Formas de pensamiento algebraico en estudiantes de básica secundaria cuando resuelven ecuaciones de primer grado

Yesika Yulithza Tolosa Toloza

Trabajo de Grado para Optar el Título de Licenciada en Matemáticas

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2025

Dedicatoria

A término de esta etapa de mi formación y llena de gratitud, dedico este trabajo a mis padres, Claudia y Saúl, porque su amor, esfuerzo y apoyo constante me permitieron llegar hasta este momento. A mis hermanos, Eduitar y Dani, que me han acompañado y ayudado cada día. A mis mascotas, con especial cariño a Fimi, Carboncito y Molly, por haber sido alegría en mi vida.

Agradecimientos

Quiero manifestar mis más profundos agradecimientos a quienes desde sus posibilidades hicieron parte de este proceso:

A mis padres y hermanos, por siempre creer en mí. A Edwin, Yani y Miguel, por motivarme en diferentes momentos de mi trayectoria académica. A mis profesores, por su contribución a mi crecimiento profesional. A mi directora de grado, Dra. Solange Roa Fuentes, por su orientación a lo largo del desarrollo de este trabajo. A cada persona que me brindó sus consejos y me ayudó a recorrer este camino.

¡Muchas gracias!

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Figuras

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Formas de pensamiento algebraico en estudiantes de básica secundaria cuando abordan ecuaciones de primer grado*

Autora: Yesika Yulithza Tolosa Toloza**

Palabras Clave: Pensamiento algebraico, Sistemas Semióticos de Objetivación, Ecuación.

Descripción: El aprendizaje del álgebra en educación básica secundaria presenta dificultades por el carácter algorítmico de su enseñanza (Quezada y del Río, 2022), por lo cual los estudiantes enfrentan obstáculos al resolver problemas no rutinarios. Al respecto, la teoría de la objetivación ofrece una perspectiva para comprender cómo los estudiantes construyen y desarrollan formas de pensamiento algebraico a través de la interacción social en el aula.

En este sentido, el presente trabajo tiene como objetivo analizar desde la perspectiva de la teoría de la objetivación las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes de séptimo grado cuando participan en una actividad relacionada con ecuaciones de primer grado. Para esto se implementan tres instrumentos: una prueba diagnóstica, una tarea que consta de dos problemas que se desarrollan por parte de los estudiantes en tres momentos, considerando los sistemas propuestos por Radford (2022), dado que la investigación toma como base conceptual la teoría de la Objetivación, en particular las categorías propuestas por Vergel (2015) y Radford (2010); y una entrevista. Finalmente se analizan las respuestas y actitudes de los estudiantes con el propósito de caracterizar cómo se manifiesta cada una de las formas de pensamiento algebraico, en este mismo apartado se evidencia la utilidad del uso de los Sistemas Semióticos (Radford, 2022) en la progresión del pensamiento algebraico y el trabajo colectivo como un elemento clave para enriquecer el aprendizaje.

---

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa.

Abstract

Title: Algebraic thinking patterns in junior high school students when solving first-degree equations*

Author: Yesika Yulithza Tolosa Toloza**

Key Words: Algebraic thinking, Semiotic Systems of Objectification, Equation.

Description: Learning algebra in secondary education presents difficulties due to the algorithmic nature of its teaching (Quezada and del Río, 2022), which means that students face obstacles when solving non-routine problems. In this regard, objectification theory offers a perspective for understanding how students construct and develop forms of algebraic thinking through social interaction in the classroom.

In this sense, the present study aims to analyze, from the perspective of objectification theory, the forms of algebraic thinking that emerge in seventh-grade students when they participate in an activity related to first-degree equations. To this end, three instruments are implemented: a diagnostic test; a task consisting of two problems that are developed by the students in three stages, considering the systems proposed by Radford (2022), given that the research is based on the theory of objectification, in particular the categories proposed by Vergel (2015) and Radford (2010); and an interview. Finally, students' responses and attitudes are analyzed in order to characterize how each form of algebraic thinking manifests itself. This same section highlights the usefulness of Semiotic Systems (Radford, 2022) in the progression of algebraic thinking and collective work as a key element in enriching learning.

* Degree Work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Solange Roa Fuentes. Doctor of Science specializing in Educational Mathematics.

Introducción

Durante la educación básica secundaria se fundamenta el pensamiento algebraico, dado que es durante esta etapa que ocurre la transición desde la aritmética al álgebra. Según Kieran (1996, citado por Paralea) las principales dificultades radican en la interpretación y comprensión de las propiedades algebraicas. Del mismo modo, Quezada y del Río (2022) se refieren a las limitaciones que presentan los estudiantes frente a problemas no rutinarios al ser enseñados desde un enfoque logarítmico. Por su parte, Radford (2021) desde la teoría de la objetivación, entiende la construcción del conocimiento matemático como un proceso colectivo donde los objetos matemáticos toman significado a partir de las experiencias e interacciones entre los estudiantes.

En concordancia con lo anterior, este estudio tiene como objetivo analizar desde la perspectiva de la teoría de la objetivación las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes de séptimo grado cuando participan en una actividad relacionada con ecuaciones de primer grado tomando como referentes las categorías propuestas por Radford (2010) y Vergel (2015). Este análisis permitirá comprender qué procesos de pensamiento manifiestan los estudiantes y cómo los socializan mediante el intercambio de ideas matemáticas, a fin de identificar qué ideas llevan a interpretaciones erróneas lo que podría orientar futuras intervenciones que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra en niveles educativos básicos.

En general, este trabajo pretende ofrecer un aporte significativo para la investigación en educación matemática y servir como base para desarrollar estrategias pedagógicas más efectivas en el aula, donde se promueva el diálogo reflexivo y la interacción entre los estudiantes, comprendiendo su naturaleza como seres sociales y culturales. Este enfoque busca favorecer la construcción de aprendizajes conscientes, que disminuyan las dificultades que se evidencian con la enseñanza algorítmica usual, mediante el uso de Sistemas Semióticos (Radford, 2022) que faciliten la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico a través de la manipulación de materiales concretos y la abstracción para construir conceptos algebraicos correspondientes a las ecuaciones de primer grado.

1. Antecedentes

1.1 Pensamiento Algebraico

Radford (2022) analiza la formación de conceptos desde una perspectiva genético Vigotskiana, donde el centro de estudio es la Actividad. En el contexto educativo según la teoría de la objetivación (Radford, 2021), la actividad se refiere al proceso de enseñanza aprendizaje en el aula como un proceso colectivo. Para el caso del trato de ecuaciones, la actividad se concibe como el resultado del trabajo en conjunto del profesor y el estudiante para producir un sistema que permita tratar con la simplificación de ecuaciones (Radford, 2022). Además, sobre la resolución de ecuaciones Radford (2022) dice que implica la creación de una secuencia de ecuaciones en donde cada una se obtiene de la anterior.

En este sentido, el pensamiento algebraico para la resolución de ecuaciones se orienta en la comprensión de elementos como: la incógnita, el signo igual, la transformación de ecuaciones, la formulación de ecuaciones, entre otros. Además, integra aspectos emocionales, sociales y procedimentales que son producto del tratamiento de estos problemas por parte de los estudiantes y el profesor.

1.2 Perspectivas Curriculares

En esta sección se toma en cuenta la perspectiva del Ministerio de Educación Nacional colombiano (MEN), a partir del análisis de tres documentos que guían el desarrollo de los programas curriculares en los diferentes grados de la educación básica y secundaria. Estos son:

los Lineamientos curriculares para Matemáticas (1998), los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (2016).

Además, se estudia la perspectiva desarrollada por el National Council of Teacher of Mathematics Education (1906), NCTM por sus siglas en inglés, a partir del documento publicado en el año 2000 y traducido por la Asociación Andaluza de Educación Matemática en el año 2002 dada su importancia como referente para países de habla hispana.

Iniciando con la perspectiva nacional, los Lineamientos Curriculares (1998) plantean que “las situaciones problemáticas deben seleccionarse para enfrentar a los estudiantes con la construcción de expresiones algebraicas o con la construcción de las fórmulas” (p.50). Dentro del proceso de comunicación se sugiere que los estudiantes “hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas y frecuentemente están pasando del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología” (p.75).

Los Estándares Básicos de Competencias del MEN (MEN, 2006), dentro del ámbito del pensamiento variacional y de los sistemas algebraicos y analíticos, establecen que los estudiantes de sexto y séptimo grado deben desarrollar habilidades de pensamiento algebraico que les permitan utilizar métodos informales, como el ensayo y error o la complementación, para resolver ecuaciones.

Según el MEN (2016) en los Derechos Básicos de Aprendizaje en los grados sexto y séptimo para la solución de problemas donde aparecen cantidades desconocidas, las evidencias de aprendizaje consisten en describir procedimientos para solucionar ecuaciones lineales y “determinar el valor desconocido de una cantidad a partir de las transformaciones de una expresión algebraica” (p. 54), respectivamente.

De acuerdo con los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), se espera que los estudiantes puedan utilizar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, en especial aquellos relacionados con relaciones lineales. Además, deben ser capaces de identificar y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas, resolver ecuaciones lineales, y modelar problemas contextualizados utilizando diversas representaciones como gráficos, tablas y ecuaciones.

En resumen, el pensamiento algebraico no solo abarca la resolución de ecuaciones o el uso del álgebra simbólica, sino también el desarrollo de habilidades para representar, modelar, comunicar y justificar procesos matemáticos en múltiples contextos.

1.3 Las Ecuaciones

La frecuencia con la que se presentan falencias en la resolución de problemas que involucran el uso de ecuaciones ha promovido el diseño y desarrollo de investigaciones sobre las razones que llevan a los estudiantes a cometer estos errores. En este sentido, según Kieran (1996 citado por Paralea, 1998) los diferentes tópicos que se involucran en la enseñanza y aprendizaje del álgebra en los grados de secundaria, tales como: variables, ecuaciones con una incógnita y resolución de ecuaciones; conciben sus dificultades según tres aspectos. El primero, se relaciona con el significado de las letras, es decir los diferentes valores que toman las variables según los problemas propuestos a los estudiantes. El segundo, hace referencia al cambio de convenciones de la aritmética al álgebra, ya que la letra que representaba la operación de multiplicación pasa a notar una incógnita o una variable. Finalmente, el tercer aspecto consiste en conocer y usar adecuadamente las diferentes estructuras algebraicas (expresiones, ecuaciones, funciones, etc.).

También, Tettay, Pulgar y Rojas (2019) desarrollaron una investigación en la Escuela Normal Superior del Distrito de Barranquilla, desde un enfoque cualitativo con el objetivo de "analizar los errores que presentan los estudiantes en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en noveno grado" (p. 196), para la cual se consideraron las categorías de errores propuestas por Socas et al. (2008). La investigación se llevó a cabo mediante un estudio de casos a una muestra de tres estudiantes en tres fases siguiendo el modelo de Álvarez y San Fabián (2012); de modo que para la fase preactiva se realizó una prueba diagnóstica, donde se analizaron los errores y en la fase postactiva se compararon y relacionaron con el fin de clasificarlos. El análisis de estos errores permitió identificar que los estudiantes presentan altas dificultades para traducir del lenguaje natural al algebraico. Esto dado que optan por realizar cálculos mentales y aproximaciones en lugar de plantear una ecuación a partir del problema contextualizado. Además, se evidenciaron errores de procedimiento como: el no manejo de inversos aditivos y el nulo multiplicativo, así como errores que corresponden a deficiencias en el aprendizaje de cursos anteriores.

Por otra parte, al analizar un libro de texto que el MEN (2012) propone para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en noveno grado se encontró que, si bien define lo que es una ecuación de primer grado, se limita a dar ejemplos sin disponer la forma general. De manera que el estudiante desconoce la expresión formal, y generalizaciones en la escritura de la igualdad que llevan a un inadecuado manejo del lenguaje algebraico.

Por su parte, Ward, Monjardin y Madrid (2019) desarrollaron un estudio en la Prepa 8 de julio de la Universidad Autónoma de Sinaloa (BUAS) cuyo fin es "analizar los errores y dificultades que presentan los estudiantes de bachillerato al resolver ecuaciones lineales, para ello se considera la perspectiva cognitiva en las clasificaciones de los errores que comete el estudiante, propuesta por Radatz (1979) y Riviére (1990)" (p.1). Este se llevó a cabo utilizando un enfoque descriptivo a través del diseño y aplicación de una prueba diagnóstica a 26 estudiantes de sexto grado. En este trabajo se caracterizan cinco errores que evidencian su origen en la dificultad de los estudiantes para reconocer que al "pasar" al otro lado de la igualdad, se está realizando una operación inversa, errores por conmutación, reemplazo de las incógnitas sin realizar un proceso y procedimientos incompletos.

Por su parte, Quezada y del Río (2022) realizaron un estudio en la Universidad de Los Lagos, en Chile, cuyo objetivo fue detallar y comprender los errores que cometen los estudiantes al momento de resolver problemas de aplicación de la función cuadrática. Quezada y del Río (2022) aplicaron un cuestionario de opinión a 275 estudiantes y "una prueba de resolución de 11 problemas contextualizados a la función cuadrática y de respuesta abierta, que fue previamente validada por contenido y mediante el juicio de diez expertos en resolución de problemas en matemática, orientada con los tipos de problemas según Díaz y Poblete (2001). Además, los autores usaron la clasificación de errores según Socas (1997) y el Modelo de Rash (1980, adaptado por Díaz & Poblete, 2019) que consta de 5 puntos que indican el nivel alcanzado por el estudiante en el proceso de resolución del problema. La prueba mostró que los errores tuvieron su origen del mismo modo en obstáculos matemáticos, como en actitudes afectivas y emocionales. Por otra parte, los resultados evidencian la presencia de bloqueos matemáticos y errores al momento de sustituir valores. El análisis de estos errores llevó a concluir que los estudiantes presentan dificultades para resolver situaciones contextualizadas, principalmente en problemas no rutinarios. Ya que el estudiante no puede relacionarlo a algún proceso que pueda reproducir, caso contrario a los problemas rutinarios puramente matemáticos donde se evidenció un mejor rendimiento puesto que pueden asociarlos a algoritmos que forman parte de su experiencia educativa.

Con este panorama general, a continuación, se plantea el problema que se espera abordar teniendo en cuenta la población de estudio, así como las condiciones institucionales.

2. Planteamiento del problema

Respecto a la evolución del pensamiento algebraico asociado con el tratamiento de ecuaciones de primer grado, se plantea una cuestión general, pero de interés latente para la comunidad: ¿Qué sabemos sobre el desarrollo del pensamiento algebraico que pueden lograr estudiantes más jóvenes al intentar resolver ecuaciones? Como ya mencionamos el MEN (2006) propone que los estudiantes deben desarrollar habilidades de pensamiento algebraico de tal manera que, conozcan y usen métodos informales, como el ensayo y error o la complementación, para resolver ecuaciones. Incluso en el documento de los DBA (2016) se propone que los estudiantes de sexto y séptimo grado deberían encontrar el valor desconocido en una igualdad, realizando transformaciones algebraicas. Todo esto presupone, además, el desarrollo de habilidades que permitan a los estudiantes formular expresiones que modelan situaciones, de tal manera que, su forma de pensar no se restringe a dichas transformaciones. Sino, además, a su formulación y a la reflexión sobre las condiciones de la solución de una situación determinada (MEN, 2016).

El aprendizaje del álgebra en la educación básica secundaria representa un desafío clave en el desarrollo del pensamiento matemático. Una de las dificultades más recurrentes radica en la transición desde el pensamiento aritmético hacia el pensamiento algebraico, especialmente en la comprensión y resolución de ecuaciones de primer grado. Este proceso de transformación no solo involucra la correcta manipulación simbólica, sino también la internalización de las ideas abstractas que subyacen en las ecuaciones y sus soluciones. Las principales áreas de dificultad según Kieran (1996, citado por Paralea, 1998) son: la interpretación de las incógnitas, la transición del lenguaje aritmético al algebraico y la comprensión de las propiedades algebraicas.

Muchas de estas dificultades tienen su origen en el carácter algorítmico del proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que los estudiantes presentan un rendimiento significativamente inferior al enfrentarse a problemas no rutinarios en comparación con los problemas rutinarios (Quezada y del Río, 2022). Según Quezada y del Río (2022) frente a los problemas rutinarios los estudiantes tienden a desempeñarse mejor, dado que pueden asociar dichos problemas a procedimientos establecidos que forman parte de su experiencia educativa previa. Sin embargo, cuando se trata de problemas no rutinarios, donde no existe un camino claro o un proceso conocido, los estudiantes presentan problemas para abordar y resolver dichas situaciones (Quezada y del Río, 2022). Esto sugiere una limitación en su capacidad para potenciar el desarrollo de su pensamiento matemático de manera flexible y adaptativa.

Desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, se entiende que el conocimiento matemático no es únicamente una construcción individual, sino un proceso social y cultural, donde el significado de los objetos matemáticos se hace evidente a través de las interacciones y experiencias compartidas entre los estudiantes y el profesor (Radford, 2021). Sin embargo, en el contexto educativo, a menudo se observan dificultades en los estudiantes para manifestar formas de pensamiento algebraico coherente y estructurado al enfrentarse a problemas de ecuaciones de primer grado. Estas dificultades pueden estar asociadas a la forma en que los estudiantes expresan, discuten y socializan sus estrategias y razonamientos en el aula.

Los obstáculos evidenciados en el aprendizaje del álgebra, combinados con la dificultad de los estudiantes para enfrentarse a problemas no rutinarios, generan un desafío significativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Dado este panorama, surge la necesidad de analizar, ¿cómo los estudiantes de séptimo grado desarrollan y expresan formas de pensamiento algebraico cuando participan en actividades relacionadas con la resolución de ecuaciones de primer grado?

En este sentido, el presente estudio se propone investigar las manifestaciones del pensamiento algebraico en estudiantes de séptimo grado y cómo dichas manifestaciones se construyen y socializan durante la resolución de ecuaciones de primer grado. Para ello, se busca identificar las formas de pensamiento que emergen en los estudiantes durante su participación en actividades algebraicas y, además, interpretar cómo estas formas de pensamiento se desarrollan a través de la interacción social y el intercambio de ideas matemáticas, conforme a los principios de la teoría de la objetivación.

Este análisis permitirá comprender las formas en que los estudiantes internalizan y comparten conceptos algebraicos, qué procesos de pensamiento llevan a los estudiantes a concepciones erróneas y cómo estas barreras afectan el desarrollo de su pensamiento algebraico; lo que podría orientar futuras intervenciones y estrategias pedagógicas que permitan mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra en niveles educativos básicos, tanto en la comprensión conceptual como en la aplicación práctica de las matemáticas.

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Qué formas de pensamiento algebraico evidencian estudiantes de básica secundaria cuando estudian ecuaciones de primer grado?

Con base en esta pregunta, se proponen los siguientes objetivos:

Objetivo general: Analizar desde la perspectiva de la teoría de la objetivación las formas de pensamiento algebraico que emergen en estudiantes de séptimo grado cuando participan en una actividad relacionada con ecuaciones de primer grado.

Objetivos específicos:

- Identificar las formas de pensamiento algebraico que manifiestan los estudiantes de básica secundaria al resolver ecuaciones de primer grado.
- Interpretar desde la teoría de la objetivación cómo los estudiantes interactúan y socializan sus ideas matemáticas durante la resolución de ecuaciones de primer grado.

3. Marco Teórico

En esta sección se presentan elementos fundamentales de la teoría de la objetivación que permiten abordar los objetivos del estudio.

3.1 Pensamiento Algebraico

El pensamiento algebraico puede definirse como la capacidad para comprender y manipular patrones, relaciones y estructuras matemáticas, así como para generalizar y expresar dichas relaciones utilizando simbolismo algebraico. De acuerdo con Radford (citado por Vergel y Rojas, 2018), el pensamiento algebraico temprano está vinculado a la habilidad de los estudiantes para identificar patrones co-variacionales que se han desarrollado culturalmente y usarlos para abordar problemas con términos desconocidos o no especificados. Esto implica que el pensamiento algebraico no solo es la capacidad de operar con números o símbolos, sino de reconocer y trabajar con la indeterminación y las relaciones generales entre cantidades.

Asimismo, Kieran (citado por Vergel y Rojas, 2018) destaca que el pensamiento algebraico debe incluir las siguientes competencias: comprender y establecer relaciones entre cantidades, identificar estructuras matemáticas, estudiar el cambio, realizar generalizaciones, resolver problemas, modelar situaciones, justificar razonamientos, hacer pruebas y realizar predicciones. Estas características abarcan no solo la manipulación de símbolos, sino un enfoque más profundo hacia la conceptualización y comprensión del comportamiento y las relaciones entre diferentes elementos matemáticos.

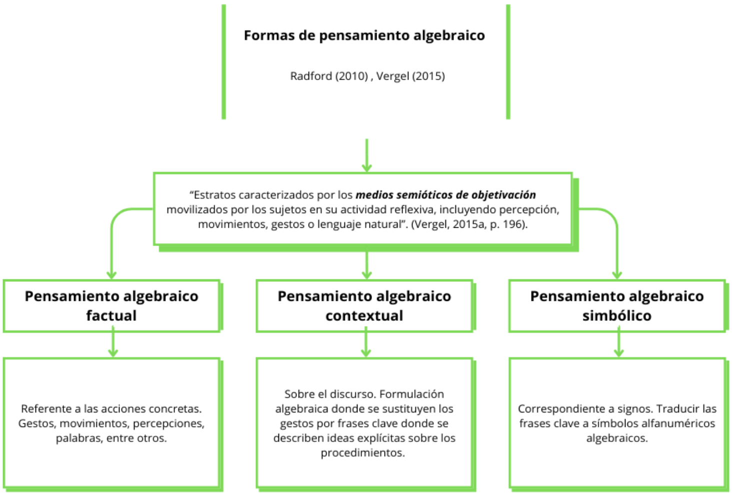
3.2 Medios Semióticos de Objetivación

Los medios semióticos de objetivación, se definen como los mecanismos y símbolos utilizados para conseguir "una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones para adquirir las metas de sus acciones" (Radford, 2003, p. 5).

3.3 Formas de Pensamiento Algebraico

Figura 1

Formas de Pensamiento Algebraico



3.4 Sistema Semiótico Concreto (SSC)

Según Radford (2022) el Sistema Semiótico Concreto comprende el uso de objetos materiales. Para efectos del estudio se usan:

a) sobres de papel con forma de metro de construcción que representan un número desconocido de centímetros y milímetros,

b) centímetros de papel que contienen las divisiones de los milímetros, y

c) el signo igual.

En este sentido, las incógnitas son representadas por el metro, mientras que las constantes son los centímetros, donde cada centímetro representa una unidad y cada milímetro una décima de esta.

3.5 Sistema Semiótico Icónico (SSI)

Como indica Radford (2022) el SSI se deriva del SSC, puesto que se trata de la representación mediante dibujos (íconos) del material concreto, para esto se pretende que, además de los objetos, se representen las acciones que se realizan sobre los centímetros y los metros, para resolver la ecuación.

4. Método

4.1 Enfoque Metodológico

El presente estudio adopta un enfoque cualitativo, ya que busca comprender las formas de pensamiento algebraico de estudiantes de séptimo grado en su contexto educativo. Desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación (Radford, 2021), el conocimiento se construye de manera colectiva a través de la interacción social, por lo que es necesario analizar el desarrollo del pensamiento algebraico en escenarios naturales, como el aula de clase.

Este es un estudio descriptivo, cuyo propósito es identificar las formas de pensamiento algebraico que manifiestan los estudiantes de básica secundaria al resolver ecuaciones de primer grado considerando las categorías propuestas por Vergel (2015) y Radford (2010); además, se espera interpretar desde la Teoría de la Objetivación (Radford, 2021) cómo los estudiantes interactúan y socializan sus ideas matemáticas durante la resolución de ecuaciones de primer grado. Para esto se diseñan e implementan tareas que buscan promover los procesos de representación, generalización, simbolización y uso de relaciones matemáticas; incluidas en el diseño de tres instrumentos: una prueba diagnóstica, un conjunto de tareas de clase y una entrevista didáctica.

4.2 Población

La población que participa en esta investigación, está integrada por estudiantes de séptimo grado con edades comprendidas entre los 12 y 15 años, seleccionados por conveniencia según la accesibilidad al aula; y el orientador de las tareas algebraicas, quien guía las actividades y facilita los procesos de interacción en el aula.

4.2.1 Criterios de selección

Para la selección de los estudiantes se consideran los siguientes criterios:

- Los estudiantes deben estar cursando séptimo grado.
- Los estudiantes deben tener un historial de asistencia al aula favorable con el fin de garantizar la participación regular en las sesiones.
- Estudiantes que no hayan tenido conocimiento previo sobre ecuaciones o que no tengan claridad sobre el tema.
- La institución educativa debe contar con un entorno propicio para observaciones y participación en clase.

4.3 Fase 1: Diseño de los instrumentos

Para la investigación se diseñan tres instrumentos: una prueba diagnóstica, un conjunto de tareas y una entrevista didáctica. Para la construcción del instrumento diagnóstico se consultaron los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006) y los estándares propuestos por el National Council of Teacher of Mathematics Education (NCTM, 2000/2003). Según los Derechos Básicos de aprendizaje (MEN, 2016), los estudiantes de grado séptimo deben poder utilizar las diferentes representaciones de los números racionales y operarlos para solucionar problemas que involucran cantidades desconocidas. Para lo cual, una de las evidencias de aprendizaje es determinar el valor de una cantidad desconocida realizando transformaciones a una expresión algebraica. Además, se espera que los estudiantes logren plantear y resolver ecuaciones, describiéndolas de manera verbal y representándolas numérica, simbólica o gráficamente.

En coherencia con lo anterior, los Estándares Básicos de competencias (MEN, 2006), en cuanto a los pensamientos numérico y variacional, indican que para los estudiantes de sexto a séptimo se espera que puedan utilizar números racionales para resolver problemas que involucren contextos de medida; además que puedan utilizar métodos como ensayo y error para resolver ecuaciones, respectivamente.

En línea con los estándares propuestos por el MEN (2016), el National Council of Teacher of Mathematics Education (NCTM, 2000/2003) indica que, para el estándar de álgebra, dentro de las expectativas para la etapa de 6 a 8, los estudiantes deben iniciar con la comprensión de las variables y sus usos. Así como con el uso del álgebra simbólica para la representación de problemas de carácter lineal.

A partir de estos criterios se selecciona un conjunto de problemas de las cartillas de postprimaria 7° Matemáticas (MEN, 2010) y Recordando mi primaria (MEN, 2010), desarrolladas bajo los estándares que responden a las necesidades de la investigación. Para la selección de problemas se considera que los estudiantes deban utilizar habilidades que incluyan reconocimiento de la propiedad de igualdad, traducción del lenguaje natural al algebraico, identificación de valores conocidos y desconocidos; así como la interpretación de problemas que incluyen incógnitas. Una vez elegidos los problemas se organizan según su nivel de complejidad.

Acorde con estos mismos principios y siguiendo la tarea de “sobres y cartas” (Radford, 2022) para el proceso de simplificación de ecuaciones; pero adaptado para variables de carácter racional positivas (dado que los sobres únicamente permiten soluciones naturales), se diseña el instrumento para la recolección de datos. Este se basa en la metodología de la Teoría de la Objetivación (Radford, 2021), que promueve el trabajo colectivo para promover el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido, las tareas se desarrollan en grupos de tres estudiantes, con la ayuda del profesor mediante preguntas orientadoras.

El conjunto de tareas se diseña a partir de una secuencia que sigue una transición desde lo concreto hasta lo abstracto. Para esto se inicia con dos problemas, con el fin de evidenciar los Sistemas Semióticos enunciados por Radford (2022) y las formas de pensamiento algebraico propuestas por Radford (2010) y Vergel (2015). Estas formas pueden emerger en procesos como: generalización, el análisis relacional y la representación simbólica.

El último instrumento se diseña con un formato de entrevista, las preguntas se encaminan para: dar cuenta de las ventajas y desventajas de la actividad desde la perspectiva del estudiante; su experiencia en el paso de lo concreto a lo abstracto; la utilidad del trabajo colectivo; y finalmente, cómo se diferencia esta actividad de las clases que recibe habitualmente.

4.4 Análisis a priori

Los enunciados propuestos para la prueba diagnóstica (ver Apéndice A) requieren que los estudiantes reconozcan la propiedad de igualdad, la traducción del lenguaje natural al algebraico y la identificación de valores conocidos y desconocidos. De esta manera, se espera que utilicen sus saberes previos para identificar relaciones donde se conserva la igualdad e intenten resolver situaciones que involucran cantidades desconocidas. Esto permite identificar cuáles estudiantes han o no tenido un contacto directo con las ecuaciones, a fin de entender con mayor claridad los procesos mentales que ocurran durante la implementación de los Sistemas Semióticos (Radford, 2022) y realizar un análisis acertado de estos momentos.

Por su parte, el segundo instrumento que se presenta a los estudiantes consta de una tarea que se expone en dos partes (ver Apéndice B). La implementación del instrumento se desarrolla a partir de tres momentos, a continuación, se describen cada uno de ellos.

4.4.1 Momento 1: Representación con el SSC

Esta primera parte corresponde al primer nivel que está asociado a una experiencia sensual concreta que, según Radford (2023), consiste en experimentar y reflexionar a través del uso de materiales concretos a fin de crear una organización visual del modelo que represente la actividad que, como se discutió en las primeras secciones de este documento, ayuda a los estudiantes a construir un entendimiento tangible de los conceptos matemáticos.

Este momento de la implementación favorece especialmente a estudiantes que tienen dificultades iniciales para desarrollar un pensamiento abstracto. Sin embargo, existe el riesgo de que algunos estudiantes se enfoquen demasiado en el manejo del material sin comprender la relación con el problema matemático. Por lo tanto, es importante que durante la labor conjunta (Radford, 2023) se cuestione y explique claramente el significado de los materiales, a la vez realizar preguntas orientadoras que promuevan en los estudiantes la articulación de sus razonamientos y hagan explícitos los vínculos entre sus acciones y el problema. Los enunciados y procedimientos esperados se presentan a continuación:

Figura 2

Enunciado del Problema 1

PROBLEMA 1

María y Camila están decorando el salón de séptimo con tiras de cinta. María traía 7.5 cm de cinta y Camila 4 cm. Para que las dos tuvieran la misma cantidad de cinta, Ana le da 3 pedazos de cinta a Camila y 2 pedazos de cinta a María, cada pedazo de cinta que les da Ana tiene la misma longitud. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe Camila? ¿Cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe María?

Para este problema, se espera que el estudiante empiece explorando con el material concreto, para lo cual conforme vaya construyendo la representación (ver Figura 3) se irá preguntando cuál variable o constante representa cada figura y por qué la ubica de esa manera.

Figura 3

Representación con material concreto del enunciado del Problema 1

Posterior al planteamiento de la ecuación, el estudiante debe reconocer los elementos comunes a ambos lados del igual (ver Figura 4), empezando por las incógnitas que pueden identificarse a primera vista, de modo que los retire de la "expresión" construida con el material.

Figura 4

Representación con material concreto del resultado de retirar las incógnitas comunes a ambos lados

Nuevamente, el estudiante necesita comparar la igualdad e identificar las partes semejantes, en este caso, la cantidad de centímetros en común (ver Figura 5) para poder eliminarlas y encontrar la respuesta a la cantidad de centímetros que corresponde a la incógnita (ver Figura 6).

Figura 5

Representación con material concreto con las partes comunes ubicadas de manera explícita

Figura 6

Representación con material concreto de la solución de la incógnita del Problema 1

Para el segundo problema se deduce el siguiente procedimiento:

Figura 7

Enunciado del Problema 2

PROBLEMA 2

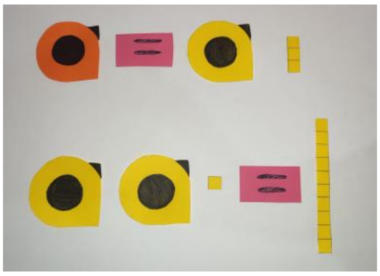
Carlos y Ana quieren ayudar a decorar también. Cada cinta de Carlos es 3 cm más larga que cada cinta de Ana. Si dos tiras de cinta de Ana más 1cm miden 10cm en total. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué longitud tiene cada una de las cintas de Ana?
b) ¿Qué longitud tiene cada una de las cintas de Carlos?

Para la representación con material concreto, es necesario elaborar los metros que representan las variables de diferente color, puesto que para representar el problema es necesario plantear dos ecuaciones, donde una de ellas cuenta con dos variables (ver Figura 8), lo cual implica una sustitución.

Figura 8

Representación con material concreto del enunciado del Problema 2



Se pretende que el estudiante reconozca que hay más de una variable, así como contar con claridad sobre el significado de cada una, de manera que inicie por resolver la ecuación de una sola variable, ya que la necesita para resolver la primera ecuación. Para hallar la cantidad de centímetros en cada metro es preciso que compare ambos lados de la igualdad (ver Figura 9) y corte o doble el centímetro que aparece en ambas partes (ver Figura 10).

Figura 9

Comparación de ambos lados de la igualdad de la ecuación correspondiente a la incógnita de Ana

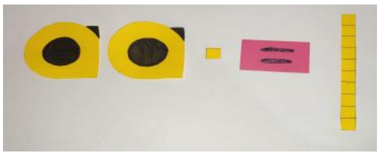
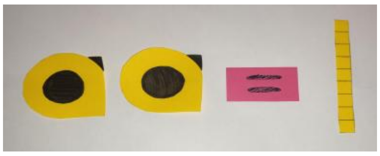


Figura 10

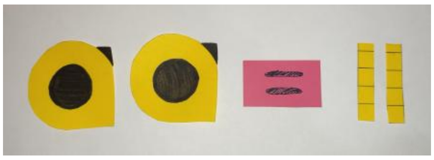
Resultado de eliminar el centímetro en común de la representación con material concreto



Posteriormente, al quedar dos metros a un lado y los 9 centímetros al otro, se divide en 2 la cinta de 9cm (ver Figura 11) y nuevamente se comparan ambos lados para identificar que cada metro representa la mitad de la cantidad de centímetros, es decir 4,5 cm.

Figura 11

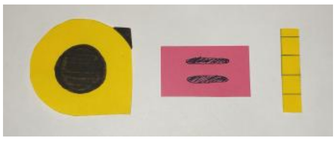
Representación con material concreto de la división de la cinta de 9cm en 2 partes iguales



Para terminar por despejar, debería recortar o doblar la cantidad de centímetros por la mitad y eliminar uno de los metros del lado izquierdo (ver Figura 12).

Figura 12

Representación con material concreto de la solución de la incógnita de Ana



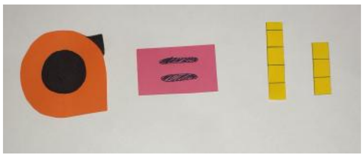
Finalmente, para dar solución a la primera ecuación, el estudiante debe igualar la incógnita correspondiente a Carlos a la incógnita de Ana más 3cm (ver Figura 13) y sustituir la cantidad de centímetros del paso anterior en el lugar del metro correspondiente (ver Figura 14).

Figura 13

Planteamiento con material concreto de la ecuación de Carlos

Figura 14

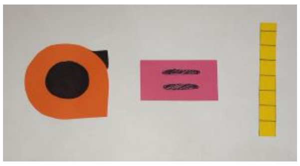
Representación con material concreto de la sustitución de la incógnita de Ana en la ecuación de Carlos



Al unir ambas cantidades, obtiene la respuesta (ver Figura 15) de la cantidad de centímetros que representa la variable para la que debió sustituir.

Figura 15

Representación con material concreto de la solución a la ecuación de Carlos



Esta actividad orientada por el uso del Sistema Semiótico Concreto (SSC) (Radford, 2022) favorece la manifestación de los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015), puesto que los estudiantes manifiestan sus ideas y argumentos, a la vez que los representan mediante acciones al manipular el material concreto.

4.4.2 Momento 2: Representación con el SSI

Para el segundo momento el estudiante debe representar mediante dibujos o representaciones gráficas el procedimiento anterior por lo que es probable que se confunda si no hace un uso correcto de las mismas. En este sentido, se espera que el estudiante tenga en consideración usar colores diferentes para el caso donde hay más de una variable y, nuevamente, indicar qué representa cada dibujo. Para esta representación es fundamental que el estudiante indique qué proceso realizó en cada paso, además, como se presentan números racionales, es importante señalar, ya sea de manera escrita u oral, esta característica.

La representación con SSI (Radford, 2022) fomenta habilidades de abstracción inicial, puesto que traducir de lo concreto a lo icónico permite representar relaciones matemáticas de manera más estructurada, lo cual facilita el proceso de Objetivación (Radford, 2003), puesto que las comparaciones y la manera en que se relacionan ambos lados de la igualdad permite el manejo visual en conjunto, favoreciendo que el estudiaste reconozca explícitamente las conexiones. En este sentido se presentan unas posibles representaciones de los problemas mediante el SSI (Radford, 2022):

Figura 16

Representación con el SSI del procedimiento para dar solución al Problema 1

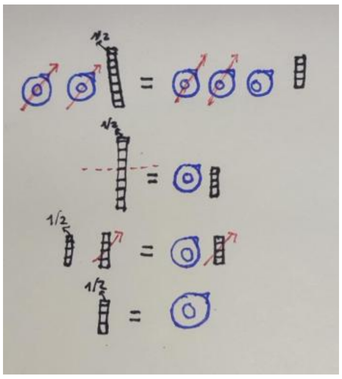
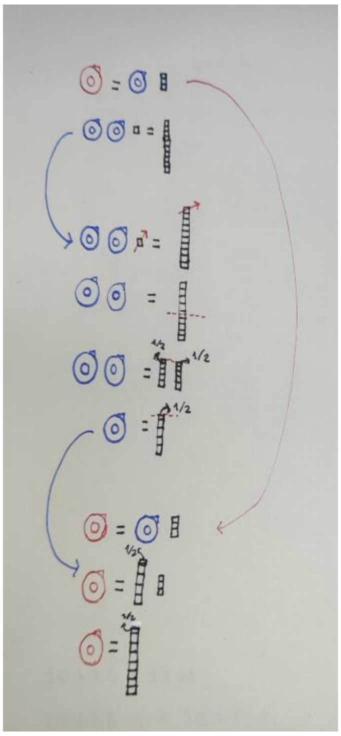


Figura 17

Representación con el SSI del procedimiento para dar solución al Problema 2



Del mismo modo que en el momento anterior, se pueden detallar los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015), al observar la manera en que los estudiantes representan icónicamente sus procesos y cómo los describen. Algunos estudiantes podrían experimentar dificultades al conectar los íconos con las representaciones concretas, lo que puede llevar a confusiones, por lo cual es fundamental que el orientador en su participación del proceso de objetivación cuestione al estudiante. Este se realiza con el fin de que empiece a ser consciente de las acciones realizadas en el momento anterior a fin de materializar el saber (Radford, 2023), a la vez que brinde ejemplos claros y apoyo continuo para asegurar que la transición sea exitosa.

4.4.3 Momento 3: Planteamiento y solución de la ecuación

El último momento vincula los dos momentos anteriores con la formulación y resolución de ecuaciones, lo cual permite alcanzar un nivel más abstracto de pensamiento algebraico. Sin embargo, puede que sea en este momento donde los estudiantes presenten más dificultades puesto que al fomentar competencias clave como la definición de variables, el reconocimiento de patrones y la formalización de relaciones en una representación más formal, los estudiantes pueden mostrar resistencia o ansiedad, especialmente si no comprendieron bien los pasos previos, por los cual es importante tratar los tres momentos como un proceso continuo. La secuencialidad en la implementación respeta la progresión cognitiva, lo que ayuda a minimizar las barreras iniciales que enfrentan los estudiantes al trabajar con el álgebra a la vez que la interacción grupal fomenta el aprendizaje social en el contexto del aula, permitiendo que los estudiantes aprendan unos de otros.

Para este último momento, el estudiante debe traducir al lenguaje algebraico (utilizando números y símbolos para las incógnitas) los procedimientos anteriores. Por lo cual es necesario que traduzca las representaciones hechas en los Sistemas Semióticos Concreto e Icónico (Radford, 2011) a signos (ver Figura 18 y Figura 19) que plasmen adecuadamente las operaciones que realiza, del mismo modo que reconozca los valores constantes y las incógnitas.

Figura 18

Representación simbólica del procedimiento de la ecuación del Problema 1

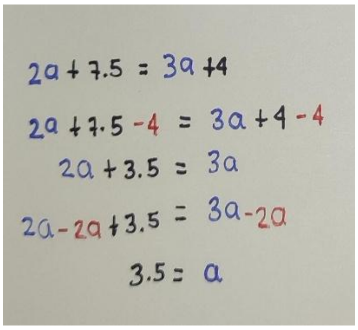
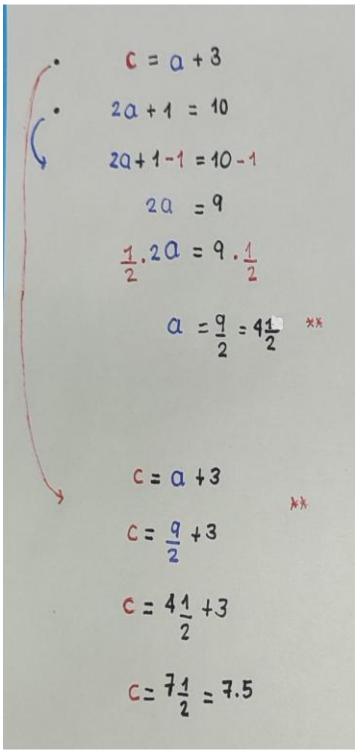


Figura 19

Representación simbólica del procedimiento de la ecuación del Problema 2



En esta actividad, se pretende evidenciar características del Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015), puesto que implica la transformación de material concreto e íconos al uso de símbolos alfanuméricos algebraicos del álgebra (Radford, 2010).

Finalmente, para la entrevista (ver Apéndice C) se dispone de un conjunto de preguntas orientadas hacia la percepción del estudiante sobre la actividad, así como los aprendizajes estructurados o reforzados. En este último instrumento se estima que los estudiantes manifiesten las dificultades y facilidades que presentaron durante la actividad, para lo cual deben rememorar los procedimientos realizados y reflexionar sobre el paso de lo concreto a lo simbólico, así como comparar la metodología utilizada con las clases que reciben habitualmente.

4.5 Fase 2: Implementación

Con el fin de promover el trabajo colectivo e identificar las formas de pensamiento algebraico descritas en el marco teórico, se desarrolla la tarea en grupos de estudiantes a partir de los momentos descritos en el análisis a priori. Como se planteó en el Marco Teórico, en el desarrollo de este estudio se emplean dos sistemas semióticos no alfanuméricos: el Sistema Semiótico Concreto y el Sistema Semiótico Icónico (Radford, 2022).

4.5.1. Momento 1: Representación con el SSC

En esta fase se proponen los problemas enunciados en la tarea a los estudiantes. A partir del enunciado deben representar la situación utilizando el material concreto (centímetros y metros). Durante la actividad se plantean preguntas orientadoras conforme va surgiendo la necesidad. La tarea se implementa con dos grupos, cada uno integrado por tres estudiantes, los grupos fueron denominados como: Grupo A y Grupo B.

Para dar inicio al conjunto de problemas propuesto, la explicación del material para la representación mediante el Sistema Semiótico Concreto (SSC) (Radford, 2022) se presenta a los estudiantes de la siguiente manera:

a) Los metros (ver Figura 20) representan las cantidades desconocidas llamadas incógnitas, es decir, para cada cinta con longitud desconocida se utiliza un metro, los cuales serán del mismo color si corresponden a la misma longitud desconocida y, de preferencia, de diferente color si corresponden a longitudes diferentes.

Además, una vez encontrado el valor de la cantidad de centímetros desconocida se les sugiere introducir el número de centímetros en unos metros con un “bolsillo” a fin de reconocer que ese es el valor que se desconocía, sin embargo, se les permite expresarlo de otra manera, mientras la interpretación sea clara.

Figura 20

Representación de las incógnitas con material concreto

b) Los centímetros (ver Figura 21) representan las longitudes conocidas, es decir, las cintas cuya cantidad de centímetros se puede reconocer solo con leer el enunciado y/o aquellas cuyo valor fue hallado.

Figura 21

Representación de las cantidades conocidas con material concreto

c) Y el igual (ver Figura 22), para el cuál no se dio mayor orientación, puesto que para la actividad se platea una pregunta a fin de que los mismos estudiantes reconozcan su utilidad para comparar cantidades que se describen a cada lado de una igualdad.

Figura 22

Representación del igual con material concreto

Una vez terminada la explicación, los estudiantes del grupo A, quienes por protección a su identidad se nombran bajo los seudónimos: Johan, Ángel y Diana, quienes no habían tenido contacto previo con las ecuaciones, inician identificando las cantidades conocidas y desconocidas en el primer problema. Se hace énfasis en la necesidad de leer el enunciado del Problema 1 (ver Figura 2), puesto que este mismo afirma que los pedazos de cinta que Ana les entrega a María y Camila son "para que tuvieran la misma cantidad de centímetros".

> Orientadora: ¿Cómo se puede representar que algo es lo mismo que lo otro?
>
> Ángel: ¿Con la igualdad?
>
> Orientadora: Así es, entonces ya sabemos que en algún lugar va a ir un igual comparando cosas. Vamos a ir ubicando…

En este momento se evidencia por parte de Ángel una forma de Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) que corresponde a la formulación algebraica al reconocer la igualdad como una herramienta que compara y representa relación entre cantidades.

Por su parte, Johan y Diana empiezan a conversar sobre cuántos centímetros hay ya que Johan manifiesta que tiene 5 líneas y Diana le responde que "cuentan" como cuatro centímetros. Mientras Ángel empieza a hablar de otro tema.

La conversación entre Johan y Diana se interpreta como una forma de Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015) que se manifiesta a través de la acción concreta de contar, expresando mediante palabras su percepción sobre un caso particular, en este caso si se trata de 4cm o 5cm.

> Orientadora: Bueno, concentrémonos en esto. Entonces, leamos el problema y vayamos ubicando las cantidades según nos las van dando. ¿Qué vamos a comparar?
>
> Diana y Johan: La cantidad de cinta de Camila y de Ana… María.
>
> Orientadora: ¿Entonces qué podemos colocar para comparar?
>
> Ángel: Usar la igualdad.
>
> Orientadora: ¿Entonces a qué lado vamos a colocar la cantidad de cada una?
>
> Ángel: [Mueve el igual]. Aquí (ver Figura 23) …

Figura 23

Ubicación del igual en la representación indicada por Ángel

Orientadora:	¿Por qué mueves el igual? ¿Sí sabes para qué está sirviendo el igual en este caso?
Ángel:	Sí sé.
Orientadora:	¿Para qué?
Ángel:	Para comparar los… los centímetros que tiene María hay que compararlos con los que tiene esta china…

En este caso, Ángel no solo reconoce la propiedad de la igualdad y su utilidad para comparar magnitudes relacionadas, sino que se orienta hacia el Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015) ya que reconoce el signo igual como símbolo para representar la comparación entre dos cantidades relacionadas. A su vez, se presentan las formas de pensamiento factual y contextual (Vergel,2015) al realizar la acción concreta ubicar el igual como un centro en la comparación y posteriormente justificar de manera verbal la acción realizada describiendo explícitamente su procedimiento.

Orientadora:	¿Entonces qué debemos colocar?

Los estudiantes ubican las cantidades conocidas (ver Figura 24), pero no ubican las desconocidas.

Figura 24

Ubicación de las cantidades conocidas en la representación con material concreto elaborada por parte del grupo A

Orientadora:	¿Nosotros sabemos cuánto miden los pedacitos que le dieron a Camila?
Diana:	No.
Orientadora:	Entonces, ¿con qué los representamos?
Diana:	[Agarra un metro] (ver Figura 25). ¿Con estos?

Figura 25

Manipulación de los metros hecha por Diana

Orientadora:	Sí, ubíquenlos.

[Los estudiantes completan el lado de Camila] (ver Figura 26).

Figura 26

Representación con material concreto de la igualdad con el lado de Camila completo

Orientadora: ¿Y a María cuántos le da?

Diana y Ángel: Dos. [Los ubican] (ver Figura 27).

Figura 27

Representación del enunciado del Problema I con material concreto planteada por el Grupo A

Una vez planteada la representación con el Sistema Semiótico Concreto (Radford, 2022) se evidencia confusión en un principio para reconocer cómo representar las cantidades desconocidas. Sin embargo, se dio una adaptación rápida a la situación basada en el

Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015), mediante las acciones de ubicar metros y centímetros como representaciones de las conocidas y desconocidas agrupándolas a cada lado según las cantidades correspondientes a Ana y María.

Orientadora: Listo, entonces ahí ya representamos la situación. Ahora, ¿qué dice la pregunta?

[Los estudiantes leen el problema nuevamente].

Orientadora: ¿Cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe Camila y cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe María? Entonces, ¿qué representan los metros?

Diana: Una cantidad desconocida.

Orientadora: ¿Y cuál es la cantidad desconocida en este caso?

Ángel: Dos y tres. No, no, no…

Orientadora: ¿Qué es lo que no sabemos?

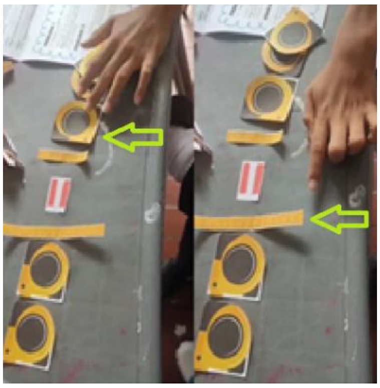
Diana: Cuánto mide cada pedazo.

Orientadora: ¿Entonces qué vamos a hacer para saber cuánto mide cada pedazo?

Johan: [Señala] (ver Figura 28). Sumar estos tres y hacer una que le llegue a esta.

Figura 28

Señalamiento de Johan para sugerir un procedimiento



Aunque la idea de Johan no es la adecuada en esta situación, da cuenta de un análisis relacional sobre ambos lados de la ecuación, lo que muestra que existe una noción de la dependencia entre las cantidades conocidas y desconocidas de ambos lados de la igualdad.

Orientadora: Bueno, algo así, entonces podemos ir comparando lo que hay igual en ambos lados.

Diana: Pero no hay, porque las cantidades son diferentes…

Orientadora: A ver, ¿cuántas cantidades desconocidas en común tenemos en ambos lados?

Johan: Dos.

Orientadora: ¿Entonces qué puedo hacer yo con esas dos cantidades en común en ambos lados si debo conservar la igualdad? ¿Qué pasa si yo retiro una a ambos lados, sigue siendo igual?

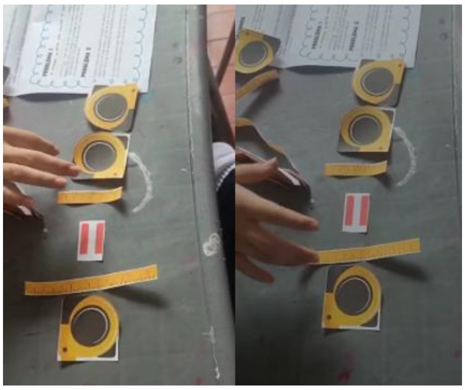
Diana y Ángel: No.

Orientadora: ¿Por qué?

Diana: Porque aquí hay dos y aquí una (ver Figura 29) …

Figura 29

Diana señala la diferencia de cantidades de incógnitas a ambos lados buscando justificar por qué no considera que se conserva la igualdad al quitar una a cada lado



Johan: Pues sí es igual porque las dos son desconocidas.

Ángel: Bueno, sí, es verdad lo que dice…

Orientadora: A ver, si yo tengo 5 manzanas y al otro lado tengo 5 manzanas y a cada lado le quito una manzana, ¿sigue siendo igual o no?

Diana y Ángel: Sí.

Orientadora: Entonces, ¿cuántas cantidades desconocidas tenemos en cada lado?

Diana y Ángel: Tres y dos.

Orientadora: ¿Entonces cuántas hay en común?

Diana: Dos.

Orientadora: Bien, entonces siguiendo el ejemplo de las manzanas, ¿qué puedo hacer para que se siga manteniendo la igualdad?

[Diana retira una de los metros del lado de Camila en la igualdad] (ver Figura 30).

Figura 30

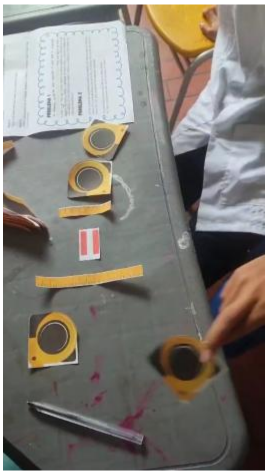
Diana retira uno de los metros de la representación del lado de Camila

Orientadora: ¿Y entonces qué pasa con el otro lado? Porque si yo quito a un lado…

Ángel: Tengo que quitarlo del otro (ver Figura 31).

Figura 31

Ángel retira uno de los metros del lado de la representación de María



Orientadora: Entonces, ¿hay algo más que podamos quitar?

Ángel: No.

Orientadora: ¿Hay algo más en común en ambos lados?

[Johan retira otro metro de uno de los lados].

Orientadora: ¿Y qué pasa al otro lado con esto? (Señala un metro).

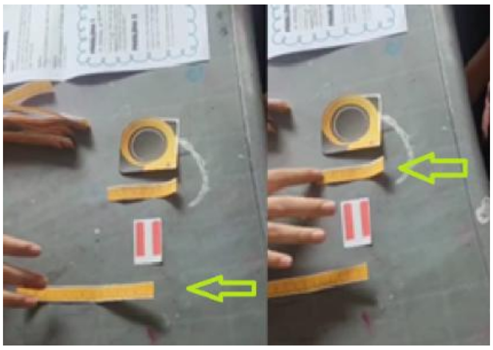
Diana: Debo quitarla también.

Orientadora: ¿Qué más en común hay ahí? Que de pronto no se vea igual, pero es algo común en ambos lados.

Diana: Estos [señala] (ver Figura 32).

Figura 32

Diana señala los elementos comunes a ambos lados de la representación



Orientadora: ¿Cuánto en común tienen?

Diana: Cuatro centímetros.

Orientadora: ¿Entonces qué puedo hacer?

Ángel: La recorto.

Orientadora: Sí, puedo recortarla…

Johan: Y mirar cuánto vale este [señala] (ver Figura 33).

Figura 33

Johan señala la incógnita de la que se debe hallar el valor

Durante esta parte de la tarea se hacen presentes dos de las tres formas de pensamiento algebraico propuestas por Vergel (2015) a la luz de las ideas de Radford (2010): factual y contextual. El Pensamiento algebraico factual predomina, puesto que bajo el uso del material concreto se emplean las acciones de quitar y recortar como representaciones concretas de la resta de constantes e incógnitas. Además, se hace uso de un ejemplo particular planteado con manzanas con el fin de que Ángel y Diana comprendan el concepto de igualdad, el cual pasa por un proceso de generalización por parte de los estudiantes de modo que lo aplican para continuar la búsqueda de la solución a su problema.

Los estudiantes recortan adecuadamente, pero retiran la parte que no es igual en ambos lados (ver Figura 34).

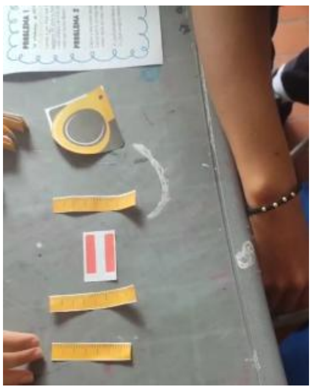
Figura 34

Resultado de retirar el elemento que no es común en la representación

Orientadora: [Les pide que vuelvan a colocar ambas partes de los centímetros recortados] (ver Figura 35). ¿Qué es igual en ambos lados?

Figura 35

Comparación con los centímetros recortados



Diana: 3,5…

Orientadora: ¿Cuántos centímetros hay aquí? [Señala el lado que tiene el metro] (ver Figura 36).

Figura 36

Señalamiento del lado con la incógnita

Diana: Cuatro, entonces 3,5…

Orientadora: ¿Cuáles son iguales?

Johan: Cuatro y cuatro.

Orientadora: ¿Entonces qué podemos hacer con eso?

Johan: Retirar este y este. [Señala los pedazos que tienen la misma cantidad de centímetros] (ver Figura 37).

Figura 37

Johan indica los pedazos de cinta con igual número de centímetros

Orientadora: Muy bien. ¿Y entonces qué significa eso? ¿Qué nos dice sobre la cantidad desconocida?

Figura 38

Representación del valor de la incógnita

Diana: Que vale 3,5 centímetros (ver Figura 38).

Orientadora: Muy bien, entonces ya encontramos la respuesta, pero debe ser más completa, reconstruyan el procedimiento y respondan interpretando la pregunta.

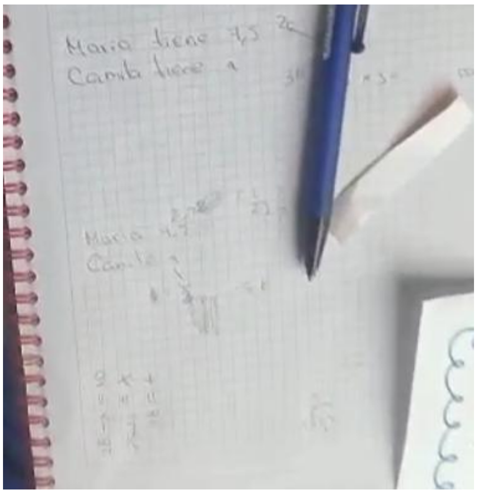
La última parte del proceso para hallar la solución se apoya nuevamente en el Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015), haciendo uso del material concreto como herramienta para identificar visualmente elementos comunes, a la vez que se produce la acción de retirarlos como representación de la resta en el proceso para hallar el valor de la incógnita.

Mientras tanto al grupo B se le había sugerido ir leyendo e interpretando el problema, cabe destacar que los grupos se encontraban a una distancia prudente, a fin de evitar que escucharan al otro. Para objeto del estudio las estudiantes se nombran como Mara, Sofía y Nayla. Bajo la revisión de la prueba diagnóstica se advierte que Mara ya había tenido contacto previo con las ecuaciones, aunque no presenta un buen manejo de las mismas, además Nayla no asistió a la primera sesión de implementación correspondiente a la representación de la ecuación del primer problema mediante el uso del Sistema Semiótico Concreto (Radford, 2022) por lo cual no presenció una explicación amplia del material concreto y sus representaciones.

En primera instancia, se observa que las estudiantes estaban tratando de resolver el problema siguiendo un procedimiento algebraico propuesto por Mara, quien ya había tenido contacto con las ecuaciones, utilizando la incógnita nombrada como x. Sin embargo, se evidencia que hubo confusión ya que los escritos presentaban tachones y partes casi borradas.

Figura 39

Intento de dar solución a la ecuación con términos algebraicos



Orientadora: A ver, vamos a empezar con representaciones. Leamos el problema. (Leen el problema). Cuando nos dice que María traía 7,5 cm de cinta, ¿se refiere a una cantidad conocida o desconocida?

Mara: Conocida.

Orientadora: ¿Entonces con qué la representamos?

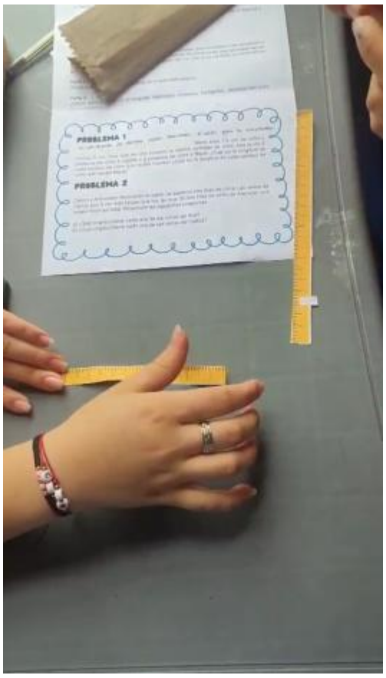
Mara: Con las "rayitas" (refiriéndose a los centímetros).

Orientadora: Muy bien, entonces vayamos ubicándolos.

[Sofía ubica los 7,5 centímetros que corresponden a María] (ver Figura 40).

Figura 40

Sofía ubica la primera cantidad conocida del Problema 1



Orientadora: Muy bien. ¿Qué otra cantidad conocida tenemos?

Mara intenta ubicar los 4 centímetros que corresponden a Camila, sin embargo, solo recorta 3 centímetros (ver Figura 41).

Figura 41

Recorte de 3cm en lugar de 4cm

Orientadora: ¿Ahí cuántos centímetros hay?

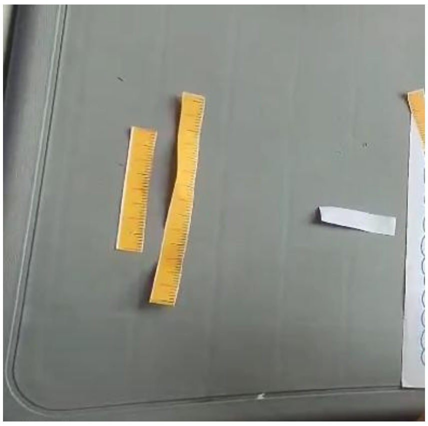
Mara: Cuatro.

Orientadora: ¿Segura?

Mara: Ah, no, no, me "comí" uno. [Corrige y ubica la cantidad de centímetros adecuada] (ver Figura 42).

Figura 42

Corrección del recorte de 4cm



Orientadora: Muy bien, ya tenemos las cantidades conocidas, cuando el problema nos dice "para qué tuvieran la misma cantidad de cinta", ¿Qué quiere decir que ambas tienen la misma cantidad?

Mara: Que hay igualdad porque es igual cantidad.

Orientadora: Así es, ¿entonces qué podemos utilizar para señalar que tienen la misma cantidad de cinta?

Mara: El igual.

Orientadora: ¿Y dónde lo ubicamos? ¿Qué vamos a comparar?

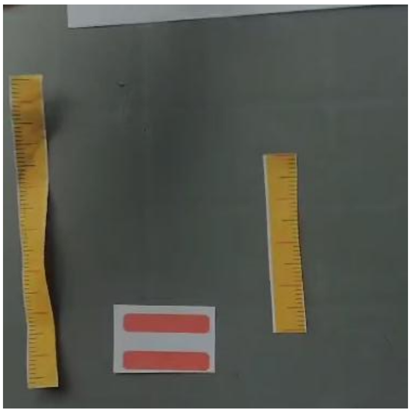
Isabella: La cantidad de cinta de… ¿Cómo se llaman?

Mara: De Camila y María. Pero no tienen igualdad porque una tiene más que la otra.

Orientadora: Eso es cierto, todavía no diremos que es igual, pero tengamos en cuenta que estamos construyendo el problema y sabemos que al final será igual. Vamos a utilizarlo para separar los lados que estamos comparando. ¿Entonces cómo lo ubicamos? [Mara y Sofía ubican el igual separando las longitudes conocidas] (ver Figura 43).

Figura 43

Ubicación del igual como forma de separar las longitudes conocidas de las cintas de María y Camila



Aquí se presenta, como en el caso de Ángel en el grupo A, un reconocimiento de la propiedad de igualdad, inicialmente expresado con palabras y materializado mediante el uso del símbolo algebraico que lo representa y su utilidad para comparar magnitudes relacionadas. Haciendo uso del material concreto mediante la acción de ubicar el igual en el centro de la ecuación, se integran las tres formas de pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico (Vergel, 2015).

Orientadora:	Listo, ahora para que fuera cierto esta igualdad, es decir, que la cantidad de cinta de Camila y María fueran las mismas el problema nos dice que Ana le da tres pedazos de cinta a Camila y dos a María. ¿Esos pedazos son cantidades conocidas o desconocidas?
Sofía y Mara:	Desconocidas, porque no se sabe cuánto mide cada pedazo. Entonces María tiene dos desconocidas y Camila tres (ver Figura 44).

Figura 44

Representación del enunciado del Problema 1 con material concreto, Grupo B

Orientadora: ¿Entonces qué representa esto? [Señala un metro] (ver Figura 45).

Figura 45

Metro señalado en la pregunta sobre lo que representa en el contexto del problema

Sofía: Una incógnita.

Orientadora: Sí, ¿pero en el problema qué representa?

Mara: Un pedazo. ¿Pero todos son iguales?

Orientadora: Muy buena pregunta, si leemos el problema vemos que dice que la longitud es la misma.

Sofía: Entonces cada metro vale lo mismo que otro y así. Y ahora sí tienen lo mismo.

Orientadora: Así es, entonces, ¿cómo podemos encontrar la cantidad de centímetros que mide cada pedazo de cinta? Empecemos comparando qué hay en común en ambos lados y veamos qué podemos hacer conservando la igualdad, porque ya que terminamos de plantear el problema sabemos que la cantidad es la misma. Supongamos que yo tengo 5 manzanas y Majo tiene 5 manzanas, si me quitan una manzana a mí y una a Majo, ¿seguimos teniendo igual cantidad?

Sofía:	Sí, ambas tienen cuatro.
Orientadora:	¿Entonces qué pasa si yo le quito lo mismo a una igualdad en ambos lados?
Sofía:	Sigue siendo igual.
Orientadora:	Muy bien. Entonces, como ya terminamos de plantear el problema sabemos que ahora ambos lados son iguales. ¿Qué tenemos en común a ambos lados?
Mara:	Sí, ya son iguales. Tenemos en común los pedazos, no…
Sofía:	Sí.
Orientadora:	Sí, claro. ¿Y cuántos?
Mara:	Dos.
Orientadora:	Bien. Siguiendo el ejemplo de las manzanas, ¿qué podemos hacer?

[Sofía retira uno de los metros] (ver Figura 46).

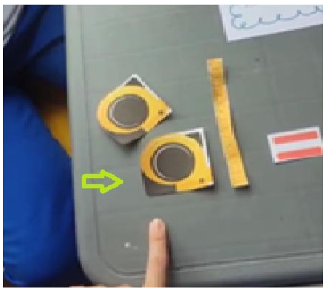
Figura 46

Sofía retirando uno de los metros de la representación

Orientadora:	Bueno, y si quito uno a ese lado, ¿qué debo hacer a este lado? (Señala el lado izquierdo de la igualdad) (ver Figura 47).

Figura 47

Metro señalado



Mara: Quito uno de allá también.

Se observa a Sofía un poco confundida y se retoma el ejemplo de las manzanas.

Orientadora: Sí, porque si yo le quito a una persona una manzana y a la otra no ya no seguirían teniendo la misma cantidad de manzanas.

Sofía: No, porque si la otra tiene más se le quita a una para que queden igual.

Orientadora: Pero recuerda que aquí son iguales porque en el problema dice que para que María y Camila tuvieran la misma cantidad de cinta fue que Ana le dio 2 pedazos a una y 3 a la otra.

Sofía: Ah, sí, sí. [Retira el metro del otro lado] (ver Figura 48).

Figura 48

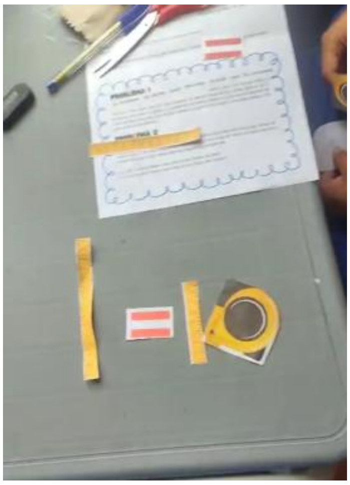
Resultado de retirar un metro en ambos lados de la igualdad

Orientadora: Muy bien, ¿hay algo más en común ahí?

[Mara retira los metros comunes a ambos lados] (ver Figura 49).

Figura 49

Resultado de retirar la totalidad de metros comunes a ambos lados de la representación



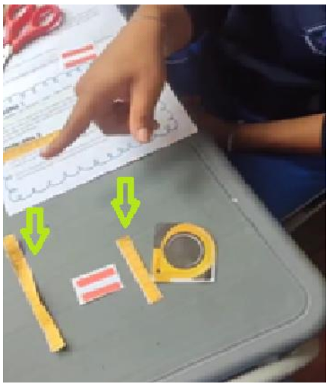
En este punto predomina la forma de pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) expresada mediante frases clave como medios semióticos de objetivación (Radford, 2022), tales como "María tiene dos desconocidas y Camila tres" para referirse a las incógnitas y "entonces cada metro vale lo mismo que otro" para indicar que la incógnita es la misma.

Orientadora: Perfecto. ¿Hay algo más que sea igual en ambos lados, que de pronto no está explícito, pero es algo en común?

Mara: [Señala] (ver Figura 50) Los centímetros.

Figura 50

Centímetros señalados por Mara como elementos en común



Orientadora: ¿Y cuántos centímetros hay en común?

Mara y Sofía: Cuatro. [Doblan los centímetros, pero dejan visible la parte que está en común en lugar de la restante] (ver Figura 51).

Figura 51

Mara doblando los centímetros, dejando visibles las partes comunes en lugar de la parte restante

Orientadora: Bueno, vamos a recortarlos mejor y colocamos ambos recortes en la representación y los observamos.

[Los recortan y ubican] (ver Figura 52).

Figura 52

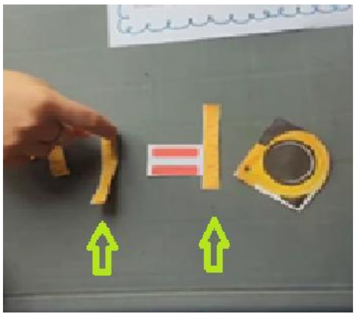
Representación con los centímetros recortados para visualizar explícitamente los elementos en común

Orientadora: Listo, ahora, ¿qué es lo que es igual a ambos lados y que ahora sí se ve explícito?

Sofía: Esto. [Señala los centímetros en común] (ver Figura 53).

Figura 53

Centímetros señalados por Sofía como elementos en común

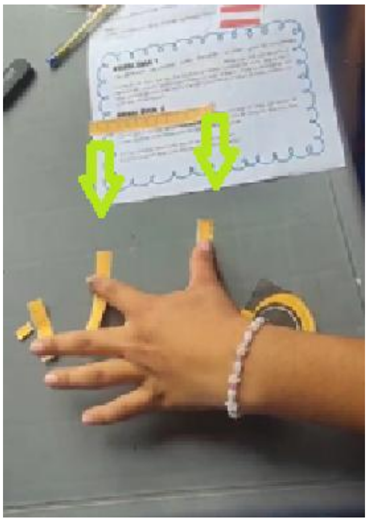


Orientadora: Bueno, ¿qué podemos hacer?

Mara: Quitar estos. [Señala] (ver Figura 54).

Figura 54

Elementos comunes señalados por Mara para ser eliminados de la representación



Orientadora: Bien, ¿en lo que nos queda (ver Figura 55) hay algo más en común?

Figura 55

Resultado de eliminar los elementos comunes a ambos lados de la representación

Sofía:	No.
Orientadora:	Bueno, entonces si tenemos a un lado una cantidad desconocida y al otro lado un número de centímetros conocidos, ¿qué quiere decir?
Mara:	Ay, ya entendí, es como una ecuación, pero con matachitos.
Orientadora:	Así es, estamos representando la ecuación. ¿Entonces qué quiere decir?
Mara:	Que la incógnita vale 3,5 centímetros.
Orientadora:	Muy bien, entonces ya tenemos la respuesta, pero antes van a hacer de nuevo todos los pasos, todas las representaciones, para que revisen y entiendan lo que hicieron.

En el proceso final para hallar el valor de la incógnita emergen formas de Pensamiento factual y contextual (Vergel, 2015) mediante acciones concretas como doblar, cortar y quitar los centímetros para identificar y eliminar los elementos comunes. Del mismo modo la frase de Mara «son como ecuaciones, pero con “matachitos” » considerando que ya ha tenido contacto previo con las mismas describe una formulación algebraica donde relaciona la representación con su concepción sobre lo que es una ecuación.

Mientras las estudiantes del grupo B reconstruyen el procedimiento hecho (ver Figura 56), se procede a revisar la reorganización propuesta por el grupo A, la cual fue explicada de la siguiente manera:

Orientadora:	A ver, me van a explicar qué fue lo que hicieron en cada paso.

Figura 56

Reconstrucción inicial del procedimiento realizado con el material concreto para la solución del Grupo A al Problema 1

Johan: Primero, repartir lo que tenían y las partes que les dio (Ana) a cada una. En el segundo quitamos una a cada lado.

Orientadora: ¿Por qué hicieron eso en el segundo paso?

Johan y Ángel: Para que quedara igual.

Orientadora: Muy bien, compararon a ambos lados y quitaron cosas en común para conservar la igualdad. ¿Y en el tercero?

Johan: Volvimos a quitar una a cada lado, pero entonces esta vez el de allá [señala] (ver Figura 57) quedó sin incógnita.

Figura 57

Lado señalado por Johan al quedar sin incógnitas

Orientadora: Muy bien, ¿y qué pasó en el cuarto paso? ¿Está bien?

Diana: Ay. [Intercambia los centímetros por el metro que representa la incógnita] (ver Figura 58).

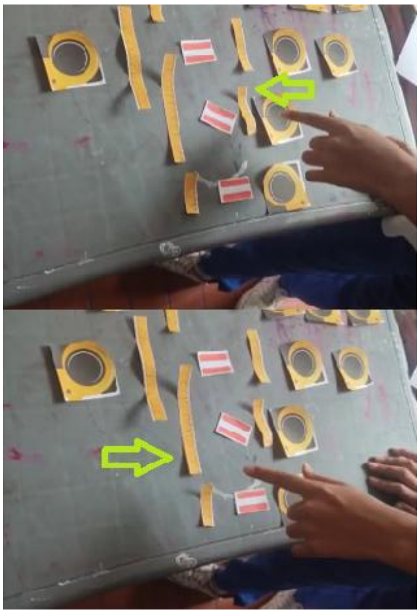
Figura 58

Corrección de la igualdad intercambiando los centímetros por la incógnita

Orientadora:	Muy bien, ¿y qué hicieron en ese paso?
Diana:	Dimos con el resultado de la incógnita.
Orientadora:	¿Y cómo lo hicieron?
Johan:	Mirar cuánto le faltaba a este para llegar a este (señala).

Figura 59

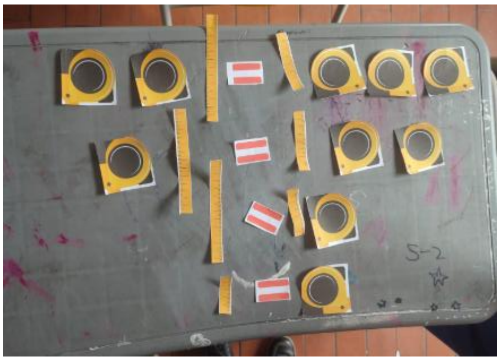
Centímetros utilizados para calcular el valor de la incógnita



Orientadora:	¿Y entonces qué hicieron con la cantidad que sobraba?
Ángel:	La quitamos.
Orientadora:	Listo, ¿entonces a qué llegamos? ¿Qué era lo que representaba el metro?
Diana:	La incógnita.
Orientadora:	Muy bien, ¿y qué era la incógnita en este caso?
Diana:	3,5 cm.
Orientadora:	Ese es el valor, ¿pero qué era lo que no conocíamos?
Diana:	Ah, sí. Lo que medían los pedazos.

Figura 60

Reconstrucción final del procedimiento propuesto por el Grupo A para hallar la solución del Problema 1

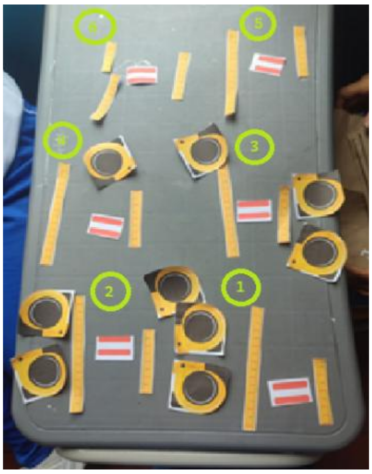


En la socialización del procedimiento completo (ver Figura 60) se reflejan procesos que corresponden a los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015), tales como el uso de la palabra “repartir” para describir el proceso de construcción de la representación de la ecuación con material concreto o “quitar” para indicar la resta de elementos comunes en la ecuación. Añadido a eso la descripción hecha por Johan “mirar cuánto le falta a este para llegar a este” integra ambos pensamientos, dado que enuncia explícitamente y desde sus palabras el método de agreación para la sustraccióna la vez que señala los metros y centímetros.

Por su parte, la reconstrucción (ver Figura 61) y explicación del procedimieto del grupo B se dio de la siguiente manera:

Figura 61

Reconstrucción inicial del procedimiento realizado con el material concreto para la solución del Grupo B al Problema 1



Majo: Estos son los valores conocidos (ver Figura 62), el de Camila que tiene 4 cm y el de María que tiene 7,5cm.

Figura 62

Representación de la comparación de los valores conocidos en el primer paso

Orientadora: ¿Y por qué lo colocaron con un igual?

Sofía: Pues no es igual, pero es para comparar y separar ambos lados (Camila y María).

Orientadora: Muy bien, ¿y qué hicieron en el siguiente paso?

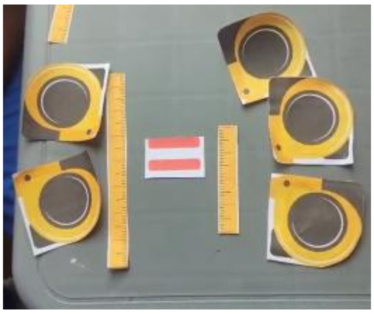
Mara: Hallamos, eh… la igualdad. No…

Sofía: Hallamos las incógnitas.

Mara: Ah. Sí. Colocamos las incógnitas del problema y comparamos (ver Figura 63).

Figura 63

Representación del enunciado del Problema 1 con material concreto



Orientadora: ¿Y en este paso qué hicieron?

Sofía: Empezamos a quitar.

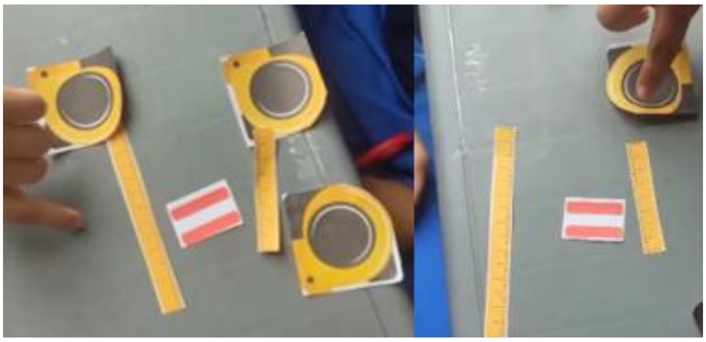
Mara: Sí, quitamos incógnitas,

Orientadora: Sí, ¿pero cómo lo hacían?

Mara: Si le quitábamos una incógnita a una le quitábamos también a la otra para que siguiera siendo igual. Así en ambos pasos (ver Figura 64).

Figura 64

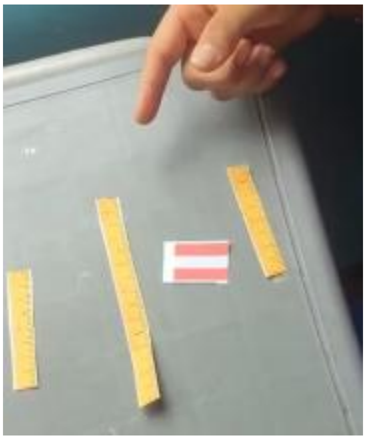
Secuencia de pasos quitando las incógnitas comunes a ambos lados



Mara: (Confundida) Y aquí (ver Figura 65) hicimos lo mismo otra vez…

Figura 65

Paso donde Mara presenta confusión



Orientadora:	A ver, revisemos ese paso. ¿Qué hicieron con el paso anterior?
Sofía:	Se quitaban estos (señala) (ver Figura 66) y se colocaba lo que recortamos para comparar.

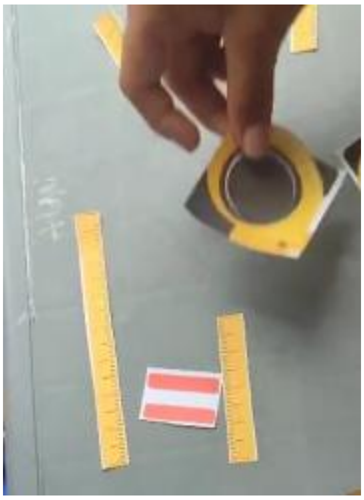
Figura 66

Elementos de la representación señalados por Sofía

Orientadora:	Bien, ¿y qué más hicieron?
Sofía:	Ah. ¿no habíamos quitado…?
Mara:	Cuatro, cuatro. Teníamos la misma cantidad de 4cm. Y le quitamos la incógnita (ver Figura 67) para que quedara igual.

Figura 67

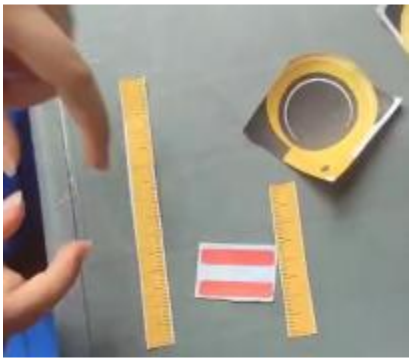
Mara intentando quitar la incógnita de la representación



Sofía: Cómo le vamos a quitar la incógnita, no ve que si le quitamos la incógnita de acá no le podemos quitar acá (ver Figura 68).

Figura 68

Sofía señalando el lado que no tiene incógnita



Sofía: Recortamos y después quitamos los iguales y después nos quedamos con el resto y la incógnita valía eso.

Orientadora: ¿Y cómo representamos eso?

Sofía: Pues estos eran los iguales (ver Figura 69) y esto fue lo que quedó (figura 70).

Figura 69

Representación de los elementos en común

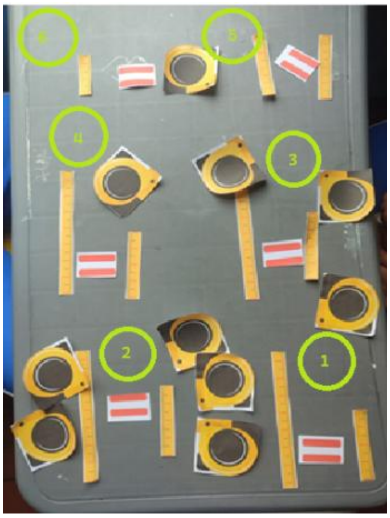
Figura 70

Representación de la igualdad entre la incógnita y la cantidad restante

En la explicación del grupo B sobre su procedimiento (ver Figura 71) con el Sistema Semiótico Concreto (Radford, 2022) se manifiestan formas de Pensamiento algebraico factual y contextual (Vergel, 2015), presentes en acciones concretas como señalar y quitar para inidicar procedimientos, así como la formulación algebraica para describir la conservación de la igualdad y la resta de elementos de la misma naturaleza mediante la oración "Cómo le vamos a quitar la incógnita, no ve que si le quitamos la incógnita de acá no le podemos quitar acá".

Figura 71

Reconstrucción del proceso realizado por el Grupo B para hallar la solución del Problema 1



Problema 2

Para el desarrollo del segundo problema el desarrollo mediante el uso del Sistema Semiótico Concreto (Radford, 2022) ocurrió de la siguiente manera:

Grupo A

Orientadora:	¿Cómo vamos con el problema?
Diana:	Ya sabemos cuánto mide cada una. La de Ana 4,5 cm y la de Carlos 7,5 cm.
Orientadora:	¿Y cómo lo hicieron?
Diana:	Pues como dos cintas de Ana más 1cm miden 10 cm, entonces cada una mide 4,5cm.
Orientadora:	¿Y cómo supieron que medían eso?
Diana:	Pues es que fue mentalmente, probamos números iguales que al sumarle 1cm dieran 10cm, entonces tenían que dar 9cm los dos, y 4,5 más 4,5 es igual a 9. Y como las de Carlos miden 3cm más pues es 7,5cm.

En este punto los estudiantes manifiestan procesos propios de los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015), puesto que prueban valores concretos y observan si cumplen o no la condición. El análisis se centra en valores particulares y, aunque implícitamente formulan la regla para hallar el valor de la incógnita, lo formulan como un caso particular sin llegar al pensamiento algebraico simbólico, puesto que no se manipula algebraicamente ni se usa las propiedades de la igualdad como transformaciones simbólicas. En este sentido, el razonamiento se basa en la verificación de valores que sean satisfactorios con el resultado, es decir, pruebas de ensayo y error, que además fueron realizadas mentalmente.

Orientadora: Bueno, eso está bien y es una manera de hallar la solución. Entonces, lo que vamos a hacer es representar esa situación con el material concreto como lo hicimos con el problema anterior, como ya ustedes tienen la respuesta pueden verificar si está bien o no. Recuerden colocar todo el procedimiento para que sepan lo que hay detrás de ese resultado. Les pregunto algo, ¿qué necesitaron para hallar la longitud de las ccintas de Carlos?

Diana: Sumar 3cm a las de Ana.

Orientadora: Muy bien. ¿Entonces qué debemos hacer primero?

Ángel: Hallar la longitud de lo de Ana.

Se da un tiempo prudente para que los estudiantes organicen el material.

Orientadora: A ver, cuéntenme qué hicieron.

Ángel: Pues 4,5 más 4,5 es 9, a ese 9 se le agrega un centímetro, entonces serían 10.

Figura 72

Primer intento del Grupo A de representar con material concreto del Problema 2

Orientadora: Sí, ¿y qué representa el lado derecho (ver Figura 72)?

Diana: Es que intentamos colocar el lado de Carlos…

Aquí se evidencia que los estudiantes intentaban seguir la estructura del problema anterior asignando un lado a cada persona, sin embargo, al encontrarse con un posible “total” y una situación que involucra la primera incógnita, se muestran confundidos al tratar de integrar las tres situaciones en una igualdad. Esto respalda el hecho de que no hay un procedimiento simbólico formulado todavía, ya que, aunque hallaron previamente el valor de cada incógnita, no representan adecuadamente la situación.

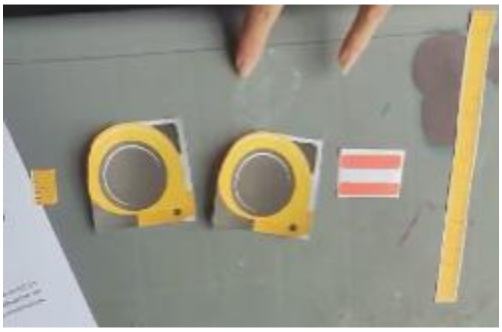
Orientadora: A ver, ustedes resolvieron primero una situación y luego la otra. Leamos el problema y vamos por partes. Si dos tiras de cinta de Ana más un centímetro mide 10cm en total. ¿Cuáles cantidades conocidas y desconocidas tenemos y cómo las podemos representar?

Ángel: Las tiras de Ana, que son dos, y un centímetro (ver Figura 73).

Diana: Y eso es igual a 10cm.

Figura 73

Primer intento de representar la ecuación de Ana con material concreto



Orientadora: Bien, entonces que representa cada cosa.

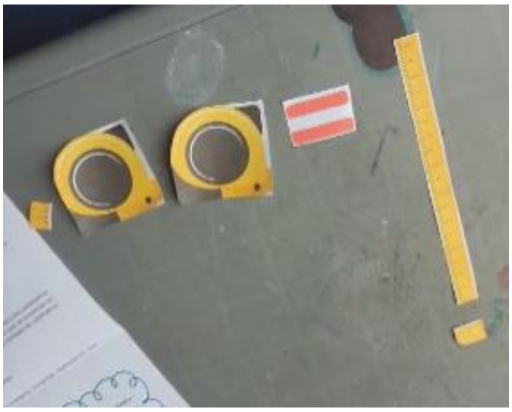
Diana: Pues el centímetro, los metros las dos incógnitas y lo otro el total.

Orientadora: Cuenta cuántos centímetros hay al final.

Diana: Ay, nueve. Eran diez. (Corrige) (ver Figura 74).

Figura 74

Corrección de la representación de la ecuación de Ana



Orientadora:	Muy bien. ¿Y qué hacemos ahora?
Ángel:	Comparar lo que tenemos en común. Pues uno y uno, los quitamos (ver Figura 75).

Figura 75

Eliminación del centímetro común en la representación

Orientadora:	Muy bien, ¿y qué nos queda?
Diana:	Que dos pedazos de cinta miden 9cm. Y como son iguales se divide por dos.
Orientadora:	Muy bien, ¿y cómo podemos dividir por 2 en la representación?
Diana:	Pues los cortamos por la mitad (ver Figura 76).

Figura 76

Representación con material concreto de la división de 9cm entre 2

Orientadora: Perfecto. ¿Y entonces cuánto mide cada pedazo?

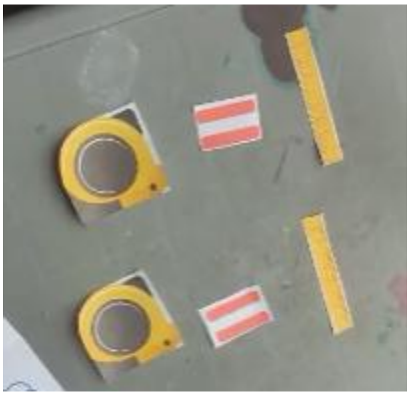
Diana: Pues 4,5 cm.

Orientadora: ¿Y cómo lo representarías?

Diana: Pues quitando uno y uno (ver Figura 77).

Figura 77

Representación de la igualdad entre cada incógnita con cada mitad de los 9cm recortada



En este momento se destaca la presencia del pensamiento algebraico contextual apoyado en el pensamiento factual (Vergel, 2015), ya que Diana en su frase "los cortamos por la mitad" relaciona la operación de dividir entre dos con la acción concreta de recortar en dos partes iguales. Además, se evidencia claridad al dividir entre dos un número no par y aceptar la naturaleza decimal del resultado.

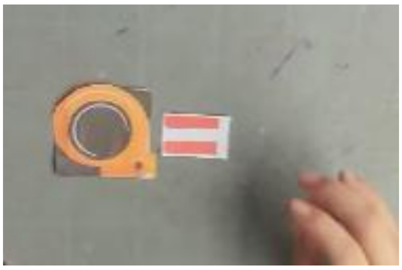
Orientadora: Muy bien. Ahora el de Carlos. ¿Qué necesitamos para hallar la longitud de las cintas de Carlos?

Diana: La medida de las cintas de María.

Orientadora:	Bien. ¿Las cintas tienen longitudes iguales o diferentes?
Diana:	Diferentes.
Orientadora:	Muy bien. ¿Entonces usamos el mismo color para las incógnitas o no?
Diana:	No, porque son diferentes.
Orientadora:	Muy bien, entonces, una incógnita puede representar otros valores en otro problema e incluso en el mismo, es decir, podemos utilizar la misma representación o símbolo para representar otras cantidades, pero como en este caso estamos en el mismo problema y vamos a utilizar el valor de la incógnita anterior para hallar la medida de la longitud de las cintas de Carlos, es mejor usar una representación diferente para indicar que representa cantidades distintas. Lo importante es que sean conscientes de lo que representa cada incógnita.
Diana:	Pues aquí sería la cinta de Carlos y el igual (ver Figura 78).

Figura 78

Representación de la incógnita de Carlos



Orientadora:	Muy bien, ¿y qué debemos usar para saber cuánto miden las cintas de Carlos?
Diana:	Lo que miden las de Ana más 3cm.
Orientadora:	Sí, ¿y cómo representamos eso?
Diana:	Pues colocamos lo que miden las de Ana y 3cm que son 7,5cm (ver Figura 79).

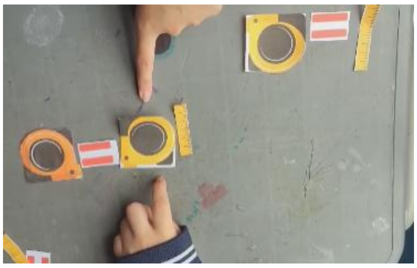
Figura 79

Sustitución de la longitud de la cinta de Ana en la incógnita de Carlos

Orientadora:	Muy bien, ¿y cómo lo reprsentaríamos si todavía no supiéramos la medida de las cintas de Ana?
Diana:	Con la incógnita de la cinta de Ana.
Orientadora:	Perfecto, ¿y qué representa cada cosa?
Diana:	La naranja lo de Carlos, la amarilla cuánto vale la cinta de Ana y los 3cm de más (ver Figura 80).

Figura 80

Representación de la incógnita de Ana dentro de la incógnita de Carlos



Se le pide a los estudiantes que reconstruyan el proceso completo (ver Figura 81 y Figura 82).

Figura 81

Representación del procedimiento para hallar el valor de la incógnita de Ana

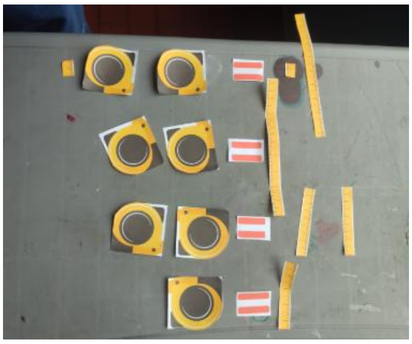


Figura 82

Representación del procedimiento para hallar el valor de la incógnita de Carlos

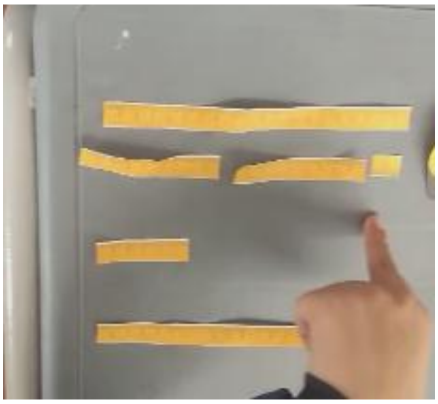
En este proceso de sustitución los estudiantes, además del pensamiento factual (Vergel, 2015), ampliamente influenciado por el uso del material concreto, expresan ideas profundamente relacionadas con el análisis relacional, el cual está sujeto a la forma de Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015), ya que reconocen cómo se vinculan las cantidades y las incógnitas. Evidencia de esto es la frase “lo que miden las de Ana más tres”, así como la respuesta de que son longitudes diferentes y su representación concreta como una incógnita dentro de otra incógnita. Estas ideas y acciones comprenden el desarrollo de la capacidad de ver la dependencia entre cantidades.

Grupo B

Orientadora: A ver, ¿qué han hecho?

Figura 83

Primera representación planteada por el Grupo B para hallar la solución del Problema 2



Nayla: Pues arriba los 10 cm que son en total, luego el centímetro que me dan y pues me quedan 9cm entonces son 4,5 y 4,5. Luego eso más 3cm para los de Carlos y entonces miden 7,5cm (ver Figura 83).

En este procedimiento se exponen los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015) ya que la estudiante se apoya en material concreto mediante acciones de conteo, partición y uso de valores numéricos particulares. Sin embargo, el razonamiento no es solo aritmético: se observa análisis relacional, ya que la estudiante comprende que el total al que se iguala la primera ecuación se reduce en 1 cm, que el sobrante debe dividirse en dos partes iguales, y que para la solución de Carlos se adicionan 3 cm más a la longitud de la cinta de Ana. Esto muestra que comprende la relación entre las cantidades, no solo los resultados.

Orientadora: A ver, la respuesta y el proceso son válidos, están bien. Ahora, vamos a intentar representándolo identificando las cantidades conocidas y desconocidas de la situación. ¿Cómo representábamos esas cantidades?

Sofía: Pues aquí no conocíamos dos, entonces colocamos dos metros (ver Figura 84).

Figura 84

Primera representación de las incógnitas del Problema 2 por parte del Grupo B

Orientadora:	A ver, ¿qué significa que usemos dos metros de diferente color?
Sofía:	Que son diferentes.
Orientadora:	Sí, ¿y en este caso estamos representando incógnitas diferentes?
Sofía:	Ah, no, porque miden lo mismo, deben ser del mismo color (ver Figura 85). Eso más un centímetro.

Figura 85

Representación de las incógnitas de Ana con el mismo color y el centímetro agregado

Orientadora:	Muy bien, ¿y eso a cuánto es igual?
Sofía:	Igual a 10cm.
Orientadora:	¿Y por qué es igual a 10?
Mara:	Porque el problema dice que dos cintas de Ana más 1cm miden 10cm, entonces las dos cintas miden 9cm y cada una mide 4,5cm.
Orientadora:	Muy bien, ¿y cómo representamos ese procedimiento?

Las estudiantes ubican los metros y centímetros que corresponden a la ecuación de Ana (ver Figura 86).

Figura 86

Representación de la ecuación de Ana

Orientadora:	Listo, ¿qué sigue?
Mara:	Mirar lo que sigue igual.
Sofía:	Pero no hay nada igual.
Mara:	Sí hay. Ambos tienen 1cm en común (ver Figura 87).

Figura 87

Mara señala el centímetro del lado de las incógnitas de Ana

Orientadora:	Muy bien, si tenemos 10cm a un lado eso quiere decir que tenemos 1cm 10 veces. ¿Cómo lo podemos retirar?
Sofía:	Ah, sí, sí. Le cortamos uno aquí (ver Figura 88) y los quitamos.

Figura 88

Sofía señala que debe cortarse un centímetro del lado derecho del igual para eliminar un centímetro de cada lado

Orientadora:	Muy bien, ¿y ahora qué nos queda?
Sofía:	Que dos pedazos miden 9cm.
Orientadora:	¿Y entonces cómo sabemos cuánto mide uno?
Mara:	Quitamos una incógnita y al otro lado le quitamos la mitad (ver Figura 89).
Sofía:	Sí, lo recortamos.

Figura 89

Mara retira una incógnita y una de las mitades de los 9cm

Orientadora:	¿Y eso qué quiere decir?
Mara:	Que cada cinta de Ana mide 4,5cm.
Orientadora:	Bueno, ¿y ahora cómo averiguamos la medida de las cintas de Carlos?
Mara:	Con la medida de las cintas de Ana más 3cm.
Sofía:	Pues así (ver Figura 90).

Figura 90

Sofía iguala una incógnita con la longitud de la cinta de Ana más 3cm

Orientadora: Sí, ¿y qué representa el metro ahí?

Sofía: Lo de Carlos.

Orientadora: Muy bien, entonces es importante que sean conscientes de que aunque se vea igual representa una cantidad diferente, como es el mismo problema sería mejor usar otro color, porque por ejemplo, ¿cómo representarían eso si todavía no supieran lo que mide cada cinta de Ana?

Sofía: Ah, pues sí, ahí toca usar otro color. Entonces el naranja para Carlos y el amarillo para Ana.

Mara: Y más 3cm de Carlos (ver Figura 91).

Figura 91

Mara ubica los 3cm adicionales al lado de la incógnita de Carlos

Orientadora: ¿Estás segura que va a ese lado?

Mara: Ah, no. Va al otro (ver Figura 92).

Figura 92

Mara mueve los 3cm al lado de la incógnita de Ana

Orientadora: ¿Por qué?

Mara: Porque tienen una cantidad igual… o sea, tienen dos cantidades desconocidas, pero la de Ana es más 3.

Orientadora: A ver, ¿cuál de las dos cintas es más larga?

Nayla: Pero sí tienen la misma cantidas, solamente que le suman 3cm al de Carlos.

Mara: Son más largas las de Carlos.

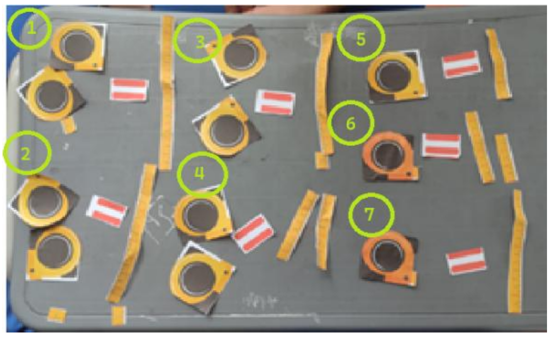
Orientadora: Sí, ¿pero sí entienden por qué se suman al lado de Ana y no al de Carlos? A ver, si yo soy 3cm más alta que Isabella, ¿qué debo hacer con la altura de Isabella para que me alcance?

Sofía: Sumarle 3cm. Ah, pues sí, se le suman a las de Ana para que mida lo mismo que la cinta de Carlos.

Orientadora: Muy bien. Entonces reconstruyamos todo el proceso.

Figura 93

Representación del procedimiento para hallar el valor de las incógnitas de Ana y Carlos



Al igual que en el grupo A, ocurren procesos de reconocimiento de la dependencia entre las incógnitas, los cuales se explican verbalmente y se ejecutan mediante acciones concretas. Además, Sofía utiliza el ejemplo explicado y lo generaliza para el uso en la comprensión de la solución del problema resuelto. Estas expresiones ubican este procedimiento en los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel 2015).

4.5.2 Momento 2: Representación con el SSI

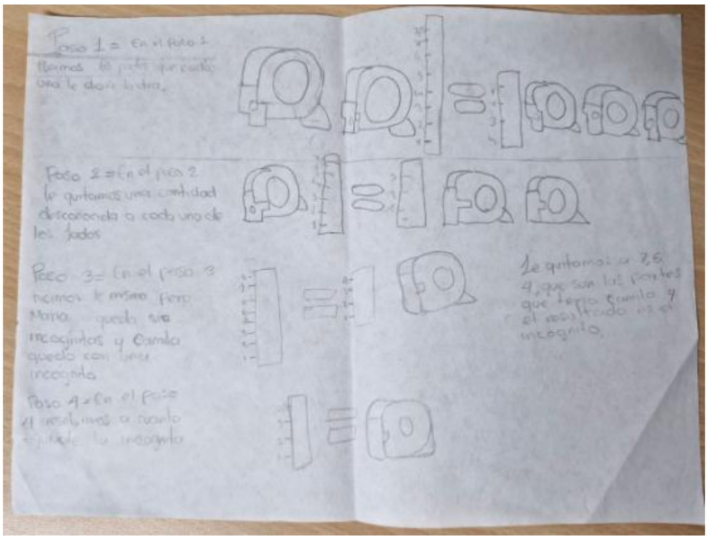
Una vez propuesta la representación con materiales concretos, se lleva a cabo la parte de traducir a íconos y/o dibujos que representen la misma situación, pero que favorezca un manejo más sencillo y ordenado de los procesos realizados en la fase anterior. De igual modo se prestan las orientaciones necesarias durante el transcurso de la actividad.

Problema 1

Grupo A

Figura 94

Representación del Problema 1 mediante dibujos y descripciones del procedimiento



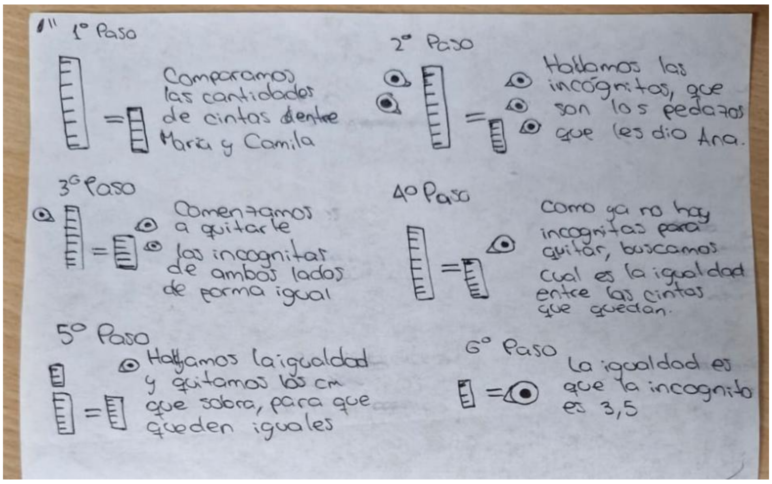
En la representación del primer problema mediante el Sistema Semiótico Icónico (SSI) (Radford, 2022) (ver Figura 94), los estudiantes del grupo A describen la situación mediante dibujos y explicaciones paso a paso, lo cual permite evidenciar diferentes formas de pensamiento algebraico que se presentan simultáneamente. En primer lugar, se aprecia la presencia del Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015), dado que los estudiantes reproducen en el papel lo que se hacía con el material concreto.

Sin embargo, el avance más significativo se da en el ámbito del Pensamiento algebraico Contextual (Vergel, 2015), ya que se reconoce la necesidad de preservar la igualdad al retirar la misma cantidad de incógnitas o constantes en ambos lados. Se describe, con apoyo de los dibujos, el cambio que provocan estas acciones en los lados de la igualdad correspondientes a María y Camila especificando que "María queda sin incógnitas y Camila con una incógnita". Este razonamiento evidencia un análisis relacional, propio de esta forma de pensamiento algebraico. Finalmente, se observan rasgos de un pensamiento simbólico inicial, al incorporar el signo "=" en cada paso y al pasar de nombrar la incógnita como "cantidad desconocida" a llamarla explícitamente "incógnita" reconociéndola como objeto matemático manipulable, lo cual anticipa la formalización en lenguaje algebraico.

Grupo B

Figura 95

Representación del Problema 1 mediante íconos y descripciones del procedimiento



Por su parte, las estudiantes del grupo B, en la producción realizada mediante el Sistema Semiótico Icónico (SSI) (Radford, 2022) (ver Figura 95) se observa, como en el grupo anterior, la representación del procedimiento de resolución del problema utilizando dibujos de cintas y metros, aunque mucho más simples en detalles y tamaño acercándolos más al concepto de íconos, para señalar las incógnitas y los valores constantes.

Además del Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015) evidenciado en la comparación directa de las longitudes representadas gráficamente, sobresale el Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015). Como prueba, las estudiantes justifican sus procedimientos partiendo de la necesidad de comparar las cantidades conocidas y desconocidas, caracterizando la incógnita y estableciendo su relación con el contexto del problema como “los pedazos que les dio Ana”. Además, explicitan que la igualdad se conserva siempre que se retiren cantidades equivalentes en ambos lados, lo cual muestra un análisis relacional. Este razonamiento se describe en expresiones escritas como “comenzamos a quitarle las incógnitas de ambos lados de forma igual” y “buscamos cuál es la igualdad entre las cintas que quedan”, en donde se reconoce la identificación de elementos comunes que pueden eliminarse como medio para hallar la solución de la incógnita.

Problema 2

Grupo A

Figura 96

Representación de la ecuación de Ana para el Problema 2 mediante dibujos y descripciones del procedimiento

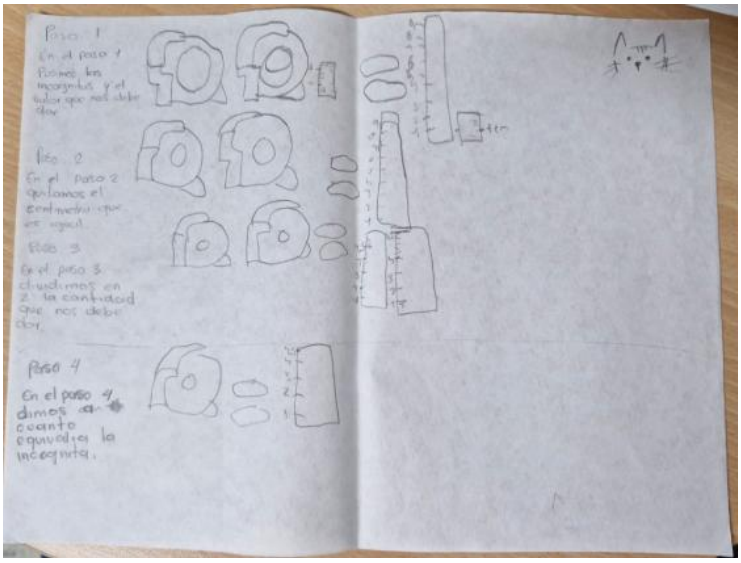
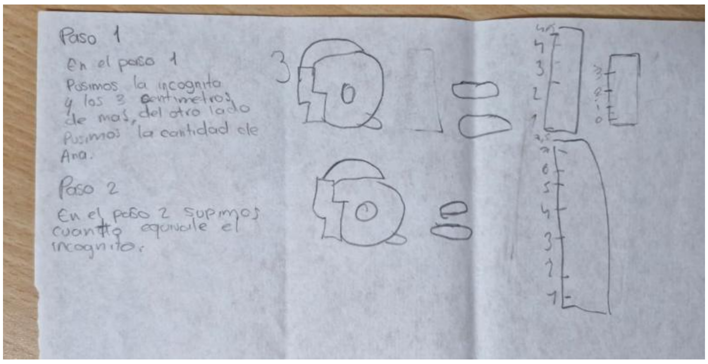


Figura 97

Representación de la ecuación de Carlos para el Problema 2 mediante dibujos y descripciones del procedimiento



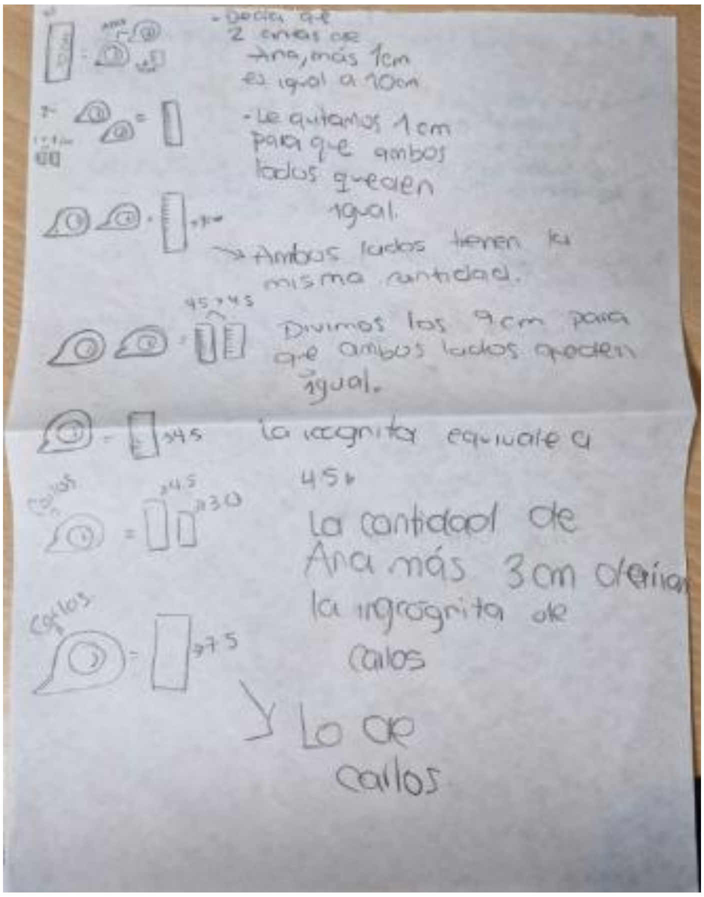
Para el problema 2, el grupo A realiza una división del procedimiento en dos partes. El procedimiento para la primera parte es similar al del primer problema, caracterizado por la presencia de las formas de Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015) en procesos de registro gráfico, utilizando dibujos de cintas y anotaciones escritas. Del mismo modo, la generalización del procedimiento de quitar elementos comunes en ambos lados para mantener la igualdad manifestado en la expresión "quitamos el centímetro que es igual".

No obstante, la atención en este problema se centra en la segunda parte, la cual corresponde a la sustitución. Se observa que los estudiantes, a diferencia de lo ejecutado en la representación gráfica, no utilizan colores diferentes para las variables, por lo que se les preguntó qué representaban cada una. En el primer paso de la parte de la sustitución (ver Figura 97) el dibujo del metro representa la incógnita de Ana más los 3cm, es decir lo equivalente a la incógnita de Carlos, bajo el intento de representar la longitud de la cinta de Ana primero como incógnita y luego su solución dentro del problema de Carlos sin realizar una doble igualdad. La escritura del número 3 en lugar de una cinta con 3cm aunque se encuentra dentro de los símbolos alfanuméricos, se debió a una confusión al representar la triple equivalencia (Cinta de Carlos= CintaAna+3cm=4,5cm+3cm). Esto evidencia el análisis relacional detrás del procedimiento, dado que reconocen la dependencia entre las incógnitas, aunque también se muestran dificultades para representar la sustitución incluyendo una incógnita dentro de la otra. Los procesos anteriormente descritos reafirman la dominancia del Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) en el Sistema Semiótico Icónico (Radford, 2022).

Grupo B

Figura 98

Representación del procedimiento para resolver el Problema 2 mediante dibujos y descripciones del procedimiento



Respecto al grupo B, a diferencia del grupo A, su representación (ver Figura 98) se entendió como un único proceso. Como en las interpretaciones anteriores con el Sistema Semiótico Icónico (SSI) (Radford, 2022), sobresale la presencia del Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015). En función de este se destacan las frases “Ambos tienen la misma cantidad” y “la cantidad de Ana más 3cm darían la incógnita de Carlos”. La primera como una frase clave para justificar su división entre dos para hallar el valor de la longitud de la cinta de Ana, mientras la segunda corresponde a una formulación algebraica muy acertada que describe el proceso de sustitución como el uso del valor de una incógnita dentro de otra. Además, a diferencia de lo observado en el grupo A, este grupo realiza una distinción explícita entre las incógnitas nombrando el ícono de Carlos para señalar el cambio de incógnita.

4.5.3 Momento 3: Planteamiento y solución de la ecuación

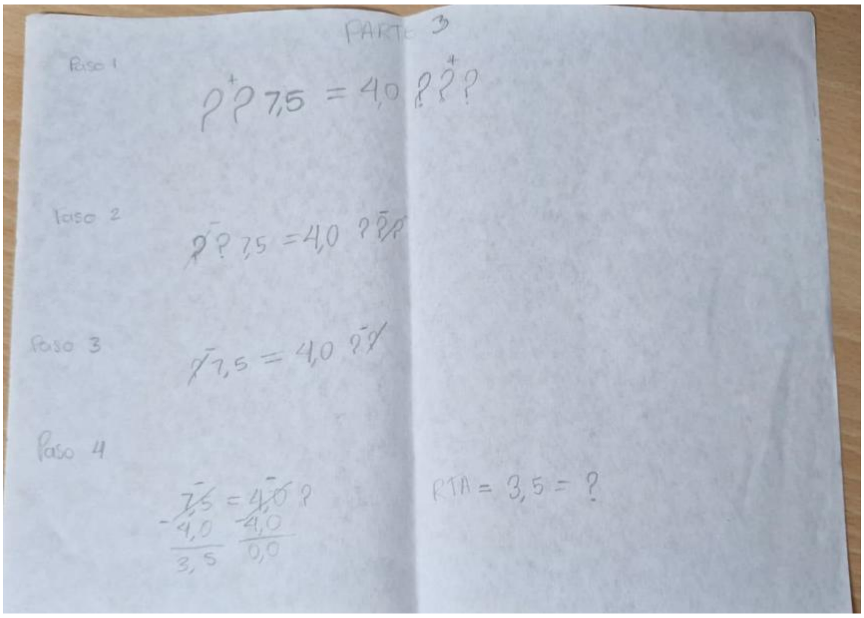
En esta última fase se busca que los estudiantes abandonen las representaciones concretas e icónicas, de manera que pueda abstraer la información y la traduzca a un lenguaje algebraico. Esto puede incluir nombrar incógnitas, constantes y/u operaciones a fin de llevar el enunciado a una "ecuación". Posteriormente, el estudiante puede realizar los procedimientos algebraicos adecuados para dar una solución.

Problema 1

Grupo A

Figura 99

Planteamiento simbólico del procedimiento para resolver el Problema 1 (Grupo A)

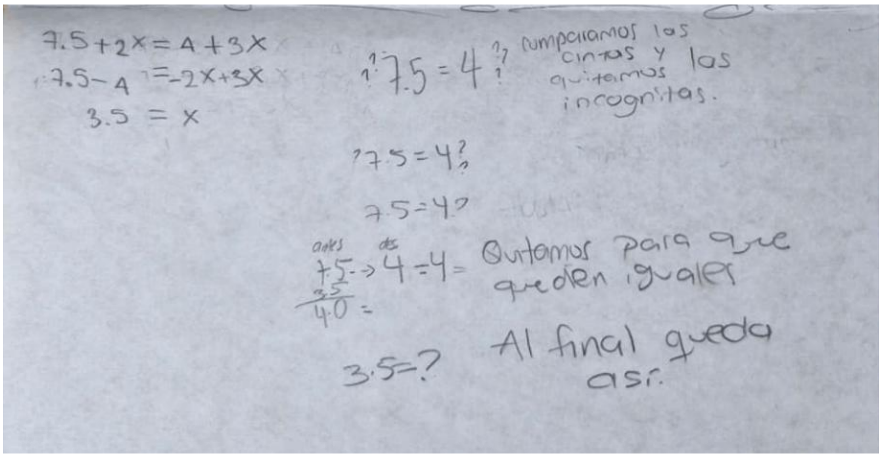


En este tercer momento, orientado al planteamiento y solución de la ecuación desde un lenguaje algebraico, se observa en la representación del grupo A (ver Figura 99), que impera el Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015), puesto que se ve reflejado en el uso de signos para indicar las operaciones de suma y resta, el igual y símbolos como representación de las incógnitas. Aunque usualmente las incógnitas se denotan por letras según los símbolos alfanuméricos del álgebra (Radford, 2010), la representación de estas como signos de interrogación es una evidencia de la trascendencia de las formas de Pensamiento algebraico factual y contextual (Vergel, 2015) al Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015) al traducir sus expresiones y representaciones realizadas en los Sistemas Semióticos Concreto (SSC) e Icónico (SSI) (Radford, 2022) a signos y/o símbolos de carácter algebraico.

Grupo B

Figura 100

Planteamientos simbólicos del procedimiento para resolver el Problema 1 (Grupo B)



Por su parte, el grupo B plantea dos representaciones de la ecuación. La izquierda (ver Figura 100), planteada por Mara, quien ya había tenido contacto previo con ecuaciones, evidencia manejo apropiado de la escritura de los símbolos alfanuméricos del álgebra (Radford, 2010). Sin embargo, se ve que se aleja un poco de los procedimientos realizados en las primeras representaciones, tendiendo a la regla de dejar términos de la misma naturaleza (incógnitas o constantes) a cada lado del igual, lo que sugiere que este ha sido el procedimiento aprendido en encuentros preliminares. Entre tanto, a la derecha (ver Figura 100) se observa una representación similar a la utilizada por el grupo A, además conserva características del

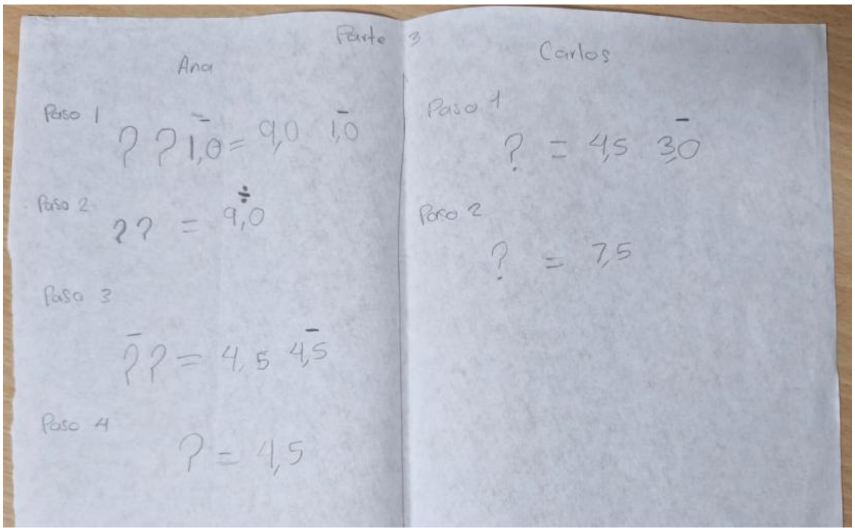
Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) como la descripción de ideas mediante frases como recursos de comprensión.

Problema 2

Grupo A

Figura 101

Planteamiento simbólico del procedimiento para resolver el Problema 2 (Grupo A)



En el segundo problema, el grupo A efectúa un procedimiento utilizando símbolos similares a los usados en el primer problema distribuidos en dos columnas, de modo que un lado corresponde al procedimiento ejecutado para hallar el valor de la incógnita de Ana y el otro al hecho para solucionar el problema de Carlos. Sin embargo, tiende a indicar únicamente la operación, sin especificar cuánto se resta (Paso 1) (ver Figura 101) o entre cuánto se divide (Paso 2) (ver Figura 101).

Por otra parte, en el lado de Carlos (ver Figura 101) se usa el mismo signo de pregunta para representar la incógnita, este es un aspecto fundamental del Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015), puesto que los estudiantes reconocen la representación de la incógnita como un símbolo que puede asumir diferentes valores según el contexto del problema. Aun así, presenta un error de escritura, ya que, aunque son conscientes de que la operación llevada a cabo es una suma, el símbolo usado corresponde a la resta.

Grupo B

Figura 102

Planteamiento simbólico del procedimiento para resolver el Problema 2 (Grupo B) I

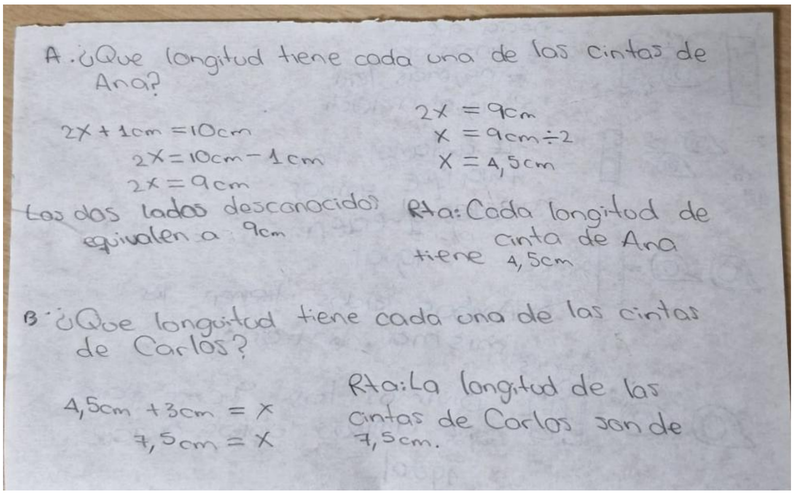
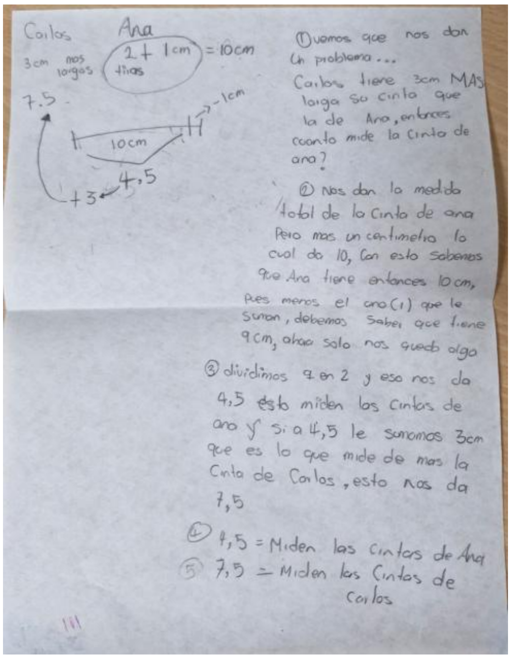


Figura 103

Planteamientos simbólicos del procedimiento para resolver el Problema 1 (Grupo B) II



El grupo B realiza dos planteamientos de la ecuación, lo que evidencia una interpretación diferente entre las integrantes del grupo, el primero (ver Figura 102), aunque es correcto en ambas situaciones, se ve influenciado por el trato preliminar de Mara con las ecuaciones. Como muestra de esto, aunque se evidencia comprensión del procedimiento, se omite la regla de realizar la misma operación a ambos lados como medio para conservar la igualdad, proceso que se estuvo llevando a cabo en las dos representaciones anteriores (SSC y SSI) (Radford, 2022), considerando que este momento corresponde a la traducción algebraica de estas mismas representaciones.

Mientras tanto, la segunda representación (ver Figura 103) integra los Pensamientos algebraicos contextual y simbólico (Vergel, 2015) ya que se relacionan las palabras con las que se argumenta el procedimiento con una representación simbólica, mediante el uso de números y signos de suma; y gráfica, representando la longitud como un "segmento". Para este caso el Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) sigue siendo una parte importante en la interpretación del procedimiento.

4.6 Fase 3: Análisis de Datos

Una vez implementado el instrumento, se consideran las tres categorías de pensamiento propuestas por Radford (2010) y Vergel (2015). En este apartado se analizan las diferentes manifestaciones de estas formas de pensamiento por parte de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas propuestas. Para esto se analizan las actitudes y respuestas de los estudiantes durante las sesiones, así como sus elaboraciones escritas y concretas en cada problema. Este análisis permite evaluar la profundidad y características de su comprensión, identificando patrones y variaciones en sus enfoques frente a las tareas propuestas.

Las evidencias recolectadas en los tres momentos de la implementación dan cuenta de una transición progresiva entre las tres formas de pensamiento algebraico propuestas por

Vergel (2015) desde las ideas de Radford (2010): factual, contextual y simbólico. Dado que el primer momento se fundamenta en el Sistema Semiótico Concreto (SSC) propuesto por Radford (2022), predominan los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015), cuyos medios semióticos de objetivación (Radford, 2003) se movilizan a través de acciones concretas (mover, señalar, quitar, medir, recortar), y la formulación algebraica mediante ideas explícitas sobre los proccedimientos. Puesto que la cualidad primordial de este primer momento consiste en la representación de ecuaciones con material concreto acorde al contexto de la situación, se favoreció la identificación de gestos, movimientos, percepciones, palabras, así como el diálogo reflexivo promoviendo la argumentación de los procedimientos realizados.

En segundo lugar, en el momento de representación de la ecuación mediante el Sistema Semiótico Icónico (SSI) (Radford, 2022), los estudiantes reproducen la situación mediante dibujos y explicaciones escritas. Aunque continúa la presencia del Pensamiento algebraico factual (Vergel, 2015), el Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) se vuelve imperante, ya que los estudiantes explicitan las relaciones entre cantidades (análisis relacional), se justifica la conservación de la igualdad y se desarrollan procedimientos equivalentes de manera secuencial (restar, dividir, comparar) a la vez que los describen desde sus propias formulaciones algebraicas. Al mismo tiempo, emergen rasgos de un pensamiento simbólico inicial, reflejados en el uso del signo igual y en la referencia explícita a la incógnita como objeto matemático, aunque todavía sin una notación algebraica convencional.

Finalmente, en el tercer momento correspondiente al planteamiento y búsqueda de la solución desde un enfoque simbólico, como es de esperarse, es mayoritaria la presencia del Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015) puesto que traza el inicio de la escritura con notación algebraica, transitando desde las representaciones con material concreto e íconos, al uso de signos y símbolos para indicar operaciones e incógnitas. No obstante, se identificó un amplio apoyo en el Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) como herramienta para comprender y justificar los procedimientos realizados.

A la vez, las respuestas a la entrevista (ver Apéndice D) realizada a los estudiantes muestran que la implementación orientada por los Sistemas Semióticos Concreto e Icónico (Radford, 2022) favoreció el aprendizaje**,** los estudiantes valoraron cómo el material y los dibujos les permitieron comprender la noción de incógnita y la conservación de la igualdad, antes de llegar a la notación simbólica. En este punto, se destaca la importancia de la orientación sobre el uso de cada uno de objetos del material concreto, puesto que Nayla, quien no asistió a la primera implementación donde se realizó la explicación previa, presentó dificultades para comprender su uso por más que sus compañeras le explicaron. Aunque existieron dificultades iniciales en la interpretación de los materiales, la mayoría de los estudiantes coincidió en que la metodología les permitió entender mejor que en las clases habituales mostrando así un impacto positivo de los medios semióticos de Objetivación (2003) en la construcción progresiva del pensamiento algebraico.

En síntesis, el recorrido entre los Sistemas Semióticos SSC y SSC (Radford, 2022) previo a la notación algebraica, muestra una transición entre las tres formas de pensamiento algebraico propuestas por Vergel (2015): factual, contextual y simbólico. Sin que una elimine a las demás, las formas de pensamiento ocurren simultáneamente, aunque con notable dominancia de algunas según los medios semióticos de Objetivación (2003) utilizados. Como resultado, las diferentes formas de pensamiento algebraico que emergieron durante el desarrollo de la implementación ocurrieron en concordancia con las competencias que Kieran (citado por Vergel y Rojas, 2018) destaca como propias del pensamiento algebraico: establecer relaciones entre cantidades, la comprensión del comportamiento de diferentes elementos matemáticos, resolver problemas y justificar razonamientos, entre otras.

5. Conclusiones

Este proyecto analiza bajo el enfoque de la teoría de la Objetivación (Radford, 2021) la actividad que desarrolla un grupo de estudiantes cuando abordan tareas que involucran ecuaciones de primer grado. Esto permite aportar en la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas relacionada con el desarrollo de pensamiento algebraico temprano, enfocado en fomentar maneras de razonar más que la memorización o mecanización de algoritmos. Este trabajo incluye la implementación de las tareas con un grupo de estudiantes de séptimo grado, que pretende ampliar la perspectiva sobre el pensamiento algebraico, en particular sobre la formulación y tratamiento de ecuaciones de primer grado.

En este sentido, el estudio explora las diferentes formas de pensamiento algebraico de los estudiantes de séptimo grado (entre 12 y 15 años) al resolver ecuaciones de primer grado. Esto promueve la comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje y permite identificar falencias en este mismo; lo que puede favorecer la creación de estrategias que permitan mejorar la forma en que se trabaja este tema en las aulas de clase, considerando que es fundamental para potenciar formas de razonamiento más complejas que se espera promover en grados posteriores.

Los tres momentos de la implementación evidenciaron una progresión en el desarrollo de las formas de pensamiento algebraico de los estudiantes, transitando de los Pensamientos algebraicos factual y contextual (Vergel, 2015) en el uso del Sistema Semiótico Concreto (SSC) (Radford, 2022), hacia un predominio del Pensamiento algebraico contextual (Vergel, 2015) en el Sistema Semiótico Icónico (SSI) (Radford, 2022) y, finalmente, hacia la consolidación del Pensamiento algebraico simbólico (Vergel, 2015) con el trabajo algebraico. No obstante, el diseño de la actividad puede fortalecerse si se incluyen representaciones intermedias como tablas, diagramas o rectas numéricas que ayuden a ampliar las formas de visualizar e interpretar la relación entre cantidades.

Las entrevistas confirmaron que el uso de materiales y representaciones gráficas facilitó la comprensión de la incógnita y la igualdad, ofreciendo un aprendizaje más significativo que las clases habituales. Además, la importancia de la orientación docente como mediador de la actividad y promotor del diálogo argumentativo. Sin embargo, dada la necesidad de emplear un tiempo considerable para un adecuado desarrollo de los momentos de la actividad, es preciso cuestionarse sobre las estrategias que podrían implementarse para llevar a cabo esta metodología a aulas con grupos numerosos de estudiantes, sin descuidar el análisis detallado de las formas de pensamiento algebraico emergentes durante la misma.

En conjunto, las tres formas de pensamiento algebraico coexistieron de manera complementaria, mostrando que los Medios Semióticos de Objetivación (Radford, 2003) actúan como mediadores clave en la construcción progresiva de la comprensión algebraica.

Referencias Bibliográficas

Díaz, V. & Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 45(1), 33-41

Díaz, V. & Poblete, A. (2019). Competencias matemáticas: Desempeño y errores en la resolución de problemas de límites. *Paradigma*. 40(1), 358-383. http://funes.uniandes.edu.co/16340/

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp. 390-419). New York.

Kieran, C. (1996). *The changing face of school algebra.* En C. Alsina, B. Álvarez, B. R. Hodgson; C. Laborde y A Pérez. (Eds.). 8th International Congress on Mathematical Education: Selected. Lectures. (pp. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fé de Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Santa Fé de Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Postprimaria 7° Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Recordando mi primaria.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Secundaria Activa, Matemática Grado Noveno.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: matemáticas.* Santa Fé de Bogotá, Colombia.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares 2000*. Reston VA: NCTM. Traducción M. Fernández (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales) 2003.

Palarea, M.M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral. Servicio de publicaciones.

Quezada, W., & del Río, M. (2022). Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios Pedagógicos*, 48(2), 9-34.

Radatz, H. (1979). *Error Analysis in Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education.* 10(3), 162-172. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/748804

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical thinking and learning*. 5(1), 37-70.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education.* 12(1), 1-19.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. 303-322. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2021). *Teoria da objetivação: uma perspectiva Vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática.* (Tradução de B. Morey e S. Gobara). Livraria da Física.

Radford, L. (2022). Álgebra Temprana: La simplificación de ecuaciones. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática*. 6(1), 1-14.

Socas, M. & Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en álgebra escolar. *UNO: revista de didáctica de la matemática*, (14), 7-24.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (ed.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Horsori

Tettay, S; Pulgar, M y Rojas, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, 15(2), 193-205. Doi: http://dx.doi.org/10.21676/23897856.3249

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*. 9(3), 193-215.

Vergel, R., & Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Doctorado Interinstitucional en Educación. Énfasis. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ward, S; Monjardín, P & Madrid, O. (2019). *¿Errores o dificultades de los estudiantes de bachillerato en la resolución de ecuaciones lineales?* XV congreso nacional de investigación educativa. Acapulco, Guerrero, México.

Apéndices

Apéndice A. Páginas del formato de la evaluación diagnóstica

Nombre:

Fecha:

1. Si se tiene la expresión $4 + 5 = 8 + 1$, determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifica.

- Al sumar un número entero a ambos miembros de una igualdad, esta se conserva.

- Al restar un número entero a ambos miembros de una igualdad, esta se conserva.

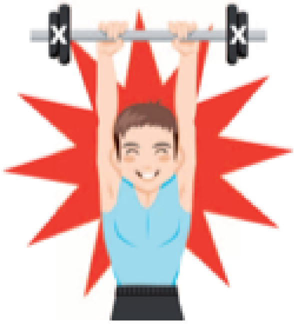
2. Escribe una ecuación que represente cada situación.

- La edad de Julia aumentada en 13 años es 35.

- Si a la estatura de Pablo se le disminuyen 15 cm, se obtiene 148 cm.

- La temperatura inicial de una ciudad era 13 °C. Si esta varió algunos grados y quedó en -4 °C

3. En una competencia un pesista levantó en su primer intento 90 kg en total, la barra pesa 10 kg y usó dos discos del mismo peso, como se ilustra en la figura.



Propongan algunos pesos para los discos y verifiquen que el peso de la barra más el peso de los dos discos sea 90 kg.

¿Cuál debe ser el peso de cada disco?

4. En el segundo intento el pesista desea levantar un peso total de 115 Kg. utilizando la misma barra de 10 kg, los asistentes han sustituido los dos discos usados anteriormente por cuatro discos del mismo peso. Para averiguar el peso de cada disco desarrollen la siguiente actividad:

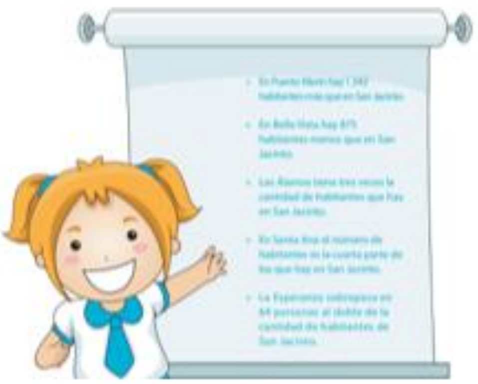
- Identifiquen las incógnitas y los valores conocidos

- Completen la información de la siguiente tabla:

Equivalencia del lenguaje cotidiano y el matemático

Lo qué se representa	Cómo se representa
Peso de cada disco	
Número de discos	
Peso de la barra	
Peso total	

5. San Jacinto es un pequeño pueblo rural que cuenta con 2.568 habitantes. En su alcaldía se puede averiguar el número de habitantes de las poblaciones cercanas, porque en la cartelera principal se encuentre la información. Veamos la cartelera:



Completen la siguiente tabla, con base en la información de la cartelera.

Pueblo	Número de habitantes
San Jacinto	2.568
Puerto Marín	
Bella Vista	
Los Álamos	
Santa Ana	
La Esperanza	

Indiquen las operaciones que realizaron para calcular el número de habitantes de cada pueblo.

Nota. Adaptado de Postprimaria 7° Matemáticas (MEN, 2010) y Recordando mi primaria (MEN, 2010).

Apéndice B. Formato de la tarea para la recolección de datos

ACTIVIDAD

OBSERVACIONES

- Desarrolle las actividades en el orden indicado.
- Cada parte de la actividad debe contar con su debida justificación (oral o escrita) y procedimiento.

INSTRUCCIONES

Parte 1:
Considerando que los metros representan las cantidades desconocidas y los centímetros los valores conocidos. Represente con este material las situaciones que se presentan en la nube e intente dar solución colocando dentro de los metros la cantidad de centímetros que corresponde.

Parte 2:
Dibuje el procedimiento que realizó en la actividad anterior.

Parte 3:
¿Cómo representaría en el lenguaje algebraico (números, incógnitas, operaciones) este procedimiento?

PROBLEMA 1

María y Camila están decorando el salón de séptimo con tiras de cinta. María traía 7.5 cm de cinta y Camila 4 cm. Para que las dos tuvieran la misma cantidad de cinta, Ana le da 3 pedazos de cinta a Camila y 2 pedazos de cinta a María, cada pedazo de cinta que les da Ana tiene la misma longitud. ¿Cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe Camila? ¿Cuál es la longitud de cada pedazo de cinta que recibe María?

PROBLEMA 2

Carlos y Ana quieren ayudar a decorar también. Cada cinta de Carlos es 3 cm más larga que cada cinta de Ana. Si dos tiras de cinta de Ana más 1cm miden 10cm en total. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué longitud tiene cada una de las cintas de Ana?
b) ¿Qué longitud tiene cada una de las cintas de Carlos?

Apéndice C. Preguntas realizadas en la entrevista a los estudiantes

Entrevista

1. ¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?
2. ¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso? ¿Qué hiciste para resolverlo?
3. ¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante? ¿Por qué?
4. ¿Cómo fue la colaboración al trabajar con tus compañeros en esta actividad?
5. ¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema? ¿Puedes dar un ejemplo?
6. ¿El uso del material concreto (como los metros y centímetros) te ayudó a entender mejor la situación? ¿Por qué?
7. ¿Cómo pasaste de usar materiales o dibujos a escribir con números y símbolos?
8. ¿En qué momento sentiste que comenzaste a entender lo que estaba pasando en el problema?
9. ¿Hubo algo que dijiste, señalaste o escribiste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolverlo?
10. ¿Qué crees que aprendiste con esta actividad?
11. ¿Cómo describirías lo que es una ecuación o una incógnita a alguien que no la conoce?
12. ¿Te sentiste diferente al aprender de esta forma (usando materiales y discutiendo) comparado con otras clases?

Apéndice D. Transcripciones de las entrevistas a los estudiantes

Johan (comunicado personal, 2025)

Orientadora:	¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?
Johan:	Bien, contento, alegre.
Orientadora:	¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?
Johan:	No, todo estaba fácil. Al principio hice algunas preguntas.
Orientadora:	¿Y qué hiciste para resolverlo? O sea, para aclarar esas dudas que tenías, esas preguntas.
Johan:	Preguntándole a la profe.
Orientadora:	¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?
Johan:	Lo último, cuando hicimos lo de conseguir la medida.
Orientadora:	¿Por qué?
Johan:	Porque nos divertimos mucho y era en grupo.
Orientadora:	¿Cómo fue la colaboración al trabajar con otros compañeros en la actividad?
Johan:	Bien, bien, colaboramos bastante.
Orientadora:	¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema?
Johan:	Sí, sí, un poquito sí.
Orientadora:	¿Puedes dar un ejemplo donde tú hablaste con ellos y te ayudaron a entender algo?
Johan:	Pues, yo les decía que no entendía, digamos, cómo medir, y ellos me decían cómo medir.
Orientadora:	¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?
Johan:	Sí, porque podía ver cuánto tenía que recortar y eso.
Orientadora:	¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujos a escribir símbolos?
Johan:	Consiguiendo la respuesta en cada problema.
Orientadora:	¿Y cómo hacían para describir el procedimiento, lo que iban haciendo?
Johan:	Pues íbamos leyendo y, de acuerdo a lo que leíamos, pensábamos y lo hacíamos ubicando lo que nos daban.
Orientadora:	¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?
Johan:	Casi cuando empezamos a hacerlos, porque cuando leí no entendí qué tenía que hacer.
Orientadora:	¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?
Johan:	Sí, la parte de los metros, cuando decía que le daba.
Orientadora:	¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?

Johan:	A trabajar en grupo y a hacer mediciones.
Orientadora:	¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce, desde lo que tú entendiste?
Johan:	¿Incógnita? Algo que uno no sabe y quiere averiguar.
Orientadora:	¿Y una ecuación?
Johan:	Algo que quiere hacer.
Orientadora:	¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo, comparado con otras clases?
Johan:	Sí, la verdad sí.
Orientadora:	¿Por qué?
Johan:	Porque uno entiende mejor y los compañeros ayudan.

Ángel (comunicado personal, 2025)

Orientadora:	¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?
Ángel:	Bien, bien, me sentí muy bien, un poquito difícil al principio, pero luego comencé a entender más la actividad y se me hizo más fácil.
Orientadora:	¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?
Ángel:	No, prestando mucha atención, mirando bastante el tema y estudiándolo se me facilitaron muchas cosas.
Orientadora:	Tú me decías que te pareció difícil al comienzo, ¿qué se te hizo difícil?
Ángel:	No entendía lo de las reglas, las cantidades fue lo que no entendí al principio.
Orientadora:	¿Y qué hiciste para entenderlo?
Ángel:	Le preguntaba a mis compañeros.
Orientadora:	¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?
Ángel:	Todo me pareció interesante, ya que al principio me pareció complicado y a mí me gustan las cosas así, difíciles.
Orientadora:	¿Cómo fue la colaboración con tus compañeros en la actividad?
Ángel:	Fue muy buena, como ya éramos amigos de hace tiempo, teníamos buena conexión.
Orientadora:	¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema?
Ángel:	Sí, me ayudó bastante.
Orientadora:	¿Puedes dar un ejemplo donde tú hablaste con ellos y te ayudaron a entender algo?
Ángel:	Diana me ayudó mucho en la parte de las reglas, porque no entendía, pero viendo cómo lo hacía ella sí lo entendí.
Orientadora:	¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?
Ángel:	Sí, también me ayudó a entenderlo bastante.

Orientadora:	¿Por qué?
Ángel:	Porque ya teniendo algo creativo hacía que yo lo viera mejor.
Orientadora:	¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujos a escribir letras y símbolos?
Ángel:	Eso es fácil, porque cuando sabes el procedimiento, todo lo que va y todo lo que haces, pues ya más o menos sabes cómo es la cosa.
Orientadora:	¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?
Ángel:	Ya en el segundo día de práctica, ya comencé a entender mejor las cosas.
Orientadora:	¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?
Ángel:	Sí, algo que cuando la profesora Yulithza escribió en el pizarrón, me ayudó a entenderlo bastante.
Orientadora:	¿Cuándo escribí qué?
Ángel:	Cuando escribió en el pizarrón lo de qué significaba la regla y así.
Orientadora:	¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?
Ángel:	Aprendí muchas cosas útiles, útiles para el futuro, porque eso que aprendí en la actividad me puede ayudar en un futuro para algún trabajo o cualquier cosa.
Orientadora:	Y puntualmente, como conceptos, ¿qué crees que aprendiste y también con el trabajo en grupo?
Ángel:	Aprendí bastante a llevarnos entre nosotros mutuamente y ayudarnos en bastantes cosas.
Orientadora:	¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce, desde lo que tú entendiste?
Ángel:	Una ecuación o incógnita es algo muy difícil de explicar, pero es como una división o una fracción, se podría decir.
Orientadora:	Si alguien no conociera una incógnita, ¿tú qué le dirías que es?
Ángel:	Es algo… pues la verdad no sabría qué decir.
Orientadora:	Vale, entonces, ¿qué representábamos con los metros?
Ángel:	Incógnitas.
Orientadora:	¿Y cuando nosotros decíamos "este metro representa algo que…" qué? ¿Algo que conocíamos o no conocíamos?
Ángel:	Eran números que no conocíamos.
Orientadora:	¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo comparado con otras clases?
Ángel:	Sí, se me hizo mejor, se me hizo más fácil entender el tema, la verdad sí.
Orientadora:	¿Y qué le dirías a alguien que no sabe qué es una ecuación?
Ángel:	Algo donde tenga que encontrar una incógnita y un resultado al final.

Diana (comunicado personal, 2025)

Orientadora:	¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?
Diana:	Bien, cómoda.
Orientadora:	¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?
Diana:	No, la mayoría estaba fácil.
Orientadora:	¿Nada te pareció difícil? ¿Por qué?
Diana:	No sé, estaba fácil.
Orientadora:	¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?
Diana:	No sé, la parte 1 me pareció “bacana”.
Orientadora:	¿Por qué?
Diana:	Porque era más como de pensar, más compleja.
Orientadora:	¿Cómo fue la colaboración con tus compañeros en la actividad?
Diana:	Bien.
Orientadora:	¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema?
Diana:	Sí, cada uno da su punto de vista.
Orientadora:	¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?
Diana:	Sí, era más gráfico y ayudaba a entender.
Orientadora:	¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujitos a escribir números y símbolos?
Diana:	No sé cómo explicarlo.
Orientadora:	Entonces, ¿cómo pasaste tú a saber cómo ibas a representar las incógnitas, cuando pasaste de usar metros a los signos de pregunta?
Diana:	Me iba guiando por lo que ya había hecho.
Orientadora:	¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?
Diana:	Cuando lo hice con las cintas métricas y todo eso.
Orientadora:	¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?
Diana:	Cuando ya le fui colocando los metros iba pensando más.
Orientadora:	¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?
Diana:	Varios puntos de vista.
Orientadora:	¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce?
Diana:	Una incógnita es algo desconocido.
Orientadora:	¿Y una ecuación?
Diana:	Es algo que tiene una cantidad desconocida que luego averiguamos.
Orientadora:	¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo comparado con otras clases?

Diana: Sí.

Orientadora: ¿Por qué?

Diana: Porque, no sé… me hacía pensar más, tenía más puntos de vista y diferentes formas.

Mara (comunicado personal, 2025)

Orientadora: ¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?

Mara: Bien, cómoda.

Orientadora: ¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?

Mara: Pues algunas preguntas fueron confusas.

Orientadora: ¿Qué hiciste para entenderlas?

Mara: Pedí ayuda a los compañeros.

Orientadora: ¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?

Mara: Lo de usar las imágenes y dibujos.

Orientadora: ¿Por qué?

Mara: Era divertido, una forma dinámica, diferente.

Orientadora: Tú trabajaste con otros compañeros en la actividad, ¿cómo fue esa colaboración?

Mara: Bien, entre todos hicimos una parte.

Orientadora: ¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema?

Mara: Sí.

Orientadora: ¿Puedes dar un ejemplo donde tú hablaste con ellos y te ayudaron a entender algo?

Mara: Si había una parte que no entendía, me explicaban y me daban ideas.

Orientadora: ¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?

Mara: Sí, más fácil, porque podía analizar qué hacer paso por paso.

Orientadora: ¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujitos a escribir números y símbolos matemáticos?

Mara: Primero hicimos con las imágenes los jueguitos, luego los representamos gráficamente e íbamos explicando paso a paso y después ya fue con signos.

Orientadora: ¿Cómo sentiste el paso a símbolos matemáticos?

Mara: Bien, fue fácil.

Orientadora: ¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?

Mara: Desde el primer ejercicio.

Orientadora: ¿Tú ya tenías conocimiento de ecuaciones, cierto?

Mara: Sí.

Orientadora: ¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?

Mara: Sí, me di cuenta de que ponía resultados que no debía porque me confundía, pero ya cuando vi las representaciones entendí mejor.

Orientadora: ¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?

Mara: Pues a encontrarle más sentido a las cosas, no hacerlas por hacer.

Orientadora: ¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce?

Mara: Es un valor que no conocemos y que debemos hallar.

Orientadora: ¿Y una ecuación?

Mara: Una ecuación es una operación que nos ayuda a encontrar el valor de una incógnita.

Orientadora: ¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo comparado con otras clases?

Mara: Más o menos, pero estuvo chévere.

Orientadora: ¿Por qué?

Mara: Porque fue más dinámico, entonces entendía más.

Orientadora: Ya que tenías conocimiento en el tema, ¿cómo sentiste con el hecho de saber una manera para resolverla e intentar hacerlo de otra?

Mara: Pues un poco complicado porque ya tenía otra manera de resolverlo, entonces era como difícil, pero se entendió.

Sofía (comunicado personal, 2025)

Orientadora: ¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?

Sofía: Bien, bien.

Orientadora: ¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?

Sofía: Sí, una parte como de la ecuación, pero no, como estábamos en grupo pude entender bien.

Orientadora: ¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?

Sofía: Pues todo estuvo interesante, todo estuvo bien, pero más cuando estábamos haciendo la representación con los metros.

Orientadora: ¿Por qué?

Sofía: Porque me parecía divertido y porque, en la ocasión no sabíamos, pero ya cuando lo representamos era fácil.

Orientadora: ¿Cómo fue la colaboración con tus compañeros en la actividad?

Sofía: Bien, me colaboraron mucho.

Orientadora: ¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el

problema?

Sofía: Sí.

Orientadora:	¿Puedes dar un ejemplo donde tú hablaste con ellos y te ayudaron a entender algo?
Sofía:	Cuando lo de Ana y Carlos, yo no entendía, entonces nos ayudamos mutuamente.
Orientadora:	¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?
Sofía:	Sí, porque representándolo era mucho más fácil en la ecuación.
Orientadora:	¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujos a escribir números y símbolos?
Sofía:	Bien, pues yo le colaboré a María José haciendo los dibujos y estuvo fácil.
Orientadora:	¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?
Sofía:	Cuando las representaciones.
Orientadora:	¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?
Sofía:	Es que las representaciones nos ayudaron mucho, la verdad, entonces la representación era fundamental.
Orientadora:	¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?
Sofía:	El trabajo en grupo, que se puede representar más fácil y las ecuaciones.
Orientadora:	¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce?
Sofía:	Algo que no sabemos y queremos averiguar.
Orientadora:	¿Y una ecuación?
Sofía:	Es como la operación que se hace para descubrir eso.
Orientadora:	¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo comparado con otras clases?
Sofía:	Sí.
Orientadora:	¿Por qué?
Sofía:	Porque representarlo es como vivirlo, representarlo es más fácil que haciendo la ecuación sola.

Nayla (comunicado personal, 2025)

Orientadora:	¿Cómo te sentiste al trabajar en esta actividad?
Nayla:	Bien, bien.
Orientadora:	¿Hubo algo que te pareció difícil o confuso de la actividad?
Nayla:	La parte de representar la pregunta con la regla.
Orientadora:	¿Y qué hiciste para entenderlo mejor?
Nayla:	Nada.
Orientadora:	¿Qué parte te gustó más o te pareció más interesante de la actividad?

Nayla: Todo, pero sobre todo copiar.

Orientadora: ¿Por qué?

Nayla: Porque es copiar lo que entendí y es más fácil.

Orientadora: Tú trabajaste con otros compañeros en la actividad, ¿no?

Nayla: Sí.

Orientadora: ¿Cómo fue esa colaboración?

Nayla: Bien.

Orientadora: ¿Crees que conversar con tus compañeros te ayudó a entender mejor el problema?

Nayla: Sí.

Orientadora: ¿Puedes dar un ejemplo donde tú hablaste con ellos y te ayudaron a entender algo?

Nayla: Con los muñecos y las reglas.

Orientadora: ¿El uso del material, los metros y los centímetros, te ayudó a entender mejor la situación?

Nayla: No, no entendí nada, me confundí.

Orientadora: Es posible porque no asististe a la primera sesión.

Orientadora: ¿Cómo pasaste de usar los materiales y dibujitos a escribir números y símbolos?

Nayla: Yo solo leí y se me vino a la cabeza la operación y ya.

Orientadora: ¿En qué momento sentiste que empezaste a entender lo que estabas haciendo en los problemas?

Nayla: Siempre.

Orientadora: ¿Hubo algo que dijiste o señalaste que te ayudó a darte cuenta de cómo resolver los problemas?

Nayla: La regla y los números con las rayitas.

Orientadora: ¿Qué crees que aprendiste con esa actividad?

Nayla: Hacer ecuaciones y saber qué es una ecuación.

Orientadora: ¿Cómo describirías qué es una ecuación o incógnita a alguien que no las conoce?

Nayla: Lo que estamos buscando.

Orientadora: ¿Y una ecuación?

Nayla: Es un problema y una solución.

Orientadora: ¿Te sentiste diferente al aprender usando materiales y discutiendo comparado con otras clases?

Nayla: Sí.

Orientadora: ¿Por qué?

Nayla: Porque estaba más chévere.