

Solución del problema de Kirsch mediante el método de los elementos libres de malla MFree, aplicando la técnica de los puntos radiales de interpolación RPIM

Fabio Hernán Realpe Martínez



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
GRUPO DE INVESTIGACION EN DISEÑO Y PROCESOS DE
MANUFACTURA (DPM)
BUCARAMANGA - 2014

Solución del problema de Kirsch mediante el método de los elementos libres de malla MFree, aplicando la técnica de los puntos radiales de interpolación RPIM

Fabio Hernán Realpe Martínez

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en Ingeniería Mecánica

Director. Msc. Pedro José Díaz G.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
GRUPO DE INVESTIGACION EN DISEÑO Y PROCESOS DE
MANUFACTURA (DPM)
BUCARAMANGA - 2014

*A Dios
Pues de El es el honor y la gloria.*

*A mi madre Domiciana por su amor incondicional y su gran esfuerzo. A la memoria de mi
padre Ismael*

*A mi esposa Jenny la mujer que comparte mi vida y quien me a dado la profesión de ser
papá, a mi hijo Nicolas Realpe quien es el centro de toda mi vida*

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

Al profesor Pedro José Díaz, por haber abierto las puertas de mi ingreso a la UIS, y haber creído en mi.

La Universidad Industrial de Santander, a través de la Escuela de Ingeniería Mecánica por permitirme realizar mi maestría.

A mis profesores Pedro José Díaz, David Fuentes, Julio Carrillo y Jabid Quiroga por su participación en mi formación.

A mis compañeros por acogerme, especialmente a Silvia Juliana Oviedo y Edwin Córdoba por quienes siento una aprecio especial, a Carlos Florez, Juan Pablo Consuegra y Sofía Maldonado. Y a todas aquellas personas que contribuyeron al desarrollo de mi proyecto.

Índice general

	pág
1 Introducción	19
1.1 El planteamiento del problema	20
1.2 La justificación para solucionar el problema	21
1.2.1 La razón de ser de los <i>métodos libres de malla</i>	21
1.3 Los objetivos del proyecto	22
1.3.1 El objetivo general	22
1.3.2 Los objetivos específicos	22
1.4 Preliminares	23
1.5 La clasificación de acuerdo a las formulaciones	25
1.5.1 Los métodos libre de malla basados en formulaciones débiles.	26
1.5.2 Los métodos libres de malla basados en formulaciones fuertes	26
1.5.3 Los métodos libres de malla basados en combinación de formulaciones débiles y técnicas de colocación.	26
1.6 La clasificación con base en el esquema de aproximación	27
1.6.1 La aproximación de mínimos cuadrados en movimiento.	27
1.6.2 La representación integral como función de aproximación	28
1.6.3 Basados en puntos de interpolación como función de aproximación	28
1.7 La clasificación de acuerdo al dominio	28
1.8 La conclusión	29
2 El modelo teórico	31
2.1 Las generalidades	31
2.2 Las ecuaciones de compatibilidad	36
2.3 La relación deformación - desplazamiento	37
2.4 Las ecuaciones de equilibrio	38
2.5 La función de Airy	41
2.6 La placa infinita con agujero concéntrico	43
2.7 La conclusión	45
3 El modelo numérico	47
3.1 La formulación	47
3.2 La representación del dominio	52

3.2.1	El dominio de soporte	53
3.2.2	La determinación del espaciado nodal	55
3.3	Las funciones de interpolación	56
3.3.1	Interpolación bicúbica de Lagrange	57
3.3.2	La función de forma polinomial PIM	58
3.3.3	La función de interpolación MLS.	62
3.3.4	La función de forma MLS.	62
3.3.5	Las funciones de interpolación de bases radiales.	65
3.3.6	La función de forma RPIM.	66
3.4	Las condiciones de frontera	69
3.5	Las nuevas formulaciones	69
3.5.1	El método de la función Penalty	70
3.5.2	La determinación del factor Penalty	71
3.5.3	El método de multiplicadores de Lagrange	72
3.5.4	La formulación variacional con Penalty	72
3.5.5	La formulación variacional con Lagrange	73
4	El estimador del error	77
5	La implementación numérica	79
5.1	Los algoritmos	79
5.1.1	La implementación de la función <i>domainc</i>	81
5.1.2	La implementación de la función de forma	82
5.1.3	Las funciones <i>CellGaussPoints</i> y <i>SOLEXPD</i>	84
5.2	La conclusión	85
6	Análisis de resultados	86
6.1	La viga en voladizo	87
6.1.1	La solución de la viga en voladizo con EFG	90
6.1.2	La solución de la viga en voladizo con RPIM	96
6.2	La solución numérica del problema de Kirsch	105
6.2.1	La solución del problema de Kirsch mediante EFG	106
6.3	La solución del problema de Kirsch mediante RPIM	113
6.3.1	La función de forma MQ utilizada en el método Mfree	114
6.3.2	La función de forma EXP utilizada en el método Mfree.	119
6.4	La solución del problema de Kirsh con 273 nodos	126
6.4.1	La función de forma MQ utilizada en el método Mfree	127
6.4.2	La función de forma EXP utilizada en el método Mfree	133
7	Las conclusiones	140
8	Los aportes	142
9	Las recomendaciones y trabajos futuros	143

Índice de figuras

	pág
1.1 La descripción del problema de Kirsch.	20
1.2 Clasificación de los métodos libre de malla de acuerdo la formulación.	25
1.3 Clasificación de acuerdo con las funciones de interpolación	27
2.1 Deformación de un elemento diferencial.	33
2.2 Deformación de dos puntos vecinos	34
2.3 Placa con agujero y esfuerzo axial.	43
3.1 Representación del dominio para MFree y FEM.	53
3.2 Celdas y nodos de campo utilizadas en Mfree para un dominio Ω	54
3.3 Representación de los dominios de soporte	55
3.4 Dominio de distribución bicúbica <i>Lagrangiana</i>	58
3.5 Triángulo de Pascal.	59
5.1 Diagrama de flujo general de los métodos FEM y Mfree	80
5.2 Diagrama Mfree	81
5.3 Diagrama de flujo de la función <i>domainc</i>	82
5.4 Diagrama para el cálculo de la función de forma RPIM.	83
5.5 Funciones de base radial MQ y EXP.	84
6.1 Viga en cantilever sujeta a una tracción parabólica.	88
6.2 Solución analítica.	90
6.3 Distribución de nodos de campo (<i>Mfree</i>) y cuadratura de gauss EFG, 55 nodos de campo.	91
6.4 Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función de interpolación LMS, 55 nodos de campo.	93
6.5 Flexiones entre la solución analítica y la función de interpolación MLS, 55 nodos de campo.	94
6.6 El esfuerzo cortante en la sección ($L/2$), función de forma MLS, 55 nodos de campo.	94
6.7 Error relativo.	95
6.8 Rata de convergencia Log (E) vs Log (h).	96
6.9 Distribución de nodos de campo (<i>Mfree</i>) y cuadratura de gauss RPIM, 175 nodos de campo.	97
6.10 Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función MQ de RPIM, 175 nodos de campo.	99

6.11	Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función EXP de RPIM, 175 nodos de campo.	100
6.12	Flexiones entre la solución analítica y las funciones de forma MQ y EXP de RPIM, 175 nodos de campo.	101
6.13	El esfuerzo cortante en la sección (L/2), con las funciones de forma MQ y EXP de RPIM, 175 nodos de campo.	101
6.14	Error relativo vs Distancia.	103
6.15	Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h).	103
6.16	Solución analítica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy}	105
6.17	Distribución de nodos de campo <i>Mfree</i> y cuadratura de gauss RPIM, 99 nodos de campo.	107
6.18	Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} mediante <i>EFG</i> (MLS), 99 nodos de campo.	107
6.19	Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos <i>EFG</i> , 99 nodos de campo.	109
6.20	Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas <i>EFG</i> , 99 nodos de campo.	110
6.21	Evaluación de los desplazamientos con <i>EFG</i> , 99 nodos de campo.	110
6.22	Error relativo en $\theta= 90$, $\theta= 45$ y $\theta= 0$ <i>EFG</i>	111
6.23	Esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} <i>EFG</i> (MLS) con $r=1$	112
6.24	Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h) <i>EFG</i>	112
6.25	Malla.	114
6.26	Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} mediante <i>RPIM</i> (MQ), 99 nodos de campo.	114
6.27	Comparación de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} analíticos y numéricos <i>RPIM</i> (MQ), 99 nodos de campo.	116
6.28	Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas <i>RPIM</i> (MQ), 99 nodos de campo.	117
6.29	Evaluación de los desplazamientos con <i>RPIM</i> (MQ), 99 nodos de campo.	117
6.30	Error relativo.	118
6.31	Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h) <i>RPIM</i> (MQ).	119
6.32	Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante <i>RPIM</i> (EXP), 99 nodos de campo.	120
6.33	Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos <i>RPIM</i> (EXP), 99 nodos de campo.	122
6.34	Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas <i>RPIM</i> (MQ), 99 nodos de campo.	123
6.35	Evaluación de los desplazamientos con <i>RPIM</i> (EXP), 99 nodos de campo.	123
6.36	Error relativo.	124
6.37	Cálculo de los esfuerzos <i>RPIM</i> (EXP) con $r=1$	125
6.38	Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h) <i>RPIM</i> (EXP).	125
6.39	Distribución de nodos de campo (<i>Mfree</i> <i>RPIM</i>) y cuadratura de gauss, 273 nodos de campo.	127

6.40 Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante <i>RPIM</i> (MQ), 273 nodos de campo.	127
6.41 Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos con <i>RPIM</i> (MQ), 273 nodos de campo.	129
6.42 Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas <i>RPIM</i> (MQ), 273 nodos de campo.	130
6.43 Evaluación de los desplazamientos con <i>RPIM</i> (MQ), 273 nodos de campo . . .	130
6.44 Error relativo.	131
6.45 Cálculo de los esfuerzos <i>RPIM</i> (MQ) con $r=1$	132
6.46 Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h) <i>RPIM</i> (MQ).	132
6.47 Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante <i>RPIM</i> (EXP), 273 nodos de campo.	133
6.48 Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos con <i>RPIM</i> (EXP), 273 nodos de campo.	135
6.49 Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas <i>RPIM</i> (EXP), 273 nodos de campo.	136
6.50 Evaluación de los desplazamientos con <i>RPIM</i> (EXP), 273 nodos de campo. . .	136
6.51 Error relativo.	137
6.52 Cálculo de los esfuerzos <i>RPIM</i> (EXP) con $r=1$	138
6.53 Log (E) vs Log (h) <i>RPIM</i> (EXP).	138

Índice de Tablas

	pág
1.2 Las principales diferencias de los dos métodos.	24
1.4 Categorías de los métodos MFree de acuerdo al tipo de formulación	29
3.1 Funciones de peso MLS.	62
3.2 Funciones de base radial (RBF).	65
3.3 Parámetros de la función radial MQ (α_c, d_c, q), Parámetros del Dominio de So- porte (α_{sx}, d_c).	66
3.4 Parámetros de la función radial EXP (α_c, d_c), Parámetros del Dominio de So- porte (α_{sx}, d_c)	66
6.1 Casos de estudio para la solución de la Viga en Voladizo.	87
6.2 Casos de estudio para la solución del problema de Kirsch.	87
6.3 Parámetros de Viga en el SI.	89
6.4 Parámetros de entrada	92
6.5 Cálculo del principio de mínima energía y error relativo para la función de interpolación LMS.	95
6.6 Ratas de convergencia de la función de forma LMS.	96
6.7 Parámetros de entrada	98
6.8 Comparación de las funciones radiales MQ y EXP en función del principio de mínima energía y el error relativo.	102
6.9 Ratas de convergencia de las funciones de forma MQ y EXP.	104
6.10 Parámetros finales de comparación entre las diferentes funciones de forma utilizadas en la solución de la viga.	104
6.11 Parámetros de la viga en unidades SI.	105
6.12 Parámetros de entrada.	106
6.13 Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch. 108	108
6.14 Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal. 111	111
6.15 Rata de convergencia de la función de forma <i>EFG</i>	113
6.16 Parámetros de entrada.	113
6.17 Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch. 115	115
6.18 Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función MQ de RPIM.	118
6.19 Rata de convergencia de RPIM (MQ).	119

6.20	Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch	121
6.21	Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función EXP de RPIM.	124
6.22	Rata de convergencia de RPIM (EXP).	126
6.23	Parámetros de entrada	126
6.24	Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.	128
6.25	Cálculo del principio de mínima energía, error relativo, error relativo normal, para la función de forma MQ de RPIM, 273 nodos de campo.	131
6.26	Rata de convergencia de RPIM (MQ).	133
6.27	Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.	134
6.28	Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función de forma EXP de RPIM.	137
6.29	Rata de convergencia de RPIM (EXP).	138
6.30	Parámetros finales de comparación entre las diferentes funciones de forma utilizadas en la solución del problema de Kirsh.	139

TITULO: SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE KIRSCH MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS LIBRES DE MALLA MFREE, APLICANDO LA TÉCNICA DE LOS PUNTOS RADIALES DE INTERPOLACIÓN RPIM *

Autor: Fabio H. Realpe **

PALABRAS CLAVES: funciones de base radial, función exponencial, función multicuadrática, métodos libres de malla.

RESUMEN

Este trabajo tiene como finalidad mostrar el comportamiento de dos funciones de base radial utilizadas como funciones de forma en los métodos libres de malla o Mfree, las funciones de base radiales utilizadas son: Multicuadrática y Exponencial, las cuales han sido aplicadas sobre una distribución uniforme de puntos en un dominio Omega. Como funciones de interpolación, también se han establecido dos escenarios distintos para la implementación de las condiciones de frontera, penalty y multiplicadores de Lagrange. Estas tienen el propósito de evaluar el desempeño de las funciones de forma anteriormente descritas, sobre dicho dominio. El ejemplo de aplicación tomado es el problema clásico en la mecánica de sólidos del problema de Kirsch, donde los resultados obtenidos por los diferentes escenarios establecidos serán comparados con la solución analítica del problema, para esto se hizo necesario implementar el cálculo del error basado en la reconstrucción de la solución, el cálculo del error relativo del método numérico y la tasa de convergencia del método numérico como indicador de la linealidad del método numérico de esta manera se verifica cuál de los escenarios mostrados se acerca de mejor manera a la solución analítica.

*Trabajo de Grado.

**Facultad de Ingenierías Físico - mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica. Director: Msc. Pedro José Díaz.

TITLE: SOLUTION OF THE KIRSCHS PROBLEM BY THE FREE MESH ELEMENT METHOD MFREE, APPLYING THE INTERPOLATION OF THE RADIAL POINTS TECHNIQUE RPIM *

Autor: Fabio H. Realpe **

KEYWORDS: radial base function, multi-quadrics function, Gaussian function, mesh-free methods.

ABSTRACT

This paper is intended to show the behavior of two radial basis functions as shape function in mesh-free elements; radial basis functions used in this work are Multi-quadrics and Exponential, which have been applied over a uniform point distribution in Omega Ω domain as interpolation functions. Also, two different scenarios for the implementation of border conditions denominated Penalty and Lagrange Multipliers were applied. These had the purpose of assessing shape functions performance over the mentioned domain. The application example for this work is the classical solid mechanics problem denominated problem Kirsch, where the obtained results using different scenarios were compared against the analytical solution. In order to achieve that, the solution reconstruction based error, relative error estimation and convergence rate as a linearity indicator for the numeric method were implemented. These allowed each scenario to be evaluated.

*Work degree.

**Faculty of Physical - mechanical Engineering. School of Mechanical Engineering. Advisor: Msc. Pedro José Díaz.

GLOSARIO

α_c	Parámetro de forma
α_s	Constante adimensional
\bar{t}	Tracción en las condiciones de frontera naturales
\bar{u}	Desplazamiento en las condiciones de frontera esenciales
Γ_t	Frontera natural
Γ_u	Frontera esencial
γ_{xy}	Deformación cortante
∇	Operador Divergencia
∇^2	Operador Laplaciano
ν	Coefficiente de Poisson
Ω	Dominio global
$\phi(r, \theta)$	Función de Airy
σ_{ii}	Tensión normal
σ_{ij}	Tensión tangencial
B	Matriz de deformación
b	Vector de esfuerzo externo al cuerpo
D	Matriz de constantes elásticas
L	Operador diferencial
n	Vector unitario normal a la condición de frontera natural

\mathbf{R}_0	Matriz de momentos RBF
\mathbf{x}	Punto de interés
ε_{kl}	Deformación
C	Matriz de rigidez
d_c	Espaciamiento nodal
E	Modulo de Young
I	Momento de Inercia
K	Matriz de rigidez
$p_j(\mathbf{x})$	Base de polinomio
q	Parámetro de forma
u	Desplazamiento
$u \ v$	Vector de desplazamientos
MLS	Funciones de minimos cuadrados
RBF	Funciones de base radial

Introducción

Los métodos numéricos convencionales como *los elementos finitos*, *volúmenes finitos* y *las diferencias finitas*, han sido desarrollados por más de cuatro décadas y de esta manera han contribuido de forma substancial y muy valiosa con la solución de los problemas tradicionales de la mecánica del continuo.

Sin embargo el espectro de aplicación en los problemas no lineales tales como, las grandes deformaciones, la mecánica de los fluidos y de fractura se han visto opacadas por la imposibilidad de dichos métodos en ofrecer una solución más exacta.

Teniendo en cuenta este planteamiento, en el presente proyecto se muestra los resultados obtenidos por el método numérico *Mfree* aplicado para la solución del problema de *Kirsch* en la mecánica de sólidos, aplicando *los puntos radiales de interpolación* como función de forma en los métodos libres de malla, ello partiendo del hecho que éstos son utilizados en el modelamiento de problemas complejos aplicados a la mecánica, donde los métodos numéricos como el de los elementos finitos, métodos de frontera y diferencias finitas, no dan una buena aproximación y estabilización en la respuesta. Ahora bien, el deseo primordial es el de implementar una técnica robusta y novedosa que tenga un mejor desempeño que las técnicas anteriormente nombradas.

En el presente documento se realiza una descripción clara y precisa del problema y plantea el porqué de la relevancia en el momento de resolverlo, de igual manera establece unas metas claras que deberán ser alcanzadas para la obtención de la solución al problema de *Kirsch*. Para ello se plantea una revisión bibliográfica a través de los desarrolladores del método.

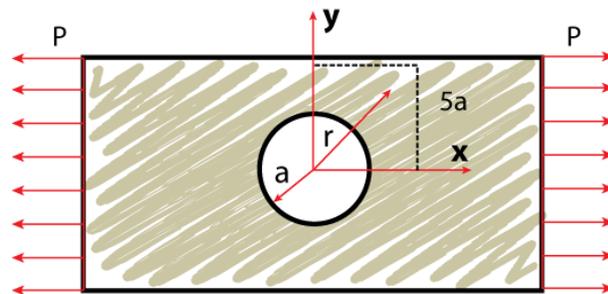
Tan importante como este recorrido, lo representa el impacto que ha de ser generado por los productos de este trabajo de investigación y la metodología para alcanzar tal fin. Es de esta forma que teniendo esta información en mente se procede a realizar la descripción del problema.

1.1. El planteamiento del problema

En la actualidad la mayoría de los procesos de diseño e ingeniería de productos y procesos requieren del uso de herramientas computacionales con un alto grado de precisión y bajo costo computacional, todo ello debido a que en algunos de estos casos la ingeniería del diseño desea poder solucionar problemas con geometrías cada vez más complejas donde los métodos actuales tienen dificultades para establecer una solución.

El problema de concentración de esfuerzos resuelto y publicado por Kirsch en 1898 [6], tal como se observa en la figura (1.1), en el cual se utiliza la teoría clásica de la elasticidad en dos dimensiones para un material isotrópico, marca una época en la elastomecánica, ya que desde entonces sus resultados han sido utilizados con el objeto de corroborar la precisión relativa de otros métodos alternativos (analíticos, numéricos y experimentales) es por esta razón que se solucionará este problema específico con el propósito de determinar la precisión de la técnica de puntos radiales de interpolación, utilizando el método numérico libre de malla conocido como *MFree*.

Figura 1.1: La descripción del problema de Kirsch.



Fuente: Autor del proyecto.

El modelo consiste en una placa infinita sometida a un esfuerzo uniaxial P con un agujero centrado de radio a , para obtener la solución a este problema se hace necesario recurrir a la ecuación diferencial general de la teoría de placas descrita como

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = \nabla^4 \phi = 0 \quad (1.1)$$

Esta relación es llamada la ecuación biarmónica para un problema de tensión y deformación plana, la cual ha sido reducida en términos de una función $\phi(x, y)$ denominada función de *Airy*.

Debido a que este problema posee un agujero concéntrico es más fácil obtener una solución analítica en coordenadas polares, lo que conlleva a que ϕ esté en función de r y θ ($\phi(r, \theta)$).

Para que la ecuación (1.1) tenga solución se hace necesario tener las siguientes condiciones de frontera y hacer algunas consideraciones.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad r = 0 \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad r \longrightarrow \infty \quad (1.3)$$

La función biarmónica de esfuerzo aceptable para 1.1 es la presentada por *Timoshenko* en [34] y representada por la ecuación (1.4)

$$\phi = f(r) \cos 2\theta \quad (1.4)$$

La solución no considera las condiciones esenciales de frontera en las ecuaciones de compatibilidad de la mecánica de sólidos. Es de esta manera que se plantea como propósito de este trabajo corroborar la solución dada por *Timoshenko* mediante el problema de Airy a través del método libre de malla aplicando la técnica de los puntos radiales de interpolación.

1.2. La justificación para solucionar el problema

Una de las principales ventajas de los métodos sin malla radica en la disminución del tiempo en la etapa de preproceso ya que la discretización del dominio de la solución se basa en un conjunto de puntos, el cual permite enfocar la atención del análisis en las etapas posteriores y no precisamente en la construcción de una malla la cual depende de elementos que están conectados entre sí por los nodos de manera predefinida.

1.2.1. La razón de ser de los métodos libres de malla

Las diferencias más notables entre *el método de los elementos finitos* y *los métodos libres de malla* son presentados a continuación.

1. La creación de una malla para un dominio del problema es un requisito previo en el uso de cualquier código de elementos finitos. Por lo general, el diseñador tiene que pasar la mayor parte del tiempo en la preparación, creación y reparación de los componentes que integran la malla, y se convierte en principal tarea del proyecto.
2. La dificultad de los paquetes existentes en el cálculo de los esfuerzo, debido a las discontinuidades que existen en las interfaces de los materiales es uno de los problemas más visibles en el método de los elementos finitos lo que conlleva a técnicas en el

post-procesamiento llamados superconvergencias o parches que permiten llegar a la solución.

3. El principal propósito es garantizar la exactitud de la solución con una precisión deseada. Para lograr este propósito las técnicas de mallado adaptativo han logrado mejorar en gran medida el comportamiento del método pero a su vez han generado el un aumento desproporcionado en el coste computacional del método con los inconvenientes que posee la generación de elementos tres dimensionales.
4. Los modelos de grandes deformaciones no recomiendan la utilización del método de los elementos finitos debido a la gran distorsión de que pudieran presentar los elementos durante la solución del problema.
5. Es complejo el modelado de inicio de fracturas o crecimiento de grietas, sobre todo en formas complejas en las cuales no existen coincidencia con las interfaces del elemento original.
6. El método de los elementos finitos establece la condición de indivisibilidad de los elementos. Lo cual hace mucho más complejo los procesos de modelado de inicio de grietas ó fracturas.

Planteadas estas razones, se establece la necesidad de incursionar en este tipo de técnica, a través del desarrollo de una aplicación, que aplica dicho método y permite analizar los comportamientos estructurales de fenómenos más complejos, a través de modelos que no tienen en cuenta la discretización del dominio a través de una malla, el dar este primer paso nos permite avanzar en la solución de este tipo de problemas.

1.3. Los objetivos del proyecto

1.3.1. El objetivo general

Obtener la solución del problema de *Kirsch* mediante el método de los elementos libres de malla *MFree*, aplicando la técnica de los puntos radiales de interpolación *RPIM*.

1.3.2. Los objetivos específicos

1. A través del estudio del método libre de malla, realizar un documento que contenga la sustentación de los conceptos teóricos mínimos para la solución del problema de *Kirsch*.
2. Describir las funciones de base radial como funciones de forma dentro de los elementos libres de malla.
3. Discretizar la formulación variacional, aplicando las funciones de base radial como funciones de forma, para obtener la solución numérica del problema de *Kirsch*.

4. Implementar un código en MATLAB que contengan las siguientes características

- Desarrollador del dominio de soporte.
- Generador de la funciones de forma para la técnica de puntos radiales de interpolación.
- Desarrollar un función capaz de identificar y aplicar la condición frontera.
- Realizar el pseudocódigo del desarrollo de la solución del problema de *Kirsch* en donde se ilustra la utilización de las funciones.
- Realizar una comparación entre la solución analítica y los métodos sin malla, de manera que se determine la exactitud del método numérico propuesto.
- Calcular la rata de convergencia del método implementado.

1.4. Preliminares

Un método sin malla es un método utilizado para establecer un sistema algebraico de ecuaciones para la solución de un problema en su totalidad sin el uso de una malla definida para la discretización del dominio *Liu* ([8]).

En los *métodos libre de malla* se utiliza un conjunto de nodos los cuales se encuentran dispersos dentro del dominio problema, unos puntos dentro de los límites del dominio y otros dentro de la frontera. Estos conjuntos de nodos dispersos se llaman nodos de campo y no forman una malla, lo que significa que no se requiere ninguna información a priori sobre la relación entre los nodos de la interpolación o aproximación de las funciones y variables de campo.

De acuerdo a la anterior definición es posible establecer que para resolver un problema utilizando un método libre de malla, *no se requiere una malla definida para la interpolación de la variables de campo o de aproximación, así como una malla a lo largo del proceso de formulación para resolver un problema de geometría arbitraria dada, lo único que rige al problema son el sistema de ecuaciones diferenciales y sus condiciones de frontera.*

Ahora bien, aunque el método ha mostrado una gran efectividad en el desarrollo de algunos problemas y provee de una herramienta numérica poderosa, éste método se encuentra todavía en una fase de desarrollo debido a que contiene algunos problemas técnicos que necesitan ser resueltos, para que el método sea eficiente y llegue a ser una herramienta útil en el desarrollo de problemas mas complejos.

La tabla [1.2] muestra las diferencias establecidas entre el método numérico más común en la solución de mecánica de solidos *FEM* y método libre de malla *MFree*.

Items	FEM	MFREE
Malla	Si	No
Creación de las funciones de forma	Basado en elementos predefinidos	Basado en dominios de soporte local
Discretización de la matriz de rigidez	Bandeada, simétrica	Bandeada, la simetría depende del método usado
Condiciones de frontera	Fácil y estandar	Necesita un tratamiento especial y depende del método usado
Velocidad computacional	Rápido	Bajo y depende del método usado
Precisión	Precisa en comparación con <i>DF</i>	Mucho mas preciso que <i>FEM</i>
Análisis de adaptación	Difícil para <i>3D</i>	Fácil
Etapa de desarrollo	Bien desarrollados	Desafiante y con muchos problemas
Paquetes comerciales	Muchos	Pocos

Cuadro 1.2: Las principales diferencias de los dos métodos.

Nacimiento de los métodos libres de malla *Mfree*

El desarrollo de los métodos *MFree* se remonta a más de 60 años donde *Slater* y *Barta* [30] en 1937; *Frazer* [26] y *Lanczos* [17] en 1938, dieron a conocer el método de puntos de colocación, entre los primeros métodos *MFree* se encuentran el método de vórtice dados a conocer por *Chorin* [5] en 1975 y *Bernard* [25], 1995, las diferencias finitas con redes arbitrarias o llamadas (*GFD*M) mostradas por *Giralut* [37] en 1974 y *Pavlin* y *Perron* [38] en 1975, *Snell* [4] en 1981, *Liszka* [35] y *Krok* [16] en 1977 fueron una de las primeras técnicas libres de malla implementadas.

Uno de los métodos más conocidos es llamado dinámica de partículas (*SPH*), el cual fue utilizado para modelado de fenómenos astrofísicos como son la explosión de estrellas y nubes de polvo, donde sus límites y sus fronteras se extienden a lo largo de años luz. La mayoría de

los trabajos de investigación anteriores sobre *SPH* se reflejan en las primeras publicaciones de *Lucy* [20] y *Monaghan* [21] en 1977, luego en 1992 sobre la misma línea de investigación *Gingold* [27] y *Monaghan* [22] aplican el método numérico como herramienta de solución a las ecuaciones que modelan las explosiones de supernovas y estrellas. Desarrollos recientes del método (*SPH*) con nuevas fundamentaciones se pueden encontrar en artículos publicados por *Liu* en el año 2003[8].

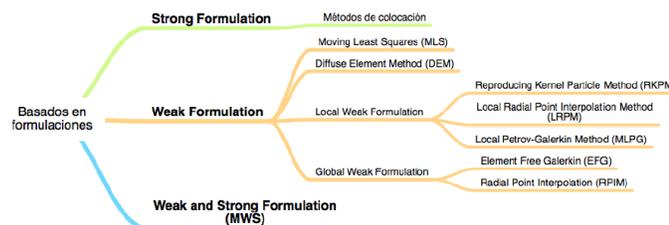
En general las investigaciones se han centrado en formulaciones de tipo fuertes para *MFree*, esto es debido a que el método es menos robusto en este tipo de formulación. Debido a que las investigaciones solo se centraron en formulaciones de tipo débil en *FEM*, fue posible proporcionar un paso natural a las formulaciones de éste tipo en los métodos libres de malla (*MFree*).

En 1990, un grupo de métodos *MFree* han sido desarrollados en gran medida, entre estos tenemos los denominados métodos de elementos difusos (*DEM*) propuestos por *Nayroles* [2] en 1992, El método de *Free Galerkin (EFG)* propuesto por *Belytschko* en 1994 [31], el método de reproducción de partículas (*RKMP*) propuesto por *Liu* [39], el métodos de los puntos de interpolación propuestos por *Liu* [9], el método sin malla de *Petrov-Galerkin (MLPG)* propuesto por *Alturi* [1], el método de nodos de frontera (*BNM*) expuestos por *Mukherjee* [23], el método de interpolación de puntos límites (*BPIM*) por *Gu* y *Liu* [10] ,[12], *MeshFree* fuertes y débiles (*MWS*) propuestos por *Liu* [11]. Donde las funciones de aproximación se construyen mediante un conjunto de nodos arbitrarios, y ningún elemento o conectividad de los nodos se hace necesario para la aproximación de dichas funciones.

1.5. La clasificación de acuerdo a las formulaciones

Los procedimientos de formulación de los métodos libre de malla, se pueden hacer con fundamento en formulaciones débiles, en técnicas de colocación o en una combinación de ambas de estas técnicas, la figura (1.2) muestra los diferentes tipos de métodos libres disponibles en la actualidad basados en formulaciones.

Figura 1.2: Clasificación de los métodos libre de malla de acuerdo la formulación.



Fuente: Autor del proyecto.

1.5.1. Los métodos libre de malla basados en formulaciones débiles.

En éste tipo de formulación las ecuaciones diferenciales que gobiernan al problema son transformadas en un conjunto de integrales con diferentes técnicas las cuales permiten obtener una solución al sistema de forma aproximada, mediante la obtención de un conjunto de ecuaciones algebraicas a través de una integración numérica. Este sistema aproximado se puede resolver de diversas maneras, y además puede ser construido a un nivel local o global del dominio.

Pocos trabajos se habían desarrollado acerca del método antes de los noventa, el primer artículo publicado fue en 1992 por *Nayroles* [2] donde aplicó mínimos cuadrados en movimiento, los cuales fueron propuestos por *Lancaster y Salkauskas* en 1981 [24] estos métodos permitieron desarrollar la formulación de *Galerkin* en el método de los *elementos difusos (DEM)*. *Belytschko* publica un importante artículo donde desarrolla un método denominado *Free Galerkin (EFG)* [31], el cual se basa en la postulación de la anterior técnica (*DEM*).

A partir de 1994 el ritmo de desarrollo de las formulaciones débiles en MFree ha sido muy rápido y en la actualidad existen diversas versiones para éste tipo de método, los cuales se encuentran divididos en: formulaciones débiles globales y formulaciones débiles locales para MFree.

- Las formulaciones débiles globales se encuentran divididas en. *EFG* propuesto por *Belytschko* [31] y puntos radiales para métodos de interpolación *RPIM* propuestos por *Liu* [9], [10] y [13], otros tipos de formulaciones débiles globales son (*RKMP*) propuesto por *Liu* [39], donde son usados para problemas no lineales y largas deformaciones [19].
- Las formulaciones débiles locales son propuestas por *Alturi* [1] llamadas *MLPG* y *Liu* con puntos radiales de interpolación locales o *LRPIM* [9].

1.5.2. Los métodos libres de malla basados en formulaciones fuertes

En estos métodos se busca discretizar las ecuaciones que gobiernan el dominio junto a sus condiciones de frontera sobre los nodos de campo mediante técnicas de colocación simples. Este método nace con la escogencia arbitraria de mallas y es llamado método de las diferencias finitas generales *GFDM* estas fueron propuestas por *Girault* en 1974 [37], *Pavlin* y *Perron*, 1975 [38] y el método de los puntos finitos propuestos por *Oñate* [7], donde su principal interés es la facilidad de implementación y eficiencia computacional, por otro lado esta técnica tiene problemas como la no robustez y la inestabilidad debido a su formulación.

1.5.3. Los métodos libres de malla basados en combinación de formulaciones débiles y técnicas de colocación.

Si bien los métodos libre de malla son simples de implementar y eficientes, desde el punto de vista computacional son inestables y poco adecuados en problemas que son gobernados

por ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera tipo Neumann. De igual manera, los métodos libres de malla que se fundamentan en formulaciones débiles son estables y precisos pero son computacionalmente costosos por efecto de la integración numérica y las funciones de forma que involucran, aún sean estas funciones definidas sobre mallas locales o globales; esto hace que estos métodos no sean libres de malla completamente.

El primer método propiamente libre de malla, usualmente llamados métodos fuertes libres de malla (MWSFM, meshfree weak-strong-form method), fue propuesto como una forma de estabilizar el sistema de ecuaciones discretas de la forma fuerte, y la forma débil y local de Petrov-Galerkin. Este proceso se logra al considerar nodos en o cerca de la frontera para la forma débil y los demás nodos para la forma fuerte[11],[13] .

1.6. La clasificación con base en el esquema de aproximación

Los métodos que utilizan funciones de aproximación ó de interpolación son los más importantes [13] , debido a la gran cantidad de herramientas disponibles para llevar a cabo la aplicación de este tipo de técnicas. En la Figura (1.3) se presenta una clasificación un poco más detallada de los grandes grupos de métodos libres de malla, los cuales se describen a continuación.

Figura 1.3: Clasificación de acuerdo con las funciones de interpolación



Fuente: Autor del proyecto.

1.6.1. La aproximación de mínimos cuadrados en movimiento.

El método de mínimos cuadrados en movimiento (MLSM, moving least squares methods) fue propuesto en 1981 en la suavización e interpolación de datos dispersos [24], a partir de lo cual se constituyó en uno de los pilares del desarrollo de formulación débiles en el método libre de mallas. La fortaleza de este método radica en el hecho que puede proporcionar para la función de campo, funciones de aproximación continuas que están definidas en todo el dominio del problema. En la actualidad, estas funciones se utilizan para determinar las funciones de forma de métodos libres de malla, lo cual se hizo evidente en la primera aproximación que con ellas se obtuvo mediante el método de elementos difusos [2]. Estas funciones también se han utilizado para obtener aproximaciones mediante el método libre de elementos de Galerkin

[31] y el método sin malla local de Petrov-Galerkin (MLPGM, meshless local Petrov-Galerkin method) [1].

1.6.2. La representación integral como función de aproximación

En estos métodos se utilizan formas integrales como funciones de aproximación y entre ellos se tienen el método de suavizado hidrodinámico de partículas (SPHM, smoothed-particle hydrodynamics method) [8],[21, 20] y el método de núcleo de reproducción de partículas [19]. El método de suavizado hidrodinámico de partículas fue originalmente desarrollado para resolver problemas astrofísicos en el espacio abierto en 3 dimensiones, donde el método plantea un modelo físico de un dominio representado por partículas y con funciones de aproximación que representan la formulación fuerte. La principal desventaja de método radica en la dificultad que tiene de manejar condiciones de frontera.

1.6.3. Basados en puntos de interpolación como función de aproximación

El método de puntos de interpolación (PIM, point interpolation method) es una técnica de interpolación libre de malla que fue utilizada para construir funciones de forma de nodos distribuidos localmente en una formulación débil [8, 9, 10, 12, 18, 11, 19, 39]. A diferencia del método de mínimos cuadrados en movimiento, la aproximación que utiliza este método es producto de una interpolación que cumple con la propiedad de la función . El tipo de funciones más usuales que se utilizan son las funciones polinomiales [13] y funciones de base radial (RBF, radio basis functions) [18].

1.7. La clasificación de acuerdo al dominio

Los métodos libres de malla se clasifican como del tipo dominio y del tipo frontera. En los métodos del primer tipo, el sistema de ecuaciones discreto es obtenido de una formulación débil o fuerte que considera todo el dominio y la frontera se representan mediante nodos de campo. En caso de los métodos del segundo tipo, únicamente se consideran las fronteras del dominio representadas por un conjunto de nodos de campo y el correspondiente sistema de ecuaciones discreto se obtiene mediante funciones de aproximación libres de malla.

De éste tipo de métodos se tiene el método de los nodos de frontera (BNM, boundary nodes method), propuesto en 1977. Básicamente, el método consistió en considerar la frontera del dominio del problema mediante un conjunto de nodos dispersos de manera apropiada y obtener el sistema de ecuaciones discreto al aplicar el método de mínimos cuadrados en movimiento mediante un grupo de nodos distribuidos de manera arbitraria sobre la misma frontera [23]. De igual modo, en 1998 se propuso el método de ecuaciones integrales libres de frontera (LBIEM, local boundary integral equation method), el cual considera que el do-

minio y la frontera son representados por nodos distribuidos. Este método ha sido utilizado en la solución de problemas lineales no lineales y de valor de frontera [36, 33, 32].

1.8. La conclusión

La tabla 1.4 muestra de manera general la información de los métodos descritos con anterioridad, especificando y clasificando cada uno de ellos de acuerdo a sus características principales.

Clasificación	Categorías	Ejemplos de MFree
Basado en formulaciones	Basado en formulaciones fuertes	MFree métodos de colocación, FPM.
	Basado en formulaciones débiles	EFG, RPIM, MLPG, LRPIM.
	Basado en formulaciones fuertes y débiles	MWS.
Basado en funciones de interpolación	MFree métodos usando MLS	EFG, MLPG.
	MFree usando representaciones integrales para funciones de interpolación	SPH.
	MFree usando PIM	RPIM, LRPIM.
	MFree usando otros esquemas de interpolación	PUFEM.
Basado en representación del dominio	Dominio MFree	SPH, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM.
	Frontera MFree	BNM, LBIE, BPIM, BRPIM, HBRPIM.

Tabla 1.4: Categorías de los métodos MFree de acuerdo al tipo de formulación

El presente trabajo se concentra en desarrollar el método numérico basado en las funciones de interpolación *de bases radiales* para cumplir con el objetivo general del proyecto.

Por otro lado fue posible implementar el método numérico EFG basado en funciones de interpolación MLS, para comparar características fundamentales como estabilidad, exactitud, velocidad y restricciones entre los métodos numéricos, con respecto a la solución analítica del problema.

El modelo teórico

En este apartado se describe la solución teórica del problema de *Kirsch*; esta demostración permitirá hacer una comparación de precisión entre los métodos numéricos desarrollados y la solución analítica obtenida por Kirsch [6].

2.1. Las generalidades

Un sólido elástico es aquel que manifiesta un comportamiento lineal, lo que implica que la tensión y la deformación sean directamente proporcional, esto se puede definir como, $\sigma \ni \varepsilon$ lo que indica una relación entre tensión y deformación. Por tanto la deformación y el esfuerzo deben ser descritos por sus respectivos tensores.

Estos tensores están relacionados por ecuaciones lineales conocidas como *ecuaciones de Hooke generalizadas* o *ecuaciones de Lamé-Hooke*, que son las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento de un sólido elástico lineal y homogéneo. Para un material esta ley se encuentra definida como.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Esto indica que cada componente de la diádica de tensión depende de las nueve componentes de la diádica de deformación, lo que conlleva a un sistema de ecuaciones de 81 componentes para $i, j, k, l = 1, 2, 3$ [28].

- σ_{ii} se denominado tensión normal.
- σ_{ij} se denominado tensión tangencial.
- C se denomina matriz de rigidez.
- ε_{kl} se denomina deformación.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2321} & C_{2322} & C_{23} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Debido a que las diádicas de las tensiones y deformaciones son simétricas en este conjunto general, se hace posible eliminar las siguientes deformaciones $\epsilon_{21}, \epsilon_{31}, \epsilon_{32}$, como también sus correspondientes tensiones $\sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$. Tras estas simplificaciones el conjunto general se reduce a:

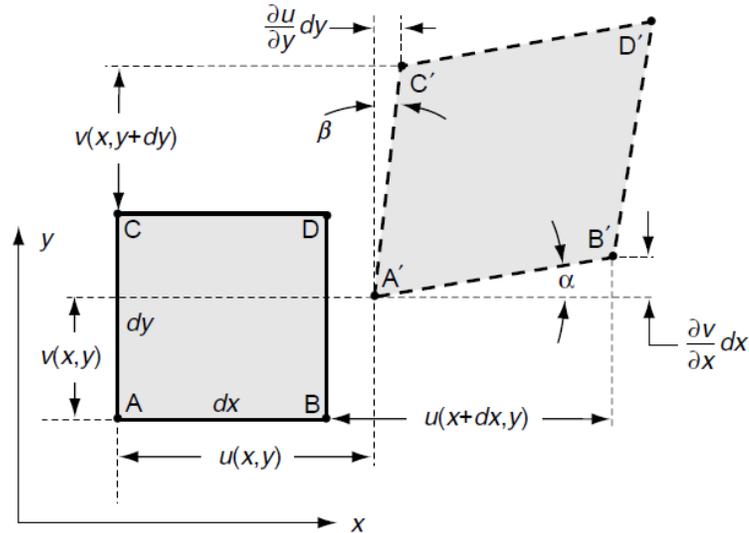
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1133} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1322} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2313} & C_{2322} & C_{2223} & C_{2233} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2322} & C_{23} & C_{2333} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3322} & C_{3323} & C_{3333} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Simplificando los subíndices de tal forma que $11 = 1, 12 = 2, 13 = 3, 22 = 4, 23 = 5, 33 = 6$ para las componentes de C y reemplazando $\sigma_{ij} = \tau_{ij}$ se obtiene la *ley generalizada de Hooke*[34].

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

El tensor de deformación ϵ_{kl} debe ser reescrito debido a que existen deformaciones angulares producida por las tensiones aplicadas sobre las caras del elemento infinitesimal, para esto se hace necesario analizar la figura (2.1).

Figura 2.1: Deformación de un elemento diferencial.



Fuente: Autor del proyecto.

La figura (2.1) indica una deformación de un elemento diferencial en dos dimensiones, los desplazamientos ocurren sobre las coordenadas x y y , haciendo referencia al punto A sobre la localización (x,y) , donde las componentes de desplazamiento son $u(x,y)$ y $v(x,y)$; por otro lado, las correspondientes coordenadas del punto B son $u(x+dx,y)$ y $v(x+dx,y)$, similarmente los desplazamientos de los demás puntos son definidos de la misma manera, aplicando la teoría de pequeñas deformaciones tenemos que mediante series de *taylor* se puede expresar.

$$u(x + dx, y) \approx u(x, y) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (2.5)$$

La deformación axial está definida como el cambio por unidad de longitud unitaria.

$$\epsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (2.6)$$

De acuerdo a la figura (2.1).

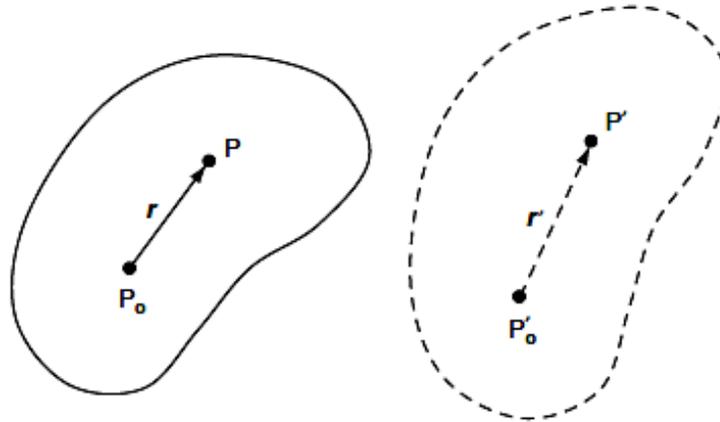
$$A'B' = \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \quad (2.7)$$

Como $AB=dx$ y $A'B'$ es (2.7) al reemplazar estas dos expresiones en (2.6) permite obtener la deformación en x , de la misma manera para la dirección en y .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8)$$

La deformación de corte se define como el cambio en el ángulo entre dos direcciones ortogonales del material continuo con respecto al eje x y y , para encontrar la relación correspondiente a la deformación de corte se define lo siguiente. Sea P y P_o conectados por un vector r , el cual se deforma como muestra la figura (2.2) y sea r' el nuevo vector el cual conecta el punto P' y P_o' para el cuerpo deformado.

Figura 2.2: Deformación de dos puntos vecinos



Fuente: Autor del proyecto.

Usando coordenadas cartesianas se define el vector de desplazamiento del punto P y P_o como u^o y u respectivamente, usando series de *Taylor* alrededor del punto P_o se expresa las componentes de u como.

$$u = u^o + \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z \quad v = v^o + \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z \quad w = w^o + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \quad (2.9)$$

El cambio en la posición relativa del vector r se reescribe.

$$\Delta r_x = \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z \quad \Delta r_y = \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z \quad \Delta r_z = \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z \quad (2.10)$$

En notación indicial.

$$\Delta r_i = u_{i,j} r_j \quad (2.11)$$

El tensor $u_{i,j}$ es llamado gradiente del tensor de desplazamiento el cual es escrito como.

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

El tensor (2.12) puede ser descompuesto en dos partes una simétrica y la otra antisimétrica.

$$u_{i,j} = e_{i,j} + \omega_{i,j} \quad (2.13)$$

Donde.

$$e_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \omega_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.14)$$

El tensor $e_{i,j}$ es llamado tensor de deformación, mientras que $\omega_{i,j}$ es llamado tensor de rotación.

De acuerdo a la figura (2.1) se tiene que para las deformaciones con respecto a x y y están definidas.

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle C'A'B' = \alpha + \beta \quad (2.15)$$

Para pequeñas deformaciones, $\alpha \approx \tan \alpha$ y $\beta \approx \tan \beta$ la deformación cortante puede ser expresada como.

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.16)$$

Reemplazando el valor de (2.16) en el tensor de deformación (2.14).

$$e_{12} = e_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (2.17)$$

Las relaciones para las componentes son.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.18)$$

Al reemplazar (2.18) en (2.4) podemos expresar la *ley generalizada de Hooke* en función de la deformación.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Partiendo de esta expresión general es posible determinar la forma de la matriz C para cada tipo de material dependiendo de las propiedades del mismo [14].

2.2. Las ecuaciones de compatibilidad

Las ecuaciones de compatibilidad son ecuaciones que si se cumplen garantizan la existencia de un campo de desplazamientos compatible con las deformaciones calculadas, lo que significa que en elasticidad lineal una deformación será físicamente posible si es compatible con un determinado campo de desplazamientos \mathbf{u} es decir si se cumplen las siguientes relaciones para las componentes del tensor deformación.

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en (2.18) se tienen las ecuaciones de compatibilidad *Saint Venant*.

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.20)$$

2.3. La relación deformación - desplazamiento

Sea $\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z$ el vector de desplazamiento en coordenadas cilíndricas.

La deformación se encuentra dada por $\nabla \mathbf{u}$, por tanto las componentes de la deformación en coordenadas cilíndricas [14].

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.21)$$

Donde la componente $\widehat{\mathbf{e}}_z = 0$ para este caso en particular.

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2 \quad (2.22)$$

Por tanto.

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0 \quad (2.23)$$

Teniendo en cuenta lo anteriormente descrito se sabe que.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_r & e_{r\theta} & e_{rz} \\ e_{r\theta} & e_\theta & e_{\theta z} \\ e_{rz} & e_{\theta z} & e_z \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Remplazando \mathbf{u} en la ecuación (2.21).

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z) \quad (2.25)$$

Si la componente en $z = 0$ y desarrollando la ecuación (2.25) con las condiciones (2.23) la expresión obtenida es.

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + u_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + u_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.26)$$

Aplicando (2.23) en (2.26) se tiene.

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.27)$$

De la anterior expresión podemos definir las siguientes relaciones.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
 \mathbf{e}_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.4. Las ecuaciones de equilibrio

El esfuerzo σ se encuentra definido matricialmente como.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_\theta & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} & \sigma_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Si se expresa el esfuerzo en términos de la tracción se tiene.

$$\sigma = \mathbf{e}_r \mathbf{T}_r + \mathbf{e}_\theta \mathbf{T}_\theta + \mathbf{e}_z \mathbf{T}_z \tag{2.30}$$

Donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_r &= \sigma_r \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{rz} \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{T}_\theta &= \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_r + \sigma_\theta \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{T}_z &= \sigma_{rz} \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_\theta + \sigma_z \mathbf{e}_z
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Las ecuaciones de equilibrio vienen dadas por el operador divergencia.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{2.32}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{T}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \boldsymbol{T}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \boldsymbol{T}_\theta}{\partial \theta} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} \mathbf{e}_z + \frac{1}{r} (\sigma_r \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{rz} \mathbf{e}_z) \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta - \sigma_\theta \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \right) \\ &+ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.34)$$

Organizando las ecuaciones de equilibrio de acuerdo a sus componentes se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + F_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Las relaciones dadas por las leyes de *Hooke's* relacionan el esfuerzo y la deformación plana de la siguiente manera.

Deformación Plana

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu e_r + \lambda(e_r + e_\theta) \\ \sigma_\theta &= 2\mu e_\theta + \lambda(e_r + e_\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu e_{r\theta}, \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Esfuerzo Plano

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu \sigma_\theta] \\ e_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu \sigma_r] \\ e_{r\theta} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}, e_{\theta z} = e_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Al expresar las relaciones de equilibrio dadas por (2.35) en términos de los desplazamientos se hace necesario reemplazar las expresiones (2.37) y (2.36) en (2.35), obteniendo de esta forma las ecuaciones de *Navier* [14].

Deformación Plana

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r &= 0 \\ \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esfuerzo Plano

$$\begin{aligned} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_r &= 0 \\ \mu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + \frac{E}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + F_\theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Donde ∇^2 es el *Laplaciano* definido como.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.40)$$

Ya establecidas correctamente las anteriores expresiones se deben proceder a determinar las ecuaciones de compatibilidad en función de los esfuerzos denominadas ecuaciones de *Michel y Beltrami* [14].

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = k(\nabla \cdot F(r, \theta)) \quad (2.41)$$

Deformación Plana

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.42)$$

Esfuerzo Plano

$$\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = -(1+\nu) \left(\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.43)$$

2.5. La función de Airy

Ahora se hace necesario expresar las componentes de los esfuerzos en relación de una función ϕ denominada función de *Airy*, esta fue introducida en 1862 por *G.B Airy* [3] la cual representa los esfuerzos en una función de una sola variable desconocida, facilitando encontrar la solución analítica exacta.

De acuerdo a esto se tiene que.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.44}$$

Ahora expresaremos las anteriores relaciones en coordenadas polares para esto se tiene que.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta\tag{2.45}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\tag{2.46}$$

Desarrollando las derivadas parciales se puede tener una equivalencia entre coordenadas dadas como:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\tag{2.47}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\tag{2.48}$$

Desarrollando las segundas derivadas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2\sin\theta\cos\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \right) \quad (2.49)\end{aligned}$$

De manera similar:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2\sin\theta\cos\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \sin\theta\cos\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} \right) \quad (2.51)$$

Los esfuerzos en coordenadas polares se encuentran dados por:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{xx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\cos^2\theta - 2\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta \\ \sigma_{r\theta} &= -\sigma_{xx}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\end{aligned} \quad (2.52)$$

Reemplazando las expresiones (2.44), (2.49), (2.50) y (2.51) en (2.52) se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right)\end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\nabla^2 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta^2} \quad (2.54)$$

Donde $\phi = \phi(r, \theta)$ es la función de *Airy*.

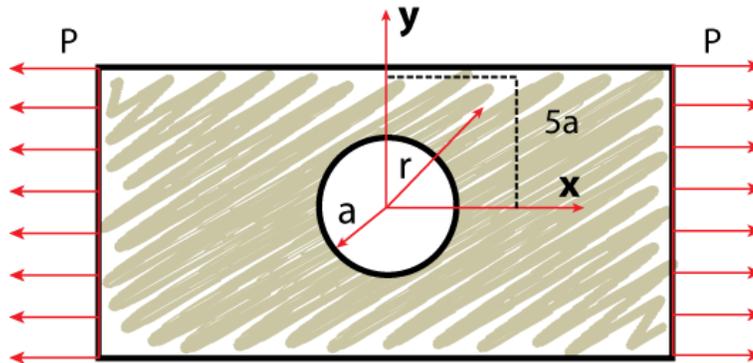
Ahora es posible reescribir las ecuaciones (2.42) y (2.43) en función de las expresiones (2.53), si no existe ninguna fuerza de cuerpo, la deformación y el esfuerzo plano se reduce a:

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (2.55)$$

2.6. La placa infinita con agujero concéntrico

El problema de *Kirsch* consiste en una placa infinita sometida a un esfuerzo uniaxial T con un agujero centrado de radio a como lo muestra la figura (2.3), para obtener la solución a este problema se hace necesario recurrir a la ecuación diferencial general de la teoría de placas [34] descrita (2.55).

Figura 2.3: Placa con agujero y esfuerzo axial.



Fuente: Autor del proyecto.

Para la solución de este problema es posible considerar una parte del plato debido a la simetría que se presenta con respecto al eje y , para empezar con la solución de este problema se deben establecer las siguientes condiciones de frontera en cuanto a los esfuerzos [6].

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad r = a \quad (2.56)$$

$$r \rightarrow \infty \begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (2.57)$$

Dada las anteriores condiciones se desarrollará la ecuación diferencial biarmónica (2.55), cambiando $\phi = f(r)\cos 2\theta$ y reemplazando éste valor en la ecuación anteriormente descrita se tiene una ecuación diferencial ordinaria, para la determinación de $f(r)$ se tiene que:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d^2 f}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right)\cos 2\theta = 0 \quad (2.58)$$

La solución de $f(r) = Cr^m$, por lo que resulta la siguiente ecuación para m .

$$(m-4)(m-2)m(m+2) = 0 \quad (2.59)$$

Las cuatro raíces que satisfacen la ecuación son:

$$m_1 = 4 \quad ; \quad m_2 = 2 \quad ; \quad m_3 = 0 \quad ; \quad m_4 = -2 \quad (2.60)$$

Por tanto la solución para $f(r)$ viene dada por:

$$f(r) = \left(Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D\right) \quad (2.61)$$

La función ϕ queda reescrita como.

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + C\frac{1}{r^2} + D\right)\cos 2\theta \quad (2.62)$$

Reemplazando esta función de esfuerzo en la ecuación (2.53):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.63)$$

Al evaluar las condiciones de frontera es posible determinar el valor de los coeficientes dando como resultado [6].

$$A = -\frac{\sigma}{4}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4\sigma}{4}, \quad D = \frac{a^2\sigma}{2} \quad (2.64)$$

Sustituyendo estos valores en (2.63) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.65)$$

Organizando la relación (2.65);

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \theta) &= \sigma \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos 2\theta + \cos 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta\right) \\ \sigma_{yy}(r, \theta) &= -\sigma \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta - \cos 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4} \cos 4\theta\right) \\ \sigma_{xy}(r, \theta) &= -\sigma \left(\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \sin 4\theta\right) + \frac{3a^4}{2r^4} \sin 4\theta\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Utilizando las ecuaciones (2.36) y (2.37) se encuentran las relaciones correspondientes a esfuerzo plano y deformación plana.

Las condiciones de frontera para los desplazamientos están dados por:

$$\begin{aligned} u &= 0 & x &= 0 \\ v &= 0 & y &= 0 \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.7. La conclusión

La mayor dificultad dentro de un problema de mecánica de sólidos con geometrías complejas es poder encontrar una solución analítica exacta al problema, en la mayoría de los casos es casi imposible. Debido a esto siempre se recurre a la solución de los problemas mediante la formulación variacional con el fin de encontrar una aproximación a la solución

del problema real, estos métodos deben utilizar funciones de prueba conocidas para poder verificar la aproximación del método numérico implementado.

La expresión (2.66) corresponde a la solución analítica de los esfuerzos para la solución del problema de Kirsch encontrada por Timoshenko [6], estas soluciones serán utilizadas como referentes para el cálculo de la precisión del método numérico *RPIM*, obteniendo comparaciones gráficas entre los métodos implementados, de acuerdo a los escenarios establecidos para su evaluación; por otro lado funcionan, como función de prueba para la solución de otros problemas de la mecánica de sólidos en los métodos numéricos.

El modelo numérico

Se plantea el desarrollo de la formulación variacional de manera discreta, aplicando las funciones de base radial como funciones de forma en los elementos libres de malla, con el fin de encontrar la solución del problema de *Kirsch*. Mencionaremos las funciones de interpolación más relevantes y las expresiones necesarias para calcular la eficiencia del método numérico.

3.1. La formulación

Al considerar un problema de elasticidad lineal en un espacio R^2 , se encuentra definido un dominio Ω con condiciones de frontera Γ cuyas ecuaciones se encuentran descritas como,

$$\text{Ecuación de Equilibrio : } \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.1)$$

$$\text{Condiciones de frontera naturales : } \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{i}} \quad \text{en } \Gamma_t \quad (3.2)$$

$$\text{Condiciones de frontera esenciales } \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (3.3)$$

Donde:

L: Operador diferencial.

b: Vector de esfuerzo externo al cuerpo.

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}\}$: Vector de esfuerzos.

$\mathbf{u}^T = \{u \quad v\}$: Vector de desplazamientos.

$\bar{\mathbf{i}}$: Tracción en las condiciones de frontera naturales.

$\bar{\mathbf{u}}$: Desplazamiento en las condiciones de frontera esenciales.

n: Vector unitario normal a la condición de frontera natural.

La forma variacional estándar para la ecuación (3.1) es planteada de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) está definida para un problema de dominio global Ω , donde \mathbf{D} es la matriz de constantes del material ¹. El primer término de la expresión es el trabajo virtual dado por el esfuerzo interno en el dominio Ω , el segundo término es el trabajo virtual por las fuerzas externas en Ω y el tercer término corresponde al trabajo virtual hecho por la tracción externa en la frontera Γ_t .

Por otro lado la aproximación de los desplazamientos sobre cualquier punto de interés, usando un conjunto de nodos en un subdominio de soporte local con respecto a un punto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(2x1)}^h &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\ &= \Phi_{(2x2n)} \mathbf{u}_{(2nx1)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La cual puede reescribirse como (3.6) como el aporte de cada subdominio local.

$$\mathbf{u}_{(2x1)}^h = \sum_I^n \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} = \sum_I^n \Phi_I \mathbf{u}_I \quad (3.6)$$

Donde Φ_I es la matriz de funciones de forma *RPIM* del nodo I mediante las funciones radiales de interpolación, y \mathbf{u}_I es el desplazamiento nodal del nodo I .

En la ecuación (3.5), \mathbf{u}^T es la aproximación de los desplazamientos de un punto de interés, el cual es un punto de evaluación dentro de la cuadratura (*Cuadratura de Gauss*).

Teniendo en cuenta que la formulación débil parte del principio del trabajo virtual dada por la expresión (3.4), de la expresión (3.6), el desplazamiento virtual se obtiene al multiplicar la expresión por δ .

$$\delta\mathbf{u}_{(2x1)}^h = \Phi_{(2x2n)} \delta\mathbf{u}_{(2nx1)} = \sum_I^n \Phi_I \delta\mathbf{u}_I \quad (3.7)$$

¹ \mathbf{D} esfuerzo ó deformación plana.

Es preciso calcular la deformación en función de los desplazamientos para esto se tiene que.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{(3 \times 1)} &= \mathbf{L} \mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \cdots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \cdots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\
 &= \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Expresado como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(3 \times 1)} = \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \tag{3.9}$$

Donde \mathbf{B} es la y \mathbf{B}_I es la matriz de deformación de nodo I .

De la misma manera.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^h &= \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \mathbf{B}_{(3 \times 2)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \sum_I^n (\mathbf{B}_I)_{(3 \times 2)} (\delta \mathbf{u}_I)_{(2n \times 1)}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ahora se obtiene el vector de esfuerzos usando las ecuaciones constitutivas en un punto del dominio Ω . La ecuación (3.10) debe satisfacer los n nodos al rededor del punto de interés \mathbf{x} , lo que implica que deben haber n ecuaciones lineales, una por cada nodo, podemos por tanto expresar estas ecuaciones de forma matricial.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &= \mathbf{D}_{(3 \times 3)} \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \sum_I^n \mathbf{D}_{(3 \times 3)} (\mathbf{B}_I)_{(3 \times 2)} (\mathbf{u}_I)_{(2n \times 1)}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sustituyendo (3.9) y (3.10) dentro del primer termino de (3.4), la expresión queda descrita como:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\sum_I^n \mathbf{B}_I \delta\mathbf{u}_I \right)^T \left(\sum_J^n \mathbf{D}\mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_I^n \sum_J^n \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J] \mathbf{u}_J d\Omega\end{aligned}\quad (3.12)$$

Reescribiendo la ecuación (3.12):

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J d\Omega \right) \mathbf{u}_J \quad (3.13)$$

Sea.

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_I^T)_{2 \times 3} \mathbf{D}_{3 \times 3} (\mathbf{B}_J)_{3 \times 2} d\Omega \quad (3.14)$$

\mathbf{K}_{IJ} es llamada matriz de rigidez, donde I y J corresponde al punto de integración de la cuadratura del dominio de soporte, la ecuación (3.12) puede reescribirse como.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J \quad (3.15)$$

Finalmente (3.13) puede escribirse como la ecuación (3.15) la cual debe satisfacer los n nodos al rededor del punto de interés \mathbf{x} , lo que implica que deben haber n ecuaciones lineales, una por cada nodo, podemos por tanto expresar estas ecuaciones de forma matricial.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega = \delta\mathbf{U}^T \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3.16)$$

Para el segundo término de la ecuación (3.4), podemos reemplazar (3.6).

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\Phi_I \mathbf{u}_I)^T \mathbf{b} d\Omega \quad (3.17)$$

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta\mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (3.18)$$

Donde

$$\mathbf{F}_I^b = \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (3.19)$$

\mathbf{F}_I^b es el vector de fuerza del campo del nodo I , y \mathbf{b} vector de fuerza de cuerpo del nodo I , la ecuación (3.17) puede reescribirse.

$$\sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{F}_I^b \quad (3.20)$$

$$\sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^b \quad (3.21)$$

Donde \mathbf{F}^b el vector de fuerza de cuerpo global, \mathbf{U}^T vector de desplazamientos global.

Para el tercer y último término el procedimiento es exactamente igual. Con la excepción que las fuerzas de cuerpo son reemplazadas por el vector de tracción y el dominio de integración se hacen sobre la frontera, de esta manera la expresión obtenida es:

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma = \sum_I^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma \quad (3.22)$$

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^T \sum_I^N \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma \quad (3.23)$$

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_I^{(t)} \quad (3.24)$$

$\mathbf{F}_I^{(t)}$ el vector de tracción de I -ésimo nodo:
De forma general.

$$\int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} \quad (3.25)$$

Donde $\mathbf{F}^{(t)}$ es el vector de tracción global.

Ya obtenidas las ecuaciones discretas se reescribe la ecuación (3.4) en función de las ecuaciones (3.16),(3.21) y (3.25).

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^b - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} = 0 \quad (3.26)$$

Factorizando,

$$\delta \mathbf{U}^T [\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^b - \mathbf{F}^{(t)}] = 0 \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) puede ser satisfecha, ya que $\delta \mathbf{U}^T$ es arbitrario.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} - \mathbf{F}^b - \mathbf{F}^{(t)} = 0 \quad (3.28)$$

O reescrita como.

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^b + \mathbf{F}^{(t)} \quad (3.29)$$

Reemplazando $\mathbf{F}^b + \mathbf{F}^{(t)}$ por \mathbf{F} , tenemos que:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) es la representación discreta del sistema de ecuaciones para RPIM *Mfree* de acuerdo a *G.R. Liu*[18], llamada como formulación débil, sin embargo se hace necesario establecer las condiciones de frontera esenciales sobre la expresión (3.30) para solucionar el problema de Kirsch.

3.2. La representación del dominio

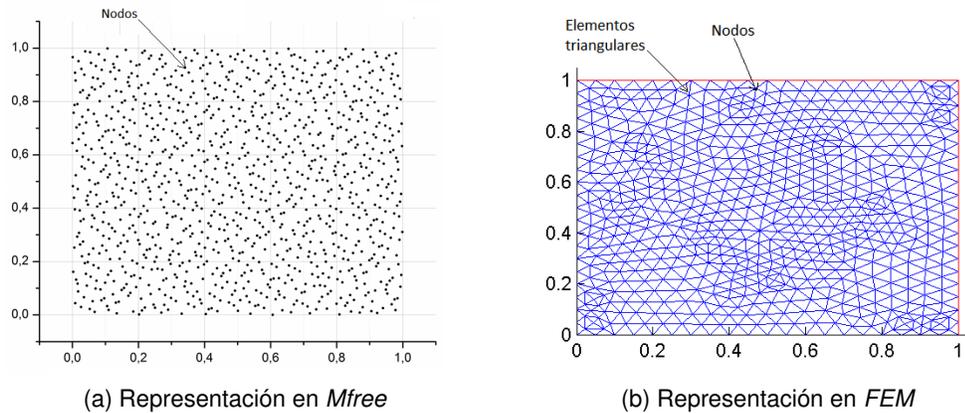
La representación del dominio y sus fronteras en los métodos numéricos convencionales se hace mediante mallas de tipo geométricas, estas mallas han sido clasificadas en dos: mallas estructuradas y mallas no estructuradas.

- *Mallas estructuradas*: se caracterizan por estar compuestas de celdas de un tamaño similar y del mismo tipo, por ejemplo, triángulos o rectángulos, en dos dimensiones, tetraedros o hexaedros en tres dimensiones. Estas mallas son mucho más fáciles de generar que las mallas no estructuradas.
- *Mallas no estructuradas*: permiten el uso de celdas de distinto tipo y/o de diferente tamaño. Estas mallas requieren de algoritmos y estructuras de datos más complejos que las anteriores, pero permiten modelar geometrías complejas y optimizar el número de celdas usadas de acuerdo a la necesidad de la aplicación.

Las definiciones descritas con anterioridad son válidas, con la diferencia que en la representación *MFree* en el dominio y sus límites son representados mediante un conjunto de nodos,

los cuales se encuentran dispersos sobre un dominio Ω ver (3.1), estos son llamados nodos de campo. Esta distribución no suele ser uniforme y aunque existen algoritmos para este tipo de distribución, no es necesario hacerla debido a que el método debe ser capaz de trabajar bajo cualquier condición.

Figura 3.1: Representación del dominio para MFree y FEM.



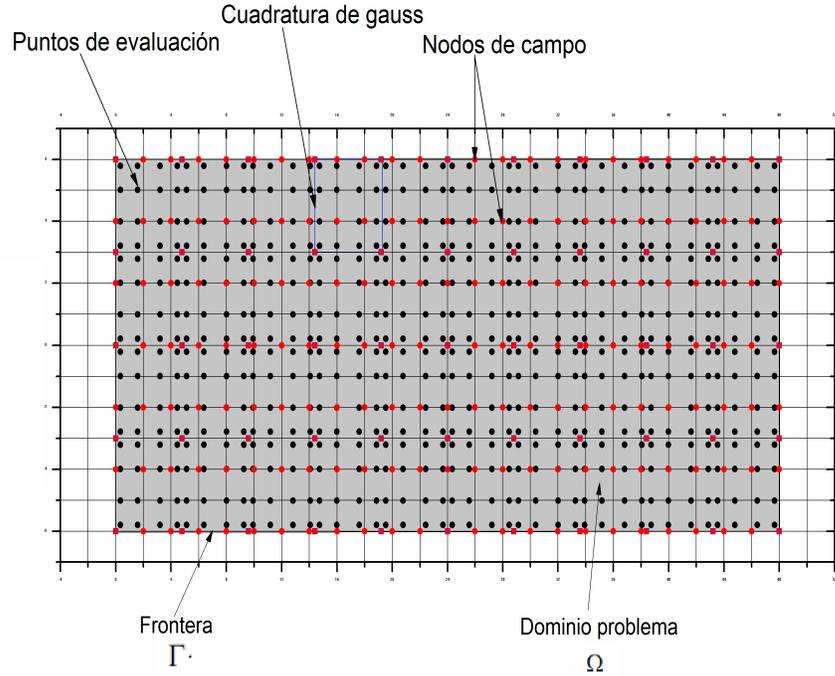
Fuente: Autor del proyecto.

Aunque la distribución de nodos puede ser; o no uniforme, existe una restricción en la distancia nodal sobre los nodos de distribución en el dominio de interpolación Ω , para esto se debe establecer primero un dominio de soporte ya que dicha restricción depende de este subdominio.

3.2.1. El dominio de soporte

Un dominio general Ω cualquiera puede ser representado como lo muestra la fig (3.2), el dominio se encuentra superpuesto sobre una cuadratura (*Cuadratura de Gauss*) y un campo de nodos sobre la superficie de manera irregular cuyo propósito es aproximar la variable de campo (desplazamiento).

Figura 3.2: Celdas y nodos de campo utilizadas en Mfree para un dominio Ω .



Fuente: Autor del proyecto.

Todo punto por fuera del dominio de apoyo local se considera cero en el método de *MFree*, por lo tanto las funciones de forma solo actúan sobre este dominio. Un soporte de dominio local de un punto \mathbf{x} determina el número de nodos que se utilizan para apoyar la aproximación del valor de la función a \mathbf{x} . Para *MFree* el dominio de soporte puede tener diferentes formas para el punto de interés \mathbf{x} .

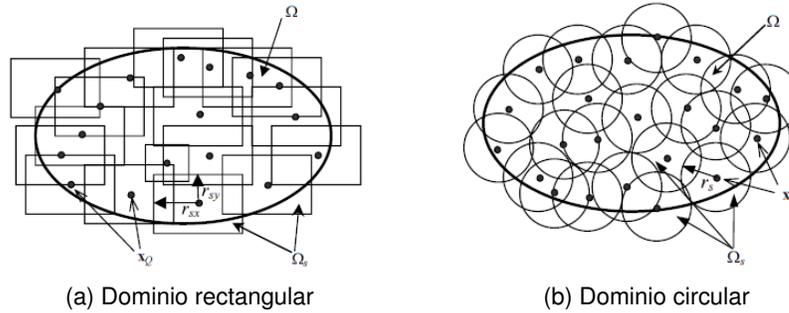
Las formas del dominio Ω local tienen establecidas algunas geometrías definidas, las más comunes son: rectangular y circular, éstas geometrías están acompañadas de las siguientes expresión ver (3.31).

$$\text{Subdominio} \quad \begin{aligned} r_{sx} &= \alpha_{sx} d_{cx} \\ r_{sy} &= \alpha_{sy} d_{cy} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Donde α_{sx} y α_{sy} son constantes adimensionales del dominio de soporte, generalmente por simplicidad $\alpha_{sx} = \alpha_{sy}$, d_{cx} y d_{cy} son el espaciado nodal en las direcciones x y y con respecto al punto de interpolación \mathbf{x}_Q . Si los nodos son distribuidos regularmente d_{cy} es simplemente la distancia entre dos nodos adyacentes en la dirección y , d_{cx} es simplemente la distancia entre dos nodos adyacentes en la dirección x .

Para un subdominio de tipo circular se hace necesario calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la ecuación (3.31), la representación gráfica de estos subdominios se muestran en la fig (3.3).

Figura 3.3: Representación de los dominios de soporte



Fuente: Autor del proyecto.

Teniendo en cuenta la geometría del dominio de soporte se hace necesario determinar la distribución nodal.

3.2.2. La determinación del espaciamiento nodal

El espaciamiento nodal depende de la dimensión espacial del dominio de soporte, es decir si el problema a solucionar se encuentra en un dominio unidimensional, bidimensional o tridimensional, de esta manera podemos establecer las representaciones para cada una de las dimensiones.

- El espaciamiento nodal para un elemento unidimensional está representado por la ecuación .

$$d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \quad (3.32)$$

Donde D_s es un estimado de d_s representado por la ecuación (3.31) en una dirección, aunque ésta no debe ser precisa debe aproximarse al valor real de d_s , n_{D_s} es el número de nodos cubiertos por el dominio D_s .

- Para un espaciamiento bidimensional la distribución está dada por:

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s} - 1}} \quad (3.33)$$

Donde A_s es el área estimada por el dominio de soporte d_s dado en la ecuación (3.31), de la misma manera éste parámetro no debe ser exacto, pero debe acercarse al valor real del dominio; n_{A_s} es el número de nodos cubiertos por el dominio A_s .

Las expresiones anteriormente descritas, son fundamentales para el diseño de un preprocesador para los elementos libres de malla, ya que el espaciamento y la cantidad de nodos de distribución influyen en la precisión del método numérico.

Ahora se establece las funciones de interpolación para la distribución nodal escogida dependiendo del espacio dimensional R del problema.

3.3. Las funciones de interpolación

La función de forma es el punto más importante dentro de los elementos libres de malla, la pregunta es: ¿Como crear una función de forma a través de los nodos arbitrariamente distribuidos, y no recurrir a una malla predeterminada y proporcionar una mayor exactitud en la solución del problema?

Un buen método para la construcción de las funciones de forma, debe satisfacer algunos requerimientos básicos; y es por eso que actualmente las investigaciones se concentran en la búsqueda del cumplimiento de estos aspectos.

- La distribución de los nodos pueden ser aleatorios dentro de lo razonable, esto permite que sea más flexible que los métodos de *FEM*.
- El algoritmo debe ser estable.
- Las funciones de forma deben cumplir con cierto orden de consistencia.
- El dominio para encontrar la variable de interpolación debe ser pequeño comparado con el problema (*dominio de soporte o influencia*).
- El algoritmo debe ser completamente eficiente y debe ser igual o superior que *FEM* en la eficiencia.
- La función de forma debe poseer la propiedad delta de *Kronecker*.

Sea u una componente de desplazamiento en un punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ dentro de un dominio, éste punto debe ser interpolado usando valores de la función de los nodos de campo, con pequeños soportes del dominio local del punto de \mathbf{x} [18].

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbf{x})u_i = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (3.34)$$

Donde n es el número de nodos que son incluidos en el dominio del soporte local al redor de \mathbf{x} , u_i es la variable de campo nodal del i -ésimo nodo, \mathbf{U}_s es el vector que contiene todas las variables de campo de los n nodos, y $\phi_i(\mathbf{x})$ es la función de forma del i -ésimo nodo determinado, usando los nodos incluidos en el dominio de apoyo de \mathbf{x} .

De acuerdo a la tabla [1.4] la categoría escogida para la deteminación de la función de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ está basada en funciones de base radial para la solución de nuestro problema, de la misma manera la función de interpolación MLS es desarrollada, ésta corresponde al método numérico EFG con el propósito de hacer una comparación entre métodos numéricos *Mfree*.

Teniendo en cuenta lo descrito anteriormente empezaremos por definir los tipos de interpolaciones utilizadas para la solución del problema.

3.3.1. Interpolación bicúbica de Lagrange

La interpolación bidimensional radica en el producto de dos polinomios unidimensionales de *Lagrange* descritos así:

$$N_i(x, y) = \Lambda_j^{(N_{enx}-1)}(x) * \Lambda_k^{(N_{eny}-1)}(y) \quad (3.35)$$

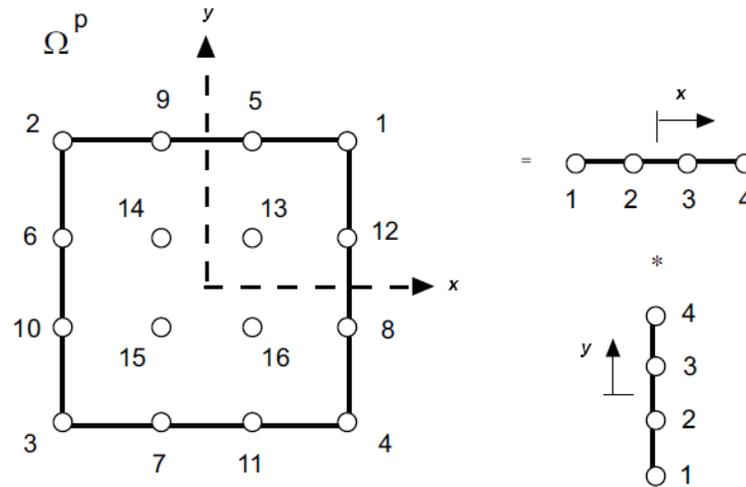
Donde i corresponde al nodo del elemento a calcular en el dominio Ω^P , j corresponde a la posición del nodo de la función de interpolación unidimensional al eje x , k corresponde a la posición del nodo de la función de interpolación unidimensional al eje y . Los super índices N_{enx}, N_{eny} indican el grado de la interpolación, para este caso 3 y Λ corresponde al polinomio de *lagrange* ver (3.36), la ecuación (3.35) para la interpolación bicúbica queda escrita como (3.37).

$$\Lambda_i^m(x) = \prod_{q=1, q \neq i}^{m+1} \frac{x - x_q}{x_i - x_q} \quad (3.36)$$

$$N_i(x, y) = \Lambda_j^3(x) * \Lambda_k^3(y) \quad (3.37)$$

Por otro lado la figura (3.4) muestra la distribución de los nodos sobre un dominio bidimensional, el cual está compuesto por dos elementos unidimensionales en las coordenadas x y y .

Figura 3.4: Dominio de distribución bicúbica *Lagrangiana*



Fuente: Autor del proyecto.

Para la obtención del valor del nodo 1 a partir de la ecuación (3.37) se hace necesario reemplazar los valores de los coeficientes de j y k , obsérvese que el punto de referencia se encuentra en el origen lo que muestra que el dominio Ω^P se encuentra distribuido entre $[-1, 1]$.

Los cálculos de la distribuciones nodales para un elemento bidimensional, mediante multiplicadores de Lagrange se muestran descritos en el Apéndice (??).

3.3.2. La función de forma polinomial PIM

El uso de polinomios como función de base de interpolación es uno de los esquemas mas fáciles de utilizar y ha sido ampliamente utilizado para el establecimiento de métodos numéricos como los *FEM*.

Se considera una función continua $u(\mathbf{x})$ en un dominio Ω de R^n que es representado por un conjunto de nodos de campo. La interpolación *PIM* de $u(\mathbf{x})$ en un punto de interés $u(\mathbf{x}_Q)$ es representado de acuerdo a Liu [8] como.

$$u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_Q) \quad (3.38)$$

Donde.

- $u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_Q)$: Representa la función de aproximación a $u(\mathbf{x})$.
- $p_i(\mathbf{x})$: Representa la base de monomios en el espacio coordenado $\mathbf{x}^T = \{x, y, z\}$.

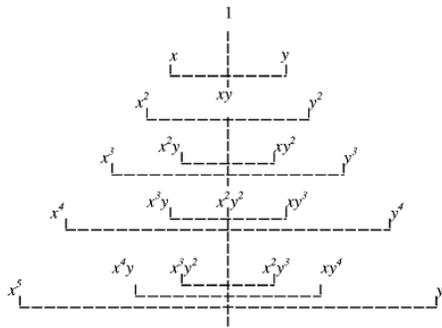
- n : Es el número de nodos en el dominio de influencia alrededor del punto \mathbf{x}_Q .
- $a_i(\mathbf{x}_Q)$: Son los coeficientes del monomio $p_i(\mathbf{x})$ correspondientes a \mathbf{x}_Q .

El vector \mathbf{a} es definido como.

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}_Q) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad (3.39)$$

El polinomio $p_i(\mathbf{x})$ es encontrado mediante el triángulo de Pascal definido como lo muestra la figura (3.5).

Figura 3.5: Triángulo de Pascal.



Fuente: Autor del proyecto.

La base para el dominio en una dimensión puede escribirse como.

$$\mathbf{p}^T(x) = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^n\} \quad (3.40)$$

La base para el dominio en dos dimensiones puede escribirse como.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^n, y^n\} \quad (3.41)$$

La base para el dominio en tres dimensiones puede escribirse como.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2, \dots, x^n, y^n, z^n\} \quad (3.42)$$

La base debe ser seleccionada de forma simétrica con el propósito de establecer una mejor distribución con los términos de mayor grado.

Los coeficientes a_i pueden ser determinados solucionando la ecuación (3.38) del tal forma que satisfaga los n nodos del dominio de soporte del punto \mathbf{x}_Q .

Para cada nodo i se tiene que.

$$u_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a} \quad i = 1 \sim n \quad (3.43)$$

Donde u_i es el valor del nodo de u cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, de tal forma que la relación (3.43) puede ser reescrita en forma matricial.

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (3.44)$$

Donde \mathbf{U} es el vector que contiene los valores de las variables de todos los n nodos.

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

\mathbf{P}_Q es llamada la matriz de momentos dada como.

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para el caso bidimensional se tiene que.

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & x_2^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n^2 y_n & x_n y_n^2 & x_n^3 & \cdots \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Despejando \mathbf{a} de la ecuación (3.44) podemos llegar a.

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{U}_s \quad (3.48)$$

Sustituyendo la expresión (3.48) en la ecuación (3.38) finalmente tenemos.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbf{x}) u_i \quad (3.49)$$

Expresando (3.49) en forma matricial.

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.50)$$

Donde $\Phi(\mathbf{x})$ es la función de interpolación definida por.

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}_Q^{-1} = [\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \phi_3(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})] \quad (3.51)$$

El inconveniente en el desarrollo de la técnica radica en la determinación de \mathbf{P}_Q^{-1} puesto que la matriz puede llegar a ser singular, y no sería posible obtener la función de interpolación $\Phi(\mathbf{x})$, esta singularidad depende de la mala elección de los monomios de la base y la distribución de nodos de campo sobre el dominio.

Ya que se trata de un método libre de malla es posible eliminar cualquiera de los nodos que conforman el dominio de soporte, pero no siempre resulta una buena estrategia eliminar aleatoriamente un punto, para esto se hace necesario formalizar y detectar de manera clara cuál de los nodos deben ser excluidos, ésto se hace mediante un algoritmo de búsqueda denominado *MTA* propuesto por G.R Liu [8].

Los puntos a eliminar deben ser los que menos contribuyen en la función de forma, o los que poseen menos peso en el dominio, generalmente estos puntos son los más alejados al punto de interés \mathbf{x}_Q .

Por otro lado la eliminación de un punto conlleva a eliminar un grado del polinomio ya que se debe tener en cuenta que el número de nodos deben ser iguales al grado del polinomio es decir $m = n$, para garantizar que la matriz sea de tipo cuadrada, esta eliminación depende sustancialmente de la distribución de los nodos y de su aporte o peso.

La descripción de dicho algoritmo es mostrado en el Anexo (??) y fue desarrollado en este trabajo no como función de forma para la solución del problema de *Kirsch*, si no como la primera función de interpolación, que dio paso a las funciones de forma RPIM en los elementos libres de malla.

3.3.3. La función de interpolación MLS.

Los mínimos cuadrados o (*MLS*), empezó como una técnica utilizada por los matemáticos para la reconstrucción de superficies y para el ajuste de datos. Actualmente es utilizada como una de las funciones de forma por los elementos libres de malla conocida como *MFree Galerkin*.

Las funciones de peso $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ de la interpolación deben cumplir con cuatro importantes condiciones .

- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0$ dentro del dominio de soporte.
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$ fuera del dominio de soporte.
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0$ monótona mente decreciente para el puntos de interés \mathbf{x} .
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ es suave sobre la frontera del Ω .

La última condición permite incluir o excluir los nodos de la frontera, con el fin de garantizar la compatibilidad de la función de forma de MLS sobre todo el dominio Ω .

Las funciones mas utilizadas en la práctica son la función exponencial y la función spline las cuales son descritas en la siguiente tabla ver [3.1].

Función	Expresión	Parámetro de Forma
Cúbica spline	$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0,5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0,5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases}$	$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i]}{r_w}$
Exponencial	$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\bar{r}_i}{\alpha}\right)^2} & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases}$	$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i]}{r_w}, \alpha$

Tabla 3.1: Funciones de peso MLS.

Donde $d_i = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_i]$ siendo la distancia desde el nodo \mathbf{x}_i al punto de muestreo \mathbf{x} , y r_w es el tamaño del dominio de soporte para la función de peso, α es una constante de la función de forma establecida por estudios de Liu [31].

3.3.4. La función de forma MLS.

Sea $u(x)$ una función de una variable de campo escalar definida en el dominio Ω . La aproximación de $u(x)$ a un punto x se encuentra denotado como $u(x)^h$, donde MLS escribe la función de campo como.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}_Q) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.52)$$

Donde $p_j(\mathbf{x})$ es un función de base en coordenadas, $x^T = [x, y]$ para un problema bidimensional, y m es el número de términos en la base. De la misma manera como las funciones de forma *PIM* estas funciones son calculadas mediante el triángulo de Pascal ver fig (3.5) y son utilizadas para suavizar dicha función o tener una mejor aproximación.

En la ecuación (3.52) $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ es un vector de coeficientes dado por.

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_m(\mathbf{x})\} \quad (3.53)$$

El vector de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ en la ecuación (3.53) es una función de \mathbf{x} . Estos coeficientes \mathbf{a} pueden ser obtenidos al minimizar la función de ponderación discreta siendo la norma de \mathbf{L}_2 .

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (3.54)$$

Donde n es el número de nodos en el dominio de soporte de \mathbf{x} para la cual la función de peso $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$, y u_i es el parámetro nodal de u cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, la ecuación (3.54) es una función ponderada de residuos, que se construye utilizando valores aproximados de los parámetros nodales desconocidos de la función de campo. Por esta razón en número de nodos, n , usado en la aproximación de *MLS* usualmente es mucho más largo que el número de coeficientes desconocidos.

La estacionalidad de J con respecto $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ esta dada por.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (3.55)$$

Lo cual proporciona el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.56)$$

Donde \mathbf{U}_s es el vector que colecciona todos los parámetros de los nodos de la función de campo, correspondientes a los nodos del dominio de soporte.

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n\}^T \quad (3.57)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es la matriz ponderada de momentos definida como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (3.58)$$

Donde

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3.59)$$

Para un problema bidimensional, usando una base ($m=3$) definida en por el triángulo de la figura (3.5), \mathbf{A} es una matriz simétrica de 3×3 que puede ser escrita como.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{3 \times 3}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \\ &= \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} \\ &+ \dots + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \widehat{W}_i \end{bmatrix}_{3 \times 3} \end{aligned} \quad (3.60)$$

La matriz \mathbf{B} de la ecuación (3.56) está definida como.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \widehat{W}_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & \widehat{W}_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \dots & \widehat{W}_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Resolviendo la ecuación (3.56) para $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ se tiene.

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.62)$$

Y sustituyendo la expresión (3.62) en la expresión (3.52) se obtiene:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi(\mathbf{x}) u_i = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.63)$$

Donde $\Phi(\mathbf{x})$ es el vector de *MLS* correspondiente a los n nodos del dominio de soporte del punto \mathbf{x} y la función de forma $\phi(\mathbf{x})$ para el i -ésimo nodo esta definida como.

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_i \quad (3.64)$$

Esta función será implementada como otro método numérico de comparación entre métodos.

3.3.5. Las funciones de interpolación de bases radiales.

Teniendo en cuenta la definición de una función de interpolación, la función de interpolación en función de una base radial se puede escribir como.

$$u(x) = \sum_{i=1}^m R_i(x)a_i \quad (3.65)$$

La función de base radial $R_i(\mathbf{x})$ es la distancia que existe entre el punto de interés \mathbf{x} y un nodo \mathbf{x}_i dentro de un dominio de soporte.

$$r = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \quad \text{para un problema 2D} \quad (3.66)$$

Las RBF mas típicas son:

Función	Expresión	Parámetro de Forma
Multi-quadratics (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, \quad q$
Gaussian (EXP)	$R_i(x, y) = \exp[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c}\right)^2]$	α_c

Tabla 3.2: Funciones de base radial (RBF).

Los parámetros de forma ²en la tabla (3.2) son valores determinados por el comportamiento de la solución, aunque son caso de estudio en la actualidad, existen algunos parámetros estándar dependiendo del enfoque del problema, si está relacionado con la mecánica de sólidos o con fluidos, estos parámetros de forma son establecidos en trabajos realizados por Liu ([18]), cuyos valores son mostrados en las tablas (3.3) y (3.4), para cada una de las funciones de forma.

³

² d_c es una característica del espaciamiento del dominio de soporte local con respecto al punto de interés \mathbf{x} .
³[18]

Función	Parámetros
MQ	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$
α_c	1.0
d_c	2.0
q	1.03
$\alpha_{sx} = \alpha_{sy}$	3.0

Tabla 3.3: Parámetros de la función radial MQ (α_c, d_c, q), Parámetros del Dominio de Soporte (α_{sx}, d_c).

Función	Parámetros
EXP	$R_i(x, y) = \exp\left[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c}\right)^2\right]$
α_c	1.0
d_c	2.0
$\alpha_{sx} = \alpha_{sy}$	3.0

Tabla 3.4: Parámetros de la función radial EXP (α_c, d_c), Parámetros del Dominio de Soporte (α_{sx}, d_c)

Teniendo en cuenta estos parámetros, las funciones de base radial puras, como las presentadas en la tabla (3.2), dentro de los elementos libres de malla, no siempre cumplen con la reconstrucción exacta de un polinomio lineal, teniendo como consecuencia la singularidad de la matriz de momentos, debido a esto se hace necesario adicionar polinomios que permitan cumplir con dicha condición esencial para el método sin malla, sin necesidad de producir efectos adversos sobre el desempeño de dicha función de forma. Estos polinomios adicionales son tomados del triángulo de pascal y son llamados polinomios base y tienen la capacidad de garantizar que dicha matriz de momentos sea invertible. A parte de mejora la estabilidad de interpolación al momento de obtener dicha matriz [29].

3.3.6. La función de forma RPIM.

De acuerdo a Liu [8] la función de interpolación *RBF* con polinomios adicionales puede ser escrita como.

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})b_j = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{b} \quad (3.67)$$

Donde $R_i(\mathbf{x})$ es una función de base radial (RBF), n es el número de RBFs, $p_j(\mathbf{x})$ es un monomio en el espacio coordenado $\mathbf{x}^T = [x, y]$, y m es el número de polinomio base utilizados, para un caso $2D$ si $m=3$ $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y) = 1, x, y$, cuando $\mathbf{m} = 0$ la ecuación (3.67) se convierte en una RBFs completamente pura. Los coeficientes a_i y b_j son constantes que deben ser determinados dependiendo de la base escogida en el dominio ⁴.

La ecuación (3.67) debe satisfacer los n nodos alrededor del punto de interés \mathbf{x} , lo que implica que deben haber n ecuaciones lineales, una por cada nodo, se puede por tanto expresar estas ecuaciones de forma matricial como.

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{R}_0\mathbf{a} + \mathbf{P}_m\mathbf{b} \quad (3.68)$$

Donde el vector de valores \mathbf{U}_s de desplazamiento es:

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 u_2 \cdots u_n\}^T \quad (3.69)$$

La matriz de momentos RBFs es:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \cdots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \cdots & R_n(r_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \cdots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{(n \times n)} \quad (3.70)$$

La matriz de momentos polinomial.

$$\mathbf{P}_m^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{(m \times n)} \quad (3.71)$$

El vector de coeficientes para RBFs es

$$\mathbf{a}^T = \{a_1 a_2 \dots a_n\} \quad (3.72)$$

El vector de coeficientes para los polinomios es

$$\mathbf{b}^T = \{b_1 b_2 \dots b_n\} \quad (3.73)$$

Por otro lado r_k en $R_i(r_k)$ está definido como.

⁴Generalmente el valor de la base tiene un coeficiente $m = 3$ para un problema bidimensional

$$r_k = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \quad (3.74)$$

Debido a que existe $m + n$ variables en la ecuación (3.68). La adición de m ecuaciones solo puede ser adicionada si se tiene en cuenta la siguiente consideración:

$$\sum_{i=1}^n p_j(\mathbf{x}_i) a_i = \mathbf{P}_m^T \mathbf{a} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.75)$$

Al combinar las ecuación (3.68) y (3.75) tenemos como resultado la expresión matricial:

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{a}_0 \quad (3.76)$$

Donde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{P}_m \\ \mathbf{P}_m^T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{a}_0^T = \{a_1 a_2 \cdots a_n b_1 b_2 \cdots b_m\} \quad (3.78)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_s = \{u_1 u_2 \cdots u_n 0 0 \cdots 0\} \quad (3.79)$$

Debido a que la matriz \mathbf{R}_0 es simétrica, la matriz \mathbf{G} debe ser también simétrica, resolviendo (3.76) tenemos.

$$\mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (3.80)$$

Reescribiendo (3.67).

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{b} = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

Reemplazando (3.80) en (3.81).

$$u(\mathbf{x}) = \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\} \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_s = \Phi^T(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{U}}_s \quad (3.82)$$

Donde la función de forma RPIM puede ser expresada como.

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^T(\mathbf{x}) &= \{\mathbf{R}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\} \mathbf{G}^{-1} \\ &= \{\phi_1(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) \cdots \phi_n(\mathbf{x}) \phi_{n+1}(\mathbf{x}) \cdots \phi_{n+m}(\mathbf{x})\} \end{aligned} \quad (3.83)$$

Finalmente la función de forma correspondiente al espaciado nodal es el vector $\Phi^T(\mathbf{x})$ que está definido como:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \phi_2(\mathbf{x}) \cdots \phi_n(\mathbf{x})\} \quad (3.84)$$

La ecuación (3.81) puede ser finalmente reescrita como:

$$u(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (3.85)$$

RPIM tiene la propiedad de partición unitaria la cual es demostrada por Gr. Liu [18], por tanto.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = 1 \quad (3.86)$$

Esta representación será utilizada como función de forma dentro de la discretización de la formulación variacional (3.30).

3.4. Las condiciones de frontera

Las condiciones de tracción (3.2) se obtienen al utilizar la formulación débil de Galerkin a partir del principio del trabajo virtual, dichas condiciones son llamadas condiciones de frontera naturales o de *Neumann*. Si se observa detenidamente la expresión (3.4) carece de la condición de desplazamiento o de *Dirichlet* sobre la frontera (3.3), estas no se encuentran desarrolladas sobre el proceso de la formulación débil. Dicha condición se conoce como condición esencial de frontera y es requisito indispensable para cumplir con las ecuaciones de compatibilidad planteadas en los métodos que se basan en el principio de mínima energía, sin esta condición el balance de energía no se cumple y se hace necesario restringir una sobre carga o función de incompatibilidad en las ecuaciones de equilibrio.

3.5. Las nuevas formulaciones

Todos los procesos físicos reales toman valores concretos y determinados, en muchos casos las ecuaciones de equilibrio son insuficientes para el cálculo de alguna propiedad formando un sistema de ecuaciones indeterminadas, por esta razón las ecuaciones de equilibrio deben tener una información adicional para establecer, que el problema sea totalmente compatible. La característica de determinación se tiene, si se introducen ecuaciones que expresan los desplazamientos reales en función del resto de variables, esto permite tener un sistema totalmente compatible.

El cumplimiento de las condiciones de frontera esenciales en los *FEM* pueden ser utilizadas en el método de los elementos libres de malla o *Meshfree*, para esto se debe partir de la restricción o modificación del *Hamiltoniano* para poder cumplir con las condición esencial de frontera.

Dado un vector de k condiciones, donde la aproximación de las variables de campo no pueden satisfacer la condición dada por (3.87).

$$C(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} C_1(\mathbf{u}) \\ C_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ C_k(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.87)$$

Donde \mathbf{C} es una matriz de coeficientes, se hace necesario buscar un Lagrangiano funcional a un punto, que sea estacionario para cumplir con la restricción (3.87). Existen dos métodos muy comunes que generan esa modificación funcional. Estos son el método de Penalty y el método de multiplicadores de Lagrange.

3.5.1. El método de la función Penalty

Dada la ecuación (3.87) es posible construir un funcional.

$$C^T \alpha C = \alpha_1 C_1^2 + \alpha_2 C_2^2 + \cdots + \alpha_k C_k^2 \quad (3.88)$$

Donde α es una matriz diagonal dada por.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son los factores penalty. Estos valores son constantes y positivos. En cualquier caso $C^T \alpha C$ debe ser siempre no negativo y puede ser cero solo si las condiciones de la ecuación (3.87) son satisfechas. Por otro lado la condición $C^T \alpha C$ debe garantizar de la mejor manera la restricción de la ecuación (3.87).

$$\delta(C^T \alpha C) = 0 \quad (3.90)$$

Al desarrollar la expresión (3.90), usando la regla de la cadena:

$$\delta(C^T \alpha C) = 2C^T \alpha \delta C = 2\delta C^T \alpha C = 0 \quad (3.91)$$

Conduciendo a la siguiente condición de minimización:

$$\alpha C(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 C_1(\mathbf{u}) \\ \alpha_2 C_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \alpha_k C_k(\mathbf{u}) \end{array} \right\} = 0 \quad (3.92)$$

Si $\alpha_i = 0$, las condiciones de frontera no se cumplen en lo absoluto por que para cualquier C_i también deben ser satisfechas todas las íesimas ecuaciones de (3.87), si α_i tiende a infinito, las condiciones esenciales se cumplen completamente, por que C_i debe ser de orden cero para satisfacer la ecuación (3.87).

De acuerdo al análisis hecho la modificación Lagrangiana debe ser escrita como:

$$\bar{L} = L + \frac{1}{2} \int_{\Omega} C^T(u) \alpha C(u) d\Omega \quad (3.93)$$

El valor $\frac{1}{2}$ se utiliza para compensar el 2 producido por el operador variacional de la ecuación (3.91).

El factor α es un valor conocido y constante que debe tender al infinito, lo cual es imposible para la práctica, pero un número de gran tamaño permite cumplir con la condición para el cumplimiento de las condiciones de frontera. Entonces se hace necesario establecer la forma de encontrar el valor de α de tal manera que no sea tan grande pero al mismo tiempo, no tan pequeño.

3.5.2. La determinación del factor Penalty

Zienkiewicz ha sugerido la expresión (3.94) para la determinación del factor α .

$$\alpha = \text{constante} \left(\frac{1}{h} \right)^n \quad (3.94)$$

En los *FEM* h es una característica de longitud, la cual puede ser una relación entre el tamaño de elemento y la dimensión del dominio problema y n es el orden de los elementos.

Al extender esta formulación a los elementos libres de malla, el valor de h es el radio ó el espaciamento nodal del problema, y $n = 1$. La constante de la ecuación (3.94) está relacionada con la propiedad del material el módulo de *Young*, multiplicado por un factor de $10^{(5-8)}$.

$$\alpha = 1,0 * 10^{5-8} * \text{Modulo de Young} \quad (3.95)$$

3.5.3. El método de multiplicadores de Lagrange

En el método de los multiplicadores de Lagrange, la modificación Lagrangiana es escrita como:

$$\tilde{L} = L + \int_{\Omega} \lambda^T C(u) d\Omega \quad (3.96)$$

Donde λ es un vector de multiplicadores de Lagrange está dado por.

$$\lambda^T = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_k\} \quad (3.97)$$

Los multiplicadores de Lagrange son funciones desconocidas de coordenadas independientes en el dominio Ω . Con la modificación del Hamiltoniano se busca la estacionalidad.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L} dt = 0 \quad (3.98)$$

En el proceso de discretización del sistema de ecuaciones, los multiplicadores de Lagrange deben ser aproximados de manera similar que las funciones de campo, incrementando de manera sustancial los cálculos debido a su implementación, ya que esta debe hacerse de manera más rigurosa para cumplir con las restricciones establecidas.

Teniendo en cuenta las dos formas de establecer las condiciones de frontera se debe reescribir las nuevas fórmulas variacionales.

3.5.4. La formulación variacional con Penalty

La formulación débil de Galerkin (3.85) queda descrita como:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \alpha (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (3.99)$$

La discretización de la ecuación (3.88) es similar a la expresión obtenida en la relación (3.30) con la adición de la condición de frontera esencial.

$$[K + K^\alpha]U = F + F^\alpha \quad (3.100)$$

Donde \mathbf{U} es un vector que contiene todos los desplazamientos nodales del dominio, \mathbf{K}^α es llamada matriz de rigidez Penalty definida como (3.101), la cual debe ser ensamblada en la matriz de rigidez general \mathbf{K} .

$$K_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \Phi_J d\Gamma \quad (3.101)$$

La matriz K_{IJ}^α tiene dimensiones 2×2 .

El vector Penalty de fuerzas F^α es causado por las condiciones de frontera esenciales y de la misma manera éste debe ser ensamblado en el vector F general.

$$F_I^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \bar{u} d\Gamma \quad (3.102)$$

La integración de la matriz y el vector Penalty se obtienen usando el método de la cuadratura de Gauss.

La expresión (3.100) es la discretización de la formula variacional (3.99) y tiene la propiedad de no incluir un nuevo sistema de ecuaciones para su solución.

3.5.5. La formulación variacional con Lagrange

La formulación débil de Galerkin (3.85) utilizando multiplicadores de Lagrange queda descrita como:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\lambda^T (\mathbf{u} - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (3.103)$$

Los dos últimos términos son producidos por los multiplicadores de Lagrange λ que pueden ser vistos como pequeñas fuerzas que forzan a que $u - \bar{u} = 0$.

Se hace necesario discretizar la formulación establecida, Los multiplicadores de Lagrange λ , las cuales son funciones desconocidas de las coordenadas, se hace necesario interpolar usando los valores nodales de la función de forma para los nodos de las condiciones esenciales de frontera.

$$\lambda^h = \begin{Bmatrix} \lambda_u \\ \lambda_v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & N_{n_\lambda} & 0 \\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_{n_\lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{u_1} \\ \lambda_{v_1} \\ \vdots \\ \lambda_{un_\lambda} \\ \lambda_{vn_\lambda} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}(\mathbf{s})_{(2 \times 2n_\lambda)} \lambda_{(2n_\lambda \times 1)} \quad (3.104)$$

Donde n_λ es el número de nodos usados por la interpolación, N_I es la función de forma para el i -ésimo nodo de la condición esencial, s es la longitud del arco a lo largo de la condición esencial de frontera, λ es el vector de multiplicadores de Lagrange de los campos de nodos en las condiciones esenciales de frontera, reescribiendo la expresión (3.104):

$$\lambda_{(2 \times 1)} = \sum_I^{n_\lambda} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_{u_I} \\ \lambda_{v_I} \end{Bmatrix} = \sum_I^n \mathbf{N}_I \lambda_I \quad (3.105)$$

N_I es la matriz de la función de forma para el i -ésimo nodo en las condiciones esenciales de frontera, descrita por la ecuación (3.36), una interpolación lineal con $n = 1$.

$$N_0(s) = \frac{(s - s_1)}{(s_0 - s_1)}, \quad N_1(s) = \frac{(s - s_0)}{(s_1 - s_0)} \quad (3.106)$$

En un simple caso, las condiciones esenciales de frontera están discretizadas usando segmentos lineales. Los multiplicadores de Lagrange con s están interpolados usando dos nodos en los extremos del segmento lineal.

Reescribiendo la ecuación (3.104).

$$\delta \lambda^h = \mathbf{N} \delta \lambda \quad (3.107)$$

Reemplazando la expresión (3.107) en el cuarto término de la expresión (3.103) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (\mathbf{u} - \bar{u}) d\Gamma &= \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_{I=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_I \lambda_I \right)^T \sum_{J=1}^n \Phi_J \mathbf{u}_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_{I=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_I \lambda_I \right)^T \bar{u} \\ &= - \sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^n \delta \lambda_I^T \mathbf{G}_{IJ}^T \mathbf{u}_J + \sum_{I=1}^{n_\lambda} \delta \lambda_I^T \mathbf{q}_I \\ &= \delta \Lambda^T \left(-\mathbf{G}_{(2n_\lambda \times 2N)}^T \mathbf{U}_{s(2n_\lambda \times 1)} + \mathbf{Q}_{(2n_\lambda \times 1)} \right) \end{aligned} \quad (3.108)$$

Donde Λ es un vector que contiene todos los multiplicadores de Lagrange en la frontera, n_{λ_I} es el número total de nodos en la frontera, y \mathbf{G}_{IJ} es la matriz nodal definida como:

$$\mathbf{G}_{IJ}^T = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \Phi_J d\Gamma \quad (3.109)$$

El vector q_I es un vector definido como:

$$\mathbf{q}_I = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \bar{u} d\Gamma \quad (3.110)$$

De la misma manera, el último término de la ecuación (3.103) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} (\Phi \delta \mathbf{u})^T \lambda d\Gamma &= \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I \delta \mathbf{u} \right)^T \left(\sum_J^{n_\lambda} \mathbf{N}_J \lambda_J \right)^T \\ &= - \sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^N \delta \mathbf{u}_J^T \mathbf{G}_{IJ}^T \lambda_J \\ &= - \delta \mathbf{U}_s^T \mathbf{G} \Lambda \end{aligned} \quad (3.111)$$

Sustituyendo las expresiones (3.27), (3.108) y (3.111) en la expresión (3.103).

$$\delta \mathbf{U} [\mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}] + \delta \Lambda (\mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{Q}) + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{G} \Lambda = 0 \quad (3.112)$$

Reorganizando (3.112).

$$\delta \mathbf{U}^T [\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{G} \Lambda - \mathbf{F}] + \delta \Lambda^T (\mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (3.113)$$

Donde K es la matriz global de esfuerzos y F es el vector general de fuerzas, debido a que δU y $\delta \Lambda$ son arbitrarios, por esta razón el sistema solo puede ser satisfecho si:

$$\begin{cases} \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{G} \Lambda = 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{Q} = 0 \end{cases} \quad (3.114)$$

Matricialmente el sistema de ecuaciones queda descrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times (2N+2n_{\lambda t})} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Lambda \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix}_{(2N+2n_{\lambda t}) \times 1} \quad (3.115)$$

El sistema (3.115) es la discretización del sistema (3.103), y a diferencia del método Penalty este método incrementa el número de variables por lo que automáticamente incrementa el sistema matricial para la solución de las ecuaciones, reduciendo así la eficiencia en el método.

Teniendo en cuenta la discretización de las ecuaciones y la solución analítica del problema se hace necesario desarrollar la comparación de las dos soluciones, mediante un estimador del error.

El estimador del error

La solución de un problema mediante un método numérico siempre presenta una diferencia frente al sistema físico que representa, dicha diferencia es conocida como error y es casi imposible de eliminar dicha discrepancia.

Estos errores pueden ser catalogados dentro de tres grupos.

- Error de simplificación del modelo: Se presenta debido a la idealización del problema para poder ser abordado.
- Error de discretización: Se presenta al pasar el problema desde un dominio continuo a un dominio de tipo discreto.
- Error numérico: Producido por errores de redondeo y la no utilización de métodos numéricos adecuados.

El conocimiento del error, su magnitud y distribución en la aproximación, permite controlar la precisión de la técnica numérica, los algoritmos a utilizar, y finalmente la fiabilidad de los resultados.

El calculo del error generalmente está definido como la diferencia entre la solución analítica y el valor obtenido por el método numérico como:

$$e = u - u^h \quad e_\sigma = \sigma - \sigma^h \quad (4.1)$$

Donde σ^h y u^h son el esfuerzo y el desplazamiento calculado por *Mfree*.

La definición (4.1) no es conveniente para el proceso de la estimación del error, por esta razón el estimador basado en la reconstrucción de la solución introducido por Zienkiewicz y Zhu (1987), debido a que dicho método es uno de los más utilizados robustos y simples de implementar. Utilizando la norma del principio de mínima energía **E**: [15].

$$\|\mathbf{E}\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{eT}(x) \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^e(x) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (4.2)$$

El error local en un punto $x = x_i$ puede ser descrito como.

$$\|\mathbf{e}(x_i)\| = \left\{ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}(x_i) - \boldsymbol{\sigma}^h(x_i))^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}(x_i) - \boldsymbol{\sigma}^h(x_i)) \right\}^{1/2} \quad (4.3)$$

Donde permite calcular la norma de la energía de cualquier nodo i hasta N . Al sumar el aporte de todos los puntos sobre el dominio Ω la expresión puede ser descrita como:

$$\mathbf{u}_h = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^h)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (4.4)$$

Se puede calcular el error local para el i -ésimo nodo así:

$$\eta_i = \frac{\|\mathbf{e}(x_i)\|}{\|\mathbf{e}(x_i)\| + \|\mathbf{u}_h\|_i} \quad (4.5)$$

El error relativo η para el problema se describe como,

$$\eta = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{n} \quad (4.6)$$

Estas expresiones permitirán establecer la precisión del método numérico utilizado, y definir cuál de los escenarios es mucho más estable para la implementación del método numérico.

La implementación numérica

De acuerdo a lo descrito en el primer capítulo, el método numérico *Mfree RPIM* está basado en una formulación débil, esta afirmación permite pasar de manera directa de los *FEM* a los *Mfree* ya que la discretización de la formulación variacional es exactamente igual para la dos métodos, la diferencia se encuentra específicamente en la utilización de las funciones de forma y la representación de los subdominios de interpolación. Teniendo en cuenta esta aclaración éste capítulo será dedicado a solucionar estas dos grandes diferencias entre los métodos *Mfree* y los *FEM*.

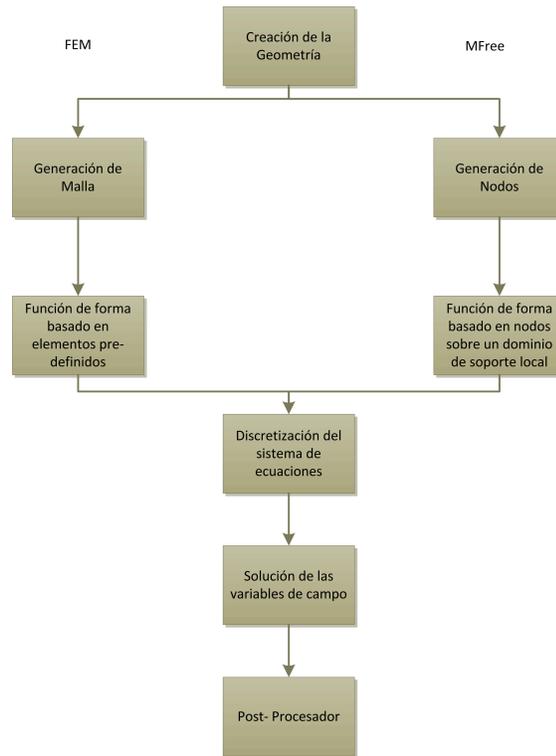
5.1. Los algoritmos

La implementación del método numérico se encuentra dividido en tres partes, Pre-procesador, Procesador y Post-procesador.

- Pre-procesador: encargada de generar una malla sobre el dominio Ω , mediante elementos pre-definidos.
- Procesador: encargada de solucionar las variables de campo del dominio Ω establecido.
- Post-procesador: encargada de visualizar los datos obtenidos por el procesador.

El diagrama de flujo general utilizado por el método numérico clásico FEM y el método libre de malla *Mfree* puede ser representado por la figura (5.1).

Figura 5.1: Diagrama de flujo general de los métodos FEM y Mfree



Fuente: Autor del proyecto.

El diagrama muestra que los dos métodos comparten similitudes de implementación especialmente en la discretización del sistema de ecuaciones y su solución, la diferencia se encuentra específicamente en el mallado del dominio de soporte Ω , cuya definición cambia en los elementos libres de malla Mfree a generación de nodos de campo y por tal razón se debe incluir un nuevo concepto conocido como los dominios de soporte, establecidos para la implementación de las funciones de forma.

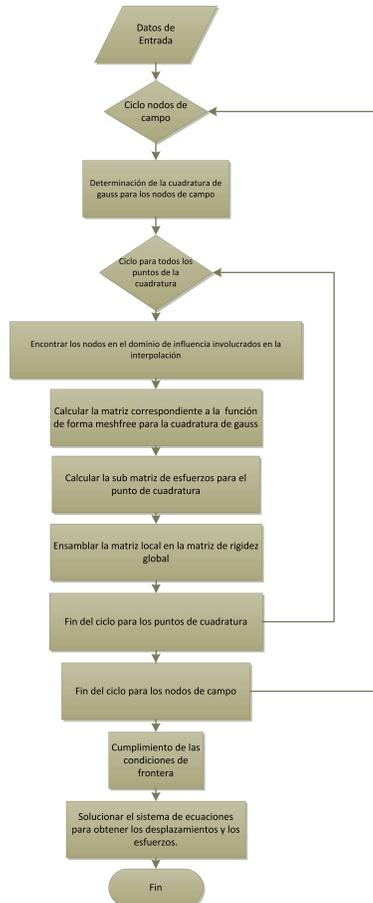
Debido a estas similitudes mostradas, el problema de los métodos libres de malla radica en la solución de las nuevas definiciones mencionadas con anterioridad, la implementación de la función de forma representada por la expresión (3.84) para el cálculo de la matriz de momentos (3.14), la expresión (3.31) para el cálculo del dominio de soporte, quien debe determinar cuántos nodos Mfree están distribuidos dentro del subdominio para la función de forma.

Las dos funciones implementadas en orden de ejecución para la implementación del método Mfree son:

1. $v = \text{domainc}(gpos, Malla, ds(1, :), numnod);$
2. $[Phi, dPhix, dPhiy] = RPIM(gpos(1, 1), gpos(2, 1), PDominiok, L, q, alphac, dc, nRBF, mbasis);$

Estas dos funciones se representan en la figura (5.2) del digrama general del método Mfree.

Figura 5.2: Diagrama Mfree



Fuente: Autor del proyecto.

Se describe a continuación de manera específica el comportamiento de las funciones que difieren de los métodos numéricos convencionales.

5.1.1. La implementación de la función *domainc*

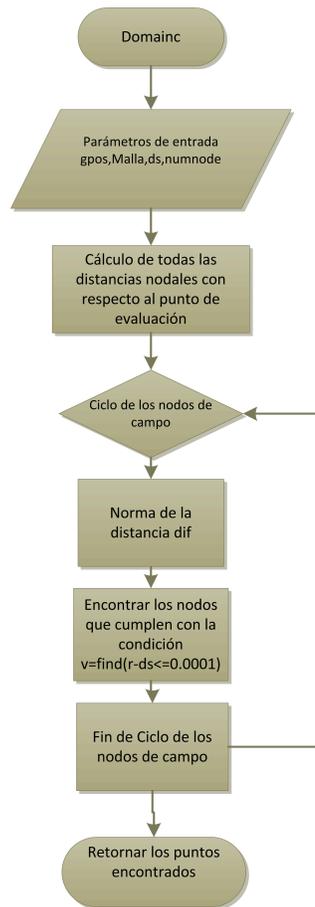
El primer paso es definir los parámetros de la primera función encargada de establecer los puntos Mfree que hacen parte del dominio de soporte.

- $v = \text{domainc}(gpos, Malla, ds(1, :), numnod);$.
- *gpos*: Es un vector que contiene un punto de evaluación x_Q proporcionado por la cuadratura de gauss, el jacobiano correspondiente a ese punto de evaluación y sus pesos.
- *Malla*: Posición cartesiana de los nodos Mfree sobre el dominio Ω .

- $ds(1,:)$: Longitud del dominio de soporte de interpolación: Circular $ds(1,:)$, Cuadrado $ds(1,2)$.
- $numnod$: Número de nodos Mfree.
- v : Vector que contiene la información de los nodos incluidos dentro del dominio de soporte d_s .

El diagrama de flujo correspondiente a la función implementada se muestra en la fig (5.3).

Figura 5.3: Diagrama de flujo de la función *domainc*



Fuente: Autor del proyecto.

Esta estructura es la encargada en determinar los puntos que hacen parte del dominio de soporte para su posterior evaluación en las funciones de forma.

5.1.2. La implementación de la función de forma

La implementación de la función de forma RPIM es la parte esencial del método numérico Mfree, y es una de las dos características que hace diferencia entre un método numérico

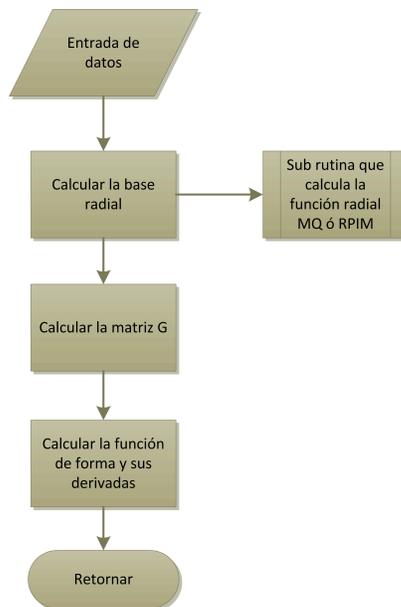
convencional como el FEM y los elementos libres de malla.

Los parámetros que definen la función de forma RPIM son los siguientes.

- $[Phi, dPhix, dPhiy] = RPIM(gpos(1, 1), gpos(2, 1), PDominiok, L, q, alphac, dc, nRBF, mbasis);$
- $gpos$: Contiene el punto de evaluación x_Q de la cuadratura de gauss.
- $PDominiok$: Contiene la posición de todos los puntos que hacen parte del dominio de influencia para ser interpolados.
- L : Longitud del dominio Ω .
- q : Parámetro de la función de forma ver [3.3].
- $alphac$: Parámetro de la función de forma ver [3.3].
- dc : Característica del espaciamiento del dominio de soporte local con respecto al punto de interés x_Q .
- $nRBF$: Función de base radial utilizada para calcular la función de forma.
- $mbasis$: Orden del polinomio para la generación de una función de base radial no pura.
- $[Phi, dPhix, dPhiy]$: Contiene los valores de la función de forma en conjunto con sus derivadas.

Estos parámetros son necesarios para cumplir con el diagrama de flujo representado en la (5.4) para la obtención de las funciones de forma para el método Mfree.

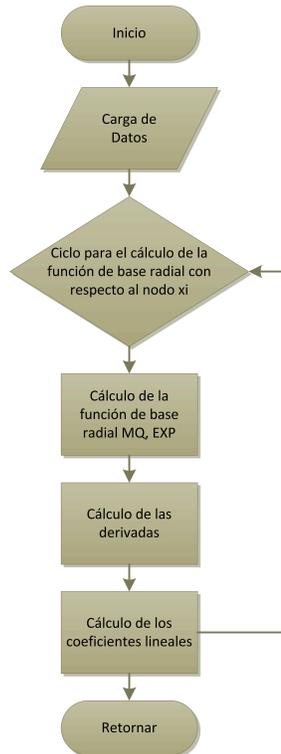
Figura 5.4: Diagrama para el cálculo de la función de forma RPIM.



Fuente: Autor del proyecto.

La figura (5.4) muestra una subrutina que contiene la evaluación de las funciones de base radial, las dos funciones establecidas se encuentran descritas en la tabla [1.2], y el diagrama de flujo correspondiente para el cálculo de estas funciones se muestran en la figura (5.5).

Figura 5.5: Funciones de base radial MQ y EXP.



Fuente: Autor del proyecto.

Este algoritmo establece el cálculo de la función de base radial no pura, donde se adiciona los polinomios base para garantizar la inversibilidad de la matriz y obtener las funciones de forma correspondientes al punto de evaluación x_i .

5.1.3. Las funciones *CellGaussPoints* y *SOLEXP*

Se hace necesario mencionar algunas funciones generales implementadas para el desarrollo del método numérico, estas funciones hacen parte también de los métodos numéricos convencionales.

- *CellGaussPoints*: Función encargada en calcular los puntos de cuadratura de gauss, sus jacobianos y los pesos sobre el dominio de interpolación Ω a partir de los nodos de celda establecidos ¹.

¹ Los nodos de celda son cuatro puntos distribuidos de manera regular, los cuales contiene los puntos de las cuadraturas de gauss. En los métodos EFG los nodos de campo Mfree coinciden con los nodos de celda, esta condición no es necesariamente aplicable a los métodos numéricos Mfree RPIM.

- *SOLEXP*: Función que calcula las soluciones analíticas del problema, para posteriormente ser comparadas con el método numérico.

5.2. La conclusión

Todos los algoritmos desarrollados en este trabajo se referencian exclusivamente a la parte del procesamiento en el método numérico. Aunque se desarrolla dos algoritmos para el pre y pos procesamiento, dichos algoritmos no son relevantes para el desarrollo de este trabajo, ya que es posible utilizar paquetes computacionales desarrollados para otro tipo de métodos numéricos como *FEM* para generar alguna malla de tipo estructurada, así como la visualización de la solución numérica.

De acuerdo a lo planteado en el capítulo 3 se hace necesario tener en cuenta ciertos parámetros específicos para implementar un pre procesador exclusivo para *Mfree* pero debido a que es un método libre de malla este debe tener capacidad de soportar distribuciones de nodos estructurados y aleatorios.

Análisis de resultados

En el presente capítulo se muestran los resultados obtenidos por dos métodos libres de malla planteados anteriormente RPIM y EFG, aplicados a dos problemas de la mecánica de sólidos, el primer problema desarrollado fue una viga en voladizo, implementado como método inicial de prueba en el desarrollo de la técnica Mfree RPIM, de la misma manera fue posible implementar el método numérico EFG como método numérico alternativo para desarrollar una comparación con nuestro método principal de desarrollo.

Teniendo en cuenta los comportamientos de las funciones y la experiencia obtenida por la solución del primer problema se procede a desarrollar el problema de Kirsh que es el caso de estudio real, planteado por el trabajo de investigación.

Se hace necesario colocar diferentes escenarios de evaluación, para mostrar el comportamiento de la función de forma en el método libre de malla, esto establece qué tan robusto y fiable es el método numérico frente a dichos escenarios de evaluación.

Antes de iniciar con este capítulo cabe resaltar el trabajo de investigación desarrollado sobre los métodos que dieron pie a la formulación de los elementos libres de malla RPIM. La función de interpolación PIM fue desarrollada como el primer trabajo para la implementación de una función de interpolación sobre una nube de puntos y llevada a una función de forma en los elementos libres de malla [18], aunque esta función no será utilizada para solucionar el problema *Kirsch*, se implementó con el fin de entender el principio de la técnica Mfree ver Apéndice (??).

Los casos de estudio

Los escenarios de estudio de cada método implementado se encuentran descritos a continuación.

La Viga en Voladizo

Método Numérico	Función de Forma	Nodos Mfree	Condiciones de Frontera
EFG	MLS	55	Penalty - Multiplicadores de Lagrange
RPIM	MQ-EXP	175	Penalty - Multiplicadores de Lagrange

Tabla 6.1: Casos de estudio para la solución de la Viga en Voladizo.

El problema de Kirsch

Método Numérico	Función de Forma	Nodos Mfree	Condiciones de Frontera
EFG	MLS	99	Penalty
RPIM	MQ	99	Penalty
RPIM	EXP	99	Penalty
RPIM	RPIM	273	Penalty
RPIM	MQ	273	Penalty

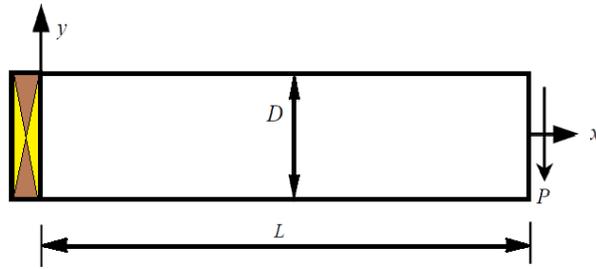
Tabla 6.2: Casos de estudio para la solución del problema de Kirsch.

Las tablas (6.1) y (6.2) establecen los escenarios implementados para los métodos *Mfree*, de los cuales se establecen comportamientos como el error, convergencia y errores relativos.

6.1. La viga en voladizo

Uno de los ejemplos clásico de la mecánica de sólidos es la viga en voladizo o viga en cantilver, cuya solución analítica fue dada en 1970 por Timoshenko y Goodier [34], éste problema consiste en una viga empotrada en un extremo y sujeta a una tracción parabólica y libre como lo muestra la figura (6.1).

Figura 6.1: Viga en cantilever sujeta a una tracción parabólica.



Fuente: Autor del proyecto.

Las ecuaciones obtenidas por Timoshenko y Goodier [34] para dicho problema son:

- Desplazamiento en la dirección x.

$$u(x, y) = -\frac{P}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (6.1)$$

Donde el momento de inercia I , para una viga de sección transversal está dada por.

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (6.2)$$

- Desplazamiento en la dirección y.

$$v(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \left(\frac{D^2 x}{4} \right) + (3L - x)x^2 \right] \quad (6.3)$$

- Esfuerzo normal a la sección transversal de la viga.

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (6.4)$$

- Esfuerzo normal en la dirección y

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (6.5)$$

- Esfuerzo cortante a la sección transversal de la viga

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (6.6)$$

Los parámetros de la viga en S.I.

Los parámetros para la solución analítica del problema se muestran en la tabla [6.3].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	3×10^7 Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Viga	D	12 m
Largo de Viga	L	48 m
Espesor	E_s	1 unitaria

Tabla 6.3: Parámetros de Viga en el SI.

Condiciones de frontera

Al aplicar un fuerza en el límite de la frontera derecha ($x = L$), la ecuación 6.6 queda descrita como.

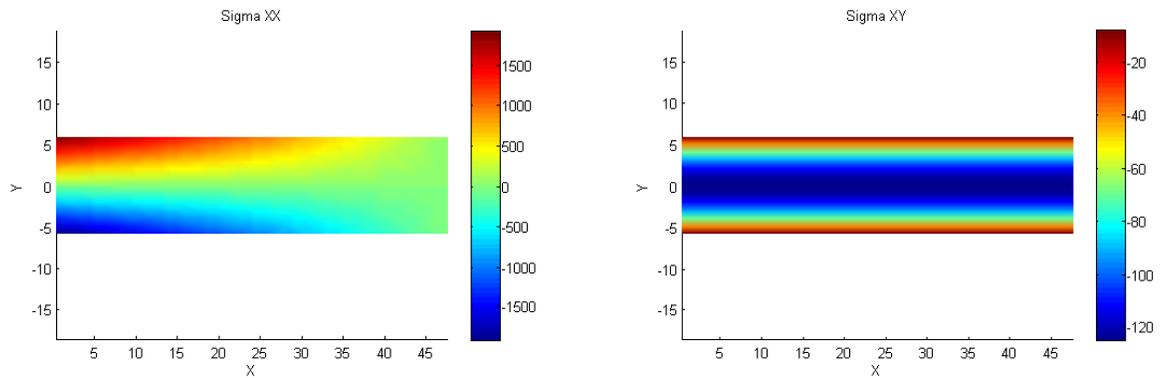
$$t_{xy}|_{x=L} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (6.7)$$

Cuando $x = 0$ se trata sobre la frontera izquierda, la condición esencial de frontera esta dada a partir de la solución analítica, resultante de las ecuaciones (6.1) y (6.3) como.

$$u|_{x=0} = -\frac{P(2+\nu)}{6EI} \left[y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \quad (6.8)$$

$$v|_{x=0} = \frac{P\nu L}{2EI} y^2$$

Figura 6.2: Solución analítica.



(a) Esfuerzo σ_{xx} .

(b) Esfuerzo σ_{xy} .

Fuente: Autor del proyecto.

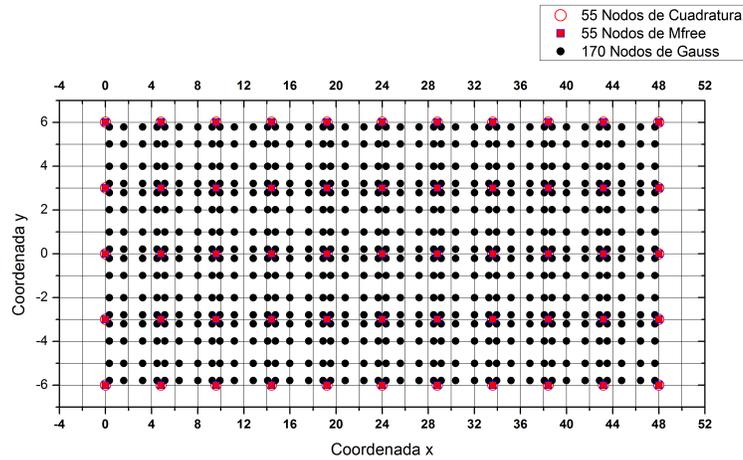
Como lo muestra la figura (6.2) solo indica dos esfuerzos principales σ_{xx} y σ_{xy} , el esfuerzo correspondiente a σ_{yy} no se gráfica ya que por condiciones iniciales del problema este es igual a cero. Los valores obtenidos para estas gráficas de contorno serán tomados como referencias para comparar los métodos numéricos.

6.1.1. La solución de la viga en voladizo con EFG

La primera solución de la viga en voladizo, será obtenida al aplicar el primer caso de estudio de la tabla [6.1].

En la distribución de nodos *Mfree* en *EFG*, los nodos para generar la cuadratura de gauss deben corresponder al mismo número de nodos *Mfree* dentro del dominio del problema, teniendo en cuenta dicha aclaración la distribución de nodos sobre el dominio, es la mostrada en la figura (6.3).

Figura 6.3: Distribución de nodos de campo (*Mfree*) y cuadratura de gauss EFG, 55 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

La figura (6.3) muestra 55 nodos distribuidos de manera regular correspondiente a los nodos *Mfree*, 40 celdas de Gauss y 16 puntos de evaluación por cada una de las cuadraturas.

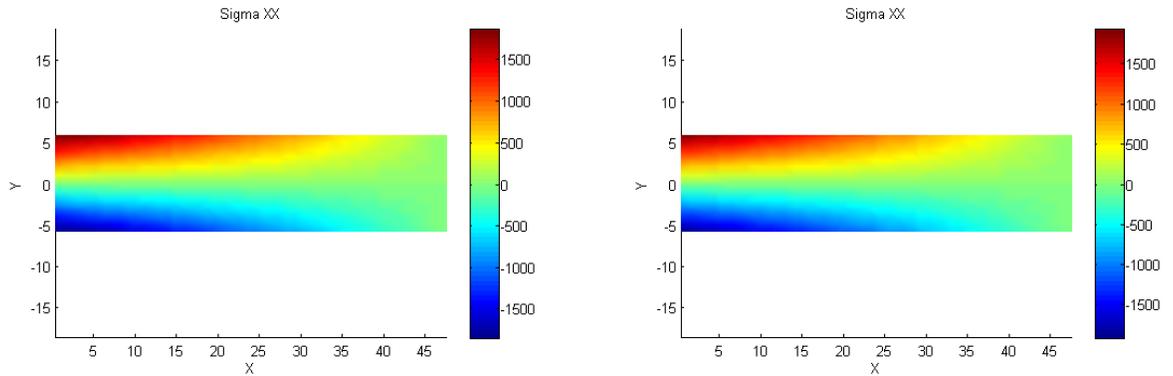
Dados los parámetros del problema en la tabla [6.3], la información de distribución nodal y los coeficientes establecidos para la función de Mínimos Cuadrados *LMS* de la tabla [3.1], los datos de entrada para el método numérico *EFG* son mostrados en la tabla [6.4].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	3×10^7 Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Viga	D	12 m
Largo de Viga	L	48 m
Espesor de Viga	E_s	1
Parámetros del Dominio de Soporte	$\alpha_{sx} = \alpha_{sy}$	3.5
Número de nodos M_{free}	$Puntos$	55
Número de divisiones en x para cuadraturas de Gauss	$ndivcx$	10
Número de divisiones en y para cuadraturas de Gauss	$ndivcy$	4
Número de Puntos para establecer las celdas de Gauss	$numceld$	55
Función de Interpolación	LMS	Cubic Spline
Base del Polinomio	$mbasis$	3
Enforcement de las Condiciones de Frontera	$Enforcing$	L ó P

Tabla 6.4: Parámetros de entrada

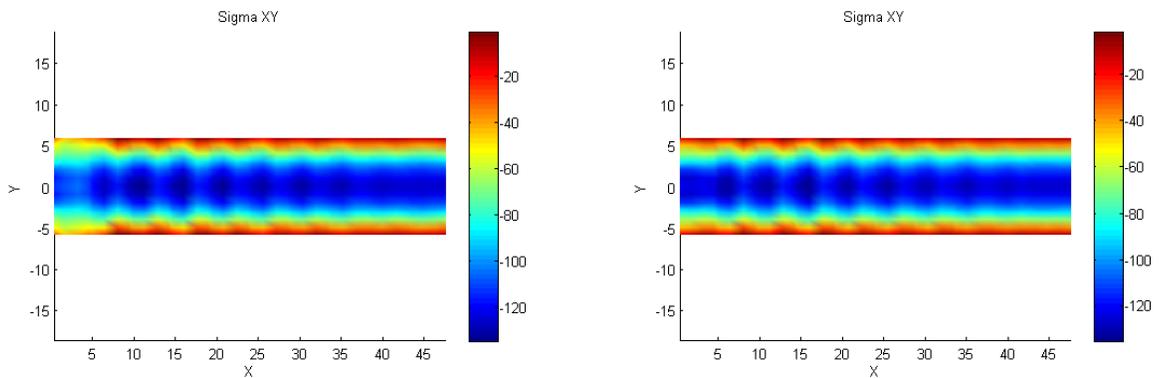
Para éste caso se ha tomado la función de interpolación Cubic spline de Mínimos Cuadrados, dado por la tabla [6.3], para evaluar los esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} por el método numérico M_{free} EFG estos resultados son mostrados en la figura (6.4).

Figura 6.4: Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función de interpolación LMS, 55 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} Penalty.

(b) Esfuerzo σ_{xx} Multiplicadores de Lagrange.



(c) Esfuerzo σ_{xy} Penalty.

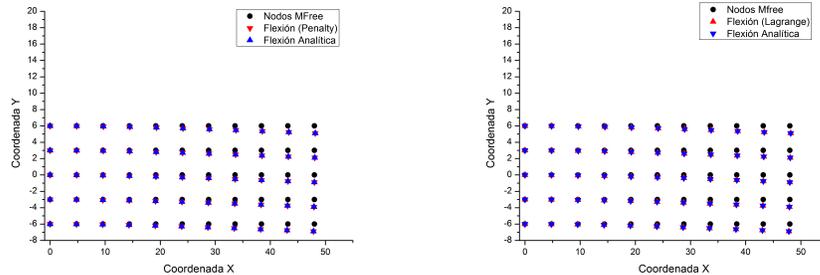
(d) Esfuerzo σ_{xy} Multiplicadores de Lagrange.

Fuente: Autor del proyecto.

La figura (6.4) permite observar grandes diferencias al aplicar los dos tipos métodos para el cumplimiento de las condiciones de frontera, al ser comparado con la solución analítica de la figura (6.3), el método de multiplicadores de Lagrange utilizado como método de enforzamiento de las condiciones de frontera en *Mfree* (*EFG*) permite establecer un mejor comportamiento que el producido por el método de Penalty al ser aplicado también como método para el cumplimiento de las condiciones de frontera, aunque dicho análisis visual muestra dichas características, se hace necesario recurrir a las verificaciones numéricas propuestas por las expresiones (4.3) y (4.6) las cuales hacen referencia a la medición de los errores absolutos y relativos del método numérico.

Otro parámetro arrojado por el método numérico es la flexión de la viga en voladizo, la figura (6.5) muestra los dos escenarios expuestos por el método.

Figura 6.5: Flexiones entre la solución analítica y la función de interpolación MLS, 55 nodos de campo.



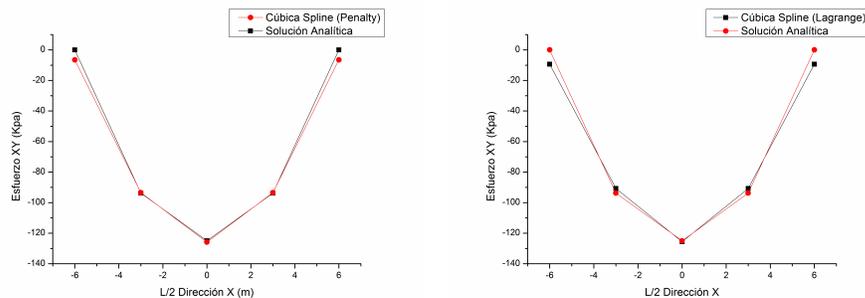
(a) Penalty.

(b) Multiplicadores de Lagrange.

Fuente: Autor del proyecto.

Aunque las diferencias no son muy apreciables gráficamente, la medición del error relativo y absoluto son la mejor manera de establecer qué tan preciso es el método numérico implementado. Se toma la sección media de la viga $L/2$ para obtener el comportamiento de la función de interpolación en ese punto de evaluación, la figura (6.6) muestra la distribución de los esfuerzos cortantes sobre la sección transversal $L/2$.

Figura 6.6: El esfuerzo cortante en la sección ($L/2$), función de forma MLS, 55 nodos de campo.



(a) Penalty.

(b) Multiplicadores de Lagrange.

Fuente: Autor del proyecto.

Los datos arrojados son muy claros y muestran que la función de interpolación con *Penalty* en la sección transversal, coincide de mejor manera con la solución analítica, a diferencia de los multiplicadores de Lagrange, esto contradice el resultado mostrado por la figura (6.4), por

tanto los indicadores del error absoluto y error relativo muestra cual de las dos soluciones obtenidas se acerca a la solución real.

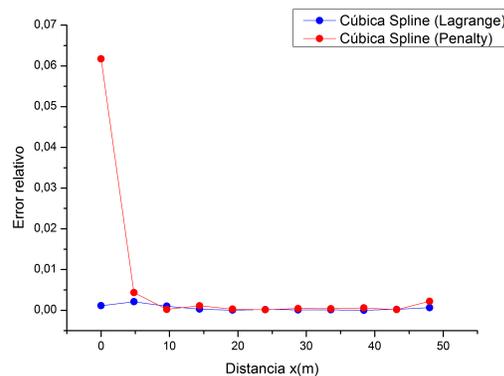
Función	Error	Error relativo
Cúbica Spline (Penalty)	$\ E\ = 0,042215488619026$	$\eta = 0,019156650876632$
Cúbica Spline (Lagrange)	$\ E\ = 0,340174213064067$	$\eta = 0,040092659631223$

Tabla 6.5: Cálculo del principio de mínima energía y error relativo para la función de interpolación LMS.

La tabla (6.4) confirma que la función Cúbica Spline con el método de Penalty como función de enfortamiento en las condiciones de frontera es mucho más precisa.

Al comparar el comportamiento del error relativo puntual en función de la distancia, sobre un eje de evaluación, ver gráfica (6.7), para mostrar la evolución del error relativo en el método numérico al recorrer el eje de referencia.

Figura 6.7: Error relativo.

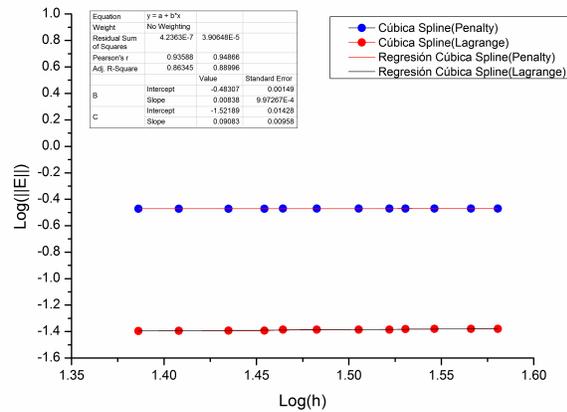


Fuente: Autor del proyecto.

Los multiplicadores de Lagrange presentan un error relativo puntual mucho menor en la dirección x para ($y=0$), pero se debe tener en cuenta que el error sobre todo el dominio Ω es acumulativo de acuerdo a las ecuaciones (4.4) y (4.6), lo que implica que el método Penalty es mucho mas preciso de acuerdo a la tabla [6.5].

La rapidez de convergencia del método se obtiene a partir de la gráfica (6.8).

Figura 6.8: Rata de convergencia Log (E) vs Log (h).



Fuente: Autor del proyecto.

Función	Rata de convergencia
Cúbica Spline (Penalty)	$r = 0,00838$
Cúbica Spline (Lagrange)	$r = 0,09083$

Tabla 6.6: Ratas de convergencia de la función de forma LMS.

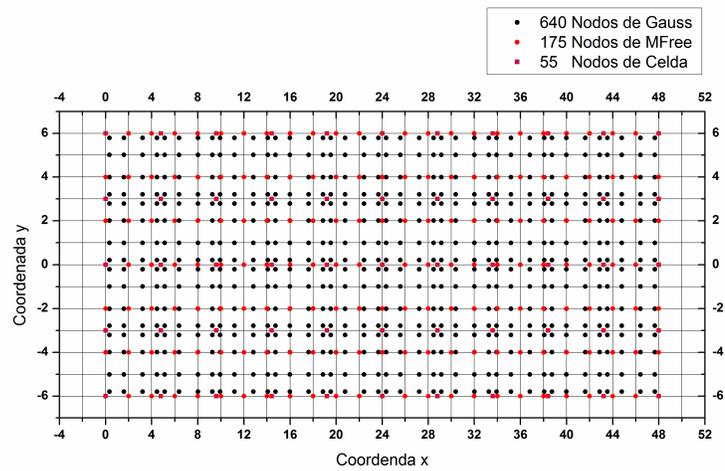
Los resultados muestran la rapidez que tiene el método penalty con respecto a los multiplicadores de Lagrange, debido al incremento de la matriz de momentos en la solución de las condiciones de frontera esenciales con el método de Lagrange el método es mucho mas lento .

6.1.2. La solución de la viga en voladizo con RPIM

La solución de la viga en voladizo con el método RPIM, será obtenida al aplicar el segundo caso de estudio de la tabla [6.1].

Se debe establecer una distribución de nodos M_{free} sobre el dominio Ω , de acuerdo a la formulación *RPIM*, se ha optado por una dispersión de tipo regular como lo muestra la figura (6.9), la cual es similar a la mostrada por la gráfica (6.3) del método *EFG*.

Figura 6.9: Distribución de nodos de campo (*Mfree*) y cuadratura de gauss RPIM, 175 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

La distribución nodal mostrada en la figura (6.9) contiene 175 nodos regularmente distanciados como nube de puntos *Mfree*, 40 celdas de Gauss y 16 puntos de evaluación por cada una de las cuadraturas.

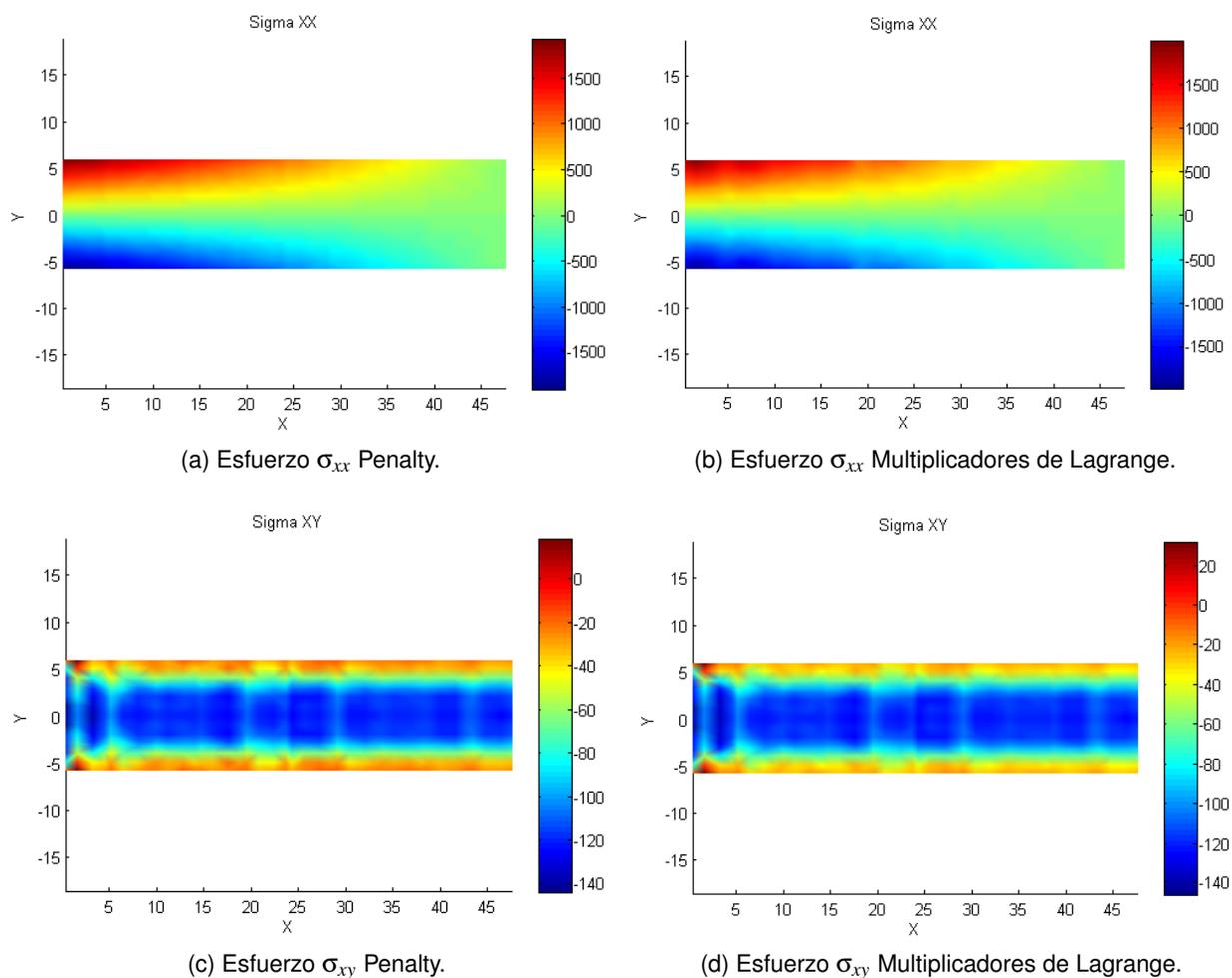
Teniendo en cuenta los parámetros de entrada del problema mostrados en la tabla [6.3], la información de distribución nodal y los coeficientes establecidos para las funciones de base radial [3.2], dados por las tablas [3.3] y [3.4], los datos de entrada para el algoritmo *RPIM* son los mostrados por la tabla [6.7].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	3×10^7 Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Viga	D	12 m
Largo de Viga	L	48 m
Espesor de Viga	E_s	1 unitaria
Parámetro de las Funciones Radiales	α_c	1.0
Parámetro de las Funciones Radiales	d_c	2.0
Parámetro de la Función Radial MQ	q	1.03
Parámetros del Dominio de Soporte	$\alpha_{sx} = \alpha_{sy}$	3.0
Numero de nodos M_{free}	<i>Puntos</i>	175
Numero de divisiones en x para distribución M_{free}	<i>ndivx</i>	24
Numero de divisiones en y para distribución M_{free}	<i>ndivy</i>	6
Número de divisiones en x para cuadraturas de Gauss	<i>ndivcx</i>	10
Número de divisiones en y para cuadraturas de Gauss	<i>ndivcy</i>	4
Función de Base Radial	<i>RBFs</i>	MQ=1, EXP=2
Base del Polinomio	<i>mbasis</i>	3
Enforzamiento de las Condiciones de Frontera	<i>Enforcing</i>	L ó $P = 100 \times 10^6$

Tabla 6.7: Parámetros de entrada

El cálculo de los esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} calculados por el método numérico M_{free} son los mostrados en la figura (6.10).

Figura 6.10: Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función MQ de RPIM, 175 nodos de campo.

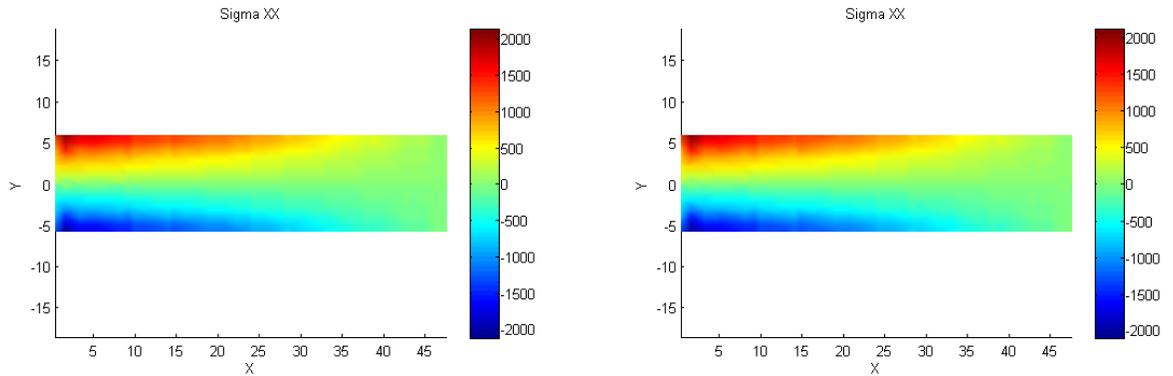


Fuente: Autor del proyecto.

Es posible observar en la figura (6.10) pequeñas diferencias, las cuales son causadas debido al método utilizado para el cumplimiento de las condición de frontera, aunque las curvas de nivel son muy similares los efectos reales de la utilización de dichos métodos de enforzamiento son más apreciables en el cálculo del error.

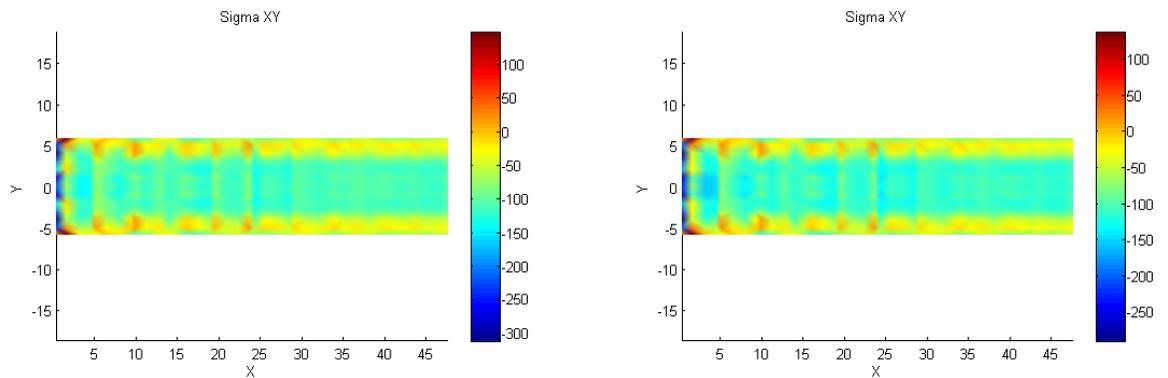
Utilizando los datos de la tabla [6.7] y modificando solo la función de forma (EXP), los esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} calculados por el método numérico *Mfree* son los mostrados en la figura (6.11).

Figura 6.11: Esfuerzos σ_{xx} y σ_{xy} , función EXP de RPIM, 175 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} Penalty.

(b) Esfuerzo σ_{xx} Multiplicadores de Lagrange.



(c) Esfuerzo σ_{xy} Penalty.

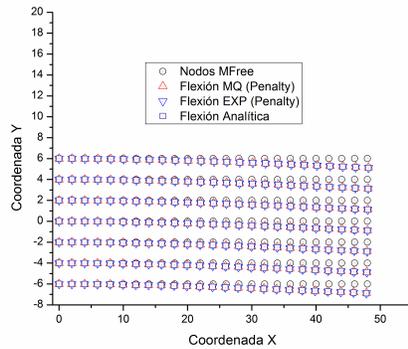
(d) Esfuerzo σ_{xy} Multiplicadores de Lagrange.

Fuente: Autor del proyecto.

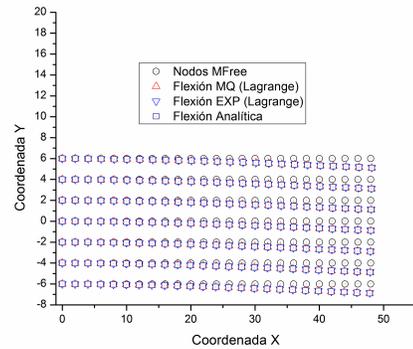
El cambio en las curvas de nivel al utilizar las dos funciones de forma expuestas anteriormente, por el método numérico son apreciables en las figuras (6.10) y (6.11), estas serán comparadas con la solución analítica del problema ver (6.2), los valores reales son proporcionados por las expresiones (6.5) y (6.6).

Aunque el interés de los cálculos se centran sobre los esfuerzos, el comportamiento de las flexiones es una parte importante en el método numérico, la figura (6.6) muestra la deformación provocada por dichos esfuerzos con los distintos escenarios de evaluación.

Figura 6.12: Flexiones entre la solución analítica y las funciones de forma MQ y EXP de RPIM, 175 nodos de campo.



(a) Penalty.

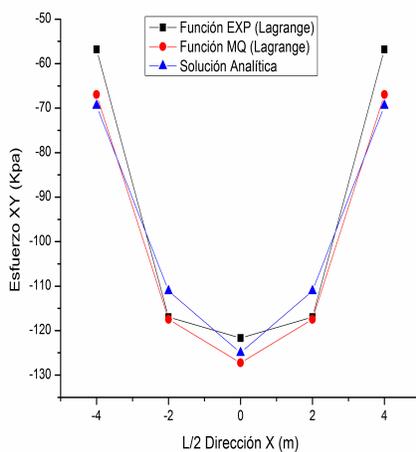


(b) Multiplicadores de Lagrange.

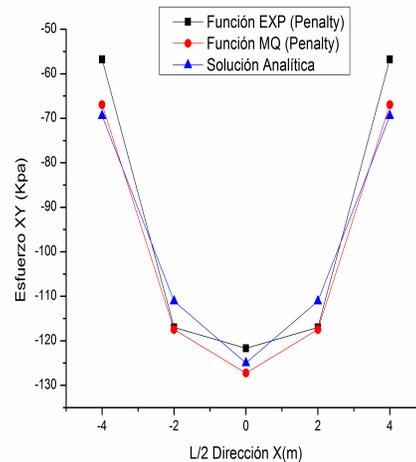
Fuente: Autor del proyecto.

Para observar la aproximación de la función de interpolación utilizada en el método numérico con respecto a la función analítica, se puede tomar una sección transversal del problema (L/2) y graficar los valores obtenidos por el método numérico y la solución analítica, dicha gráfica es mostrada en la figura (6.7).

Figura 6.13: El esfuerzo cortante en la sección (L/2), con las funciones de forma MQ y EXP de RPIM, 175 nodos de campo.



(a) Multiplicadores de Lagrange.



(b) Penalty.

Fuente: Autor del proyecto.

El comportamiento mostrado por la figura (6.7), permite establecer de manera inmediata que la función de forma *MQ* con el método de *penalty* presenta una mayor aproximación a la solución analítica del problema, corroborando dicho resultado al evaluar las expresiones (4.4) y (4.6) sobre el método numérico, estas expresiones proporciona información acerca de la desviación del método numérico con respecto al valor real, los valores obtenidos son consignados en la tabla (6.8) y muestran la comparación de los errores entre las dos funciones de forma establecidas en función de los dos escenarios planteados.

Función	Error	Error relativo
MQ (Penalty)	$\ E\ = 9,08303027252641e^{-2}$	$\eta = 4,383848194012791e^{-2}$
EXP (Penalty)	$\ E\ = 2,711334884612644e^{-1}$	$\eta = 3,610838364109363e^{-2}$
MQ (Lagrange)	$\ E\ = 9,200775778035626e^{-2}$	$\eta = 4,304595047921669e^{-2}$
EXP (Lagrange)	$\ E\ = 2,675249879020394e^{-1}$	$\eta = 3,664420601917348e^{-2}$

Tabla 6.8: Comparación de las funciones radiales MQ y EXP en función del principio de mínima energía y el error relativo.

En general es posible observar que las funciones de forma MQ presentan una mejor aproximación en comparación con las funciones de forma de tipo EXP.

El comportamiento del error relativo a lo largo de la superficie permite observar con mucho más detalle el comportamiento del método numérico sobre el dominio de evaluación, ya que dicho parámetro proporciona mayor información sobre la aproximación que tiene el método sobre el punto de interés, la gráfica (6.8) muestra la distribución del error relativo en función de la distancia sobre el eje x.

Función	Rata de convergencia
MQ (Penalty)	$r = 0,13085$
EXP (Penalty)	$r = 0,14826$
MQ (Lagrange)	$r = 0,12713$
EXP (Lagrange)	$r = 0,08207$

Tabla 6.9: Ratas de convergencia de las funciones de forma MQ y EXP.

Las funciones de base radial *EXP* con multiplicadores de Lagrange contienen una rata de convergencia muy rápida en comparación con las demás, pero posee una menor precisión en el cálculo del valor de aproximación como se ha mencionado anteriormente ver tabla [6.8], y aunque la función de base radial MQ posee un coeficiente mucho mayor con la función Penalty su característica principal es que sus errores relativos y absolutos son más pequeños, lo que indica una mejor precisión en el método utilizado.

Conclusión

Función	Condiciones de Frontera	Nodos Mfree	$\ E\ $	η	r
MLS	Penalty	55	$\ E\ = 0,042215488619026$	$\eta = 0,019156650876632$	$r = 0,00838$
MLS	Lagrange	55	$\ E\ = 0,340174213064067$	$\eta = 0,040092659631223$	$r = 0,09083$
MQ	Penalty	175	$\ E\ = 9,08303027252641e^{-2}$	$\eta = 4,383848194012791e^{-2}$	$r = 0,13085$
EXP	Penalty	175	$\ E\ = 2,711334884612644e^{-1}$	$\eta = 3,610838364109363e^{-2}$	$r = 0,14826$
MQ	Lagrange	175	$\ E\ = 9,200775778035626e^{-2}$	$\eta = 4,304595047921669e^{-2}$	$r = 0,12713$
EXP	Lagrange	175	$\ E\ = 2,675249879020394e^{-1}$	$\eta = 3,664420601917348e^{-2}$	$r = 0,08207$

Tabla 6.10: Parámetros finales de comparación entre las diferentes funciones de forma utilizadas en la solución de la viga.

La tabla [6.10] contiene la información relevante correspondiente al desempeño de las funciones de interpolación utilizadas, como es posible observar el error de la función de base radial MQ del método RPIM tiene el comportamiento de mayor precisión al ser comparada con la solución analítica del problema.

6.2. La solución numérica del problema de Kirsch

Antes de desarrollar el problema de Kirsch mediante los dos métodos numéricos mencionados, obtendremos el comportamiento de la solución analítica del problema mediante las ecuaciones planteadas en el Capítulo 2, dichas gráficas y resultados serán tomados como referencia para hacer la comparación entre las soluciones numéricas del problema.

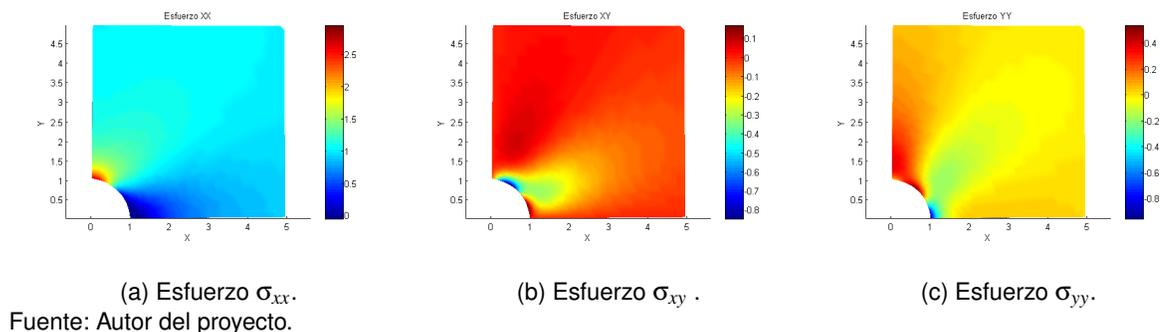
Se parte por establecer los parámetros de entrada a nuestro problema, ver tabla [6.11], y las condiciones de frontera dadas por (2.67).

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	1000 Pa
Coficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Placa	D	5 m
Largo de Placa	L	5 m
Espesor	E_s	1 unitario
Radio	r	1 m

Tabla 6.11: Parámetros de la viga en unidades SI.

Los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} calculados con las expresiones (2.66) y los parámetros de entrada de la tabla [6.11], se muestran en la figura (6.16).

Figura 6.16: Solución analítica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} .



Los valores numéricos obtenidos por la solución analítica del problema y representados en la figura (6.16), serán tomados como referencia de la precisión del método numérico implementado.

6.2.1. La solución del problema de Kirsch mediante EFG

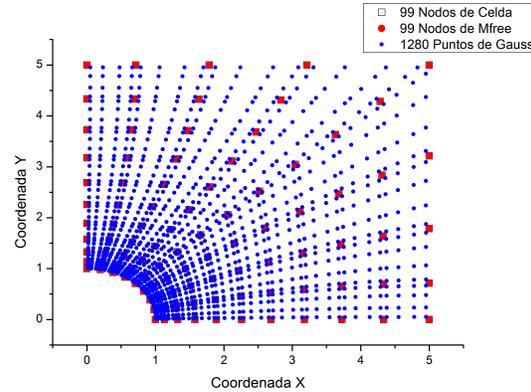
Para la solución del problema mediante *Mfree EFG* se aplica la función Cúbica Spline de *MLS* dada por la tabla [3.1], los parámetros de entrada al método numérico son consignados en la tabla [6.12].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	1000 Pa
Coeficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Placa	D	5 m
Largo de Placa	L	5 m
Espesor de Placa	E_s	1 unitaria
Radio de la Circunferencia	rc	1 m
Parámetros del Dominio de Soporte	α_{sr}	3.0
Número de nodos <i>Mfree</i>	<i>Puntos</i>	99
Número de Puntos para establecer las celdas de Gauss	<i>numceld</i>	99
Función de Interpolación	<i>LMS</i>	<i>CubicSpline</i>
Base del Polinomio	<i>mbasis</i>	3
Enforcement de las Condiciones de Frontera	<i>Enforcing</i>	<i>Penalty</i> = 100×10^6

Tabla 6.12: Parámetros de entrada.

De acuerdo a la información de la tabla [6.12] la malla obtenida para el problema de Kirsch es la mostrada por la figura (6.17).

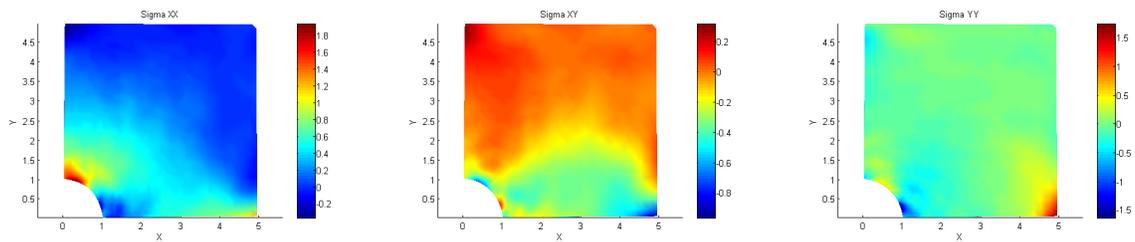
Figura 6.17: Distribución de nodos de campo Mfree y cuadratura de gauss RPIM, 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

La solución numérica (*Mfree EFG*) de los esfuerzos a partir de la geometría anteriormente descrita es mostrada a continuación, ver figura (6.18).

Figura 6.18: Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} mediante *EFG* (MLS), 99 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} .

(b) Esfuerzo σ_{xy} .

(c) Esfuerzo σ_{yy} .

Fuente: Autor del proyecto.

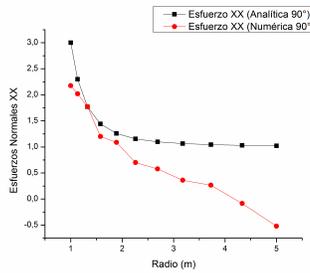
Se toma como referencia los puntos de las cuadraturas para evaluar numericamente los esfuerzos y poder compararlos con la solución analítica del problema, la primera prueba consiste en tomar un punto medio del dominio $\theta = 45$ para observar un comportamiento puntual, ver tabla [6.13].

Las gráficas obtenidas a partir de la información proporcionada por la tabla [6.13] se muestran en la figura (6.19).

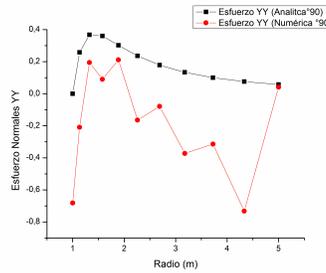
Radio (m)	Analítico σ_{xx}	Analítico σ_{yy}	Analítico σ_{xy}	Numérico σ_{xx}	Numérico σ_{yy}	Numérico σ_{xy}
7,07107	1,0194	-0,0194	-0,01	0,00309	-0,35833	0,11749
6,059226	1,02612	-0,02612	-0,01362	-0,02419	-0,09383	0,0478
5,137315	1,03574	-0,03574	-0,01895	0,0593	0,06188	-0,01418
4,305361	1,04958	-0,04958	-0,02697	0,19553	-0,01546	-0,06463
3,563337	1,06945	-0,06945	-0,03938	0,42486	-0,08755	-0,14675
2,911258	1,09711	-0,09711	-0,05899	0,65257	-0,16627	-0,18804
2,3499122	1,13196	-0,13196	-0,09061	0,92002	-0,3148	-0,22258
1,87693	1,163	-0,163	-0,14193	1,07582	-0,41727	-0,2563
1,494682	1,14708	-0,14708	-0,22381	1,35273	-0,32427	-0,29531
1,202364	0,97401	0,02599	-0,34586	1,03635	-0,08258	-0,43662
1	0,50002	0,49998	-0,5	1,20152	0,66861	-0,63348

Tabla 6.13: Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.

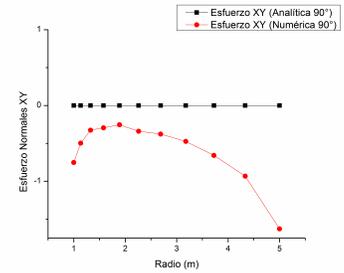
Figura 6.19: Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos *EFG*, 99 nodos de campo.



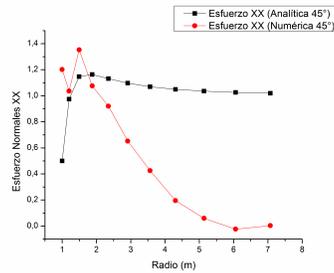
(a) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=90^\circ$.



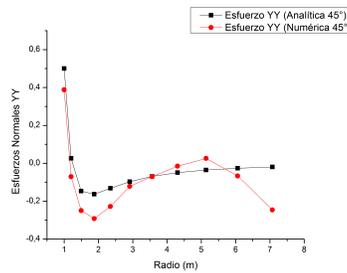
(b) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=90^\circ$.



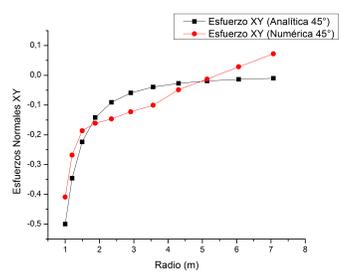
(c) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=90^\circ$.



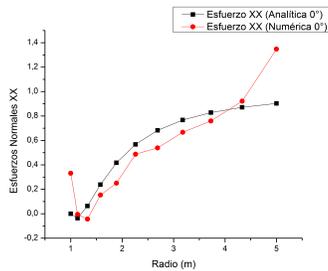
(d) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=45^\circ$.



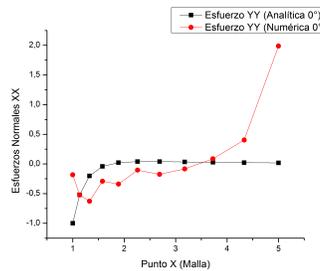
(e) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=45^\circ$.



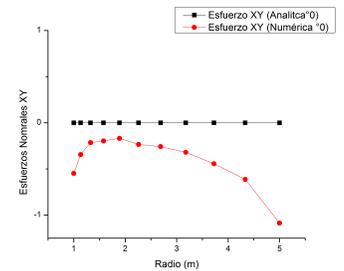
(f) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=45^\circ$.



(g) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=0^\circ$.



(h) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=0^\circ$.

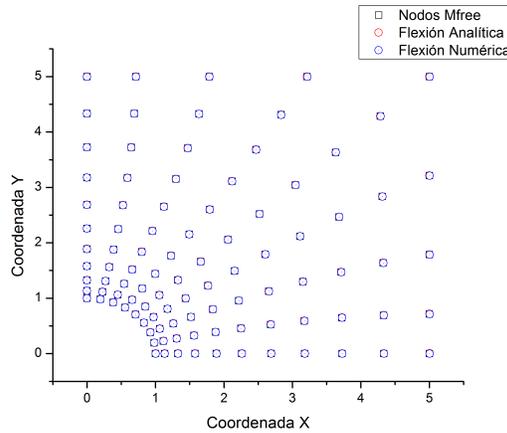


(i) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=0^\circ$.

Fuente: Autor del proyecto.

El comportamiento de las deformaciones sobre los ángulos de evaluación muestra al método numérico tratando de seguir de la mejor manera la solución analítica, desafortunadamente esta muestra una gran diferencia entre las dos soluciones sobre los extremos superior inferior y medio, confirmando el análisis visual de las figuras de contorno total de figura (6.18), de la misma manera se toma como referencia los mismos puntos tomados para los esfuerzos, para evaluar las deformaciones producidas por la carga. Los desplazamientos totales obtenidos por la solución analítica y numérica están representados en la figura (6.20).

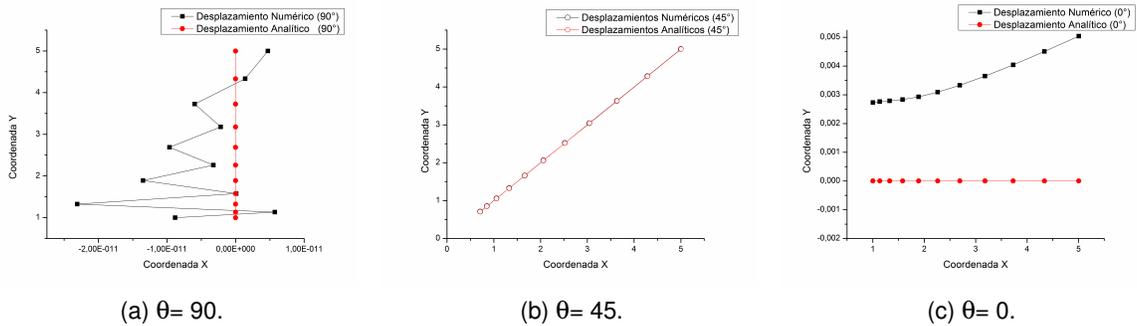
Figura 6.20: Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas *EFG*, 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

La comparación de los desplazamientos totales no son apreciables en la figura (6.20), por tanto se debe tomar los mismos ángulos de evaluación mostrados en la figura (6.19) $\theta = 90$, $\theta = 45$ y $\theta = 0$ para medir las deformaciones del método numérico con respecto a la solución analítica, la figura (6.21) muestra el comportamiento del método numérico.

Figura 6.21: Evaluación de los desplazamientos con *EFG*, 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Los desplazamientos en la figura (6.21) indica que el método numérico se aproxima a la solución analítica, el cálculo de las deformaciones en el método numérico es mucho más preciso que en el cálculo de las tensiones.

Los esfuerzos obtenidos por el método *Mfree EFG* con respecto a la solución analítica del problema al realizar una inspección visual entre las figura (6.16) y (6.18) indica una diferencia notoria, aunque no es posible hasta el momento determinar una desviación cuantitativa del método numérico con respecto a la solución analítica del problema. Para esto es necesario

recurrir a las expresiones (4.6) y (4.4) para determinar la desviación del método numérico.

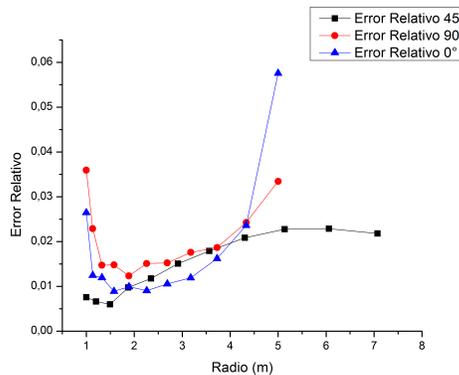
Los errores relativos y absolutos del método numérico, al aplicar las expresiones (4.6) y (4.4) son mostrados en la tabla [6.14].

Función	Error	Error relativo	Error relativo normal
MLS (Penalty)	$\ E\ = 0,07932$	$\eta = 0,18791$	$\eta_n = 0,09862$

Tabla 6.14: Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal.

La tabla [6.14] muestra que el indicador para el error relativo η en el cálculo de los esfuerzos es muy alto, lo que permite corroborar la información obtenida por las curvas de nivel y los esfuerzos de comparación en los ángulos $\theta = 0$, $\theta = 45$, y $\theta = 90$, esto muestra que el método numérico para la distribución nodal no es muy preciso en la solución y difiere mucho de la solución analítica. Se hace necesario graficar el error relativo en función del radio para observar el comportamiento de los errores individuales por cada nodo i -ésimo.

Figura 6.22: Error relativo en $\theta = 90$, $\theta = 45$ y $\theta = 0$ EFG.

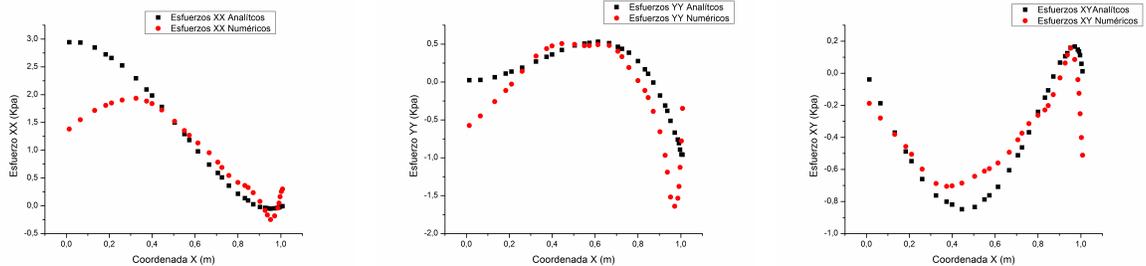


Fuente: Autor del proyecto.

La gráfica (6.22) muestra que a medida que se incrementa la distancia, el error relativo lo hace de la misma manera, mostrando una gran desviación en el método numérico, esto se debe a que la dispersión de los nodos $Mfree$ del método numérico EFG varían en función del radio, esto indica que la función LMS es mucho menos precisa en la interpolación al alejarse del centro de la placa debido a la distancia que existe entre los nodos de Gauss como puntos de evaluación, para corroborar dicha teoría, si se mira el comportamiento de los esfuerzos en la circunferencia, la solución numérica debe acercarse de manera más efectiva a la solución

analítica, debido a que los puntos de evaluación se encuentran menos dispersos que en los límites de la frontera ver figura (6.23).

Figura 6.23: Esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} EFG (MLS) con $r=1$.



(a) Esfuerzos σ_{xx} .

(b) Esfuerzos σ_{yy} .

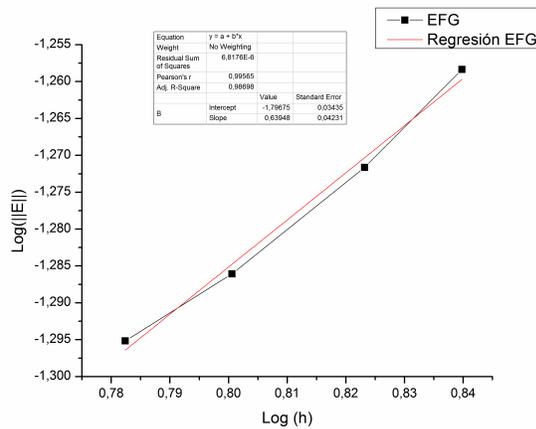
(c) Esfuerzos σ_{xy} .

Fuente: Autor del proyecto.

Al comparar las tensiones de las figuras (6.19) y (6.23) se concluye que efectivamente la función de interpolación MLS se acerca a la solución analítica cuando los puntos se encuentran menos dispersos en el subdominio de evaluación, corroborando que el error relativo es mucho mas pequeño cuando $r = 1$.

La convergencia del método numérico se obtiene al calcular la pendiente entre $\log ||E||$ vs $\log h$ como lo muestra la figura (6.24).

Figura 6.24: Rata de convergencia, $\log(E)$ vs $\log(h)$ EFG.



La rata de convergencia obtenida por el método numérico se muestra en la tabla [6.15].

Función	Rata de convergencia
<i>MLS</i> (Penalty)	$r = 0,6394$

Tabla 6.15: Rata de convergencia de la función de forma *EFG*.

El resultado de la tabla [6.15] muestra que el método *EFG* tiene una rata de convergencia bajo, la solución encontrada por el método tiene una gran diferencia con respecto a las solución analítica, estos resultados son analizados al comparar los resultados entre los métodos.

6.3. La solución del problema de Kirsch mediante RPIM

Se debe definir los parámetros de entrada correspondientes al método numérico *RPIM* como se muestra en la tabla [6.16].

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	1000 Pa
Coficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Placa	D	5 m
Largo de Placa	L	5 m
Espesor de Placa	E_s	1 unitaria
Radio de la Circunferencia	rc	1 m
Parámetros del Dominio de Soporte	α_{sr}	3.0
Número de nodos <i>Mfree</i>	<i>Puntos</i>	99
Número de Puntos para establecer las celdas de Gauss	<i>numceld</i>	99
Función de Interpolación	<i>RPIM</i>	MQ, EXP
Base del Polinomio	<i>mbasis</i>	3
Enforzamiento de las Condiciones de Frontera	<i>Enforcing</i>	<i>Penalty</i> = 100×10^6

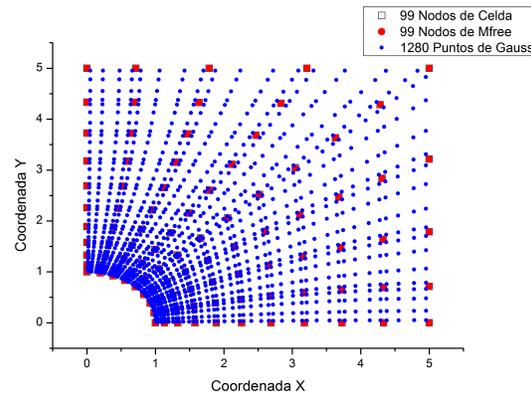
Tabla 6.16: Parámetros de entrada.

A partir de esta información se determina la nube de puntos *Mfree* sobre el dominio Ω , para este análisis tomaremos una distribución radial de forma regular igual que la tomada en el método *EFG*.

6.3.1. La función de forma MQ utilizada en el método Mfree

Tomando la referencia de la tabla [6.16] la malla resultante se muestra en la figura (6.25), la cual es exactamente igual a al utilizada por el método *EFG* anteriormente estudiado.

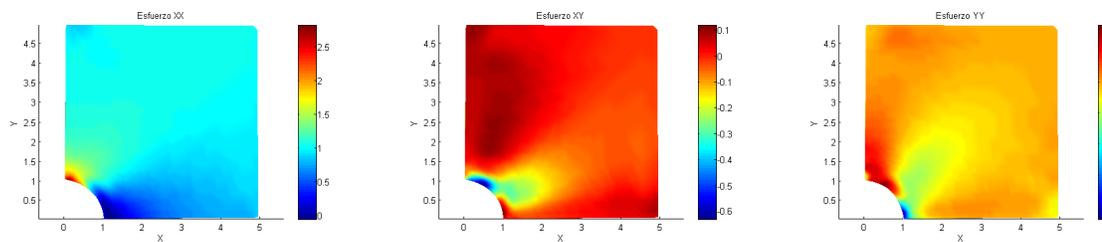
Figura 6.25: Malla.



Fuente: Autor del proyecto.

Al aplicar el algoritmo *RPIM* con la función de forma *MQ* sobre la malla de la figura (6.25) las solución de los esfuerzos obtenidos son mostrados en la figura (6.26).

Figura 6.26: Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} mediante *RPIM* (MQ), 99 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} .

(b) Esfuerzo σ_{xy} .

(c) Esfuerzo σ_{yy} .

Fuente: Autor del proyecto.

Se observa que visualmente las figuras de contorno mostradas en (6.26), son muy similares a las figuras de la solución analítica presentadas por la figura (6.16), esto muestra una

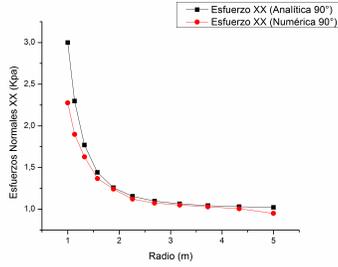
mejora en la apreciación visual del problema sin embargo no se muestra qué tan preciso es el método numérico aplicado al problema de *Kirsch*, si no se tiene un valor cuantitativo que indique dicha desviación. Se toma el punto medio como punto de evaluación a un ángulo de $\theta = 45$ como referencia puntual, la tabla [6.17] muestra una comparación entre el método numérico y analítico.

Radio (m)	Analítico σ_{xx} (Kpa)	Analítico σ_{yy} (Kpa)	Analítico σ_{xy} (Kpa)	Numérico σ_{xx} (Kpa)	Numérico σ_{yy} (Kpa)	Numérico σ_{xy} (Kpa)
7,07107	1,0194	-0,0194	-0,01	1,01706	-0,01634	-0,01539
6,059226	1,02612	-0,02612	-0,01362	1,02844	-0,02148	-0,018
5,137315	1,03574	-0,03574	-0,01895	1,02897	-0,03889	-0,01952
4,305361	1,04958	-0,04958	-0,02697	1,02747	-0,06259	-0,01503
3,563337	1,06945	-0,06945	-0,03938	1,03282	-0,09261	-0,01323
2,911258	1,09711	-0,09711	-0,05899	1,05193	-0,12819	-0,02373
2,3499122	1,13196	-0,13196	-0,09061	1,07583	-0,16981	-0,05111
1,87693	1,163	-0,163	-0,14193	1,09346	-0,20413	-0,1016
1,494682	1,14708	-0,14708	-0,22381	1,11428	-0,21651	-0,17779
1,202364	0,97401	0,02599	-0,34586	0,79114	0,01715	-0,31299
1	0,50002	0,49998	-0,5	0,88775	0,15783	-0,36085

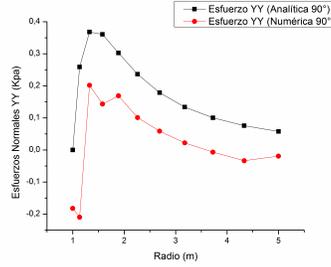
Tabla 6.17: Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.

Los resultados obtenidos para los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} normales a partir de la tabla (6.17) son presentados en la figura (6.27).

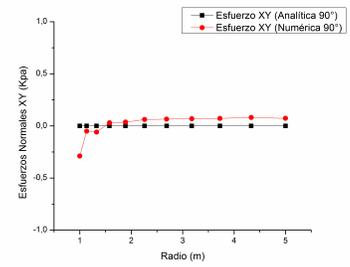
Figura 6.27: Comparación de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} analíticos y numéricos *RPIM* (MQ), 99 nodos de campo.



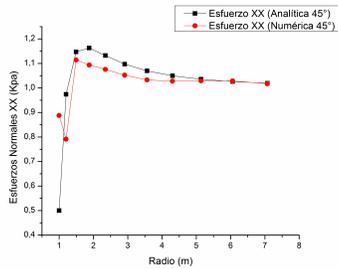
(a) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=90^\circ$.



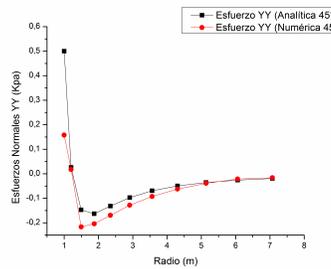
(b) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=90^\circ$.



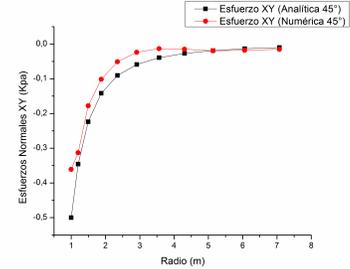
(c) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=90^\circ$.



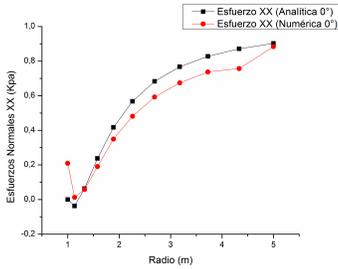
(d) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=45^\circ$.



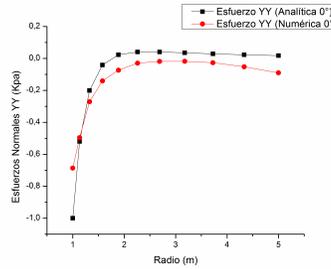
(e) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=45^\circ$.



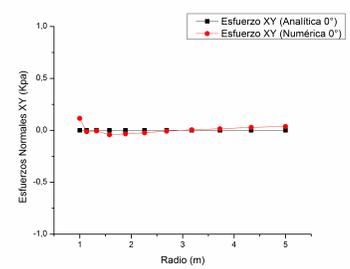
(f) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=45^\circ$.



(g) Esfuerzo σ_{xx} , $\theta=0^\circ$.



(h) Esfuerzo σ_{yy} , $\theta=0^\circ$.



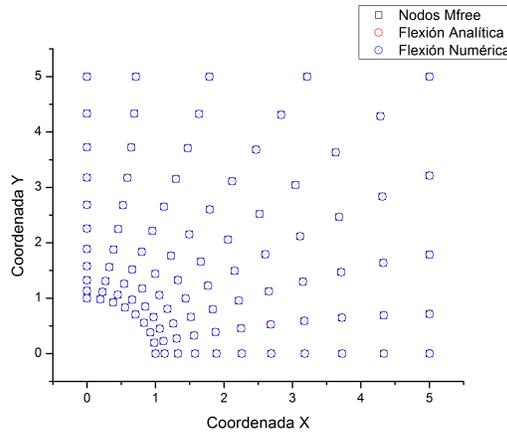
(i) Esfuerzo σ_{xy} , $\theta=0^\circ$.

Fuente: Autor del proyecto.

Los esfuerzos obtenidos por el método *RPIM* (MQ) mostrados en la figura (6.27) indican una mejor aproximación a la solución analítica del problema, las figuras de contorno (6.26) del método numérico es similar a la solución real, sin embargo quien define la precisión de la función de interpolación utilizada es la medición del error.

La deformación de la placa de *Kirsch* se observa en la figura (6.28).

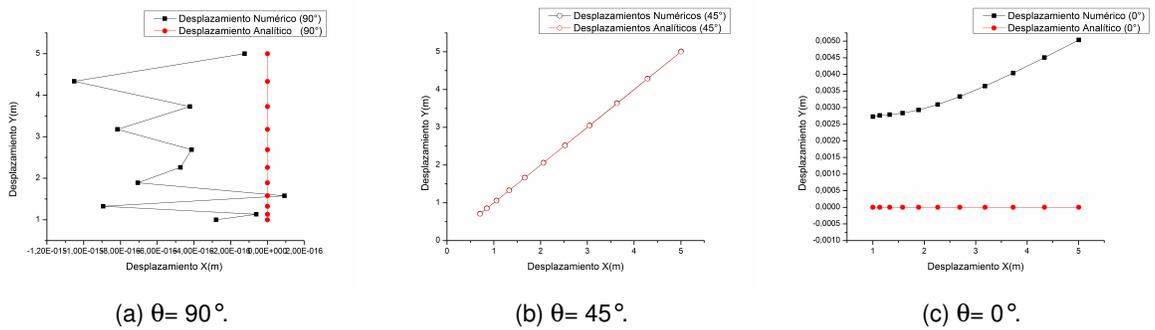
Figura 6.28: Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas *RPIM* (MQ), 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Aunque no se apreciable la deformación ya que de forma gráfica coinciden las soluciones, los ángulos $\theta = 90$, $\theta = 45$ y $\theta = 0$ se toman como referencia de evaluación, para observar dicho comportamiento la figura (6.29) presenta la evaluación del método numérico con respecto a las deformaciones obtenidas.

Figura 6.29: Evaluación de los desplazamientos con *RPIM* (MQ), 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Se observa que los desplazamientos en los ángulos de evaluación son mucho más precisos sobre todo en $\theta = 90$ y $\theta = 45$. Ya que en el ángulo $\theta = 90$ existe una factor de 10^{-9} en la escala, esto permite afirmar que el error es casi nulo, por tanto la figura (6.29) muestra que la desviación gráfica observada es debido a la escala utilizada, y el error inherente mostrado es simplemente dado por las aproximaciones estimadas en el método numérico en cuanto a sus deformaciones.

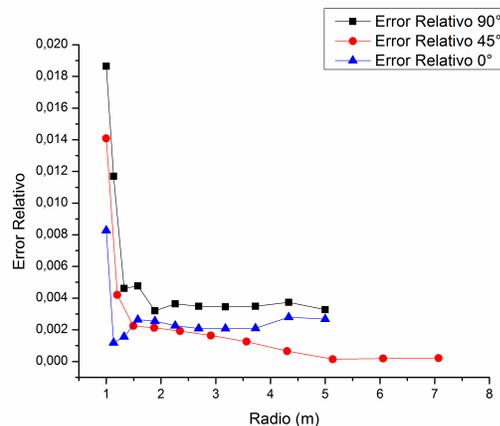
Se debe acudir a la medición del error con las expresiones (4.6) y (4.4) para determinar la desviación del método numérico *RPIM (MQ)*, para determinar la precisión del método, la tabla (6.18) muestra la medición de dicho factor.

Función	Error	Error relativo	Error relativo normal
RPIM (MQ Penalty)	$\ \mathbf{E}\ = 0,00899$	$\eta = 0,2619$	$\eta_n = 0,12836$

Tabla 6.18: Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función MQ de RPIM.

El error relativo obtenido es muy bajo en función del principio de mínima energía, dicha relación permite determinar que el método numérico es muy preciso en comparación con la función (MLS) del método EFG en la interpolación de la solución, por tanto la propagación del error sobre los puntos de interés deben disminuir y no aumentar como en el método EFG ver figura (6.22), los errores relativos graficados en función del radio son indicados por la figura (6.30).

Figura 6.30: Error relativo.



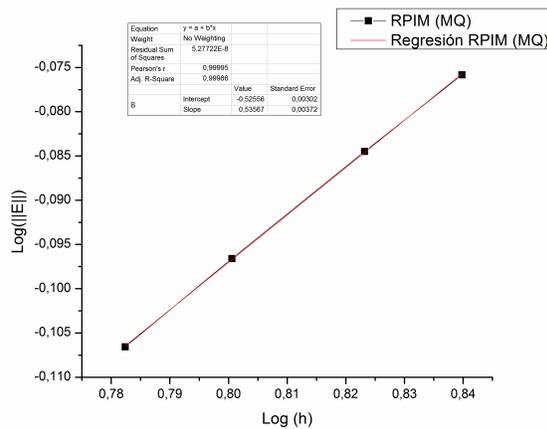
Fuente: Autor del proyecto.

El indicador del error relativo en la figura (6.30) disminuye en función de la distancia, éste muestra un mejor comportamiento de la función de interpolación MQ sobre el dominio Ω , el método numérico no muestra una desviación progresiva, ya que el error relativo acumulado disminuye sobre los puntos de interpolación a medida que los nodos se dispersan, manteniendo un excelente comportamiento al momento de la interpolación siendo menos sensible al ruido.

Debido a que el método presenta una mejor aproximación no se hace necesario graficar el comportamiento de las tensiones cerca de la frontera de la circunferencia como en la figura (6.23) para el método EFG con la función de interpolación (LMS), debido a que el error relativo nos muestra una buena aproximación del método sobre todo el dominio Ω .

La tasa de convergencia correspondiente al método numérico con la función de interpolación MQ, se obtiene al graficar el $\log ||E||$ vs $\log h$ como lo muestra la figura (6.31).

Figura 6.31: Rata de convergencia, Log (E) vs Log (h) RPIM (MQ).



Fuente: Autor del proyecto.

La pendiente de la gráfica (6.31) tiene como resultado el valor de la tasa de convergencia la cual determina la linealidad del método numérico, dicho valor se consigna en la tabla [6.19].

Función	Rata de convergencia
<i>RPIM</i> (MQ Penalty)	$r = 0,5356$

Tabla 6.19: Rata de convergencia de RPIM (MQ).

El valor obtenido en la tabla [6.19] permite determinar que el método tiene una tasa de convergencia mucho mas lenta que la presentada por la función MLS aplicada [6.15], pero posee una mayor exactitud con respecto a la solución analítica por lo que es mucho más confiable.

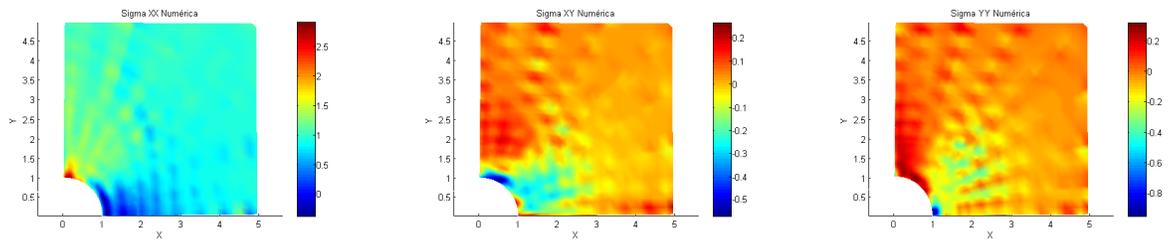
6.3.2. La función de forma EXP utilizada en el método Mfree.

Para esta prueba se toma la referencia de la tabla [6.16] como parámetros de entrada al método numérico y cambiaremos la función de interpolación de *MQ* a *EXP*. La malla utilizada

es la misma que la mostrada en la figura (6.25).

Los esfuerzos obtenidos al aplicar el método Mfree con una función de interpolación EXP son mostrados en la figura (6.31).

Figura 6.32: Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante *RPIM* (EXP), 99 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} .

(b) Esfuerzo σ_{xy} .

(c) Esfuerzo σ_{yy} .

Fuente: Autor del proyecto.

Al hacer una comparación entre las figuras de contorno (6.31) y (6.16) las cuales corresponden a la solución numérica utilizando una función de interpolación *EXP* y la solución analítica del problema, muestran una gran diferencia en los colores de contorno, lo que indica que la función *EXP* como función de interpolación en el método numérico no es precisa como solución en el método de la función *MQ*.

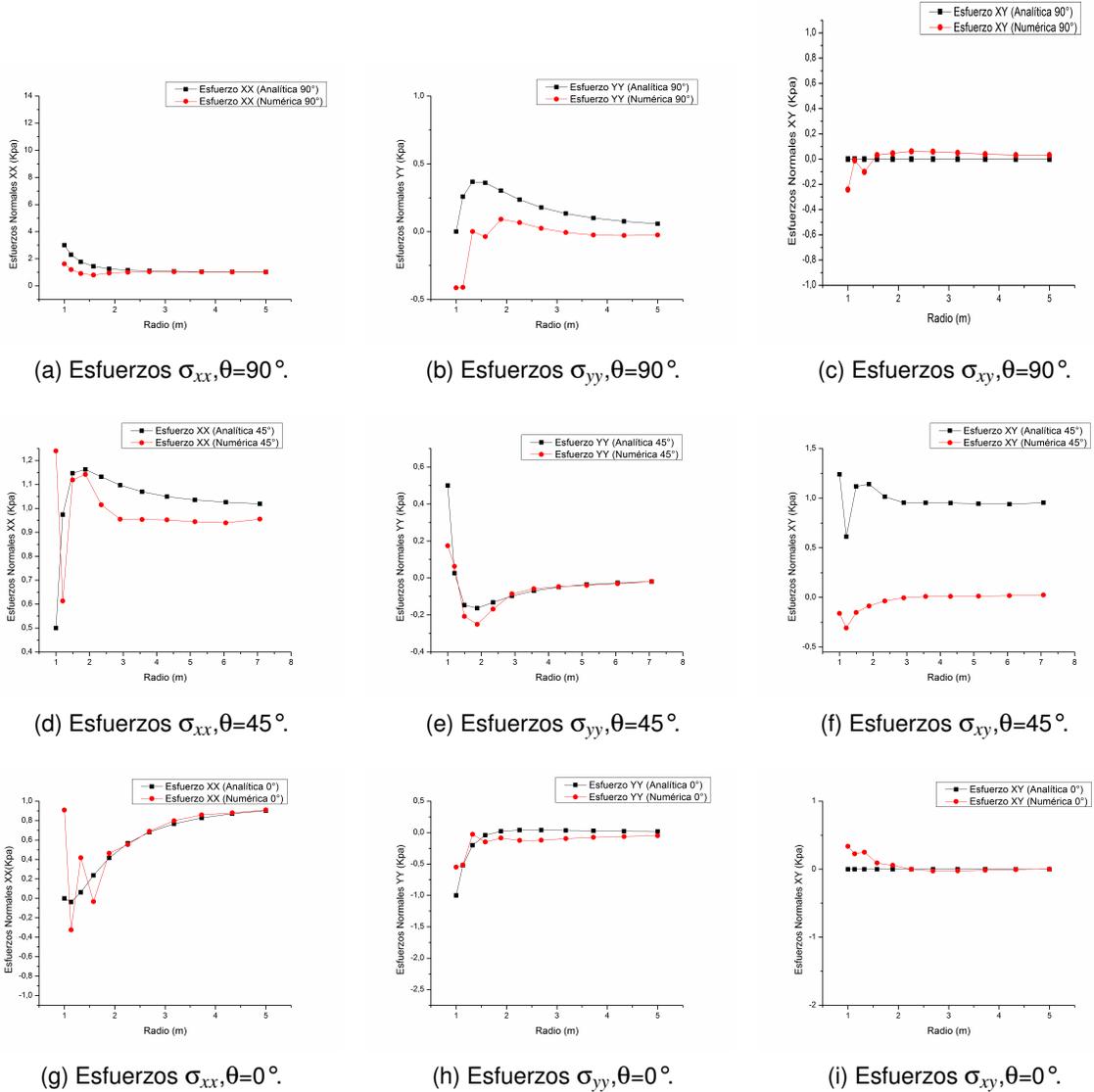
Tomando el ángulo de $\theta = 45$ como punto de evaluación cuantitativo se puede determinar la desviación del método numérico con respecto a la solución analítica, los valores de los esfuerzos obtenidos son consignados en la siguiente tabla [6.20].

Radio (m)	Analítico σ_{xx} (Kpa)	Analítico σ_{yy} (Kpa)	Analítico σ_{xy} (Kpa)	Numérico σ_{xx} (Kpa)	Numérico σ_{yy} (Kpa)	Numérico σ_{xy} (Kpa)
7,07107	1,0194	-0,0194	-0,01	1,01474	0,00838	-0,05934
6,059226	1,02612	-0,02612	-0,01362	1,10323	-0,02278	-0,00571
5,137315	1,03574	-0,03574	-0,01895	1,01522	-0,06065	-0,04492
4,305361	1,04958	-0,04958	-0,02697	0,99244	-0,07899	-0,00747
3,563337	1,06945	-0,06945	-0,03938	1,09769	-0,07843	0,0197
2,911258	1,09711	-0,09711	-0,05899	0,85532	-0,14308	-0,05806
2,3499122	1,13196	-0,13196	-0,09061	1,16907	-0,16007	-0,06185
1,87693	1,163	-0,163	-0,14193	0,48032	-0,29873	-0,30132
1,494682	1,14708	-0,14708	-0,22381	1,00765	-0,29541	-0,1225
1,202364	0,97401	0,02599	-0,34586	0,76183	-0,0143	-0,29812
1	0,50002	0,49998	-0,5	1,06095	0,27039	-0,27334

Tabla 6.20: Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch

Tomando la tabla [6.20] se grafican los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} normales obtenidos por el método numérico, como lo muestra la figura (6.33).

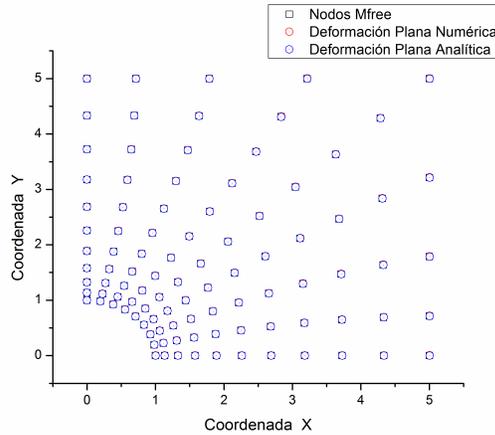
Figura 6.33: Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos *RPIM* (EXP), 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Las curvas de los esfuerzos normales mostrados en la figura (6.33) indican una gran desviación entre el método numérico y la solución analítica, dicha discrepancia puede darse debido a la fácil disponibilidad al ruido de la función de forma utilizada, ya que cualquier variación o inestabilidad en el cálculo sucesivo en las aproximaciones del método numérico puede provocar valores no deseados. Claramente las curvas de nivel de la figura (6.31) confirman dicho comportamiento, las deformaciones obtenidas por el método numérico con la función de interpolación EXP se muestran en la siguiente gráfica, ver (6.34).

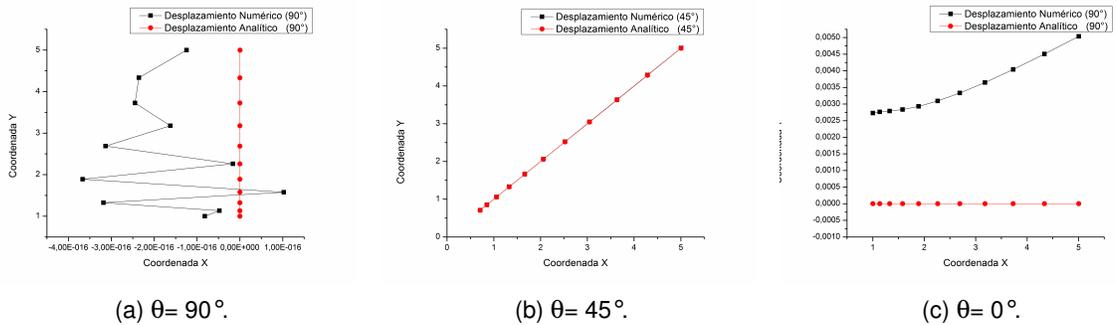
Figura 6.34: Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas *RPIM* (MQ), 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Ya que los desplazamientos no son notables debido a los valores obtenidos se toma como referencia los ángulos $\theta = 90^\circ$, $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 0^\circ$, para poder hacer un análisis de la deformación de manera mas puntual sobre el método utilizando la función de interpolación *EXP*.

Figura 6.35: Evaluación de los desplazamientos con *RPIM* (*EXP*), 99 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

La figura (6.35) muestra que el cálculo de las deformaciones dentro del método numérico tienen una mayor precisión con respecto al cálculo de los esfuerzos obtenidos, aunque existe una similitud gráfica entre las deformaciones obtenidas por las funciones *EXP* y *MQ* al comparar las gráficas (6.35) y (6.29) no significa que sean numericamente iguales, ya como se ha observado las gráficas de contorno muestran una diferencia numericamente apreciable, al calcular el error con las expresiones (4.6) y (4.4) se determina qué tan desviado se encuentra el método numérico con la función de interpolación *EXP* con respecto a la solución analítica, los valores arrojados son consignados en la tabla 6.21.

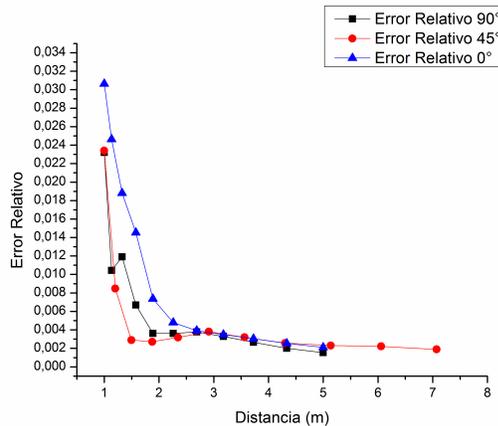
Función	Error	Error relativo	Error relativo normal
RPIM (EXP Penalty)	$\ E\ = 0,0175934$	$\eta = 0,264396$	$\eta_n = 0,118211$

Tabla 6.21: Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función EXP de RPIM.

Al observar el indicador del error $\|E\|=0,0175934$ del método numérico, utilizando la función de interpolación EXP y al compararlo con el indicador del error $\|E\|=0,00899$ de la función MQ es posible mostrar que el método numérico con la función de forma MQ es más exacto que la función MLS utilizada por el método numérico EFG.

Los errores relativo permitirán observar el comportamiento de la función EXP sobre el dominio de influencia, la figura (6.36) muestra dicho comportamiento.

Figura 6.36: Error relativo.



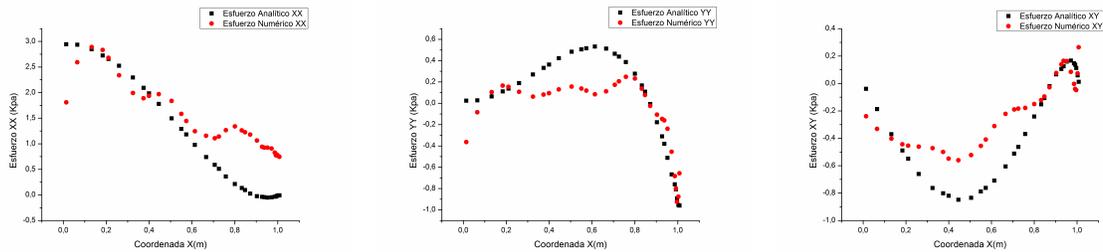
Fuente: Autor del proyecto.

Las variaciones en la figura (6.36) son considerables con respecto a la dispersión de los nodos de campo sobre el dominio Ω , mostrando una inestabilidad en la interpolación del método numérico, esto se ve reflejado por que en las curvas de nivel en el cálculo de los esfuerzos hay una gran diferencia con respecto a la solución analítica del problema, por tanto la función EXP como función de interpolación presenta inestabilidad en el momento del cálculo.

Se debe observar ahora el comportamiento de los esfuerzos cerca a la circunferencia, con el propósito de mostrar si la función de interpolación es inestable sobre todo el dominio o se comporta de la misma manera como el método EFG que aplica una función MLS como función de interpolación. La figura (6.37) muestra el comportamiento de las tensiones con

$$r = 1.$$

Figura 6.37: Cálculo de los esfuerzos *RPIM* (EXP) con $r=1$.



(a) Esfuerzos σ_{xx} .

(b) Esfuerzos σ_{yy} .

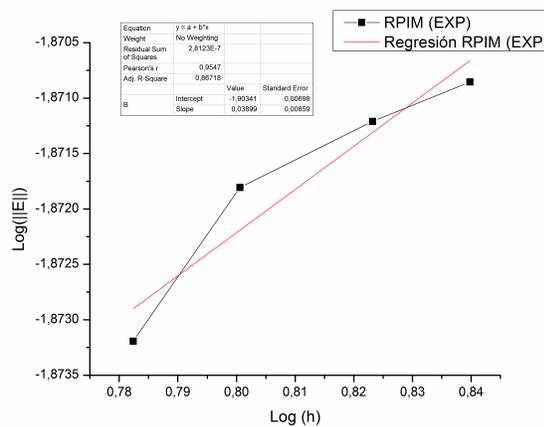
(c) Esfuerzos σ_{xy} .

Fuente: Autor del proyecto.

Como lo muestra la figura (6.37), es posible observar una inestabilidad cerca a la circunferencia y esta sucede independientemente de la distribución nodal, mostrando de antemano que dicha inestabilidad ya no depende exclusivamente de la distribución si no también del comportamiento inherente de la función de interpolación *EXP*.

Ahora es importante determinar la tasa de convergencia del método numérico, para esto se debe calcular la pendiente resultante entre $\log ||E||$ vs $\log h$, como lo muestra la figura (6.38).

Figura 6.38: Rata de convergencia, $\log(E)$ vs $\log(h)$ *RPIM* (EXP).



Fuente: Autor del proyecto.

El valor de la pendiente de la gráfica 6.38 es consignado en la tabla 6.22.

Función	Rata de convergencia
<i>RPIM</i> (EXP Penalty)	$r = 0,039$

Tabla 6.22: Rata de convergencia de RPIM (EXP).

El valor de la rata de convergencia de la función EXP es inferior que el obtenido por la función MQ, pero muestra que es menos preciso que la función MQ.

6.4. La solución del problema de Kirsh con 273 nodos

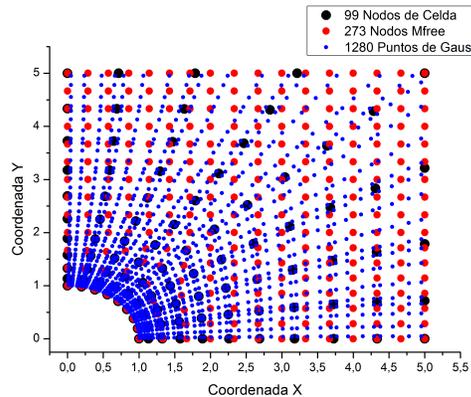
Para este escenario se incrementó el número de nodos de campo sobre el dominio Ω y se mantienen constantes los demás parámetros de entrada al método numérico. En la tabla [6.23] se consignan los nuevos parámetros de entrada al método numérico.

Parámetro	Nomenclatura	Valor
Tensión	P	1000 Pa
Modulo de Young	E	1000 Pa
Coefficiente de Poisson	ν	0,3
Alto de Placa	D	5 m
Largo de Placa	L	5 m
Espesor de Placa	Es	1 unitaria
Radio de la Circunferencia	rc	1 m
Parámetros del Dominio de Soporte	α_{sr}	3.0
Número de nodos M_{free}	$Puntos$	273
Número de Puntos para establecer las celdas de Gauss	$numceld$	99
Función de Interpolación	$RPIM$	MQ, EXP
Base del Polinomio	$mbasis$	3
Enforzamiento de las Condiciones de Frontera	$Enforcing$	$Penalty = 100 \times 10^6$

Tabla 6.23: Parámetros de entrada

Teniendo en cuenta los parámetros de la tabla [6.16] la distribución nodal sobre el dominio Ω para el problema de Kirsch se muestra en la figura (6.39).

Figura 6.39: Distribución de nodos de campo (*Mfree* RPIM) y cuadratura de gauss, 273 nodos de campo.

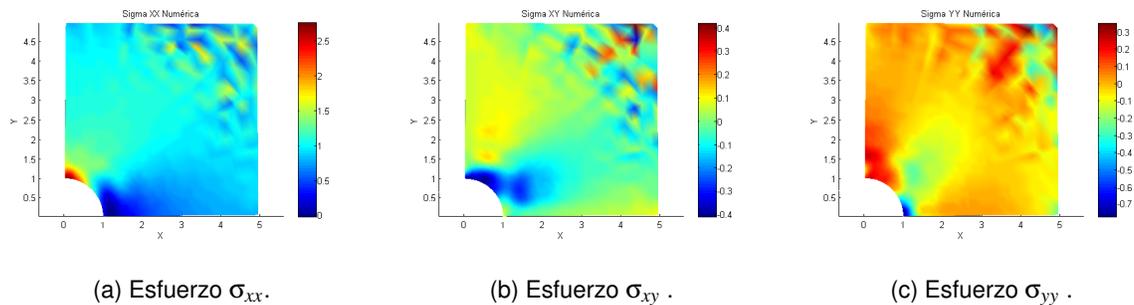


Fuente: Autor del proyecto.

6.4.1. La función de forma MQ utilizada en el método Mfree

Los esfuerzos obtenidos al aplicar el método numérico Mfree con una función de interpolación MQ sobre la nueva distribución nodal se muestra en la figura (6.40).

Figura 6.40: Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante *RPIM* (MQ), 273 nodos de campo.



(a) Esfuerzo σ_{xx} .
Fuente: Autor del proyecto.

(b) Esfuerzo σ_{xy} .

(c) Esfuerzo σ_{yy} .

Las figuras de contorno (6.40) muestran una gran diferencia con respecto a las figuras de contorno de la solución analítica ver figura (6.16), esto indica inmediatamente que el incremento del número de nodos *Mfree* produce una grave inestabilidad del método numérico,

esperando por el contrario una mejor respuesta de la función de interpolación sobre el dominio Ω , sin embargo se deben hacer todos los análisis para determinar el comportamiento del método numérico sobre el dominio Ω ya que la medición del error indica la derivación del método.

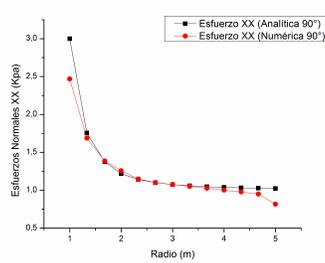
Para hacer un análisis de manera cuantitativa y no cualitativo de acuerdo a la información visual de las figuras de contorno (6.40), tomaremos un ángulo de $\theta = 45$, donde los datos de esfuerzos principales son consignados en la tabla [6.24].

Radio (m)	Analítico σ_{xx} (Kpa)	Analítico σ_{yy} (Kpa)	Analítico σ_{xy} (Kpa)	Númerico σ_{xx} (Kpa)	Númerico σ_{yy} (Kpa)	Númerico σ_{xy} (Kpa)
7,07107	1,0194	-0,0194	-0,01	2,18527	0,43458	-0,29818
6,59971	1,02217	-0,02217	-0,01148	1,60665	-0,37022	0,07282
6,12821	1,02556	-0,02556	-0,01331	0,7446	-0,07829	-0,01965
5,65685	1,02979	-0,02979	-0,01563	0,94572	0,04339	0,02678
5,1855	1,03511	-0,03511	-0,01859	1,00102	0,09191	-0,15015
4,714	1,04196	-0,04196	-0,0225	0,997	0,05054	-0,03533
4,24264	1,05093	-0,05093	-0,02778	1,00857	-0,02788	0,02461
3,77128	1,0629	-0,0629	-0,03516	1,03387	-0,0576	0,01351
3,29978	1,07919	-0,07919	-0,04592	1,05216	-0,08309	0,00241
2,82843	1,10156	-0,10156	-0,0625	1,06412	-0,11579	-0,0128
2,3831	1,13057	-0,12924	-0,08706	1,07701	-0,1563	-0,03868
1,51571	1,09037	-0,1681	-0,24364	0,96285	-0,21227	-0,1762
1	0,50002	0,49998	-0,5	1,2409	0,01953	-0,31202

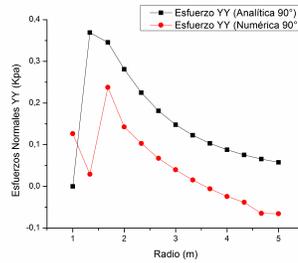
Tabla 6.24: Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.

Los figura (6.41), muestra el comportamiento de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} para diferentes ángulos de valuación.

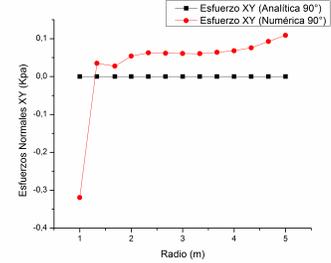
Figura 6.41: Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos con *RPIM* (MQ), 273 nodos de campo.



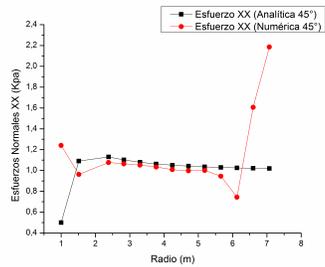
(a) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=90^\circ$.



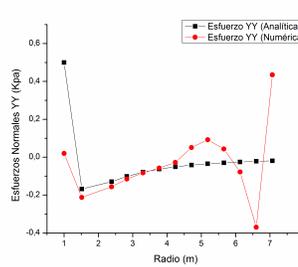
(b) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=90^\circ$.



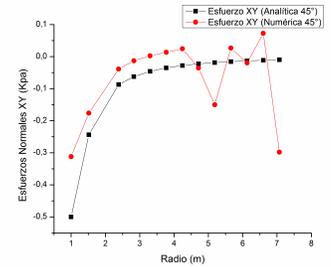
(c) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=90^\circ$.



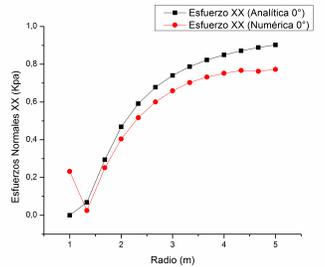
(d) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=45^\circ$.



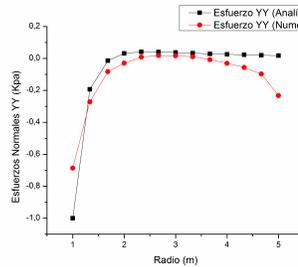
(e) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=45^\circ$.



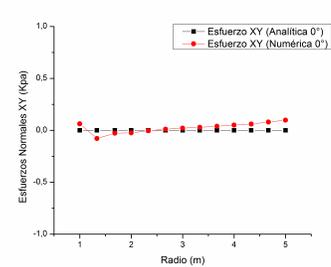
(f) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=45^\circ$.



(g) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=0^\circ$.



(h) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=0^\circ$.



(i) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=0^\circ$.

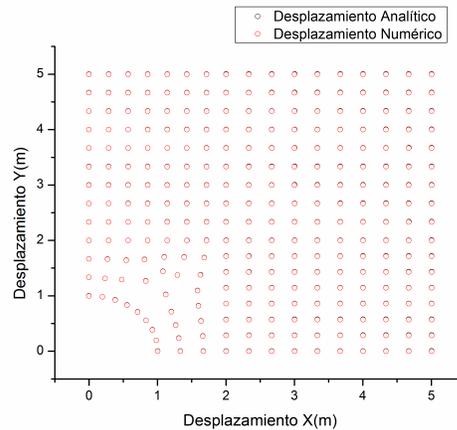
Fuente: Autor del proyecto.

Aunque la figura (6.41) muestra una similitud entre el método numérico y la solución analítica sobre la frontera del dominio Ω dicha similitud no se muestra en el ángulo de evaluación medio $\theta = 45$, esta gran inestabilidad en el cálculo de los esfuerzos puede darse por la dispersión de los puntos de evaluación de la cuadratura de gauss, ya que dicha distribución es de forma radial dando como resultado la dispersión de los puntos en las cuadraturas a medida que se alejan del centro, dando como resultado que la precisión del método numérico no solo depende de la distribución de la nube de puntos si no de los puntos de evaluación dados por las cuadraturas.

Se deben observar los desplazamientos generados por la tensión, estos se muestran en

la figura (6.42).

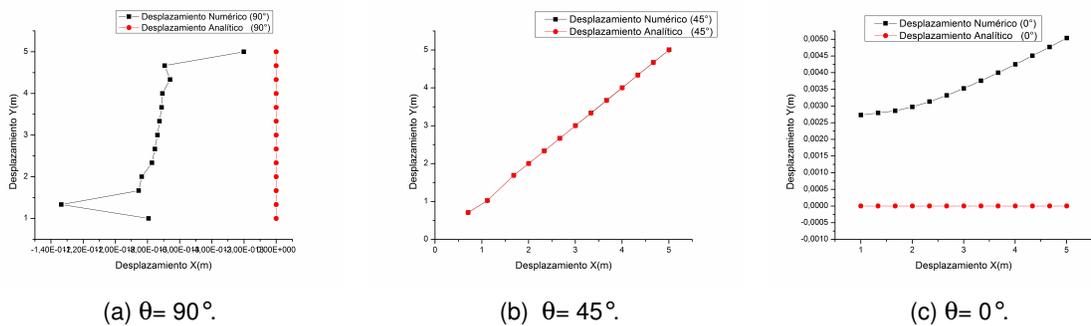
Figura 6.42: Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas *RPIM* (MQ), 273 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Tomaremos los mismos puntos de evaluación de las tensiones para poder evaluar los desplazamientos obtenidos por el método numérico y así poder tener una mejor perspectiva de la figura (6.42), la figura (6.43) muestra dicha propiedad.

Figura 6.43: Evaluación de los desplazamientos con *RPIM* (MQ), 273 nodos de campo



Fuente: Autor del proyecto.

Los desplazamientos obtenidos por el método numérico muestran una pequeña desviación sobre los ángulos de evaluación $\theta = 90$ y $\theta = 0$, siendo insignificantes ya que dichos desplazamientos son muy pequeños en orden de magnitud con respecto a la escala mostrada por la figura (6.43).

Debido a que se debe obtener una estimación cuantitativa en la precisión del método, se hace necesario de nuevo acudir a las expresiones (4.6) y (4.4) para determinar el error

obtenido por el método numérico al incrementar la cantidad de nodos de campo sobre el dominio Ω . La tabla [6.25] consigna el valor del error obtenido por el método numérico.

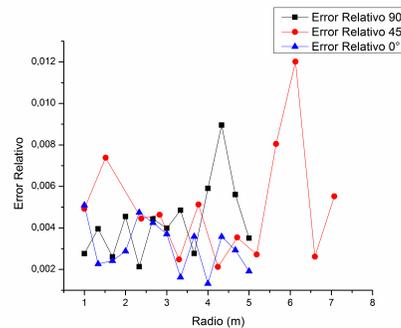
Función	Error	Error relativo	Error relativo normal
RPIM (MQ Penalty)	$\ \mathbf{E}\ = 0,0238$	$\eta = 0,22031$	$\eta_n = 0,06883$

Tabla 6.25: Cálculo del principio de mínima energía, error relativo, error relativo normal, para la función de forma MQ de RPIM, 273 nodos de campo.

El indicador del error $\|\mathbf{E}\|=0,0238$ para 273 nodos *Mfree* es elevado al ser comparado con el indicador del error obtenido al aplicar la misma función de forma *MQ* con un error de $\|\mathbf{E}\|=0,00899$ y con 99 nodos *Mfree*.

Para observar el comportamiento de la función de forma *MQ* sobre el dominio Ω al incrementar el número de nodos, se debe graficar el error relativo del método numérico, dicho comportamiento se muestra en la figura (6.44).

Figura 6.44: Error relativo.



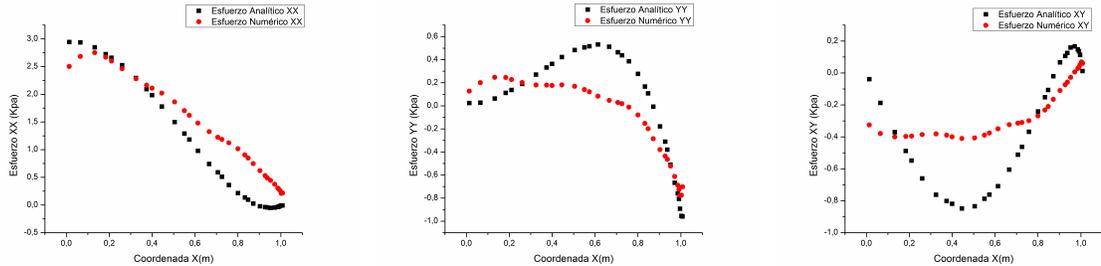
Fuente: Autor del proyecto.

El error relativo en la gráfica muestra una gran inestabilidad a medida que se aleja del origen, dichos comportamientos eran esperados ya que las gráficas de contorno muestran las fluctuaciones en función de los colores, el ángulo medio $\theta = 45$ muestra la mayor variación, lo que confirma que realmente el método depende del número de cuadraturas sobre el dominio y no precisamente de la cantidad de nodos de campo.

El propósito del incremento en los nodos de campo es obtener una mayor precisión en la función de interpolación, permitiendo tener una mejor respuesta sobre el método numérico, si la afirmación anterior es correcta los esfuerzos graficados alrededor del radio $r = 1$

deben ser semejantes a los esfuerzos de la solución analítica, la figura (6.45) muestra dichos comportamientos.

Figura 6.45: Cálculo de los esfuerzos *RPIM* (MQ) con $r=1$.



(a) Esfuerzos σ_{xx} .

(b) Esfuerzos σ_{yy} .

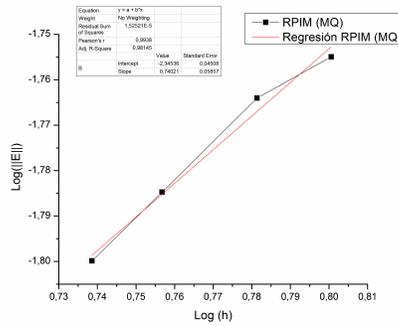
(c) Esfuerzos σ_{xy} .

Fuente: Autor del proyecto.

La gráfica no muestra el efecto deseado sobre el calculo de los esfuerzos, por el contrario el método numérico se aleja de la solución analítica y son muy inestables los esfuerzos σ_{yy} y σ_{xy} , la razón de éste comportamiento es la distancia que poseen los nodos entre si en el dominio de soporte, la expresión (3.33) es el estimador para dicha propiedad.

La tasa de convergencia del método numérico se obtiene al calcular la pendiente resultante entre $\log ||E||$ vs $\log h$ la figura (6.46) muestra el resultado obtenido.

Figura 6.46: Rata de convergencia, $\log(E)$ vs $\log(h)$ *RPIM* (MQ).



Fuente: Autor del proyecto.

El valor obtenido por la pendiente es consignado en la tabla 6.26.

Función	Rata de convergencia
<i>RPIM</i> (MQ Penalty)	$r = 0,74021$

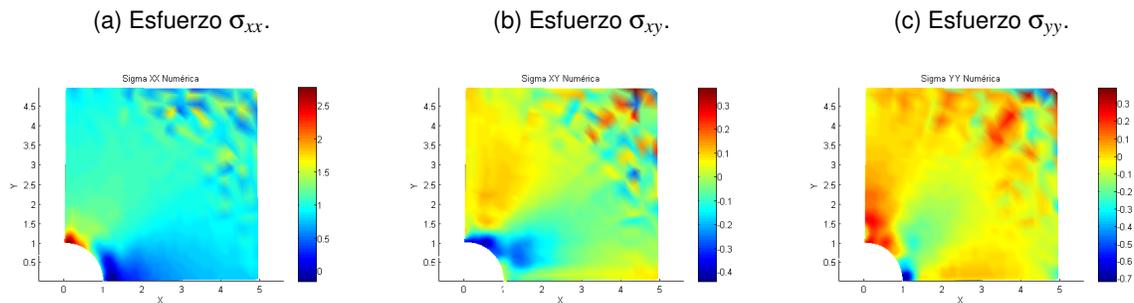
Tabla 6.26: Rata de convergencia de *RPIM* (MQ).

El valor obtenido en la tabla [6.26] es mucho mayor que el valor obtenido por la misma función con una cantidad de nodos de campo igual a 99, pero es menos imprecisa en el cálculo del error. La velocidad de convergencia es mucho mas lenta la solución deberá ser comparada con la función *EXP* en las mismas condiciones.

6.4.2. La función de forma *EXP* utilizada en el método *Mfree*

Los esfuerzos obtenidos por la función de forma *EXP* en la nueva distribución nodal se muestra en la figura (6.47).

Figura 6.47: Solución numérica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xy} y σ_{yy} mediante *RPIM* (*EXP*), 273 nodos de campo.



Fuente: Autor del proyecto.

Las figuras de contorno de la figura (6.47) en el cálculo de los esfuerzos, muestra un comportamiento completamente distorsionado con respecto a la solución analítica del problema, de antemano se mostró que la función *EXP* con 99 nodos de campo era muy inestable en la interpolación, por tanto si se incrementa el número de nodos sobre el dominio se debe obtener que dichas fluctuaciones serán más marcadas sobre el dominio, para esto se recurre al cálculo del error para poder determinar la desviación del método numérico con respecto a la solución analítica.

El primer análisis para observar el comportamiento del método numérico con la función de interpolación *EXP* como función de forma es tomar un ángulo de referencia, para este caso tomaremos dicho ángulo con $\theta = 45$, estos valores son consignados en la siguiente tabla ver [6.27].

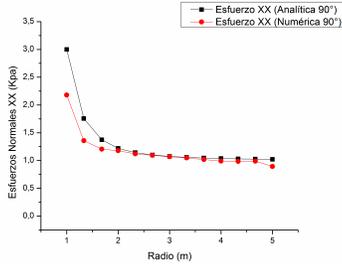
Radio (m)	Analítico σ_{xx} (Kpa)	Analítico σ_{yy} (Kpa)	Analítico σ_{xy} (Kpa)	Númeroico σ_{xx} (Kpa)	Númeroico σ_{yy} (Kpa)	Númeroico σ_{xy} (Kpa)
7,07107	1,0194	-0,0194	-0,01	-0,38069	-0,18918	-0,18835
6,59971	1,02217	-0,02217	-0,01148	1,19083	0,07	0,05096
6,12821	1,02556	-0,02556	-0,01331	1,01415	-0,09942	0,02103
5,65685	1,02979	-0,02979	-0,01563	0,71589	-0,08349	0,03585
5,1855	1,03511	-0,03511	-0,01859	1,00543	-0,03446	-0,0575
4,714	1,04196	-0,04196	-0,0225	1,06323	-0,06095	-0,01642
4,24264	1,05093	-0,05093	-0,02778	1,12411	-0,04646	0,00885
3,77128	1,0629	-0,0629	-0,03516	0,99851	-0,06237	-0,02967
3,29978	1,07919	-0,07919	-0,04592	1,05447	-0,13924	0,00396
2,82843	1,10156	-0,10156	-0,0625	0,61168	-0,27667	0,0127
2,3831	1,13057	-0,12924	-0,08706	1,1546	-0,14751	-0,01164
1,51571	1,09037	-0,1681	-0,24364	0,12891	-0,35986	-0,13586
1	0,50002	0,49998	-0,5	1,12861	-0,05642	-0,21606

Tabla 6.27: Valores de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} en el punto medio de la placa de Kirsch.

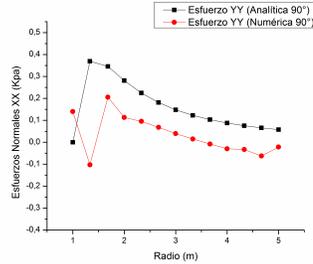
La gráfica de los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} y σ_{xy} para diferentes ángulos de evaluación se pueden observar en la figura (6.48).

Figura 6.48: Comparación de los esfuerzos analíticos y numéricos con RPIM (EXP), 273 nodos de campo.

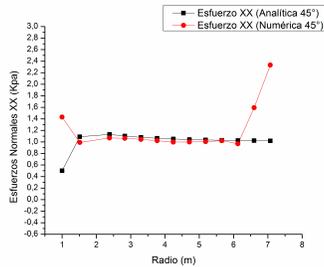
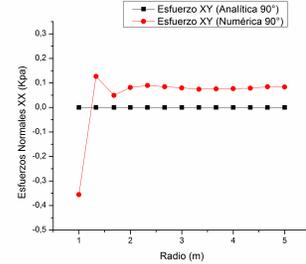
(a) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=90^\circ$.



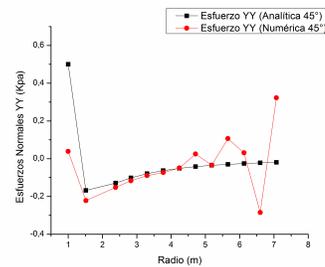
(b) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=90^\circ$.



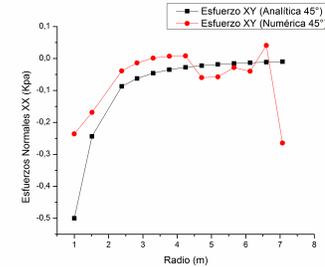
(c) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=90^\circ$.



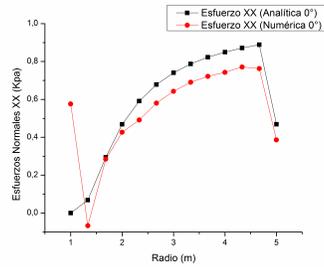
(d) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=45^\circ$.



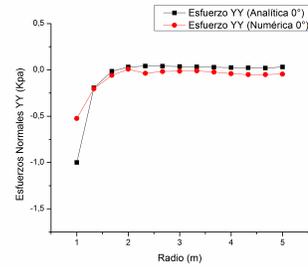
(e) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=45^\circ$.



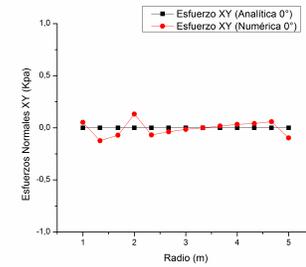
(f) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=45^\circ$.



(g) Esfuerzos $\sigma_{xx}, \theta=0^\circ$.



(h) Esfuerzos $\sigma_{yy}, \theta=0^\circ$.



(i) Esfuerzos $\sigma_{xy}, \theta=0^\circ$.

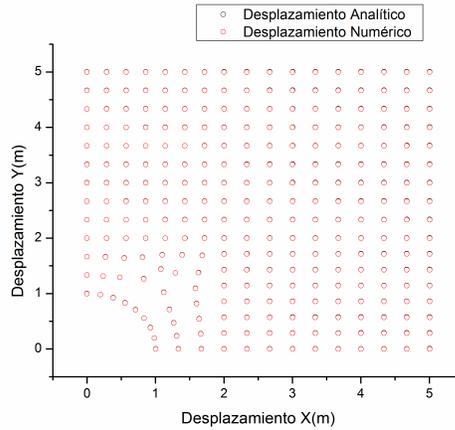
Fuente: Autor del proyecto.

El comportamiento de los esfuerzos sobre los ángulos de evaluación muestran una gran inestabilidad de la función de interpolación *EXP* como función de forma, y es debido a que la función *EXP* es una función susceptible al ruido, ya que por pequeña que sea la variación en un parámetro de la función, este produce un incremento o decremento considerable en dicha evaluación como se muestra en la figura (6.48), por otro lado la dispersión de las cuadraturas de gauss y la distancia entre los nodos *Mfree* son factores que influyen en el desempeño del método numérico al utilizar la función *EXP* como función de forma.

Observemos el comportamiento obtenido en los desplazamientos del método numérico, la figura (6.49) muestra los desplazamientos totales de los nodos *Mfree* sobre el dominio de

soporte.

Figura 6.49: Comparación entre las flexiones analíticas y numéricas *RPIM* (EXP), 273 nodos de campo.

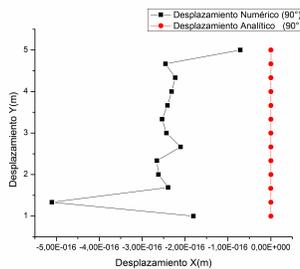


Fuente: Autor del proyecto.

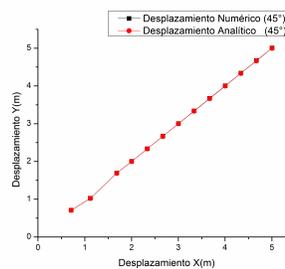
Los desplazamientos obtenidos sobre los mismos ángulos de evaluación en los esfuerzos son mostrados en la figura (6.50).

Figura 6.50: Evaluación de los desplazamientos con *RPIM* (EXP), 273 nodos de campo.

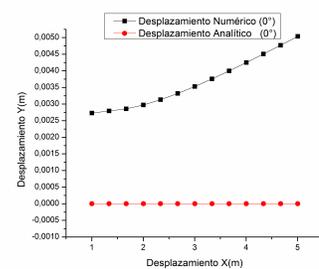
(a) $\theta = 90^\circ$.



(b) $\theta = 45^\circ$.



(c) $\theta = 0^\circ$.

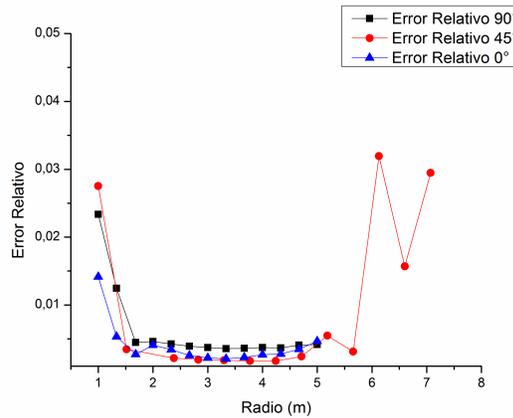


Fuente: Autor del proyecto.

Aunque las variaciones de los desplazamientos no son notorias debido a las escalas es posible hacer una comparación entre las figuras (6.43) y (6.50) para las dos funciones de interpolación *EXP* y *MQ*, los resultados obtenidos son claros y se observa mucha más inestabilidad en la función *EXP*. Para poder obtener mas información se hace un análisis

cuantitativo mediante el comportamiento del error relativo sobre los ángulos de evaluación, la figura (6.51) muestra la gráfica correspondiente a los errores relativos.

Figura 6.51: Error relativo.



Fuente: Autor del proyecto.

El error relativo correspondiente a un ángulo de $\theta = 0$ muestra una gran dispersión, y es reflejado sobre todos los cálculos obtenidos al analizar el comportamiento de la función de interpolación *EXP*, por esta razón el cálculo del error será el parámetro que establece que tan preciso es el método, la tabla [6.28] consigna el valor correspondiente al valor del error.

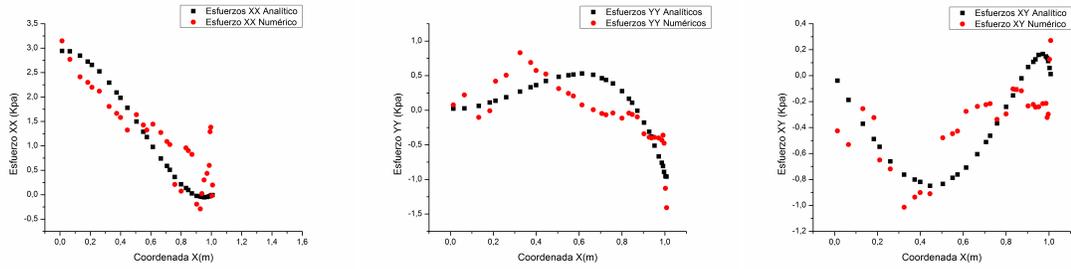
Función	Error	Error relativo	Error relativo normal
RPIM (EXP Penalty)	$\ \mathbf{E}\ = 0,03099$	$\eta = 0,26439$	$\eta_n = 0,118211$

Tabla 6.28: Cálculo del principio de mínima energía, error relativo y error relativo normal, para la función de forma *EXP* de RPIM.

El valor del error con la función de interpolación *EXP* $\|\mathbf{E}\| = 0,03099$ es mucho mayor que el valor obtenido por la función *MQ* $\|\mathbf{E}\| = 0,0238$ aplicando exactamente las mismas condiciones de cálculo.

Se debe confirmar el comportamiento de los esfuerzos alrededor del radio, debido a que la concentración de esfuerzos es mucho más notable y permite observar mejor el comportamiento de la función de interpolación *EXP* se muestra en la figura (6.52).

Figura 6.52: Cálculo de los esfuerzos *RPIM* (EXP) con $r=1$.



(a) Esfuerzos σ_{xx} .

(b) Esfuerzos σ_{yy} .

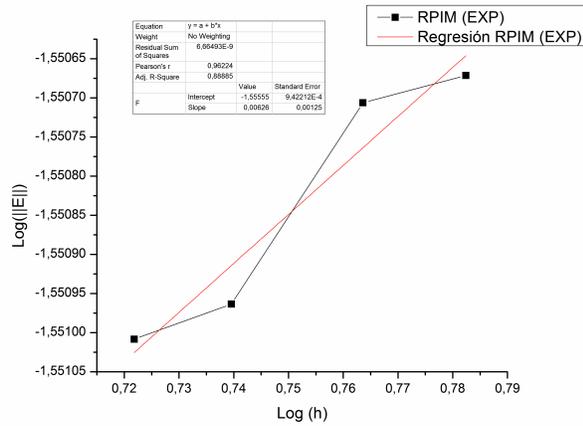
(c) Esfuerzos σ_{xy} .

Fuente: Autor del proyecto.

Los comportamientos mostrados por la gráfica (6.52) establecen el por qué la diferencia abrupta en las figuras de contorno con la función de interpolación *EXP*.

Se debe calcular la tasa de convergencia para determinar si el método numérico se encuentra dentro del rango lineal, la figura (6.53) muestra el cálculo del método.

Figura 6.53: Log (E) vs Log (h) *RPIM* (EXP).



Fuente: Autor del proyecto.

La pendiente obtenida es consignada en la tabla [6.29].

Función	Rata de convergencia
<i>RPIM</i> (EXP Penalty)	$r = 0,00626$

Tabla 6.29: Rata de convergencia de *RPIM* (EXP).

El valor muestra que el método numérico con la función de interpolación *EXP* encuentra una convergencia a la solución pero demasiado inexacta, de tal manera que podemos hacer una conclusión general de las funciones utilizadas para solucionar el problema de *Kirsch* al acudir al análisis de todos los resultados obtenidos.

Comparación de las soluciones

Después de desarrollar los diferentes escenarios para mostrar el comportamiento del método numérico para la solución del problema de *Kirsch*, la tabla [6.30] contiene la información necesaria para tener una mejor perspectiva de los métodos numéricos implementados.

Función	<i>Nodos Mfree</i>	$\ E\ $	η	η_n	r
MLS	99	0,07932	0,18791	0,09862	0,07932
MQ	99	0,00899	0,2619	0,12836	0,5356
EXP	99	0,01759	0,2643	0,11821	0,039
MQ	273	0,02138	0,22031	0,06883	0,74021
EXP	273	0,03099	0,22845	0,07044	0,00626

Tabla 6.30: Parámetros finales de comparación entre las diferentes funciones de forma utilizadas en la solución del problema de Kirsh.

El respectivo análisis a partir de la tabla [6.30] muestra que el método numérico *Mfree* con una función de interpolación *MQ* y una distribución de nodos en forma radial es la más estable, posee una mejor respuesta debido a que se acerca a la solución analítica del problema, por otro lado la función de forma *EXP* sobre el método es muy inestable para el método numérico por esa razón dentro de los elementos *Mfree* la función de interpolación *MQ* es más utilizada por su capacidad de interpolación.

Las conclusiones

- Los resultados obtenidos en este trabajo indicados en las tablas [6.30] y [6.10] muestran que la función de forma Multi-quadrics con la función Penalty como método de implementación en las condiciones de frontera esenciales es mucho más precisa, al obtener un error de $E = 9,083030e^{-2}$, un error relativo $Er = 4,383848e^{-2}$ y una tasa de convergencia $r = 0.13085$ para la solución de una viga en voladizo y un error de $E = 8,99e^{-3}$, un error relativo $Er = 2,619e^{-1}$ y una tasa de convergencia $r = 0.5356$.
- El desempeño obtenido por las dos funciones de interpolación es relativamente bueno, ya que se aproximan en gran medida al valor real de la solución, como es posible observar en la tabla [6.30] los errores son menores al 5% dando una buena estimación en la solución, no obstante al compararlas dos funciones MQ y EXP es apreciable observar la gran diferencia obtenida entre las dos funciones de forma, dando como resultado una mejor interpolación por parte de la función MQ ya que su error relativo y absoluto son mucho menores que los proporcionados por la función de interpolación EXP en la solución de los problemas implementados.
- La mejor respuesta obtenida para el problema de Kirsch, se obtuvo con una malla de 99 nodos y una función de interpolación de Penalty, por el contrario el incremento de nodos Mfree no mejora la respuesta en la solución del problema.
- La determinación del método numérico para el cumplimiento de las condiciones de frontera sobre la implementación del método RPIM Mfree es esencial, como se puede observar en las tablas [6.30] y [6.10] el método penalty es mucho más preciso ya que simplemente es un factor multiplicativo sobre la diagonal de la matriz de momentos, por el contrario el método de Lagrange introduce cálculos extras sobre la implementación del método teniendo como resultado el incremento en el cálculo de los errores.
- Las gráficas correspondientes a la medición del error relativo indican una gran susceptibilidad en la función de forma EXP la cual se ve reflejada sobre todo el dominio de interpolación en todos los casos expuestos, a diferencia de la función de forma MQ don-

de se aprecia que el error relativo disminuye en función de la distancia proporcionado estabilidad sobre el dominio de interpolación.

- Aunque el método es llamado libre de malla se debe considerar la distancia en la distribución nodal de los nodos de campo, esta distancia es fundamental en la solución ya que al no considerar esta restricción el método numérico, este tiene un mal comportamiento en la solución, esto fue demostrado al incrementar abruptamente el número de nodos de 99 a 273 Mfree sobre el dominio de interpolación.
- La velocidad del método numérico RPIM en la etapa del procesador es muy lenta con respecto al método numérico EFG y es debido a la cantidad de operaciones que la función radial debe hacer para calcular la función de forma por cada subdominio correspondiente a cada punto de evaluación.
- La rata de convergencia del método numérico está dentro de las condiciones de linealidad de acuerdo a las gráficas obtenidas, al calcular la pendiente de la recta entre el error y el espaciamiento nodal las funciones de interpolación MQ son más lineales que las funciones EXP y Cubic Spline del método EFG.
- El método numérico no está tan formalizado como sus antecesores FEM,CFD y DF por lo que se hace necesario seguir trabajando sobre la formulación del método sobre el enforzamiento de la condiciones de frontera naturales y las esenciales.
- Los métodos RPIM y EFG en la solución del problema de Kirsch con enforzamiento de la condiciones de frontera naturales mediante las interpolación de Lagrange produce una singularidad en la matriz de momentos lo que no permite obtener la solución de los esfuerzos del problema.
- Una de las grandes ventajas del método numérico es la no utilización de mallas sobre el dominio, en cambio se deben utilizar nodos distribuidos sobre el dominio, disminuyendo el tiempo de preprocesamiento, lo único que debe tener en cuenta es la cantidad de nodos y el distanciamiento nodal sobre el dominio de interpolación.
- El desarrollo del problema de Kirsch con el método RPIM y aplicando el método de multiplicadores de Lagrange para la solución de las condiciones de frontera esenciales, no obtuvo una solución debido a la singularidad de la matriz. Dicha singularidad se puede producir por la existencia de un valor nulo en la diagonal introducido por los cálculos adicionales del vector Λ .

Los aportes

- Se implementaron dos de los métodos libre de malla, los cuales fueron comparados entre ellos para determinar el mejor desempeño de las funciones de forma utilizadas, dando como resultado la función MQ de RPIM como la de mejor en el desempeño de los métodos numéricos comparados.
- Los resultados fueron satisfactorios al implementar dos algoritmos RPIM y EFG que dejan una puerta abierta para seguir desarrollando una herramienta computacional a futuro para la solución de problemas relacionados con la mecánica de sólidos y fluidos.
- Se generó un artículos relacionados con el trabajo de elementos libres de malla.
 - Fabio H. Realpe, Ing. Físico, Universidad del Cauca, Pedro J. Díaz, M.Sc. Ing. Mecánico, Universidad Industrial de Santander. Radial basis function MQ and EXP as mesh free element shape functions.
- Se realizó una ponencia en el congreso de International Mechanical Engineering and Agricultural Sciences Congress, donde se presentaron los resultados obtenidos por el método (RADIAL BASIS FUNCTION MQ AND EXP AS MESH-FREE ELEMENTS SHAPE FUNCTIONS).
- Presentación ante la VIE de la Universidad un proyecto de apoyo a la consolidación de grupos.
- Es el primer trabajo completamente desarrollado a nivel de implementación, dejando un precedente en el inicio de la curva de aprendizaje en la Universidad Industrial de Santander y en Colombia en la mecánica de sólidos.
- Se solucionaron dos problemas distintos de la mecánica de sólidos, a partir de la implementación de los métodos RPIM y EFG.

Las recomendaciones y trabajos futuros

- Se hace indispensable la implementación de un pre - procesador el cual permita cumplir con las condiciones de distribución de espaciamiento nodal, de esta manera será posible desarrollar más problemas con geometrías complejas relacionadas con la temática de sólidos.
- Implementar el método numérico para la solución de problemas en la mecánica de fluidos.
- Desarrollar un estudio del algoritmo para establecer su comportamiento en la solución de problemas no lineales en la mecánica de sólidos.
- Estudiar los casos de singularidad en los métodos Mfree en la implementación de las condiciones esenciales del problema.
- Integrar todos estos estudios en una sola plataforma para la solución de cualquier problema de la mecánica de sólidos.

Bibliografía

- [1] S.N. Atluri and T.Zhu. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127., 1998a.
- [2] G.Touzot B. Nayroles and P.Villon. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318, 1992.
- [3] J.R. Barber. *Solid Mechanics and its Application*. Second edition, 2004.
- [4] D.G. Vesey C, Snell and P.Mullord. The application of a general ffdm to some boundary value problems. *Comp. Struct*, 13:547–552, 1981.
- [5] A.J. Chorin. Numerical study of slightly viscous flow. *J. of Fluid Mechanics*, 57:785–796, 1973.
- [6] D.Roylance. *Introduction to Elasticity*. Firts edition, 2000.
- [7] O.Z. Zienkiewicz E. Oñate, S. Idelsohn and R.L.Taylor. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 39:3839–3867, 1996.
- [8] G.R.Liu. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. Firts Edition, 2003.
- [9] G.R.Liu and Y.T. Gu. A local radial point interpolation method (lr-pim) for free vibration analyses of 2-d solids. *J. of Sound and Vibration*, 246(1):29–46, 2001c.
- [10] G.R.Liu and Y.T. Gu. Comparisons of two meshfree local point interpolation methods for structural analyses. *Computational Mechanics*, 29:107–121, 2002a.
- [11] G.R.Liu and Y.T. Gu. A truly meshless method based on the strong-weak form. advances in meshfree and x-fem methods. In *Proceeding of the 1st Asian Workshop in Meshfree Methods (Ed. Liu GR)*,, 2002d.
- [12] G.R.Liu and Y.T. Gu. A meshfree method: Meshfree weak-strong (mws) form method, for 2-d solids. *Computational Mechanics*, 33(1):2–14, 2003b.

- [13] G.R.Liu, J.G. Wang Y.T. Gu, and Y.T. Gu. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions. *Structural Engineering and Mechanics*, 14:713–732, 2002.
- [14] Sadd H.Martin. *Elasticity Theory, Applications, and Numerics*. First edition, 2005.
- [15] M.Tian J.Ying, T. Wei and Q. Yang. Adaptive element free galerkin method applied to analysis of earthquake induced liquefaction. *EJGE*, 14:1–12, 2009.
- [16] J. Krok and J. Orkisz. *A Unified Approach to the FE Generalized Variational FD Method for Nonlinear Mechanics*. First edition., 1989.
- [17] C. Lanczos. Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *Physics*, 17:123–199, 1938.
- [18] G.R Liu and Y.T Gu. *An Introduction to Meshfree Methods and their Programming*. First Edition, 2005.
- [19] W.K. Liu and S.Jun. Multiple scale reproducing kernel particle method for large deformation problems. *Int. J. for Num. Methods in Engng*, 141:1339–1679, 1998.
- [20] L. Lucy. A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astron. J.*, 82:1013–1024, 1977.
- [21] J.J. Monaghan and J.C.Lattanzio. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149:135–143, 1985.
- [22] J.J. Monaghan and J.C. Lattanzio. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, 149:135–143, 1985.
- [23] Y.X. Mukherjee. Boundary node method for potential problems. *Int. J. Num. Methods in Engng*, 40:797–815, 1997.
- [24] P.Lancaster and K.Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Math. Comput*, 37:141–158, 1981.
- [25] P.S.Bernard. A deterministic vortex sheet method for boundary layer flow. *J.of Computational Physics*, 117:132–145., 1995.
- [26] W.P. Jones R.A. Frazer and S.W.Skan. *Approximations to Functions and to the Solutions of Differential Equations*. Report and Memo. No. 1799., 1937.
- [27] R.A.Gingold and J.J.Moraghan. Smooth particle hydrodynamics: theory and applications to non spherical stars. *Man. Not. Roy. Astron.Soc.*, 181:375–389, 1977.
- [28] J.N. Reddy. *Mechanical of laminated composite plates and shells theory and analysis*. Second edition., 2004.

- [29] R.Schaback. Approximation of polynomials by radial basis functions. wavelets, images and surface fitting. *Laurent P.J., Mehaute Le and Schumaker L.L, Wellesley Mass*, pages 459–466, 1994.
- [30] J.C. Slater. Electronic energy bands in metals. *Physics*, 45:794–801, 1934.
- [31] YY. Lu T. Belytschko and L.Gu. Element-free galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 37:229–256, 1994a.
- [32] J. Zhang T. Zhu and S.N. Atluri. A meshless local boundary integral equation (lbie) method for solving nonlinear problems. *Computational Mechanics*, 22(2):174–186, 1998.
- [33] J.D. Zhang T. Zhu and S.N Alturi. A local boundary integral equation (lbie) method in computational mechanics, and a meshles discretization approach. *Computational Mechanics*, 21(3):223–235, 1998.
- [34] S. Timoshenko and J. N. Goodier. *Theory of Elasticity*. Third Edition, 1970.
- [35] T.Liszka and J.Orkisz. Finite difference methods of arbitrary irregular meshes in non-linear problems of applied mechanics. In *Conf. on Structural Mech. In Reactor Tech, San Francisco, USA.*, 1977.
- [36] J.Zhang T.Zhu and S.N. Alturi. A meshless numerical method based on the local boundary integral equation (lbie) to solve linear and non-linear boundary value problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(56):375–389, 1999.
- [37] V.Girault. Theory of a gdm on irregular networks. *SIAM J. Num*, 11:260–282., 1974.
- [38] V.Pavlin and Perrone. Finite difference energy rechniques for arbitrary meshes. *Comp. Struct*, 5:45–58, 1975.
- [39] S. Jun W.K. Liu and Y.F Zhang. Reproducing kernel particle methods. *Int. J. Numer. Methods Engrg*, 20:1081–1106, 1995.