CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA COMO ESTRATEGIA PARA FORTALECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

LUZ MYRIAM TARAZONA ESTUPIÑÁN

UNVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACION
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

CONSTRUCCIÓN DEUNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA COMO ESTRATEGIA PARA FORTALECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

LUZ MYRIAM TARAZONA ESTUPIÑÁN

Trabajo de Grado para Optar al Título de Magíster en Pedagogía

Directora
SOLANGE ROA FUENTES
Doctora en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa

UNVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACION
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2018

CONTENIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág,

LISTA DE IMÁGENES

Pág.

LISTA DE FOTOGRAFÍAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

Pág.

RESUMEN

TÍTULO: CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA COMO ESTRATEGIA PARA FORTALECER EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO*

AUTOR: Luz Myriam Tarazona Estupiñan**

PALABRAS CLAVE: *Pensamiento Algebraico, Objetivación, Generalización de patrones*, *Comunidad Matemática.*

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación analiza el desarrollo del pensamiento algebraico en un grupo de 39 estudiantes mayores (15 –16 años). Con esta propuesta se busca como dice Radford (2011), dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, razón por la cual se tomó como referencia los tipos de razonamiento inferencial (abdución, deducción e inducción) y los niveles de procesamiento y conversión propuestos por Rivera (2013): numérica dependiente de objeto y de relaciones; gráfica dependiente de objeto y figural dependiente de relaciones.

El proceso de intervención se realizó mediante Tareas, brindando espacios de reflexión, exposición y convalidación grupal de hipótesis; características de la Comunidad Matemática (Santos, 2007).Este proyecto se centra en identificar las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes en la aplicación de los algoritmos algebraicos en problemas de generalización de patrones. Es así que el desarrollo de esta investigación contempla tres fases: la primera consistió en una aplicación y análisis de una prueba diagnóstica; en la segunda se planteó un conjunto de tareas contextualizadas desde situaciones que promueven los procesos de generalización; finalmente para la última fase se empleó el diseño de una entrevista a un grupo de estudiantes que evidenciaron un cambio progresivo de las situaciones anteriores.

Al abordar los resultados obtenidos en la investigación se resalta la gran variedad de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver las Tareas propuestas, así como los espacios de discusión donde predominó la participación, el cuestionamiento, la tolerancia y el respeto; la convalidación de las hipótesis dio una visión más amplia sobre lo interesante, útil y fácil que es el pensamiento algebraico. Por otro lado, al observar la categorización se observó que un buen número de estudiantes utilizan razonamientos abductivos y razonamientos de conversión grafica dependiente de objeto, pero tienen dificultades para lograr razonamientos deductivos y conversiones figúrales.

* Proyecto de grado

** Facultad de Ciencias Humanas, Escuela de Educacion, Maestria en Pedagogia. Director. Solange Roa Fuentes

ABSTRACT

TITLE: CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL COMMUNITY IN THE CLASSROOM AS A STRATEGY TO STRENGTHEN DEVELOPMENT OF THE ALGEBRAIC THOUGHT[*]

AUTHOR: Luz Myriam Tarazona Estupiñan [**]

KEY WORDS: *Algebraic Thinking, Objectification, Generalization of Patterns*, *Mathematical Community.*

DESCRIPTION

This research analyzes the development of algebraic thinking in a group of 39 students (15 - 16 years old). With this proposal we look for, as Radford (2011) says "Stop seeing algebraic thinking as a simple subject in the curriculum", which is why we took as references the types of inferential reasoning (abduction, deduction and induction) and the levels of processing and conversion proposed by Rivera (2013): numerical dependent of the object and relationships; dependent graph of the object and figural dependent of relations.

The intervention process was carried out through tasks, providing spaces for reflection, exposition and group validation of hypotheses; characteristics of the Mathematical Community (Santos, 2007). This project focuses on identifying the strengths and limitations that students show in the application of algebraic algorithms in problems of generalization of patterns. Thus, the development of this research includes three phases: the first consisted of an application and analysis of a diagnostic test; in the second, a set of contextualized tasks was proposed from situations that promote the processes of generalization; finally, for the last phase, it was used the design of an interview with a group of students that showed a progressive change of the previous situations.

When addressing to the results obtained in the research, it is highlighted the great variety of strategies used by the students to solve the proposed tasks, as well as the discussion spaces in which participation, questioning, tolerance and respect were predominated; the validation of the hypotheses gave a broader view on how interesting, useful and easy it is to think algebraically. On the other hand, when observing the categorization, it was observed that a good number of students use abductive reasoning and reasoning of object-dependent graphic conversion, but they have difficulties to achieve deductive reasoning and figural conversions.

[*] Proyecto de grado

[**] Facultad de Ciencias Humanas, Escuela de Educacion, Maestria en Pedagogia. Director. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

En pleno siglo XXI las matemáticas se han consolidado como una de las áreas fundamentales para el desarrollo científico y tecnológico, con una gran incidencia en casi todas las profesiones. Sin embargo la mayoría de los estudiantes tienen apatía hacia ella, la consideran la materia más difícil y llegan a clase con una predisposición negativa sobre la posibilidad de aprender. Factor que se refleja en su desempeño y en muchos casos hasta en la elección de su carrera profesional.

Esta tendencia es mucho más evidente con los conceptos que se asocian al álgebra. Por tal razón es fundamental que los docentes de esta área se apropien de las herramientas necesarias para orientar a sus estudiantes hacia una buena comprensión de las matemáticas. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OECD) propone que los docentes deben planear y desarrollar su clase de tal manera que los estudiantes logren “formular”, “emplear” e “interpretar” las matemáticas en contextos diversos. Es decir que cada individuo debe lograr: “la formulación matemática de las situaciones; el empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos; e interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos” [1].

Erróneamente se tiene la creencia que el pensamiento algebraico se desarrolla en los grados octavo y noveno pero según Cai y Knuth, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano podría facilitar a los jóvenes el estudio de conceptos más complejos del álgebra en niveles superiores. Sin embargo, Cai y Knuth indican que “se requiere profundizar en investigación sobre mejores maneras de potenciar el

[1]ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD). PISA 2012 results: creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (volume V). 2014. P. 25. Citado por ROA, Solange. La construcción de una comunidad matemática en el aula y el desarrollo del pensamiento algebraico. Colectivo de matemáticas. Bucaramanga, 2006. p.1

pensamiento algebraico, incluso en temas que han sido tradicionalmente aritméticos"[2]. Pero para potencializar el pensamiento algebraico primero se debe comprender lo que significa razonar algebraicamente. Esto no implica hacer que un estudiante aplique y conjeture ante una serie de enunciados y reglas compuestas por letras y símbolos; ya que es muy común encontrar que cuando se habla de álgebra automáticamente susciten a la mente "los casos de factorización", idea que ha sido desarrollada por décadas. Es por ello que se hace fundamental comprender lo que realmente significa pensamiento algebraico y lo que los estudiantes deben estar en capacidad de hacer, como bien lo dice la Sociedad Andaluza de Educación Matemática:

> Los alumnos de los niveles medios deberían aprender el álgebra como un conjunto de concepto y habilidades referentes a la presentación de relaciones cuantitativas y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones. La enseñanza del álgebra se presenta como uno de los objetivos centrales de la educación matemática desde el nivel pre básico. [3]

El pensamiento algebraico es primordial para muchos procesos matemáticos, por ello es de vital importancia que se potencialice a través de la práctica en la solución de problemas que incluyan el proceso de generalización. Por tanto es fundamental que desde una nueva metodología orientada hacia la construcción de una Comunidad Matemática en el aula se incentive y propicie la producción de espacios para el desarrollo del pensamiento algebraico en todos los niveles escolares.

---

[2]CAI, Jinfa; KNUTH, Eric (ed.). Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Springer Science & Business Media, 2011. Citado por ROA, Solange. La construcción de una comunidad matemática en el aula y el desarrollo del pensamiento algebraico. Colectivo de matemáticas. Bucaramanga, 2006. p.4
[3]THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. *Sevilla, SAEM Thales*, 2003, p.300

En general la matemática debe ser concebida como una disciplina con sentido, donde los estudiantes interactúen y sean miembros activos de su proceso de aprendizaje. Es por ello quesuscita como plantea Santos Trigo "la necesidad de establecer una comunidad matemática en el salón de clase, una comunidad caracterizada por el trabajo en grupo que genera un conocimiento que llega a ser validado o aceptado por la comunidad"[4]. Donde los estudiantes analicen, revisen y construyan saberes a partir de su experiencia y la de sus compañeros. La comunidad facilita el desarrollo del trabajo cooperativo donde todos los individuos como miembros activos buscan alcanzar el dominio de un concepto. Se considera sin duda como lo propone Santos Trigo, que el papel del docente, el estudiante y el conocimiento matemático se transforma gracias a las interacciones dinámicas que propicia la comunidad.

Con base en lo expuesto; este proyecto busca potenciar en los estudiantes el pensamiento algebraico a través de la resolución de situaciones problemáticas que contribuyan al desarrollo de los procesos de generalización y de habilidades logicomatemáticas. Estas pueden desarrollarse en un ambiente de trabajo que posibilite la participación de los estudiantes, como agentes directos de su proceso de formación a través de la participación en una comunidad matemática. La presentación de esta propuesta está organizada en seis capítulos que a continuación se describen:

Capítulo I. se presenta una síntesis de investigaciones relacionadas con el pensamiento algebraico, la resolución de problemas y los factores que inciden en su desarrollo en el aula; así como los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional y la Sociedad Andaluza de Educación Matemática y un análisis de los resultados de las pruebas estandarizadas nacionales.

---

[4]SANTOS TRIGO, Luz Manuel Santos. *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Editorial Trillas, 2007.

Capítulo II. Se expone la contextualización del problema que da paso a los objetivos de investigación.

Capítulo III. Se presentan los elementos teóricos que fundamentan el estudio, algunas consideraciones sobre los procesos de generalización y la generalización de patrones.

Capítulo IV. Contiene una descripción detallada de la metodología que guía el desarrollo de la investigación: la población, el diseño metodológico, los instrumentos utilizados en el proceso de recolección y análisis de datos, y la forma en que serán aplicados.

Capítulo V. Se presenta el desarrollo de la investigación, las fases del proceso, así como el proceso de análisis a priori y a posteriori del diagnostico y el análisis a priori de las tareas implementadas en cada una de las sesiones y la entrevista.

Capítulo VI. Se mencionan los resultados más relevantes del proceso investigativo y las conclusiones finales del proyecto.

Al abordar los resultados obtenidos en la investigación se resalta la gran variedad de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver las Tareas propuestas, así como los espacios de discusión donde predominó la participación, el cuestionamiento, la tolerancia y el respeto; la convalidación de las hipótesis dio una visión más amplia sobre lo interesante, útil y fácil que es el pensamiento algebraico. Por otro lado, al observar la categorización se observó que un buen número de estudiantes utilizan razonamientos abductivos y razonamientos de conversión grafica dependiente de objeto, pero tienen dificultades para lograr razonamientos deductivos y conversiones figúrales.

1. ANTECEDENTES

Para el planteamiento de la investigación aquí reportada se revisaron principalmente trabajos de investigación que dieran fundamento al desarrollo del pensamiento algebraico, así como los factores incidentes en el proceso de formación de los estudiantes; para ello los antecedentes se estructuraron en cinco partes: pensamiento algebraico, estándares y principios que guían la actividad docente, factores incidentes en el desarrollo del pensamiento algebraico, pruebas y resultados.

1.1 PENSAMIENTO ALGEBRAICO

El surgimiento del pensamiento algebraico data desde el antiguo Egipto y Babilonia civilizaciones que lograron resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. “Para Socas, et al., (1996) el uso de las letras como variables procede de la geometría griega; por proceder de la geometría griega no pretendía resolver ecuaciones algebraicas, sino satisfacer condiciones geométricas”[5]. De esta forma se evidencia cómo el pensamiento algebraico y el uso de variables han evolucionado a través de toda la historia. Godino y Font muestran una visión más amplia y profunda de lo que se puede entender como pensamiento algebraico:

> El razonamiento algebraico, Implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para

[5]CARDONA, Manuel. Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de resolución de problemas. Honduras. 2007. p.7. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán.

> apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como la ciencia de los patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central.[6]

El pensamiento algebraico involucra procesos de razonamiento y generalización, que en parte llevan al tratamiento de símbolos y relaciones funcionales. Dichos procesos pueden ser desarrollados desde los primeros años; por lo tanto es fundamental que el docente identifique las características asociadas al razonamiento algebraico, Godino y Font proponen que:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.[7]

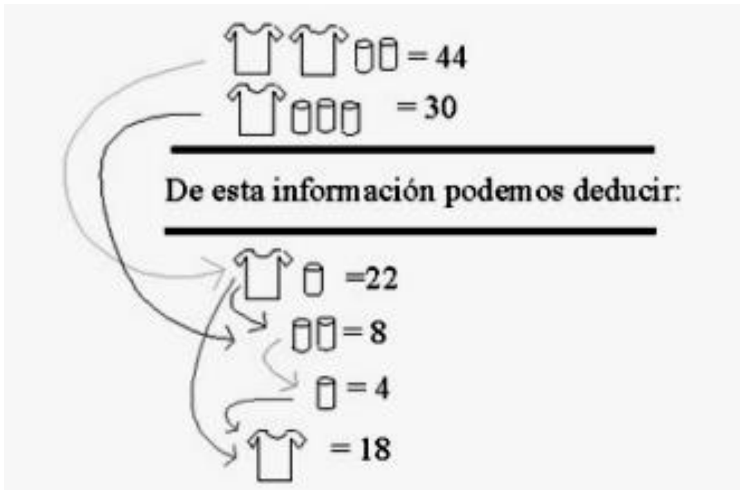
Para ilustrar algunas de estas características Godino y Font muestran el siguiente ejemplo:

---

[6]GODINO Juan. D; FONT, Vicenç. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros. 2003. p. 774
[7]Ibid., p.776

El precio de dos camisetas y de dos latas de refresco es de 44 euros. El precio de una camiseta y tres latas es de 30 euros. ¿Cuál es el precio de una camiseta y el de una lata de refresco?[8]

Figura 1. Representación ejemplo solución grafica por Godino y Font.



Respecto al ejemplo presentado en la Figura 1, Godino y Font enfatizan que esta es solo una de las muchas representaciones que se pueden utilizar para llegar a una generalización sin hacer uso de ninguna ecuación. [9]

Por otra parte Vergel también hace referencia al pensamiento algebraico basado en los planteamientos de Radford:

El pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, es caracterizado por Radford (2006) mediante tres elementos interrelacionados:

- El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables yparámetro; opuesto a la determinancia numérica)

---

[8]Ibid., p.779
[9]Ibid., p.780

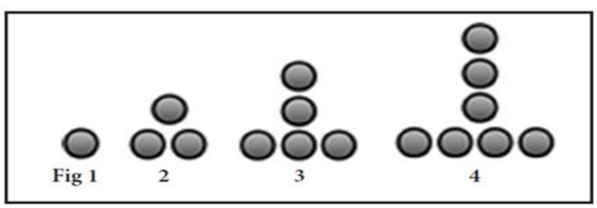
- La analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados; reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos).
- La designación simbólica de sus objetos (manera específica de nombrar o referir los objetos)

Este autor reconoce que los objetos matemáticos son objetos «generales», y la actividad matemática es esencialmente simbólica. Plantea, además, la necesidad de reflexionar explícitamente sobre la relación entre el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización. [10]

Al respecto Vergel propone una serie de tareas en donde se evidencian los elementos planteados por Radford, que dan paso a los procesos de generalización.

Vergel presenta la construcción de una secuencia para estudiantes de primaria representada gráficamente (ver figura 2)[11]. En este caso se espera que los estudiantes identifiquen el patrón y construyan procesos de generalización que los conduzcan a determinar el término n-ésimo.

Figura 2. Secuencia figural apoyada por representación tabular



[10]RADFORD, Luis; PEIRCE, C. S. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. 2006. p. 2-21.PME-NA, Vol. 1, 2-21. Citado por ROJAS, Pedro Javier; VERGEL, Rodolfo. Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En: Revista científica .Octubre de 2013 edición especial .Bogotá, 2013. p.763. ISSN 0124 2253
[11]VERGEL, Rodolfo. Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. 2016 .p. 99. Tesis doctoral. Universidad distrital Francisco José de Caldas

El objetivo de estos ejercicios es llevar a los estudiantes para que “perciban las características de la figura e identifiquen el patrón a través del cual la secuencia se forma”[12]. Es mediante estos procesos que los estudiantes identifican y determinan el patrón y se da inicioal proceso de objetivación de la característica común en la secuencia. Por lo tanto es de vital importancia que el docente desde su práctica pedagógica genere estrategias y posibilite espacios donde los estudiantes puedan desarrollar tareas de este tipo que incentivan al desarrollo del pensamiento algebraico.

Para entender el pensamiento algebraico es necesario fundamentar la relación que prevalece entre éste y la aritmética, según Radford citado por Vergel, [13]lo que distingue el pensamiento aritmético del algebraico es el hecho de que en este último se tratan cantidades *indeterminadas* de una manera *analítica*. En otras palabras, se consideran cantidades indeterminadas (e.g., incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos. En el contexto popular se asocia el pensamiento algebraico con el dominio y aplicación de la variable desconocida, pero este conlleva a un análisis más profundo y coherente sobre las conexiones matemáticas que se generan en determinada situación, como cita Vergel en el pensamiento algebraico[14], no es ni necesaria ni una condición suficiente el uso de letras en el álgebra para pensar algebraicamente. Como lo sostiene Radford, “nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo”[15]. Si bien la manipulación de símbolos es una forma de representación para operar variables desconocidas,

[12]Ibid., p 99
[13]RADFORD, Luis. Grade 2 students’ non-symbolic algebraic thinking. *Early algebraization*, 2011, p. 318. Citado por VERGEL, Rodolfo. Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. 2016. P
[14]VERGEL, Op. Cit., p, 72
[15]RADFORD, L. Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues. Regular lecture presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, held in Seoul, Korea, 8 July-15 July, 2012. Retrieved at July 2, 2012. P. 677

lo fundamental es comprender el proceso y el cambio que particulariza el patrón establecido por estas variables, es decir "el pensamiento algebraico debe ser una forma particular de reflexionar matemáticamente"[16].

De acuerdo con Radford (2010b) citado por Vergel, el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos (o vectores): sentido de *indeterminancia,* la *analiticidad y l*a *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos. Radford concibe el pensamiento algebraico como la posibilidad de entender y concebir los números no como cantidades, sino como parte de algo más, proceso en el cual los estudiantes puedan tratar cualquier figura estableciendo su patrón o regla, para poder encontrar una solución. En este sentido, desde esta caracterización, "el pensamiento algebraico abre nuevas posibilidades para repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden ser significadas por los estudiantes jóvenes"[17].

Cada estudiante puede abordar de diferentes formas la solución de un problema, puede generar patrones a través de un grafico o establecer relaciones a partir de un dibujo, sin necesariamente recurrir al algorítmico o fórmula básica establecida. Es fundamental analizar todos los factores que inciden a la hora de desarrollar el pensamiento algebraico, se deben tener en cuenta los comportamientos, expresiones, conclusiones e inferencias que realizan los estudiantes al realizar diferentes tareas y ejercicios.

Es así que Vergel hace referencia a una clasificación que realiza Radford (2010a), el cual reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos, lenguaje natural.

[16] VERGEL, Op. Cit., p 72
[17] VERGEL, Op. Cit., p 74

1. PENSAMIENTO ALGEBRAICO FACTUAL.

Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más 2".

2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO CONTEXTUAL.

Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice *"arriba quito uno"* o *"dos por la figura más uno"*, o *"# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total".* Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.

3. PENSAMIENTO ALGEBRAICO SIMBÓLICO.

Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n–1)$ ó $2n–1$. Según Radford (2010a, p. 8), en este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica.[18]

1.2 ESTÁNDARES Y PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA ACTIVIDAD DOCENTE

El pensamiento algebraico es una parte estructural del amplio mundo de las matemáticas, y para dimensionar su alcance se contemplan en esta investigación los estándares básicos de competencias para matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y la propuesta del *National Council of Teachers of Mathematics*, (NCTM, por sus siglas en inglés) traducido por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática (Thales, 2003). A continuación se presentan aspectos que interesan resaltar como fundamento de esta investigación.

Estándares básicos de competencias para matemáticas propuestos por el ministerio de educación nacional (MEN)

El Ministerio de Educación Nacional define para el área de matemáticas cinco tipos de pensamiento matemático

- El pensamiento numérico y los sistemas numéricos
- El pensamiento espacial y los sistemas geométricos
- El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas
- El pensamiento aleatorio y los sistemas de datos
- El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos

Esta investigación está enfocada en desarrollar el pensamiento algebraico, definido por el MEN como " el tipo de pensamiento que tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en

[18]Ibid., p 74

diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos"[19] por lo tanto se hace evidente la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico como eje fundamental en el desarrollo de habilidades matemáticas. Al respecto el MEN da unas orientaciones sobre cómo realizar este proceso:

> El desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición de mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.[20]

Es así que suscita la necesidad de implementar la generalización de patrones como estrategia para potencializar el pensamiento algebraico. El MEN organiza sus estándares en cinco grupos para los cuales están definidas las metas esperadas en cada uno de los cinco pensamientos matemáticos. Para el grado décimo y once el Ministerio de Educación Nacional en el pensamiento algebraico define los siguientes estandandares:

- Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
- Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las

[19]Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Ministerio De Educación Nacional. 2006. Bogotá. p.66
[20]Ibid., p.66

derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.

- Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.
- Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Principios y estándares para la educación matemática (Tales, 2003).

En este documento se definen cuatro estándares para Álgebra y diferentes expectativas para cada grupo de grados. A continuación se presentan de manera explícita, con el objetivo de dimensionar los alcances de la propuesta y su impacto en el desarrollo de pensamiento algebraico desde edades tempranas.

Estándares y expectativas de la Etapa 9-12: Algebra[21],

Comprender patrones, relaciones y funciones

- Generalizar patrones usando funciones definidas explícitamente y recursivamente.
- Comprender relaciones y funciones, seleccionar y utilizar varias formas de representarlas y pasar con flexibilidad de unas a otras.
- Analizar funciones de una variable para investigar tasas de cambio, puntos de corte con los ejes, ceros, asíntota y comportamiento local y global.
- Comprender y realizar transformaciones con funciones como combinarlas aritméticamente, componer las más comunes y obtener sus inversas, utilizando tecnología en el caso de expresiones complicadas.
- Comprender y comparar las propiedades.

[21]THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. Op.cit.,p. 300

Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos

- Comprender el significado de formas equivalentes de expresiones, ecuaciones, inecuaciones y relaciones.
- Escribir formas equivalentes de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, y resolverlas con fluidez mediante: cálculo mental o papel y lápiz, en los casos sencillos, y, en todos los casos, el uso de la tecnología.
- Usar algebra simbólica para representar y explicar relaciones matemáticas.
- Usar una variedad de representaciones simbólicas, incluyendo ecuaciones recursivas y paramétricas, para las funciones y relaciones.
- Enjuiciar el significado, la utilidad y lo razonable de los resultados de las manipulaciones con símbolos, incluyendo las efectuadas con medios tecnológicos.

Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas

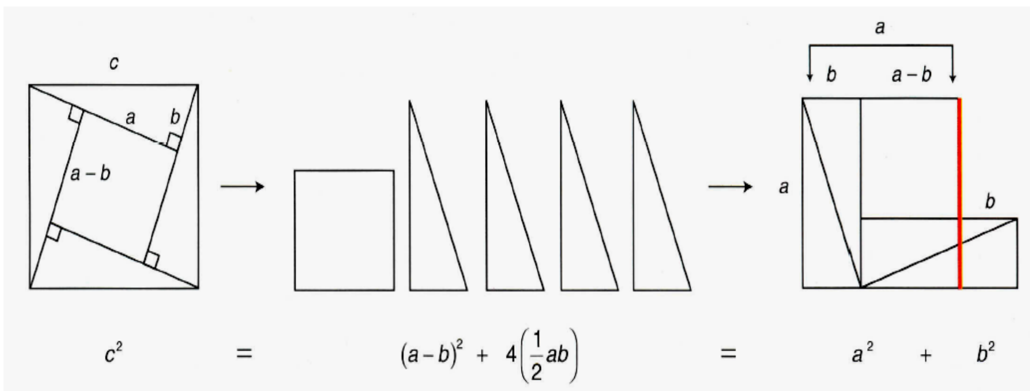
- Identificar relaciones cuantitativas fundamentales en una situación, y determinar la clase o clases de funciones que podrían modelizar estar relaciones.
- Usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones provenientes de varios contextos.
- Extraer conclusiones razonables de una situación, una vez modelizada.
- Analizar el cambio de contextos diversos.
- Aproximar e interpretar tasas de cambio a partir de datos gráficos o numéricos

Es así que la presente investigación busca afianzar estos lineamientos a partir de situaciones que conlleven al estudiante a potencializar el análisis, la interpretación y construcción del lenguaje algebraico y de esta forma capacitar a los jóvenes para que logren "usar expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas, para representar relaciones provenientes de varios contextos"[22].

[22]Ibid., p.301

La fluidez con el simbolismo algebraico ayuda a los estudiantes a representar y resolver problemas de diversas áreas del currículo. Por ejemplo, probar que el cuadrado de cualquier número entero impar es igual a un múltiplo de 8 más 1, puede suponer representar números impares y operar algebraicamente con esta representación. Asimismo, las ecuaciones que aparecen en la figura 3 [23] sugieren una justificación algebraica de un argumento visual sobre el teorema de Pitágoras.

Figura 3. Una explicación algebraica de una prueba visual del Teorema de Pitágoras



Con la ayuda de esta clase de tareas se busca que los estudiantes sean capaces de operar con soltura con expresiones algebraicas, de combinarlas y de cambiar su forma.

1.3 LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

A través de los años el pensamiento algebraico se ha fundamentado en la resolución de ecuaciones, pero uno de sus principales fines consiste en que los estudiantes se apropien de las herramientas que brinda el álgebra para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas; problemas que pueden ser matemáticos, de otras

[23]Ibid., p.305

disciplinas e incluso de la vida cotidiana. Como menciona la Sociedad Andaluza de Educación Matemática[24], La resolución de problemas debe constituir una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y, por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina.

Por lo tanto las matemáticas deben estar enfocadas hacia contextos reales, donde los estudiantes puedan apreciar su aplicación; es por ello que la resolución de problemas surge como la mejor estrategia para focalizar y encauzar el desarrollo de habilidades en el aprendizaje. Al respecto la Sociedad Andaluza de Educación Matemática propone: "La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina. Resolver problemas no es solo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo"[25].

Por consiguiente se hace evidente dos ejes que fundamentan la resolución de problemas; por una parte debe considerarse como un objetivo del proceso de aprendizaje y por el otro lado su concepción como una estrategia propia del proceso de enseñanza. Al respecto Cardona profundiza sobre este aspecto:

> Concebir a la resolución de problemas como una finalidad de la enseñanza tiene sus fundamentos en la naturaleza propia de esta ciencia, pues es sabido que todo conocimiento matemático responde a una necesidad en algún momento determinado de la historia; ya sea para resolver algún problema relacionado con la guerra, con el avance tecnológico, con la medicina, o con la misma matemática.
>
> La resolución de problemas como estrategia didáctica fue propuesta por Polya…pero reconocer que el resolver problemas es

[24]THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. op. Cit.,p.54
[25]Ibid., p. 55

> una actividad esencial en el desarrollo y aprendizaje de las matemáticas implica la necesidad de discutir ideas principales alrededor de esta actividad[26]

De tal manera que la resolución de problemas es un eje fundamental para potenciar el pensamiento algebraico, ya que surge como la mejor estrategia en general de la actividad matemática. Por consiguiente es muy importante profundizar sobre la mejor de utilizar esta valiosa herramienta. Santos Trigo hace referencia a planteamientos propuestos por Schoenfel (1988) respecto a cómo se puede desarrollar el proceso de la resolución de problemas en el aula:

Entre los principios importantes que Schoenfeld menciona para el aprendizaje de las matemáticas, incluyen que el estudiante reconozca que:

1. Encontrar la solución a un problema matemático no es el final de la empresa matemática, sino el punto inicial para encontrar otras soluciones, extensiones y generalizaciones del problema. Además, en el desarrollo de las matemáticas el proceso de formular o rediseñar problemas se identifica como un componente esencial en el quehacer matemático.
2. Aprender matemáticas es un proceso activo que requiere de discusiones sobre conjeturas y pruebas. Este proceso puede guiar a los estudiantes al desarrollo de nuevas ideas matemáticas. Es decir, el planteamiento de preguntas, la búsqueda de respuestas y de justificaciones son actividades que se pueden practicar desde la enseñanza elemental y su práctica cotidiana pueden producir resultados matemáticos nuevos.

   Entre las actividades de aprendizaje asociadas con estos principios resalta el propósito de ayudar a los estudiantes a explotar lo que ellos saben, usar sus conocimientos en forma efectiva. [27]

---

[26]CARDONA, Manuel, Op. Cit., p. 19.
[27]SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y Métodos de la Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. *México DF, México: Grupo Editorial Iberoamericano*, 1996. P. 63

En conclusión la resolución de problemas abre la posibilidad de desarrollar y potenciar al máximo el pensamiento algebraico, generando espacios de desarrollo cognitivo donde los estudiantes a través de una participación dinámica y reflexiva construyan conocimiento. Pero para poder realizar con éxito esta empresa de aprender matemáticas a través de la resolución de problemas, es importante acompañar la clase de una serie de actividades que motiven al estudiante; al respecto Santos Trigo propone algunas estrategias:

1. Que el maestro resuelva periódicamente problemas nuevos (uno cada semana) en el salón de clase. Es decir, es importante que los alumnos observen las diversas estrategias que se utilizan cuando uno se enfrenta a problemas no estudiados o resueltos antes de la clase. Aquí, el maestro modela ante los alumnos el proceso real de resolver problemas ya que se pueden ilustrar aspectos como la selección y cambios de estrategias a través del proceso de resolución.
2. Mostrar a la clase filmaciones o trabajos de otros estudiantes resolviendo problemas. Esto con la finalidad de discutir las destrezas y debilidades mostradas por esos estudiantes en el proceso de resolver problemas. Aquí se intenta criticar los métodos de resolución y además proponer y evaluar algunas alternativas.
3. Actuar como moderador mientras los estudiantes discuten problemas. Es decir, aun cuando los estudiantes son motivados a que seleccionen y traten ideas que consideran verosímiles, el maestro (como moderador) puede sugerir algunas direcciones que sean de valor para la discusión. Schoenfeld recomienda que la clase se organice en grupos pequeños y que constantemente respondan a preguntas como: ¿Qué estás haciendo? ¿Puedes describirlo en una forma precisa? ¿Cómo se relaciona eso con la solución? ¿Qué harás con el resultado que obtengas?
4. Discutir con los estudiantes problemas que involucren el uso de varios métodos de solución o que incluyan varias soluciones. En este contexto, es importante

que los estudiantes discutan las cualidades de las diversas formas de resolver un problema y notar que muchas veces la calidad del método de resolución es importante en las matemáticas.

5. Es importante que los estudiantes participen en el proceso de formular o rediseñar problemas. Así, el estudiante tendrá la oportunidad de evaluar contrastar las estrategias y contenidos asociados con la resolución del problema con sus compañeros. [28]

1.4 FACTORES INCIDENTES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Las dificultades que se presentan en las Matemáticas son evidentes en la mayoría de instituciones educativas en comparación con otras disciplinas; en especial en lo referente al pensamiento algebraico por tal razón se hace fundamental la organización y profundización de la investigación en esta área del conocimiento. Ya que estos estudios brindan las herramientas necesarias para replantear y modificar la praxis pedagógica, posibilitando el desarrollo del saber matemático y el mejor desempeño de los estudiantes. Vergel en su artículo “Procesos de generalización y pensamiento algebraico “se refiere a este aspecto:

En trabajos como el de Kieran (1989)[29], se reconoce precisamente que una dificultad asociada con el aprendizaje del álgebra escolar tiene que ver, precisamente, con el cambio en las formas de trabajar; pues los estudiantes deben enfrentarse a un cambio de las convenciones respecto al trabajo previo que venían

[28]Ibid., p. 63-64

[29]KIERAN, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, *4*, 33-56. Citado por Vergel y Rojas. Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En: Revista científica .Octubre de 2013 edición especial .Bogotá, 2013. p.761

realizando en aritmética. Sobre este aspecto, esta autora plantea que existen tres cambios significativos:

- la concatenación de símbolos,
- uso de paréntesis y
- usos del signo igual;

Además de reconocer otras dificultades, como la interpretación de las “letras” y el reconocimiento y uso de estructuras (superficial y sistémica).[30]

Para poder comprender los cambios planteados por Kieran, Vergel contextualiza a partir de ejemplos que se presentan a continuación:

1. Concatenación de símbolos.

En el contexto aritmético, concatenar dos símbolos, esto es, poner uno junto a otro, significa una suma:$25 = 20 + 5$ ó $25 = 2\ decenas + 5\ unidades$; $3\,{}^{1}\!/_{4} = 3 + {}^{1}\!/_{4}$ En el contexto algebraico, concatenar dos símbolos significa multiplicar: $2a = 2 \times a$ ¿Es descabellado pensar en que $2a = 2 + a$ ó $2a = 20 + a$?

2. Uso de paréntesis.

¿A qué es igual $2 + 3 \times 4$? Usualmente los estudiantes plantean, al menos, dos respuestas diferentes: 20 y 14, obtenidas mediante los siguientes procedimientos: $(2 + 3) \times 4 = 5 \times 4 = 20$ y $2 + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$ ¿Cuál de ellos es equivocado? ¿Por qué?

[30]VERGEL, Rodolfo. Procesos de generalización y pensamiento algebraico. En: Revista científica .Octubre de 2013 edición especial .Bogotá, 2013. p.761. ISSN 0124 2253

3. Uso del signo igual.

¿ $3 + 4 = 5 + 2$? Algunos estudiantes responden que esa igualdad no es válida, porque $3 + 4$ no da 5 sino 7 ¿Qué explica esta respuesta?[31]

Se evidencia que existen falencias en la apropiación de conceptos. Los estudiantes aprenden en forma mecánica y sistematizada lo que conlleva a que no puedan superar los cambios que se originan al abordar ideas asociadas a pensamiento algebraico. De tal manera que vale la pena entrar a revisar qué genera esta situación. Uno de los factores más incidentes al desarrollar el pensamiento algebraico consiste en identificar las causas que originan las dificultades en los profesores de bachillerato para potenciar este pensamiento. Por ejemplo Cantoral presenta un análisis sobre el replanteamiento que se debe hacer dentro del aula para optimizar el desarrollo del conocimiento matemático. Cantoral (2013) reflexiona sobre la estructura tradicional y cuadriculada de la clase de matemáticas.

> En ese sentido, es frecuente observar que el diseño de la clase no incluye como actividad habitual, que los alumnos argumenten sobre los conceptos que se tratan o que ellos directamente expongan sus propias ideas, menos aún que refuten las consideraciones de sus compañeros o las de su profesor. Es así como se pierde el potencial que todo alumno posee para debatir en matemáticas y en ciencia; se pierden los hilos de la argumentación y sus ideas cotidianas no evolucionan hacia ideas científicas. Esto también, como podrá comprenderse, induce un comportamiento contemplativo en sus acciones de la vida diaria, cuando el estudiante tenga que defender sus creencias y, por tanto, se inhibe el desarrollo de una amplia gama de habilidades intelectuales. De manera que al abrir un espacio en la clase de matemáticas para que los alumnos expresen lo que piensan de algún concepto matemático y que puedan refutar la opinión de sus compañeros se torna importante, digamos fundamental, en el desarrollo de su pensamiento en general y de su pensamiento

[31]Ibid., p.761

> matemático en particular. Además, este tipo de interacción en el aula favorece el desarrollo del pensamiento crítico, ya que se incentiva que se ofrezcan alternativas de solución de algún problema y que argumentando con base en ello se favorezca el desarrollo intelectual de los alumnos.[32]

Este autor orienta a los docentes para innovar su práctica pedagógica y hacer una revisión sobre cómo focalizan algunos de los conceptos básicos del pensamiento algebraico, desde una perspectiva visual, analítica y gráfica. Esto puede permitir que los estudiantes comprendan, analicen y apliquen con mayor eficacia los conceptos matemáticos en la solución de problemas.

Por otro lado, un factor de gran incidencia en el proceso de aprendizaje es el dominio que posee el docente para orientar acertadamente el desarrollo de procesos algebraicos. Por tanto se hace de vital importancia la investigación de Caballero y Cantoral, ya que se centra en el dominio del pensamiento algebraico, pero no desde el estudiante; sino a partir del conocimiento, apropiación y enfoque que aplica el docente desde su praxis pedagógica, dando luces para realizar el cambio estructural a esta asignatura desde la revisión del papel del docente en el aula de clase, al respecto dichos autores concluyen que para algunas situaciones:

> Los profesores poseen un buen dominio del contenido matemático, al menos a un nivel procedimental, pero que presentan deficiencias en cuanto a un entendimiento más profundo de los conceptos del Cálculo, particularmente con respecto a ideas variacionales. Esto a su vez, tiene repercusiones en cuanto a las estrategias de enseñanza, las cuales se sustentan en el uso de la memoria, aprendizaje de algoritmos y reglas, dejando de lado aquellas ideas variacionales tan importantes para el aprendizaje del Cálculo.[33]

---

[32]CANTORAL, Ricardo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. México: Secretaría de educación pública, 2013. p.17

[33] CABALLERO, Mario; CANTORAL, Ricardo. El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato. En: funes.uniandes.edu.co [en línea] 2013.http://funes.uniandes.edu.co/4435/1/CaballeroEldesarrolloALME2013.pdf [citado en 2 de julio 2014]

Finalmente otra de las mayores dificultades en los proceso algebraicos es la errónea concepción que posee el común de la gente, la mayoría de las personas asocian el álgebra con la variable x y los procesos de factorización. Al respecto la OECD menciona:

> Muchos adultos equiparan el Álgebra escolar con la manipulación de símbolos: resolver complicadas ecuaciones y simplificar expresiones algebraicas. Por supuesto que los símbolos algebraicos y los procedimientos para trabajar con ellos constituyen un destacado acontecimiento histórico, y son imprescindibles en el quehacer matemático, pero el Álgebra es más que manipular símbolos. Los estudiantes necesitan comprender sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo pueden usarse éstos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones. Hoy, los ordenadores y las calculadoras pueden dibujar gráficas de funciones, realizar operaciones con símbolos y hacer al instante cálculos sobre columnas de datos. Los estudiantes necesitan ahora aprender cómo interpretar las representaciones tecnológicas y cómo usar la tecnología con eficacia y prudencia.[34]

Es así que el álgebra debe integrar todos los conocimientos matemáticos la Geometría, Análisis de datos y Estadística, y su proceso de enseñanza debe estar enfocado hacia la integración y la conexión de todos estos saberes.

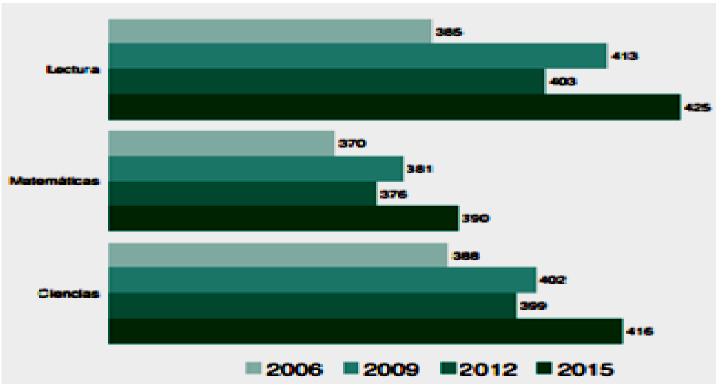
Todos estos factores se hacen evidentes en los resultados de las pruebas nacionales, la institución educativa objeto de esta investigación se ha caracterizado por ocupar los primeros lugares a nivel departamental, sin embargo es fundamental analizar a fondo los resultados de las pruebas

[34]ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD). PISA 2012 results: creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (volume V). 2014. p. 309.

1.5 PRUEBAS Y RESULTADOS

En nuestro país se ha planteado el proyecto “Colombia la más educada” con diferentes metas que deben lograrse en el año 2025. Esta es una meta muy ambiciosa que requiere de un esfuerzo conjunto, ya que es evidente la necesidad de replantear las practicas pedagógicas y mejorar los resultados que evidencian las pruebas; un ejemplo claro de este panorama lo refleja el bajo rendimiento que se ha obtenido en la aplicación de las pruebas internacionales PISA, (Programme for International Student Assessment), Pisa ha sido creada para evaluar los sistemas escolares de los países miembros de la OCDE. Esta prueba aplicada a estudiantes de 15 años se caracteriza por no tener en cuenta el grado en el cual se encuentran los estudiantes y su finalidad es evaluar la capacidad que tienen los jóvenes para analizar, deducir y dar soluciones a situaciones problema de su entorno real, desarrollando así sus habilidades de comprensión y sus capacidades para poner en práctica y en un contexto real sus conocimientos. Desafortunadamente Colombia desde que inicio su participación en el año 2006 ha ocupado los últimos lugares, esta prueba se ha enfocado en las áreas de ciencias, lenguaje y matemáticas. En la siguiente gráfica se evidencian los resultados de nuestro país en los últimos años.

Figura 4. Resultados históricos Colombia pruebas PISA



Fuente: Resultados Análisis ICFES Pruebas PISA COLOMBIA

Revisando el área de matemáticas, es evidente que en el último año se alcanzó una notable mejoría; sin embargo en comparación con las otras áreas matemáticas es la que presenta más bajos resultados.

Otro punto de referencia son las pruebas SABER diseñadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y el ICFES (Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior); pruebas que son aplicadas a los estudiantes del grado 3º, 5º, 9º y 11º del sector público y privado; y permiten conocer más específicamente cómo están las Instituciones Educativas a nivel nacional frente a lo pedagógico y el desarrollo de las habilidades de comprensión y análisis que poseen nuestros estudiantes. Esto permite replantear a nivel Nacional y local programas de mejoramiento continuo en el desarrollo de estos procesos.

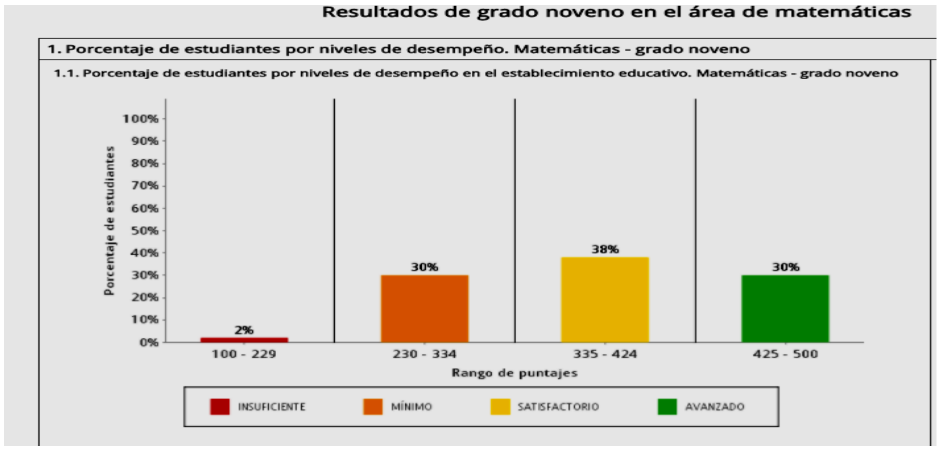
La Institución objeto de esta investigación ha alcanzado logros muy significativos a nivel nacional, y en solo 8 años se ha logrado posicionar como una de las mejores instituciones a nivel oficial de la ciudad, resultados que se ven reflejados en el índice sintético de la calidad presentado por el ministerio de educación nacional (ver Figura 5).

Figura 5. ISCE, I.E. BICENTENARIO AÑO 2016 básica secundaria.

Pero a pesar de estar en un nivel superior en comparación con otras instituciones oficiales, es necesario revisar a fondo los resultados obtenidos en las pruebas por los estudiantes que harán parte de esta investigación.

La figura 6 evidencia el rendimiento de los estudiantes del grado noveno del 2016 en el área de matemáticas.

Figura 6. Resultados pruebas saber 2016 colegio Bicentenario



Al respecto el ICFES plantea el siguiente análisis a los resultados obtenidos por los estudiantes

Lectura de resultados

En comparación con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es:

- Similar en Razonamiento y argumentación.
- Débil en Comunicación, representación y modelación.
- Débil en Planteamiento y resolución de problemas.

Lectura de resultados

En *comparación* con los establecimientos que presentan un puntaje promedio similar al suyo en el área y grado evaluado, su establecimiento es:

- Muy débil en el componente Numérico-variacional.
- Similar en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación.

- Fuerte en el componente Aleatorio.[35]

Se deja claro que la institución en donde se desarrolla esta investigación tiene graves falencias en muchos procesos matemáticos, por lo cual es fundamental implementar estrategias que ayuden a fortificar los procesos de comunicación, representación, planteamiento y solución de problemas en especial en el componente numérico variacional ya que es ahí donde se tiene el más bajo nivel. Según el ICFES las pruebas dejan como evidencia los siguientes resultados:

- El 55% de los estudiantes no verifica conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico.
- El 51% de los estudiantes no utiliza propiedades ni relaciones de los números reales para resolver problemas.
- El 48% de los estudiantes no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.
- El 75% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

Las cuestiones planteadas reflejan el bajo desempeño de los estudiantes de la institución en el componente Numérico-variacional, es evidente la necesidad de revisar y mejorar las prácticas pedagógicas para fortalecer los procesos matemáticos.

Con todo lo mencionado hasta el momento, se da paso al planteamiento del problema que fundamenta esta investigación.

[35]ICFES, lectura de resultados de noveno grado en el área de matemáticas 2016 de la Instituciónedducativa bicentenario de la independencia de la republica de Colombia. Actualizada en Bogotá el 17 de febrero del 2017. p. 42

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al realizar una revisión de los antecedentes se puede ver que la resolución de problemas ha sido analizada con profundidad en el ámbito escolar, especialmente en la construcción de pensamiento matemático. Es indiscutible que el mundo de hoy exige no solo que se tenga el conocimiento, sino que además los individuos desarrollen habilidades para aplicarlo y adaptarlo en diferentes situaciones.

Por otro lado los aportes de Godino y Vergel dejan claro que el pensamiento algebraico abarca mucho más que el manejo de variables y requiere que se generen en los estudiantes procesos que conlleven a la construcción del proceso de generalización. Desafortunadamente la tendencia que se presenta en la realidad del aula, es que el álgebra se desarrolla como una materia mecánica y estructurada, en la cual se busca que los estudiantes resuelvan una serie de ejercicios de forma sistemática y secuencial, dejando de lado la parte fundamental: desarrollar pensamiento algebraico. Dado que éste ha sido encasillado en la práctica de resolver misceláneas con una infinidad de ejercicios alfanuméricos, que si bien sirven de ejercitación, pero que poco desarrollan el análisis, interpretación y comprensión de los conceptos fundamentales; falencias que se evidencian en los bajos resultados de las pruebas nacionalese internacionales.

Esto parece indicar que los estudiantes no han desarrollado el pensamiento algebraico y difícilmente lo pueden poner en juego en la solución de problemas.Según Polya:

> Resolver un problema es hacer un descubrimiento. Un gran problema significa un gran descubrimiento, pero hay una partícula de descubrimiento en la solución de cualquier problema. El suyo puede ser modesto, pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, y si lo resuelve por medios propios, puede experimentar la tensión y el encanto del descubrimiento y el goce de triunfo.[36]

Esta reflexión, así como la idea de Radford citada por Vergel "nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo"[37]y el planteamiento de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "La fluidez con el simbolismo algebraico ayuda a los estudiantes a representar y resolver problemas de diversas áreas del currículo"[38] suscitan el problema que se aborda en esta investigación:

> ¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico de los estudiantes de décimo grado que pertenecen a una Comunidad Matemática, cuando resuelven situaciones que buscan promover la construcción del proceso de generalización?

Esta pregunta da paso al planteamiento de los Objetivos que guían el desarrollo de esta investigación:

---

[36]POLYA, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, 1965.
[37]RADFORD, L. Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues. Regular lecture presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, held in Seoul, Korea, 8 July-15 July, 2012. Retrieved at July 2, 2012. Citado por VERGEL, Rodolfo. Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. 2016. P 72
[38]THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemática. *Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España*, 2003. p. 300

2.2 OBJETIVOS

2.2.1 Objetivo general Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes con edades comprendidas entre los 15 y 16 años mediante su participación como miembros activos de una Comunidad Matemática.

2.2.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes al resolver situaciones relacionadas con el pensamiento algebraico.
- Motivar la participación de los estudiantes como miembros activos de la Comunidad Matemática establecida en su aula a partir del análisis, comprensión e interpretación de situaciones matemáticas.
- Diseñar una estrategia metodológica fundamentada en las comunidades matemáticas para potenciar el desarrollo de habilidades en los estudiantes.
- Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico mediante el diseño y análisis de tareas que motiven la actividad matemática de los estudiantes entorno al proceso de generalización.

3. MARCO CONCEPTUAL

El pensamiento algebraico ha sido erróneamente centrado a un nivel académico, por lo general se asocia el álgebra como una materia del grado octavo y noveno, "Una tradición curricular muy bien establecida nos ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida"[39], pero los avances de este siglo nos llevan a entender que el pensamiento algebraico es más que el manejo de variables representadas con letras que carecen de sentido y que solo sirven para generar un sentimiento de terror. Por tal razón se debe iniciar el desarrollo del pensamiento algebraico con los más pequeños "el tema del álgebra antes de que les diera miedo encontrarse con letras raras, como eme y ene, pe, qu y erre, o una "V" grande mal escrita, y las más asustadoras, la equis, la ye y la zeta, con cruces y rayas por la izquierda y numeritos pequeños encaramados a la derecha"[40]. Es por ello que esta propuesta de investigación busca como propone Radford (2010b), dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, para plantear diferentes formas de potenciar modos de razonamiento algebraico.

Como se analizó en el capítulo anterior, los resultados de las pruebas Nacionales dejan ver que el pensamiento algebraico no está siendo construido con un nivel adecuado por los estudiantes. En este sentido cita Vergel (Arzarello & Edwards, 2005; Miranda, Radford & Guzmán, 2007; Arzarello, 2006; Radford & Demers, 2004; Radford, Bardini & Sabena, 2007; Radford, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b, 2009, 2010a, 2010b, 2010c; Radford & Roth, 2010; Roth & Radford, 2011; Santi, 2010, 2011; D´Amore, Radford & Bagni, 2007) se pone en evidencia la necesidad de

[39]VERGEL, Rodolfo, op. Cit.,p. 15
[40]Ibid., p.12

reconocer que, por ejemplo, las formas de pensamiento algebraico pueden ser exploradas en términos de la forma en que surgen y evolucionan nuevas relaciones entre el cuerpo, la percepción y el inicio del uso de símbolos a medida que los estudiantes participan en actividades sobre generalización de patrones.[41] Por tanto a continuación se expone la relación cercana entre el pensamiento algebraico y el proceso de generalización.

3.1 EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

El proceso de generalización en matemáticas ha sido fundamental para potenciar el pensamiento algebraico. Ya que surge como un proceso inherente en los individuos para la solución de situaciones que conllevan a la construcción de técnicas de razonamiento y análisis algebraico. Para comprender el surgimiento del proceso de generalización Martínez en su investigación sobre los procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano dice:

> Para Vergel (2015b), una forma que ha sido bastante útil en la introducción de las primeras ideas algebraicas son los procesos de generalización, ya que permite a los estudiantes reflejar su pensamiento algebraico, no obstante manifiesta la importancia de continuar investigando el proceso de constitución del pensamiento algebraico temprano. Según Vergel (2015b), tal proceso de constitución del pensamiento algebraico puede darse incluso en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra. Del mismo modo, Radford (2014b) expresa que sin desconocer que el simbolismo alfanumérico constituye un poderoso sistema semiótico, el pensamiento algebraico no puede reducirse solamente a la mera notación de símbolos, por lo que podemos observar que para que se dé el proceso de constitución del pensamiento algebraico no necesariamente el estudiante tiene que usar en su actividad matemática signos alfanuméricos. Además, Radford (2010a) afirma

[41]Ibid., p. 23

que la denotación de la generalización algebraica puede ser realizada a través de una actividad multimodal, en la cual “es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas” (Vergel, 2015b, p. 196).[42]

La estructuración propuesta por Rivera (2010) en la figura 7 [43] permite tener una mayor claridad sobre cómo se desarrollan los procesos de generalización. En ella se definen las siguientes dimensiones sobre la generalización de patrones: tipos y fuentes; tipos de estructuras; atender o ser conscientes de la estructura; modos de representación y modos de entender; estas dimensiones dan paso a los tres tipos de razonamiento inferencial (abductivo, deductivo, inductivo) al analizar el proceso de generalizaciónen el estudio de patrones.

Figura 7.Elementos del Marco Conceptual (adaptado de Rivera 2010)

[42]MARTÍNEZ AVENDAÑO, JOHANNA CAROLINA. Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Colombia. 2016. p.10. Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander.
[43]RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Springer, 2015. p. 59.

3.2 GENERALIZACIÓN ALGEBRAICA DE PATRONES

En la generalización de patrones se busca deducir y expresar la regla que genera el problema; es por ello que como cita Vergel para Radford (1997),[44]*generalizar* significa observar algo que va más allá de lo que realmente se ve. Este proceso de generalización permite que los estudiantes puedan familiarizarse con situaciones de variación las cuales le permitirán desarrollar su pensamiento algebraico por tanto "La generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela" (Radford, 2010b).

Como cita Vergel, es necesario poner atención en los procesos que dan lugar a la emergencia del pensamiento algebraico en la escuela. De acuerdo con Radford (2008b, 2013b), la generalización algebraica de patrones comporta:

1. Capturar o identificar una comunalidad o característica común, notada sobre algunos elementos de una secuencia. Esta toma de conciencia de una propiedad común se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, P1, P2, P3,..., Pk).
2. La generalización o aplicación de esta comunalidad a todos los términos de la secuencia que está en consideración, es decir, a los términos subsecuentes de la secuencia (Pk+1, Pk+2, Pk+3,...), y
3. La capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Teniendo en cuenta los comportamientos emergentes en la generalización algebraica de patrones planteados por Radford es necesario profundizar sobre las formas de razonamiento inferencial planteadas por Rivera en la sesión anterior. Pierce (1934) define dichas formas de razonamiento de la siguiente manera:

[44]CAUSADO VERGEL, Op. Cit., p 75

> La abducción es la fuente de ideas originales y es a menudo influenciado por el conocimiento y la experiencia previa, a diferencia de la inducción que ejecuta una reclamación abductiva probándola sobre casos específicos con la esperanza de que los posibles errores se corrigen en el camino con más datos. Y la deducción, a diferencia de la abducción y la inducción, principalmente establece la necesidad de una única conclusión válida y, al igual que la inducción, no genera ninguna idea original.[45]

Por su parte Rivera sintetiza la abducción, deducción e inducción, que están presentes a la hora de realizar un problema que implique el proceso de generalización a partir de la siguiente tabla[46]:

[45]RIVERA,Op. Cit., p. 27
[46]Ibid., p. 28

Tabla 1. Características de las formas de razonamiento inferencial

Tipo Inferencial	Forma Inferencial	Intención	Actitud Inferencial	Fuentes	Construcción Deseada	Verificación
Abducción	Parte de una regla que se estable para un caso.	Profundidad (intencional)	Una inferencia convincente hacia una regla (conjetural)	Impredecibles	No Estructurada	Estructurado a través de la inducción
Inducción	Parte de una regla se establece para varios casos.	Amplitud (Extensional)	Predecible (Ejemplos)	Predecibles	Estructural basada en la abducción	Empírica (enumeración, analogía, experimental)
Deducción	Formulación de una regla para todos los casos.	Prueba lógica	Predecible (Hipótesis)	Predecibles	Estructurado de forma canónica	Pasos de prueba

3.3 PROCESAMIENTO DE LA GENERALIZACION DE PATRONES EN ESTUDIANTES MAYORES

El nivel de procesamiento mental está relacionado con la edad y el conocimiento que tenga cada estudiante, razón por la cual los procesos de generalización que realiza un niño son muy diferentes a los que realiza un adolescente. Un estudiante mayor, es decir aquel que ya se encuentra en el nivel de educación media, debe estar en capacidad de razonar algebraicamente; ya que posee el conocimiento necesario para encontrar la solución de un problema que involucre un proceso de generalización; esto debería suceder a través de diferentes caminos, como plantea Rivera:

> El proceso de generalización de estudiantes mayores ocurre a lo largo de muchas rutas que dependen de la naturaleza y complejidad de una tarea analizadaen varias oportunidades y de los recursos que están disponibles para ellos en el tiempo de encuentro…, el procesamiento y conversión por parte de los estudiantes de la generalización de patrones puede cambiar, haciendo énfasis desde manipulación de objetos, a relaciones (y posiblemente devuelta a objetos) en contextos numéricos y de figuras. [47]

Cuando un estudiante de décimo grado busca resolver una situación que implica el proceso de generalización de patrones lo puede abordar desde diferentes caminos, sus formas de razonar abductiva, deductiva e inductiva pueden ser expresadas a través de: un gráfico, un valor, un objeto, una ecuación, una representación numérica o simbólica; razón por la cual es fundamental determinar qué clase de proceso realiza un estudiante resuelve un ejercicio puede utilizar varios caminos para abordar el problema; al respecto Rivera propone 4 niveles de procesamiento en los estudiantes mayores:

[47]Ibid., p. 153

3.3.1 Procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto Cuando un estudiante mayor se enfrenta a la solución de un ejercicio sobre procesos de generalización de patrones su primera reacción lo lleva a tratar de adivinar la solución y comprobarla de forma sistemática, al respecto Rivera dice:

> El procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto se refiere a una representación emergente de generalización de patrones en la cual los ejemplos numéricos en sí mismos son el principal enfoque de análisis con estructura vista como una consecuencia que puede o puede no ser justificada dependiendo del contexto que genera la actividad de patrones.[48]

Cuando se utiliza esta clase de procesamiento la generalización se logra a través de una conversión numérica que depende del objeto; “una generalización que aparece como una fórmula directa obtenida del procesamiento numérico dependiente de objeto, carece, o en muchos casos no tiene, una fuerte y válida justificación”[49]. Aún, si se llegará a una respuesta correcta en la mayoría de los casos se pierde el sentido matemático, ya que los estudiantes alcanzarían la meta a través de una “mera intuición” y procesos de ensayo y error; sin comprender los procesos matemáticos, ni poder identificar las estructuras subyacentes de los mismos; “el procesamiento y la conversión numérica dependiente de objetos ha generado muchas y diferentes estrategias numéricas de detección de patrones correctas e incorrectas, con la aplicación errónea de razonamiento proporcional directo (o falso método de objeto-total). En Stacey (1989) este razonamiento es considerado como una estrategia muy popular y frecuente”[50]. Con este tipo de análisis los estudiantes pueden llegar a determinar el patrón que define la secuencia, pero al no tener una total comprensión de la estructura que la determina pueden llegar a conclusiones totalmente erradas y sin fundamento matemático.

[48]RIVERA, Ferdinand. *Teaching and learning patterns in school mathematics*. Springer, 2015. p. 154
[49] Ibid., p. 154
[50] Ibid., p. 156

3.3.2 Procesamiento y conversión gráfica dependiente de objeto. En términos de Rivera[51], este procesamiento se refiere a un patrón emergente del desarrollo de generalizaciones de patrones. En el cual los ejemplos gráficos en sí mismos son el enfoque principal de análisis con estructura vista como una consecuencia que puede o no puede ser justificada dependiendo del contexto de la actividad de analizar patrones. El proceso de generalización se realiza a partir de una conversión gráfica, la cual se puede dar a través de la combinación de formas de razonamiento abductivo e inductivo

> El procesamiento y conversión gráfica dependiente del objeto es otra variación del reconocimiento de patrones. En consecuencia, las estructuras pueden o pueden no emerger, pero son frecuentemente tomadas por garantizado. Cuando ellas emergen, ellas pueden o no pueden ser justificadas en una forma matemáticamente válida. Estructuras emergentes en estas situaciones son vistas como incidentales y útiles, es decir, toman el aspecto práctico de la actividad de generalización, la cual involucra calcular resultados particulares.[52]

Es común encontrar que para muchos estudiantes sea más sencillo determinar el patrón de una secuencia mediante la identificación y deducción gráfica, si bien no siempre tienen los fundamentos teóricos para justificar su análisis este es correcto e involucra importantes procesos de análisis.

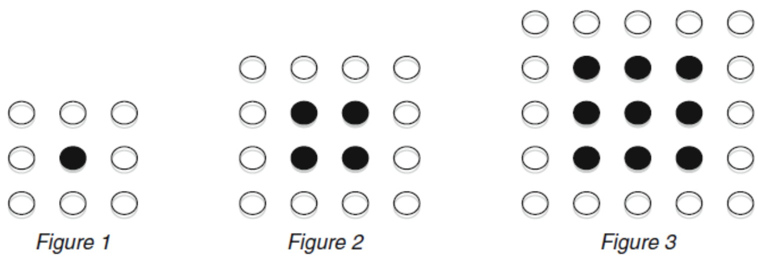
Para comprender esta forma de procesamiento Rivera ilustra un ejemplo de su investigación realizada en varios países[53]:

> Cuando 71 estudiantes de Grado 6 de Estados Unidos (edad media de 11 años) en estudio de Caí y Hwang (2002) obtuvieron el número total de puntos blancos para la figura 6 en el patrón mostrado en la

[51]Ibid., p. 158
[52]Ibid., p. 160
[53]Ibid., p. 161

figura. 6.12, aproximadamente el 42% de ellos extrajeron la sexta figura y luego contaron el número de puntos blancos. Esto contrasta con el 72% de los 124 estudiantes de China que en el estudio de los autores emplearon una estrategia de sustracción que consiste en dos valores que se han inferidos sobre dos patrones generales (es decir, la diferencia entre el número total de puntos y el número total de puntos negros).

Figura 8.Figura 6.12 ejemplo citado por Rivera



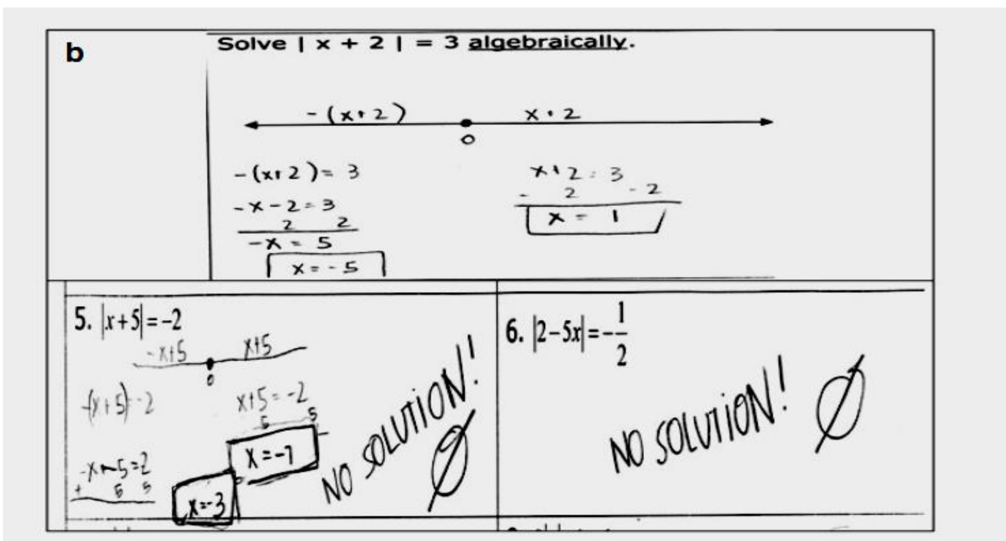
3.3.3 Procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones En este procesamiento se utilizan diagramas para definir el patrón de generalización; los cuales son utilizados para generar procedimientos de articulación con las expresiones y ecuaciones. Es un proceso donde se construyen las relaciones necesarias para llegar a una estructuración matemática. Como bien lo dice Rivera[54], esto se refiere a un desarrollo de generalización de patrones dependientes en el cual una estructura matemática abducida es el enfoque principal de análisis; las representaciones numéricas suministraran un soporte inductivo que instancia las relaciones estructurales significativas.

En este procesamiento pueden estar inmersos otros procesamientos los cuales pueden inducir a realizar la generalización por medio de pruebas; al respecto Rivera concluye:

[54]Ibid., p. 162

Si un procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto ha sido empleado primero, el proceso de construcción del patrón podría muy probablemente haber tomado una ruta empírica desde la investigación y solución de ejemplos particulares a la construcción de una generalización intencional. En un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones tal como las soluciones en la figura 6.14 b sin embargo, el proceso de generalización de patrones frecuentemente procede en una forma estructural desde una comprensión de las relaciones matemáticas relevantes hasta sus instanciaciones vía ejemplos particulares.[55]

Figura 9. Figura 6.14 b solución ejercicio de la definición general de partes de valor absoluto citado por Rivera



3.3.4 Procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones Este procesamiento hace referencia al razonamiento por medio del análisis gráfico para llegar a establecer relaciones sin necesidad de convertir a la etapa numérica; es decir en esta fase se puede realizar un procesamiento gráfico involucrando las operaciones de adición, sustracción, y multiplicación pero no necesariamente utilizando números. “Esto se refiere a un desarrollo emergente de generalización de

[55]Ibid., p. 163

patrones en el cual una estructura matemática abducida es el principal enfoque de análisis con las relevantes representaciones, figuras y gráficas vistas como suministro soporte inductivo que instancia las relaciones estructurales”[56].

Este procesamiento de conversión de la figura, para generar procesos de generalización demanda por parte de los estudiantes un nivel avanzado de comprensión, primero deben identificar todas las características propias existen en la figura para así poder generar una conexión con la propiedad de generalización a través de diversas operaciones. “Utilización significativa y eficaz de las operaciones y acciones en el procesamiento y conversión de figuras dependiente de relaciones ocurren en situaciones donde los estudiantes son capaces de abducir y vincular las propiedades invariantes y variacionales o atributos de los objetos”[57].

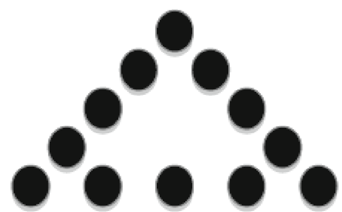
Para una visión más particular de este procesamiento Rivera presenta el siguiente ejemplo:

> Se pidió a Cathy, una estudiante de Grado 7 de Estados Unidos en el estudio de Steele y Johanning (2004) que analizara el problema de puntos triangulares mostrado en la Fig. 6.17. Su razonamiento se indica a continuación y muestra un claro entendimiento de los componentes en sus etapas finales; estos fueron: "El número de puntos en un lado", así como los que se mantuvieron iguales "allí Son 3 lados en un triángulo, “hay 3 esquinas en un triángulo”... [Que son] compartidas ").
>
> En el siguiente diagrama hay un triángulo de 5 puntos. Es un triángulo hecho usando 5 puntos en cada lado. El triángulo de 5 puntos se hace utilizando un total de 12 puntos.
>
> ¿Cuántos puntos son utilizados para hacer un triángulo de 13 puntos?

[56]Ibid., p. 166
[57]Ibid., p. 168

Si n representa el número de puntos de cada lado de un triángulo n-punto, escriba una expresión para representar cuántos puntos totales están en el triángulo.

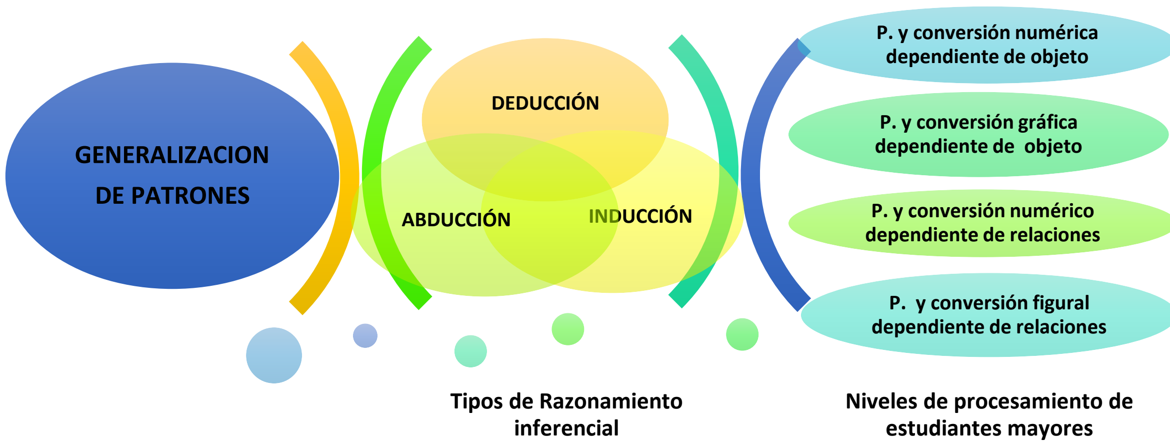
Figura 10. Figura 6.17 problema de puntos triangulares citado por Rivera



El pensamiento algebraico promueve en los estudiantes procesos de análisis, comprensión y deducción, los cuales son un eje fundamental para todos los niveles de conocimiento. Es por ello que "los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos"[58]. Los jóvenes deben estar en capacidad de analizar algebraicamente los problemas sobre generalización de patrones y para ello se hará una revisión sobre cómo reconocen el patron por medio de los diferentes tipos de razonamiento: inducción, deducción y abducción y en qué nivel de procesamiento se encuentran sus estrategias de solución. La figura 11. Sintetiza los elementos teóricos que utiliza y desarrollaremos en esta investigación.

[58]THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. op. Cit.,p.20

Figura 11. Elementos conceptuales que permiten analizar la actividad de Generalización de patrones



4. METODOLOGÍA

4.1 ASPECTOS GENERALES

Esta investigación se desarrolla en la Institución Educativa Bicentenario de la independencia de la república de Colombia, un colegio de carácter público de la ciudad de Bucaramanga (Colombia), la cual presta servicios educativos a estudiantes de niveles socio económicos bajos y medios. A pesar de ser una institución que solo cuenta con 8 años ha logrado posicionarse entre las mejores instituciones públicas de la ciudad lo cual evidencia su compromiso y responsabilidad con los procesos de formación integral de sus estudiantes.

La población objeto de estudio de esta investigación es un grupo de 39 estudiantes de la jornada de la mañana del grado décimo de la educación media, con edades comprendidas entre los 15 y los 16 años.

Las sesiones son dirigidas por la autora del presente trabajo quien al mismo tiempo es la profesora titular de la materia Trigonometría. Como investigadora tendrá la responsabilidad de diseñar e implementar las Tareas, así como recolectar la información relacionada con las producciones matemáticas de los estudiantes para su posterior análisis.

4.2 DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente trabajo se desarrolla una investigación de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo, pues interesa analizar la participación, estrategias y procedimientos matemáticos de los estudiantes del grado décimo, cuando se enfrentan a Tareas para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico.

Es por ello que el proceso metodológico adoptado para esta investigación se basa principalmente en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula propuesta por Santos (2007). Esta metodología permite realizar un seguimiento al desarrollo y fortalecimiento del pensamiento algebraico de estudiantes y docentes como miembros activos de una comunidad.

Por tanto es de interés en esta investigación entender el sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto. Por tanto la metodología está compuesta por cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

Figura 12. Estructura Metodológica de la Investigación

Como se muestra en la figura 12 la primera etapa se centra en el diseño y análisis de Tareas que es retroalimentada por la aplicación completa de las etapas del ciclo. La aplicación de este ciclo de investigación le permite al investigador presentar un conjunto de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de decimo grado.

A continuación se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas del Ciclo; particularmente cómo se constituye la Etapa 2 a través de los elementos característicos de una Comunidad Matemática.

4.2.1 Diseño y Análisis de Tareas Esta etapa tiene en cuenta los objetivos del currículo, los resultados de las Pruebas saber, los Estándares y expectativas de la Etapa 9-12 de la NCTM y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de una prueba Diagnóstica que será analizada con detalle en el desarrollo de esta Etapa.

Desde la perspectiva teórica descrita en la Sección anterior se analizan la generalización de patrones presentes en el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la estructura planteada por Rivera con los procesos de deducción, inducción y abducción; así como los elementos característicos del pensamiento algebraico planteados por Radford: El sentido de indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos.

Es importante aclarar que en esta investigación se hace una distinción entre la Tarea y la Actividad en términos de Radford[59]. El diseño de las Tareas es potestad del docente - investigador quien planifica y tiene una idea de lo que puede llegar a suceder en el aula. Pero es a través de la Actividad que dicha tarea promueve que

[59]RADFORD, Luis. Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of research in mathematics education*, 2013

los estudiantes pueden progresivamente tomar conciencia de los significados culturales que han sido históricamente constituidos.

4.2.2 Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad Con base en el diseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior se da paso a la implementación de las Tareas en el aula. Dicha implementación así como el desarrollo de la Actividad están guiados en esta investigación por la construcción de una Comunidad matemática en el aula. Santos-Trigo (2007) propone:

> Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender matemáticos dando énfasis en la resolución de problemas, está que el salón de clase ofrezca oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar ideas matemáticas. En este contexto el papel de los problemas y las ideas que se discuten durante el proceso de resolución parte sustancial que ayuda a crear una comunidad matemática entre los estudiantes[60].

Bajo esta mirada, cada estudiante se concibe como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas matemáticas. Esto propicia el desarrollo de los procesos matemáticos fundamentales, que en esta investigación se sustentan en las directrices dadas por la OCDE (2012):

1. Formulación matemáticas de situaciones.
2. Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
3. Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos. [61]

El desarrollo de la Actividad dentro de la Comunidad Matemática transforma el rol del docente y del estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático.

[60]SANTOS TRIGO, 2007 op. Cit., p. 94
[61]MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA Y DEPORTE, marcos y pruebas de evaluación PISA Matemáticas, Lectura y Ciencia, Instituto de Evaluación Educativa. Madrid 2013 p. 30

Cada estudiante encuentra en el salón de clase un ambiente que le permite pensar y razonar sobre las matemáticas involucradas en la solución de una tarea, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas. Esta interacción permite la formulación de ideas, el desarrollo de argumentos, la validez, verificación y en su medida la demostración que aquello que se propone como verdadero[62].

El desarrollo histórico y epistemológico de las matemáticas muestra que la comunicación y la interacción social son fundamentales para la construcción y consolidación de conocimiento matemático. Por tanto en esta Etapa de la investigación cada estudiante, así como el docente, como miembros de su Comunidad deben desarrollar una ética comunitaria donde muestren que:

- Participan activamente en el espacio público de la Comunidad.
- Muestran un espíritu abierto a las discusiones y debates.
- Son solidarios con los otros miembros (compañeros y profesores).
- Trabajan por la construcción de una conciencia crítica generada a través del trabajo colectivo que genera la solución de una Tarea.

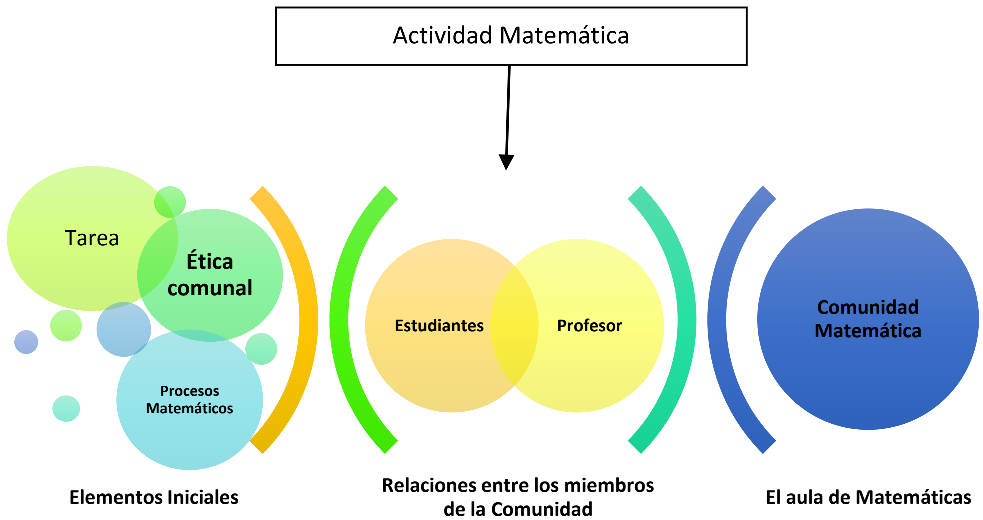
Estas características propuestas por Radford (2013) transforma la manera de concebir las matemáticas y las formas de conocer en el aula. Este ambiente establecido por la comunidad potencia el desarrollo de una forma independiente de pensar sobre las ideas y/o nociones matemáticas, generando procesos creativos y por tanto formas significativas para los sujetos de construir conocimiento matemático.

La figura 13 muestra los principales constructos que guían el diseño y desarrollo de esta Etapa de la investigación. Allí aparecen los elementos iníciales que son el insumo para a partir de las interacciones entre los miembros de la comunidad,

[62]SANTOS TRIGO, 2007 op. Cit., p. 94

generan un ambiente de aula que se caracteriza por los procesos que guían la construcción, desarrollo y consolidación de una Comunidad Matemática en el aula.

Figura 13.Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática



La Comunidad Matemática propicia el trabajo cooperativo que puede iniciar en parejas y motivar la conformación de equipos alrededor de los intereses comunes y las necesidades individuales. Claramente esta manera de concebir el aula y la interacción entre el docente, el estudiante y el saber dinamiza el rol de los estudiantes y docentes.

Al finalizar el Ciclo de investigación propuesto, se podrá dar cuenta de la viabilidad de la conformación de la comunidad, además se podrán plantear características específicas de sus miembros, así como los intereses que deben priorizarse en su conformación, consolidación y permanencia.

4.2.3 Recolección y Selección de datos Esta investigación es de tipo cualitativo por tanto busca dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de decimo grado a través de la solución de problemas y la conformación de una comunidad matemática. Para una recolección amplia de la información que permita una selección de datos exitosa se toma como fuente:

- Análisis de la prueba diagnóstica.
- Videos y Audios de las sesiones de clase: con base en las transcripciones de los videos y de las observaciones del docente - investigador, se construye el diario de campo que permite un análisis más profundo de la Actividad Matemática generada en el aula.
- Entrevista didáctica.
- Interpretación y Análisis Teórico.

En esta Etapa con base en los elementos teóricos que sustentan la investigación se sistematizan los principales resultados de la aplicación. Se realiza una triangulación de la información y se llega a un consenso entre los miembros del Colectivo de Investigación sobre el trabajo realizado por los estudiantes para a la luz de los elementos del marco conceptual determinar cuáles son los procesos que utilizan los estudiantes de decimo grado para solucionar problemas que requieren el desarrollo del pensamiento algebraico.

4.2.4 Análisis de datos Esta etapa se centra en el estudio de la actividad como unidad metodológica de análisis; se analiza, interpretan y construyen conclusiones. En este último momento se evalúa la efectividad de la propuesta con el docente investigador y estudiantes de la institución. Se presentan los resultados, se sacaran algunas conclusiones y se harán las respectivas recomendaciones.

5. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

El propósito de esta investigación se centra en identificar las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes de décimo grado en la aplicación de los algoritmos algebraicos en problemas de generalización de patrones. Como bien lo dice la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los estudiantes saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien"[63]. Para así poder plantear tareas que ayuden a potencializar el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la construcción de una Comunidad Matemática, con la cual se busca propiciar un espacio de interacción en los procesos a través del análisis, argumentación, deducción y aplicación de los procesos lógico matemáticos.

Es así que el desarrollo de esta investigación contempla tres fases que permiten cumplir con nuestros intereses: la primera consiste en la aplicación y análisis de una prueba diagnóstica; la segunda plantea un conjunto de tareas contextualizadas desde situaciones que promueven los procesos de generalización, para que los estudiantes reconozcan el patrón que se presenta por medio de los diferentes tipos de razonamiento inferencial y los niveles de procesamiento de estudiantes mayores propuestos por Rivera; las cuales se organizaron en cuatro intervenciones con los estudiantes; finalmente para la última fase se empleo el diseño de una entrevista a un grupo de estudiantes con el fin de evidenciar el cambio progresivo de las situaciones anteriores.

Para entender el análisis de las Tareas utilizadas en la prueba diagnóstica y las intervenciones es importante puntualizar el tipo de codificación de registro usada

[63]NCTM, Principios. Estándares para la educación matemática, op. Cit.,p.17

en la documentación de la actividad. En las transcripciones de los videos presentados; para identificar cada estudiante asignamos un código diferente para proteger su verdadera identidad; por ejemplo E1 es el código asignado para el primer estudiante y para los grupos conformados utilizamos un código G (E1, E2, E3) donde se identifican los integrantes de cada grupo. Las transcripciones en lo posible están acompañadas por imágenes de los participantes o de las producciones de los estudiantes de sus hojas de trabajo.

5.1 PRUEBA DIAGNOSTICA

El propósito en esta primera fase, denominada Prueba Diagnóstica es empezar a reconocer cómo los estudiantes del grado decimo desarrollan y aplican los procesos de generalización a partir del estudio de patrones figúrales, numéricos y figúrales con apoyo tabular.

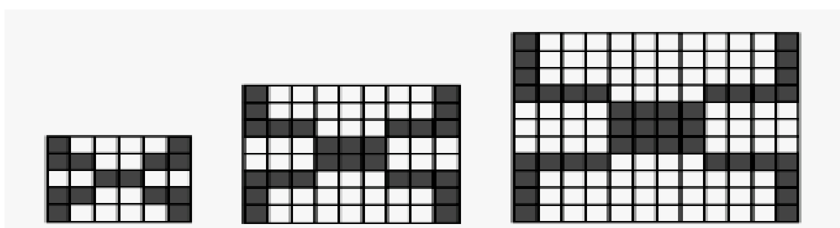
La prueba diagnóstica está compuesta por cinco Tareas, cada una con preguntas que le conceden al estudiante la posibilidad de entrar en un proceso sistemático de identificación y análisis de patrones. Las Tareas fueron presentadas de forma escrita a los 39 estudiantes del grado décimo, 19 mujeres y 20 hombres, que tienen las siguientes características: la gran mayoría 28 estudiantes son de estratos socioeconómicos 1 y 2, los restantes son de estratos 3 y 4; están en edad promedio entre 15 y 16 años; 10 estudiantes viven con padres separados; 25 de los padres de familia son trabajadores independientes y 13 son empleados.

La actividad de la prueba diagnóstica consiste en trabajar de forma individual la solución de las Tareas, acompañados por la asesoría y orientación del docente.

TAREA 1

La primera Tarea presenta una secuencia geométrica de rectángulos divididos en cuadrados, en los que se sombrea una determinada cantidad de cuadros siguiendo un patrón; Rivera (2013) denominó este ejercicio "patrón cuadrado creciente cuadrado de la rana". Con esta Tarea se busca que los estudiantes establezcan una relación entre el tamaño de cada rectángulo y el número de cuadrados sombreados en cada término. A continuación se muestra un posible camino de solución, para cada ítem de cada de la Tarea se realiza un análisis en términos de los elementos del Marco Conceptual.

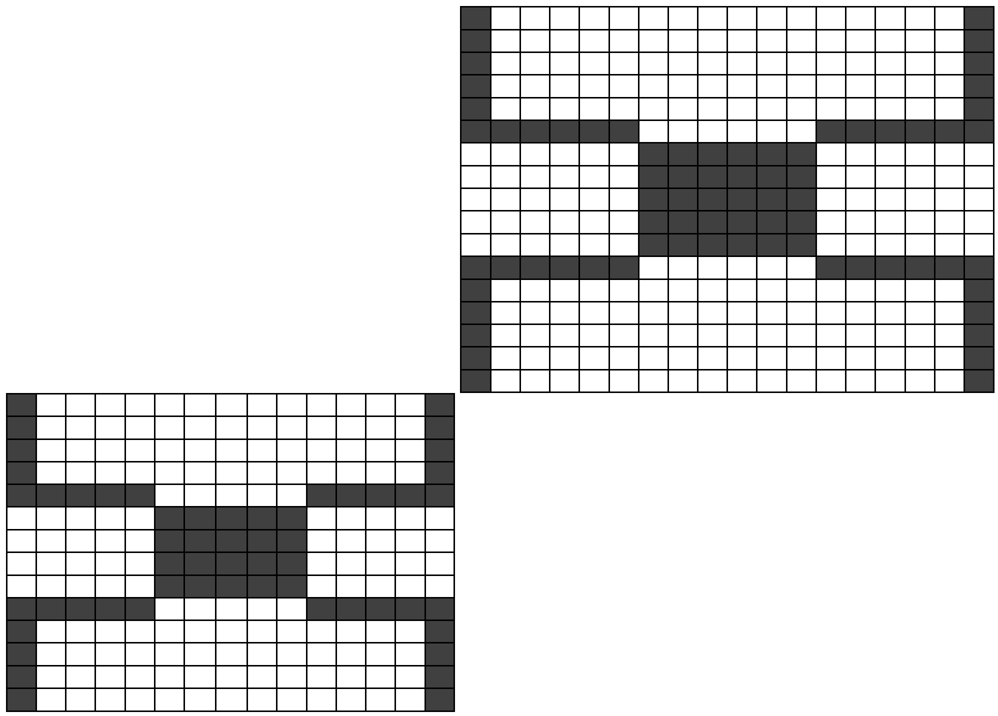
1. Observe cuidadosamente la siguiente secuencia de figuras conformada por cuadrados grises.



1 2 3 …

Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que en el término 1 se encuentra un rectángulo 6×5, del cual están sombreados 14 cuadritos en forma de "rana". En el término 2 un rectángulo 9×8 con 26 cuadritos sombreados y en el 3 un rectángulo 12×11 con 40 cuadritos sombreados. De manera que en cada nueva posición aumentan las dimensiones (base y altura) del rectángulo y la cantidad de cuadros sombreados. Luego de comprender el patrón e identificar el número de cuadrados que aumenta el rectángulo y su relación con el número de cuadrados sombreados que forman la "rana" en cada posición, el estudiante podría generar una conjetura que conlleve a una reclamación abductiva, que le permiten dibujar las dos figuras del ítem a, tal como aparecen a continuación.

a. Dibuje el término 4 y el término 5 de la secuencia.



.

Término 4 Término 5

Para este ítem se busca que el estudiante con base en el análisis de las figuras realice conjeturas sobre el patrón que determina los términos de la secuencia e inicie la construcción de su regla inductiva, que puede generarse en relación a las dimensiones del rectángulo que forma la secuencia y a través de su explicación se evidencie la veracidad de las mismas.

b. ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura que corresponde al término 4? ¿al término 5? ¿al término 6? Explique ampliamente su respuesta.

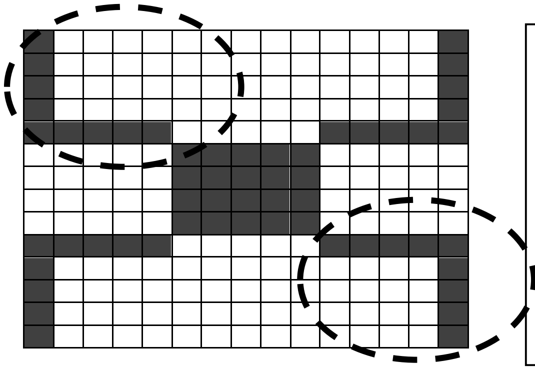
Para responder el ítem c, se espera que el estudiante con base en el análisis de los ítems anteriores organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva, a través de la variación detectada y la relación que existe entre los términos de la secuencia, las dimensiones del rectángulo y el número de cuadrados sombreados de cada figura para formar la rana. Con base en este proceso se podría establecer que:

> *"Dejando la figura anterior las dimensiones (base y altura) del rectángulo aumentan en 3 y los cuadrados sombreados aumentan de acuerdo al tamaño del rectángulo",* evidenciando un nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente de relaciones.

c. ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura 10?

En esta pregunta se espera que el estudiante una vez haya evaluado su hipótesis y dibujando las anteriores figuras de los términos correspondientes, reconozca la relación que existe entre el número de cuadrados vertical u horizontalmente (incluyendo el cuadrado central) y la posición del término dentro de la secuencia. Esto le permite comprobar su regla de manera inductiva ordenada y llegar a deducir, por ejemplo, que:

> *Si en la figura 9 hay 166 cuadrados sombreados la siguiente figura que es la 10 tendrá 194 cuadrados sombreados, los cuales están relacionados con un cuatro patas de la rana que van aumentando de un cuadro en cada termino, y con un cuerpo (rectángulo central) cuyas dimensiones están en relación al termino de la secuencia.*

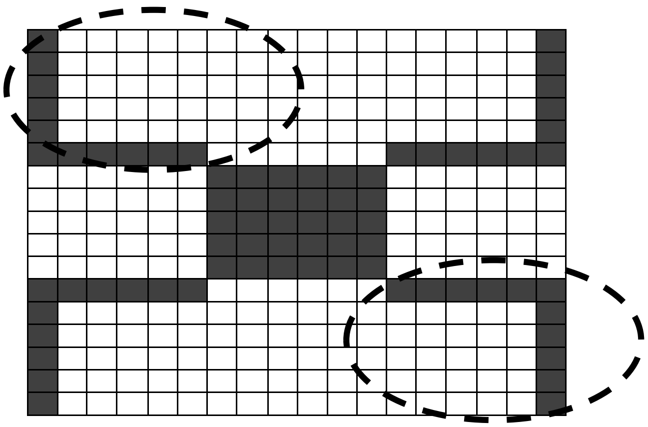


Cuatro patas cada una de 9 cuadros Negros y un cuerpo (rectángulo) de $5 \times 4 = 20$ *cuadrados negros*

$$total\ de\ cuadros\ negro$$

$$(4 \times 9) + (5 \times 4) = 56$$

Término 4



Cuatro patas cada una de 11 cuadros Negros y un cuerpo (rectángulo) de $5 \times 6 = 30$ *cuadrados negros*

$$total\ de\ cuadros\ negro$$

$$(4 \times 11) + (6 \times 5) = 74$$

Término 5

d. ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura 100?

Se espera en este ítem que el estudiante compruebe que su hipótesis se cumple para todos los rectángulos que realizó aplicando un proceso inductivo, que lo conduzca a identificar que la posición de cada valor en cualquier rectángulo (figura) de la secuencia determina directamente el numero de cuadrados sombreados.

e. Complete la siguiente tabla:

Término de la secuencia	1	2		4		6			9	
Número de cuadrados grises			40							

Finalmente, en los dos últimos ítems se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Esto, podría dar evidencia de un razonamiento deductivo, a través del planteamiento de una expresión que relacione las cuatro patas y el cuerpo de la rana; se espera que los estudiantes planteen expresiones como$(4 \times cuadros\ de\ cada\ pata) + (area\ del\ rectángulo)$ e incluso que hagan uso de expresiones más formales como $(4 \times (2n + 2)) + (n \times (n + 1))$ donde n es el término de la secuencia.

f. Halle una fórmula que le permita encontrar el número de cuadrados grises para cualquier término de la secuencia.

g. ¿Qué término de la secuencia tiene 56 cuadrados grises? Explique.

Análisis a posteriori

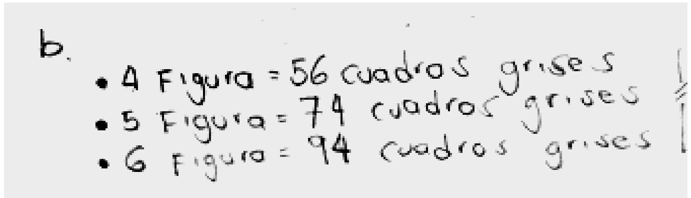
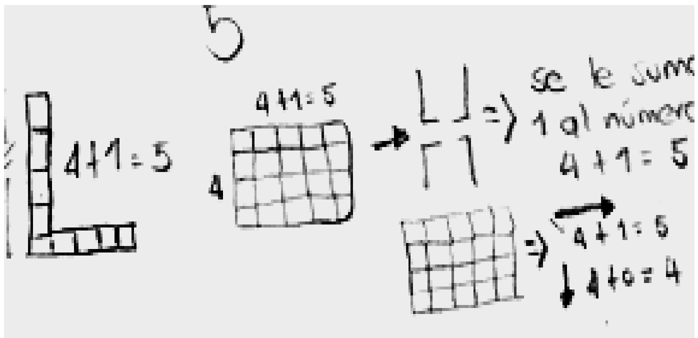
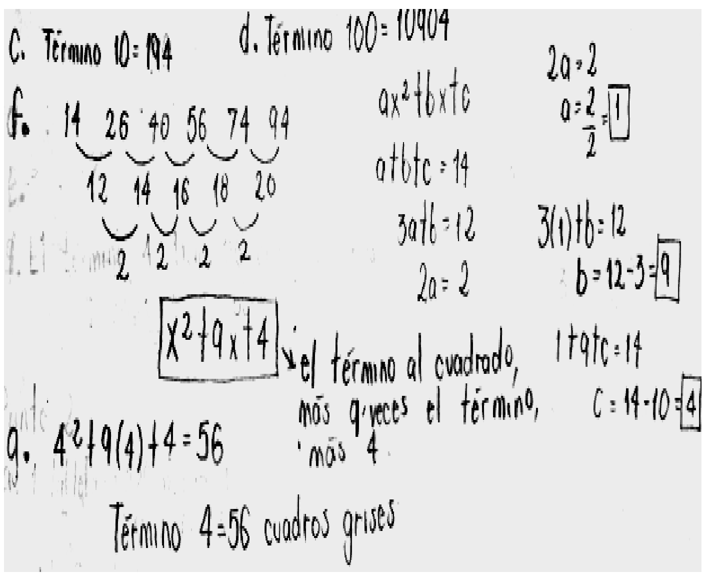
Para analizar la TAREA 1 se han tomado los datos de algunos estudiantes, teniendo en cuenta que sus evidencias reflejan un importante razonamiento inferencial y análisis de las fases en el proceso de generalización.

La solución de esta primera Tarea permitió evidenciar la forma como los estudiantes observan e infieren hipótesis a través de ideas abductivas que les permiten predecir las figuras siguientes y reconocer la formación del tipo de estructura de la secuencia. En los ítems a, b, c, e y g se observa que los estudiantes dibujan los términos siguientes de la secuencia (4 y 5) y realizan procesamientos de conversión numérica dependiente de objeto para encontrar la respuesta; esto aplicando procesos abductivos donde se fueron paso por paso hasta llegar al resultado. En los ítems f y g se esperaba que los estudiantes pudieran avanzar en sus procesos de inducción e incluso llegaran a la deducción. Pero se evidencia que solo algunos hicieron las conjeturas necesarias para establecer el patrón y llegar a una fórmula.

A continuación se presentan algunas de las respuestas que los estudiantes plasmaron.

Tabla 2. Análisis Tarea 1 prueba diagnóstica

Est	Evidencia	Análisis
E17	b) • Figura 4 = 56; figura 5 = 74; figura 6 = 94 • Cada figura tiene 2 cuadros de diferencia que el resultado de la diferencia anterior Ejemplo: El 1 tienen 12 cuadros de diferencia respecto al dos, entre el 2 y 3 hay 14, entre el 3 y 4 hay 16, 4 y 5: 18, y así sucesivamente.	El estudiante determina la cantidad de cuadros grises para los términos 4° y 5°, identificando rasgos comunes de la secuencia como son: el aumento en 2 cuadros en cada término.
E34	b. El término 4 tiene 56 cuadrados grises. 9 x 4 = 36. 36 + 20 = $\boxed{56}$ El término 5 tiene 74 cuadrados grises. 11 x 4 = 44 44 + 30 = $\boxed{74}$ El término 6 tiene 94 cuadros grises. 13 x 4 = 52. 42 + 52 = $\boxed{94}$	El estudiante conjetura, y describe de forma numérica para explicar el desarrollo de estos ítems. Evidencia una forma de Razonamiento deductivo realizando un proceso de conversión numérica dependiente de relaciones.

Est	Evidencia	Análisis
E02		El estudiante utiliza un procesamiento y conversión grafica dependiente de objetos. Se evidencia un razonamiento deductivo en esta conjetura. Aquí se puede observar que el estudiante utiliza la figura para establecer un patrón y encontrar la cantidad de cuadros negros de las figuras 4 y 5.
E30		Se evidencia la clara veracidad de la idea abductiva inicial que el estudiante E30 construyó. Además de realizar un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones, establece una regla que le permite evaluar su proceso inductivo, permitiéndole lograr una expresión deductiva específica de la cantidad de cuadros negros en cada término de la secuencia.

En la segunda Tarea propuesta en el diagnóstico se presenta una situación numérica que involucra un patrón a través de la medicación de dos pastillas que deben ser ingeridas cada ocho horas; involucrando el concepto de porcentaje para establecer la cantidad de medicamento que queda en el organismo. El fin de esta Tarea es buscar que los estudiantes deduzcan el patrón y determinen la cantidad de medicamento que queda en el organismo al cabo de un tiempo determinado.

TAREA 2

> Una estudiante llamada Paula se golpeó en una rodilla jugando voleibol y su médico le prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Paula tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo, cada 8 horas.
>
> *Ejercicio modificado de THALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemática.*

En esta tarea es fundamental tener presente que a medida que se va consumiendo el medicamento siempre va quedando una cantidad en el organismo; la cual se acumula con la nueva dosis para filtran el 60%; razón por la cual en las primeras tomas el nivel de droga en el cuerpo va aumentando gradualmente pero con el pasar de varios días 10 se empieza a general una constante en el nivel de droga que queda en el cuerpo; pero situando en la realidad se espera que el estudiante desprecie cantidad de medicamento que va quedando en el organismo, es decir que asuma una relación directa entre el medicamento consumido y el número de días; se espera que los estudiantes establezcan la relación entre días y horas. Además, que incluyan el concepto de porcentaje. Siguiendo este análisis el estudiante debe realizar la conversión de días a horas. 10 días equivalen a 240 horas, y el medicamento es ingerido cada 8 horas, lo cual indica que en las 24 horas del día debe consumir 3 veces el medicamento. Una vez entendida esta relación entre el número de horas y el medicamento consumido (2 pastillas de 220 miligramos), se espera que el estudiante realice un razonamiento inductivo para determinar el porcentaje equivalente a la cantidad de medicamento que queda en su 60%

organismo, 2 pastillas por 220 miligramos, 440 miligramos de medicamento; el cuerpo filtra un 60% por lo cual en el organismo quedan 176 miligramos por cada toma. Como son 3 tomas en un día, en el organismo quedan 528 miligramos de medicamento diario. Y una vez establecido el patrón diario de medicamento determine lo queda en el organismo en los 10 días; 5280 miligramos de medicamento, realizando un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones.

1 día → 24 horas medicamento cada 8 horas → 3 veces por día
10 días → 240 horas en 10 días → 30 dosis de medicamentos

2 pastillas de 220 miligramos por dosis y los riñones filtran un 60%

a. $2 \times 220 = 440$ mg de medicamento $440 \times 3 = 1320$ $1320 \times 60\% = 792$ En el organismo queda en un día $1320 - 792 = 528$ $528 \times 10 = 5280$	b. $2 \times 220 = 440$ mg de medicamento. El cuerpo filtra 60%, queda en el organismo 40% ; $440 \times 40\% = 176$ por dosis, Veces al día durante diez días $176 \times 3 \times 10 = 5280$

(a) “Calculo del porcentaje del medicamento filtrado por el organismo y diferencia para obtener el medicamento que queda en el cuerpo en un día “
(b) “Calculo del porcentaje directo de la cantidad de medicamento que queda el organismo en un día”

a. ¿Qué cantidad de medicamento quedaba en el sistema circulatorio de Paula al cabo de los 10 días?

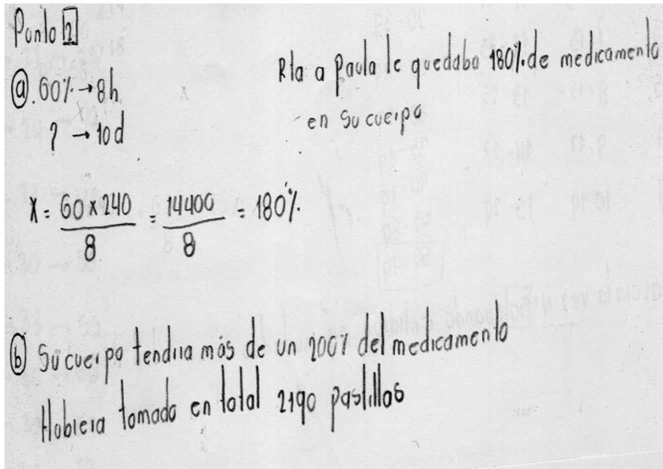
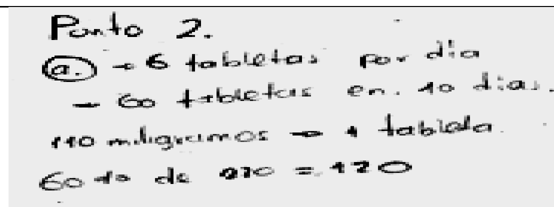
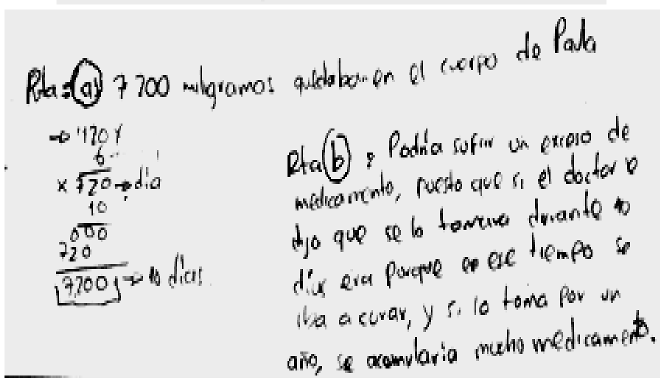
Finalmente en este ítem, se espera que con el análisis que se espera que haya realizado, el estudiante logre abducir la cantidad de medicamento que queda en el organismo en cualquier cantidad de días, para el caso particular para un año, 365 días en el organismo de Paula quedaran $528 \times 365 = 192720$ miligramos de medicamento logrando evidenciar un proceso deductivo.

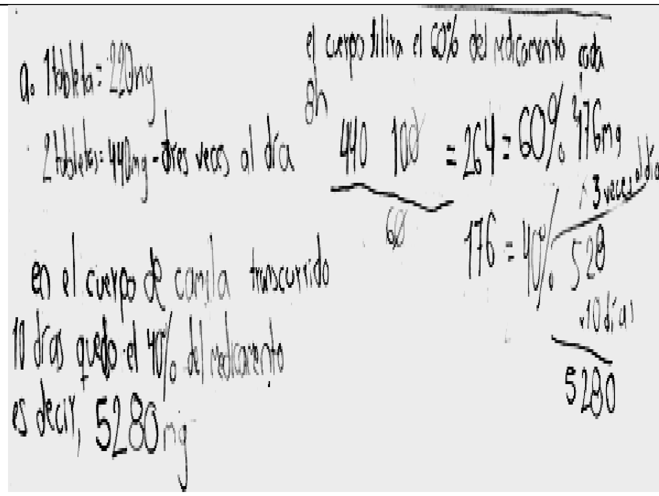
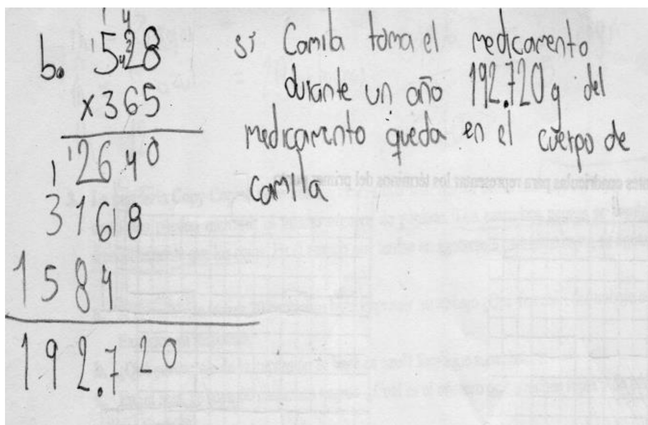
b. Y si hubiera tomado la medicina durante un año, ¿qué hubiera pasado con Paula? Explique ampliamente su respuesta.

Análisis a posteriori

Para la segunda tarea se observó que la totalidad de estudiante siguió el análisis esperado y no tuvo en cuenta la cantidad de medicamento que iba quedando en el organismo; es decir todos se fueron por análisis de relación directa entre la droga y los días; siendo así un gran número de los estudiantes trataron de hacer un proceso abductivo y establecer una relación de medicamento diario, para luego inferir el de 10 días utilizando una regla de 3. Pero sus cálculos son incorrectos no saben plantear la relación formulada en el problema y por lo tanto sus cálculos son incorrectos. Al no poder establecer un análisis abductivo en el primer ítem la gran mayoría no comprendió que debía hacer para un nivel mayor (un año) ítem b. Es evidente una gran deficiencia en la comprensión de relaciones y proporciones ya que solo un estudiante pudo realizar el problema.

Tabla 3. Análisis Tarea 2 prueba diagnóstica

Est	Evidencia	Análisis
E05	 Punto 2 a) 60% → 8h ? → 10d X = 60 x 240 / 8 = 14400 / 8 = 180% Rta a Paula le quedaba 180% de medicamento en su cuerpo b) Su cuerpo tendria más de un 200% del medicamento Habria tomado en total 2190 pastillas	Se puede observar que el estudiante trata de realizar un procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto. Él intenta realizar un proceso inductivo estableciendo una correspondencia entre las variables a partir de una regla de 3 directa. Sin embargo, no hay claridad en las relaciones y su proceso no es correcto.
E12	 Punto 2. a. → 6 tabletas por dia → 60 tabletas en 10 dias. 110 miligramos → 1 tableta. 60 de de 070 = 120  Rta: a) 7 700 miligramos quedaban en el cuerpo de Paula → 120 6 x 720 → dia 10 000 720 7200 → 10 dias Rta b) Podria sufrir un exceso de medicamento, puesto que si el doctor le dijo que se lo tomara durante 10 dias era porque en ese tiempo se iba a curar, y si lo toma por un año, se acumularia mucho medicamento.	El estudiante organiza la información e intenta realizar un procesamiento de conversión numérica dependiente de objeto, a partir de un razonamiento abductivo pero sus planteamientos son incorrectos y por lo tanto no logro realizar la tarea.

Est	Evidencia	Análisis
E20		En esta Tarea el estudiante muestra una correcta comprensión y análisis de las variables realizando un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones, se evidencia un proceso deductivo al establecer una regla para 1 día y generalizándolo para encontrar la respuesta a los demás ítems.

En la tercera Tarea se presenta una situación numérica que involucra razones entre tres tintas negra, roja y azul, con su nivel de uso para establecer un patrón. El fin de esta tarea es buscar que los estudiantes deduzcan el patrón y logren determinan la razón de proporción entre el uso de cada tinta a través de los procesos de conversión figural dependiente de relaciones y finalicen en la deducción de una expresión que dé respuesta al problema.

TAREA 3

> La papelería Copy Copias tiene una impresora que solo utiliza cartuchos negros, rojos y azules. Todos los cartuchos pueden imprimir el mismo número de páginas. Los cartuchos negros se cambian 4

veces más frecuentemente que los rojos. En el tiempo que tardan en agotarse 3 cartuchos rojos, se agotan 5 azules.

Ejercicio modificado de THALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemática.

En los ítems a y b se espera que los estudiantes establezcan la relación entre la cantidad de tinta negra, rojo y azul utilizada por la papelería. Mediante una relación o representación grafica se espera que el estudiante plantee una secuencia figural en relación a la cantidad de tinta utilizada en cada color, creando una secuencia que lo lleve a inferir que como $3R = 5A$, y $4N = 1R$, entonces $3R = 12N$; realizando un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones podrá determinar que los 20 cartuchos se distribuyen en $12N + 3R + 5A$; realizando un nivel de procesamiento de conversión numérica dependiente de un objeto puede concluir que la fracción del trabajo que se realiza en negro es 12 /20 es decir $^{3}/_{5}$ del trabajo. A través de un razonamiento deductivo se espera que el estudiante concluya que la parte del trabajo en tinta azul es 5 de 20, lo que representa $^{1}/_{4}$del trabajo es decir el 25%.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{4N = 1R} \\ \mathbf{3R = 5A} \end{array}\right\} \quad \text{por lo que} \; \mathbf{3R = 1R + 1R + 1R = 4N + 4N + 4N = 12N}$$

$$\mathbf{12N + 3R + 5A = 20\ cartuchos}$$

a. Si la papelería utiliza 20 cartuchos para imprimir un trabajo ¿Qué fracción del trabajo se hace en negro? Explique su respuesta.

b. ¿Qué porcentaje de la impresión se hace en azul? Explique su respuesta.

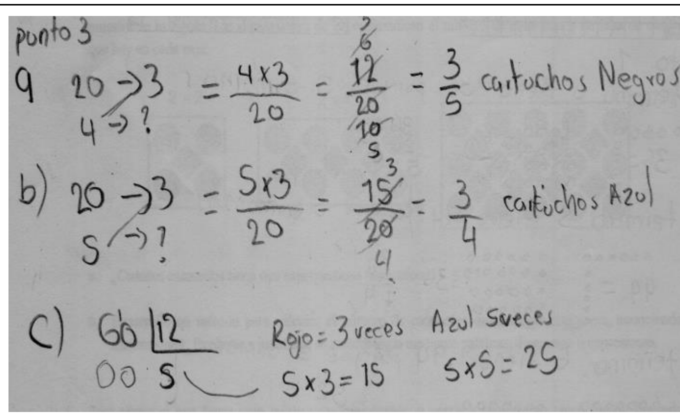
Finalmente en este ítem, se espera que con el análisis realizado en los ítems anteriores, el estudiante logre hacer el proceso de deducción para la distribución de las tintas en 20 tarros y lo pueda generalizar a 60 tintas, es decir 20×3 da 60 y por lo cual las tintas deben estar distribuidas $3 \times (12N + 3R + 5A)$; siendo 9 rojas y 15 azules, logrando así un nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente del objeto.

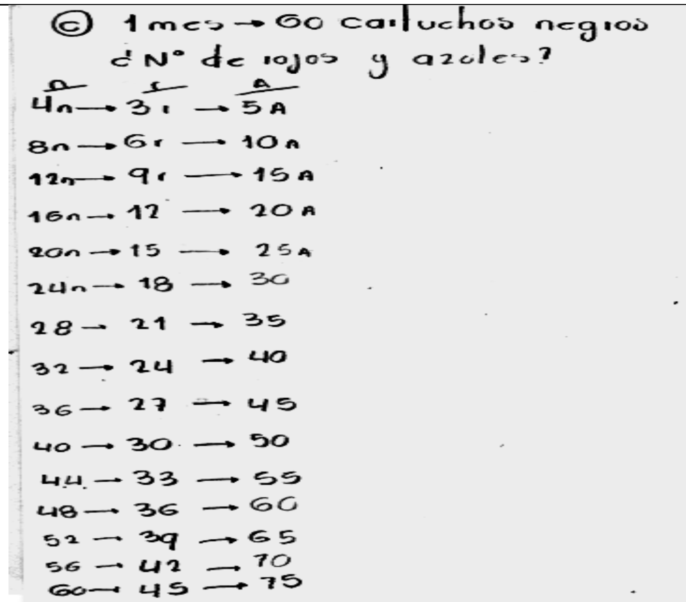
c. En un mes, se usan 60 cartuchos negros. ¿Cuál es el número de cartuchos rojos y de azules utilizados en ese tiempo?

Análisis a posteriori

La solución de esta tarea implicaba que el estudiante realizara un proceso de relación entre la tinta que se utiliza por cada color de cartucho, para encontrar la solución se evidencia que los estudiantes realizaron la tarea mediante procesamiento de conversión numérica dependiente de relaciones y procesos abductivo, ayudándose de una representación grafica o simbólica.

Tabla 4. Análisis Tarea 3 prueba diagnóstica

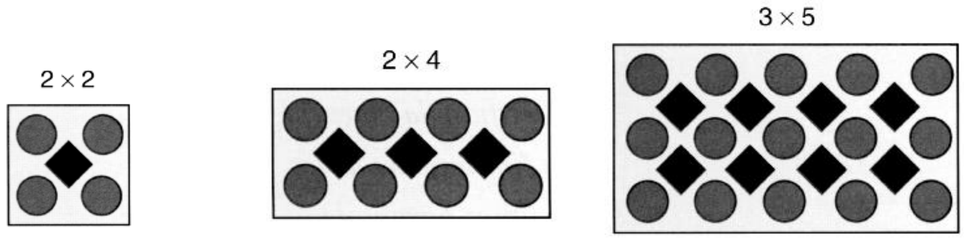
Est	Evidencia	Análisis
E37		El estudiante determina la proporción de tintas realizando una conversión numérica dependiente de relaciones y por medio de un razonamiento deductivo lo generaliza para los 60 cartuchos de tinta negra.

Est	Evidencia	Análisis
E34	 © 1 mes → 60 cartuchos negros ¿N° de rojos y azules? n r A 4n → 3r → 5A 8n → 6r → 10A 12n → 9r → 15A 16n → 12 → 20A 20n → 15 → 25A 24n → 18 → 30 28 → 21 → 35 32 → 24 → 40 36 → 27 → 45 40 → 30 → 50 44 → 33 → 55 48 → 36 → 60 52 → 39 → 65 56 → 42 → 70 60 → 45 → 75	El estudiante muestra una correcta percepción de la relación de proporción entre las tintas y evidencia un razonamiento abductivo estableciendo una secuencia hasta llegar a los 60 cartuchos negros.

Para la cuarta Tarea se presenta una secuencia geométrica grafica de rectángulos formados siguiendo un patrón entre dulces y chocolates, con esta tarea se busca que los estudiantes puedan evidenciar una relación entre las dimensiones de la caja y la cantidad de chocolates y caramelos que determinan el patrón; se espera que los estudiantes realicen procesamiento numéricos o gráficos para llegar a un nivel abductivo donde puedan establecer la fórmula general que determina la secuencia.

TAREA 4

> Una empresa nacional ofrece cajas con chocolates y caramelos. Para empacar las cajas, organizan los chocolates y caramelos de manera que siempre quede un caramelo entre cada cuatro chocolates, tal como se muestra en la figura. Las dimensiones de las cajas indican el número de columnas y de filas de chocolates que hay en cada caja.



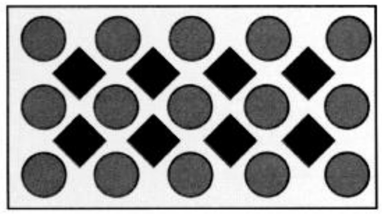
Ejercicio tomadoTHALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemática

a. ¿Cuántos caramelos tiene una caja que tiene dimensiones 5×6 ?

Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que en el primer término de la secuencia hay una caja 2×2 con un caramelo; el segundo elemento está conformado por una caja 2×4 con tres caramelos; y el tercer elemento una caja 3×5 con ocho caramelos. De esta manera el número de caramelos esta en relación con las dimensiones de la caja y así los estudiantes puedan determinar un patrón de construcción e identificar el aumento de caramelos por cada caja. Esto puede llevarlos a plantear una conjetura que le permita a cada estudiante construir un razonamiento abductivo para determinar el contenido de la caja 5×6.

En el segundo ítem se espera que el estudiante logre generar un razonamiento deductivo que le permita identificar el cambio y la correspondencia del número de chocolates y caramelos respecto a las dimensiones de la caja. Con este análisis podrá establecer que: “el número de caramelos es el resultado de la multiplicación de las dimensiones de la caja reducidas en 1”, realizando un nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente de relaciones.

3×5



Caja de altura 3 y base 5, tiene 15 chocolates y 8 caramelos.
Son 4 filas (base-1) de 2 (altura -1) caramelos

$$total\ de\ caramelos$$

$$2 \times 4 = 8$$

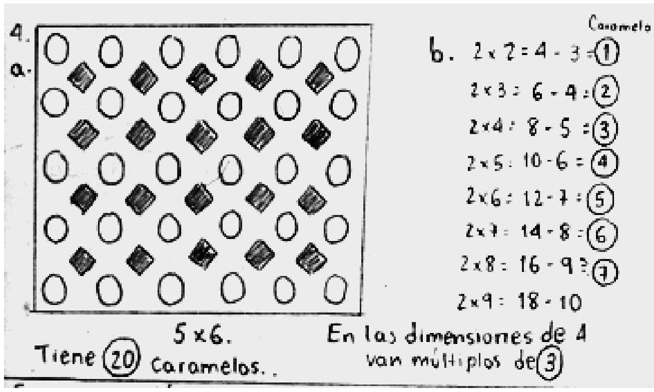
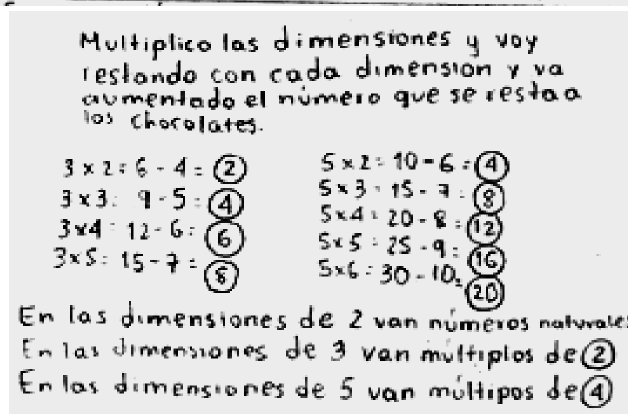
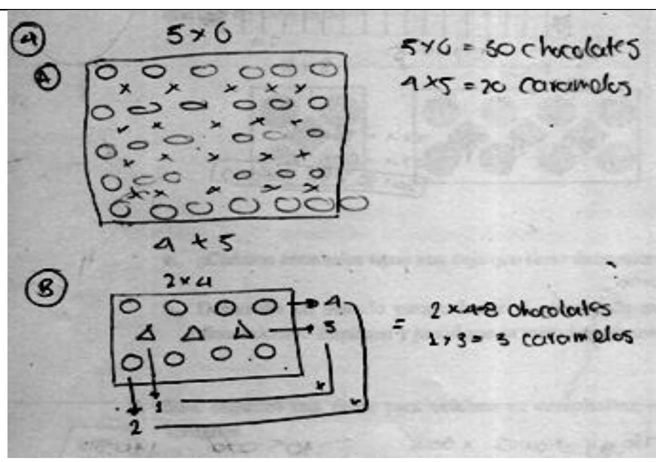
Caja	**Regla**	**N° de caramelos**
2×2	$1 \times 1 = 1$	1
2×4	$1 \times 3 = 3$	3
3×5	$2 \times 4 = 8$	8
$n \times m$	$(n-1) \times (m-1)$	

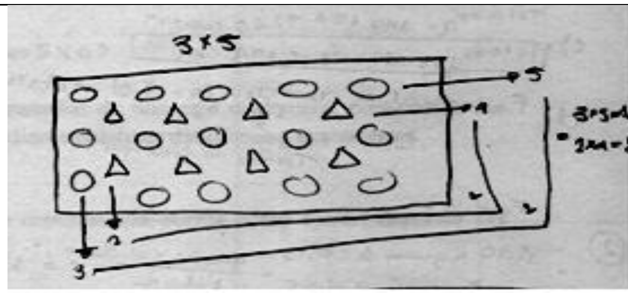
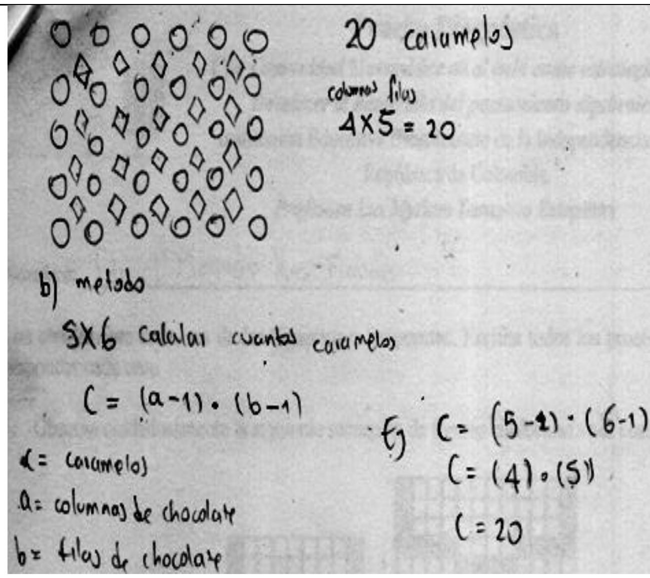
b. Desarrolle un método para calcular el número de caramelos de una caja cualquiera, conociendo sus dimensiones. Explique y justifique su metodología mediante palabras, diagramas o expresiones.

Análisis a posteriori

En esta tarea se evidenció que en el ítem a que correspondía a la grafica de un patrón de dos pasos siguientes, todos los estudiantes lograron determinar el número de caramelos mediante un razonamiento abductivo realizando las graficas correspondientes y en siguiente ítem que requería una mayor comprensión del patrón para desarrollar el ejercicio continuaron con razonamientos abductivos;solamente un estudiante alcanzó a realizar razonamiento deductivos determinando con propiedad el patrón a partir de una regla general de la secuencia.

Tabla 5. Análisis Tarea 4 prueba diagnóstica

Est	Evidencia	Análisis
E34		En la evidencia se muestra que el estudiante logra reconocer la relación de correspondencia que existe entre las dimensiones de la caja y el número de caramelos, esto le permite construir e identificar su regla inductiva para cada caja. Por tanto se concluye que E4 logra encontrar la relación que tiene la regla inductiva con el número de la figura, por ende logra determinar el número de caramelos.
E25		El estudiante E25 determina la cantidad de chocolates evidenciando un nivel de procesamiento de conversión grafica dependiente de relaciones. Y por medio de un razonamiento deductivo soluciona la Tarea.

Est	Evidencia	Análisis
		
E29		Este estudiante a partir de una conjetura, desarrolla un razonamiento inductivo y un nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones que lo lleva a la construcción de una fórmula que comprueba por medio de un ejemplo.

En la última Tarea del diagnóstico se presenta una secuencia descrita en términos verbales generada por la entrada de invitados a una fiesta cada vez que suena el timbre, este problema fue propuesto por Cai y Hwang (2002, p. 406) “Tarea de resolución de timbres”. El fin de esta tarea es motivar a los estudiantes para que deduzcan la relación entre el número de invitados que llegan a la fiesta y las veces que suena el timbre.

TAREA 5

> Sara organizó una fiesta para celebrar su cumpleaños, a continuación cuenta cómo fueron llegando sus invitados.
> La primera vez que suena el timbre, entra 1 invitado.
> La segunda vez que suena el timbre, entran 3 invitados.

La tercera vez que suena el timbre, entran 5 invitados.
La cuarta vez que suena el timbre, entran 7 invitados.

Ejercicio tomado de Rivera

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar la correspondencia entre cada vez que suena el timbre y el número de invitados que ingresan a la fiesta. Y a través de alguna representación pueda relacionar gracias a un razonamiento deductivo una regla general indicativa de la relación entre cada vez que suena el timbre y el número de invitados que entran a la fiesta. De esta manera se espera que puedan deducir la cantidad de invitados que ingresan la décima vez que suena el timbre, 19 invitados.

De seguir llegando los invitados de la misma manera:

a. ¿Cuántos invitados entrarán la decima vez que suene el timbre? Explique su respuesta.

Para este ítem se espera que con el análisis realizado hasta el momento, el estudiante logre comunicar las generalizaciones que pudo realizar en el primer ítem y pueda desarrollar un procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones que lo lleven a inducir una expresión para representar el patrón.

b. Escriba una regla o describa en palabras cómo encontrar el número de invitados que entró cada vez que suena el timbre.

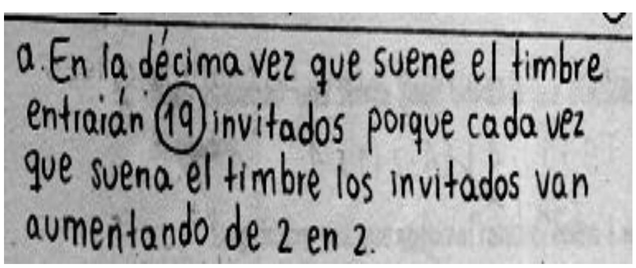
En este último ítem se busca verificar el dominio y comprensión por parte del estudiante del patrón establecido, dado que debe invertir el proceso en la fórmula que construyó en el ítem anterior. Del número del timbre establecía la cantidad de invitados. Y ahora de la cantidad de invitados va a inferir el número del timbre.

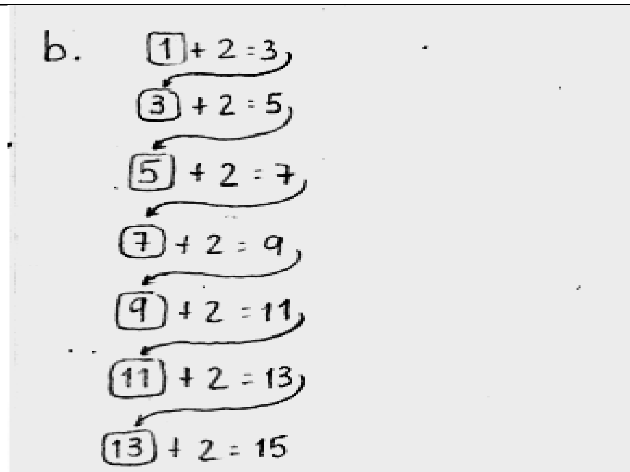
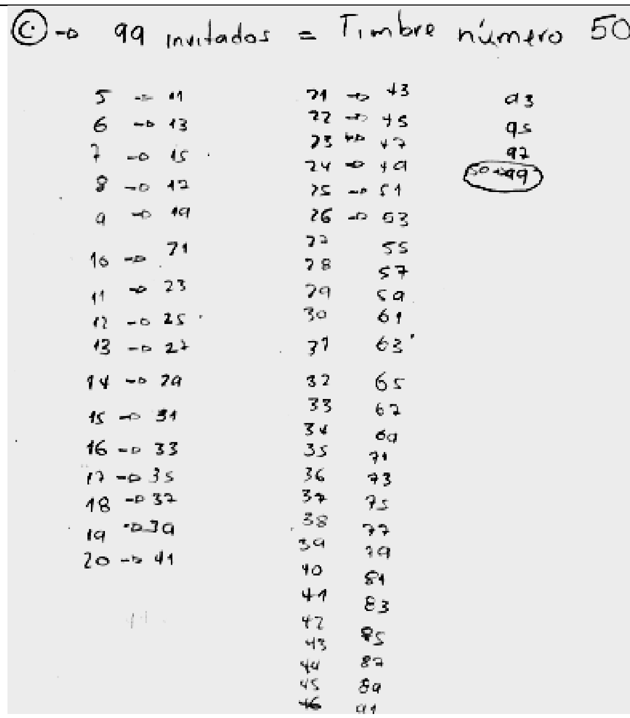
c. Si una vez que sonó el timbre entraron 99 invitados a la fiesta. ¿Qué vez era la que sonó el timbre? Explique o muestre cómo encontró la respuesta.

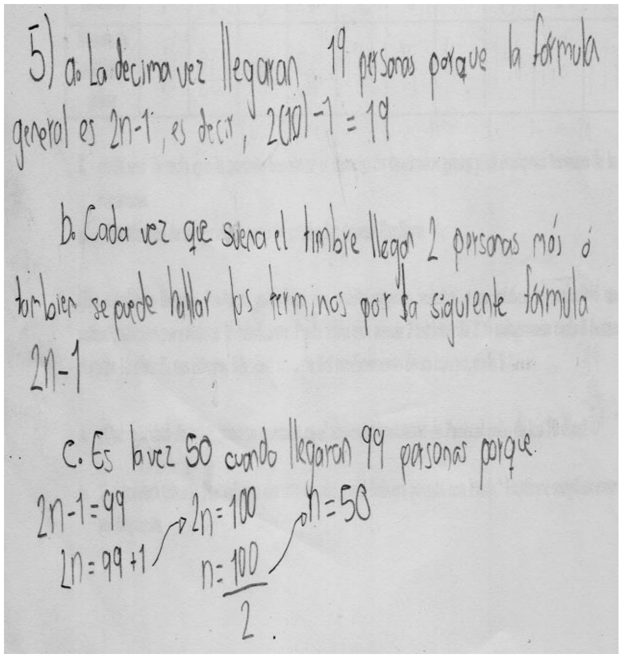
Análisis a posteriori

La mayoría de los estudiantes lograron encontrar el número de invitados, pero lo hicieron mediante un razonamiento abductivo siguiendo paso a paso hasta llegar al decimo timbre, utilizando diferentes sistemas de representación, pero solo unos pocos comprendieron la regla que determinaba la secuencia y por lo tanto muchos de ellos no pudieron describir el patrón. El último ítem la mayoría de estudiantes no lo resolvió y los estudiantes que llegaron a la respuesta lo hicieron por medio de razonamiento abductivos siguiendo el término hasta llegar a los 99 invitados. Cabe resaltar que un buen número de estudiantes inicio la secuencia pero falló en sus cálculos.

Tabla 6.Análisis Tarea 5 prueba diagnóstica

Est	Evidencia	Análisis
E34	 a. En la décima vez que suene el timbre entraián 19 invitados porque cada vez que suena el timbre los invitados van aumentando de 2 en 2.	El estudiante, hace el reconocimiento del tipo de estructura en este caso de incremento de invitados en la secuencia, añadiendo dos invitados respecto a la cantidad anterior, donde se identifica que desarrolla un razonamiento abductivo y un nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones. .

Est	Evidencia	Análisis
		
E12		En este nivel de razonamiento abductivo, el estudiante conoce el factor de crecimiento determinado por la secuencia. Pero no logró plantear una ecuación general, simplemente sigue una secuencia como un cálculo mental, pero no hay una explicación o una fórmula con rigor matemático; realiza un procesamiento de conversión numérica dependiente de objeto.

Est	Evidencia	Análisis
E20	 5) a. La decima vez llegaron 19 personas porque la formula general es $2n-1$, es decir, $2(10)-1 = 19$ b. Cada vez que suena el timbre llegan 2 personas más ó tambien se puede hallar los terminos por la siguiente formula $2n-1$ c. Es la vez 50 cuando llegaron 99 personas porque $2n-1=99 \rightarrow 2n=100 \rightarrow n=50$ $2n=99+1$ $n=\frac{100}{2}$	El estudiante realizó un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones y establece una regla que le permite evaluar su razonamiento inductivo. Construye una expresión deductiva de la cantidad invitados en cada término de la secuencia

En general el análisis de la prueba diagnóstica permitió evidenciar que algunos estudiantes tienen ideas intuitivas sobre cómo abordar las tarea propuestas, y en general la mayoría de ellos llegan a la solución por medio de razonamientos abductivos; así como gran parte también utiliza los niveles de procesamiento y conversión grafica y numérica dependiente de objeto. Sin embargo en muchos estudiantes existe ideas confusas para utilizar expresiones que involucran letras, en varios de sus procesos evocan representaciones de fórmulas y conceptos ya vistos pero de los cuales no hay una comprensión y claridad de su finalidad. Para este nivel de grado décimo se pensaría que muchos estudiantes pueden evidenciar un razonamiento inductivo, pero la prueba refleja que es necesario trabajar en situaciones que ayuden a potencializar todos los tipos de razonamiento y los niveles de procesamiento; cabe resaltar que existe conceptos básicos como porcentaje, conversión y equivalencia que también deben ser reforzados.

5.2 SESIONES DE INTERVENCIÓN

Las intervenciones están programadas con una duración de dos horas de clase, distribuidas en tres partes: la primera consiste en un trabajo individual que da la posibilidad para que cada estudiante pueda conjeturar y proponer sus posibles razonamientos en torno a la solución; la segunda es un trabajo colectivo por equipos donde los estudiantes interactúan y socializan sus respuestas para llegar a consensos grupales, y la parte final está destinada para la que los participantes argumenten, propongan las posibles soluciones y lleguen a la convalidación de las propuestas de solución.

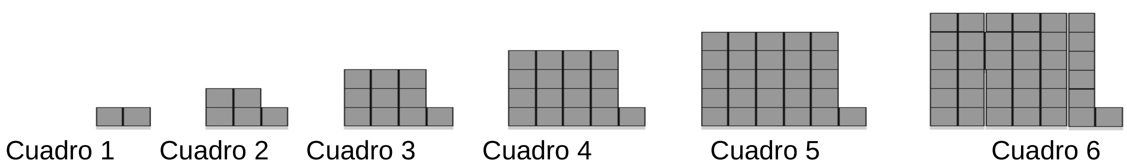
Cada intervención está formada por Tareas propuestas que se aglomeran en un análisis cualitativo enfocado en la manera cómo y por qué los estudiantes desarrollan el proceso de generalización con base al razonamiento inferencial a partir de secuencias figurales, numéricas, y secuencias figurales con ayuda tabular; al igual que situaciones que involucran razonamientos numéricos que requieren de análisis algebraicos, así como el desarrollo de los diferentes niveles de procesamiento descritos en el marco conceptual. La intención es poder reconocer los avances que tienen los estudiantes acerca de los procesos de generalización, que construyan pensamiento algebraico y lo integren en la resolución y planteamiento de problemas de las diferentes áreas de conocimiento y de la vida real.

Se espera que los estudiantes generen diversas estrategias de solución a las tareas planteadas, y puedan discutir sus planteamientos y conclusiones. Y de esta forma construyan una visión más amplia sobre lo interesante, útil y fácil que es el pensamiento algebraico. De los 39 estudiantes que iniciaron en la fase de diagnóstico para la implementación de las intervenciones se retiraron dos estudiantes E1 y E14 quedando un grupo de 37 estudiantes.

A continuación mostramos las cuatro intervenciones compuestas por una serie de tareas, cuyo propósito es potenciar los tipos de razonamiento inferencial que los estudiantes pueden desarrollar en el proceso de generalización. Esto permite potenciar los diferentes niveles de procesamiento de estudiantes mayores propuestos por Rivera (2015) en el análisis y construcción de la solución de las diferentes estructuras y figuras que componen cada secuencia propuesta en las Tareas.

5.2.1 Primera intervención.

1. Los bloques se envasan para formar imágenes que forman un patrón como se muestra a continuación.



Bloque de bloques de crecimiento

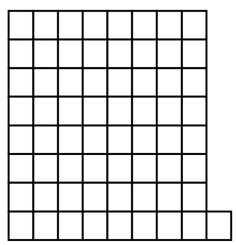
- **a.** ¿Cuántos bloques se necesitan para formar la imagen 8? ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
- **b.** ¿Cuántos bloques se necesitan para formar la imagen 35? ¿Cómo obtuviste tu respuesta?
- **c.** Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cómo se encuentra la cantidad de bloques que conforman cada imagen.
- **d.** Puede encontrar una fórmula para calcular el número de bloques de la imagen$n$. Si esto es posible ¿Cómo obtuvo su fórmula?

Ejercicio modificado de Rivera p. 150

Análisis a priori

En esta Tarea se presenta una secuencia geométrica de cuadrados, en los que en cada término se va aumentando el número de cuadrados siguiendo un patrón. Rivera (2013) denominó este ejercicio “crecimiento de bloques”, con esta Tarea se busca que los estudiantes puedan establecer una relación entre el número de cuadrados y el término de la secuencia.

Inicialmente se espera que los estudiantes desarrollen un razonamiento abductivo y por medio de una representación gráfica, construyan el octavo término de la secuencia para determinar el número de cuadrados.



Total de cuadrados $8^2 + 1 = 65$

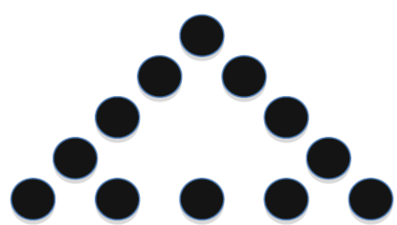
Para este primer ítem se espera que algunos estudiantes realicen conjeturas sobre el patrón que se genera en la secuencia y a través de su explicación puedan deducir el número de cuadritos que conforman cada término de la secuencia.

Para responder el siguiente ítem, se espera que el estudiante con base en el análisis del ítem anterior organice su hipótesis e inicie la construcción de su regla inductiva a través de la variación detectada y la relación que existe entre los términos de la secuencia, y la cantidad de cuadrados de cada figura. Con base en este proceso se podría establecer que:

> *“El lado del cuadro es igual al término de la secuencia y el numero de cuadritos esta en relación a su área aumentando un cuadrito”*, realizando una conversión figural dependiente de las relaciones entre el lado del cuadrado y la cantidad de cuadritos. Así el numero de cuadros del termino 35 corresponde a $35^2 + 1 = 1226$.

Con el tercer ítem su busca que el estudiante escriba en forma explicativa sus hipótesis de solución del problema. Por tanto se espera que compruebe que su hipótesis se cumple para todos los rectángulos que realizó aplicando un razonamiento inductivo, que lo conduzca a identificar que la posición de cada valor en los términos de la secuencia determina directamente el lado del cuadrado y por consiguiente el numero de cuadritos. Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó. Evidenciándose un argumento deductivo a través de la construcción de una fórmula.

2. En el siguiente diagrama hay un triángulo de 5 puntos. Es un triángulo construido usando 5 puntos en cada lado. El triángulo de 5 puntos se logra usando un total de 12 puntos. ¿Cuántos puntos se utilizarán para hacer un triángulo de 13 puntos? Si n representa el número de puntos de cada lado de un triángulo n-punto, escriba una expresión para representar cuántos puntos totales están en el triángulo.



Tarea de patrones de triángulo N (Steele y Johanning, 2004, p. 75)

Ejercicio tomado de Rivera p.72

Análisis a priori

Se presenta la gráfica de un triángulo formado por una cantidad de puntos. Se espera que el estudiante pueda desarrollar un nivel de procesamiento y conversión gráfica dependiente de relaciones. Esto puedo lograrlo cuando establece cómo se distribuyen los 12 puntos en el triángulo de 5 puntos de lado, identificando que en cada lado del triángulo equilátero existen cinco puntos y los tres vértices son puntos compartidos, por lo que el total de puntos se obtiene de $5 \times 3 - 3 = 15 - 3 = 12$. Esto puede permitirle desarrollar un razonamiento abductivo que le permita determinar los puntos necesarios para el triángulo de 13 puntos, en los que en cada lado del triangulo tiene 13 puntos el total se determina por $13 \times 3 - 3 = 36 - 3 = 36$. Con esta Tarea se busca que los estudiantes evidencien una relación entre el lado del triángulo y la cantidad de puntos, estableciendo una forma de razonamiento deductivo que los lleve a una generalización del patrón establecido en la construcción de los triángulos siguiendo el patrón establecido.

3. En una entidad bancaria hay una tabla que muestra las equivalencias entre el euro y el dólar:

Dólares	9	18	24	36
Euros	10	20	30	40

Teniendo en cuenta los datos presentados en la Tabla, analiza y contesta las siguientes preguntas:

a. Cuando se ha construyó esta tabla se ha cometido un error. ¿Cuál?

b. Dibuja la gráfica que muestre la relación entre el Dólar y el Euro.

c. Halla una fórmula que permita saber el número de dólares conociendo el número de euros.

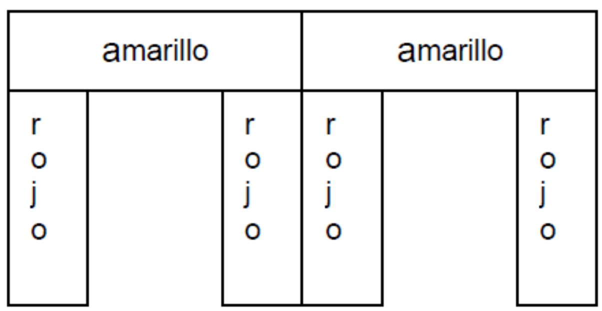
Ejercicio modificado de la THALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemática

Análisis a priori

Se presenta una situación numérica que involucra equivalencias entre dos monedas, el Dólar y el Euro. El fin de esta Tarea es buscar que los estudiantes deduzcan el patrón y logren determinan la razón de equivalencia entre las dos monedas y la puedan representar de una manera diferente a la tabular. En el ítem a. se busca que el estudiante infiera cuál es el valor incorrecto en la tabla, para lo cual debe previamente comprender cómo se está generando el patrón en los otros términos; para que finalmente lo pueda manifestar a través de una forma de razonamiento deductivo en el planteamiento de la fórmula general (ítem c).

5.2.2 Segunda intervención.

1. Queremos construir la maqueta de un acueducto con barras de madera de $18cm$ de ancho para las vigas y de $5cm$ de ancho para los soportes, según se muestra en el dibujo, para el caso de dos arcos.



a. Completa la tabla siguiente

	3 arcos	4 arcos	5 arcos	15 arcos	21 arcos
¿Cuántas barras amarillas necesitamos?					
¿Cuántas barras rojas necesitamos?					
¿Qué longitud tendrá el acueducto?					

b. Si se conoce el número de arcos, ¿qué regla podemos aplicar para calcular

*) El número de barras?

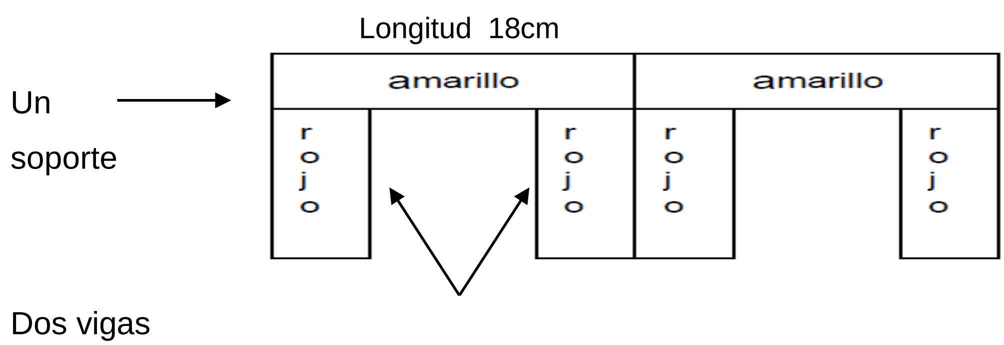
*) La longitud del acueducto?.

c. ¿Cuál es el número total de barras que se necesitan para construir un acueducto con 100 arcos? ¿Cuál es la longitud del acueducto? Explique sus respuestas.

Ejercicio Puente con dos apoyos. Tomado de Godino. p. 825

Análisis a priori

Inicialmente se espera que los estudiantes analicen el gráfico que se presenta y comprendan cómo se construye el puente a partir de dos bases y una viga; de manera que en cada arco se mantiene una longitud de 18 cm. Luego de comprender el patron y realizar un procesamiento de conversión numérica dependiente de objeto, el estudiante podría generar una conjetura que lo conduzca a la construcción de una abdución que puede estar dada en términos numéricos. Esto puede permitirle completar la tabla y determinar la relación entre el número de barras, la longitud y el número de arcos del puente dando las explicaciones correspondientes.



1. Arco 2 vigas + 1 soporte **18 cm de longitud**
2. Arcos 4 vigas + 2 soporte **36 cm de longitud**
3. Arcos 6 vigas + 3 soporte **54 cm de longitud**
4. Arcos 8 vigas + 4 soporte **72 cm de longitud …**

2. Una escuela de primaria tiene dos ofertas para su servicio de copistería. La empresa "Copy" le alquila una fotocopiadora por $ 150 000 al mes y $10 por cada fotocopia. En cambio, la empresa "La mejor fotocopia" le alquila una fotocopiadora por $ 110 000 al mes y $ 20 por cada fotocopia.

- **a.** ¿A partir de cuantas fotocopias le interesa contratar los servicios de "Copy" a esta escuela? Explica tu respuesta
- **b.** ¿Para qué cantidad de fotocopias es indiferente cuál sea la empresa que gestiona el servicio?

Ejercicio modificado de Godino. p. 807

Análisis a priori

Para la segunda Tarea se presenta una situación numérica que involucra razones entre el valor del alquiler de una fotocopiadora y el costo de cada fotocopia; se presentan dos empresas con sus propuestas para que el estudiante realice conjeturas sobre la opción más rentable. El fin de esta Tarea es buscar que los estudiantes deduzcan la relación entre costo del mes y valor de fotocopia a través de los procesos de conversión figural dependiente de relaciones. De tal manera que logren desarrollar una forma de razonamiento deductivo que los lleve a producir una expresión que dé respuesta al problema.

Posteriormente para la solución de los siguientes ítems se espera que los estudiantes expresen la regla de formación del patrón que utilizaron. Entrando en una forma de razonamiento deductiva.

COPY	$\$150\ 000\ al\ mes + \$10\ \ por\ fotocopia$
LA MEJOR FOTOCOPIA	$\$110\ 000\ al\ mes + \$20\ por\ fotocopia$

Los estudiantes podrían buscar la solución a partir de un razonamiento abductivo construyendo una relación entre la cantidad de copias y el valor; para ello podría plantear diferentes formas de representación que le ayuden a establecer un patrón entre las dos empresas. Pueden establecer, por ejemplo a partir de una representación tabular de las variables involucradas:

N° DE FOTOCOPIAS	**VALOR EN COPY**	**VALOR LA MEJOR FOTOCOPIA**
1	$150\ 000\ +10\ =150\ 010$	$110\ 000\ +20=110\ 020$
100	$150\ 000\ +\ 1000 = 151\ 000$	$110\ 000\ +2000=112\ 000$
1000	$150\ 000\ +\ 10\ 000 = 160\ 000$	$110\ 000\ +20\ 000=130\ 000$
10000	$150\ 000\ +100\ 000 = 250\ 000$	$110\ 000\ +200\ 000=310\ 000$
5000	$150\ 000\ +\ 50\ 000 = 200\ 000$	$110\ 000\ +100\ 000=210\ 000$
4000	$150\ 000\ +\ 40\ 000 = 190\ 000$	$110\ 000\ +80\ 000=190\ 000$

También se espera que algunos estudiantes logren realizar un procesamiento de conversión numérica dependiente de relaciones y busquen deducir la cantidad de fotocopias para la cual las dos empresas tienen el mismo costo e inducir que después de esta cantidad de fotocopias la empresa más rentable será COPY.

COPY $\$150\ 000\ al\ mes + \$10\ \ por\ fotocopia$

LA MEJOR FOTOCOPIA $\$110\ 000\ al\ mes + \$20\ por\ fotocopia$

$$150\ 000 + 10\,x\ =\ 110\ 000\ +20\,x$$
$$150\ 000 - 110\ 000\ =\ 20\,x - 10x$$
$$40\ 000\ =\ 10\,x$$
$$4000\ =\ x$$

3. Paul, Judy y Sam están discutiendo patrones que surgen de la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6. Proponen sus propias ideas, como sigue:

- Pablo dice que la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 debe ser un múltiplo de 3. ¿Está de acuerdo o en desacuerdo con la idea de Pablo? Explique su respuesta.
- Judy dice que la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 debe ser un múltiplo de 6. ¿Está de acuerdo o en desacuerdo con la idea de Judy? Explique su respuesta.
- Sam dice que la suma de un múltiplo de 3 y un múltiplo de 6 debe ser un múltiplo de 9. ¿Está de acuerdo o en desacuerdo con la idea de Sam? Explica tu respuesta.

Ejercicio (Barnes & Gordon, 1987.p.8).Tomado de Rivera. p. 195

Análisis a priori

Para la tercera Tarea se presenta una situación numérica, se busca que el estudiante comprenda la relación entre los múltiplos y a través de un análisis de las diferentes hipótesis pueda inducir el patrón. Este patrón, puede caracterizar la formación de los términos dentro de la secuencia a partir de los múltiplos de 3 y 6.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar la relación entre los múltiplos de los dos números. Puede realizar un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones que lo lleven a crear sus propias hipótesis y realizar alguna representación que le ayude en la comprensión de las relaciones entre los elementos que varían en la Tarea. Con este análisis se podrá establecer que: los múltiplos de 3 son números de la forma $3n$ y los múltiplos de seis son de la forma $6n = 2 \times 3n$.

Múltiplos de 3	Múltiplos de 6	suma de algunos múltiplos
3	6	
6	12	
9	18	$3 + 6 = 9$
12	24	$6 + 12 = 18$
15	30	$9 + 18 = 27$
18	36	$24 + 12 = 36$
21	42	
24	48	
27	54	
30…	60…	

Posteriormente para la solución del último ítem se espera que los estudiantes expresen y describan la regla de formación del patrón que utilizaron anteriormente. Entrando en la etapa deductiva para dar una respuesta en los múltiplos de 9.

4. La temperatura de la tierra a unos pocos metros de la superficie permanece constante a unos $20\ \mathrm{C}°$ tanto en invierno como en verano. A medida que profundizamos la temperatura se incrementa de manera constante unos $10\ \mathrm{C}°$ por kilómetro. ¿A qué profundidad debe perforar una compañía geotérmica para alcanzar un punto cuya temperatura sea de $245\mathrm{C}°$?

Ejercicio tomado de Godino. p.792

Análisis a priori

Para la última Tarea se presenta una situación numérica, se busca que los estudiantes establezca la relación entre la temperatura y la profundidad y por medio de un razonamiento inductivo puedan establecer el patrón.Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar la correspondencia entre 1 km de profundidad y el aumento de calor.

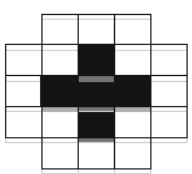
Posteriormente se espera que los estudiantes construyan una regla general que les permita dar solución al problema.

Kilómetros perforados	Temperatura
0	$20\ \text{C}°$
1	$20\ \text{C}° + 10° = 30°$
2	$20\ \text{C}° + 20° = 40°$
3	$20\ \text{C}° + 30° = 50°$
4	$20\ \text{C}° + 40° = 60°$
N	$20\ \text{C}° + \text{n} \times 10°$

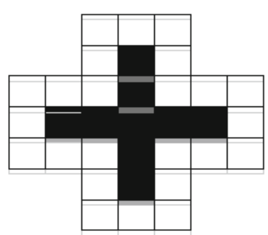
Finalmente se busca verificar el dominio y comprensión por parte del estudiante del patrón establecido, dado que debe invertir el proceso en la fórmula que construyó. Y del número de grados centígrados inducir el número de kilómetros perforados.

5.2.3 Tercera intervención.

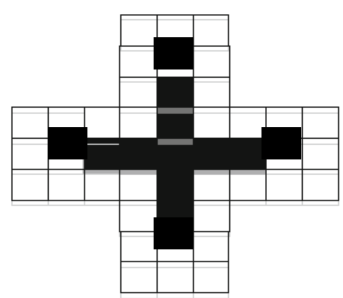
1. Marcia está utilizando azulejos cuadrados en blanco y negro para hacer patrones



Patrón 1



Patrón 2



Patrón 3

a. ¿Cuántos azulejos negros se necesitan para hacer el patrón 4?

b. Marcia comienza a hacer una mesa para mostrar el número de azulejos en blanco y negro que es utilizado. Llena los números que faltan en la tabla de Marcia.

Número de Patrón	**1**	**2**	**3**	**4**
Número de azulejos blancos	**16**	**24**		
Número de azulejos negros	**5**	**9**		
Total	**21**	**33**		

c. Marcia quiere saber cuántos azulejos blancos y azulejos negros habrá en los siguientes patrones pero no quiere dibujar y contar en la cuadrícula. Explique o muestre otra forma de encontrar su respuesta.

d. Usando W para el número de azulejos blancos y P para el número del patrón, escriba una regla o fórmula que vincule W con P

e. Utilizando B para el número de azulejos negros y P para el número de patrón, escriba una regla ofórmula que une B con P.

f. Ahora, usando T para el número total de fichas y P para el número de patrón, escriba una regla o fórmula que une T con P.

Ejercicio de crecimiento de patrones cruzados. Tomado de Rivera. p.46

Análisis a priori

En esta Tarea se presenta una secuencia de figuras formadas por cuadrados blancos y negros, en los que en cada término se va aumentando el número de cuadrados siguiendo un patrón. Rivera (2013) denominó este ejercicio “crecimiento de patrones cruzados”, con esta Tarea se busca que los estudiantes puedan establecer una relación entre el número de cuadrados tanto blancos, como negros y el término de la secuencia.

Inicialmente se espera que los estudiantes desarrollen un nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente de relaciones y por medio de un razonamiento abductivo puedan determinar el número de cuadros negros del término 4. El patrón de construcción que determina la secuencia crece uno en cada uno de los cuatro extremos de la cruz, por lo tanto para el término 4 serán 17. Avanzando en este tercera sesión se espera que varios estudiantes desarrollen un razonamiento deductivo y establezcan una relación entre el número de cuadros y el término del patron; para el caso particular del patrón cuatro seria $4 \times 4 + 1 = 17$.

Lo que se espera para el segundo ítem es que el estudiante compruebe que su hipótesis se cumple para todas los términos aplicando un proceso inductivo, que lo conduzca a identificarla relación entre el numero del patrón, el numero de cuadros negros, cuadros blancos y el total que se utiliza en cada figura.

Finalmente, en los últimos cuatro ítems se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó, y pueda dar evidencia de un razonamiento deductivo al establecer una fórmula general con las variables dadas W;B;P;T. De tal manera que a través del planteamiento de estas expresiones relacione todas las variables del problema, por ejemplo se espera que los estudiantes planteen expresiones como: $(4 \times P) + 1 = B$

2. Un grupo de estudiantes dispone de $\$\ 60\,000$ para cenar. Saben que el costo total, después de añadir el impuesto y la propina, asciende a un 25% más que los precios de las comidas del menú. ¿Cuanto pueden gastar en comida para que el costo total sea de $\$\ 60\,000$?

Ejercicio tomado de THALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemática. p.285

Análisis a priori

En esta Tarea se presenta una situación numérica que involucra un patrón a través de la relación del valor de la comida, su impuesto y la propina; involucrando el concepto de porcentaje para inferir un patrón entre los costos y determinar el valor que pueden gastar en la cena.

En esta situación se busca que los estudiantes establezcan la relación entre valor e impuestos aplicando el concepto de porcentaje. Además que el estudiante desarrolle un razonamiento inductivo para determinar el porcentaje equivalente a un valor de tal forma que la suma de estos sea $ 60 000. Inicialmente los estudiantes pueden probar con valores particulares en busca de la respuesta; es claro que el valor debe ser inferior a $ 60 000; se podría decir que por ejemplo fuera $ 50 000. Es así que: $25\%\ de\ \$50\,000 = \$12\,500$. $\text{Por lo que } \$50\,000 + \$12\,500 = \$\,62\,500 > \$\,60\,000$. Después de algunas pruebas se espera que el estudiante pueda establecer un patrón entre estos valores y a través de un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones concluya que: $25\%\ de\ valor\ x = a\ la\ cuarta\ parte\ de\ x$ lo cual implica que $\frac{x}{4} + x = 60\,000$; y al solucionar esta expresión pueda determinar que la cantidad de dinero que pueden gastar es $\$\,48\,000$.

3. Al disponer puntos en el plano en forma triangular y contar el número total de éstos en cada uno de los triángulos, obtenemos los llamados "Números triangulares" 1, 3, 6, 10,...

*   *   *   *
**   **   **
***   ***
****

a. Llamaremos *Tn* al número triangular cuya base está formada por *n* puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para *Tn* ?

b. Los números cuadrados son:

```
*     * *     * * *
      * *     * * *
              * * *
```

c. Llamaremos *Cn* al número cuadrado cuyo lado está formado por *n* puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para *Cn?*

d. ¿Hay alguna relación entre los números triangulares y los cuadrados? ¿Cuál?

Ejercicio tomado de Godino. p.810

Análisis a priori

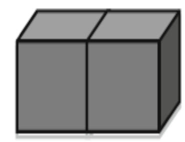
En esta última Tarea de esta sesión se presentan secuencias graficas que representan los números triangulares y cuadrados. Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia, en los números triangulares y cuadrados. Además de analizar las distintitas relaciones invariantes que presentan en cada secuencia numérica. Con este análisis se podrá establecer que para los números triangulares y cuadrados se tiene que:

Termino	Numero Triangular	Numero cuadrado	Relación
1	1	$1 = 1^2$	$1 = 1 + 0$
2	3	$4 = 2^2$	$4 = 3 + 1$
3	6	$9 = 3^2$	$9 = 6 + 3$
4	10	$16 = 4^2$	$16 = 10 + 6$
5	15	$25 = 5^2$	$25 = 15 + 10$
6	21	$36 = 6^2$	$36 = 21 + 15$
N	$T_n = \frac{n \times (n+1)}{2}$	$C_n = n^2$	$C_n = T_n + T_{n-1}$

Logrando mostrar la veracidad de la regla inductiva que forma las secuencias y además permite predecir todo número de la secuencia faltante.

5.2.4 Cuarta intervención.

1. Una compañía hace las barras coloreadas ensamblando los cubos en una fila y usando una etiqueta engomada para colocar etiquetas engomadas "sonrientes" en las barras. La máquina coloca exactamente una etiqueta en cada cara expuesta de cada cubo. Cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una etiqueta engomada, así que una barra de longitud-2 varilla necesitaría 10 etiquetas engomadas.



a. ¿Cuántas pegatinas necesitarías para varillas de longitud 1 a 10? Explica cómo determinaste estos valores.

b. ¿Cuántas pegatinas necesitarías para una barra de longitud 20? de longitud 50? Explica cómo determinaron estos valores.

c. Supongamos que una vara en particular necesitaba 150 pegatinas. ¿Cuál es la longitud de esta varilla? Explique cómo usted determinó esto.

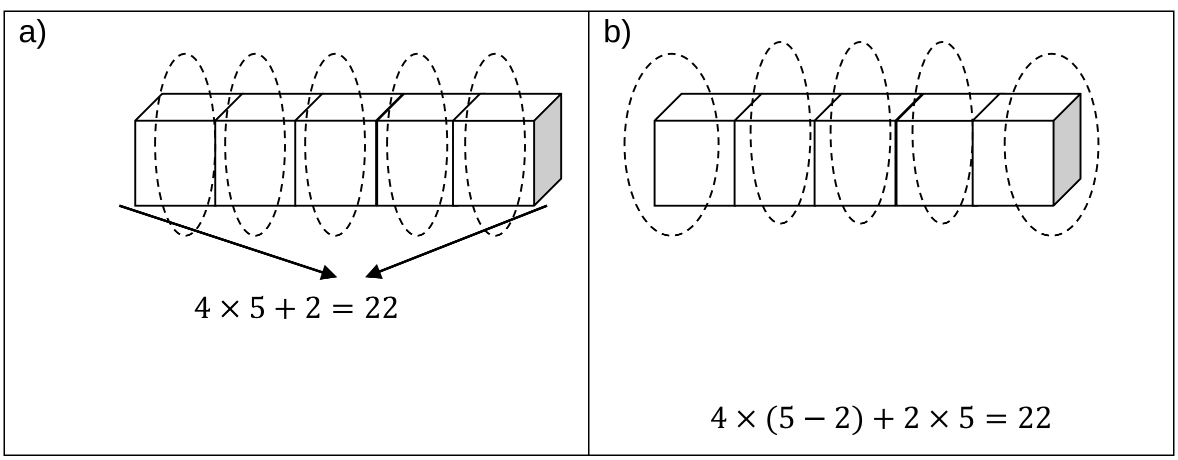
d. Explique cómo podría encontrar el número de pegatinas necesarias para una barra de cualquier longitud. Escribe una fórmula que usted podría utilizar para determinar esto.

Problema de la etiqueta del cubo (Lannin, 2055.p 256). Tomado de Rivera. p.160

Análisis a priori

Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que: alrededor de un cubo se colocan 6 pegatinas, alrededor de 2 cubos 10 pegatinas, alrededor de 3 cubos se han colocado 14 pegatinas y así sucesivamente. Luego observar cuidadosamente los términos de la secuencia, los estudiantes pueden determinar un patrón de construcción e identificar el aumento de pegatinas por cada nuevo cubo. Esto puede llevarlos a plantear una conjetura que le permita a cada estudiante a construir una regla abductiva. Esta conjetura o hipótesis les permite a los estudiantes construir términos cercanos de la secuencia.

Se espera que una vez evaluada su hipótesis el estudiante compruebe su regla inductiva y logre deducir que: si tiene una barra de longitud 50 utiliza 68 pegatinas. Esto como resultado de las características de su habilidad perceptual. Teniendo en cuenta el número de cubos y pegatinas y haciendo diferentes asociaciones con afirmaciones matemáticas entra en la etapa deductiva para hacer la generalización de la situación así:

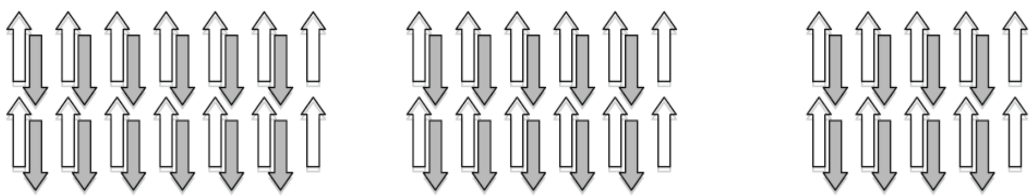


En el primer caso (a) cada cubo tiene 4 pegatinas alrededor y hay 2 en los extremos, entonces tenemos: ($4n$+2); en el segundo (b) cada cubo tiene 4 pegatinas, menos las de los extremos que tienen 5 pegatinas, entonces: ($4(n-2)+2\times5$).

Finalmente, en los últimos ítems se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó, y pueda dar evidencia de un razonamiento inductivo al establecer una formula general con las variables y por medio de un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones pueda establecer el número de cubos a partir de la cantidad de pegatinas.

$$4 \times n + 2 = 150 \quad n = \frac{150 - 2}{4} n = 37 \; cubos$$

2. Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a. Encuentre una fórmula directa para el número total de flechas en la etapa n, donde n es un entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ello en términos de patrón anterior

b. ¿Cuántas flechas hay en la décima etapa 10? Explique.

c. ¿Para qué número de escenario no quedarán más flechas? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

Ejercicio generalización de patrones de diseño de flecha. Tomado de Rivera. p.178

Análisis a priori

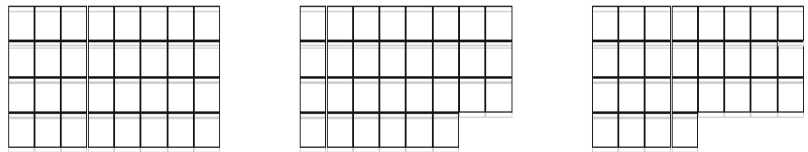
En la segunda tarea se presenta una secuencia grafica, se busca que el estudiante verifique la cantidad de flechas e identifique el patrón por lo cual se va generando la disminución de flechas en cada uno de los términos.

Inicialmente se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de una etapa a otra, además de analizar las distintitas relaciones invariantes que presenta la secuencia grafica. Con este análisis se podrá establecer que:

Termino	Numero de flechas	Diferencia
1	26	0
2	22	4
3	18	$4+4=0$
4	12	$4+4+4=12$
N	$26-4\times(n-1)$	$4\times(n-1)$

Finalmente, en los últimos ítems se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó, y pueda dar evidencia de un razonamiento inductivo al establecer una formula general con las variables. De tal manera que por medio de un procesamiento y conversión grafica dependiente de relaciones pueda establecer con seguridad que la secuencia va decreciendo y por lo tanto habrá un término en el que ya no quedan más flechas.

3. Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 1? ¿Etapa 2? ¿etapa 3?

b. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 10? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

c. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 15? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

d. Encuentre una fórmula directa para el número total de cuadrados en la etapa n, donde n es un número entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ella en términos de patrón anterior?

e. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 20? ¿Qué podría significar su respuesta si piensa en ello en términos del patrón anterior?

f. ¿Para qué número de escenario no quedarán más cuadrados? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

Ejercicio patron de cuadrados perdidos. Tomado de Rivera. p.178

Análisis a priori

En la última tarea se presenta una secuencia grafica, se busca que el estudiante verifique la cantidad de cuadros e identifique el patrón por lo cual se va generando la disminución reforzando el análisis aplicado en la secuencia anterior.Se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de una etapa a otra, además de analizar las distintitas relaciones invariantes que presenta la secuencia grafica. Con este análisis se podrá establecer que:

Termino	Numero de cuadros	Diferencia
1	32	0
2	30	2
3	18	$2+2=4$
n	$32-2\times(n-1)$	$2\times(n-1)$

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó, y pueda dar evidencia de un razonamiento inductivo al establecer una fórmula general con las variables y por medio de un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones pueda establecer con seguridad que secuencia va en decrecimiento; ya que el numero de cuadros es el numero de la secuencia es el anterior menos dos; lo cual implica que habrá un término en el que ya no queden cuadros.

5.3 ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Para el análisis de las Tareas se realizó una observación cuidadosa de todos los videos de cada una de las intervenciones para seleccionar los episodios más importantes donde se evidencian los tipos de razonamientos y niveles de procesamiento que utilizan los estudiantes en el desarrollo de Tareas que involucran procesos de generalización. Los eventos seleccionados van acompañados de representaciones escaneadas de las Tareas desarrolladas por los estudiantes y de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que ellos están realizando sus diferentes análisis y procedimientos de solución. Para el análisis de datos, una vez identificados los episodios más destacados se organizaron teniendo en cuenta los cuatro   niveles de procesamiento de estudiantes mayores propuestos por

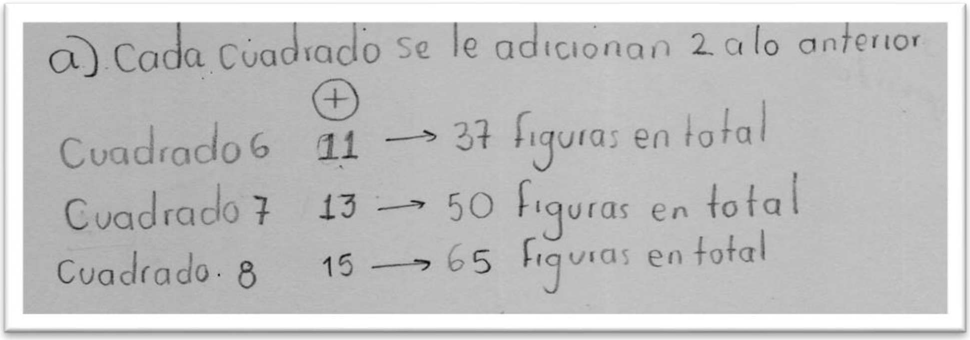
Rivera(2013): procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto; procesamiento y conversión grafica dependiente de objeto, procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones y procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones; de igual forma dentro de estos niveles de procesamiento se identificó el tipo de razonamiento inferencial: abducción, inducción o deducción; utilizado por los estudiantes para solucionar la Tarea propuesta.

5.3.1 Análisis del nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto

> Este nivel de procesamiento hace referencia a la representación emergente que realiza el estudiante a partir del análisis de los ejemplos numéricos, donde por medio de deducciones busca la solución que puede ser justificada o no; razón por la cual no existe un razonamiento fundamentado, ni una compresión de la estructura que define la secuencia, factores que pueden llevar a conclusiones erradas. A pesar de esto, la conversión numérica dependiente de objeto es un procesamiento muy popular y con él muchos estudiantes llegan a tener éxito en la Tarea.

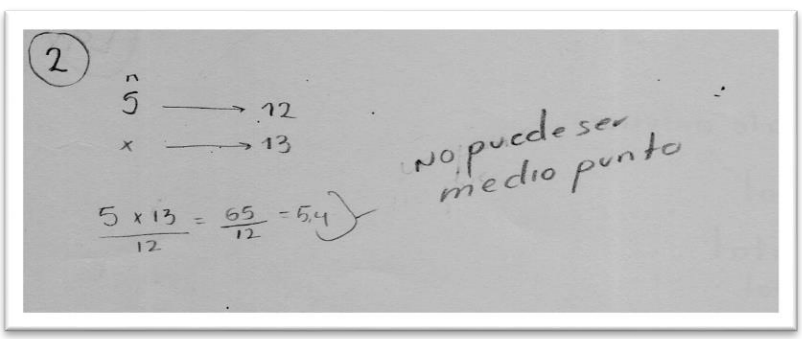
En la tarea 1 de la primera sesión el estudiante E09, transforma las figuras de la secuencia a un valor numérico (cantidad de cuadritos) para poder realizar su análisis y encontrar el término de la secuencia; él realiza un procesamiento numérico y determina la cantidad de cuadros en cada termino; pero no da una justificación de su deducción y por medio de un razonamiento abductivo llega a la respuesta correcta, utiliza una secuencia paso a paso hasta determinar el término 8 que le fue solicitado (ver imagen 1)

Imagen 1. Producción E9, Primera Sesión Tarea 1



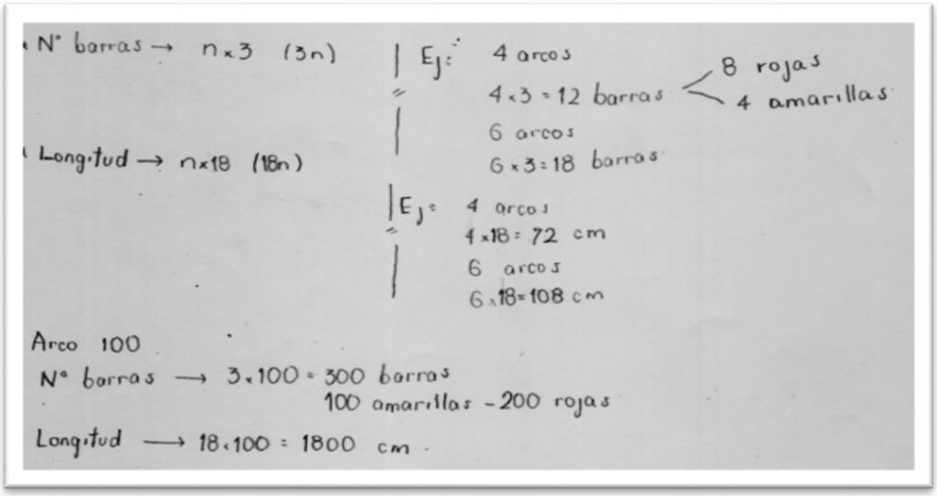
En la Tarea 2 de la primera sesión; este mismo estudiante E9 continua con su procesamiento de conversión numérica dependiente de objeto; cuenta el número de puntos que forman el triángulo, y establece una regla de proporción lo cual lo lleva a un resultado errado. En esta ocasión su procesamiento no tuvo éxito y estableció sin ningún fundamento una relación que no corresponde a la Tarea, dando evidencia de su falta de comprensión de la estructura que define la secuencia, tal como se puede apreciar en la imagen 2:

Imagen 2. Producción E09, Primera Sesión ítem a Tarea 2



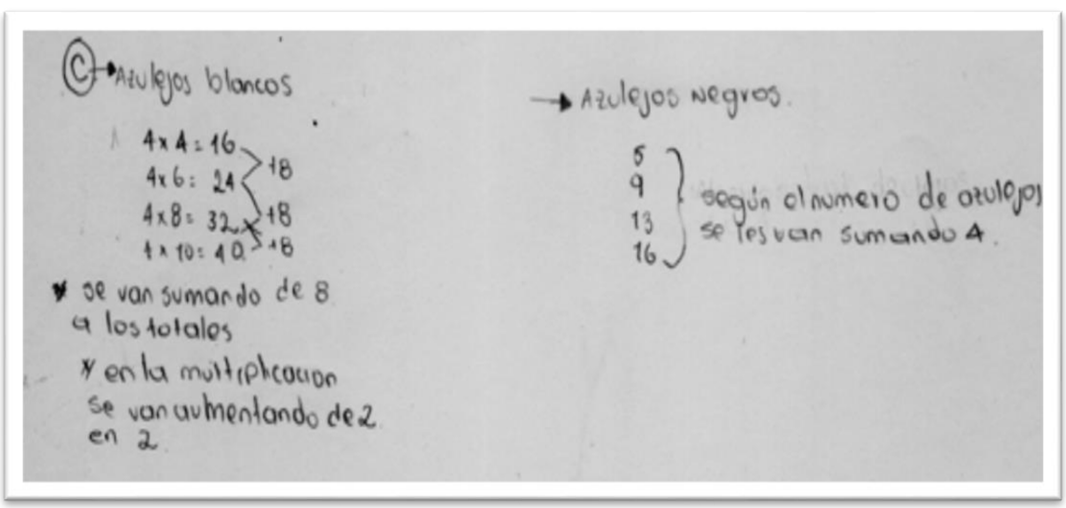
En la primera Tarea de la segunda sección la estudiante E30 llega a la solución de la tarea realizando un análisis inductivo, por medio de ejemplos numéricos para casos particulares establece las relaciones que permiten dar solución a la Tarea, encontrando el patron. Su análisis y procesamiento de conversión numérica dependiente de objeto la llevo a la inducción de una regla acertada (ver imagen 3)

Imagen 3. Producción E30, segunda Sesión Tarea 1



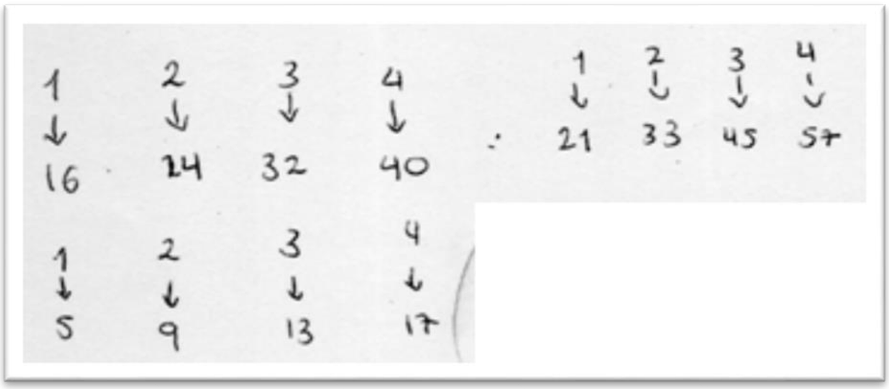
La estudiante E07 para desarrollar la Tarea 1 de la tercera sesión establece una secuencia por medio de un razonamiento abductivo para encontrar la relación entre los números de azulejos que plantea el ejercicio, ella por medio de ejemplos numéricos va revisando el crecimiento en el numero de azulejos (ver imagen 4), y llega a unacorrecta apreciación sobre esta relación; utilizando sus propias palabras para explicar la regla.

Imagen 4. Producción E07, Tercera Sesión Tarea 1



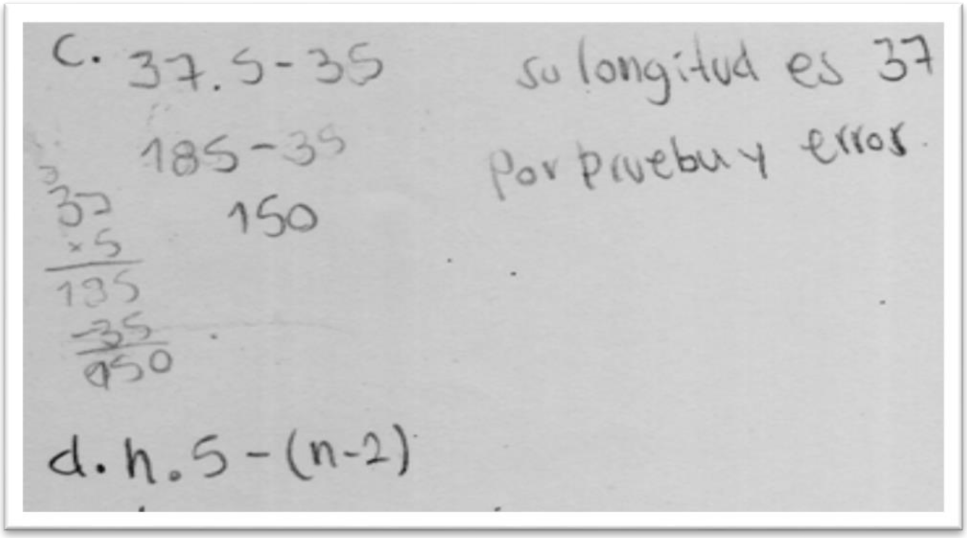
Para esta misma tarea la estudiante E17 también utiliza un nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto, estableciendo una secuencia que define el número de azulejos para la tarea (ver imagen 5); por medio de la intuición ella define la cantidad de azulejos totales, blancos y negros pero no da ninguna explicación matemática.

Imagen 5. Producción E17, Tercera Sesión Tarea 1.



Para determinar la longitud de la varilla con 150 pegatinas en la Tarea 1.c de la cuarto sesión el estudiante E26 realizan un procesamiento y conversión numérica, ya que establece la longitud a través de ensayar varias veces, y no da ninguna explicación matemática de su razonamiento como se puede evidenciar en la imagen 6.

Imagen 6. Producción E26, Cuarta Sesión Tarea 1,c.

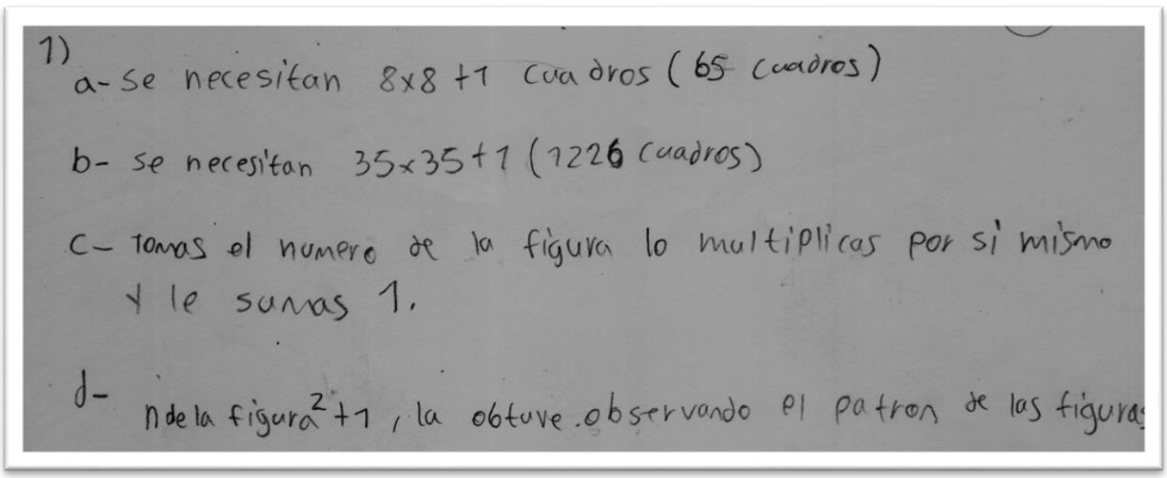


En general, en este primer nivel de procesamiento las producciones evidencian que la mayoría de los estudiantes logró llegar a resultados acertados; sin embargo muchos de ellos carecen de fundamentos matemáticos y no puedan dar justificación de su análisis. Se observa que el razonamiento abductivo es el fundamento para realizar este nivel de procesamiento; en la solución término a término de la secuencia buscan la respuesta pero solo en pocos casos llegan a generar una expresión que generalice la regla; no llegan a realizar un razonamiento inductivo. Este nivel de procesamiento fue utilizado solamente por algunos estudiantes al resolver las Tareas.

5.3.2 Análisis del nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente del objeto En este nivel de procesamiento el estudiante centra su análisis en los ejemplos gráficos; realizando razonamientos abductivos e inductivos para llegar a la solución; es decir el análisis de la grafica induce a plantear conjeturas que pueden ser justificadas o no; pero que involucran importantes procesos de análisis que llevan a solucionar con éxito la tarea; para muchos estudiantes el gráfico tiene valiosa información y es más fácil y rápido de comprender, por ello utilizan regularmente este nivel de procesamiento.

La Tarea 1 de la primera sesión consiste en un ejercicio de Crecimiento de Bloques modificado de Rivera (2013 p. 150), en el desarrollo de esta tarea los estudiantes observan las figuras de la secuencia y rápidamente se fijan en el número de bloques que se aumentan de un cuadro a otro. De esta manera concluyen que en el cuadro 8 hay 65 bloques y en el cuadro 35 hay 1226 bloques, mediante un procesamiento y conversión grafica dependiente de objetos, los estudiantes pudieron realizar un razonamiento abductivo y llegar a inferir que los bloques se relacionan con el área del cuadrado adicionando un bloque.

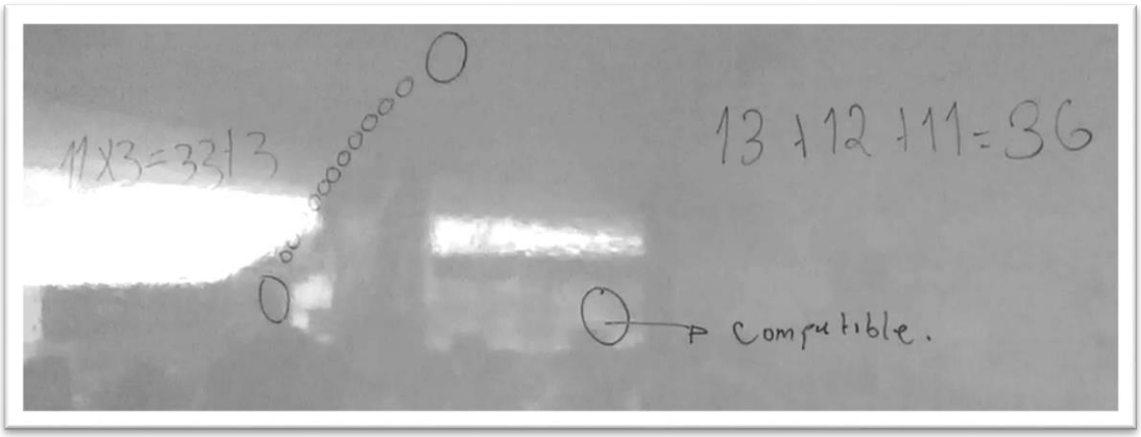
Imagen 7. Producción E04, Primera Sesión Tarea 1.


1)
a- se necesitan 8x8 +1 cuadros (65 cuadros)
b- se necesitan 35x35+1 (1226 cuadros)
c- Tomas el numero de la figura lo multiplicas por si mismo y le sumas 1.
d- n de la figura^2+1, la obtuve observando el patron de las figuras

En la imagen 7 se logra evidenciar como el estudiante E04 logra identificar las propiedades que presenta cada figura y reconoce la variación del número de cuadrados. Esto le permite construir una hipótesis abductiva correcta.

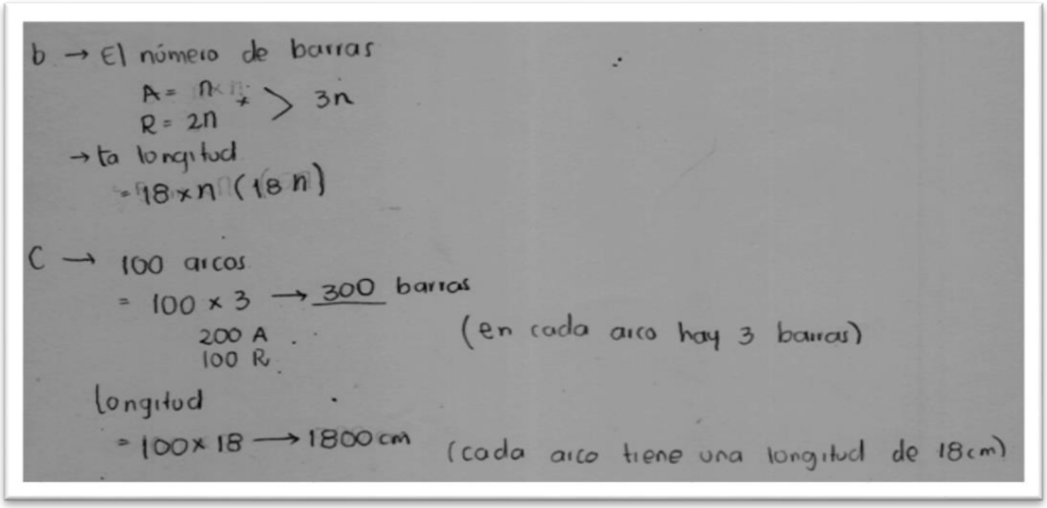
En la segunda tarea de la primera sesión el estudiante E12 realiza un nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente de relaciones, tomando como referencia los tres puntos de las esquinas del triángulo y luego los intermedios; mientras la E7 realiza una conversión figural dependiente de relaciones y ve como a cada lado se va disminuyendo el punto en común y la ultima pareja compuesta por los estudiantes E2 y E35 realizan una conversión grafica dependiente de objeto teniendo en cuenta los lados del triangulo equilátero pero al final quitan los 3 vértices comunes en los lados (ver foto 1). Cabe resaltar que todos realizaron un proceso deductivo y determinaron correctamente el patron para el caso particular del triangulo de 13 puntos.

Fotografía 1. Solución E2 y E35, Primera Sesión Tarea 2.



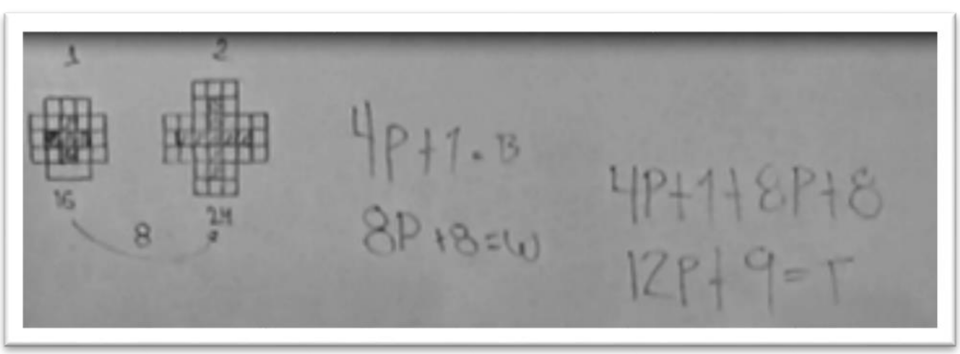
La estudiante E19 analiza a profundidad el gráfico dado en la Tarea 1 de la segunda sesión (ejercicio de puente con dos apoyos de Godino). Ella utiliza un procesamiento grafico para establecer una regla que determine el número de soportes vigas que forman el puente; por medio de un razonamiento inductivo concluye una expresión que generaliza el patron que define el puente (ver imagen 8).

Imagen 8. Producción E19, Segunda Sesión Tarea 1



En su fase de socialización el grupo G (E17, E19, E18) expone su razonamiento para la Tarea 1 de la tercera sesión. Este grupo realiza un razonamiento partir de la grafica para determinar el número de baldosas que se aumentan en cada término de la secuencia y así por medio de un proceso deductivo logran establecer una norma general para cada termino de la secuencia (ver imagen 9). En su exposición los estudiantes logran una representación formal con letras y a través de la conversión grafica definen las relaciones entre el total de azulejos (T), el número del patron (P) y numero de azulejos blanco (W)

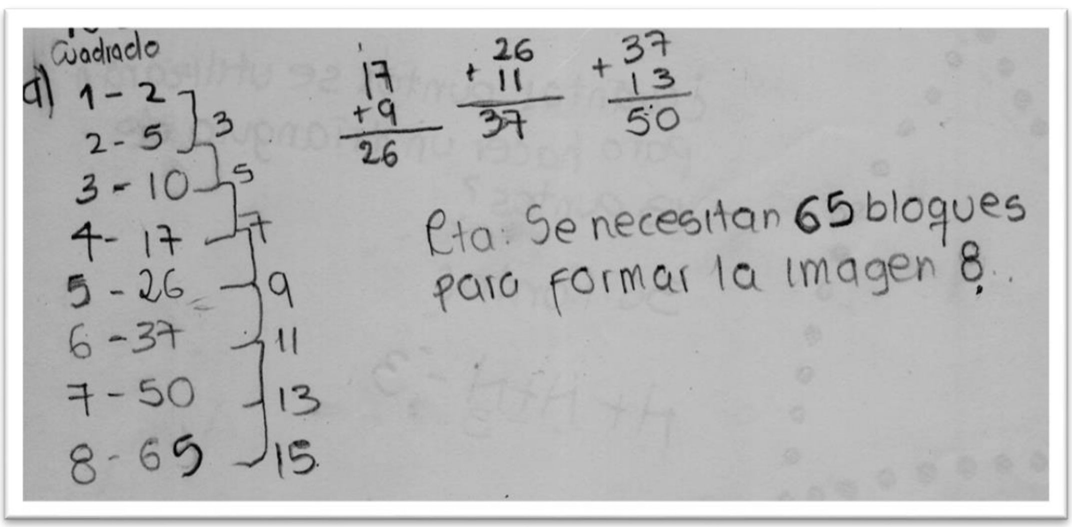
Imagen 9. Producción G (E17, E19, E18), Tercera Sesión Tarea 1.



Las diferentes producciones de los estudiantes dan evidencia de como el grafico es un factor determinante en la solución de la Tarea, los estudiantes suelen ser más visuales y por esto esta etapa de procesamiento es muy cotidiana; es importante recalcar que a través del análisis grafico se pudieron identificar diversas formas de análisis que conducen a una misma respuesta.

5.3.3 Análisis del nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones Para muchos estudiantes la construcción de diagramas contribuye a una mejor comprensión de la Tarea; por ello en este nivel de procesamiento el estudiante organiza la información y realiza las relaciones necesarias para llegar a una estructuración matemática. Utilizando un razonamiento abductivo logra llegar a establecer el patron que se genera en la secuencia.

Imagen 10. Producción E13, Primera Sesión ítem a Tarea 1.



En la imagen 10 se evidencia como el estudiante E13 construye un grafico para ir relacionando el patron de crecimiento de los cuadrados en cada término de la secuencia de la Tarea 1 de la primera sesión realizando un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones; por medio de un razonamiento abductivo llega a la construcción del cuadrado 8, identificando la diferencia en que existe entre cada cuadro.

El estudiante E39 produce la idea para encontrar la fórmula en la tercera Tarea de la primera sesión pero no sabe cómo expresarla, pregunta qué clase de representación debe utilizar (ver foto2). Se evidencia que realiza muy bien un razonamiento abductivo y logra establecer la regla en cada término de la secuencia. Sin embargo presenta dificultad para realizar un procesamiento inductivo y dar una fórmula general, sus niveles de comprensión revelan un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones. A continuación presentamos la transcripción de la conversación entre el docente y dicho estudiante.

Fotografía 2. Estudiante E39 realizando su pregunta.

E39: *Profesora yo entiendo que los dólares van disminuyendo en relación con los euros, que en el primero se quita uno, que para el segundo se quitan dos y así. Pero ¿cómo explico eso?*

P: Podrías decir que está pasando en cada término de la tabla.

E39: *Si profe, mire en 10 euros baja a 9 dólares y en 20 ya baja 18; entonces pues se ve que se van quitando 1,2,3,4… y así en todos. Pero ¿cómo escribo eso?*

P: *y eso se cumple para todo los términos*

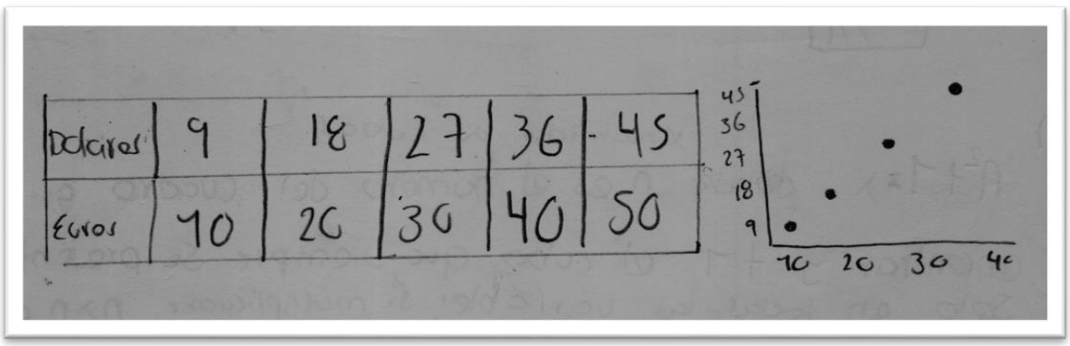
E39: *Si profe claro*

P: *Si se cumple en todos que puedes concluir*

E39: Que *ya tengo la regla!!! Claro profe que bruto ahí se ve claro que siempre se va quitando n; ¿profe esto funciona como una función lineal cierto? ¿Puedo hacer una grafica en el plano?*

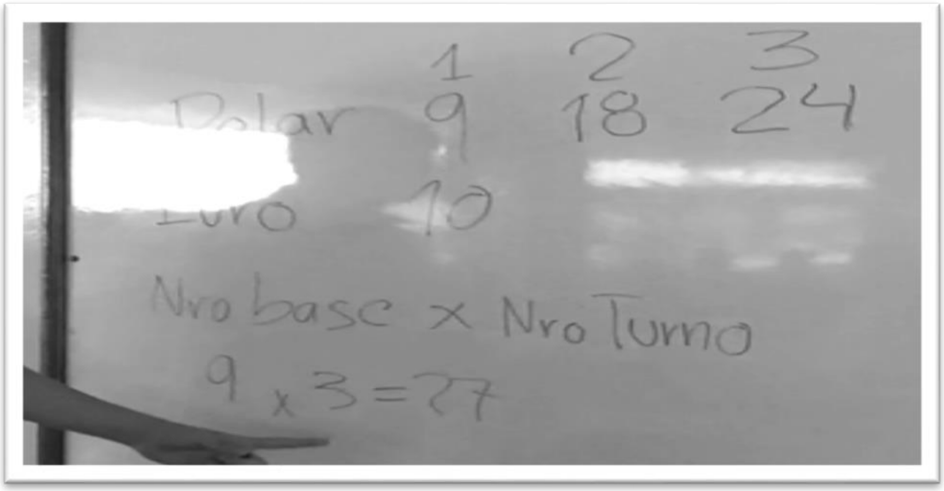
El estudiante E39 utiliza la tabla dada en la Tarea para determinar el número de dólares que se disminuye estableciendo una relación entre el número del término de la secuencia y la cantidad de dólares que se disminuye. Su nivel de razonamiento lo conduce a establecer una relación con la función lineal y de esta forma llegar a articular una expresión que defina la Tarea (ver imagen 11).

Imagen 11. Producción E39, Primera Sesión Tarea 3.



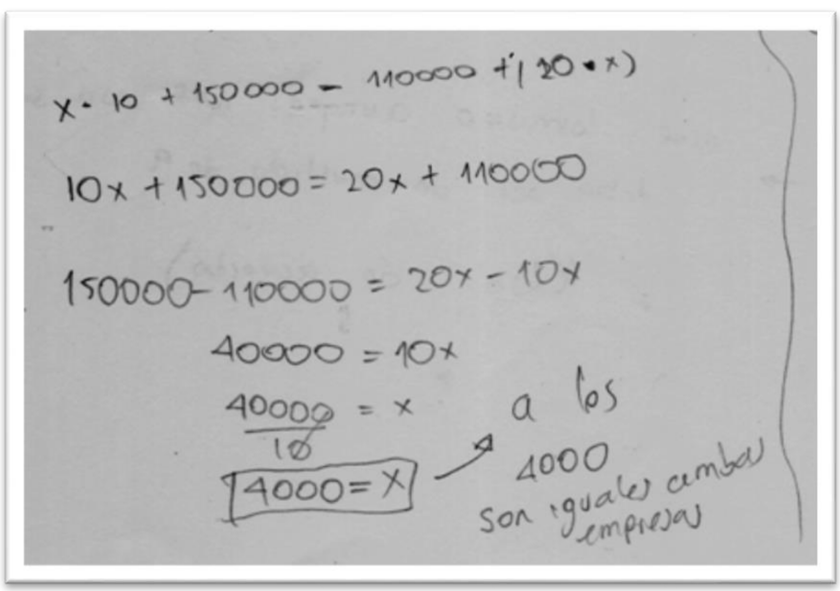
En esta Tarea 3 de la primera sesión la representación tabular es fácilmente comprendida por los estudiantes, comprenden e identifican diferentes formas de establecer el patron que relaciona las dos variables y con agilidad el primer ítem detectando el error. En relación a esta Tarea el estudiante E11 expone las conclusiones de su equipo realizando un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones. Él logra deducir a través de una base un caso particular para los nueve dólares y comprobar el error de los datos presentados en la tabla (ver imagen 12).

Imagen 12. Producción E11, Primera Sesión Tarea 3.



En la imagen 13 se muestra la producción del estudiante E29, donde se puede apreciar cómo a través de un procedimiento de articulación con ecuaciones y expresiones logra inducir cual es el numero de fotocopias para que el precio sea igual en las dos empresas. El logra expresar por escrito la manera en que ha objetivado la relación existente entre las características de cada empresa.

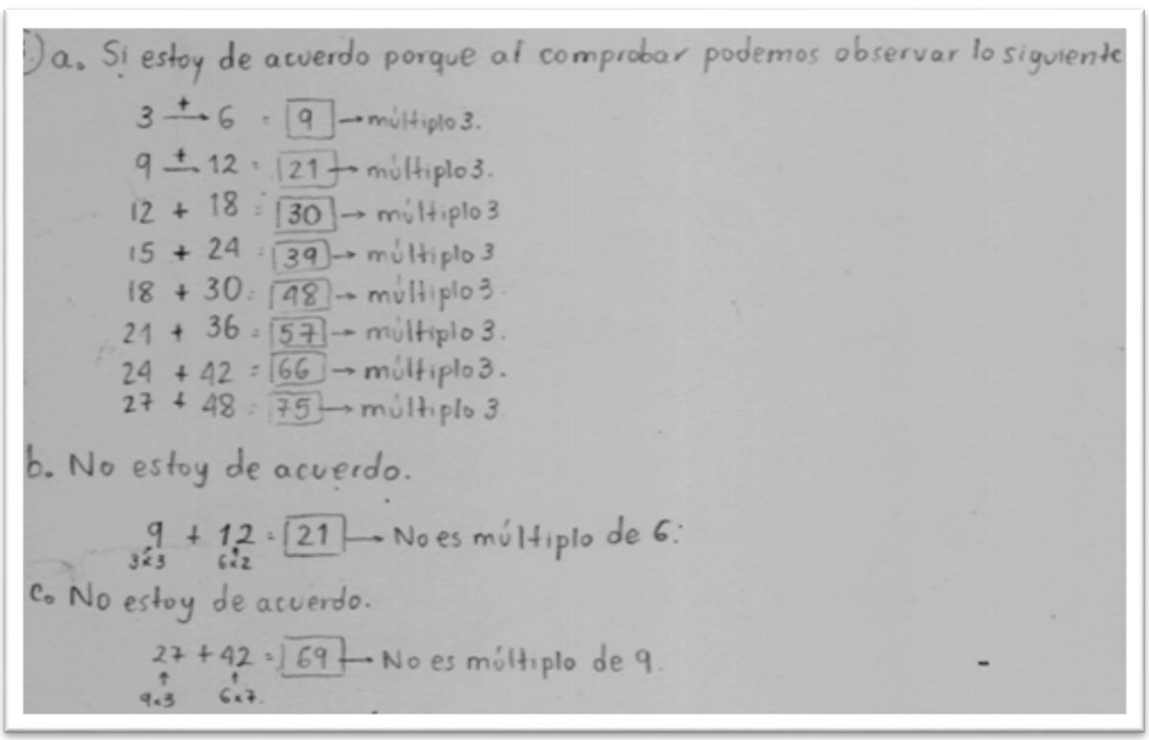
Imagen 13. Producción E29, Segunda Sesión Tarea 2.



En la producción matemática de E29 se puede identificar un razonamiento deductivo al utilizar fórmulas que reflejan la comprensión de las características de cada empresa; él utiliza un lenguaje simbólico de variables y sus procesos de solución evidencian un correcto manejo de los mismos.

En el nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones, la utilización de diagramas es clave para definir la articulación con expresiones que ayudan a definir el patron. En la producción del estudiante E39 se refleja este nivel de procesamiento; ella primero por medio de una reclamación abductiva construye una secuencia para definir los múltiplos de cada número (3 y 6) y luego a través del diagrama realiza la conexión con la relación suma para concluir que efectivamente el resultado es múltiplo de 3 (ver imagen 14). Utilizando este mismo razonamiento ella da evidencia de que las deducciones de Judy y Sam en los ítems b) y c) son incorrectas, para lo cual utiliza un ejemplo.

Imagen 14. Producción E34, Segunda Sesión Tarea 3.


a. Si estoy de acuerdo porque al comprobar podemos observar lo siguiente

$3 \xrightarrow{+} 6 = \boxed{9} \rightarrow$ múltiplo 3.

$9 \xrightarrow{+} 12 = \boxed{21} \rightarrow$ múltiplo 3.

$12 + 18 = \boxed{30} \rightarrow$ múltiplo 3

$15 + 24 = \boxed{39} \rightarrow$ múltiplo 3

$18 + 30 = \boxed{48} \rightarrow$ múltiplo 3

$21 + 36 = \boxed{57} \rightarrow$ múltiplo 3.

$24 + 42 = \boxed{66} \rightarrow$ múltiplo 3.

$27 + 48 = \boxed{75} \rightarrow$ múltiplo 3

b. No estoy de acuerdo.

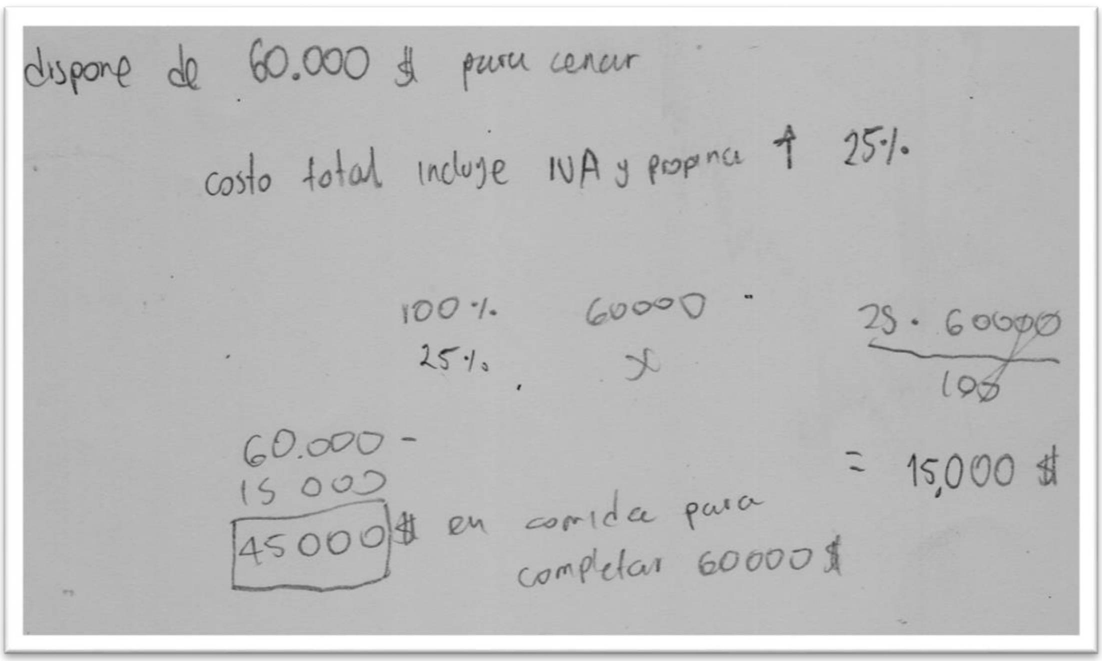
$\underset{3\times 3}{9} + \underset{6\times 2}{12} = \boxed{21} \rightarrow$ No es múltiplo de 6.

c. No estoy de acuerdo.

$\underset{9\times 3}{27} + \underset{6\times 7}{42} = \boxed{69} \rightarrow$ No es múltiplo de 9.

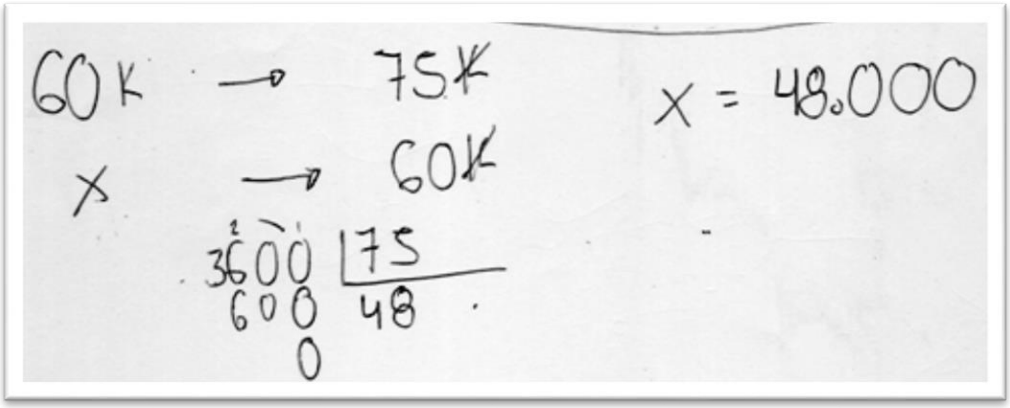
En la segunda Tarea de la tercera sesión el estudiante E29 utiliza un procesamiento y conversión numérica, dando una representación para formalizar una regla de tres en la que relaciona el valor de la cena y la propina del 25%; cabe resaltar que aunque el proceso numérico es correcto, no hubo claridad en las condiciones de la Tarea por lo que el proceso llevo a un resultado incorrecto. Al igual que este estudiante muchos siguieron análisis similares tomando el porcentaje de $ 60 000; cuando este debía ser el total del gasto con propina incluida, se refleja una falta de atención y lectura comprensiva de los problemas.

Imagen 15. Producción E29, Tercera Sesión Tarea 2.



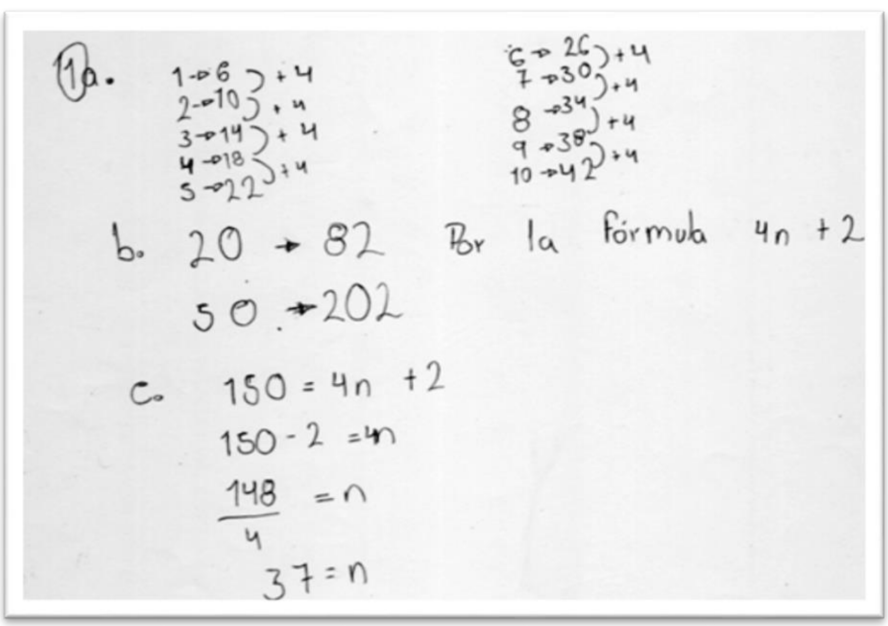
Para esta misma tarea de la tercera sesión el estudiante E20 realiza un procesamiento y conversión numérica estableciendo una correcta relación entre el porcentaje de la propina y el valor de la cena; su análisis y deducciones lo llevan a una representación correcta de la regla de tres (ver imagen 16).

Imagen 16. Producción E20, Tercera Sesión Tarea 2.



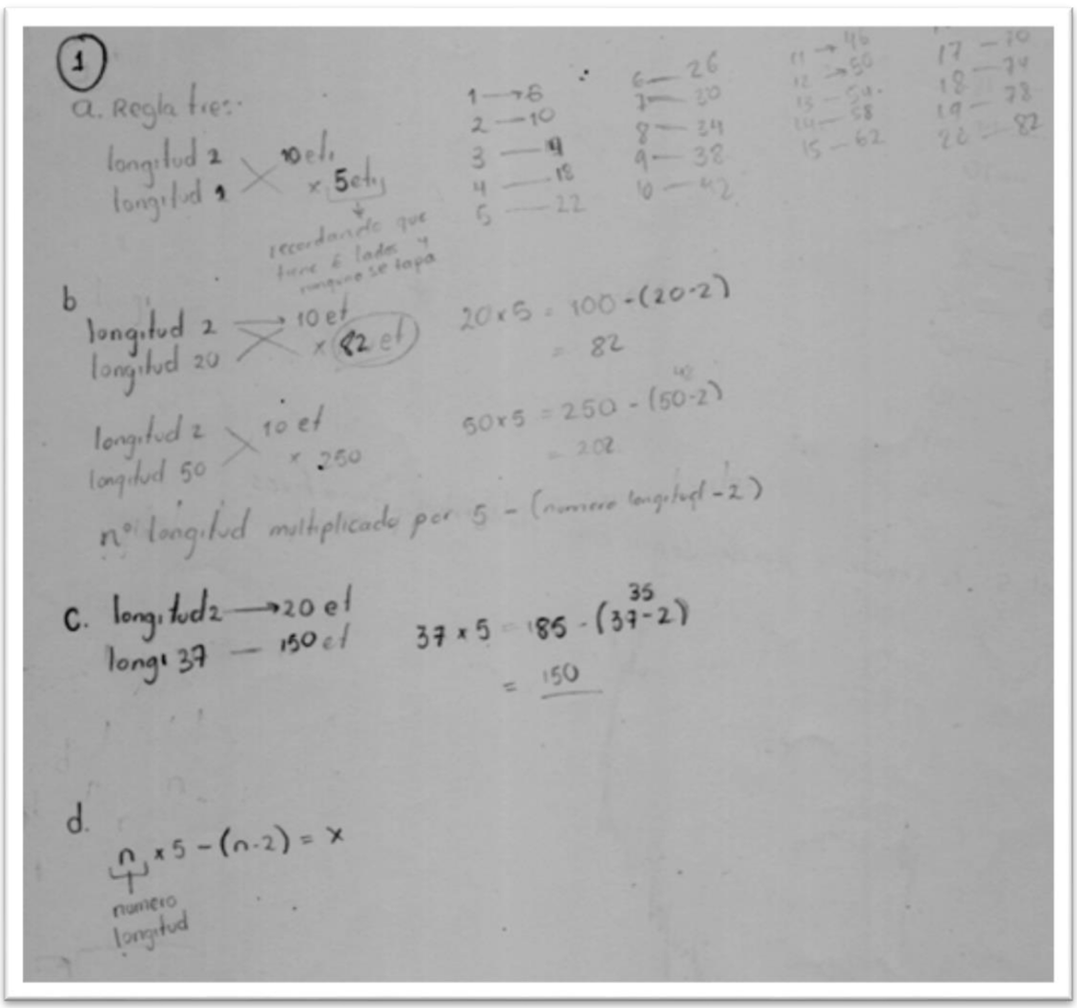
El estudiante E20 utiliza una representación de la secuencia para poder determinar la variación del patron (adicionar4) (ver imagen 17). Él por medio de un razonamiento abductivo determina el número de pegatinas necesarias en cada barra hasta llegar a una de longitud 10 y utiliza su procesamiento para articular la relación de la secuencia con una fórmula, la cual aplica para determinar las respuestas de los otros ítems, se ve que el estudiante logra una comprensión de la estructura matemática de la secuencia.

Imagen 17. Producción E20, Cuarta Sesión Tarea 1.



Al igual que el E20, en esta Tarea la estudiante E09 también realiza un procesamiento y conversión numérica, ella realiza un diagrama para representar su razonamiento abductivo de la secuencia (ver imagen 18); pero a diferencia de su compañero E09 articula su análisis por medio de una regla de tres que le permite determinar la cantidad de pegatinas para x longitud de la barra; la estudiante logra formalizar la regla del patron a través de una expresión que es funcional para todos los casos y es diferente a la de E20.

Imagen 18. Producción E09, Cuarta Sesión Tarea 1.



Con este nivel de procesamiento se pudo evidenciar como los estudiantes logran establecer una conexión entre la variación y cada termino de la secuencia; para muchos de ellos la clave está en comprender lo que ocurre y para ello se apoyan en razonamientos abductivos y deductivos. Gran parte de los estudiantes que utilizaron este nivel de procesamiento evidenció una mejor comprensión de la Tarea y llego a resultados validos, incluso lograron concretar una expresión que generalice el patron.

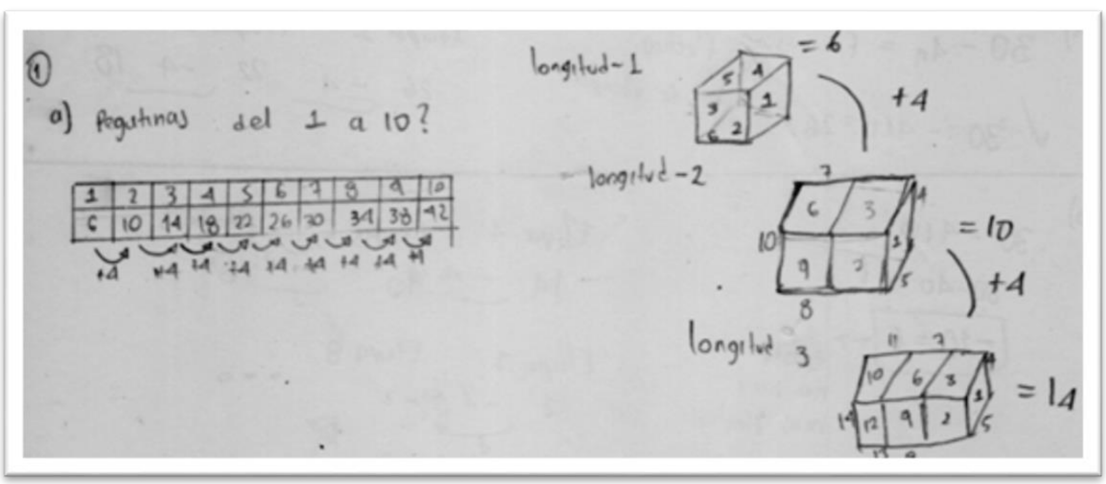
5.3.4 Análisis del nivel de procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones En este procesamiento el estudiante debe tener un avanzado nivel de comprensión; sus análisis se basan en identificar todas las características propias que existen en la figura para así poder establecer las propiedades y relaciones que determinan el patrón sin necesidad de convertir a la etapa numérica. Este nivel de razonamiento demanda que el estudiante logre abducir y vincular las propiedades invariantes y variacionales de los objetos; razón por la cual no es muy utilizado en los procesos de solución de Tareas.

La E34 en la segunda tarea de la primera sesión utiliza el gráfico del triángulo para encontrar el patron. La estudiante dice “profe pero como es lo de los puntos son 13 en total o solo en los lados, es que en el de 5 puntos que es el que esta dibujado los 5 puntos son los de la base” (ver foto 3). En este caso ella está realizando una comprensión clara de la información y entiende el problema planteado, además utiliza un nivel de procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones, porque en su análisis también hace una conexión entre el número de puntos y los lados del triángulo (la base).

Fotografía 3. Producción E34, Segunda Sesión Tarea 2.

En la primera Tarea de la cuarta intervención el estudiante E29 soluciona el ejercicio por medio de un procesamiento y conversión figural (ver imagen 19); él rápidamente a través de la interpretación del grafico logra determinar el número de pegatinas necesarias para etiquetar los cubos; organiza la información en una tabla y logra establecer una relación entre la cantidad de pegatinas y el término de la secuencia, de tal manera que evidenciando un razonamiento deductivo identifica el patron.

Imagen 19. Producción E29, Cuarta Sesión Tarea 1.



Este último nivel de procesamiento de Rivera demanda un alto nivel de comprensión; en las producciones de los estudiantes se evidencia la mayoría buscó la solución por los otros procesamientos, para ellos es fundamental el análisis y comprensión del gráfico para definir la relación pero requieren de la parte numérica para definirla la regla general.

5.4 COMUNIDAD MATEMÁTICA

La enseñanza adecuada de la matemática y en especial del álgebra es un problema real que requiere soluciones prácticas que propicien el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, por tanto es fundamental generar nuevas expectativas y estrategias. Es desde el trabajo diario dentro del aula donde las matemáticas cumplen su papel en la construcción de una nueva sociedad, ya que constituye un área de estudio útil, apasionante y creativa, que ayuda a todos los estudiantes a cultivar y desarrollar la lógica, el pensamiento coherente, el orden estético, y la capacidad de abstracción. Es por ello que el pensamiento algebraico y los procesos de generalización son la base para otras disciplinas y crecen en proporción directa con su utilidad, por tanto se debe ofrecer a todos los estudiantes la oportunidad de desarrollar una comprensión de modelos, estructuras y simulaciones, que lo lleven a construir el conocimiento matemático y las herramientas intelectuales necesarias que propicien procesos de reflexión y análisis crítico. Por tanto a esta investigación de carácter cualitativo le interesa entender el sujeto en el aula, analizar el rol de los estudiantes y del docente frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto.

Por tanto este proyecto busca dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de décimo grado a través de la solución de problemas y la conformación de una Comunidad Matemática propuesta por Santos (2007); por ello se centra en generar espacios para que el estudiante pueda desarrollar sus ideas, comunicarlas y exponerlas para ser convalidadas. En esta metodología todos los participantes crean conocimiento y en una actitud de respeto, tolerancia y aceptación se busca identificar las fortalezas y limitaciones. Con ella se propicia el trabajo cooperativo donde todos aportan en la construcción del saber y el estudiante es concebido como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas. Por lo tanto el desarrollo de las intervenciones contemplan tres momentos: el primero consistió en un trabajo individual donde cada estudiante pudo explorar y desarrollar sus hipótesis de solución; como segundo momento se planteó un espacio de trabajo en equipo donde en pequeños grupos los estudiantes expusieron sus hipótesis y explicaron a sus compañeros sus razonamientos; este espacio fue ideal para confrontar ideas ya que la mayoría de estudiantes se sienten más a gusto en pequeños grupos. Se evidenciaron confrontaciones sobre la solución de las Tareas, entre ellos mismos con sus argumentos buscaron convencer a sus compañeros y a la vez defendieron su postura. Este fue un momento importante dentro de la construcción de la Comunidad en el cual predominó el respeto y la aceptación a la diferencia, además muchos estudiantes pudieron aclarar y crear sus propios razonamientos en este espacio de socialización. Finalmente para el último momento se empleó la plenaria para socializar los procesos de solución y buscar la convalidación de la comunidad.

Por ello para el análisis de la conformación de la Comunidad Matemática se realizó una selección de los episodios más importantes durante todas las intervenciones donde se evidencian los tres momentos trabajados. Los eventos seleccionados van acompañados de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que los estudiantes están trabajando como miembros activos de una comunidad en consolidación.

Primer momento. Trabajo individual

La primera parte de las intervenciones consiste en un trabajo individual, a cada estudiante se le entrega una hoja con las tareas, se les da hojas amarrillas para que escriban sus procesos de solución. La distribución de los estudiantes se realizó en mesa redonda de dos hileras, la idea era salir del convencionalismo de la fila de la clase tradicional; cabe resaltar que con esta distribución se generó más cercanía y confianza a los estudiantes. Fueron muy consientes del trabajo de esta fase individual, cada uno estuvo concentrado en su producción; en esta primera parte todos los estudiantes focalizaron su atención en resolver las Tareas propuestas. La docente se dió vueltas por el salón para dar la confianza de resolver dudas, al principio sí vio recelo para hacer preguntas, sin embargo pasados unos minutos los estudiantes las realizaron con toda tranquilidad, a medida que se avanza en las intervenciones los estudiantes se familiarizaron con esta metodología y asumieron de forma natural esta primera fase.

Fotografía 4. Trabajo individual primera sesión.

Fotografía 5. Trabajo individual segunda sesión.

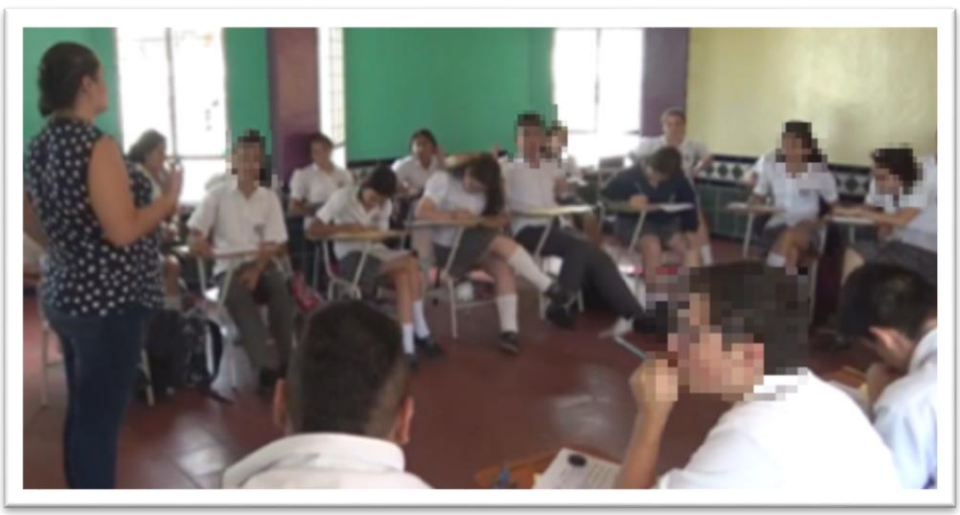
Fotografía 6. Trabajo individual cuarta sesión.

Durante la tercera sesión por factores de tiempo y con el ánimo de dinamizar la actividad se omitió el trabajo individual y se inició con el trabajo en equipo.

Segundo momento. Trabajo en equipo

De acuerdo con las pautas de la comunidad matemática propuesta por Santos Trigo es de vital importancia la socialización de ideas y el compartir de saberes, por ello finalizada la primera fase de trabajo individual se buscó dar una orientación pertinente para que los estudiantes fueran muy receptivos a escuchar y aceptar las diferentes formas de solución de sus compañeros (ver foto 7). Ellos comprendieron bien el trabajo en comunidad, se escucharon, discutieron, aclararon y consolidaron ideas, principios fundamentales de Santos Trigo para la conformación y consolidación de una Comunidad. Es importante recalcar como la discusión en pequeños grupos da mayor tranquilidad a los estudiantes que son más tímidos; estos logran participar y exponer sus ideas de manera más regular y natural como se evidencia en la foto 8.

Fotografía 7. Orientaciones sobre el trabajo en equipo.



Fotografía 8. Trabajo en equipo Grupo (E2, E12, E34) primera sesión.

Durante la segunda fase se observó un buen trabajo, los estudiantes discutieron de forma constructiva entre ellos sus procesos de solución; buscaron convencer y convalidar sus hipótesis. Dentro de los grupos cada estudiante explicó y justificó sus argumentos; y a su vez el resto de compañeros escucharon, cuestionaron y refutaron sus hipótesis (ver foto 9, 10); de esta forma consolidaron una teoría a nivel grupal para ser expuesta en la siguiente fase; cabe resaltar que la mayoría de grupos lograron unificar sus procesos de solución de las Tareas propuestas.

Fotografía 9. Trabajo en equipo primera sesión.

Fotografía 10Trabajo en equipo primera sesión.

También se resalta que durante este momento se evidenciaron espacios donde los estudiantes explicaron a sus compañeros como solucionar la tarea, y los orientaron hacia la solución de las mismas como se pueden observar en la foto 11**.**

Fotografía 11. Estudiante apoyando en la explicación de la tarea. Cuarta sesión.

Tercer momento. Socialización grupal.

Con este espacio se busca la consolidación de la comunidad, los estudiantes exponen y sustentan sus teorías para ser convalidadas y de esta forma ir construyendo el conocimiento.

Con este espacio se busca la consolidación de la comunidad, los estudiantes exponen y sustentan sus teorías para ser convalidadas y de esta forma ir construyendo el conocimiento.

En la primera sesión antes de dar inicio a la plenaria se generó un espacio de evaluación, para escuchar a los estudiantes y conocer su sentir en las dos primeras fases. Ellos expresaron sus confusiones y dudas en determinadas Tareas, así como su satisfacción por encontrar la solución. El estudiante E03 habló sobre lo gratificante de la experiencia por "retar" sus procesos de análisis, cómo se esforzó por comprender y tratar de dar solución (ver foto 12); por otro lado los estudiantes resaltaron el momento grupal donde pudieron compartir con sus pares la solución.

Hablaron de lo interesante que fue debatir con sus compañeros y cómo aprendieron las diferentes formas de pensar y abordar la solución de un problema.

Fotografía 12. Estudiante E03 compartiendo su experiencia a la comunidad.

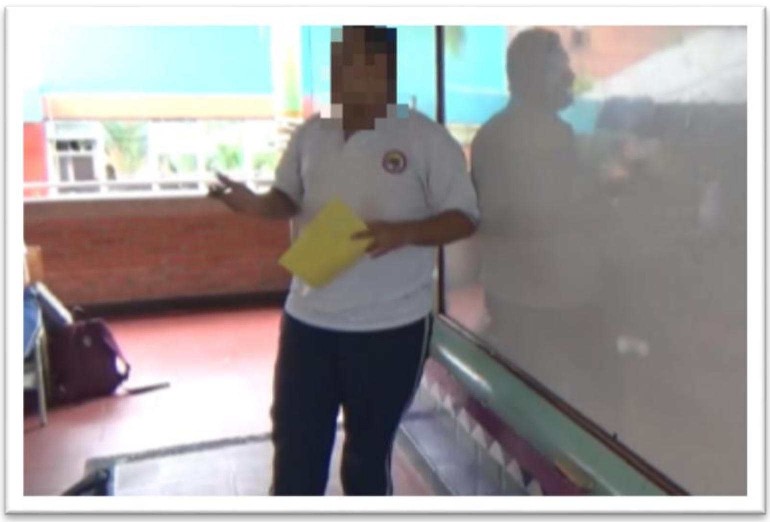
En este tercer momento de socialización se evidenció gran participación de los estudiantes, así como las diversas formas de solución que se pueden dar a una misma Tarea (ver foto 13, 14). Los estudiantes desde su puesto o el tablero expusieron sus hipótesis para ser convalidadas, cabe resaltar que es difícil salir de la estructura de la clase tradicional, y casi siempre los expositores hablaban hacia la docente esperando su aprobación. Fue necesario estar motivando a la comunidad para que diera su opinión respecto al trabajo de sus compañeros, en general los procesos expuestos fueron correctos y la comunidad valido las diferentes formas de solución que se dan a determinada tarea. En estos espacios el docente propicio la discusión de las estrategias utilizadas para la convalidación, así como dentro del desarrollo de la plenaria orientó con preguntas reflexivas para cuestionar a la comunidad.

Fotografía 13. Estudiantes compartiendo su experiencia a la comunidad.

Fotografía 14. Estudiante E03 compartiendo la cuarta forma de solución de la Tarea.

Durante este momento también se presentaron situaciones donde los estudiantes expusieron argumentos que no fueron validados por la comunidad; por ejemplo en la segunda sesión el estudiante E25 su hipótesis ante la tarea de los múltiplos (ver foto 15); la comunidad no aceptó su razonamiento, él trató de convencerlos pero ellos expusieron sus argumentos. Al final el estudiante reconoció que estaba realizando un proceso erróneo con los múltiplos y aceptó que la comunidad tenía la razón. Es muy importante socializar los razonamientos para aclarar dudas y reafirmar hipótesis; cabe resaltar que todo este proceso se realizó con la premisa de un ambiente de tolerancia. La comunidad de forma respetuosa explica al estudiante equivocación y le pide que compruebe su hipótesis con un ejemplo real (ver foto 16); el por su parte acepta y comprende con mucha receptividad el error. Al final todos llegan a un acuerdo en la tarea y pueden construir un conocimiento correcto.

Fotografía 15. Estudiante E25 argumentando su hipótesis



Fotografía 16. Estudiante E04 argumentando porque existe el error

En el desarrollo de estas plenarias es difícil dejar de lado el método tradicional de dejar la palabra del docente como suprema autoridad, constantemente se evidenció cómo los estudiantes buscaban su aprobación. Por otro lado el docente investigador en muchas ocasiones se vio en la necesidad de orientar y explicar los procesos de solución, es claro que la consolidación de la Comunidad Matemática es un trabajo constante que se logra poco y son necesarias muchas intervenciones: Fue una estrategia motivadora que contribuyó a fortificar muchas de las potencialidades de los estudiantes, así como brindo espacios para explorar la capacidad de análisis de los mismos. Con esta estrategia se desarrollaron importantes procesos cognitivos, así como se estimaron los valores humanos en pro de la tolerancia el respecto y la aceptación por la diferencia.

5.5 ENTREVISTAS

Para la fase final de la metodología, se realizó una entrevista con los estudiantes que presentaron un notable progreso desde el diagnóstico hasta la fase de desarrollo de las intervenciones; con la aplicación de la entrevista se busca conocer con mayor profundidad los diferentes procesos y la transición de las dimensiones a las fases (abducción, inducción y deducción), así como la forma en que los estudiantes aplican los evidencian los diferentes niveles de procesamiento.

El diseño de la entrevista está compuesto de tres tareas, que permiten que la actividad de los estudiantes pueda dar evidencia de la evolución de sus procesos de razonamiento inferencial. De manera de conclusión se busca reportar el significativo avance que los estudiantes alcanzaron. Para el análisis de la entrevista se han tomado los datos de ocho estudiantes (E4, E12, E20, E25, E29, E34, E35, E39) del curso décimo 2, para el desarrollo de la entrevista los estudiantes se organizaron en parejas. Los cuatro grupos fueron acompañados por el docente, el cual intervenía con preguntas que les permitieron a los estudiantes analizar sus procesos de razonamiento y percepción. Además de descubrir los obstáculos presentes en el desarrollo de las fases de generalización y los niveles de procesamiento.

La entrevista fue registrada a través de una grabación, la cual permitió tener una mejor información y analizar las diferentes expresiones, procedimientos, análisis, conjeturas y estrategias que registraron los estudiantes. Algunos de ellos trabajaron sobre el papel y otros lo hicieron en el tablero según su comodidad; el tiempo destinado para cada entrevista fue de 120 minutos; pero algunas parejas terminaron antes. Las entrevistas se realizaron en el aula regular en un día que no hubo actividad académica en el colegio, lo cual fue ideal para brindar la tranquilidad requerida para la actividad. Para cada tarea de la entrevista se realizó un análisis a priori.

5.5.1 Análisis a priori tareas de la entrevista

TAREA 1

Completa la columna de la derecha de acuerdo a las indicaciones dadas en la columna de la izquierda

Piensa un número cualquiera	**2**	**5**	**10**	**N**
súmale 2 a ese numero	**2+2**			
Multiplica el resultado que obtuviste por 2	**4x2**			
Suma 6	**8+6**			
Divide entre 2	**14/2**			
Resta el numero que pensaste al comienzo	**7-2**			

Responde:

1. ¿Cuál es el truco que el problema?______________________________
____
2. ¿Qué pasará si el número inicial es 101?__________________________
____
3. plantea un argumento algebraico que te permita analizar la situación anterior____
____

Análisis a priori

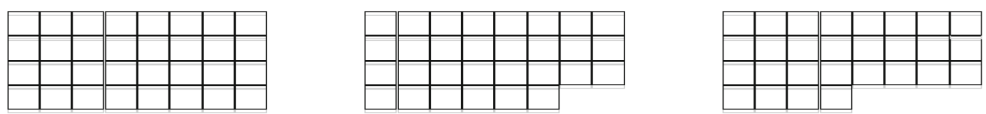
Para la primera tarea aparece una secuencia numérica, usando el lenguaje aritmético para encontrar regularidades en secuencias figúrales. Donde a cada elemento se realiza una serie de operaciones numéricas, las cuales los conducen a un resultado esperado. Inicialmente se espera que los estudiantes completen la tabla con los números dados, esto puede inducir a plantear una conjetura que lleve a cada estudiante a construir una abdución. Esta conjetura o hipótesis les permite a los estudiantes comprender distintitas relaciones invariantes que presenta cada paso de la secuencia

Piensa un número cualquiera	**2**	**5**	**10**	**N**
súmale 2 a ese numero	**2+2**	5+2	10+2	$n + 2$
Multiplica el resultado que obtuviste por 2	**4x2**	7x2	12x2	$(n + 2) \times 2$
Suma 6	**8+6**	14+6	24+6	$(n + 2) \times 2 + 6$
Divide entre 2	**14/2**	20/2	30/2	$\frac{(n + 2) \times 2 + 6}{2}$
Resta el numero que pensaste al comienzo	**7-2**	10-5	15-10	$\frac{(n + 2) \times 2 + 6}{2} - n$

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que se derivan de su razonamiento, y logren dar evidencia de un razonamiento inductivo al establecer una fórmula general con las variables. De tal manera que por medio de un procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto pueda establecer con seguridad la fórmula que determina el ejercicio y por qué siempre el resultado final es 5.

TAREA 2

Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 10? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

b. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 15? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

c. Encuentre una fórmula directa para el número total de cuadrados en la etapa n, donde n es un número entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ella en términos de patrón anterior?

d. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 20? ¿Qué podría significar su respuesta si piensa en ello en términos dela etapa anterior?

e. ¿Para qué número de escenario no quedarán más cuadrados? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

Análisis a priori

Para esta segunda Tarea se retomó un ejercicio planteado en las intervenciones pasadas, se buscaba ver el nivel de apropiación que lograron los estudiantes; así como evidenciar una trazabilidad en su proceso. Esta tarea presenta una secuencia grafica, se busca que el estudiante verifique la cantidad de cuadros e identifique el patrón por lo cual se va generando la disminución reforzando el análisis aplicado en la secuencia anterior.

Se espera que el estudiante logre generar una conjetura abductiva que le permita identificar el cambio y la correspondencia de una etapa a otra, además de analizar las distintitas relaciones invariantes que presenta la secuencia grafica. Con este análisis se podrá establecer que:

Termino	Numero de cuadros	Diferencia
1	32	0
2	30	2
3	18	$2+2=4$
n	$32-2\times(n-1)$	$2\times(n-1)$

Finalmente, se espera que con el análisis realizado hasta el momento y verificado, el estudiante logre comunicar las variaciones y las implicaciones que utilizó, y pueda dar evidencia de un razonamiento inductivo al establecer una fórmula general con las variables y por medio de un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones pueda establecer con seguridad que secuencia va en decrecimiento; ya que el número de cuadros es el número de la secuencia es el anterior menos dos; lo cual implica que habrá un término en el que ya no queden cuadros.

TAREA 3

María y Luisa compitieron resolviendo una lista de 100 problemas. Algunos problemas no fueron resueltos por ninguna pero otros los resolvieron las dos. Por cada problema resuelto, la primera en resolverlo obtuvo 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto las dos, la segunda obtuvo sólo 1 punto. Si cada una de ellas resolvió 60 problemas de la lista y entre las dos lograron 312 puntos, ¿cuántos problemas resolvieron en común?

Análisis a priori

En la tercera Tarea se presenta una situación numérica que involucra razones entre los problemas resueltos por dos estudiantes y el puntaje obtenido por los problemas diferentes y los problemas comunes. El fin de esta tarea es buscar que los estudiantes deduzcan el patrón y logren determinan razón entre los problemas resueltos y los puntos obtenidos por las dos estudiantes a través de los procesos de conversión figural dependiente de relaciones y finalicen en la deducción de una expresión que dé respuesta al problema.

Los estudiantes podrían buscar la solución a partir de un razonamiento abductivo construyendo una relación entre la cantidad de puntos por los problemas comunes y diferentes; para ello podría plantear diferentes formas de representación que le ayuden a establecer un patrón entre las dos estudiantes. Que pueden establecer, por ejemplo a partir de una representación tabular de las variables involucradas:

Preguntas comunes	**Preguntas no comunes**	**Puntaje de María**	**Puntaje de Luisa**	**Puntaje Total**
5	55	$4 \times 5 + 4 \times 55 = 240$	$1 \times 5 + 4 \times 55 = 225$	$240 + 255 = 495$

Preguntas comunes	Preguntas no comunes	Puntaje de María	Puntaje de Luisa	Puntaje Total
40	20	$4 \times 40 + 4 \times 20 = 240$	$1 \times 40 + 4 \times 20 = 120$	$240 + 120 = 360$
50	10	$4 \times 50 + 4 \times 10 = 240$	$1 \times 50 + 4 \times 10 = 90$	$240 + 120 = 330$
55	5	$4 \times 55 + 4 \times 5 = 240$	$1 \times 55 + 4 \times 5 = 75$	$240 + 75 = 315$
56	4	$4 \times 56 + 4 \times 4 = 240$	$1 \times 56 + 4 \times 4 = 72$	$240 + 72 = 312$

También se espera que algunos estudiantes logren realizar un procesamiento de conversión numérica dependiente de relaciones y busquen la relación entre la cantidad de puntos obtenidos por los problemas comunes y no comunes. Mediante una relación o representación grafica se espera que el estudiante construya una correspondencia entre la cantidad de puntos por los problemas comunes, creando una representación que lo lleve a inferir que como por cada problema la primera estudiante recibe 4 puntos, pero si la niña repite el problema solo recibe un punto. Es decir $4 + 1 = 5\,puntos$, que son los puntos recibidos entre las dos por los problemas que resuelven en común; además $4 + 4 = 8\,puntos$ es lo recibido por los problemas diferentes que realizan las dos. Es así que realizando un nivel de procesamiento de conversión numérica dependiente de relaciones puedan concluir que las preguntas comunes que realizan entre las dos para sumar 312 puntos en las 60 preguntas que resuelve cada una; es 56 preguntas comunes.

$$\boldsymbol{4 + 1 = 5\,puntos \leftarrow por\ cada\ problema\ comun\ C}$$

$$\boldsymbol{4 + 4 = 8\,puntos \leftarrow por\ cada\ problema\ diferente\ D}$$

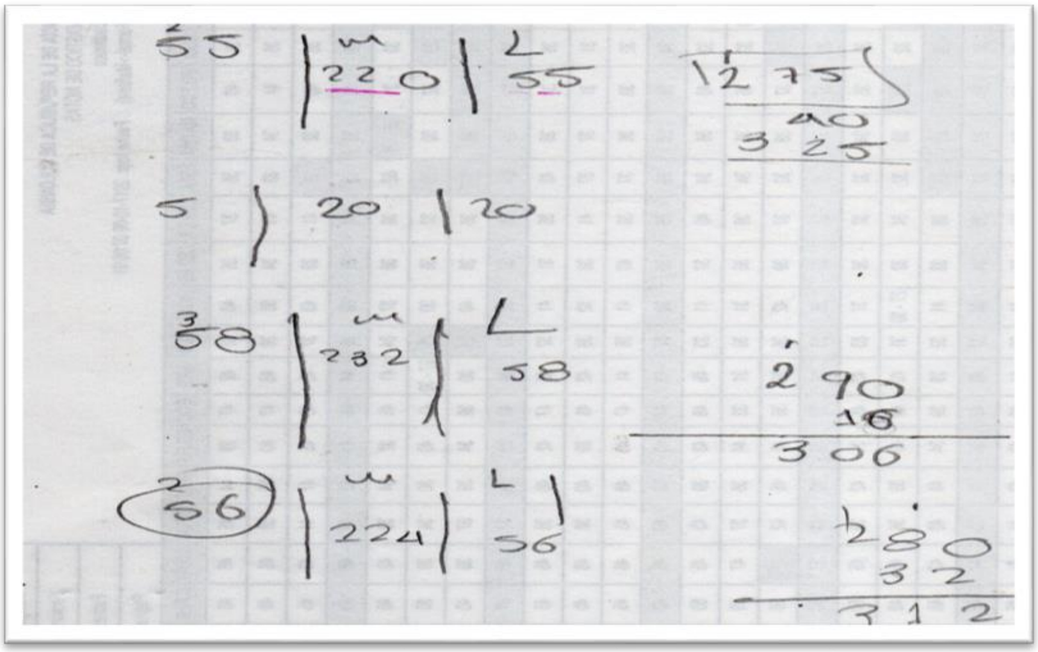
Como cada estudiante resolvió 60 preguntas entonces $\boldsymbol{C + D = 60}$

Y como entre las dos suman 312 puntos $\boldsymbol{5C + 8D = 312}$

5.5.2 Análisis de las entrevista Para el análisis de las entrevistas se sigue con las pautas establecidas en el análisis de las intervenciones; se revisaron cuidadosamente los videos de cada una de las entrevistas para seleccionar los episodios más importantes. Los eventos seleccionados van acompañados de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que ellos están realizando sus diferentes análisis y procesos de solución, así como las transcripciones que reflejan el análisis de los estudiantes. Para el desarrollo de estas entrevistas se organizó a los estudiantes seleccionados en cuatro parejas: la primera pareja fue conformada por los estudiantes E12 y E34, la segunda por los estudiantes E20 y E29, la tercera por los estudiantes E25 y E35, y la última pareja fue la de los estudiantes E04 y E39; la organización de estos equipos de trabajo se realizó buscando la afinidad entre los estudiantes para así generar un ambiente de comodidad que propiciara la participación. El lugar de la entrevista fue el salón de clase, cada pareja tuvo la oportunidad de escoger la forma de trabajo, tres de ellas prefirieron trabajar en las sillas con las hojas; pero la pareja E20 y E29 decidió apoyarse con el tablero del salón. Siguiendo el orden del análisis de las intervenciones para las entrevistas se tomaron en cuenta los cuatro niveles de procesamiento de estudiantes mayores propuestos por Rivera (2013): procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto; procesamiento y conversión grafica dependiente de objeto, procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones y procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones.

5.5.2.1 Análisis del nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de objeto en la entrevista En la cuarta Tarea la pareja de estudiantes E25 y E35 realizó una serie de ejemplos numéricos con el fin de encontrar la respuesta; analizan las posibles preguntas que pueden resolver en común para obtener los 312 puntos como puntualiza el problema; ellos crean deducciones numéricas estableciendo relaciones entre la cantidad de preguntas 60 cada una y el puntaje final 312, como son 4 puntos para la primera que lo resuelve y 1 un solo punto para que lo resuelve de segunda sus razonamientos los llevan a probar con una serie de números y por medio de un razonamiento abductivo después de varios intentos logran encontrar la respuesta correcta como se observa en la imagen 20.

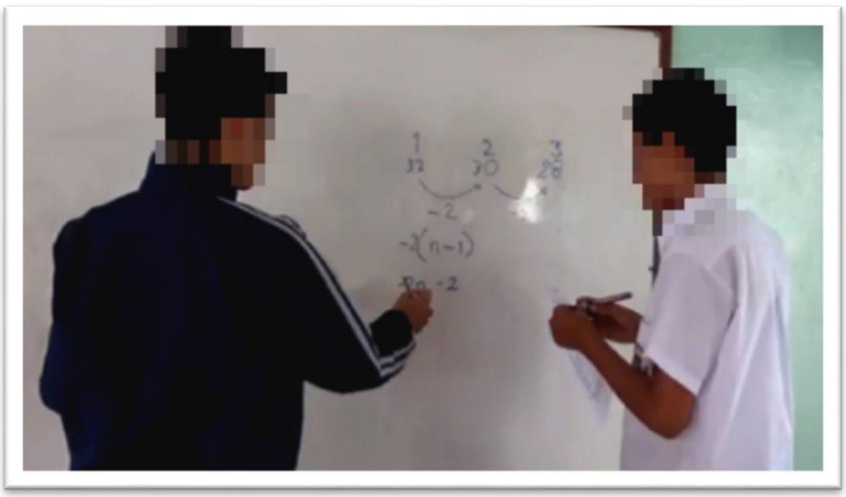
Imagen 1. Producción E25, E35, Tarea 3



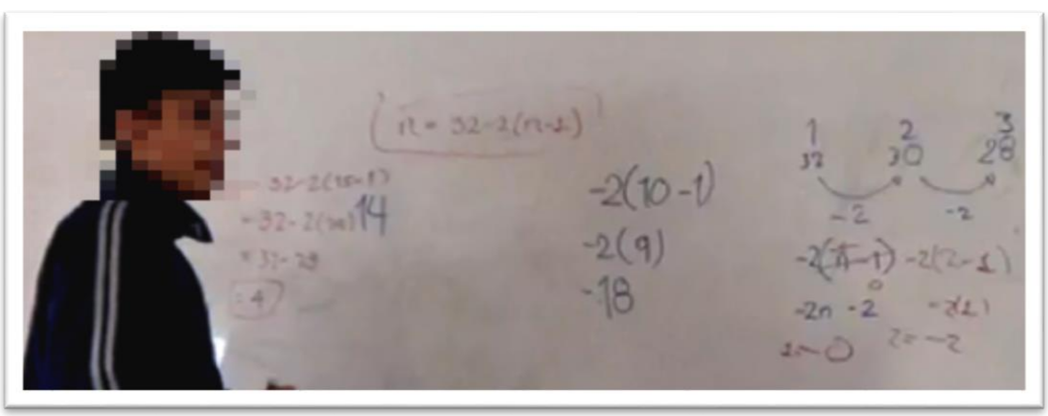
Tal como se esperaba pocos estudiantes utilizaron este nivel de procesamiento, ya que en él se busca la solución a partir de la intuición ensayo y error, y en esta fase de la intervención los estudiantes lograron desarrollar una comprensión de la estructura y buscan la respuesta con planteamientos matemáticos más estructurados.

5.5.2.2 Análisis del nivel de procesamiento y conversión grafica dependiente del objeto en la entrevista Para la segunda Tarea la pareja de estudiantes E20 y E29 utiliza un procesamiento y conversión grafica; el estudiante E20 realizó una comprensión de lo que ocurre en la secuencia a partir del análisis gráfico y construyó una representación simbólica que le ayudo a inferir la regla general; para llegar a este nivel de razonamiento deductivo el estudiante E29 tuvo una confusión pero su compañero E29 entro a apoyar explicando lo que ocurre para el primer término que no sufre ninguna reducción (ver foto 17) , es así que entre los dos se apoyan y logran convalidar una expresión que da respuesta a la Tarea, se da evidencia de un trabajo en comunidad donde el conocimiento se construye con el apoyo del otro y de esta forma logran realizar un razonamiento deductivo correcto que generaliza la secuencia (ver foto 18).

Fotografía 17. Estudiante E29 apoyando a su compañero.

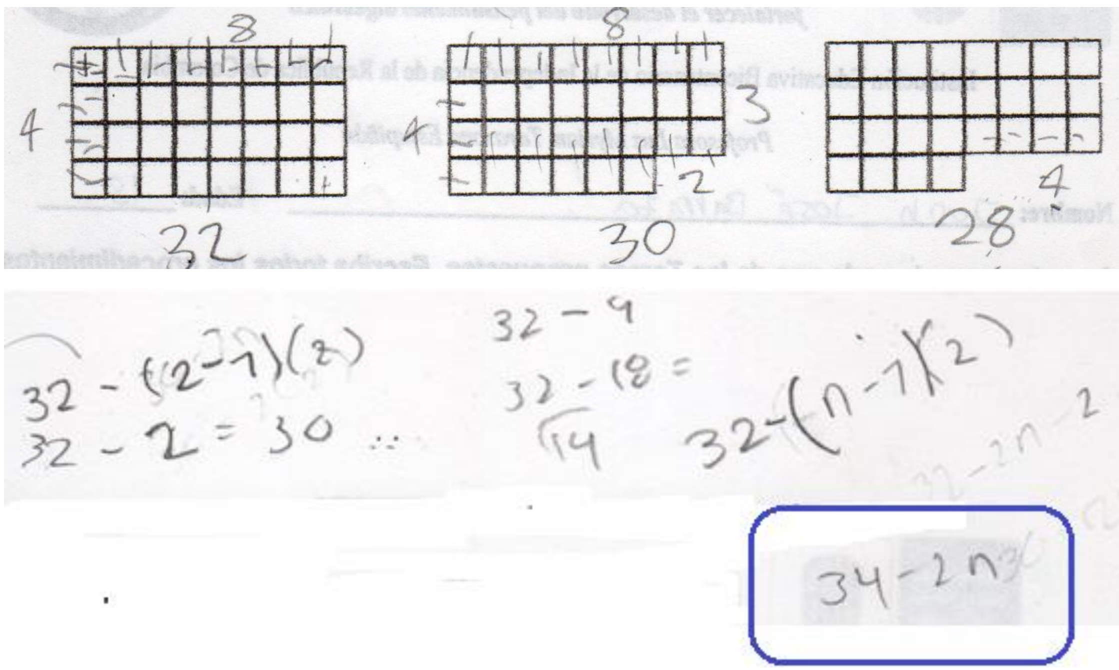


Fotografía 18. Desarrollo E20, E29 Tarea 2.



En esta misma Tarea 2 la pareja de estudiantes E04 y E39 utilizan el mismo procesamiento grafico para determinar la generalización de la secuencia, ellos toman la grafica verifican sus variaciones y rápidamente con unos pocos valores logran plantear la ecuación que define la secuencia (ver figura 19)

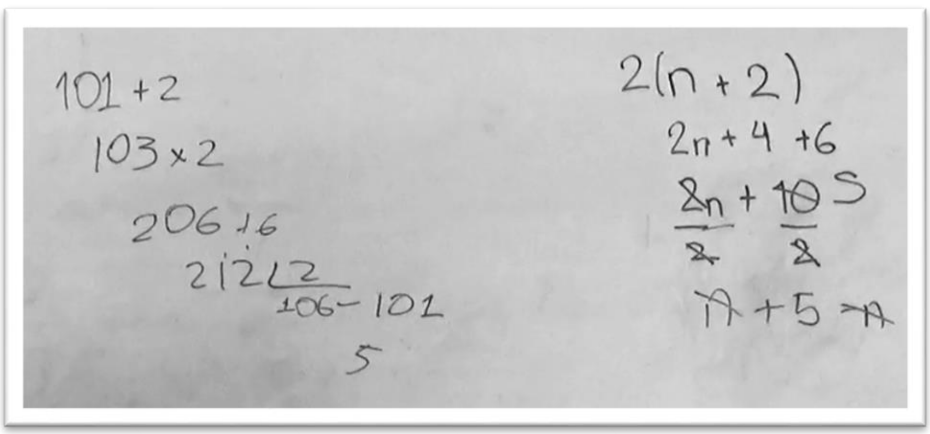
Fotografía 19. Desarrollo estudiantes E09 y E39 Tarea 2.



En esta fase del proceso se logró evidenciar como los estudiantes han evolucionado en sus procesos de razonamiento y deducen con facilidad las variaciones de la secuencia; analizan con mayor propiedad los cambios en la gráfica en cada término y logran establecer relaciones a partir de sus propias representaciones. Es importante recalcar como la misma Tarea puede ser analizada desde un mismo nivel de procesamiento de dos formas distintas, cada estudiante tiene su forma particular de comprender. Ya en esta fase los estudiantes a partir de sus procesamientos consiguieron realizar un razonamiento inductivo y las dos parejas lograron establecer una expresión que generaliza la secuencia.

5.5.2.3 Análisis del nivel de procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones en la entrevista Para la primera Tarea la pareja de estudiantes E20 y E29 realizan un procesamiento y conversión numérica dependiente de relaciones; en primera instancia el E29 organiza las instrucciones dadas en la Tarea y realiza una representación de lo que ocurre en cada paso (parte izquierda imagen 21); después su compañero a través de este análisis utiliza un razonamiento deductivo y logra llegar a establecer una representación general de lo que está ocurriendo , llega a determinar porque sin importar el numero que se utilice el resultado siempre será 5 (parte derecha imagen 21). Estos planteamientos dan evidencia como los estudiantes han evolucionado en sus razonamientos y logran generalizar correctamente la secuencia con argumentos matemáticos.

Imagen 20. Producción estudiantes E20 y E29 Tarea 1.



En el desarrollo de la segunda Tarea la pareja de los estudiantes E12 y E34 realiza un razonamiento abductivo y busca la solución determinando que sucede en cada paso de la secuencia (ver foto 20), sin embargo en el desarrollo se dan cuenta de la necesidad de lograr establecer una fórmula para facilitar el proceso, es así que a partir de un procesamiento y análisis de la relación determinan el comportamiento de la secuencia; esta pareja pasa a un razonamiento deductivo y busca plantear la regla general que define la secuencia como se observa en la trascripción .

Fotografía 20. Análisis Estudiantes E12 y E34 desarrollo Tarea 2.

E34: *sumar las medidas para saber está disminuyendo*

P: *a bueno ya empezaron a establecer un patron cierto, a mirar que estaba pasando con la figura*

E12: *o sea se van disminuyendo de a dos cuadros.*

P: *entonces para la pregunta 1 en la etapa 10 ¿qué concluyeron?*

E12: *pues con cada paso que iba pasando le iba restando dos para llegar a la conclusión de que en la etapa 10 contiene 14.*

E34: *bueno haber pues yo en la etapa 6 me di cuenta que iban a quitar 6, por que en la 3 fueron 4, en la 5 fueron 8, en la 6 10, en la 7 12, en la 8 14, en la 9 16, en la 10 18, entonces iba a quitarle a 32 18 para saber que pasaba con la etapa 10.*

P: *y entonces ¿Cuánto te dio?*

E12: *haber pues 32 menos 18, me da 14.*

P: *listo ya van en la 10 entonces que harían en la 15.*

E12: *seguir (risas jejjejeje)*

P: *bueno sigamos ¿cuánto les da a cada uno?*

Los estudiantes siguen trabajando por unos instantes…

E34: *a no, ya sería establecer una ecuación por que seguir con los otros números seria…..*

E12: *si cuando sea una etapa mayor es muy difícil saber.*

Para este tercer nivel de procesamiento se evidencia como los estudiantes utilizan con más naturalidad diagramas que los ayudan a identificar con mayor agilidad las relaciones que determinan la Tarea, utilizan con propiedad estructuras matemáticas al plantear procedimientos que inducen a la formulación de expresiones validas para generalizar el patron. Incluso ya en esta fase reconocen la necesidad de establecer el patron para no continuar en razonamientos abductivos, realizando cada paso de la secuencia hasta llegar al termino deseado y buscan comprender las variaciones para establecer la generalización que les permita dar respuesta a cualquier termino de la secuencia.

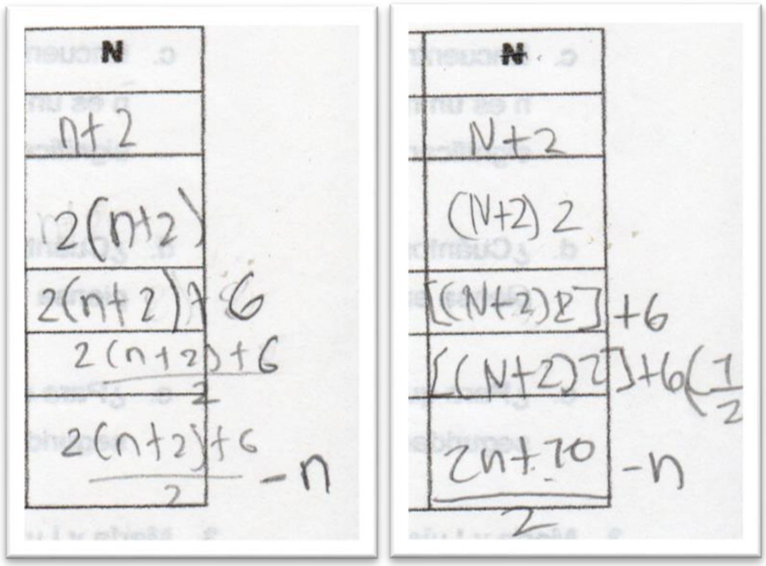
5.5.2.4 Análisis del nivel de procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones en la entrevista Al dar solución a la primera Tarea la pareja formada por los estudiantes E04 y E39 alcanza un nivel de procesamiento y conversión figural, en el desarrollo de este ejercicio los estudiantes inician con un proceso abductivo como se solicitaba al completar la tabla pero al hacerlo van analizando las variaciones que ocurren en cada paso de la secuencia de esta manera logran generalizar que ocurre en el proceso y por que la respuesta siempre da cinco; es importante destacar que el estudiante E04 realiza este procesamiento de forma mental y no tiene la necesidad escribir el solo va realizando sus conjeturas evidenciando un alto nivel de comprensión el cual lo lleva a una correcta solución como se puede apreciar en la siguiente transcripción .

P: *siempre va a dar el número original más cinco, por eso queda cinco ¿Por qué siempre va a dar el número original más cinco?*

E04: *aaaaa…. Se sumaría 2, se multiplicaría por 2 , mmmm se le sumaria 6 , al quitar la mitad como antes el 2 se le sumo antes de la multiplicación, solo se dividiría en 6 y quedaría 3 y 2 ….mmm y me da cinco que sería el que quedaría*

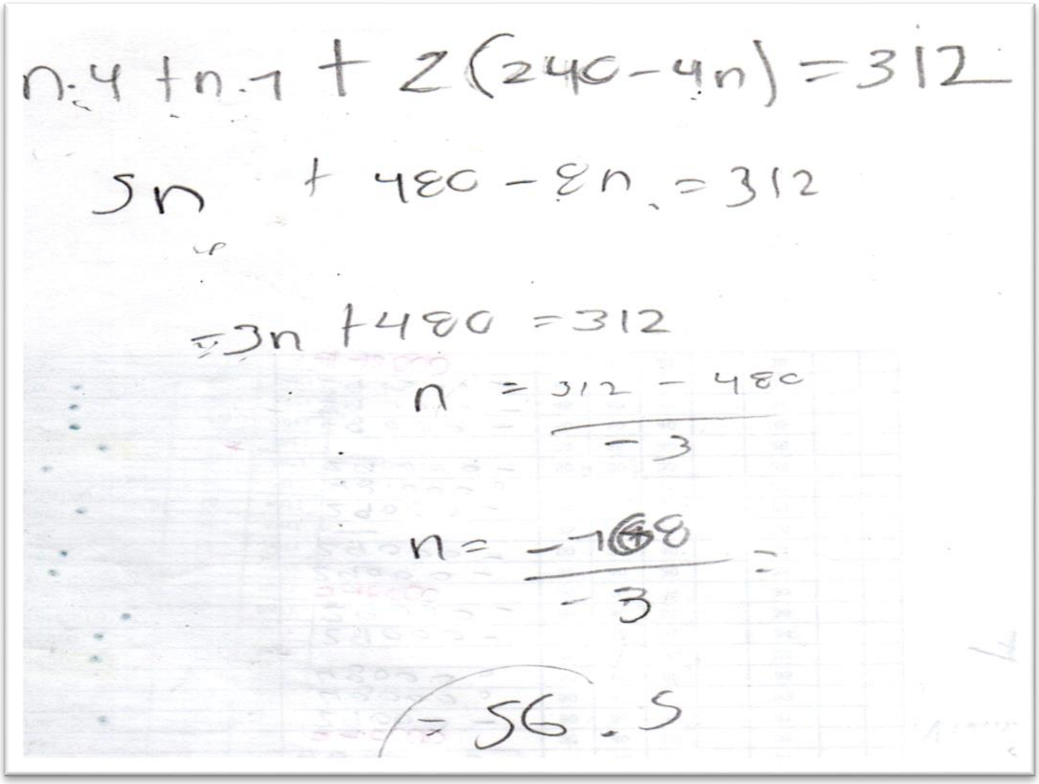
En el desarrollo de esta tarea también se evidenció como los dos estudiantes llegaron a un razonamiento deductivo y plantearon la ecuación general escrita de dos formas distintas como se puede ver en la imagen 22.

Imagen 21. Evidencia proceso deductivo estudiantes E04 y E39



Para la cuarta tarea esta misma pareja de estudiantes E04 y E39 realiza una serie de análisis de las condiciones dadas con el fin de encontrar la respuesta; conjeturan sobre las posibles preguntas que pueden resolver en común para obtener los 312 puntos como puntualiza el ejercicio; ellos crean deducciones numéricas estableciendo relaciones entre la cantidad de preguntas 60 cada una y el puntaje final 312, y el puntaje de cada pregunta, 4 puntos para la primera que lo resuelve y 1 solo punto para la que lo resuelve de segunda. Sus razonamientos evidencian un alto nivel de comprensión sobre las variaciones que se presentan en el problema lo que los lleva a trabajar en equipo para convalidar sus hipótesis y realizar un nivel de razonamiento deductivo estableciendo una regla general que define la tarea como se puede evidenciar en la imagen 23.

Imagen 22. Producción E09 y E39, Tarea 4



En este último nivel de procesamiento en la fase de la entrevista se ve una clara evolución de los estudiantes en su proceso de análisis. Cabe resaltar que este nivel demanda una alta comprensión por parte del estudiante, y no había sido utilizado con regularidad en las intervenciones; pero ya en esta fase las producciones y transcripciones dan evidencia del progreso de los estudiantes en sus razonamientos; ellos ya analizan y determinan las relaciones de variación determinadas en la Tarea para diagnosticar reglas generales que determinan un patron de solución acertado.

6. HALLAZGOS

Teniendo como referencia la pregunta central de investigación ¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico de los estudiantes de décimo grado que pertenecen a una Comunidad Matemática, cuando resuelven situaciones que buscan promover la construcción del proceso de generalización? Se encontró que los estudiantes de décimo grado recurren en su gran mayoría a razonamientos abductivos para determinar y calcular los términos de cada etapa, muchos de ellos necesitan construir todos los pasos de la secuencia para llegar a un nivel superior. De igual forma se halla que un buen número de estudiantes requiere del gráfico para poder realizar sus procesos de análisis. Cuando la Tarea estaba compuesta por una figura, los estudiantes iniciaban sus razonamientos analizando las variaciones que se presentaban en cada imagen; e incluso cuando el ejercicio carecía del gráfico varios de ellos construían una representación para poder encontrar la relación que definía el patrón. En las Tareas que demandaban un alto nivel de comprensión de la situación planteada se encontró que muchos estudiantes tenían dificultades para interpretar el problema y por consiguiente no lograban establecer las relaciones entre las variables que daban solución al ejercicio. Por otro lado se evidenció que a pesar de que los estudiantes han aprobado los niveles básicos asociados al álgebra, no tienen el manejo de las variables ni reconocen su significado dentro de la variación de una situación, razón por la cual varios no lograron llegar a estructurar un razonamiento deductivo.

Así mismo, se presentaron falencias en los procesos matemáticos básicos; dentro de las Tareas se plantearon situaciones que requerían de conversiones de equivalencias; porcentajes y regla de tres y aunque la estructura del procesamiento de conversión y el razonamiento fueran correctos la falla en estos procesos llevo a los estudiantes a respuestas erradas.

En la implementación de las intervenciones se encontró que los estudiantes tienen muchas dudas sobre sus razonamientos; realizan diferentes procesos pero no tienen la seguridad de que lo que hacen sea válido y siempre quieren buscar la aprobación del maestro; en esta fase se encontró que el segundo momento de trabajo en equipo contribuyo a la participación de los estudiantes más tímidos, este momento fue el espacio ideal para que dentro de los pequeños grupos se generara el cuestionamiento de hipótesis, fue un espacio valioso de socialización donde todos los estudiantes pudieron apreciar los análisis de sus pares y la forma en que ellos analizan los ejercicios.

Por consiguiente, mediante iniciar la constitución de una Comunidad Matemática como estrategia didáctica se implementaron un conjunto de intervenciones para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico, según los tres tipos de razonamiento inferencial y los niveles de procesamiento algebraico propuestos por Rivera a través de Tareas que transversalizan los procesos de generalización con situaciones cotidianas que requieren de habilidades y conocimientos matemáticos. A su vez, este proyecto permitió evaluar el proceso de los estudiantes mediante el desarrollo de dichas Tareas y su participación directa en la conformación de la comunidad matemáticadurante la implementación de las intervenciones. El análisis consecutivo de las producciones de los estudiantes, así como la observación de los momentos de trabajo grupal y socialización grupal, y el análisis de las entrevistas en la fase final, evidencia que los estudiantes mejoraron sus habilidades en los procesos de solución al aplicar niveles de procesamiento y conversión que requieren de avanzados procesos de comprensión. De igual forma mejoraron sus razonamientos inductivos para establecer la expresión que generaliza la secuencia; se destaca también que muchos estudiantes aumentaron su nivel de participación y el nivel de propiedad del lenguaje matemático, en las etapas finales ya hablaban en términos de patrones, procesos, relaciones y generalización.

7. CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones evidenciadas en los resultados encontrados durante las intervenciones de esta investigación relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico mediante los procesos de generalización y la implementación de una Comunidad Matemática. La organización de estas conclusiones se hará en dos partes. En la primera parte, hace referencia al cumplimiento de los objetivos formulados en la investigación; posteriormente, se plantean algunas conclusiones generales.

Sobre los objetivos de investigación

El desarrollo del presente trabajo fue orientado por la siguiente pregunta de investigación *¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico de los estudiantes de décimo grado que pertenecen a una Comunidad Matemática, cuando resuelven situaciones que buscan promover la construcción del proceso de generalización?* Con el fin de dar respuesta a esta pregunta se planteó un objetivo general y cuatro objetivos específicos enfocados al cumplimiento del objetivo general: *Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes con edades comprendidas entre los 15 y 16 años mediante su participación como miembros activos de una Comunidad Matemática*. A continuación se exponen las acciones realizadas durante la investigación que permitieron cumplir con los dos objetivos específicos:

- Objetivo específico N° 1: *Diagnosticar las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes al resolver situaciones relacionadas con el pensamiento algebraico*. Para el cumplimiento de este objetivo se realizó una prueba diagnóstica compuesta por cinco Tares las cuales fueron seleccionadas muy cuidadosamente para evaluar el desempeño de los estudiantes de décimo grado en la solución de problemas que requieren procesos de generalización; las Tareas propuesta fueron ejercicios tomados de Vergel, Godino, THALES. S.A.E.M. Principios y Estándares para la educación matemáticay Rivera; por tanto el desarrollo de los mismos permitió evidenciar el nivel del grupo; en el análisis de esta actividad se pudo concluir que gran parte de los estudiantes no alcanzaron un nivel de razonamiento inductivo; presentaron muchas dificultadas para establecer una expresión que formalice una regla general para la secuencia; por otro lado se evidenció que para dar solución a la Tarea los estudiantes recurren con gran frecuencia a un razonamiento abductivo y plantean paso a paso cada uno de los términos de la secuencia hasta llegar al solicitado. Para determinar la solución muchos estudiantes utilizaron niveles de procesamiento y conversión grafica dependiente de objetos y de relaciones; pero sus análisis no tienen una validez ni argumentación matemática y en ocasiones llegan a respuestas no validas. Por otro lado también se evidenció que no existe una comprensión de la variación que se da en una secuencia; así como también se vieron falencias en conceptos matemáticos básicos como porcentaje, conversión y equivalencia que también deben ser reforzados. Esta prueba diagnóstica permitió concluir que es necesario reforzar el desarrollo de habilidades para el trabajo del pensamiento algebraico y que este tipo de Tareas posibilitan acercarnos a responder la pregunta de investigación formulada.

- Objetivo específico N° 2: *Motivar la participación de los estudiantes como miembros activos de la Comunidad Matemática establecida en su aula a partir del análisis, comprensión e interpretación de situaciones matemáticas.* Para el cumplimiento de este objetivo se utilizaron charlas previas de motivación donde el docente explicó la finalidad de la comunidad, cómo se trabajaba y qué beneficios proporcionaría al proceso de aprendizaje; de igual forma durante el desarrollo de las intervenciones el docente investigador orientó y motivó en cada momento de la intervención para que los estudiantes se animaran a participar, así mismo durante la intervención se brindo un espacio para que ellos compartieran sus sentimiento acerca de la metodología empleada.

- Objetivo específico N° 3*: Diseñar una estrategia metodológica fundamentada en las comunidades matemáticas para potenciar el desarrollo de habilidades en los estudiantes.*El cumplimiento de esto objetivo se dio a través de una revisión de la fundamentación teórica que permitió la selección de Tareas que incentivaban al análisis y el razonamiento, así como una revisión de la propuesta de Santos Trigo para la comunidad matemática. El desarrollo de las intervenciones se dio en tres momentos los cuales propiciaron el desarrollo individual, el trabajo en equipo y la socialización grupal. Todos estos espacios fundamentaron la construcción de la comunidad en cuanto dieron la oportunidad para revisar, analizar, cuestionar y convalidar hipótesis, bajo un ambiente de respeto y tolerancia.

- Objetivo específico N° 4*: Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico mediante el diseño y análisis de tareas que motiven la actividad matemática de los estudiantes entorno al proceso de generalización.* Para el cumplimiento de este objetivo se realizó un estudio de algunos trabajos de investigación desarrollados por Ferdinand Rivera en su libro: Teaching and learning patterns in school mathematics. Springer, 2015; así como los de Juan D Godino en su libro Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros; los Principios y Estándares para la educación matemáticaTHALES. S.A.E.M; la tesis doctoral de Gómez Triana (2013) dirigida por Rodolfo Vergely los trabajos de algunos autores que han contribuido a la construcción de la propuesta teórica elaborada por Rivera. Dicho estudio estuvo encaminado a la comprensión de los procesos de generalización de estudiantes mayores, lo cual brindó las herramientas para seleccionar las Tareas propuestas en las sesiones de intervención. Adicional a las Tareas ya mencionadas, se diseño una entrevista. De esta manera se diseñaron e implementaron varias tareas sobres secuencias de generalización de patrones en contextos figúrales y numéricos.

Finalmete es importate recalcar que el desarrollo del pensamiento algebraico a partir de procesos de generalización busca dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, para plantear diferentes formas de potenciar tipos de razonamiento. Con ello se busca que el estudiante logre analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto. Por esta razón, se diseñó esta propuesta de investigación con el fin de fortalecer estos procesos que arrojó los siguientes resultados:

- Al abordar los resultados obtenidos en la investigación se resalta la gran variedad de estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver las Tareas propuestas, se evidenciaron diversas formas de resolver una misma actividad, los procesos abductivos incentivaron en los estudiantes diferentes formas de interpretar el cambio en una secuencia.

- Se determinaron y analizaron la variedad de procesos y estrategias que fueron más utilizadas por los estudiantes en las diferentes fases del proceso de generalización y que se evidencian en el análisis a posteriori de cada tarea. Al observar la categorización se encontró que un buen número de estudiantes utilizan razonamientos abductivos y razonamientos de conversión grafica dependiente de objeto, para ellos el gráfico es esencial para determinar sus procesos de análisis así como la construcción de todos los pasos de la secuencia para determinar términos superiores.

- El análisis de episodios evidencia que los estudiantes necesitan reforzar sus niveles de razonamiento y que algunos de ellos no logran realizar procesos deductivos y de de conversión figural dependiente de relaciones. Durante la entrevista algunas parejas llegaron a realizar altos niveles de comprensión en al solución de las tareas, lo cual evidenció una evolución en el proceso; pero durante las intervenciones se pudo observar que este nivel es de gran dificultad para varios estudiantes.

- La conformación de la comunidad matemática incentivó en los estudiantes el reto por comprender y analizar los procesos de generalización, ella brindo el espacio para que se expusieran las hipótesis y se llevaran a convalidación, a partir de esta estrategia se pudieron generar espacios de discusión donde predominó la participación, el cuestionamiento, la tolerancia y el respeto; la validación de las hipótesis dio una visión más amplia sobre lo interesante, útil y fácil que es el pensamiento algebraico.

- En las Tareas de la entrevista fue evidente la habilidad de los estudiantes por identificar las relaciones y propiedades que determinan la variación en los procesos de generalización, los estudiantes utilizaron con propiedad un nivel de procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones; ellos llegaron a establecer con eficacia la regla que determinaba el patron de la Tarea. Además se logró que mejoraran sus hipótesis y razonamientos, en esta fase hablaron con propiedad en la justificación de sus procesos utilizando relaciones que conllevaban una estructuración matemática, lo que indujo a procedimientos de articulación con expresiones y ecuaciones que completaban en un razonamiento inductivo.

- En muchas de las Tareas propuestas se evidenció la falta de apropiación por parte de algunos estudiantes de procesos matemáticos básicos; muchos de ellos no saben establecer la relación de porcentaje en una situación; así como plantean de forma incorrecta la regla de tres. De igual forma varios de ellos tienen gran dificultad por comprender problemas de contextos reales, sus cuestionamientos reflejan que existe una falencia en la comprensión de la información.

8. RECOMENDACIONES

Partiendo de los análisis realizados y las conclusiones generadas, se evidencia cómo el estudio de los tipos de razonamiento y niveles de procesamiento propuestos por Rivera, posibilitan una mejor comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico. Por esta razón se recomienda generar más investigaciones relacionados con esta trabajo, adelantar nuevas investigaciones de este tipo que busquen potenciar el pensamiento algebraico utilizando los procesos de generalización, favoreciendo el razonamiento y análisis por parte de los estudiantes incentivando su participación en una comunidad matemática.

Sobre todo se recomienda profundizar en el estudio y análisis de los niveles de procesamiento y conversión presentes en las formas de pensamiento algebraico esbozadas en la propuesta de Rivera, específicamente en el nivel de procesamiento y conversión figural dependiente de relaciones. La manera como se pueden encontrar las relaciones de variación que definen un patron, el análisis gráfico y la creación de hipótesis sin necesidad de convertir a la etapa numérica merece una investigación más profunda que permita caracterizar la naturaleza de las formas de representar, analizar, formular y deducir por parte de los estudiantes.

De igual forma se recomienda capacitar a los docentes en la articulación de los Estándares Básicos de Competencia, los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Principios y Estándares para la educación matemática THALES. S.A.E.M. con los planes de área y los procesos de desarrollo del pensamiento algebraico y los tipos de razonamiento y procesamiento que se dan en los procesos de generalización desde las primeras edades. Es fundamental orientar la producción de procesos de generalización desde que el estudiante tiene sus primeros acercamientos con el pensamiento numérico.

Por otro lado se recomienda la implementación de la comunidad matemática como estrategia metodológica para el desarrollo no solo del pensamiento algebraico sino a otros tipos de pensamientos como el aleatorio, el geométrico, el estadístico, entre otros.

9. CONTRIBUCION ACADÉMICA, INVESTIGATIVA

El desarrollo de la propuesta de investigación permitió que evaluara mi praxis educativa y tuviera una visión más amplia del arte de enseñar, con ella pude confrontar ideas, conocimientos y creencias de algunos teóricos en el campo de la educación, y forjé un crecimiento personal y profesional para asumir con más tenacidad la labor de formar estudiantes. Así mismo, esta experiencia me trajo grandes satisfacciones; con este trabajo fui seleccionada para participar como expositora en Relme 32; el Comité Científico de dicho evento acepto mi trabajo para ser presentado en la modalidad Reporte de Investigación. Cabe resaltar que RELME es un evento internacional que reúne un gran número de investigadores en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, se realiza de manera anual y este año la sede se asignó a la Universidad de Medellín para realizarse en el mes Julio. Por medio de esta participación sé que mi investigación trascenderá y contribuirá para que se mejore el desarrollo del pensamiento algebraico.

A su vez esta propuesta contribuirá a que los estudiantes del colegio Bicentenario mejoren sus procesos de razonamiento al emplear los niveles de procesamiento y conversión en la solución de situaciones de generalización. Así mismo esta investigación ayudará a que se establezcan en el área de matemáticas estrategias pedagógicas a favor del desarrollo del pensamiento algebraico, dejando de lado su concepción de solo manejo de variables (letras x, y, z), para entenderlo como un proceso de relacionar patrones de variación a partir de diferentes percepciones y razonamientos.

Por otro lado esta investigación será transmitida en mi institución para que fomente el trabajo con los docentes de matemáticas de todos los niveles y pueda servir de orientación hacia nuevas concepciones de razonamientos que incentiven a desarrollar el pensamiento algebraico; cabe resaltar que en mi institución el álgebra sigue siendo solamente una materia asignada al grado octavo y noveno; razón por la cual se espera que este proyecto sea el puente para iniciar el proceso de conversión y se empiece a concebir el álgebra como una forma particular de reflexionar matemáticamente donde los procesos de generalización permiten potenciar las habilidades para que los estudiantes pueden comprender los tipos y fuentes, tipos de estructuras y modos de representación. Y por tanto se debe empezar a potenciar el pensamiento algebraico desde los niveles inferiores.

BIBLIOGRAFIA

CABALLERO, Mario; CANTORAL, Ricardo. El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato. 2013.

CANTORAL, R. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. México: Secretaría de educación pública, 2013.

CARDONA, N. Desarrollando el pensamiento algebraico en alumnos de octavo grado del CIIE a través de resolución de problemas. 2007. Tesis Doctoral. Tesis de maestría. Honduras.

ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS En Lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Ministerio De Educación Nacional. 2006. Bogotá.

GODINO, Juan D.; FONT, Vicenç. Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2003.

GÓMEZ TRIANA, John Edilberto. La generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas desde una perspectiva semiótica cultural: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo. Tesis de maestría.Universidad pedagógica Nacional. 2013.

KIERAN, Carolyn. The early learning of algebra: A structural perspective. Research issues in the learning and teaching of algebra, 1989, vol. 4, p. 33-56

MARTÍNEZ A, Johanna Carolina. Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Tesis de maestría. Universidad Industrial de Santander Colombia. 2016.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA Y DEPORTE, marcos y pruebas de evaluación PISA Matemáticas, Lectura y Ciencia, Instituto de Evaluación Educativa. Madrid 2013.

Principios. Estándares para la educación matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla, España, 2003.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AN DEVELOPMENT (OECD). PISA 2012 results: creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (volume V). 2014.

POLYA, George. Cómo plantear y resolver problemas. Trillas, 1965.

RADFORD, Luis; PEIRCE, C. S. Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En Proceedings of the 28th Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter. 2006

RADFORD, L. Early algebraic thinking, epistemological, semiotic, and developmental issues. Regular lecture presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, held in Seoul, Korea, 8 July-15 July, 2012

RADFORD, Luis. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. Early algebraization, 2011

RADFORD, Luis. Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and

ROA, Solange. La construcción de una comunidad matemática en el aula y el desarrollo del pensamiento algebraico. Colectivo didáctica de las matemáticas. Universidad industrial de Santander. 2016.

ROJAS, Pedro Javier; VERGEL, Rodolfo. Procesos de generalización y pensamiento algebraico. 2013.

RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Springer, 2015.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel. Principios y Métodos de Ia Resolución de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas. México DF, México: Grupo Editorial Iberoamericano, 1996.

SANTOS TRIGO, Luz Manuel Santos. La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. Trillas, 2007.

VERGEL, Rodolfo. Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. 2016.

ANEXOS

Anexo A: Documento de autorización

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE DERECHOS DE IMAGEN SOBRE Y DE PROPIEDAD INTELECTUAL OTORGADO AL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y
LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Yo, ______________________________, mayor de edad, domiciliado y residenciado en ________________, identificado con la cédula de ciudadanía No. ________________ de__________, quien actúa en nombre y representación de ____________________________________, identificado con la tarjeta de identidad No. _______________ de ____________, en su calidad de acudiente, en mi calidad de persona natural cuya imagen de mi hijo será fijada en una fotografía o cinta de videoque utilizará y publicara El Ministerio de Educación Nacional y la Universidad Industrial de Santander, suscribo el presente documento de autorización de uso de derechos de imagen sobre fotografía y procedimientos análogos a la fotografía,así como los patrimonialesde autor y derechos conexos, el cual se regirá por las normas legales aplicables y en particular por las siguientesCláusulas: PRIMERA – AUTORIZACIÓN: mediante el presente documento autorizo la utilización de los derechos de imagen sobre fotografías o procedimientosanálogos a la fotografía,así como los derechos patrimoniales de autor (Reproducción, Comunicación Pública, Transformación y Distribución) y derechos conexos, a EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER para incluirlos en fotografías o procedimientos análogos a la fotografía. SEGUNDA - OBJETO: Por medio del presente escrito, autorizo a EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER para que, de conformidadcon las normas internacionalesque sobre

Propiedad Intelectual sean aplicables, así como bajo las normas vigentes en Colombia, use los derechos de imagen sobre fotografíaso procedimientosanálogos a la fotografía,así como los derechos de propiedad intelectual y sobre Derechos Conexosque le puedan pertenecer para ser utilizados por EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER. PARÁGRAFO - ALCANCE DEL OBJETO: La presente autorización de uso se otorga al MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, para ser utilizada en ediciones impresas y electrónicas, digitales, ópticas y en la Red Internet.PARÁGRAFO: Tal uso se realizará por parte de EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER,para efectos de su publicaciónde manera directa, o a travésde un terceroque se designe para tal fin. TERCERA - TERRITORIO: Los derechos aquí Autorizados se dan sin limitación geográfica o territorial alguna. CUARTA – ALCANCE:La presente autorización se da para formatoo soporte material,y se extiende a la utilizaciónen medio óptico, magnético, electrónico, en red, mensajes de datos o similar conocido o por conocer en el futuro. QUINTA – EXCLUSIVIDAD: La autorización de uso aquí establecida no implica exclusividad en favor de EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.Por lo tanto,me reservo y conservaré el derecho de otorgar directamente, u otorgar a cualquiertercero, autorizacionesde uso similareso en los mismos términos aquíacordados.

Dada en BUCARAMANGA, a los (21) días del mes de ABRIL del año 2017

Firma del acudiente: ____

Nombre del Acudiente: ____ **C.C. N°**_________________________ **de** ___________

Nombre del Estudiante: __________________________

Firma del estudiante: ___________________ *Fuente: Versión revisada del formato de Colombia Aprende.*

Anexo B: Consentimiento diligenciado por los padres de familia

DOCUMENTO DE AUTORIZACIÓN DE USO DE DERECHOS DE IMAGEN SOBRE Y DE PROPIEDAD INTELECTUAL OTORGADO AL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Yo, HARVEY RUEDA C, mayor de edad, domiciliado y residenciado en BUCARAMANGA identificado con la cédula de ciudadanía No. 13514719 de_________, quien actúa en nombre y representación de MAYRA ALEJANDRA RUEDA, identificado con la tarjeta de identidad No. 1005296937de B/GA, en su calidad de acudiente, en mi calidad de persona natural cuya imagen de mi hijo será fijada en una fotografía o cinta de videoque utilizará y publicara El Ministerio de Educación Nacional y la Universidad Industrial de Santander, suscribo el presente documento de autorización de uso de derechos de imagen sobre fotografía y procedimientos análogos a la fotografía,así como los patrimonialesde autor y derechos conexos, el cual se regirá por las normas legales aplicables y en particular por las siguientesCláusulas: PRIMERA – AUTORIZACIÓN: mediante el presente documento autorizo la utilización de los derechos de imagen sobre fotografíaso procedimientosanálogos a la fotografía,así como los derechos patrimoniales de autor (Reproducción, Comunicación Pública, Transformación y Distribución) y derechos conexos, a EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER para incluirlos en fotografías o procedimientos análogos a la fotografía. SEGUNDA - OBJETO: Por medio del presente escrito, autorizo a EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER para que, de conformidadcon las normas internacionalesque sobre Propiedad Intelectual sean aplicables, así como bajo las normas vigentes en Colombia, use los derechos de imagen sobre fotografíaso procedimientosanálogos a la fotografía,así como los derechos de propiedad intelectual y sobre Derechos Conexosque le puedan pertenecer para ser utilizados por EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER. PARÁGRAFO - ALCANCE DEL OBJETO: La presente autorización de uso se otorga al MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER, para ser utilizada en ediciones impresas y electrónicas, digitales, ópticas y en la Red Internet.PARÁGRAFO: Tal uso se realizará por parte de EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER,para efectos de su publicaciónde manera directa, o a travésde un terceroque se designe para tal fin. TERCERA - TERRITORIO: Los derechos aquí Autorizados se dan sin limitación geográfica o territorial alguna. CUARTA – ALCANCE:La presente autorización se da para formatoo soporte material,y se extiende a la utilizaciónen medio óptico, magnético, electrónico, en red, mensajes de datos o similar conocido o por conocer en el futuro. QUINTA – EXCLUSIVIDAD: La autorización de uso aquí establecida no implica exclusividad en favor de EL MINISTERIO DE EDUCACIÓNNACIONAL Y LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.Por lo tanto,me reservo y conservaré el derecho de otorgar directamente, u otorgar a cualquiertercero, autorizacionesde uso similareso en los mismos términos aquíacordados.

Dada en BUCARAMANGA, a los (21) días del mes de ABRIL del año 2017

Firma del acudiente: Harvey Rueda C

Nombre del Acudiente: HARVEY RUEDA C.

C.C. N° 13 514 719 **de** B/GA

Nombre del Estudiante: MAYRA ALEJANDRA RUEDA

Firma del estudiante: ________

Fuente: Versión revisada del formato de Colombia Aprende.

Anexo C: Guía de trabajo prueba diagnóstica

Prueba Diagnóstica

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

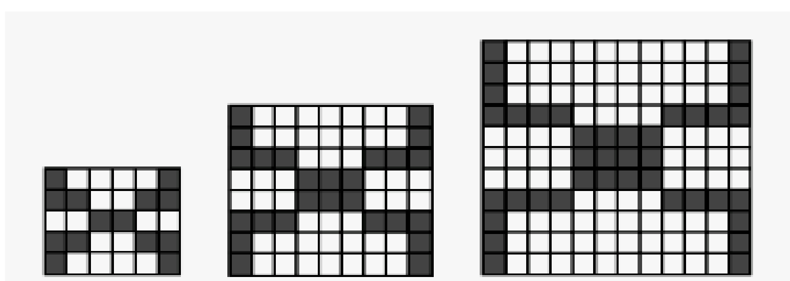
Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

Nombre: ____ **Edad:** ____________

Lea atentamente cada una de las Situaciones propuestas. Escriba todos los procedimientos que desarrolla para responder cada una.

1. Observe cuidadosamente la siguiente secuencia de figuras conformada por cuadrados grises.



1 2 3 …

- **h.** Dibuje el término 4 y el término 5 de la secuencia.
- **i.** ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura que corresponde al término 4? ¿al término 5? ¿al término 6? Explique ampliamente su respuesta.
- **j.** ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura 10?
- **k.** ¿Cuántos cuadrados grises tiene la figura 100?

l. Complete la siguiente tabla:

Número de la secuencia	1	2		4		6			9	
Número de cuadrados grises			40							

m. Halle una fórmula que le permita encontrar el número de cuadrados grises para cualquier término de la secuencia.

n. ¿Qué término de la secuencia tiene 56 cuadrados grises? Explique.

2. Una estudiante llamada Paula se golpeó en una rodilla jugando voleibol y su médico le prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Paula tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo, cada 8 horas.

c. ¿Qué cantidad de medicamento quedaba en el sistema circulatorio de Paula al cabo de los 10 días?

d. Y si hubiera tomado la medicina durante un año, ¿qué hubiera pasado con Paula? Explique ampliamente su respuesta.

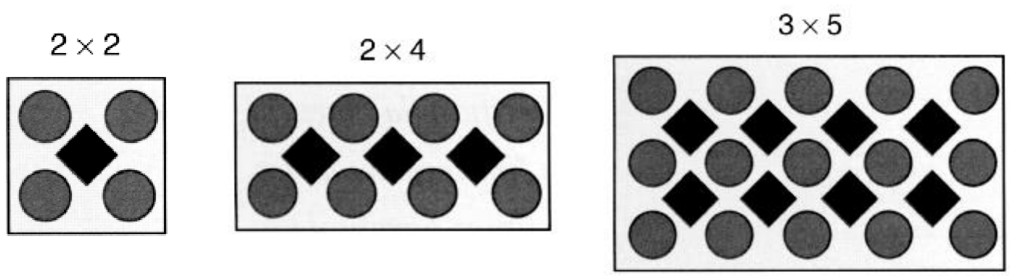
3. La papelería Copy Copias tiene una impresora que solo utiliza cartuchos negros, rojos y azules. Todos los cartuchos pueden imprimir el mismo número de páginas. Los cartuchos negros se cambian 4 veces más frecuentemente que los rojos. En el tiempo que tardan en agotarse 3 cartuchos rojos, se agotan 5 azules.

d. Si la papelería utiliza 20 cartuchos para imprimir un trabajo ¿Qué fracción del trabajo se hace en negro? Explique su respuesta.

e. ¿Qué porcentaje de la impresión se hace en azul? Explique su respuesta.

f. En un mes, se usan 60 cartuchos negros. ¿Cuál es el número de cartuchos rojos y de azules utilizados en ese tiempo?

4. Una empresa nacional ofrece cajas con chocolates y caramelos. Para empacar las cajas, organizan los chocolates y caramelos de manera que siempre quede un caramelo entre cada cuatrochocolates, tal como se muestra en la figura. Las dimensiones de las cajasindican el número de columnas y de filas de chocolates que hay en cada caja.



c. ¿Cuántos caramelos tiene una caja que tiene dimensiones 5×6 ?

d. Desarrolle un método para calcular el número de caramelos de una caja cualquiera, conociendo sus dimensiones. Explique y justifique su metodología mediante palabras, diagramas o expresiones.

5. Sara organizó una fiesta para celebrar su cumpleaños, a continuación cuenta cómo fueron llegando sus invitados.

La primera vez que suena el timbre, entra 1 invitado.
La segunda vez que suena el timbre, entran 3 invitados.
La tercera vez que suena el timbre, entran 5 invitados.

La cuarta vez que suena el timbre, entran 7 invitados.

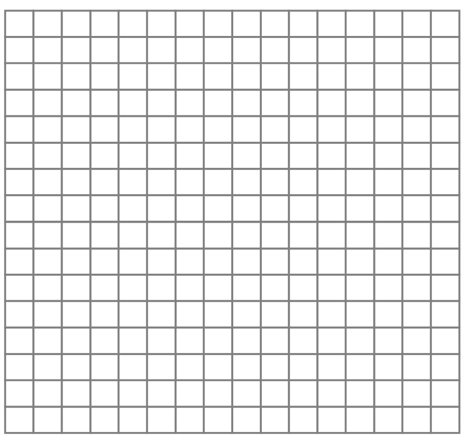
De seguir llegando los invitados de la misma manera:

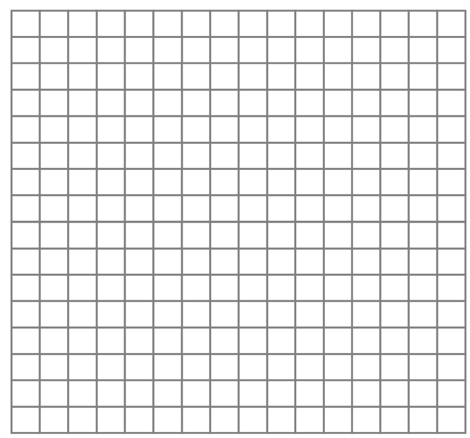
d. ¿Cuántos invitados entrarán la decima vez que suene el timbre? Explique su respuesta.

e. Escriba una regla o describa en palabras cómo encontrar el número de invitados que entró cada vez que suena el timbre.

f. Si una vez que sonó el timbre entraron 99 invitados a la fiesta. ¿Qué vez era la que sonó el timbre? Explique o muestre cómo encontró la respuesta.

Utilice las siguientes cuadriculas para representar los términos del primer punto





Anexo D: Guía de trabajo primera sesión

PRIMERA INTERVENCIÓN.

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

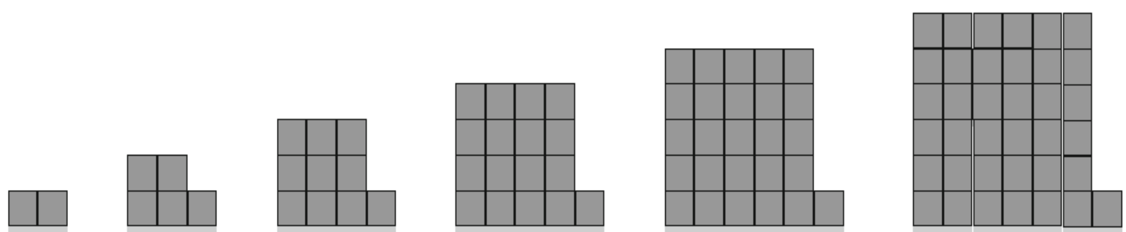
Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

Nombre: ____ **Edad:** ___________

Lea atentamente cada una de las Tareas propuestas. Escriba todos los procedimientos que desarrolla para responder cada una.

Ejercicio de Crecimiento de Bloques Patrón patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares modificado de RIVERA p. 150

1. Los bloques se envasan para formar imágenes que forman un patrón como se muestra a continuación.



Cuadro 1 Cuadro 2 Cuadro 3 Cuadro 4 Cuadro 5 Cuadro 6

Bloque de bloques de crecimiento

a. ¿Cuántos bloques se necesitan para formar la imagen 8? ¿Cómo obtuviste tu respuesta?

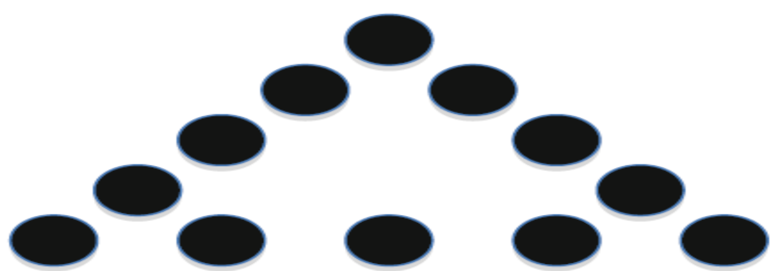
b. ¿Cuántos bloques se necesitan para formar la imagen 35? ¿Cómo obtuviste tu respuesta?

c. Escribe cómo le explicarías a tu mejor amigo o amiga cómo se encuentra la cantidad de bloques que conforman cada imagen.

d. Puede encontrar una fórmula para calcular el número de bloques de la imagen n. Si esto es posible ¿Cómo obtuvo su fórmula?

<u>Ejercicio de patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares modificado de RIVERA p. 72</u>

2. En el siguiente diagrama hay un triángulo de 5 puntos. Es un triángulo construido usando 5 puntos en cada lado. El triángulo de 5 puntos se logra usando un total de 12 puntos. ¿Cuántos puntos se utilizarán para hacer un triángulo de 13 puntos? Si n representa el número de puntos de cada lado de un triángulo n-punto, escriba una expresión para representar cuántos puntos totales están en el triángulo.



Tarea de patrones de triángulo N (Steele y Johanning, 2004, p. 75)

<u>Ejercicio modificado de Razonamiento matemático y su didáctica para maestros. Godino p. 807</u>

3. En una entidad bancaria hay una tabla que muestra las equivalencias entre el euro y el dólar:

Dólares	9	18	24	36
Euros	10	20	30	40

Teniendo en cuenta los datos presentados en la Tabla, analiza y contesta las siguientes preguntas:

a. Cuando se ha construyó esta tabla se ha cometido un error. ¿Cuál?
b. Dibuja la gráfica que muestre la relación entre el Dólar y el Euro.
c. Halla una fórmula que permita saber el número de dólares conociendo el número de euros.

Ejercicio tomado de Razonamiento matemático y su didáctica para maestros. Godino p. 793

4. Una empresa fabrica carteras y maletines con el mismo tipo de piel. Para fabricar una cartera utiliza $1m^2$ de piel y $3m^2$ para un maletín. En total dispone de $27m^2$ de piel. Utilizando toda la piel disponible contesta:

a. ¿Es posible producir 9 carteras y 6 maletines?
b. ¿Es posible producir 12 carteras y 5 maletines?
c. Busca otras posibilidades de producción.

Anexo E: Guía de trabajo segunda intervención

SEGUNDA INTERVENCION.

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

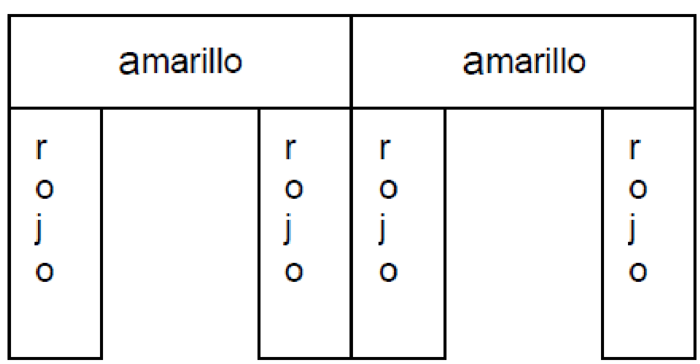
Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

Nombre: ____**Edad:** ___________

<u>Puente con dos apoyos. Ejercicio tomado de Razonamiento matemático y su didáctica para maestros. Godino p. 825</u>

1. Queremos construir la maqueta de un acueducto con barras de madera de $5cm$ de ancho para las vigas y de $5cm$ de ancho para los soportes, según se muestra en el dibujo, para el caso de dos arcos.



a. Completa la tabla siguiente

	3 arcos	4 arcos	5 arcos	15 arcos	21 arcos
¿Cuántas barras amarillas necesitamos?					
¿Cuántas barras rojas necesitamos?					
¿Qué longitud tendrá el acueducto?					

b. Si se conoce el número de arcos, ¿qué regla podemos aplicar para calcular

*) El número de barras?

*) La longitud del acueducto?.

c. ¿Cuál es el número total de barras que se necesitan para construir un acueducto con 100 arcos? ¿Cuál es la longitud del acueducto? Explique sus respuestas.

Anexo F: Guía de trabajo tercera intervención

TERCERA INTERVENCION.

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

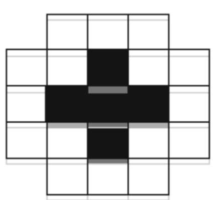
Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

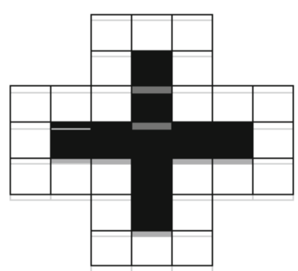
Nombre: ____ **Edad:** ___________

<u>Ejercicio de crecimiento de patrones cruzados, patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares. Tomado de RIVERA p. 46</u>

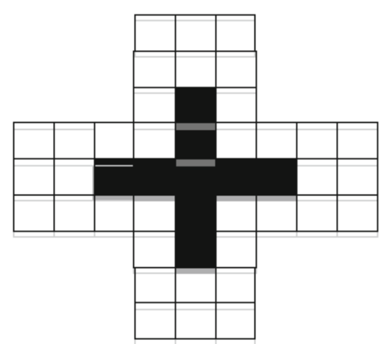
1. Marcia está utilizando azulejos cuadrados en blanco y negro para hacer patrones



Patrón 1



Patrón 2



Patrón 3

a. ¿Cuántos azulejos negros se necesitan para hacer el patrón 4?
b. Marcia comienza a hacer una mesa para mostrar el número de azulejos en blanco y negro que es utilizado.

Número de Patrón	1	2	3	4
Número de azulejos blancos	16	24		
Número de azulejos negros	5	9		
Total	21	33		

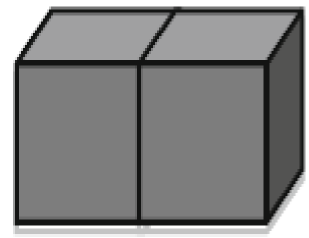
c. Llena los números que faltan en la tabla de Marcia.
d. Marcia quiere saber cuántos azulejos blancos y azulejos negros habrá en los siguientes patrones pero no quiere dibujar y contar en la cuadrícula. Explique o muestre otra forma de encontrar su respuesta.
e. Usando W para el número de azulejos blancos y P para el número del patrón, escriba una regla o fórmula que vincule W con P
f. Utilizando B para el número de azulejos negros y P para el número de patrón, escriba una regla o fórmula que une B con P.
g. Ahora, usando T para el número total de fichas y P para el número de patrón, escriba un regla o fórmula que une T con P.

Ejercicio tomado de THALES, S. A. E. M. Principios y Estándares para la Educación Matemáticas. p.285.

2. Un grupo de estudiantes dispone de 60 dólares ($60) para cenar. Saben que el costo total, después de añadir el impuesto y la propina, asciende a un 25% más que los precios de las comidas del menú. ¿Cuanto pueden gastar en comida para que el costo total sea de $60?

Ejercicio Etiqueta del cubo: patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares. Tomado de RIVERA p. 160

3. Una compañía hace las barras coloreadas ensamblando los cubos en una fila y usando una etiqueta engomada para colocar etiquetas engomadas "sonrientes" en las barras. La máquina coloca exactamente una etiqueta en cada cara expuesta de cada cubo. Cada cara expuesta de cada cubo tiene que tener una etiqueta engomada, así que una barra de longitud-2 varilla necesitaría 10 etiquetas engomadas.



   a. ¿Cuántas pegatinas necesitarías para varillas de longitud 1 a 10? Explica cómo determinaste estos valores.
   b. ¿Cuántas pegatinas necesitarías para una barra de longitud 20? de longitud 50? Explica cómo determinaron estos valores.
   c. Supongamos que una vara en particular necesitaba 150 pegatinas. ¿Cuál es la longitud de esta varilla? Explique cómo usted determinó esto.
   d. Explique cómo podría encontrar el número de pegatinas necesarias para una barra de cualquier longitud. Escribe una fórmula que usted podría utilizar para determinar esto.

Problema de la etiqueta del cubo (Lannin, 2005, P. 256)

Anexo G: Guía de trabajo cuarta intervención

CUARTA INTERVENCIÓN.

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

Nombre: ____ **Edad:** ___________

<u>Ejercicio tomado de Razonamiento matemático y su didáctica para maestros. Godino p. 810</u>

1. Al disponer puntos en el plano en forma triangular y contar el número total de éstos en cada uno de los triángulos, obtenemos los llamados "Números triangulares" 1, 3, 6, 10,...

```
*     *      *       *
      **     **      **
             ***     ***
                     ****
```

a. Llamaremos *Tn* al número triangular cuya base está formada por *n* puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para *Tn* ?

b. Los números cuadrados son:

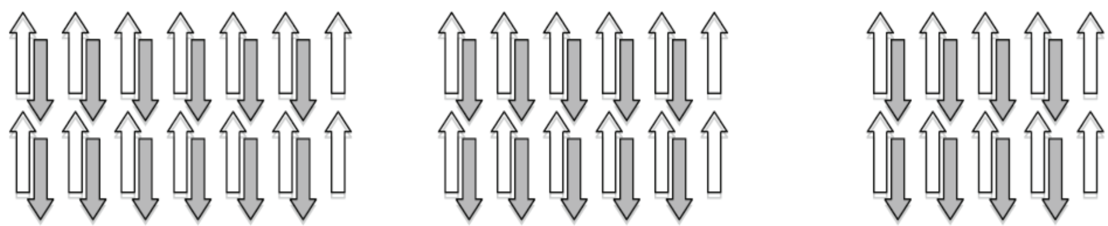
```
*    * *     * * *
     * *     * * *
             * * *
```

c. Llamaremos *Cn* al número cuadrado cuyo lado está formado por *n* puntos ¿Puedes encontrar una expresión general para *Cn* ?

d. ¿Hay alguna relación entre los números triangulares y los cuadrados?¿Cuál?

Ejercicio Tarea de generalización de patrones de diseño de flecha. Patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares. Tomado de RIVERA p. 178

2. Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

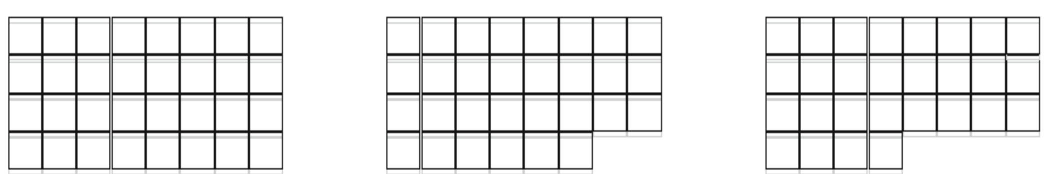
a. Encuentre una fórmula directa para el número total de flechas en la etapa n, donde n es un entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ello en términos de patrón anterior

b. ¿Cuántas flechas hay en la décima etapa 10? Explique.

c. ¿Para qué número de escenario no quedarán más flechas? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

Ejercicio Patrón de cuadrados perdidos. Patrones de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas escolares. Tomado de RIVERA p. 178

3. Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 1? ¿Etapa 2? ¿etapa 3?
b. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 10? ¿Cómo lo sabes con seguridad?
c. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 15? ¿Cómo lo sabes con seguridad?
d. Encuentre una fórmula directa para el número total de cuadrados en la etapa n, donde n es un número entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ella en términos de patrón anterior?
e. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 20? ¿Qué podría significar su respuesta si piensa en ello en términos del patrón anterior?
f. ¿Para qué número de escenario no quedarán más cuadrados? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

Anexo H: Guía de trabajo entrevista

ENTREVISTA.

Una Comunidad Matemática en el aula como estrategia para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico

Institución Educativa Bicentenario de la Independencia de la República de Colombia

Profesora Luz Myriam Tarazona Estupiñán

Nombre: ____**Edad:** ___________

Lea atentamente cada una de las Tareas propuestas. Escriba todos los procedimientos que desarrolla para responder cada una.

TAREA 1

Completa la columna de la derecha de acuerdo a las indicaciones dadas en la columna de la izquierda

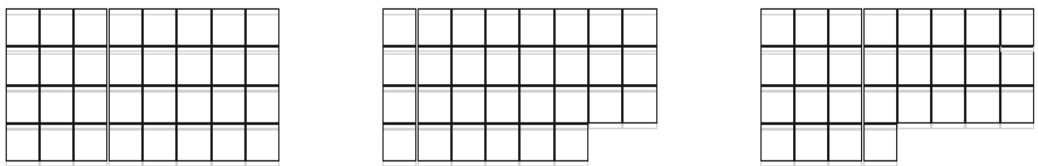
Piensa un número cualquiera	**2**	**5**	**10**	**N**
súmale 2 a ese numero	**2+2**			
Multiplica el resultado que obtuviste por 2	**4x2**			
Suma 6	**8+6**			
Divide entre 2	**14/2**			
Resta el numero que pensaste al comienzo	**7-2**			

Responde: 1.

a. ¿Cuál es el truco que el problema?___________________________________
b. ¿Qué pasará si el número inicial es 101________________________________
c. Plantea un argumento algebraico que te permita analizar la situación anterior____

TAREA 2

Observa las tres etapas diferentes en el diseño de la siguiente figura.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

a. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 10? ¿Cómo lo sabes con seguridad?
b. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 15? ¿Cómo lo sabes con seguridad?
c. Encuentre una fórmula directa para el número total de cuadrados en la etapa n, donde n es un número entero positivo. Si obtuvo su fórmula numéricamente, ¿qué podría significar si piensa en ella en términos de patrón anterior?
d. ¿Cuántos cuadrados hay en la etapa 20? ¿Qué podría significar su respuesta si piensa en ello en términos del patrón anterior?
e. ¿Para qué número de escenario no quedarán más cuadrados? ¿Cómo lo sabes con seguridad?

TAREA 3

María y Luisa compitieron resolviendo una lista de 100 problemas. Algunos problemas no fueron resueltos por ninguna pero otros los resolvieron las dos. Por cada problema resuelto, la primera en resolverlo obtuvo 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto las dos, la segunda obtuvo sólo 1 punto. Si cada una de ellas resolvió 60 problemas de la lista y entre las dos lograron 312 puntos, ¿cuántos problemas resolvieron en común?