TEOREMA DE PASCAL

CRISTHIAN ALEJANDRO GONZALEZ DUARTE

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

TEOREMA DE PASCAL

CRISTHIAN ALEJANDRO GONZALEZ DUARTE

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director
Jurgen Alfredo Julio Batalla
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2024

DEDICATORIA

A mis padres, mi hermana y a los profesores que instruyeron mi camino por olimpiadas matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por el apoyo que he recibido a lo largo de toda mi vida. También agradezco a todos los profesores que me han formado como estudiante y persona, desde que era un niño. Quiero agradecer especialmente a la Doctora María Losada, ya que es gracias a ella y su apoyo en olimpiadas matemáticas lo que me hizo querer ser matemático.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: TEOREMA DE PASCAL [*]

AUTOR: CRISTHIAN ALEJANDRO GONZALEZ DUARTE [**]

PALABRAS CLAVE: ESPACIOS PROYECTIVOS, RAZÓN DOBLE, CÓNICAS, PERSPECTIVAS.

DESCRIPCIÓN: El teorema de Pascal establece que, para todo hexágono inscrito en una cónica, en el plano proyectivo, los lados opuestos del hexágono se cortan en tres puntos colineales. En este trabajo, realizamos un estudio de los conceptos y herramientas necesarias para dar la prueba al Teorema de Pascal, en geometría euclidiana y geometría proyectiva, y damos paso al análisis de problemas y construcciones en le geometría euclidiana, donde el uso del Teorema de Pascal permite resolver estos problemas y visualizar resultados.

En el primer capítulo, repasaremos algunas definiciones y resultados de la geometría proyectiva, como lo pueden ser los espacios proyectivos y el uso de las coordenadas homogéneas, los cuales serán importantes para la prueba del Teorema de Pascal en geometría proyectiva. En el siguiente capítulo, introducimos el concepto de cónicas y exponemos los enunciados y demostraciones del Teorema de Pascal en geometría euclidiana y proyectiva, para poder dar una comparación de este teorema en ambas situaciones. Por último, expondremos situaciones donde el uso del Teorema de Pascal nos permita obtener resultados, como lo puede ser en problemas de Olimpiadas Internacionales de Matemáticas o construcciones creadas en geometría euclidiana, para así dar a entender la utilidad del Teorema de Pascal en la geometría.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: PASCAL´S THEOREM [*]

AUTHOR: CRISTHIAN ALEJANDRO GONZALEZ DUARTE [**]

KEYWORDS: PROJECTIVE SPACES, DOUBLE REASON, CONICS, PERSPECTIVES.

DESCRIPTION: Pascal's theorem states that, for any hexagon inscribed in a conic, in the projective plane, the opposite sides of the hexagon intersect at three collinear points. In this work, we study the concepts and tools necessary to prove Pascal's Theorem in Euclidean geometry and projective geometry, and we analyze problems and constructions in Euclidean geometry, where the use of Pascal's Theorem allows us to solve these problems and visualize results.

In the first chapter, we will review some definitions and results of projective geometry, such as projective spaces and the use of homogeneous coordinates, which will be important for the proof of Pascal's Theorem in projective geometry. In the next chapter, we introduce the concept of conics and expose the statements and proofs of Pascal's Theorem in Euclidean and projective geometry, in order to give a comparison of this theorem in both situations. Finally, we will expose situations where the use of Pascal's Theorem allows us to obtain results, as it can be in problems of International Mathematical Olympiads or constructions created in Euclidean geometry, in order to give to understand the utility of Pascal's Theorem in geometry.

---

[*] Bachelor Thesis

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jurgen Alfredo Julio Batalla, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Introducción

Uno de los teoremas más clásicos, y ampliamente estudiado en la geometría, es el Teorema de Pascal, formulado originalmente por el matemático Blaise Pascal en el siglo XVII. Este teorema establece que para todo hexágono inscrito en una cónica, en el plano proyectivo, los lados opuestos del hexágono se cortan en tres puntos colineales.

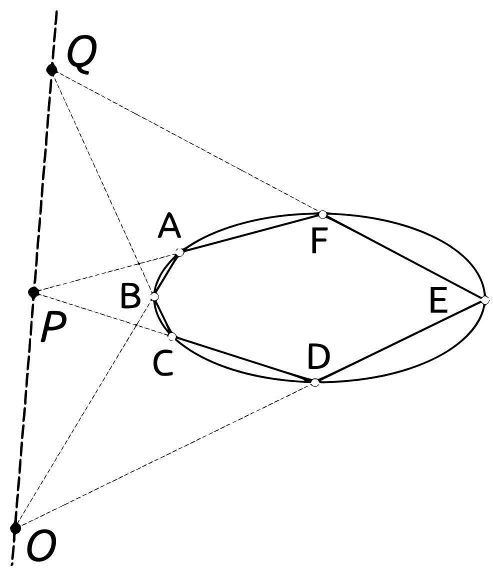

Figura 1: Ilustración Teorema de Pascal

El propósito principal de este trabajo de grado es estudiar el Teorema de Pascal, visto desde la geometría euclidiana y desde la geometría proyectiva, haciendo uso de las herramientas mostradas en ambos campos de estudio. El objetivo es hacer un estudio de los diferentes teoremas y definiciones que nos permiten resolver el Teorema de Pascal, tanto en geometría euclidiana como en proyectiva, para luego poder explicar su demostración. Posteriormente, se exponen situaciones en donde el uso del Teorema de Pascal permite dar resolución a las mismas.

Una muestra de lo interesante que es este teorema se refleja en las distintas demostraciones que existen del mismo, cada una de las cuales ha llevado al desarrollo de importantes técnicas y teorías en geometría. Para evidenciar este valioso teorema, iniciaremos estudiando el teorema en su versión en Geometría Euclidiana. Luego estudiaremos las principales nociones y herramientas de la Geometría Proyectiva, que nos permitirán demostrar el teorema. Estas nociones incluyen, por ejemplo, los conceptos de espacios proyectivos, independencia proyectiva, coordenadas homogéneas, entre otros.

Una consecuencia interesante de abordar el teorema desde la Geometría Proyectiva es que, vía Principio de Dualidad, es posible obtener su versión dual. Es decir, se puede concluir también que, dado un hexágono circunscrito a una cónica, las rectas que unen cada pareja de vértices opuestos concurren. Este enunciado se conoce en la literatura como el Teorema de Brianchon.

Finalmente, como aplicaciones de este teorema, mostraremos algunas soluciones a problemas de geometría (algunos propuestos en Olimpiadas Internacionales de Matemáticas) que reducen significativamente las construcciones y demostraciones hechas desde la perspectiva de la Geometría Euclidiana.

1. Preliminares

En este capítulo hacemos una breve introducción a la Geometría Proyectiva, presentamos sus elementos básicos y los conceptos necesarios para entender el objetivo principal de este trabajo, que es el Teorema de Pascal; para esta sección nos basamos principalmente en [1], y [2].

1.1. Espacios y subespacios proyectivos

En este trabajo denotaremos por $\mathbb{K}$ un subcuerpo de $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Definición 1.1.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, se define la relación de equivalencia $\sim$ sobre $E \setminus \{0_E\}$, de la siguiente manera:

$$a \sim b \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \ : \ \ b = \lambda a).$$

El conjunto cociente $(E \setminus \{0_E\})/_\sim$ recibe el nombre de *espacio proyectivo deducido de* E, y se escribe $\mathbb{P}(E)$.

Definición 1.1.2. Se conoce como *aplicación canónica* de $E \setminus \{0\}$ sobre $\mathbb{P}(E)$, a la aplicación que mapea a todo $x \in E \setminus \{0\}$ a su clase dada la relación de equivalencia bajo $\sim$. Esta aplicación se denota π.

$$\pi(x) = [x].$$

Definición 1.1.3. Si $\dim_{\mathbb{K}} E = n$. Entonces, el entero $n-1$ es llamado la *dimensión del espacio proyectivo* $\mathbb{P}(E)$, y se escribe $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{P}(E) = n-1$ o simplemente $\dim \mathbb{P}(E) = n-1$.

- Si $E = \{0_E\}$, entonces $\mathbb{P}(E) = \emptyset$ y $\dim \mathbb{P}(E) = -1$.
- Si E es una recta ($\dim E = 1$), entonces $\mathbb{P}(E)$ queda reducido a un sólo punto, y $\dim \mathbb{P}(E) = 0$.

---

1 A DONEDDU. *Complementos de Geometría Algebráicas. Traducción de la edición francesa de 1968*. Aguilar ediciones, 1980.

2 German RINCÓN. *Un Recorrido por la geometría*. Universidad Antonio Nariño, 1994.

- Si E es un plano ($\dim E = 2$), entonces $\dim \mathbb{P}(E) = 1$ y $\mathbb{P}(E)$ recibe el nombre de *recta proyectiva*.
- Si $\dim E = 3$, entonces $\dim \mathbb{P}(E) = 2$ y $\mathbb{P}(E)$ recibe el nombre de *plano proyectivo*.

El espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ es denotado por $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ y es llamado el espacio proyectivo estándar.

Definición 1.1.4. Un subconjunto de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ se dice que es un *subespacio proyectivo* si es de la forma $\mathbb{P}(F)$, donde F es un subespacio de E. Además, se tiene que $\mathbb{P}(F) = \pi(F \setminus \{0_E\})$, siendo π el mapeo que envía cada elemento a su clase de equivalencia, y $\dim \mathbb{P}(F) = \dim F - 1$. Un subespacio es llamado:

- *Hiperplano*, si su dimensión es $\dim \mathbb{P}(E) - 1$.

En los espacios proyectivos, los puntos son subespacios proyectivos de dimensión 0. Si $P = [v]$, entonces $P = \mathbb{P}(\text{gen }\{v\})$.

Notemos también que si F_1 y F_2 son subespacios de un espacio vectorial E, entonces:

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(F_1) \cap \mathbb{P}(F_2),$$

pues:

$$[v] \in \mathbb{P}(F_1 \cap F_2) \iff v \in F_1 \cap F_2 \iff v \in F_1 \text{ y } v \in F_2$$
$$\iff [v] \in \mathbb{P}(F_1) \text{ y } [v] \in \mathbb{P}(F_2) \iff [v] \in \mathbb{P}(F_1) \cap \mathbb{P}(F_2).$$

En un espacio vectorial podemos considerar el subespacio vectorial generado por un conjunto como el menor subespacio que contiene al conjunto. Ahora, extendemos esta noción a los espacios proyectivos. Sea $A \subseteq \mathbb{P}(E)$ no vacío, de la definición, la función canónica π es sobreyectiva, por lo que el conjunto $\pi^{-1}(A)$ es no vacío. Sea F el subespacio vectorial generado por $\pi^{-1}(A)$, es claro que $\mathbb{P}(F)$ es el menor subespacio proyectivo que contiene a A.

Definición 1.1.5. Dado $A \subseteq \mathbb{P}(E)$, definimos el *subespacio proyectivo generado por* A, como el menor subespacio proyectivo que contiene a A, y lo denotamos $L(A)$. Si $P_1, \ldots, P_n$ son puntos de $\mathbb{P}(E)$, denotamos $L(P_1, \ldots, P_n) = L(\{P_1, \ldots, P_n\})$. Finalmente, si $S_1 = \mathbb{P}(F_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(F_2)$ son subespacios proyectivos, denotamos $L(S_1, S_2) = L(S_1 \cup S_2)$.

Sea P_1 y P_2 dos puntos diferentes en un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, digamos $P_1 = [v_1]$ y $P_2 = [v_2]$. Tenemos que v_1 y v_2 son linealmente independientes, por tanto gen $\{v_1, v_2\}$ tiene dimensión 2, y de esa manera $L(P_1, P_2)$ tiene dimensión 1. Este espacio $L(P_1, P_2)$ es la recta proyectiva que pasa por los puntos P_1 y P_2. De este modo, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1.6. *Por dos puntos distintos de $\mathbb{P}(E)$ pasa una única recta proyectiva.*

A continuación tenemos una fórmula para calcular la dimensión de espacios generados.

Proposición 1.1.7. ***(Fórmula Grassmann).*** *Sean S_1 y S_2 subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(E)$. Entonces $\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$.*

Demostración. Digamos $S_1 = \mathbb{P}(F_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(F_2)$, entonces $L(S_1, S_2) = \mathbb{P}(F_1 + F_2)$, tenemos que $\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$. De este modo:

$$\begin{aligned}
\dim L(S_1, S_2) &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) - 1 \\
&= (\dim F_1 - 1) + (\dim F_2 - 1) - (\dim(F_1 \cap F_2) - 1) \\
&= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).
\end{aligned}$$

□

La fórmula de Grassmann implica que si dos subespacios S_1 y S_2 cumplen que $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(E)$, entonces $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. En particular, dos líneas proyectivas en un plano proyectivo siempre se intersectan. Con este hecho y la Proposición 1.1.6. Tenemos la siguiente afirmación:

Proposición 1.1.8. *En un plano proyectivo, dos rectas proyectivas diferentes se intersectan en un sólo punto.*

1.2. Coordenadas Homogéneas

Proposición 1.2.1. *Sea E un espacio vectorial $\mathbb{K}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ escalares no nulos de $\mathbb{K}$. Entonces el conjunto $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vectores en E es linealmente independiente si, y sólo si, el conjunto $B = \{\alpha_1 v_1, \ldots \alpha_n v_n\}$ es linealmente independiente.*

Demostración. Supongamos que el conjunto A es linealmente independiente, y sean ρ_i escalares tales que.

$$\rho_1 \alpha_1 v_1 + \rho_2 \alpha_2 v_2 + \cdots + \rho_n \alpha_n v_n = 0,$$

entonces para cada i, $\rho_i\alpha_i = 0$, y como los espacios α_i son no nulos, concluimos que $\rho_i = 0$, para cada i. Y así, el conjunto B es linealmente independiente.

Recíprocamente, supongamos que el conjunto B es linealmente independiente. Entonces, por lo mostrado antes, el conjunto $C = \{\alpha_1^{-1}\alpha_1 v_1, \alpha_2^{-1}\alpha_2 v_2, \ldots, \ldots, \alpha_1^{-1}\alpha_1 v_1\}$ es linealmente independiente. Y notemos que $C = A$. $\square$

Definición 1.2.2. Decimos que un conjunto de puntos $\{P_1 = [x_1], P_2 = [x_2], \ldots, P_n = [x_n]\}$ de un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ es *proyectivamente independiente* si la familia $\{x_1, x_2 \ldots, x_n\}$ es linealmente independiente, en caso contrario decimos que es *proyectivamente dependiente*.

Cabe aclarar que la notación de *proyectivamente independiente* es única de los espacios proyectivos, y no es igual a la independencia lineal en los espacios vectoriales.

Note que, como consecuencia de la Proposición 1.2.1, la definición anterior no depende de los representantes x_i elegidos.

Teorema 1.2.3. *En un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, con $\dim \mathbb{P}(E) = n$, para todo conjunto $\{P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}\}$ de $n+2$ puntos que cumple que todo subconjunto de $n+1$ puntos es proyectivamente independiente, existe una base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de E, única salvo un factor escalar no nulo λ; tal que:*

I) $\pi(v_0) = P_0, \pi(v_1) = P_1, \ldots, \pi(v_n) = P_n$.

II) $\pi(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) = P_{n+1}$.

Demostración. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, existe $u_i \in E$, tal que $\pi(u_i) = P_i$, notemos que $\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$ forma una base de E. Sea $u_{n+1} \in E \setminus \{0\}$, tal que $\pi(u_{n+1}) = P_{n+1}$, existen escalares α_i tales que:

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = u_{n+1}.$$

Observemos que cada α_i es no nulo, pues, si existiera un $j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, tal que $\alpha_j = 0$, entonces:

$$u_{n+1} - \alpha_0 u_0 - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_{j-1} u_{j-1} - \alpha_{j+1} u_{j+1} - \cdots - \alpha_n u_n = 0,$$

con lo que el conjunto $\{u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_{n+1}\}$ es linealmente dependiente, contradiciendo la hipótesis. De este modo, definimos $v_i = \alpha_i u_i$, y así, la base $B = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ cumple las propiedades *1.* y *2.*

Si $B' = \{v'_0, v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ es una base de E, que cumple las condiciones *1.* y *2.*, entonces tenemos que:

$$\pi(v'_i) = \pi(v_i);$$

$$\pi(v'_0 + v'_1 + \cdots + v'_n) = \pi(v_0 + v_1 + \cdots + v_n).$$

De la primera igualdad tenemos que existen escalares no nulos β_i tales que $v'_i = \beta_i v_i$. De la segunda igualdad concluimos que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo, tal que:

$$\begin{aligned} v'_0 + v'_1 + \cdots + v'_n &= \lambda(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n &= \lambda(v_0 + v_1 + \cdots + v_n) \\ (\beta_0 - \lambda)v_0 + (\beta_1 - \lambda)v_1 + \cdots + (\beta_n - \lambda)v_n = 0. \end{aligned}$$

Y así, $\beta_i = \lambda$, para todo i, con lo que obtenemos que $v'_i = \lambda v_i$, para todo i. $\square$

Definición 1.2.4. En un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$ de dimensión n, recibe el nombre de *referencia proyectiva* todo conjunto ordenado de $n+2$ puntos $\{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ tal que todo subconjunto de cardinalidad $n+1$ sea proyectivamente independiente. Al punto P_{n+1} se le llama *centro de la referencia proyectiva*.

Definición 1.2.5. Sea $\mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n y $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$. Dado un un punto $P \in \mathbb{P}(E)$, con $P = [w]$, definimos sus coordenadas homogéneas como el vector $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, formado por los escalares tales que $w = x_0 v_0 + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, donde $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es la base obtenida en el Teorema 1.2.3.

Notemos que del Teorema 1.2.3, la expresión en coordenadas homogéneas de un punto es única, salvo un producto escalar, y además, respecto a la referencia $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ tenemos que:

$$P_0 = (1, 0, 0 \dots, 0), \quad P_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots \quad , P_n = (0, 0, \dots, 1), \quad P_{n+1} = (1, 1, \dots, 1).$$

En adelante no haremos distinción entre el punto y su coordenada homogénea respecto a una referencia proyectiva. Es decir, manejaremos a los puntos del espacio proyectivo como vectores.

Notemos que si P_1, P_2, P_3 son puntos diferentes, entonces $\{P_1, P_2, P_3\}$ es una referencia proyectiva. A continuación, definimos el concepto de razón doble, el cual, como veremos más adelante, es fundamental para la demostración del Teorema de Pascal (Teorema 2.3.2).

Definición 1.2.6. Sean 4 puntos P_1, P_2, P_3, P_4 de una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$, donde P_1, P_2, P_3 son puntos diferentes, definimos la *razón doble* $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4)$ de los cuatro puntos como el número $\frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, donde $[y_0, y_1]$ son las coordenadas homogéneas de P_4 en la referencia proyectiva $\{P_1, P_2, P_3\}$.

En particular, tenemos que $\beta(P_1, P_2, P_3, P_1) = 0$, $\beta(P_1, P_2, P_3, P_2) = \infty$ y $\beta(P_1, P_2, P_3, P_3) = 1$.

1.3. Transformaciones proyectivas

Definición 1.3.1. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una transformación lineal $\varphi : E \to F$ define una función $f : \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(\ker \varphi) \to \mathbb{P}(F)$ definida por $f([u]) = [\varphi(u)]$. Las funciones construidas de esta manera son llamadas *transformaciones proyectivas* y escribimos $f = \overline{\varphi}$. Si φ es un isomorfismo, entonces $\ker \varphi = \{0\}$ y así, $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ y es llamado un *isomorfismo proyectivo*.

Dos espacios proyectivos son isomorfos si existe un isomorfismo proyectivo entre ellos; por tanto, dos espacios proyectivos son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.

Teorema 1.3.2. *Sean $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(V)$ espacios proyectivos sobre un campo $\mathbb{K}$ tales que $\dim \mathbb{P}(E) = n \leq \dim \mathbb{P}(V)$. Suponga que $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathcal{R}' = \{Q_0, \ldots, Q_{n+1}\}$ es una referencia proyectiva de un subespacio n-dimensional S de $\mathbb{P}(V)$. Entonces existe una única transformación proyectiva $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$, tal que $f(P_i) = Q_i$ para cada i. Además, si $S = \mathbb{P}(V)$, entonces f es un isomorfismo proyectivo.*

Demostración. Veamos la existencia. Digamos $P_i = [v_i]$ y $Q_i = [w_i]$, tales que $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_{n+1}$ y $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = w_{n+1}$, definimos $\phi : E \to V$, como sigue:

$$\phi(\alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_0 w_0 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Evidentemente, ϕ es una transformación lineal, y si $\dim E = \dim V$, entonces es un isomorfismo, pues su inversa es:

$$\phi^{-1}(\alpha_0 w_0 + \cdots + \alpha_n w_n) = \alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Consideremos $f = \overline{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$, tenemos que $f(P_i) = Q_i$, para cada i.

Mostraremos ahora la unicidad. Sean $f, g \colon \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$, transformaciones proyectivas, tales que $f(P_i) = Q_i$ y $g(P_i) = Q_i$, para cada i. Digamos $f = \overline{\phi}$ y $g = \overline{\psi}$. Del Teorema 1.2.3, tomemos $P_i = [v_i]$, $Q_i = [w_i]$, tales que $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_{n+1}$ y $w_0 + w_1 + \cdots + w_n = w_{n+1}$. Sea $P = [v] \in \mathbb{P}(E)$, tenemos que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, así:

$$\phi(v) = \alpha_0 \phi(v_0) + \cdots + \alpha_n \phi(v_n) \quad y \quad \psi(v) = \alpha_0 \psi(v_0) + \cdots + \alpha_n \psi(v_n).$$

Puesto que $f(P_i) = Q_i$ y $g(P_i) = Q_i$, tenemos que:

$$f([v_i]) = [w_i] \quad y \quad g([v_i]) = [w_i];$$

$$[\phi(v_i)] = [w_i] \quad y \quad [\psi(v_i)] = [w_i];$$

$$[\phi(v_i)] = [\psi(v_i)].$$

Además, para $i = n + 1$:

$$[\phi(v_{n+1})] = [\psi(v_{n+1})];$$

$$[\phi(v_0) + \cdots + \phi(v_n)] = [\psi(v_0) + \cdots + \psi(v_n)].$$

Con esto, tenemos que existen β_i y λ escalares no nulos, tales que:

$$\phi(v_i) = \beta_i \psi(v_i);$$

$$\phi(v_0) + \cdots + \phi(v_n) = \lambda(\psi(v_0) + \cdots + \psi(v_n)),$$

por tanto, reemplazando la primera ecuación en la segunda:

$$\beta_0 \psi(v_0) + \cdots + \beta_n \psi(v_n) = \lambda(\psi(v_0) + \cdots + \psi(v_n))$$

$$(\beta_0 - \lambda)\psi(v_0) + \cdots + (\beta_n - \lambda)\psi(v_n) = 0.$$

Notemos que los $\psi(v_i)$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ son linealmente independientes, por lo que podemos concluir que $\beta_i = \lambda$ para toda i. En este sentido, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\alpha_0\phi(v_0) + \cdots + \alpha_n\phi(v_n) &= \alpha_0\lambda\psi(v_0) + \cdots + \alpha_n\lambda\psi(v_n) \\
\phi(v) &= \lambda\psi(v) \\
[\phi(v)] &= [\psi(v)] \\
f(P) &= g(P).
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.3. *Sean P_1, P_2, P_3, P_4 puntos diferentes en una recta proyectiva $\mathbb{P}(E)$, y Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 puntos diferentes en una recta proyectiva $\mathbb{P}(V)$. Entonces, existe un isomorfismo proyectivo $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$ tal que $f(P_i) = Q_i$, para cada i si, y sólo si, $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$.*

Demostración. Supongamos que existe un isomorfismo proyectivo de $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$ tal que $f(P_i) = Q_i$. Existe un isomorfismo $\phi : E \to V$ tal que $f = \overline{\phi}$. Tenemos que $\{P_1, P_2, P_3\}$ y $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$ forman una referencia proyectiva para $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(V)$ respectivamente. Del Teorema 1.2.3, podemos considerar a $B = \{v_1, v_2\}$ y $B' = \{w_1, w_2\}$ bases de E y V respectivamente, tales que $[v_i] = P_i$ y $[w_i] = Q_i$ para cada i, y $[v_1+v_2] = P_3$ y $[w_1+w_2] = Q_3$. Tenemos que $f(P_1) = Q_1$, esto es, $f([v_1]) = [w_1]$, así, $[\phi(v_1)] = [w_1]$, por tanto, existe un escalar no nulo λ tal que $\phi(v_1) = \lambda w_1$. De manera análoga, existe un escalar no nulo ρ tal que $\phi(v_2) = \rho w_2$. Por otro lado, tenemos que:

$$f(P_3) = P_3,$$

esto es:

$$\begin{aligned}
f([v_1 + v_2]) &= [w_1 + w_2] \\
[\phi(v_1) + \phi(v_2)] &= [w_1 + w_2].
\end{aligned}$$

Existe α escalar no nulo, tal que:

$$\phi(v_1) + \phi(v_2) = \alpha(w_1 + w_2),$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda w_1 + \rho w_2 &= \alpha(w_1 + w_1) \\
(\lambda - \alpha)w_1 + (\rho - \alpha)w_2 &= 0,
\end{aligned}$$

así, $\lambda = \rho = \alpha$. Sea v_4 y w_4 tales que $P_4 = [v_4]$ y $Q_4 = [w_4]$. Digamos $v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ y $w_4 = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2$. Entonces:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad y \quad \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

También tenemos que:

$$f(P_4) = Q_4.$$

Existe un escalar no nulo t, tal que :

$$\phi(v_4) = tw_4$$

$$\phi(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = t\gamma_1 w_1 + t\gamma_2 w_2$$

$$\beta_1 \alpha w_1 + \beta_2 \alpha w_2 = t\gamma_1 w_1 + t\gamma_2 w_2,$$

puesto que w_1 y w_2 son linealemnte independientes:

$$\beta_1 \alpha = t\gamma_1 \quad y \quad \beta_2 \alpha = t\gamma_2,$$

dividiendo estas dos ecuaciones:

$$\frac{\beta_1 \alpha}{\beta_2 \alpha} = \frac{t\gamma_1}{t\gamma_2}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$. Sean $v_1, v_2, v_4 \in E$ y $w_1, w_2, w_4 \in V$, tales que $[v_i] = P_i$, $[w_i] = Q_i$, $[v_1 + v_2] = P_3$ y $[w_1 + w_2] = Q_3$. Del Teorema 1.3.2, existe un isomorfismo $f : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(V)$, digamos $f = \overline{\phi}$, tal que, para cada $i < 4$, $f(P_i) = Q_i$. Tenemos que:

$$v_4 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad y \quad w_4 = \beta_1 w_1 + \beta w_2,$$

y, por hipótesis:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \lambda,$$

así, $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$ y $\beta_2 = \lambda\beta_1$. Como vimos antes, existe un escalar ρ tal que para $i < 4$,

$\phi(v_i) = \rho w_i$ así:

$$\begin{aligned}
\phi(v_4) &= \alpha_1 \rho w_1 + \alpha_2 \rho w_2 \\
&= \alpha_1 \rho w_1 + \lambda \alpha_1 w_2 \\
&= \frac{\alpha_1 \rho}{\beta_1}(\beta_1 w_1 + \lambda \beta_1 w_2) \\
&= \frac{\alpha_1 \rho}{\beta_1}(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) \\
&= \frac{\alpha_1 \rho}{\beta_1}(w_4).
\end{aligned}$$

De este modo $f(P_4) = Q_4$. □

A continuación definimos una clase especial de transformaciones proyectivas.

Definición 1.3.4. Sea $S = \mathbb{P}(V)$ y $H = \mathbb{P}(W)$ subespacios proyectivos de $\mathbb{P}(E)$ tales que $S \cap H = \emptyset$ y $L(S, H) = \mathbb{P}(E)$. Por la fórmula de Grassman tenemos que:

$$\dim S + \dim H - \dim \emptyset = \dim \mathbb{P}(E)$$

$$\dim S + \dim H = \dim \mathbb{P}(E) - 1.$$

Dado $P \in \mathbb{P}(E) \setminus H$, el espacio $L(H, P)$ tiene dimensión $\dim H + 1$ y así, usando la fórmula de Grassman:

$$\dim L(S, L(H, P)) = \dim S + \dim L(H, P) - \dim(S \cap L(H, P))$$

$$\dim \mathbb{P}(E) = \dim S + \dim H + 1 - \dim(S \cap L(H, P))$$

$$\dim \mathbb{P}(E) = \dim \mathbb{P}(E) - 1 + 1 - \dim(S \cap L(H, P))$$

$$\dim(S \cap L(H, P)) = 0.$$

De esta manera, $L(H, P)$ intersecta a S en exactamente un punto. La función $\pi_H : \mathbb{P}(E) \setminus H \to S$ la cual a cada P le asocia el punto de $L(H, P) \cap S$ es llamada la *proyección sobre* S *centrada en* H.

Proposición 1.3.5. *La función proyección es una transformación proyectiva.*

Demostración. Sea $\pi_H \colon \mathbb{P}(V) \setminus H \to S$ la proyección sobre S, centrada en H. Como $S \cap H = \emptyset$ y $L(S, H) = \mathbb{P}(E)$, tenemos que $V \cap W = \{0\}$ y $V + W = E$, es decir, $V \oplus W = E$.

Por lo que la transformación lineal $p_V\colon E\to V$ que a cada vector $v\in E$ le asigna el único vector $p_V(v)$, tal que $v-p_V(v)\in W$, está bien definida. Notemos que $\ker p_V=W$. De esta manera, para cada $v\in E\setminus W$, el espacio gen$\{p_V(v)\}=V\cap$ gen $(W\cup\{v\})$. En efecto, llamemos $F=V\cap$ gen $(W\cup\{v\})$, puesto que $P_V(v)\in V$ y gen $(P_V(v))\subseteq V$, adicionalmente, $P_V(v)=v-(v-P_V(v))$ y $v-P_V(v)\in W$, por lo que $P_V(v)\in$ gen $(W\cup\{v\})$ y así, $(P_V(v))\subseteq$ gen $(W\cup\{v\})$ entonces, $\operatorname{gen}(P_V(v))\subseteq F$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{gen}\{V,\operatorname{gen}(W\cup\{v\})\}) &= \dim V+\dim\operatorname{gen}(W\cup\{v\})-\dim F\\ \dim E &= \dim V+\dim W+1-\dim F\\ \dim E &= \dim E+1-\dim F\\ \dim F &= 1.\end{aligned}$$

De este modo, $\operatorname{gen}\{p_V(v)\}=V\cap\operatorname{gen}(W\cup\{v\})$ y así, $\mathbb{P}(\operatorname{gen}\{p_V(v)\})=\mathbb{P}(V)\cap L(H,[v])$, es decir, $[p_V(v)]=\pi_H([v])$. Por lo tanto, π_H es la transformación proyectiva generada por p_V. $\square$

A continuación definimos una clase especial de transformaciones que son las perspectivas.

Definición 1.3.6. Sean r y s dos rectas proyectivas en un plano proyectivo $\mathbb{P}(E)$ y sea $A=r\cap s$. Dado un punto $O\notin r\cup s$, tenemos que $L(s,O)=\mathbb{P}(E)$. La restricción de la proyección sobre s centrada en O al conjunto r es una transformación proyectiva $f:r\to s$, y es llamada *perspectiva centrada en* O*.*

Las perspectivas son útiles para demostrar la colinealidad de tres puntos, pues directamente de la definición anterior podemos ver que si f es una perspectiva centrada en O, entonces $P, f(P)$ y O son colineales.

Proposición 1.3.7. *Las perspectivas centradas en un punto resultan ser isomorfismos proyectivos.*

Demostración. Notemos que dada una perspectiva $f\colon r\to s$ centrada en O, tiene por inversa la perspectiva $g\colon s\to r$ centrada en O. $\square$

El siguiente Teorema caracteriza a las perspectivas, utilizando la imagen de un sólo punto.

Teorema 1.3.8. *Sea* r,s *líneas proyectivas diferentes de un plano proyectivo* $\mathbb{P}(E)$*, sea* $A=r\cap s$ *y* $f:r\to s$ *un isomorfismo proyectivo. Entonces,* f *es una perspectiva si, y sólo si,* $f(A)=A$*.*

Demostración. Es claro que si f es una perspectiva, entonces $f(A) = A$. Supongamos ahora que $f : r \to s$ es un isomorfismo y $f(A) = A$. Sea P_1, $P_2 \in r \setminus \{A\}$ dos puntos distintos, sea $Q_1 = f(P_1)$ y $Q_2 = f(P_2)$. Las líneas $L(P_1, Q_1)$ y $L(P_2, Q_2)$ son dos líneas diferentes, consideremos O su punto de intersección, es claro que $O \notin r \cup s$. Notemos que $\{A, P_1, P_2\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}(E)$. Si $g : r \to s$ es la perspectiva centrada en O, tenemos que $g(A) = A = f(A)$, $g(P_1) = Q_1 = f(P_1)$ y $g(P_2) = Q_2 = f(P_2)$. Así, por el Teorema 1.3.2, tenemos que $f = g$. □

1.4. Dualidad

Dado un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$, definimos su espacio vectorial dual como:

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ es una transformación lineal}\}$$

Con las operaciones $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$.

Definición 1.4.1. Dado un espacio vectorial E y su espacio proyectivo deducido $\mathbb{P}(E)$, definimos su espacio *proyectivo dual* $\mathbb{P}(E)^* = \mathbb{P}(E^*)$.

Teorema 1.4.2. *Si E es un espacio de dimensión finita, entonces E es isomorfo a E^*.*

Demostración. Digamos $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E. Dado $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in E$, definimos $f_i(v) = \alpha_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es fácil ver que cada $f_i \in E^*$. Sea $f \in E^*$, definimos $\beta_i = f(v_i)$, para cada i. Notemos que dado $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} \beta_1 f_1(v_i) + \beta_2 f_2(v_i) + \cdots + \beta_n f_n(v_n) &= 0 + \cdots + \beta_i \cdot 1 + \cdots + 0 \\ &= \beta_i \\ &= f(v_i), \end{aligned}$$

por tanto, $f = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_n f_n$, por lo que el conjunto $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ genera a E^*. Veamos ahora que es linealmente independiente. Sean α_i escalares tales que:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n = 0.$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}\alpha_1 f_1(v_i) + \alpha_2 f_2(v_i) + \cdots + \alpha_n f_n(v_i) &= 0\\ 0 + \cdots + \alpha_i \cdot 1 + \cdots + 0 &= 0\\ \alpha_i &= 0,\end{aligned}$$

así, $\dim E = \dim E^*$. $\square$

Definición 1.4.3. Sea E un espacio vectorial y F subespacio, definimos el *espacio nulo asociado a* F, como:

$$F^0 = \{f \in E^* \mid \forall v \in F\ ,\ f(v) = 0\}.$$

Podemos ver que F^0 es subespacio de E^*. Dualmente, si F es un subespacio de E^* definimos el espacio nulo asociado a F, como:

$$F^0 = \{v \in E : \forall f \in F, f(v) = 0\}.$$

Es claro que F^0 es subespacio de E.

Teorema 1.4.4. *Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, y F subespacio, entonces:*

$$\dim F + \dim F^0 = \dim E.$$

Demostración. Digamos $\dim F = p$. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ una base para F, y extendamosla a una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, \ldots, v_n\}$ para E. Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ la base obtenida para E^*, en la demostración del Teorema 1.4.2. Sea $f \in E^*$, tenemos que:

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n.$$

Para que $f \in F^0$ es necesario y suficiente que $f(v_i) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, así:

$$\begin{aligned} f(v_i) &= 0\\ \alpha_1 f_1(v_i) + \alpha_2 f_2(v_i) + \cdots + \alpha_n f_n(v_i) &= 0\\ \alpha_i f_i(v_i) &= 0\\ \alpha_i &= 0\end{aligned}$$

Y por tanto $f = \alpha_{p+1} f_{p+1} + \cdots + \alpha_n f_n$. De este modo, $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ es una base para F^0. $\square$

Teorema 1.4.5. *Sea V subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita E. Entonces $(V^0)^0 = V$.*

Demostración. Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_m, \dots, v_n\}$ una base para E, tal que $\{v_1, \dots, v_m\}$ es una base para V. Tomemos $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ la base inducida en E^*, como vimos en el teorema anterior, $\{f_{m+1}, \dots, f_n\}$ forma una base para V^0. De este modo, sea $v \in (V^0)^0$, entonces $f_i(v) = 0$, para cada $i \in \{m+1, m+1, \dots, n\}$ y así, v tiene la forma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + 0v_{m+1} + \cdots + 0v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

Y así, $v \in V$ y, por tanto, $(V^0)^0 \subseteq V$. Por otro lado, directo de la definición, $V \subseteq (V^0)^0$. Obtenemos $(V^0)^0 = V$. $\square$

Con lo que hemos visto podemos observar que si $H = \mathbb{P}(F) \subseteq \mathbb{P}(E)$ es un hiperplano, entonces $\mathbb{P}(F^0)$ tiene dimensión 0. Si $f \in E^*$ es tal que $[f] = \mathbb{P}(F^0)$, entonces:

$$\mathbb{P}(F) = \{[v] \mid f(v) = 0\}.$$

De manera recíproca si tomamos una $g \in E^*$, esta define el hiperplano:

$$H = \{[v] \mid g(v) = 0\}.$$

Teorema 1.4.6. *Sea $\mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n, entonces existe un biyección entre el conjunto de subespacios de dimensión k de $\mathbb{P}(E)$ y el conjunto de subespacios de dimensión $n-k-1$ de $\mathbb{P}(E)^*$.*

Demostración. Consideremos la función δ que va de los subespacios de dimensión k de $\mathbb{P}(E)$ a los subespacios de dimensión $n-k-1$ de $\mathbb{P}(E)^*$, dada por $\delta(\mathbb{P}(V)) = \mathbb{P}(V^0)$. Del Teorema 1.4.4, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{P}(V) + \dim \mathbb{P}(V^0) &= \dim V - 1 + \dim V^0 - 1 \\
\dim \mathbb{P}(V) + \dim \mathbb{P}(V^0) &= \dim E - 1 - 1 \\
\dim \mathbb{P}(V) + \dim \mathbb{P}(V^0) &= \dim \mathbb{P}(E) - 1 \\
\dim \mathbb{P}(V^0) &= n - \dim \mathbb{P}(V) - 1,
\end{aligned}$$

por lo que la función δ está bien definida. Del Teorema 1.4.5, δ es una biyección. $\square$

Notemos que la función anterior a cada hiperplano le asocia un punto del espacio dual, por lo que existe una biyección entre el conjunto de hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$ y $\mathbb{P}(E)^*$. Esta biyección es llamada *biyección canónica dual*. Con esto, podemos trabajar conjuntos de hiperplanos, como conjuntos proyectivos, como lo haremos en la Definición 1.4.9. A continuación veremos otras propiedades de esta función δ, y enunciaremos el principio de dualidad, una propiedad fundamental en la geometría proyectiva.

Proposición 1.4.7. *Sean S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{P}(E)$. Entonces:*

I) $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$.

II) $\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$.

III) *Si $S_1 \subseteq S_2$, entonces $\delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$.*

Demostración. Digamos $S_1 = \mathbb{P}(V_1)$ y $S_2 = \mathbb{P}(V_2)$, tenemos que $S_1 \cap S_2 = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2)$. Tomemos que $\dim V_1 \cap V_2 = n_1$, $\dim V_1 = n_2$, $\dim V_2 = n_3$ y $\dim E = m$. Sea $\{v_1, \ldots, v_p\}$ una base para $V_1 \cap V_2$, esta base la podemos extender a $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{p+1} \ldots, v_{n_1}\}$ una base para V_1, y a $\{v_1, v_2, \ldots, v_p, v_{n_1+1} \ldots, v_{n_1+n_2}\}$ una base para V_2. Es evidente que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1+n_2}\}$ es linealmente independiente, por lo que lo podemos extender a una base $\{v_1, \ldots, v_p, \ldots, v_{n_1}, \ldots, v_{n_1+n_2}, \ldots, v_m\}$ de E. Sea $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ la base inducida en E^*. Del Teorema 1.4.4 tenemos que:

$$\begin{aligned}
(V_1 \cap V_2)^0 &= \operatorname{gen}\{f_{p+1}, \ldots, f_{n_1}, \ldots, f_{n_1+n_2}, \ldots, f_m\} \\
V_1^0 &= \operatorname{gen}\{f_{n_1+1}, \ldots, f_{n_1+n_2}, \ldots, f_m\} \\
V_2^0 &= \operatorname{gen}\{f_{p+1}, \ldots, f_{n_1}, f_{n_1+n_2+1}, \ldots, f_m\},
\end{aligned}$$

de lo cual obtenemos que $(V_1 \cap V_2)^0 = \operatorname{gen}\{V_1^0, V_2^0\}$ y así, $\delta(S_1 \cap S_2) = L(\delta(S_1), \delta(S_2))$. Por otro lado, también tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{gen}\{V_1, V_2\})^0 &= \operatorname{gen}\{f_{n_1}, f_{n_1+n_2+1}, \ldots, f_m\} \\
V_1^0 \cap V_2^0 &= \operatorname{gen}(\{f_{n_1+1}, \ldots, f_{n_1+n_2}, \ldots, f_m\} \cap \{f_{p+1}, \ldots, f_{n_1}, f_{n_1+n_2+1}, \ldots, f_m\}) \\
&= \operatorname{gen}\{f_{n_1}, f_{n_1+n_2+1}, \ldots, f_m\},
\end{aligned}$$

de este modo, $(\operatorname{gen}\{V_1, V_2\})^0 = V_1^0 \cap V_2^0$ y así, $\delta(L(S_1, S_2)) = \delta(S_1) \cap \delta(S_2)$.

Ahora supongamos que $S_1 \subseteq S_2$. Entonces, una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n_1}\}$ de V_1 puede ser extendida a una base $\{w_1, w_2, \ldots, w_{n_1}, \ldots, w_{n_2}\}$ de V_2, y esta, a una base

$\{w_1, w_2, \ldots, w_{n_1}, \ldots, w_{n_2}, \ldots, w_m\}$ de E. Con esto tenemos que:

$$V_1^0 = \text{gen}\{w_{n_1+1}, \ldots, w_{n_2}, w_{n_2+1}, \ldots, w_m\}$$
$$V_2^0 = \text{gen}\{w_{n_2+1}, \ldots, w_m l\},$$

de este modo, es claro que $V_2^0 \subseteq V_1^0$ y así, $\delta(S_2) \subseteq \delta(S_1)$. $\square$

Como hemos visto, el espacio dual $\mathbb{P}(E)^*$ es isomorfo a $\mathbb{P}(E)$ y la función δ transforma subespacios de dimensión k de $\mathbb{P}(E)$ en subespacios de dimensión dual $n - k - 1$ de $\mathbb{P}(E)^*$. Sumando a esto las propiedades obtenidas en la proposición anterior, podemos enunciar el principio de dualidad:

(Principio de dualidad). Sea $\mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Dada $\mathcal{P}$ una afirmación sobre subespacios de $\mathbb{P}(E)$, sus intersecciones, sus uniones y sus dimensiones. Denotamos $\mathcal{P}^*$ la afirmación dual obtenida cambiando en $\mathcal{P}$ las palabras "intersección, espacio generado, contenido, contiene, dimensión" por "espacio generado, intersección, contiene, contenido, dimensión dual" respectivamente (la dimensión dual es $n - k - 1$ si la dimensión es k). Entonces, $\mathcal{P}$ es verdadera si, y sólo si, $\mathcal{P}^*$ es verdadera.

Un ejemplo que permite evidenciar el uso del Principio de dualidad es mediante la interpretación de 3 puntos colineales. Si una afirmación $\mathcal{P}$ involucra la prueba de 3 puntos colineales, entonces, al cambiar el lenguaje de espacio generado y contiene, por intersección y contenido, la afirmación $\mathcal{P}^*$ implica la prueba de un punto contenido en 3 rectas, es decir, que las 3 rectas se intersectan en un mismo punto. Podemos notar el uso de esta afirmación en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4.8. En un triángulo escaleno ABC, las rectas tangentes al circuncírculo por A, B y C cortan a BC, AC y AB respectivamente en L, M y N. Demostrar que L, M y N son colineales.

Demostración. Para hacer uso del Principio de dualidad para resolver este problema, debemos resaltar que, en la geometría euclidiana, el espacio dual a la circunferencia $\mathcal{S}$ del triángulo ABC en $\mathcal{P}$ es una circunferencia $\mathcal{S}^*$ en $\mathcal{P}^*$, una recta tangente a $\mathcal{S}$ en $\mathcal{P}$ tiene como dual un punto correspondiente en $\mathcal{P}^*$ que pertenece a $\mathcal{S}^*$, y el dual de un punto que pertenece a $\mathcal{S}$ en $\mathcal{P}$ corresponde a una recta tangente a $\mathcal{S}^*$ en $\mathcal{P}^*$.

Con base en esto, podemos hacer uso del Principio de dualidad para resolver el problema propuesto, de la siguiente forma:

Llamemos d, e y f a las rectas BC, AC y AB respectivamente y sean u, v y w las rectas tangentes al circuncírculo $\mathcal{S}$ del triángulo ABC por A, B y C respectivamente.

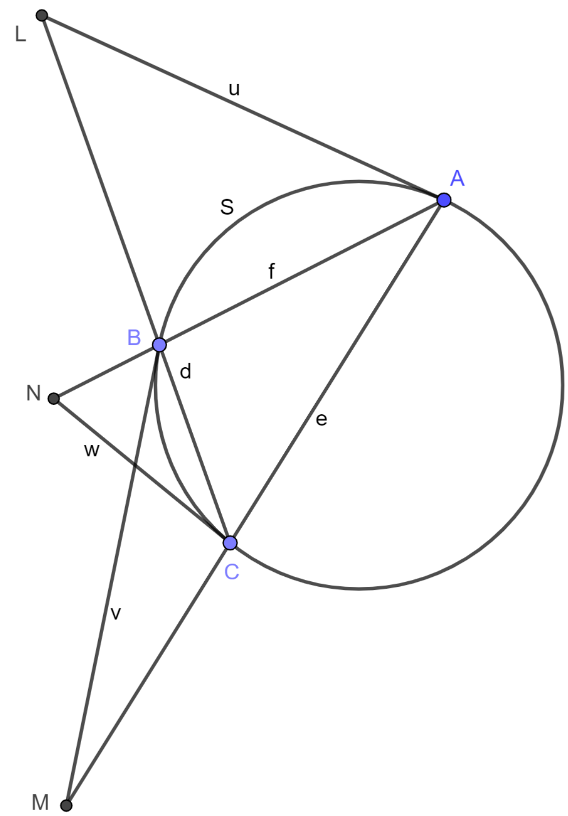

Figura 1.1: Construcción ejemplo

Aplicando el Principio de dualidad, el círculo $\mathcal{S}$ se transforma en otro círculo $\mathcal{S}^*$. Los puntos A, B y C, que pertenecen a $\mathcal{S}$, se transforman en las rectas a, b y c tangentes a $\mathcal{S}^*$, y las rectas u, v y w, tangentes a $\mathcal{S}$ se transforman en los puntos U, V y W sobre $\mathcal{S}^*$. La recta d, que unía los puntos B y C se transforma en el punto D de corte de las rectas b y c, de la misma forma se define $E = a \cap c$ y $F = a \cap b$. Finalmente, el punto L, de corte de las rectas d y u, se transforma en la recta l que une los puntos D y U, de la misma forma se definen las rectas $m = EV$ y $n = FW$.

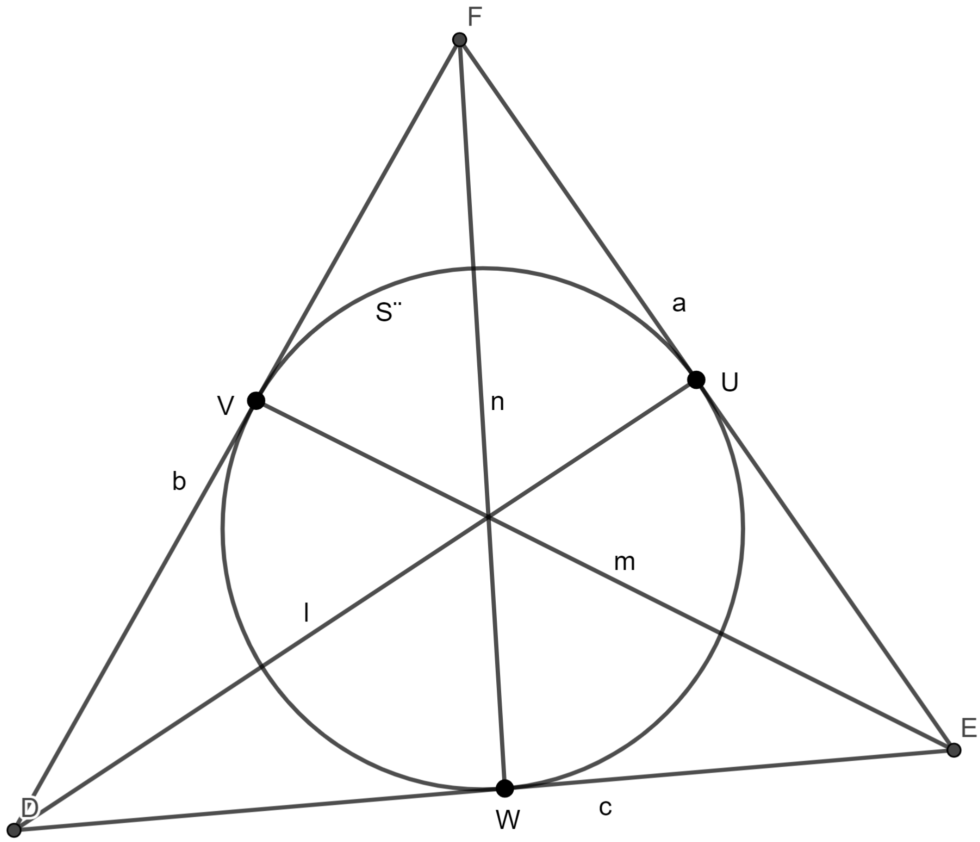

Figura 1.2: Construcción dual

Entonces, para demostrar la afirmación de la colinealidad, es equivalente a demostrar la afirmación de concurrencia en el espacio dual, es decir, basta con demostrar que l, m y n concurren.

Como se puede apreciar en la figura, las rectas l, m y n corresponden a las cevianas que van de cada vértice del triángulo DEF al punto del lado opuesto del incírculo $\mathcal{S}^*$, las cuales es conocido que concurren en cualquier triángulo. Con esto queda terminada la demostración, ya que se consiguió la prueba en el espacio dual. $\square$

Definición 1.4.9. Dado un espacio $\mathbb{P}(E)$ y A un conjunto de hiperplanos de $\mathbb{P}(E)$, decimos que A es un *haz de hiperplanos*, si $\delta(A)$ es un subespacio proyectivo de $\mathbb{P}(E)^*$ y

$\dim \delta(A) = 1$.

Definición 1.4.10. Dado un espacio proyectivo $\mathbb{P}(E)$, y H un subespacio, con $\dim(H) < \dim \mathbb{P}(E)$, definimos el conjunto $\mathcal{F}_H$ de todos los hiperplanos que contienen a H.

Teorema 1.4.11. *Sea $\mathbb{P}(E)$ un espacio proyectivo, y $H = \mathbb{P}(F)$ un subespacio proyectivo. Entonces $\delta(\mathcal{F}_H) = \mathbb{P}(F^0)$. Además:*

$$\dim H + \dim \mathcal{F}_H = \dim \mathbb{P}(E) - 1.$$

Demostración. Sean $K \in \mathcal{F}_H$ y f un funcional asociado a K. Como $H \subseteq K$, entonces, para todo $v \in F$, $f(v) = 0$ y así, $\delta(K) \in \mathbb{P}(F^0)$. De este modo:

$$\delta(\mathcal{F}_H) \subseteq \mathbb{P}(F^0).$$

Recíprocamente, sea $h \in \mathbb{P}(F^0)$, con $h = [f]$, y K el hiperplano, tal que $\delta(K) = h$. Sea $v \in F$, como $f \in F^0$, tenemos que $f(v) = 0$ y así, $[v] \in K$. De este modo, $\mathbb{P}(F) \subseteq K$, por lo que, $K \in \mathcal{F}_H$, entonces $h \in \delta(\mathcal{F}_H)$. Así, $\mathbb{P}(F^0) \subseteq \delta(\mathcal{F}_H)$. Concluimos que:

$$\delta(\mathcal{F}_H) = \mathbb{P}(F^0).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\dim H + \dim \mathcal{F}_H &= \dim \mathbb{P}(F) + \dim \delta(\mathcal{F}_H) \\
&= \dim \mathbb{P}(F) + \dim \mathbb{P}(F^0) \\
&= \dim F - 1 + \dim F^0 - 1 \\
&= \dim F + \dim F^0 - 1 - 1 \\
&= \dim E - 1 - 1 \\
&= \dim \mathbb{P}(E) - 1.
\end{aligned}$$

□

Como corolario del teorema anterior tenemos:

Corolario 1.4.12. *Dado un punto en un plano proyectivo, entonces el conjunto de rectas proyectivas que pasan por el punto forma un haz.*

Demostración. En este caso, $\dim \mathbb{P}(E) = 2$, y los hiperplanos son rectas. Si tomamos H un punto, entonces $\dim H = 0$ y así:

$$\dim H + \dim \mathcal{F}_H = \dim \mathbb{P}(E) - 1$$
$$\dim \mathcal{F}_H = 2 - 1 = 1.$$

□

Si tenemos cuatro hiperplanos contenidos en un haz, entonces sus puntos correspondientes en el espacio dual son colineales, y, por tanto, podemos computar la razón doble de estos cuatro puntos. De este modo, definimos la razón doble de cuatro hiperplanos.

Definición 1.4.13. Dados $H_1, H_2, H_3, H_4 \subseteq \mathbb{P}(E)$ hiperplanos en un mismo haz, tales que H_1, H_2 y H_3 son diferentes, definimos su razón doble como la razón de sus puntos correspondientes en $\mathbb{P}(E)^*$, es decir:

$$\beta(H_1, H_2, H_3, H_4) = \beta(\delta(H_1), \delta(H_2), \delta(H_3), \delta(H_4)).$$

Teorema 1.4.14. *Sean $H_1, H_2, H_3, H_4 \subseteq \mathbb{P}(E)$ hiperplanos en un haz $\mathcal{F}$, tales que H_1, H_2 y H_3 son diferentes. D es una recta que corta a los hiperplanos del haz en un único punto, y tal que si $i \neq j$, entonces $D \cap H_i \neq D \cap H_j$. Entonces:*

$$\beta(H_1, H_2, H_3, H_4) = \beta(D \cap H_1, D \cap H_2, D \cap H_3, D \cap H_4).$$

Demostración. Digamos $H_i \cap D = P_i$, $H_i = \pi(h_i)$ y $P_i = \pi(p_i)$ para cada i. Existen funcionales $f_1, f_2 \in E^*$, tales que las ecuaciones $f_1(v) = 0$ y $f_2(v) = 0$ son ecuaciones para los hiperplanos h_1 y h_2 respectivamente. Notemos entonces que dado $H \in \mathcal{F}$, con $H = \pi(h)$, entonces existe escalares λ y μ, tales que h tiene por ecuación:

$$\lambda f_1(v) + \mu f_2(v) = 0.$$

De este modo, cada elemento de $\mathcal{F}$ está únicamente determinado por una pareja (λ, μ). De manera análoga, cada punto $P \in D$, con $P = \pi(p)$, está únicamente determinado por una pareja (α_1, α_2), donde $p = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Si $P \in D$ está determinado por la pareja (α_1, α_2) y H está determinado por la pareja

(λ, μ), entonces $P \in H$, si y sólo si:

$$\lambda f_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \mu f_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0$$

$$\lambda \alpha_1 f_1(v_1) + \lambda \alpha_2 f_1(v_2) + \mu \alpha_1 f_2(v_1) + \mu \alpha_2 f_2(v_2) = 0.$$

Tenemos que $f_1(v_1) = f_2(v_2) = 0$, por lo que la ecuación se transforma en:

$$\lambda \alpha_2 f_1(v_2) + \mu \alpha_1 f_2(v_1) = 0.$$

Una solución de la ecuación es $\lambda = \alpha_1 f_2(v_1)$ y $\mu = -\alpha_2 f_1(v_2)$. De este modo, podemos definir la función:

$$\begin{aligned} T\colon D &\longrightarrow \delta(\mathcal{F}) \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\mapsto (\alpha_1 f_2(v_1), -\alpha_2 f_1(v_2)). \end{aligned}$$

Es fácil ver que este es un isomorfismo proyectivo, y, de la construcción, tenemos que si tomo $P \in D$, entonces la ecuación $T(D) = 0$ determina un hiperplano al cual pertenece D. De este modo, tenemos que $T(P_i) = H_i$, para cada i y del Teorema 1.3.3, obtenemos que

$$\beta(H_1, H_2, H_3, H_4) = \beta(P_1, P_2, P_3, P_4).$$

$\square$

Como corolario del anterior teorema, tenemos:

Corolario 1.4.15. *Sea P un punto en un plano proyectivo $\mathbb{P}(E)$, t una recta que no pasa por P, y L_1, L_2, L_3, L_4 rectas diferentes que pasan por P e intersectan a t en $l1, l2, l3$ y $l4$, respectivamente. Entonces:*

$$\beta(L_1, L_2, L_3, L_4) = \beta(l1, l2, l3, l4).$$

1.5. Espacios, transformaciones y coordenadas homogéneas

Como vimos antes, los hiperplanos pueden ser considerados como el espacio solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Las coordenadas homogéneas nos permiten dar una representación analítica de los subespacios proyectivos y las transformaciones proyectivas. A continuación ejemplificamos esto:

Ejemplo 1.5.1. Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, consideremos la referencia proyectiva:

$$\mathcal{R} = \{[(1,0,0)], [(0,1,0,)], [(0,0,1)], [(1,1,1)]\}.$$

Si consideramos los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (0,0,1)$ y $R = (1,1,1)$, entonces:

$$L(P,Q) = \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_2 = 0\};$$

$$L(P,R) = \{(x_0, x_1, x_2) \mid x_2 - x_1 = 0\}.$$

Ejemplo 1.5.2. Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, consideremos la referencia proyectiva:

$$\mathcal{R} = \{[(1,0,0)], [(0,1,0,)], [(0,0,1)], [(1,1,1)]\}$$

Podemos considerar la transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x_0, x_1, x_2) = 2x_0 - x_1 + x_2.$$

Su hiperplano asociado es:

$$H = \{(x_0, x_1, x_2) \mid 2x_0 - x_1 + x_2 = 0\}$$

Ejemplo 1.5.3. Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, consideremos la referencia proyectiva:

$$\mathcal{R} = \{[(1,0,0)], [(0,1,0,)], [(0,0,1)], [(1,1,1)]\}.$$

Consideremos la transformación lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Dada por:

$$\phi(x_0, x_1, x_2) = (2x_0, x_1 - x_2, x_0 + x_1 + x_2),$$

entonces la función $f = \overline{\phi} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dada por coordenadas homogéneas, sería:

$$f([x_0, x_1, x_2]) = [2x_0, x_1 - x_2, x_0 + x_1 + x_2].$$

Ejemplo 1.5.4. Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, consideremos la referencia proyectiva:

$$\mathcal{R} = \{[(1,0,0)], [(0,1,0,)], [(0,0,1)], [(1,1,1)]\}.$$

Sea $P = [1, 0, 1]$ y $\mathcal{F}_P$ el haz de todas las rectas que pasan por P. Como vimos, cada recta que pasa por P está determinada por una ecuación lineal. Sea $L \in \mathcal{F}_P$ y $f(x_0, x_1, x_2) = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$ su ecuación asociada. Entonces:

$$f(1, 0, 1) = 0$$

$$a_0 + a_2 = 0.$$

De este modo:

$\mathcal{F}_P = \{$líneas determinadas por una ecuación de la forma $a_0x_0 + a_2x_2 = 0$, donde $a_0 + a_2 = 0\}$.

2. Cónicas y Teorema de Pascal

En este capítulo vemos la inclusión de las cónicas en la geometría proyectiva y hacemos la demostración del Teorema de Pascal, como de su recíproco, el Teorema de Braikenridge-Maclaurin; este capítulo lo hicimos en base a [3], [4] y [5].

2.1. Cónicas

Definición 2.1.1. Dado $\mathbb{K}$ cuerpo, recordemos que una *forma cuadrática* sobre $\mathbb{K}^n$ es una función $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, dada por

$$\varphi(X) = X^\top AX,$$

donde $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz simétrica y los elementos de $\mathbb{K}^n$ se representan por vectores columnas. Es fácil ver que si $X = (x_i)$ y $A = (a_{ij})$, entonces:

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Notemos que varias matrices pueden determinar la misma forma cuadrática. También, podemos ver que, dada una forma cuadrática, le podemos asignar una matriz simétrica. En adelante, la matriz asociada a una forma cuadrática la consideraremos como una matriz simétrica.
Recordemos que los puntos pertenecientes a un espacio proyectivo son manejados como vectores, obtenidos de las coordenadas homogéneas respecto a una referencia proyectiva $\mathcal{R}$.

Definición 2.1.2. Sea φ una forma cuadrática no nula sobre $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{P}(E)$ un plano proyectivo sobre $\mathbb{K}$. Definimos la cónica $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(E)$ asociada a φ como:

$$\mathcal{C} = \{P \in \mathbb{P}(E) \mid \varphi\left([P]_\mathcal{R}\right) = 0\}.$$

---

[3] FRIGERIO R. y PARDINI R FORTUNA E. *Projective Geometry: Solved problems and Theory Review*. Springer, 2016.

[4] Frank AYRE. *Theory and problems of projective geometry*. Schaum's Outline Series. Schaum Publishing Company, 1967.

[5] Coxeter H.S.M. *Projective Geometry. Second edition*. Springer-Verlag, 2003.

En ocasiones, una cónica puede coincidir con la unión de dos líneas rectas. Por ejemplo, si consideramos la cónica dada por la ecuación $F(P) = (x_0 + x_1 + x_2)(x_0 + x_1 - x_2)$, esta cónica consiste en la unión de las líneas determinadas por las ecuaciones $x_0+x_1+x_2 = 0$ y $x_0+x_1-x_2 = 0$, respectivamente. A este tipo de cónicas se les llama *cónicas degeneradas*.

Sea $\mathcal{C}$ una cónica con matriz asociada simétrica A y P un punto en ella, y Q un punto cualquiera. Consideremos la recta $L(P, Q)$, los puntos que pertenecen a la recta tienen la forma $\alpha P + \beta Q$. De este modo, para hallar la intersección de la recta con la cónica hay que solucionar la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(\alpha P + \beta Q) \\
&= (\alpha P + \beta Q)^\top A(\alpha P + \beta Q) \\
&= (\alpha P + \beta Q)^\top (\alpha AP + \beta AQ) \\
&= \alpha^2 P^\top AP + \beta\alpha Q^\top AP + \alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ \\
&= \alpha^2 P^\top AP + 2\alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ \\
&= 2\alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ.
\end{aligned}$$

Puesto que $P \in \mathcal{C}$, obtenemos:

$$2\alpha\beta P^\top AQ + \beta^2 Q^\top AQ = 0,$$

obteniendo una solución de la forma $(\alpha, 0)$, correspondiente al punto P. Ahora, si $\beta \neq 0$, entonces:

$$2\alpha P^\top AQ + \beta Q^\top AQ = 0,$$

y tenemos los siguientes casos para la otra solución:

I) Si $\varphi(Q) = 0$ y $P^\top AQ \neq 0$, entonces la otra solución es $(0, \beta)$, y así $L(P, Q) \cap \mathcal{C} = \{P, Q\}$.

II) Si $\varphi(Q) \neq 0$ y $P^\top AQ \neq 0$, entonces existe un punto $R \neq P$, tal que $L(P, Q) \cap \mathcal{C} = \{P, R\}$.

III) Si $\varphi(Q) = 0$ y $P^\top AQ = 0$, entonces $L(P, Q) \subseteq \mathcal{C}$.

IV) Si $\varphi(Q) \neq 0$ y $P^\top AQ = 0$, entonces $(\alpha, 0)$ es la única solución, y así, $L(P, Q) \cap \mathcal{C} = \{P\}$.

Este análisis, motiva la siguiente definición de recta tangente a una cónica:

Definición 2.1.3. Dada $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(E)$ una cónica con matriz simétrica asociada A y P un punto de $\mathcal{C}$. Definimos la recta t_P tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P, como:

$$t_P = \{Q \in \mathbb{P}(E) \mid P^\top AQ = 0\}.$$

Nuestro objetivo ahora es generalizar la razón doble para puntos en cónicas, para esto, utilizaremos el siguiente lema:

Lema 2.1.4. *Suponga que A y B son dos puntos diferentes de una cónica no degenerada $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Denotemos por t_A y t_b las líneas que son tangentes a $\mathcal{C}$ en A y B, respectivamente. Sean $\mathcal{F}_A$ y $\mathcal{F}_B$ los haces de líneas con centros en A y B, respectivamente. La función $\phi : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ definida por:*

I) $\phi(t_A) = L(A, B)$*;*

II) $\phi(L(A, B)) = t_B$*;*

III) $\phi(r) = L(B, Q)$ *si* $r \neq t_A$*,* $r \neq L(A, B)$*, donde* Q *es el punto de intersección entre* r *y* $\mathcal{C}$ *diferente de* A*.*

Es un isomorfismo proyectivo.

Demostración. Del Teorema 1.3.2, la función ϕ, está bien definida. Dado que la cónica es no-degenerada, las líneas t_A y t_B tienen un punto de intersección C que no pertenece a la cónica. Si R es un punto de $\mathcal{C}$ tal que $R \notin t_A \cup t_B \cup L(A, B)$, tenemos que $\{A, B, C, R\}$ es una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. En el sistema de coordenadas homogéneas inducido, tenemos que $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ y $R = (1, 1, 1)$, y las líneas t_A y t_B tienen ecuación $x_1 = 0$ y $x_0 = 0$ respectivamente. De este modo. Si consideremos $M = [m_{ij}]$ la matriz asociada a la cónica.Puesto que $A, B, R \in \mathcal{C}$, tenemos que:

$$(1 \quad 0 \quad 0)M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ entonces } m_{11} = 0;$$

$$(0 \quad 1 \quad 0)M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \text{ entonces } m_{22} = 0;$$

$(1 \quad 1 \quad 1)M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$ entonces $\displaystyle\sum_{i,j \in \{1,2,3\}} m_{ij} = 0,$ entonces $2m_{12} + 2m_{13} + 2m_{23} + m_{33} = 0.$

Ahora utilizando que las ecuaciones de t_A y t_B, obtenemos:

$$(1 \quad 0 \quad 0)M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1, \quad m_{12}x_1 + m_{13}x_2 = 0, \quad m_{13} = 0;$$

$$(0 \quad 1 \quad 0)M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_0, \quad m_{21}x_0 + m_{23}x_2 = 0, \quad m_{23} = 0.$$

Así, obtenemos que la matriz tiene la forma:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{pmatrix}.$$

De este modo, su ecuación es $x_2^2 - x_0x_1 = 0$. $\mathcal{F}_A$ Podemos considerar las líneas con ecuación $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_1 + x_2 = 0$, estas forman una referencia proyectiva en $\mathcal{F}_A$ e inducen un sistema de coordenadas homogéneas. Análogamente, las líneas determinadas por las ecuaciones $x_0 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_0 + x_2 = 0$, forman un sistema de coordenadas homogéneas para $\mathcal{F}_B$.

Sea $r \in \mathcal{F}_A$, con $r \neq t_A$ y $r \neq L(A,B)$. Entonces r tiene ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ con $a_1, a_2 \neq 0$, y su coordenada es (a_1, a_2). Tenemos que $r \cap \mathcal{C} = \{A, Q\}$, donde $Q = (a_1^2, a_2^2, -a_1a_2)$. De este modo, la línea $L(B,Q)$ tiene ecuación $a_1^2x_2 + a_1a_2x_0 = 0$, como $a_1 \neq 0$, la ecuación se transforma en $a_1x_2 + a_2x_0 = 0$ y, por tanto, su coordenada es (a_2, a_1).

Consideremos la función $f : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$, dada por $f((a_1,a_2)) = (a_2,a_1)$. Como hemos visto, la función f coincide con ϕ en el conjunto $\mathcal{F}_A \setminus \{t_A, L(A,B)\}$. Además, tenemos que en el sistema de coordenadas elegidas, t_A tiene coordenadas $(1,0)$, $L(A,B)$ tiene coordenadas $(0,1)$ y t_B tiene coordenadas $(1,0)$, así:

$$f(t_A) = f((1,0)) = (0,1) = L(A,B) = \phi(t_A);$$

$$f(L(A,B)) = f((0,1)) = (1,0) = t_B = \phi(L(A,B)).$$

De este modo, f y ϕ coinciden, y claramente f es un isomorfismo. $\square$

Dados cuatro puntos diferentes P_1, P_2, P_3 y P_4, en un cónica $\mathcal{C}$. Tomemos A y B puntos de la cónica diferentes de los P_i. Con la función construida $\phi : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ en el lema anterior, tenemos que $\phi(L(A,P_i)) = L((B,P_i))$, y por tanto:

$$\beta(L(A,P_1), L(A,P_2), L(A,P_3), L(A,P_4)) = \beta(L(B,P_1), L(B,P_2), L(B,P_3), L(B,P_4)).$$

Definición 2.1.5. Sean P_1, P_2, P_3, P_4 puntos diferentes de una cónica no degenerada. Definimos la razón doble de estos cuatro puntos como:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \beta(L(A,P_1), L(A,P_2), L(A,P_3), L(A,P_4)),$$

donde A es un punto de $\mathcal{C}$ diferente de los P_i.

Con esto podemos dar la siguiente construcción de una cónica:

2.2. Definición de Steiner para una cónica

En esta sección vemos otra forma de construir una cónica, conocida como la Definición de Steiner. Esta será útil en la demostración del recíproco del Teorema de Pascal.

Lema 2.2.1. *Sean r, s dos líneas diferentes en $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ que pasan por un punto A. Sean B,C,D puntos distintos en $r \setminus \{A\}$, y B', C', D' puntos diferentes en $s \setminus \{A\}$. Entonces, $\beta(A,B,C,D) = \beta(A,B',C',D')$ si, y sólo si, las líneas $L(B,B')$, $L(C,C')$ y $L(D,D')$ se intersectan en un mismo punto.*

Demostración. Sea $O = L(B,B') \cap L(C,C')$, es evidente que $O \notin r \cup s$. Consideremos $p : r \to s$, la perspectiva centrada en O, esta mapea los puntos A, B, C a los puntos A, B', C' respectivamente. De este modo, tenemos que $\beta(A,B,C,D) = \beta(A,B',C',p(D))$. Así, $\beta(A,B,C,D) = \beta(A,B',C',D')$, si y sólo si, $p(D) = D'$, esto es, $L(D,D')$ pasa por O. $\square$

Utilizando el principio dual al lema anterior, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.2.2. *Sean A, B puntos diferentes de una línea r de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Sean r_1, r_2, r_3, líneas diferentes que pasan por A y son diferentes a r y s_1, s_2, s_3 líneas diferentes que* *pasan por B y son diferentes a r. Entonces $r_1 \cap s_1, r_2 \cap s_2, r_3 \cap s_3$ son colineales si, y sólo si, $\beta(r, r_1, r_2, r_3) = \beta(r, s_1, s_2, s_3)$.*

A continuación enunciamos y demostramos la definición de Steiner para una cónica.

Teorema 2.2.3. ***(Definición de Steiner para una cónica)*** *Sean A y B puntos en un plano proyectivo. $f : \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_B$ un isomorfismo. Entonces el conjunto:*

$$\mathcal{C}_f = \bigcup_{L \in \mathcal{F}_A} (L \cap f(L))$$

Es una cónica que pasa por A y B.

Demostración. Si f es una perspectiva, entonces del Teorema 1.3.8, $f(L(A,B)) = L(A,B)$, así, $L(A,B) \subseteq \mathcal{C}_f$. Tomemos $r_1, r_2 \in \mathcal{F}_A \setminus \{L(A,B)\}$ diferentes, notemos que $r_i \neq f(r_i)$ para cada $i \in \{1,2\}$, además, $r_1 \cap f(r_1)$ y $r_2 \cap f(r_2)$ son puntos diferentes. Sea t la línea que pasa por $r_1 \cap f(r_1)$ y $r_2 \cap f(r_2)$. Tomemos $r \in \mathcal{F}_A \setminus \{L(A,B)\}$, entonces $\beta(L(A,B), r_1, r_2, r) = \beta(L(A,B), f(r_1), f(r_2), f(r))$, y del Corolario 2.2.2, tenemos que $r \cap f(r)$ pertenece a t, de este modo, $\mathcal{C}_f \subseteq L(A,B) \cup t$. Recíprocamente, si $P \in t$, notemos que $t \neq L(A,B)$, entonces, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \notin t$. Consideremos $l = L(A,P)$, tenemos que $l \cap t = P$. Por lo que vimos $f(l)$ es una línea que pasa por B y $l \cap f(l) \in t$, por tanto, $l \cap f(l) = P$. Así, $\mathcal{C}_f = L(A,B) \cup t$, y es una cónica degenerada que pasa por A y B.

Ahora supongamos que f no es una perspectiva. Sea $l = L(A,B)$, es claro que $l = \mathcal{F}_A \cap \mathcal{F}_B$. Del Teorema 1.3.8. Tenemos que $f(l) \neq l$. Sea $C = f^{-1}(l) \cap l$. Podemos tomar un sistemas de coordenadas homogéneas tales que $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ y $C = (0,0,1)$. En estas coordenadas, $\mathcal{F}_A$ consiste de todas la rectas con ecuación $ax_1 + x_2 = 0$. $\mathcal{F}_B$ consiste de todas la rectas con ecuación $cx_0 + dx_2 = 0$. Con esto, podemos dotar a $\mathcal{F}_A$ con un sistema de coordenadas homogéneas (a,b) y a $\mathcal{F}_B$ un sistema de coordenadas (c,d). En este sistema l y $f^{-1}(l)$ tienen coordenada homogéneas $(0,1)$ y $(1,0)$ respectivamente en $\mathcal{F}_A$. Y l y $f(l)$ tiene coordenadas $(0,1)$ y $(1,0)$ en $\mathcal{F}_B$. De este modo, en estas coordenada f está representada por una matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0, \end{pmatrix}$$

donde λ es un escalar no nulo. De este modo, si $r \in \mathcal{F}_A$ está determinado por la ecuación

$ax_1 + bx_2 = 0$, entonces $f(r)$ está determinada por la ecuación $\lambda b x_0 + a x_2 = 0$. Así:

$$r \cap f(r) = (a^2, \lambda b^2, -\lambda ab).$$

Por tanto:

$$\mathcal{C}_f = \{(a^2, \lambda b^2, -\lambda ab) \mid (a, b) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})\}.$$

De este modo, si consideramos $\mathcal{C}$ la cónica, con ecuación $F(x_0, x_1, x_2) = \lambda x_0 x_1 - x_2^2 = 0$, entonces $\mathcal{C}_f \subseteq \mathcal{C}$. Recíprocamente, si $T = (y_0, y_1, y_2) \in \mathcal{C}$. Tenemos los siguientes casos:

I) Si $y_2 = 0$, entonces $T = (1, 0, 0) = A = f^{-1}(l) \cap f(f^{-1})(l) \in \mathcal{C}$. O $T = (0, 1, 0) = B = l \cap f(l) \in \mathcal{C}$.

II) Si $y_2 \neq 0$, entonces $y_0 \neq 0$. Sea $a \neq 0$, tal que $a^2 = y_0$ y $b = -\frac{y_2}{\lambda a}$. Entonces $T = (a^2, \lambda b^2, -\lambda ab) \in \mathcal{C}$.

De este modo, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_f$. Y así, $\mathcal{C}_f = \mathcal{C}$.

$\square$

2.3. Teorema de Pascal

Para dar paso al teorema de Pascal en la geometría proyectiva, primero se hará un análisis del mismo, enunciando y demostrando, en su presentación en geometría euclidiana. Con esto, se podrá comparar los resultados obtenidos en geometría euclidiana y proyectiva.

Teorema 2.3.1. ***(Pascal en geometría euclidiana)*** *Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en un círculo. Se extienden los pares de lados opuestos hasta que se intersectan en los puntos P, Q, R ($P = AF \cap CD$, $Q = AB \cap DE$, $R = BC \cap EF$), entonces estos tres puntos son colineales.*

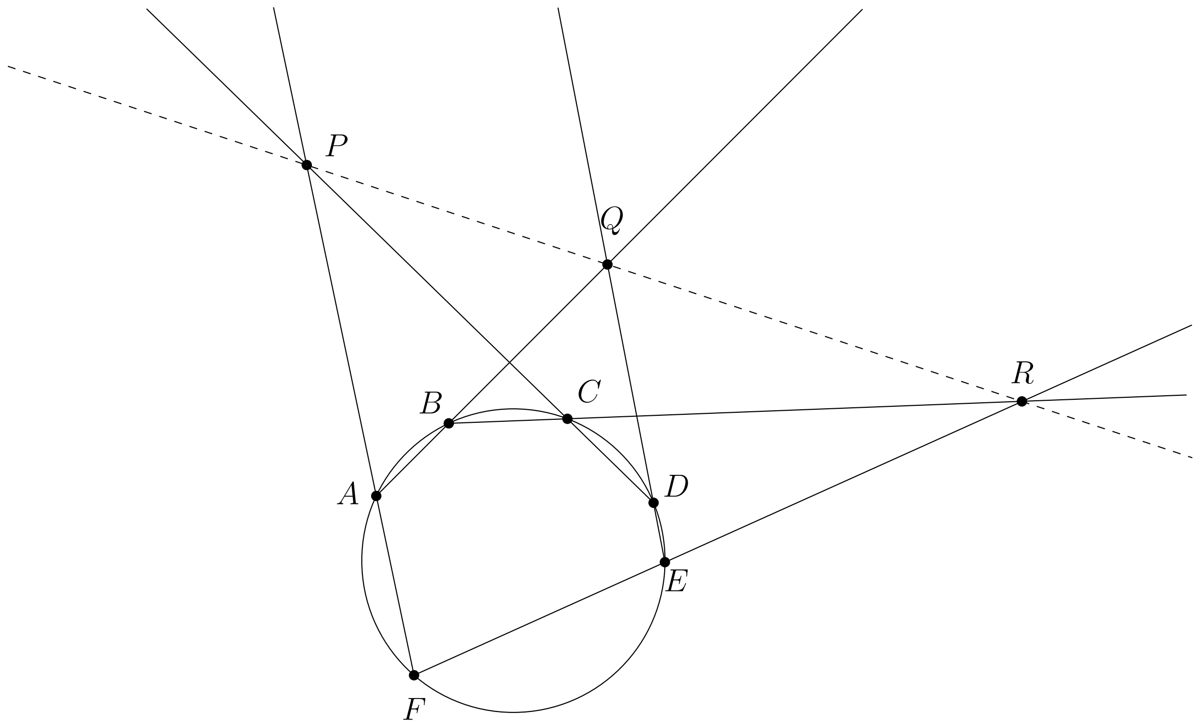

Figura 2.1: Teorema de Pascal en geometría euclidiana

Demostración. Para explicar el teorema de Pascal, se requiere del uso de dos teoremas previos, los cuales son *Potencia de punto* y *Teorema de Menelao*, que serán enunciados a continuación.

Teorema de Menelao. Sea ABC un triángulo y X, Y, Z puntos sobre las rectas AB, BC, CA respectivamente. Entonces X, Y, Z son colineales si, y sólo si se cumple que

$$\frac{AX}{XB} * \frac{BZ}{ZC} * \frac{CY}{YA} = 1.$$

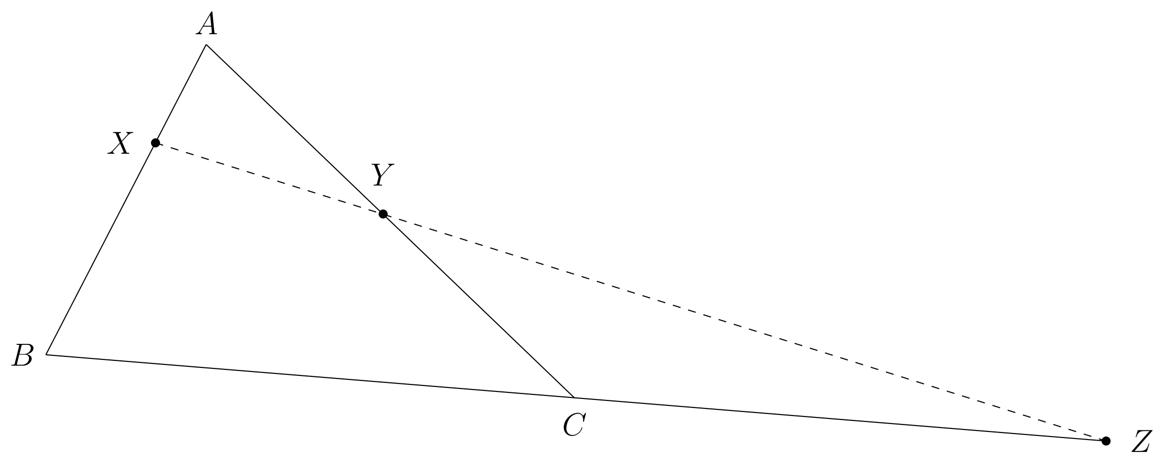

Figura 2.2: Teorema de Menelao

Potencia de punto. Sea Γ un círculo y P un punto que no este sobre la circunferencia de Γ. Una recta que pasa por P, arbitraria, corta a Γ en los puntos A y B, entonces la *potencia de punto* de P hacia Γ, definida por $PA * PB$ es constante, independientemente de la recta que se haya tomado.

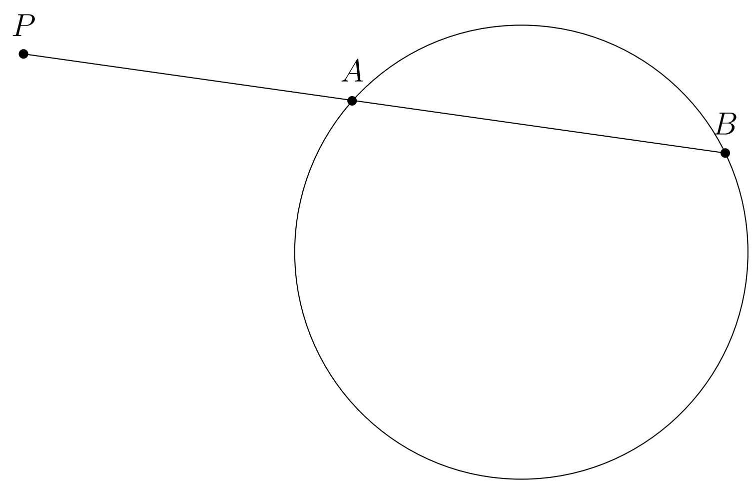

Figura 2.3: Potencia de punto

Con base en estos dos teoremas, se demuestra el teorema de Pascal en geometría euclidiana:

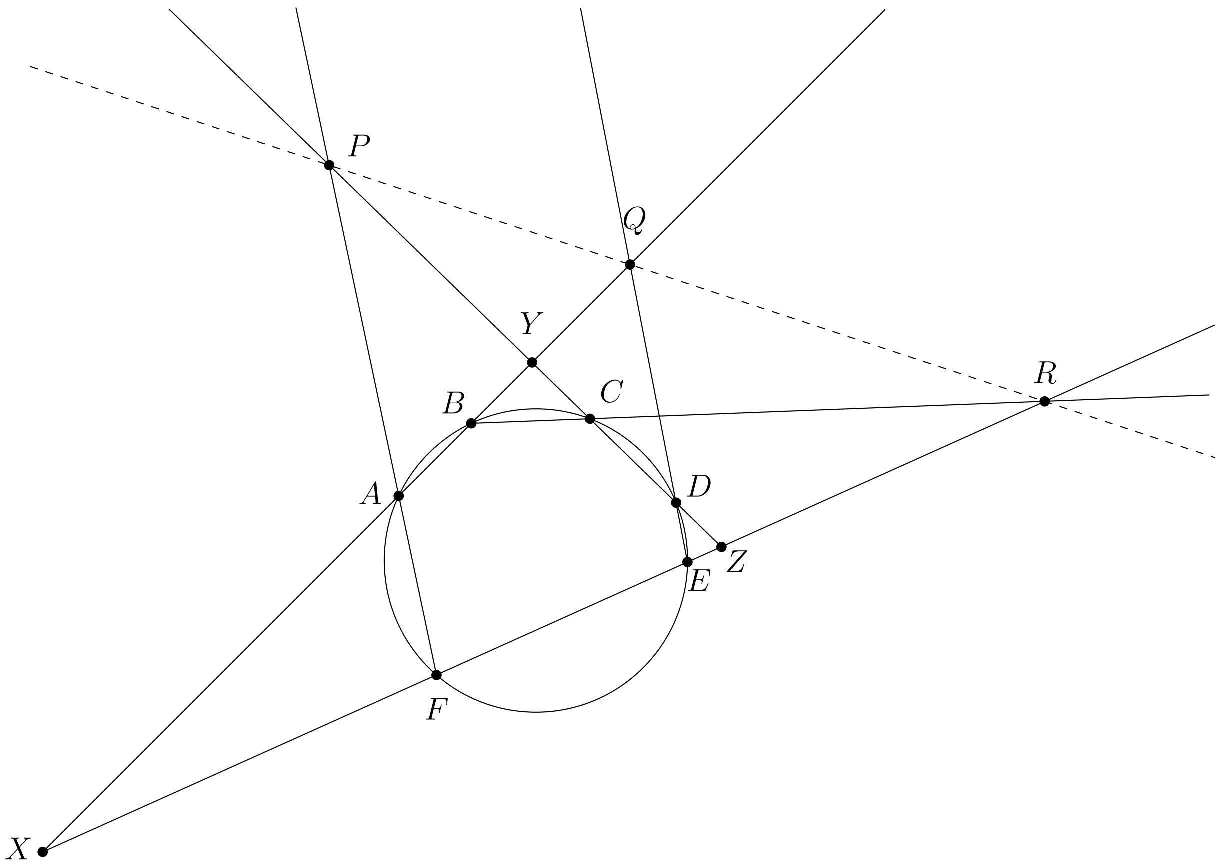

Figura 2.4: Construcción complementaria

Sean $X = AB \cap EF$, $Y = AB \cap CD$, $Z = CD \cap EF$ y M el círculo que circunscribe los puntos A, B, C, D, E, F. Por potencia de punto de:

- X a M,
$$XA * XB = XF * XE. \tag{2.1}$$

- Y a M,
$$YA * YB = YD * XE. \tag{2.2}$$

- Z a M,
$$ZD * ZC = ZF * ZE. \tag{2.3}$$

Ahora, considerando el triángulo XYZ y, por el teorema de Menelao:

- de la recta B, C, R al triángulo XYZ

$$\frac{XR}{RZ} * \frac{ZC}{CY} * \frac{YB}{BX} = 1. \tag{2.4}$$

- de la recta F, A, P al triángulo XYZ

$$\frac{XF}{FZ} * \frac{ZP}{PY} * \frac{YA}{AX} = 1. \tag{2.5}$$

- de la recta E, D, Q al triángulo XYZ

$$\frac{XE}{EZ} * \frac{ZD}{DY} * \frac{YQ}{QX} = 1. \tag{2.6}$$

Donde multiplicando $(2{,}4), (2{,}5), (2{,}6)$ obtenemos:

$$\frac{XR * ZC * YB * XF * ZP * YA * XE * ZD * YQ}{RZ * CY * BX * FZ * PY * AX * EZ * DY * QX} = 1.$$

Reagrupando, se obtiene:

$$\left(\frac{XF * XE}{XA * XB}\right) * \left(\frac{YA * YB}{YC * YD}\right) * \left(\frac{ZD * ZC}{ZF * ZE}\right) * \left(\frac{XR}{RZ} * \frac{ZP}{PY} * \frac{YQ}{QX}\right) = 1.$$

Usando $(2{,}1), (2{,}2), (2{,}3)$ se concluye:

$$\frac{XR}{RZ} * \frac{ZP}{PY} * \frac{YQ}{QX} = 1,$$

por lo tanto, como los puntos P, Q, R cumplen la condición de Menelao sobre el triángulo XYZ se concluye que P, Q, R son colineales. □

En el Teorema de Pascal existen casos particulares, que explicaremos a continuación:

- El hexágono considerado para realizar las intersecciones de las rectas que lo conforman, y así construir los tres puntos colineales, no debe estar dado en orden cíclico, por lo que es posible que los tres puntos que sean colineales, no resultan ser los cortes de los lados opuestos, como si sería si se consideraran de forma cíclica.

- Cuando el punto de corte de dos rectas no se puede construir, ya que las dos rectas son paralelas en el hexágono, este punto se considera el corte de las dos rectas paralelas como un punto en el infinito. Por esto, se tiene que: si uno de los tres pares de rectas son paralelas en el hexágono, los otros dos puntos de corte deben formar una recta paralela a estos dos lados del hexágono, para que también sean colineales con el punto en el infinito; cuando dos de los tres pares de rectas en el hexágono sean paralelas, dos de los puntos se considerarán en el infinito, por lo que el tercero también debe estar allí, de donde se deduce que el tercer par de rectas también deben ser paralelas.

- El teorema de Pascal puede hacerse en versiones degeneradas de hexágonos, en donde se aplica el teorema sobre un hexágono formado por 6 puntos sobre una circunferencia, que no sean necesariamente diferentes entre ellos. Cuando se da el caso de que uno de los lados del hexágono sea un lado expresado por dos vértices que sean el mismo punto dentro de la circunferencia, el lado de este hexágono se considera como el límite de las rectas que se obtienen cuando se toman puntos cada vez más cerca al punto dentro del hexágono, por lo que esta recta sería la recta tangente a la circunferencia, que pasa por el punto del hexágono.
  Por ejemplo, si el hexágono es $ABCDEA$ los puntos de corte que se obtienen serían $P = AA \cap CD$, $Q = AB \cap DE$, $R = BC \cap EA$ donde AA se entendería como la recta tangente a la circunferencia, en A.

A continuación enunciamos y demostramos el Teorema de Pascal en geometría proyectiva.

Teorema 2.3.2. ***(Teorema de Pascal)*** *Sea $\mathcal{C}$ una cónica no generada de $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ y $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ puntos distintos de $\mathcal{C}$. Entonces, los puntos $R_1 = L(P_3, Q_2) \cap L(P_2, Q_3)$, $R_2 = L(P_1, Q_3) \cap L(P_3, Q_1)$ y $R_3 = L(P_2, Q_1) \cap L(P_1, Q_2)$ son colineales.*

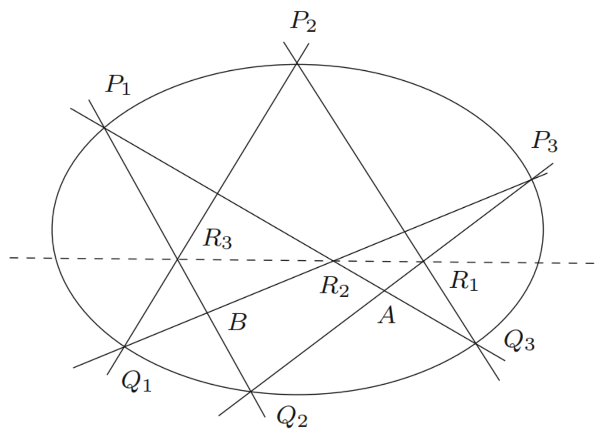

Figura 2.5: Teorema de Pascal

Demostración. Consideremos los puntos $A = L(P_1, Q_3) \cap L(P_3, Q_2)$ y $B = L(P_1, Q_2) \cap L(P_3, Q_1)$ (ver Figura 2.5), tenemos que:

$$\beta(P_3, P_2, P_1, Q_2) = \beta(L(P_3, Q_3), L(P_2, Q_3), L(P_1, Q_3), L(Q_2, Q_3))).$$

Del Corolario 1.4.15, considerando la intersección de las cuatro líneas con la recta $L(P_3, Q_2)$, obtenemos:

$$\beta(L(P_3, Q_3), L(P_2, Q_3), L(P_1, Q_3), L(Q_2, Q_3))) = \beta(P_3, R_1, A, Q_2),$$

y así:

$$\beta(P_3, P_2, P_1, Q_2) = \beta(P_3, R_1, A, Q_2). \quad (1)$$

De manera análoga, tenemos que:

$$\beta(P_3, P_2, P_1, Q_2) = \beta(L(P_3, Q_1), L(P_2, Q_1), L(P_1, Q_1), L(Q_2, Q_1))).$$

Si consideramos las intersecciones de las rectas con la línea $L(P_1, Q_2)$, tenemos:

$$\beta(L(P_3, Q_1), L(P_2, Q_1), L(P_1, Q_1), L(Q_2, Q_1))) = \beta(B, R_3, P_1, Q_2). \quad (2)$$

Por tanto:

$$\beta(P_3, P_2, P_1, Q_2) = \beta(B, R_3, P_1, Q_2). \quad (2)$$

De (1) y (2):

$$\beta(P_3, R_1, A, Q_2) = \beta(B, R_3, P_1, Q_2),$$

y así, del Teorema 1.3.3, existe un isomorfismo proyectivo $f : L(P_3, Q_2) \to L(P_1, Q_2)$ tal que

$$f(P_3) = B, \quad f(R_1) = R_3, \quad f(A) = P_1, \quad f(Q_2) = Q_2.$$

Puesto que $f(Q_2) = Q_2$, del Teorema 1.3.8, f es una perspectiva centrada en el punto $L(P_3, B) \cap L(A, P_1) = R_2$. Ahora dado que esta perspectiva transforma el punto R_1 en R_3, y está centrada en R_2, se tiene que R_1, R_2 y R_3 son colineales. □

Como se menciona anteriormente, en geometría proyectiva, el recíproco del teorema de Pascal también es cierto, y se conoce como el teorema de Braikenridge-MacLaurin.

2.4. Teorema de Braikenridge-MacLaurin

En esta sección estudiamos el recíproco del Teorema de Pascal, que es conocido como el Teorema de Braikenridge-McLaurin.

Teorema 2.4.1. ***(Teorema de Braikenridge-MacLaurin)*** *Sean P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 y Q_3 puntos diferentes en un plano proyectivo. Si los puntos $R_1 = L(P_3, Q_2) \cap L(P_2, Q_3)$, $R_2 = L(P_1, Q_3) \cap L(P_3, Q_1)$ y $R_3 = L(P_2, Q_1) \cap L(P_1, Q_2)$ son colineales, entonces P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 y Q_3 se encuentran en una misma cónica.*

Demostración. Consideremos los puntos $A = L(P_1, Q_3) \cap L(P_3, Q_2)$ y $B = L(P_1, Q_2) \cap L(P_3, Q_1)$ (ver Figura 2.5). Consideremos la perspectiva $p : L(P_1, Q_2) \to L(P_3, Q_2)$, centrada en R_2, tenemos que $p(P_1) = A$, $p(R_3) = R_1$, $p(B) = P_3$ y $p(Q_2) = Q_2$, por tanto:

$$\beta(P_1, R_3, B, Q_2) = \beta(A, R_1, P_3, Q_2).$$

Por otro lado, del Corolario 1.4.15, tenemos que:

$$\beta(L(Q_1, P_1), L(Q_1, P_2), L(Q_1, P_3), L(Q_1, Q_1)) = \beta(P_1, R_3, B, Q_2)$$

y

$$\beta(L(Q_3, P_1), L(Q_3, P_2), L(Q_3, P_3), L(Q_3, Q_1)) = \beta(A, R_1, P_3, Q_2),$$

entonces:

$$\beta(L(Q_1, P_1), L(Q_1, P_2), L(Q_1, P_3), L(Q_1, Q_2)) = \beta(L(Q_3, P_1), L(Q_3, P_2), L(Q_3, P_3), L(Q_3, Q_2)).$$

Utilizando el Teorema 1.3.3, obtenemos un isomorfismo $f : \mathcal{F}_{Q_1} \to \mathcal{F}_{Q_3}$, del Teorema 2.2.3, $\mathcal{C}_f$ es una cónica que pasa por Q_1 y Q_3. Notemos además que:

$$\begin{aligned}
L(Q_1, P_1) \cap f(L(Q_1, P_1)) = L(Q_1, P_1) \cap (Q_3, P_1) = \{P_1\};\\
L(Q_1, P_2) \cap f(L(Q_1, P_2)) = L(Q_1, P_2) \cap (Q_3, P_2) = \{P_2\};\\
L(Q_1, P_3) \cap f(L(Q_1, P_3)) = L(Q_1, P_3) \cap (Q_3, P_3) = \{P_3\};\\
L(Q_1, Q_2) \cap f(L(Q_1, Q_2)) = L(Q_1, Q_2) \cap (Q_3, Q_2) = \{Q_2\}.
\end{aligned}$$

De este modo, $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{C}_f$. □

El teorema de Pascal en geometría euclidiana, a diferencia de la geometría proyectiva, sólo es cierto en una dirección, debido a que el recíproco implicaría que los 6 puntos se encuentran sobre una circunferencia, lo cual para ser cierto se requiere que originalmente 5 de los puntos lo estén. Esto sí sucede en la geometría proyectiva, ya que 5 puntos definen una cónica, mientras que en la geometría euclidiana no necesariamente 5 puntos arbitrarios pertenecen a una misma circunferencia.

3. Aplicaciones del Teorema de Pascal

En esta sección vamos a analizar usos del Teorema de Pascal, en donde se evidencia su aplicación para resolver problemas, incluso con mayor facilidad que cuando no se hace uso del mismo. También, se van a revisar resultados relacionados con el Teorema de Pascal, como lo es el Teorema de Brianchon.

3.1. Teorema de Brianchon

Aplicando el Principio de dualidad al Teorema de Pascal, debemos cambiar:

- Puntos en la cónica, por rectas que son tangentes a la cónica.
- Recta que pasa por dos puntos, por punto intersección de dos rectas.
- Punto intersección de dos rectas, por recta que pasa por dos puntos.
- Recta que pasa por tres puntos, por punto intersección de tres rectas.

Así, obtenemos el siguiente resultado, que es llamado Teorema de Brianchon.

Teorema 3.1.1. ***(Teorema de Brianchon)*** *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}(E)$ una cónica y $t_1, t_2, t_3, r_1, r_2, r_4$ rectas tangentes a $\mathcal{C}$. Entonces las rectas $s_1 = L(t_3 \cap r_2, t_2 \cap r_3)$, $s_2 = L(t_1 \cap r_3, t_3 \cap r_1)$ y $s_3 = L(t_2 \cap r_1, t_1 \cap r_2)$ son concurrentes.*

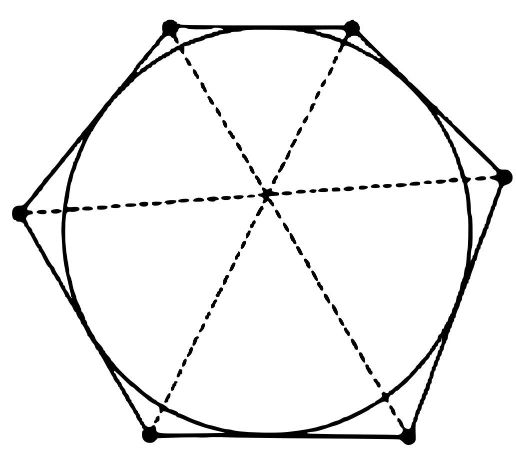

Figura 3.1: Teorema de Brianchon

3.2. Aplicación en un problema

Para mostrar el uso del teorema de Pascal, se enuncia y resuelve un problema de geometría euclidiana.

I) **(Enunciado)** Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Γ. Sea D un punto sobre el segmento BC diferente de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La perpendicular a AB que pasa por D intersecta a AB en E y a Γ en F, con D entre E y F. Sea X el punto de corte entre FC y EM. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demuestre que la recta AX es tangente a Γ.

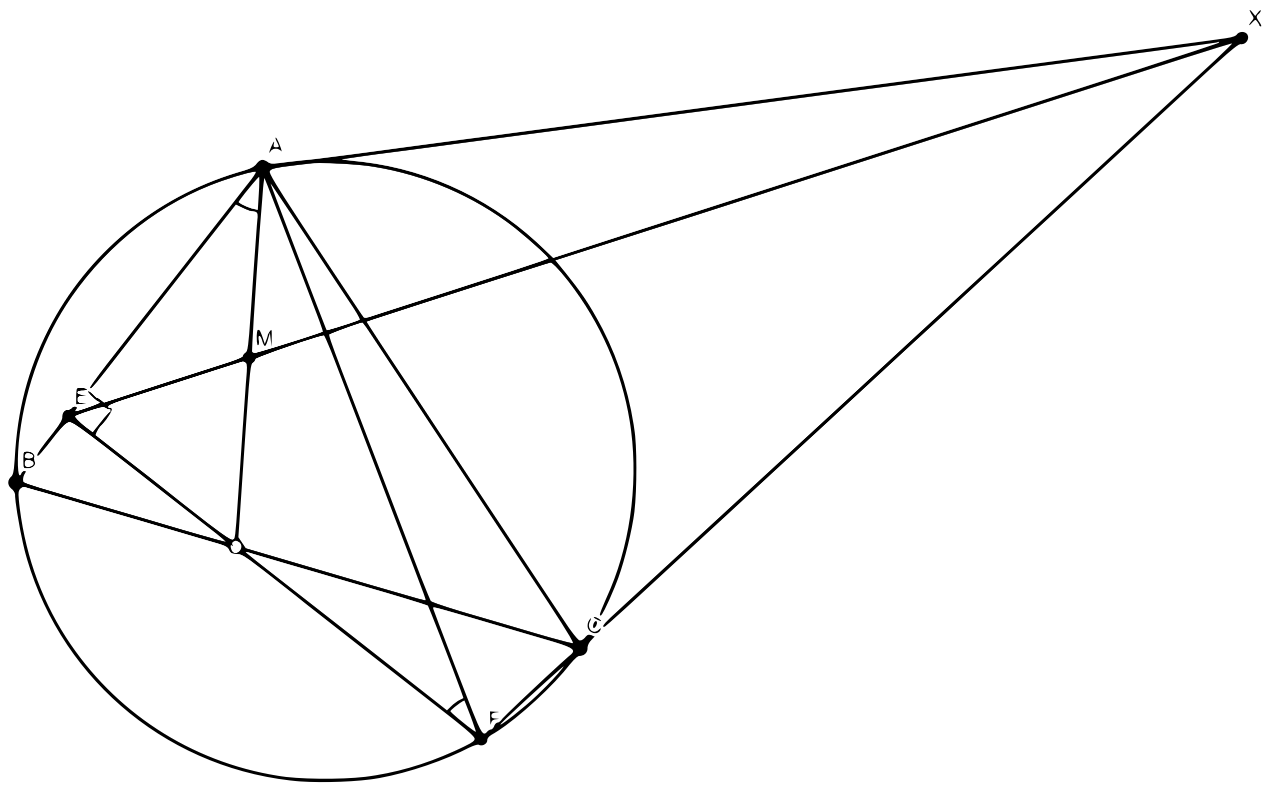

Figura 3.2: Construcción del problema

II) **(Solución oficial)** Como $\angle DAE = \angle AFE$, se obtiene que AE es tangente al circuncírculo del triángulo ADF. Por lo tanto, por potencia de punto, $AE^2 = ED \times EF$.

Como el triángulo AEF es semejante al triángulo AED y EM es mediana del triángulo AED, se obtiene que EM es simediana del triángulo AEF, y como el triángulo es rectángulo se tiene que la simediana también es perpendicular, por lo tanto, $EM \perp AF$. Por el lema de perpendicularidad, $FE^2 - FX^2 = AE^2 - AX^2$, es decir, $(FE^2 - FX^2) - (AE^2 - AX^2) = 0(1)$.

Por otro lado, $\angle EXF = 90 - \angle CBA = \angle FDC$, entonces el cuadrilátero $EDCX$ es concíclico y por potencia de punto $FD \times FE = FC \times FX$, es decir, $FD \times FE - FC \times FX = 0(2)$.

Tomando $(1)-(2)$ obtenemos $(AE^2-ED\times EF)-(AX^2-XC\times XF) = 0$. Finalmente, como $AE^2 - ED \times EF = 0$ obtenemos que $AX^2 - XC \times XF = 0$, es decir, $AX^2 = XC \times XF$ lo que implica que AX es tangente a Γ.

III) **(Solución con teorema de Pascal)** Sea X' el corte entre FC y la tangente a Γ por A. Demostraremos que X' está sobre EM y con esto ya terminaremos el problema.

Sea P el corte de FD con Γ y sea Y el corte entre BC y AP. Por el teorema de Pascal en el hexágono degenerado $AFBPAC$ tenemos que X', Y y E son colineales. Entonces es suficiente demostrar que M está sobre la recta YE.

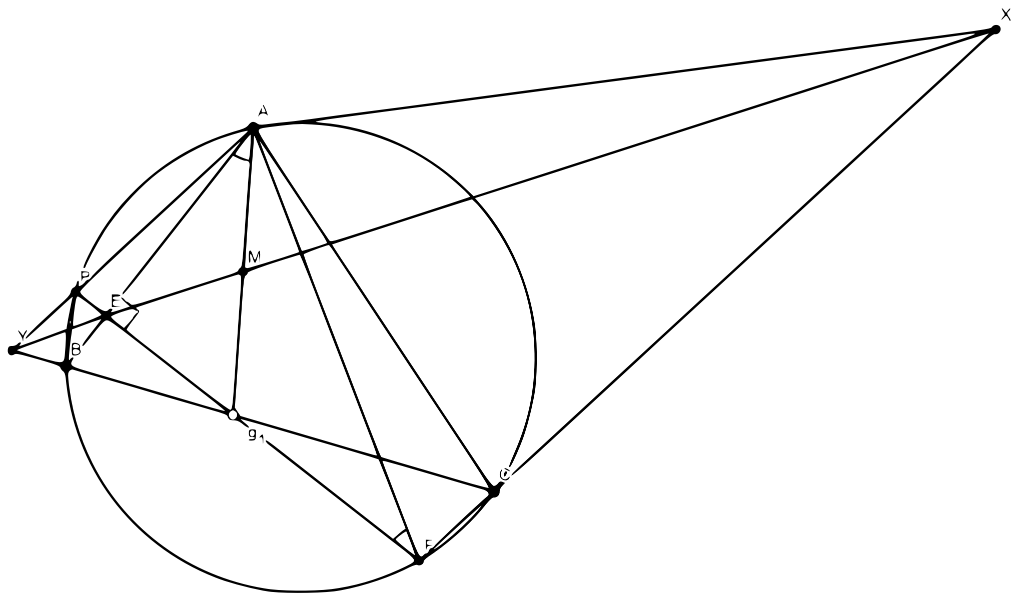

Figura 3.3: Construcción auxiliar

Para eso notemos que como $\angle BAD = \angle AFE = \angle PBA$, entonces PB es paralelo a AD. Entonces $PADB$ es un trapecio, E es el corte de sus diagonales y Y el corte de las extensiones de los lados. Es conocido que en esta configuración YE biseca a los segmentos AD y PB.

Como factor a resaltar, en la solución al problema de la olimpiada iberoamericana, usando el teorema de Pascal, no se hace necesario el uso de la condición de la perpendicular por D del enunciado. Por lo que, gracias a la solución planteada usando el teorema de Pascal, se puede omitir dicha información del enunciado, siempre el cuando la construcción de los puntos E y F sean colineales con D, y mantengan la condición de $\angle DAE = \angle AFE$. Es decir, el uso del teorema de Pascal en este problema, ayuda a reducir las condiciones del enunciado, y que siga teniendo validez su conclusión.

3.3. Construcción de una isogonal

Dado un triángulo ABC y D un punto en el plano, la recta isogonal a la recta AD se ve como la reflexión de AD sobre la bisectriz interna de $\angle BAC$.

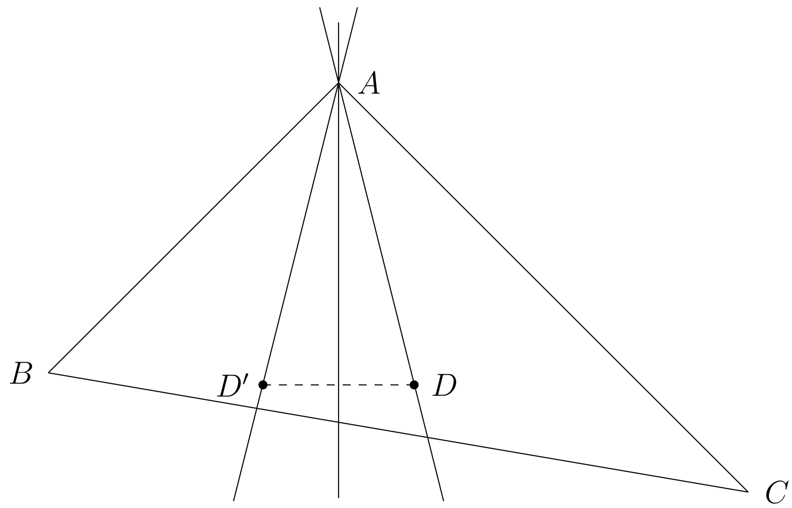

Figura 3.4: Recta isogonal

Para construir la reflexión de AD sobre la bisectriz de $\angle BAC$ es suficiente realizar la reflexión de cada punto sobre la bisectriz, como se muestra en el dibujo la construcción del punto D'. Como el triángulo DAD' es isósceles, la bisectriz de $\angle BAC$ es igual a la bisectriz de $\angle DAD'$, por lo que se concluye que la recta isogonal a AD se puede obtener como la recta que pasa por A y cumple que $\angle BAD = \angle CAD'$.

Se va a hacer uso del teorema de Pascal para demostrar la construcción de una recta isogonal mediante cuerdas sobre una circunferencia.

I) **Enunciado** Sea ABC un triángulo con circuncírculo Γ. Sea D un punto sobre el arco BC que no contiene a A. Sean M y N puntos sobre las rectas AB y AC, respectivamente, tales que $MN \parallel BC$. Sean X y Y los cortes de DM y DN con Γ. Sea Z el corte de BY y CX. Entonces, en el triángulo ABC, AZ es la isogonal de AD.

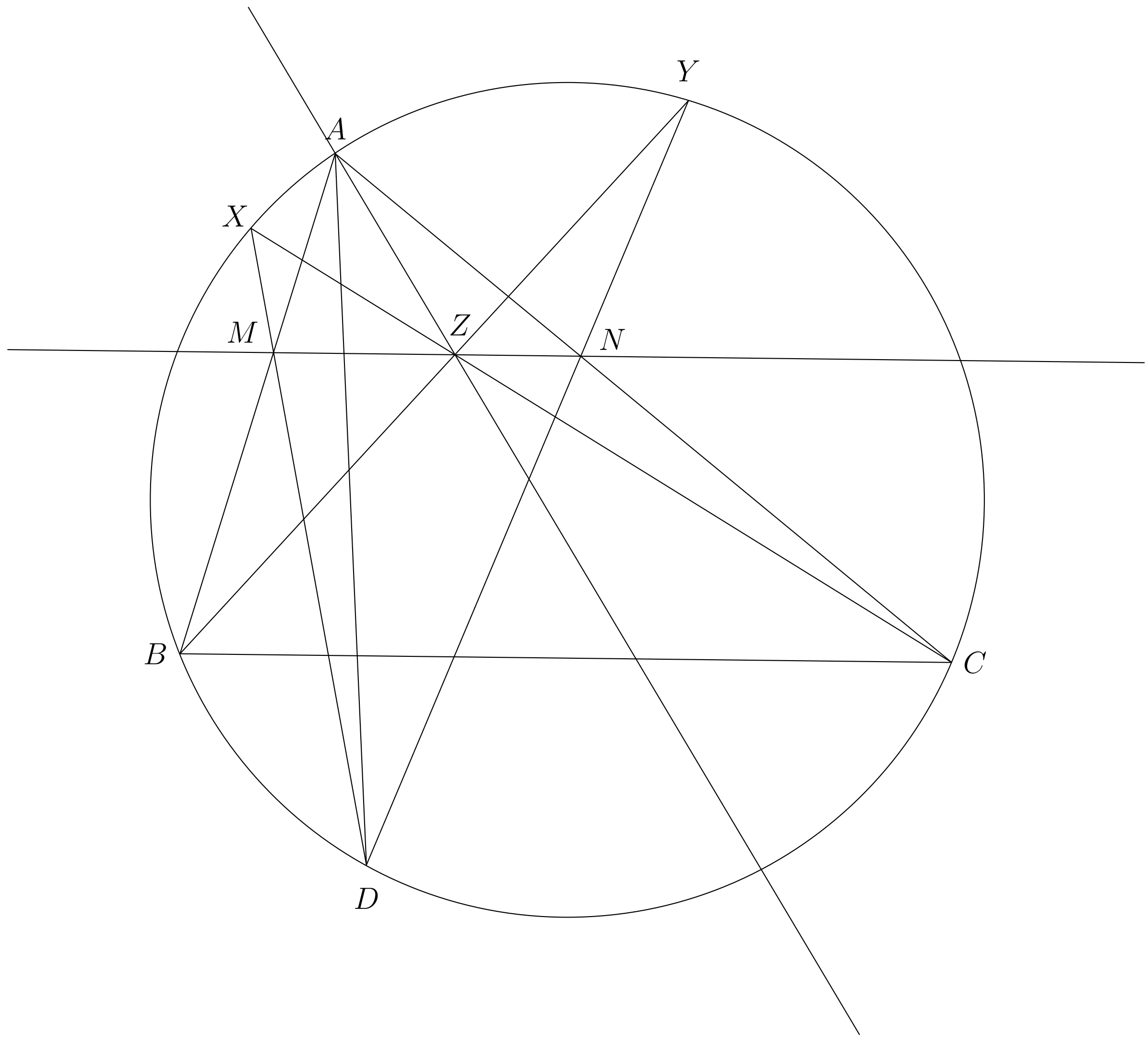

Figura 3.5: Construcción recta Isogonal

II) **Demostración** Para demostrar que AZ es la isogonal de AD basta con probar que $\angle DAB = \angle ZAC$. Aplicando el teorema de Pascal en Γ con los puntos $XAYCDB$ se obtiene que los puntos M, N y Z son colineales, por lo tanto $ZN \parallel BC$.
Por ángulos correspondientes se tiene que $\angle CBY = \angle NZY$, y como el cuadrilátero $CBAY$ está sobre Γ, por ángulo inscrito, se tiene que $\angle CBY = \angle CAY$. Ahora, como $\angle NZY = \angle CBY = \angle CAY$ se tiene que el cuadrilátero $AZNY$ es circunscrito, por lo que, usando ángulo inscrito, obtenemos que $\angle ZAN = \angle ZYN$. Finalmente, como el cuadrilátero $ABDY$ está sobre Γ, por ángulo inscrito, $\angle DAB = \angle DYB$, así entonces $\angle DAB = \angle DYB = \angle NYZ = \angle ZAN = \angle ZAC$, como se quería.

Bibliografía

AYRE, Frank. *Theory and problems of projective geometry*. Schaum's Outline Series. Schaum Publishing Company, 1967 (vid. pág. 34).

DONEDDU, A. *Complementos de Geometría Algebráicas. Traducción de la edición francesa de 1968*. Aguilar ediciones, 1980 (vid. pág. 11).

FORTUNA E., FRIGERIO R. y PARDINI R. *Projective Geometry: Solved problems and Theory Review*. Springer, 2016 (vid. pág. 34).

H.S.M, Coxeter. *Projective Geometry. Second edition*. Springer-Verlag, 2003 (vid. pág. 34).

RINCÓN, German. *Un Recorrido por la geometría*. Universidad Antonio Nariño, 1994 (vid. pág. 11).