} t_R}{\phi_R S_{iR} x_R} \right)$$

$$7. \left(\frac{v_{(i,y)R} t_R}{\phi_R S_{iR} y_R} \right)$$

$$8. \left(\frac{v_{(i,z)R} t_R}{\phi_R S_{iR} z_R} \right)$$

$$9. \left(\frac{P_{oR}}{P_{cR}} \right)$$

$$10. \left(\frac{P_{wR}}{P_{cR}} \right)$$

$$11. \left(\frac{S_{wR}}{S_{oR}} \right)$$

$$12. \left(\frac{1}{S_{oR}} \right)$$

$$13. \left(\frac{x_R^2}{y_R^2} \right)$$

$$14. \left(\frac{x_R^2}{z_R^2} \right)$$

$$15. \left(\frac{v_{(i,x)R} \rho_{(i)R} h_{(i)R} x_R}{\lambda_R T_R} \right)$$

$$16. \left(\frac{x_R}{y_R} \right)$$

$$17. \left(\frac{v_{(i,y)R} \rho_{(i)R} h_{(i)R} x_R^2}{y_R \lambda_R T_R} \right)$$

$$18. \left(\frac{x_R}{z_R} \right)$$

$$19. \left(\frac{v_{(i,z)R} \rho_{(i)R} h_{(i)R} x_R^2}{z_R \lambda_R T_R} \right)$$

$$20. \left(\frac{v_{(i,z)R} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c z_R \lambda_R T_R} \right)$$

$$21. \left(\frac{M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \right)$$

$$22. \left(\frac{\phi_R M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \right)$$

$$23. \left(\frac{\phi_R S_{(i)R} \rho_{(i)R} e_{(i)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$$

24. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R} \right)$
25. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R y_R^2} \right)$
26. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R z_R^2} \right)$
27. $\left(\frac{x_R}{y_R} \right)$
28. $\left(\frac{x_R}{z_R} \right)$
29. $\left(\frac{M_{faR} x_R^2}{\lambda_{faR} t_R} \right)$
30. $\left(\frac{\phi_{faR} M_{faR} x_R^2}{\lambda_{faR} t_R} \right)$
31. $\left(\frac{\phi_{faR} S_{(i)faR} \rho_{(i)faR} e_{(i)faR} x_R^2}{\lambda_{faR} \Delta T_R t_R} \right)$
32. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R} \right)$
33. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R y_R^2} \right)$
34. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2 x_R^2}{R_{faR} \lambda_{faR} \Delta T_R z_R^2} \right)$
35. $\left(\frac{S_{oiR}}{S_{oR}} \right)$
36. $\left(\frac{S_{wiR}}{S_{wR}} \right)$
37. $\left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right)$
38. $\left(\frac{P_{oiR}}{P_{oR}} \right)$
39. $\left(\frac{\rho_{iR} g_R z_R}{P_{iR}} \right)$
40. $\left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}} \right)$
41. $\left(\frac{T_{cR}}{T_R} \right)$
42. $\left(\frac{T_{iR}}{T_{cR}} \right)$
43. $\left(\frac{\rho_{iR} g_R z_R}{P_{iR}} \right)$
44. $\left(\frac{P_{prodR}}{P_{oR}} \right)$
45. $\left(\frac{P_{prodR}}{P_{wR}} \right)$
46. $\left(\frac{P_{cowR}}{P_{wR}} \right)$
47. $\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} x_R^2 I_{inyR}} \right)$
48. $\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} y_R^2 I_{inyR}} \right)$
49. $\left(\frac{A_R \Phi_{eR}}{R_{fR} z_R^2 I_{inyR}} \right)$
50. $\left(\frac{W_{salmueraR} \mu_{wR}}{\rho_{wR} K_R P_R z_R} \right)$

Después de un concienzudo análisis se concluye que:

1. Los grupos 3, 13, 16 y 27 son el mismo grupo:

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix}$$

2. Los grupos 4, 14, 18 y 28 son el mismo grupo:

$$\begin{pmatrix} x_R \\ z_R \end{pmatrix}$$

3. Los grupos 2, 5, 39 y 43 según la similaridad geométrica se pueden agrupar en dos grupos:

$$\begin{pmatrix} \frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \frac{x_R \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{P_R} \end{pmatrix}$$

4. Aplicando similaridad geométrica, los grupos 6, 7 y 8 se resumen con:

$$\begin{pmatrix} \frac{v_{(i,z)R} t_R}{\phi_R S_{iR} z_R} \end{pmatrix}$$

5. Aplicando similaridad geométrica, los grupos 15, 17 y 19 se pueden representar como:

$$\begin{pmatrix} \frac{v_{(i,x)R} \rho_{(i)R} h_{(i)R} x_R}{\lambda_R T_R} \end{pmatrix}$$

6. Según la ecuación de balance de energía planteada por Prats²¹, los grupos 21, 22, 29 y 30 se pueden representar tanto para las capas adyacentes como para la formación de interés de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{(1 - \phi_R) M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \end{pmatrix}$$

7. Los grupos 23 y 31 se pueden representar tanto para la formación de interés como para las capas adyacentes así:

$$\left(\frac{\phi_R S_{(i)R} \rho_{(i)R} e_{(i)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$$

8. Según la similaridad geométrica, los grupos 25, 26 y 27, y son el mismo grupo y, si tomamos en cuenta que representan tanto a la formación como a las capas adyacentes 32, 33 y 34, podemos representar a estos seis grupos como:

$$\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R} \right)$$

9. Según la similaridad geométrica, los grupos 47, 48 y 49, se pueden representar como uno solo de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{fR} I_{inyR}} \right)$$

10. Los grupos adimensionales 9, 10, 38, 44, 45 y 46 al juntarlos obtenemos solo dos grupos que son:

$$\left(\frac{P_{prodR}}{P_{cowR}} \right) \text{ y } \left(\frac{P_{(i)R}}{P_{cR}} \right)$$

Donde $P_{(i)R}$ es la presión inicial de la fase i .

11. Los grupos 11, 12, 35 y 36 se pueden representar por medio de dos grupos:

$$\left(\frac{1}{S_{oR}} \right) \text{ y } \left(\frac{S_{wiR}}{S_{oiR}} \right)$$

12. Los grupos 37, 41 y 42 se pueden representar por medio del grupo:

$$\left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right)$$

13. Los grupos 1, 20, 40 y 50, no sufren ninguna variación:

$$\left(\frac{\vec{v}_{iR} \mu_{iR} x_R}{K_{iR} P_R} \right), \left(\frac{v_{(i,z)R} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c z_R \lambda_R T_R} \right), \left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}} \right) \text{ y } \left(\frac{W_{salmueraR} \mu_{wR}}{\rho_{wR} K_R P_R z_R} \right).$$

Determinación de los grupos finales de calentamiento eléctrico resistivo obtenidos del análisis dimensional:

☛ Los numerales 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 y los dos últimos grupos del numeral 13 quedan iguales:

I. $\left(\frac{x_R}{y_R} \right)$

VI. $\left(\frac{(1-\phi_R) M_{(\sigma)R} x_R^2}{\lambda_R t_R} \right)$

XII. $\left(\frac{S_{wiR}}{S_{oiR}} \right)$

II. $\left(\frac{x_R}{z_R} \right)$

VII. $\left(\frac{\Phi_{eR}^2}{R_{fR} \lambda_{fR} \Delta T_R} \right)$

XIII. $\left(\frac{T_{iR}}{T_R} \right)$

III. $\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \cos(\alpha)_R}{P_R} \right)$

VIII. $\left(\frac{\Phi_{eR}}{R_{fR} I_{inyR}} \right)$

XIV. $\left(\frac{\lambda_{cR}}{\lambda_{rR}} \right)$

IV. $\left(\frac{x_R \rho_{iR} g_R \text{sen}(\alpha)_R}{P_R} \right)$

IX. $\left(\frac{P_{prodR}}{P_{cowR}} \right)$

XV. $\left(\frac{W_{salmueraR} \mu_{wR}}{\rho_{wR} K_R P_R z_R} \right)$

V. $\left(\frac{\phi_R S_{(i)R} \rho_{(i)R} e_{(i)R} x_R^2}{\lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$

X. $\left(\frac{P_{(i)R}}{P_{cR}} \right)$

XI. $\left(\frac{1}{S_{oR}} \right)$

⊕ Dividendo el grupo del numeral 5 con el primer grupo del numeral 13 se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{v_{(i,x)R} \rho_{(i)R} h_{(i)R} x_R}{\lambda_R T_R} \right)}{\left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ v_{iR} \mu_{iR} x_R \\ K_{iR} P_R \end{array} \right)} = \frac{K_{iR} P_R \rho_{(i)R} h_{(i)R}}{\mu_{iR} \lambda_R T_R}$$

si $T = \Delta T$ este grupo quedaría:

XVI. $\left(\frac{K_{iR} P_R \rho_{(i)R} h_{(i)R}}{\mu_{iR} \lambda_R \Delta T_R} \right)$

⊕ Dividendo el segundo grupo del numeral 13 con el grupo del numeral 4 se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{v_{(i,z)R} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c z_R \lambda_R T_R} \right)}{\left(\begin{array}{c} v_{(i,z)R} t_R \\ \phi_R S_{iR} z_R \end{array} \right)} = \frac{\phi_R S_{iR} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c \lambda_R T_R t_R}$$

si $T = \Delta T$ este grupo quedaría:

XVII. $\left(\frac{\phi_R S_{iR} \rho_{(i)R} g_R a_R x_R^2}{g_c \lambda_R \Delta T_R t_R} \right)$

ANEXO B
ANÁLISIS DIMENSIONAL PARA EL PROCESO DE CALENTAMIENTO ELÉCTRICO
RESISTIVO

Las variables seleccionadas de la tabla para el proceso son:

$$\mu_0 = [ML^{-1}\Theta^{-1}]$$

$$T = [T]$$

$$R_f = [ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]$$

$$t = [\Theta]$$

$$L = [L]$$

Con estas variables seleccionadas, se procede a la construcción de la matriz de los grupos pi.

π_1	=	μ_0^a	T^b	R_f^c	t^d	L^e	K_o
π_2	=	μ_0^f	T^g	R_f^h	t^i	L^j	K_w
π_3	=	μ_0^k	T^l	R_f^m	t^n	L^o	μ_w
π_4	=	μ_0^p	T^q	R_f^r	t^s	L^t	P_o
π_5	=	μ_0^u	T^v	R_f^w	t^x	L^y	P_w
π_6	=	μ_0^z	$T^{a'}$	$R_f^{b'}$	$t^{c'}$	$L^{d'}$	v_o
π_7	=	$\mu_0^{e'}$	$T^{f'}$	$R_f^{g'}$	$t^{h'}$	$L^{i'}$	v_w
π_8	=	$\mu_0^{j'}$	$T^{k'}$	$R_f^{l'}$	$t^{m'}$	$L^{n'}$	ρ_o
π_9	=	$\mu_0^{o'}$	$T^{p'}$	$R_f^{q'}$	$t^{r'}$	$L^{s'}$	ρ_w
π_{10}	=	$\mu_0^{t'}$	$T^{u'}$	$R_f^{v'}$	$t^{w'}$	$L^{x'}$	q_o
π_{11}	=	$\mu_0^{y'}$	$T^{z'}$	$R_f^{a''}$	$t^{b''}$	$L^{c''}$	q_w
π_{12}	=	$\mu_0^{d''}$	$T^{e''}$	$R_f^{f''}$	$t^{g''}$	$L^{h''}$	Q_{ciny}

Π_{13}	=	$\mu_o^{l''}$	$T^{j''}$	$R_f^{k''}$	$t^{l''}$	$L^{m''}$	R_{fa}
Π_{14}	=	$\mu_o^{n''}$	$T^{o''}$	$R_f^{p''}$	$t^{q''}$	$L^{r''}$	P_c
Π_{15}	=	$\mu_o^{s''}$	$T^{t''}$	$R_f^{u''}$	$t^{v''}$	$L^{w''}$	Φ_e
Π_{16}	=	$\mu_o^{x''}$	$T^{y''}$	$R_f^{z''}$	$t^{a'''}$	$L^{b'''}$	M_{sal}
Π_{17}	=	$\mu_o^{c''''}$	$T^{d''''}$	$R_f^{e''''}$	$t^{f''''}$	$L^{g''''}$	σ_w
Π_{18}	=	$\mu_o^{h''''}$	$T^{l''''}$	$R_f^{j''''}$	$t^{k''''}$	$L^{l''''}$	σ_o
Π_{19}	=	$\mu_o^{m''''}$	$T^{n''''}$	$R_f^{o''''}$	$t^{p''''}$	$L^{q''''}$	H
Π_{20}	=	$\mu_o^{r''''}$	$T^{s''''}$	$R_f^{t''''}$	$t^{u''''}$	$L^{v''''}$	W
Π_{21}	=	$\mu_o^{w''''}$	$T^{x''''}$	$R_f^{y''''}$	$t^{z''''}$	$L^{a''''}$	ρ_r
Π_{22}	=	$\mu_o^{b''''}$	$T^{c''''}$	$R_f^{d''''}$	$t^{e''''}$	$L^{f''''}$	ρ_{rad}
Π_{23}	=	$\mu_o^{g''''}$	$T^{h''''}$	$R_f^{i''''}$	$t^{j''''}$	$L^{k''''}$	C_o
Π_{24}	=	$\mu_o^{l''''}$	$T^{m''''}$	$R_f^{n''''}$	$t^{o''''}$	$L^{p''''}$	C_w
Π_{25}	=	$\mu_o^{q''''}$	$T^{r''''}$	$R_f^{s''''}$	$t^{t''''}$	$L^{u''''}$	C_r
Π_{26}	=	$\mu_o^{v''''}$	$T^{w''''}$	$R_f^{x''''}$	$t^{y''''}$	$L^{z''''}$	C_{rad}
Π_{27}	=	μ_o^A	T^B	R_f^C	t^D	L^E	K_{hf}
Π_{28}	=	μ_o^F	T^G	R_f^H	t^I	L^J	r_w
Π_{29}	=	μ_o^K	T^L	R_f^M	t^N	L^O	K_{hfa}
Π_{30}	=	μ_o^P	T^Q	R_f^R	t^S	L^T	P_{prod}
Π_{31}	=	μ_o^U	T^V	R_f^W	t^X	L^Y	T_c
Π_{32}	=	μ_o^Z	T^σ	R_f^β	t^α	L^Ω	ΔP
Π_{33}	=	μ_o^ξ	T^η	R_f^Θ	t^D	L^Y	g
Π_{34}	=	μ_o^δ	T^\ominus	R_f^Ψ	t^ζ	L^\wedge	A

Expresando las ecuaciones anteriores en sus dimensiones fundamentales:

Π_1	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^a$	$[T]^b$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^c$	$[\Theta]^d$	$[L]^e$	$[L^2]$
Π_2	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^f$	$[T]^g$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^h$	$[\Theta]^i$	$[L]^j$	$[L^2]$
Π_3	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^k$	$[T]^l$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^m$	$[\Theta]^n$	$[L]^o$	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]$
Π_4	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^p$	$[T]^q$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^r$	$[\Theta]^s$	$[L]^t$	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
Π_5	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^u$	$[T]^v$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^w$	$[\Theta]^x$	$[L]^y$	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
Π_6	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^z$	$[T]^{a'}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{b'}$	$[\Theta]^{c'}$	$[L]^{d'}$	$[L\Theta^{-1}]$

π_7	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{e'}$	$[T]^f$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{g'}$	$[\Theta]^{h'}$	$[L]^i$	$[L\Theta^{-1}]$
π_8	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{j'}$	$[T]^{k'}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{l'}$	$[\Theta]^{m'}$	$[L]^{n'}$	$[ML^{-3}]$
π_9	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{o'}$	$[T]^{p'}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{q'}$	$[\Theta]^{r'}$	$[L]^{s'}$	$[ML^{-3}]$
π_{10}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{t'}$	$[T]^{u'}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{v'}$	$[\Theta]^{w'}$	$[L]^{x'}$	$[L^3\Theta^{-1}]$
π_{11}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{y'}$	$[T]^{z'}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{a''}$	$[\Theta]^{b''}$	$[L]^{c''}$	$[L^3\Theta^{-1}]$
π_{12}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{d''}$	$[T]^{e''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{f''}$	$[\Theta]^{g''}$	$[L]^{h''}$	$[A\Theta^{-1}]$
π_{13}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{l''}$	$[T]^{j''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{k''}$	$[\Theta]^{l''}$	$[L]^{m''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]$
π_{14}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{n''}$	$[T]^{o''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{p''}$	$[\Theta]^{q''}$	$[L]^{r''}$	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{15}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{s''}$	$[T]^{t''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{u''}$	$[\Theta]^{v''}$	$[L]^{w''}$	$[ML^2A^{-1}\Theta^{-3}]$
π_{16}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{x''}$	$[T]^{y''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{z''}$	$[\Theta]^{a'''}$	$[L]^{b'''}$	$[M]$
π_{17}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{''c}$	$[T]^{''d}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{''e}$	$[\Theta]^{f''}$	$[L]^{g''}$	$[MLT^{-1}\Theta^{-3}]$
π_{18}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{h'''}$	$[T]^{l'''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{j'''}$	$[\Theta]^{k'''}$	$[L]^{l'''}$	$[MLT^{-1}\Theta^{-3}]$
π_{19}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{m'''}$	$[T]^{n'''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{o'''}$	$[\Theta]^{p'''}$	$[L]^{q'''}$	$[L]$
π_{20}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{r'''}$	$[T]^{s'''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{t'''}$	$[\Theta]^{u'''}$	$[L]^{v'''}$	$[L]$
π_{21}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{w'''}$	$[T]^{x'''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{y'''}$	$[\Theta]^{z'''}$	$[L]^{a''''}$	$[ML^{-3}]$
π_{22}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{b''''}$	$[T]^{c''''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{d''''}$	$[\Theta]^{e''''}$	$[L]^{f''''}$	$[ML^{-3}]$
π_{23}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{g''''}$	$[T]^{h''''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{i''''}$	$[\Theta]^{j''''}$	$[L]^{k''''}$	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{24}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{l''''}$	$[T]^{m''''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{n''''}$	$[\Theta]^{o''''}$	$[L]^{p''''}$	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{25}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{q''''}$	$[T]^{r''''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{s''''}$	$[\Theta]^{t''''}$	$[L]^{u''''}$	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{26}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^{v''''}$	$[T]^{w''''}$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^{x''''}$	$[\Theta]^{y''''}$	$[L]^{z''''}$	$[L^2T^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{27}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^A$	$[T]^B$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^C$	$[\Theta]^D$	$[L]^E$	$[ML\Theta^{-3}T^{-1}]$
π_{28}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^F$	$[T]^G$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^H$	$[\Theta]^I$	$[L]^J$	$[L]$
π_{29}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^K$	$[T]^L$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^M$	$[\Theta]^N$	$[L]^O$	$[ML\Theta^{-3}T^{-1}]$
π_{30}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^P$	$[T]^Q$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^R$	$[\Theta]^S$	$[L]^T$	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{31}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^U$	$[T]^V$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^W$	$[\Theta]^X$	$[L]^Y$	$[T]$
π_{32}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^Z$	$[T]^\sigma$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^\beta$	$[\Theta]^\alpha$	$[L]^\Omega$	$[ML^{-1}\Theta^{-2}]$
π_{33}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^\xi$	$[T]^\eta$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^\Theta$	$[\Theta]^\Delta$	$[L]^\Upsilon$	$[L\Theta^{-2}]$
π_{34}	=	$[ML^{-1}\Theta^{-1}]^\delta$	$[T]^\otimes$	$[ML^3A^{-2}\Theta^{-3}]^\Psi$	$[\Theta]^\zeta$	$[L]^\wedge$	$[L^2]$

Sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
M : a + c = 0 & a = 0 & & \\
L : -a + 3c + e + 2 = 0 & e = -2 & & \\
\theta : -a - 3c + d = 0 & \rightarrow d = 0 & \rightarrow \pi_1 = \frac{K_o}{L^2} & \rightarrow \pi_2 = \frac{K_w}{L^2} \\
T : b = 0 & b = 0 & & \\
A : -2c = 0 & c = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M : k + m + 1 = 0 & k = -1 & & \\
L : -k + 3m + o - 1 = 0 & o = 0 & & \\
\theta : -k - 3m + n - 1 = 0 & \rightarrow n = 0 & \rightarrow \pi_3 = \frac{\mu_w}{\mu_o} & \\
T : l = 0 & l = 0 & & \\
A : -2m = 0 & m = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M : p + r + 1 = 0 & p = -1 & & \\
L : -p + 3r + t - 1 = 0 & t = 0 & & \\
\theta : -p - 3r + s - 2 = 0 & \rightarrow s = 1 & \rightarrow \pi_4 = \frac{tP_o}{\mu_o} & \rightarrow \pi_5 = \frac{tP_w}{\mu_o} \\
T : q = 0 & q = 0 & & \\
A : -2r = 0 & r = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M : z + b' = 0 & z = 0 & & \\
L : -z + 3b' + d' + 1 = 0 & d' = -1 & & \\
\theta : -z - 3b' + c' - 1 = 0 & \rightarrow c' = 1 & \rightarrow \pi_6 = \frac{tv_o}{L} & \rightarrow \pi_7 = \frac{tv_w}{L} \\
T : a' = 0 & a' = 0 & & \\
A : -2b' = 0 & b' = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
M : j' + l' + 1 = 0 & j' = -1 & & \\
L : -j' + 3l' + n' - 3 = 0 & n' = 2 & & \\
\theta : -j' - 3l' + m' = 0 & \rightarrow m' = -1 & \rightarrow \pi_8 = \frac{L^2 \rho_o}{t\mu_o} & \rightarrow \pi_9 = \frac{L^2 \rho_w}{t\mu_o} \\
T : k' = 0 & k' = 0 & & \\
A : -2l' = 0 & l' = 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
M : t' + v' = 0 & & t' = 0 \\
L : -t' + 3v' + x' + 3 = 0 & & x' = -3 \\
\theta : -t' - 3v' + w' - 1 = 0 & \rightarrow & w' = 1 \quad \rightarrow \quad \pi_{10} = \frac{tq_o}{L^3} \quad \rightarrow \quad \pi_{11} = \frac{tq_w}{L^3} \\
T : u' = 0 & & u' = 0 \\
A : -2v' = 0 & & v' = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
M : d'' + f'' = 0 & & d'' = -1/2 \\
L : -d'' + 3f'' + h'' = 0 & & h'' = -2 \\
\theta : -d'' - 3f'' + g'' - 1 = 0 & \rightarrow & g'' = 2 \quad \rightarrow \quad \pi_{12} = \frac{t^2 Q_{ciny} \sqrt{R_f}}{L^2 \sqrt{\mu_o}} \\
T : e'' = 0 & & e'' = 0 \\
A : -2f'' + 1 = 0 & & f'' = 1/2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
M : i'' + k'' + 1 = 0 & & i'' = 0 \\
L : -i'' + 3k'' + m'' + 3 = 0 & & m'' = 0 \\
\theta : -i'' - 3k'' + l'' - 3 = 0 & \rightarrow & l'' = 0 \quad \rightarrow \quad \pi_{13} = \frac{R_{fa}}{R_f} \\
T : j'' = 0 & & j'' = 0 \\
A : -2k'' - 2 = 0 & & k'' = -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
M : n'' + p'' + 1 = 0 & & n'' = -1 \\
L : -n'' + 3p'' + r'' - 1 = 0 & & r'' = 0 \\
\theta : -n'' - 3p'' + q'' - 2 = 0 & \rightarrow & q'' = 1 \quad \rightarrow \quad \pi_{14} = \frac{tP_c}{\mu_o} \\
T : o'' = 0 & & o'' = 0 \\
A : -2p'' = 0 & & p'' = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
M : s'' + u'' + 1 = 0 \\
L : -s'' + 3u'' + w'' + 2 = 0 \\
\theta : -s'' - 3u'' + v'' - 3 = 0 \\
T : t'' = 0 \\
A : -2u'' - 1 = 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
s'' = -\frac{1}{2} \\
w'' = -1 \\
v'' = 1 \\
t'' = 0 \\
u'' = -\frac{1}{2}
\end{array}
\rightarrow \pi_{15} = \left(\frac{t\Phi_e}{L\sqrt{\mu_o R_f}} \right)$$

$$\begin{array}{l}
M : x'' + z'' + 1 = 0 \\
L : -x'' + 3z'' + b'' = 0 \\
\theta : -x'' - 3z'' + a'' = 0 \\
T : y'' = 0 \\
A : -2z'' = 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
x'' = -1 \\
b'' = -1 \\
a'' = -1 \\
y'' = 0 \\
z'' = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{16} = \frac{M_{sal}}{\mu_o tL}$$

$$\begin{array}{l}
M : c''' + e''' + 1 = 0 \\
L : -c''' + 3e''' + g''' + 1 = 0 \\
\theta : -c''' - 3e''' + f''' - 3 = 0 \\
T : d''' - 1 = 0 \\
A : -2e''' = 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
c''' = -1 \\
g''' = -2 \\
f''' = 2 \\
d''' = 1 \\
e''' = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{17} = \frac{T\sigma_w t}{\mu_o L^2} \rightarrow \pi_{18} = \frac{T\sigma_o t}{\mu_o L^2}$$

$$\begin{array}{l}
M : m''' + o''' = 0 \\
L : -m''' + 3o''' + q''' + 1 = 0 \\
\theta : -m''' - 3o''' + p''' = 0 \\
T : n''' = 0 \\
A : -2o''' = 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{l}
m''' = 0 \\
q''' = -1 \\
p''' = 0 \\
n''' = 0 \\
o''' = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{19} = \frac{H}{L} \rightarrow \pi_{20} = \frac{W}{L}$$

$$\begin{array}{ll}
M : w''' + y''' + 1 = 0 & w''' = -1 \\
L : -w''' + 3y''' + a''' - 3 = 0 & a''' = 2 \\
\theta : -w''' - 3y''' + z''' = 0 & \rightarrow z''' = -1 \rightarrow \pi_{21} = \frac{\rho_r L^2}{\mu_o t} \rightarrow \pi_{22} = \frac{\rho_{rad} L^2}{\mu_o t} \\
T : x''' = 0 & x''' = 0 \\
A : -2y''' = 0 & y''' = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
M : g'''' + i'''' + 1 = 0 & g'''' = 0 \\
L : -g'''' + 3i'''' + k'''' + 2 = 0 & k'''' = -2 \\
\theta : -g'''' - 3i'''' + j'''' - 2 = 0 & \rightarrow j'''' = 2 \rightarrow \pi_{23} = \frac{c_o T t^2}{L^2} \\
T : h'''' - 1 = 0 & h'''' = 1 \\
A : -2i'''' = 0 & i'''' = 0
\end{array}$$

$$\pi_{24} = \frac{c_w T t^2}{L^2} \rightarrow \pi_{25} = \frac{c_r T t^2}{L^2} \rightarrow \pi_{26} = \frac{c_{rad} T t^2}{L^2}$$

$$\begin{array}{ll}
M : A + C + 1 = 0 & A = -1 \\
L : -A + 3C + E + 1 = 0 & E = -2 \\
\theta : -A - 3C + D - 3 = 0 & \rightarrow D = 2 \rightarrow \pi_{27} = \frac{\lambda_f T t^2}{\mu_o L^2} \rightarrow \pi_{29} = \frac{\lambda_{fa} T t^2}{\mu_o L^2} \\
T : B - 1 = 0 & B = 1 \\
A : -2C = 0 & C = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
M : F + H = 0 & F = 0 \\
L : -F + 3H + J + 1 = 0 & J = -1 \\
\theta : -F - 3H + I = 0 & \rightarrow I = 0 \rightarrow \pi_{28} = \frac{r_w}{L} \\
T : G = 0 & G = 0 \\
A : -2H = 0 & H = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
M : P + R + 1 = 0 & P = -1 \\
L : -P + 3R + T - 1 = 0 & T = 0 \\
\theta : -P - 3R + S - 2 = 0 & \rightarrow S = 1 \\
T : Q = 0 & Q = 0 \\
A : -2R = 0 & R = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{30} = \frac{P_{prod} t}{\mu_o} \rightarrow \pi_{32} = \frac{\Delta P t}{\mu_o}$$

$$\begin{array}{ll}
M : U + W = 0 & U = 0 \\
L : -U + 3W + Y = 0 & Y = 0 \\
\theta : -U - 3W + X = 0 & \rightarrow X = 0 \\
T : V + 1 = 0 & V = -1 \\
A : -2W = 0 & W = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{31} = \frac{T_c}{T}$$

$$\begin{array}{ll}
M : \varepsilon + \theta = 0 & \varepsilon = 0 \\
L : -\varepsilon + 3\theta + \gamma + 1 = 0 & \gamma = -1 \\
\theta : -\varepsilon - 3\theta + \pi - 2 = 0 & \rightarrow \pi = 2 \\
T : \eta = 0 & \eta = 0 \\
A : -2\theta = 0 & \theta = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{33} = \frac{gt^2}{L}$$

$$\begin{array}{ll}
M : \varphi + \Psi = 0 & \varphi = 0 \\
L : -\varphi + 3\Psi + \Lambda + 2 = 0 & \Lambda = -2 \\
\theta : -\varphi - 3\Psi + \zeta = 0 & \rightarrow \zeta = 0 \\
T : \Theta = 0 & \Theta = 0 \\
A : -2\Psi = 0 & \Psi = 0
\end{array}
\rightarrow \pi_{34} = \frac{A}{L^2}$$