LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

BUCARAMANGA

2016

LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

Trabajo de grado para optar el título de Magíster en Pedagogía

Director:
MARÍA HELENA QUIJANO HERNÁNDEZ
Magister en Educación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2016

A mi familia TÉLLEZ NAVARRO por su incondicional motivación y apoyo, y a mi inspiración YEIMY NATHALY, JULIÁN CAMILO e INDIRA YISETH, pues gracias a ellos inicié y culminé un objetivo más de mi vida.

Daniel Oswaldo Téllez Navarro

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos a:

A los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga, quienes con su participación y colaboración hicieron posible mi trabajo de grado.

A los Docentes de la Maestría en Pedagogía, por su orientación y aportes para mi crecimiento profesional.

A la orientadora, María Helena Quijano Hernández. por sus aportes, colaboración, y dedicación, que fueron valiosos para la realización y culminación del Trabajo Final de Investigación.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTADO DE ANEXOS

Pág.

TÍTULO: LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

AUTOR: DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

PALABRAS CLAVES: DIDÁCTICA, PRESABES, RESOLUCION DE PROBLEMAS, LENGUAJE MATEMÁTICO

RESUMEN:

A través de esta experiencia se han observado algunas necesidades educativas inmediatas y transformaciones que se vienen dando en la educación. Por esto, el objetivo del presente trabajo es implementar las situaciones didácticas para favorecer en los estudiantes de décimo grado, la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, aplicado en una Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga.

El trabajo está conformado por cuatro capítulos que se explican brevemente a continuación: en el desarrollo de la investigación en el capítulo uno se presenta el planteamiento del problema de investigación, el cual se divide en descripción y planteamiento del problema, justificación, objetivo general y específicos.

Se continuará en el capítulo dos con el desarrollo del marco teórico subdividido en antecedentes de investigación; fundamentación teórica enmarcada en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: Didáctica de la matemática, Sistemas y pensamiento Geométrico – Métrico.

Seguidamente, en el capítulo tres se describe el diseño metodológico de investigación subdividido en la contextualización de la investigación, descripción poblacional participante, técnicas e instrumentos y descripción del proceso metodológico, enfoque metodológico a partir del paradigma cualitativo y su importancia, se plantea el diseño metodológico desde la IA.

Se finaliza con el capítulo cuatro realizando el proceso de análisis de resultados, las categorías emergentes analizadas fueron: “Lenguaje matemático”; “Comprensión lectora”; “Analíticos y descriptivos”; “Presaberes”; y “Actitudinal”. Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones, referentes bibliográficos y los anexos.

Con lo anterior, se busca en el proceso de investigación, impactar a la población estudio, analizando las problemáticas que presenten frente a la interpretación, argumentación y proposición de razonamientos analíticos y procedimentales que favorezcan su desempeño en la resolución de problemas, e implementar estrategias que ayuden a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje

---

*Trabajo de grado

** Escuela de Educación, Maestría en pedagogía, María Helena Quijano.

TITLE: **THE DIDACTIC SITUATIONS IN THE SOLUTION OF TRIGONOMETRIC PROBLEMS WITH RECTANGULAR TRIANGLES**

AUTHOR: DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

KEY WORDS: **DIDACTICS, PRE.KNOWLEDGE, PROBLEM SOLVING, MATHEMATICAL LANGUAGE**

ABSTRACT

Through this experience we have observed some immediate educational needs and changes that have been occurring in education. Therefore, the objective of the present work is to implement didactic situations to favor tenth grade students, a solution of trigonometric problems with rectangles triangles, applied in a Public Educational Institution of Bucaramanga city.

The work consists of four chapters that are explained briefly below: in the development of research: in chapter one presents the approach of the research problem, which is divided into description and approach of the problem, justification, general objective and specific.

It will be continued in chapter two with the development of the theoretical framework subdivided into antecedents of investigations; theoretical foundation framed in the teaching and learning of mathematics: Didactics of mathematics, Systems and Geometric thinking – Metric.

Next, chapter three describes the methodological design of research subdivided into the contextualization of research, participant population description, techniques and instruments and description of the methodological process, methodological approach based on the qualitative paradigm and its importance, the methodological design from AI.

We conclude with chapter four conducting the results analysis process, the emergent categories analyzed were: "Mathematical language"; "Reading comprehension"; "Analytical and descriptive"; "Pre knowledge"; and “Attitudinal". Finally the conclusions and recommendations are presented, referring bibliographical and the annexes.

With the above, the research process is aimed at impacting the study population, analyzing the problems they face in the interpretation, argumentation and proposition of analytical and technical reasoning that favor their performance in solving problems, and implement strategies that help to improve the process of teaching and learning.

---

* Degree work
**School of Education, Masters in pedagogy, María Helena Quijano.

INTRODUCCIÓN

A través de esta experiencia se han observado algunas necesidades educativas inmediatas y transformaciones que se vienen dando en la educación. Al reflexionar sobre estos cambios se asume que debemos tener un pensamiento abierto hacia lo nuevo e inesperado; nuestro desafío está en ser partícipes de ésta renovación. Por esto, el objetivo del presente trabajo es implementar las situaciones didácticas para favorecer en los estudiantes de décimo grado, de una la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, aplicado en una Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga.

Fue interesante indagar cómo los estudiantes interpretan problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos, e identificar las dificultades conceptuales y procedimentales que presentan en la solución de problemas trigonométricos; además, determinar situaciones didácticas generadoras de condiciones que favorezcan en el estudiante la aplicación del conocimiento trigonométrico, y a su vez diseñar situaciones didácticas donde se desarrolle acción, formulación y validación de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos e implementarlas.

El trabajo está conformado por cuatro capítulos que se explican brevemente a continuación: en el desarrollo de la investigación en el capítulo uno se presenta el planteamiento del problema de investigación, el cual se divide en descripción y planteamiento del problema, justificación, objetivo general y específicos. En este se busca orientar la situación problema, que se evidencie en el contexto de estudio, lo que permitirá al docente investigador identificar la problemática de la institución educativa a trabajar, a partir de ello se desarrollarán las estrategias requeridas para mejorar las propuestas metodológicas en sus prácticas pedagógicas.

Se continuará en el capítulo dos con el desarrollo del marco teórico subdividido en antecedentes de investigación en el ámbito internacional, nacional y local; fundamentación teórica enmarcada en la enseñanza y aprendizaje de la matemática: Didáctica de la matemática, Sistemas y pensamiento Geométrico – Métrico, Lenguaje matemático, Comprensión lectora, Analíticos y descriptivos y Presaberes. Con la anterior información se sustenta teóricamente las categorías que emergen de esta investigación y que le dan horizonte al análisis de los resultados obtenidos.

Seguidamente, en el capítulo tres se describe el diseño metodológico de investigación subdividido en la contextualización de la investigación, descripción poblacional participante, técnicas e instrumentos y descripción del proceso metodológico, enfoque metodológico a partir del paradigma cualitativo y su importancia, se plantea el diseño metodológico desde la IA.

Se finaliza con el capítulo cuatro realizando el proceso de análisis de resultados, donde se estructuró el análisis e interpretación de las categorías que resultaron de todo un proceso obtenido en la recolección de datos como fueron la aplicación del taller diagnóstico, entrevista, diario de campo e implementación de la Unidad Didáctica. Las categorías emergentes analizadas fueron: “Lenguaje matemático”; “Comprensión lectora”; “Analíticos y descriptivos”; “Presaberes”; y “Actitudinal”, y finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones, referentes bibliográficos y los anexos.

Con lo anterior, se busca en el proceso de investigación, impactar a la población estudio, analizando las problemáticas que presenten frente a la interpretación, argumentación y proposición de razonamientos analíticos y procedimentales que favorezcan su desempeño en la resolución de problemas, e implementar estrategias que ayuden a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, tanto de los educandos como del docente orientador, el cual se puede evidenciar en los resultados de la prueba saber once.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 DESCRIPCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las necesidades educativas inmediatas, los cambios que se han venido dando en la educación y las reflexiones de la labor docente sugieren tener un pensamiento abierto hacia lo nuevo y partícipe de la renovación educativa. En la actualidad las evaluaciones escritas de matemáticas son de tipo técnico y procedimental para los estudiantes de la educación básica y media de una Institución educativa pública del municipio de Bucaramanga, donde se reflejaran múltiples dificultades que van, desde el reconocimiento mismo de las figuras planas y sus propiedades, hasta el uso indiscriminado de “fórmulas”, que aparentemente no tienen nada que ver con las propiedades que la caracterizan. No se aprecia aún qué aspectos tan básicos en los pensamientos geométricos y métrico son enriquecidos en el proceso de enseñanza realizado en el salón de clases. Probablemente, el tipo de planteamientos que se presenta sobre estos temas se limita, en muchas ocasiones, a trabajar los aspectos netamente aritméticos de la medición en esquemas repetitivos y descontextualizados: “Dadas altura y base de un rectángulo o de un triángulo rectángulo” o “usar la razón trigonométrica para determinar la altura o la base del triángulo rectángulo”, que no se relacionan con la construcción, las razones trigonométricas, la deducción de las razones trigonométricas y los argumentos de semejanza de triángulos.

Es así, que para analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos, autores como Santos Trillos[1] brindan valiosas ideas sobre las estrategias metacognitivas, y la representación gráfica en el momento de abordar el análisis de las categorías emergentes. Lo mencionado, nos permite comprender que para los estudiantes es

[1] SANTOS, T. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo editorial Iberoamericana. 1999.

de gran ayuda que el profesor les proporcione una representación gráfica en el momento de plantearles un problema, ya que en él encuentran herramientas para resolverlo. La interpretación de un problema puede no ser clara semánticamente, pero si el modelo forma parte del problema planteado permitirá al estudiante tener una mejor orientación en las representaciones mentales, las cuales forman parte de las estrategias a seguir en la solución que plantee.

Por tanto, la enseñanza de la matemática en las escuelas tradicionales, recoge un número reducido de hilos conductores (aritmética, geometría, álgebra y trigonometría) que se organizan en una posición horizontal para formar un plan de estudios. Este enfoque impide el desarrollo formal de la intuición, además, refuerza la tendencia a diseñar cada curso para satisfacer los prerrequisitos del siguiente, haciendo que el estudio de las matemáticas sea en gran medida un ejercicio de satisfacción postergada. Mientras, en la escuela actual se busca que la enseñanza en los estudiantes, sea necesario elaborar planes de estudio con una mayor continuidad vertical, a fin de conectar las matemáticas con la experiencia educativa de los estudiantes, teniendo en cuenta que es importante establecer hilos conductores paralelos apoyados en las experiencias que permiten fortalecer los diferentes intereses y talentos de los mismos, los cuales se alimentan con ideas desafiantes que estimulen la imaginación y fomenten la exploración; será así, como los estudiantes tendrán una comprensión profunda y diversificada de las matemáticas. Sin embargo, la finalidad de la escuela tradicional sigue marcando el rol docente con unos parámetros específicos, como dar evidencia de unas fórmulas donde se evalúa un aprendizaje memorístico, que no contribuye a comprender el uso de las matemáticas en la solución de situaciones cotidianas de su entorno.

Muestra de ello, se viene aplicando en Colombia la Prueba PISA desde el año 2006; en los resultados vistos en el año 2012 donde participaron 65 países en la

Prueba PISA[2], 34 de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y 31 países y economías asociadas[3], los países latinoamericanos participantes en la edición 2012, en todas las áreas reflejaron promedios significativamente inferiores al promedio de los países de la OCDE. La muestra en Colombia se compuso de 9073 estudiantes de 15 años de edad de 352 instituciones educativas (oficiales y privadas, urbanas y rurales), que representan a 559.674 estudiantes a nivel nacional, tomadas en Bogotá, Cali, Manizales y Medellín. En matemáticas el puntaje de Colombia fue de 376, el cual es inferior a los obtenidos por 61 países (Ver tabla 1), y no es estadísticamente diferente a los tres países que alcanzaron los puntajes más bajos (Catar, Indonesia y Perú).

Tabla 1. Puntajes promedio y desviaciones estándar en matemáticas, lectura y ciencias, PISA 2012.

Tabla 1. Puntajes promedio y desviaciones estándar en matemáticas, lectura y ciencias, PISA 2012

Países	Matemáticas		Lectura		Ciencias	
	Promedio	Desviación estándar	Promedio	Desviación estándar	Promedio	Desviación estándar
Chile	423	81	441	78	445	80
México	413	74	424	80	415	71
Uruguay	409	89	411	96	416	95
Costa Rica	407	68	441	74	429	71
Brasil	391	78	410	85	405	79
Argentina	388	77	396	96	406	86
Colombia	**376**	**74**	**403**	**84**	**399**	**76**
Perú	368	84	384	94	373	78
Promedio OCDE	494	92	496	94	501	93
Shanghái	613	101	570	80	580	82

Nota: los países latinoamericanos están ordenados de mayor a menor puntaje promedio en matemáticas.

Fuente: OCDE, 2013.

Fuente: Resultados prueba PISA 2012 Colombia, ICFES.

[2] Información sobre Pruebas PISA 2012 (que evalúan las Pruebas PISA). Disponible en: file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20PISA%202012.PDF

[3] Esta distinción es relevante dado que hay casos, como el de China, en el que hay resultados específicos a nivel de economías: Hong Kong, Macao y Shanghái. Los países latinoamericanos que formaron parte de la edición 2012 fueron: Brasil, Argentina, Colombia, Chile, Costa Rica, México, Perú y Uruguay.

En cuanto a niveles de competencia, el análisis se concentra en los porcentajes de estudiantes que se ubican en los niveles 5 y 6 (desempeño superior), donde solo 3 de cada mil lo alcanzaron; en el nivel 2 (desempeño básico) y de aquellos que no lo alcanzaron (ver Tabla 2 y 3), reflejando que solo dos de cada diez estudiantes pueden hacer interpretaciones literales de los resultados de problemas matemáticos, emplean algoritmos básicos, fórmulas, procedimientos o convenciones para resolver problemas de números enteros, e interpretan y reconocen situaciones en contextos que requieren una inferencia directa.

Tabla 2. Descripción por niveles y resultados de la prueba PISA 2012

NIVELES DE COMPETENCIA	DESCRIPCIÓN CUALITATIVA POR NIVELES	RESULTADOS COLOMBIA 2012
Nivel más alto 5 y 6 (Entre 607 y más de 668 puntos)	Los alumnos abordan las matemáticas con un enfoque más activo y creativo. Normalmente interpretan información más compleja, a la vez que gestionan una secuencia de procesamiento de varios pasos. Pueden elaborar la formulación de un problema y, en muchos casos, construir modelos apropiados que faciliten su solución. Los estudiantes de este nivel se caracterizan asimismo por su capacidad de identificar y aplicar herramientas y conocimientos apropiados a unos contextos con los que no están familiarizados. Finalmente, demuestran su perspicacia a la hora de identificar la estrategia de solución más adecuada y hacen uso de otros procesos cognitivos de orden superior, como son la capacidad de generalizar, razonar y argumentar con el fin de explicar y comunicar los resultados.	Nivel 5 y 6: **0,3%**
Nivel Superior 3 y 4 (Entre 483 a 606 puntos).	Los alumnos pueden llevar a cabo tareas de mayor complejidad, cuyos procesos comportan más de un paso. Combinan distintos tipos de información o interpretan distintos modelos de representación de conceptos o informaciones matemáticas, identificando los elementos más relevantes e importantes y las relaciones que se dan entre ellos. Para identificar las soluciones, recurren por lo general a formulaciones o modelos matemáticos	Nivel 3 y 4: **8,1%**

	conocidos, expresados normalmente en términos algebraicos, o realizan una breve secuencia de procesamiento o de cálculo con objeto de obtener una solución.	
Nivel más bajo 1 y 2 (Entre 358 a 482 puntos).	Los alumnos, por regla general, saben llevar a cabo procesos de un solo paso que implican el reconocimiento de unos contextos que les son familiares y unos problemas matemáticos claramente formulados, reproduciendo hechos o procesos matemáticos bien conocidos y empleando habilidades de cálculo sencillas.	Nivel 1 **73,8%** Nivel 2 **18%**

Fuente: Resultados prueba PISA 2012 Colombia, ICFES.

Tabla 3. Porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, en nivel 2 (nivel bajo) y debajo de nivel 2 en PISA 2012.

Tabla 2. Porcentajes de estudiantes en niveles 5 y 6, en nivel 2 (nivel básico) y por debajo de nivel 2 en PISA 2012

Países	Matemáticas			Lectura			Ciencias		
	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)	5 y 6 (%)	2 (%)	< 2 (%)
Chile	1,6	25,3	51,5	0,6	35,1	33,0	1,0	34,6	34,5
México	0,6	27,8	54,7	0,4	34,5	41,1	0,1	37,0	47,0
Uruguay	1,4	23,0	55,8	0,9	28,9	47,0	1,0	29,3	46,9
Costa Rica	0,6	26,8	59,9	0,6	38,1	32,4	0,2	39,2	39,3
Brasil	0,8	20,4	67,1	0,5	30,1	49,2	0,3	30,7	53,7
Argentina	0,3	22,2	66,5	0,5	27,3	53,6	0,2	31,1	50,9
Colombia	**0,3**	**17,8**	**73,8**	**0,3**	**30,5**	**51,4**	**0,1**	**30,8**	**56,2**
Perú	0,6	16,1	74,6	0,5	24,9	59,9	0,0	23,5	68,5
Promedio OCDE	12,6	22,5	23,0	8,4	23,5	18,0	8,4	24,5	17,8
Shanghái	55,4	7,5	3,8	25,1	11,0	2,9	27,2	10,0	2,7

Nota: los países latinoamericanos están ordenados de mayor a menor puntaje promedio en matemáticas.

Fuente: OCDE, 2013.

Fuente: resultados prueba pisa 2012 Colombia, ICFES.

Con el propósito de conocer lo que evalúa en el aprendizaje de las matemáticas la prueba PISA, se incluyen seis preguntas sobre teorías matemáticas, conceptos y contenidos vistos en clase, y la cantidad de tiempo de clase que se destina a diferentes temas. A partir de estas preguntas se proponen tres índices: problemas que exigen la exposición de un texto (ICT), aplicación de las matemáticas (IAM) y exposición de las teorías y conceptos matemáticos formales (IMF); este último es el que tiene mayor efecto sobre el puntaje en matemáticas, y aunque en Colombia el valor del IMF es mayor que el promedio de la OCDE, se encuentran mayores disparidades de acuerdo con la varianza de este índice. Estos resultados sugieren que las matemáticas formales se relacionen de manera significativa, es decir, los estudiantes con mayor exposición a temas de álgebra y geometría, reflejan un valor mayor del índice IMF igual a 2,64 frente a estudiantes con menor exposición tienen un IMF de 0,8, obteniendo resultados inferiores en 91 puntos, lo cual representa una diferencia de dos años de escolaridad, por lo tanto, existe la necesidad de reforzar el pensamiento algebraico y geométrico en los colegios.

En el contexto nacional, las pruebas saber se vienen aplicando desde el año 2002, donde se implementaron las primeras evaluaciones nacionales censales por competencias en la educación básica, y se reforma el examen para profundizar en la evaluación de calidad de la educación media que está orientada a procesos complejos de razonamiento que la de conocimientos o aptitudes. Los resultados de las Pruebas Saber 11 de los años 2012 y 2013, muestran que más del 50% de los estudiantes de undécimo grado de la Institución Educativa Publica (Ver Tabla 4) se ubican en un nivel medio en las competencias de comunicación, razonamiento y en la solución de problemas, donde solamente el 3% logra un nivel alto; reflejando así, que el estudiante tiene un acercamiento conceptual empírico y usa verificaciones analógicas que carecen de la formulación de inferencias y argumentos en la interpretación de problemas, generando dificultad en la lectura y análisis de procesos mentales que usa. Igualmente, presenta dificultad en reconocer condiciones y relaciones, al traducir un enunciado verbal al numérico o gráfico. De ahí, se da la necesidad de replantear las prácticas pedagógicas desde lo metodológico y didáctico, para que se pueda mejorar el aprendizaje desde una interiorización y afianzamiento conceptual, dado que se requiere un sentido lógico y aplicativo en los procesos de enseñanza de la matemática.

Tabla 4. Resultado undécimo grado en el área de matemáticas años 2012-2013

icfes mejor saber

EXAMEN DE ESTADO
Para Ingreso a la Educación Superior
Periodo 2012-2

Porcentaje de estudiantes por Niveles de Competencia

SEDE A - I E PROVENZA - MAÑANA
BUCARAMANGA - SANTANDER

Porcentaje de Estudiantes en cada nivel de las pruebas del nucleo común

Periodo 2012-2				Periodo 2013-2			
Nivel	Matemática			Nivel	Matemática		
	C1 Comunicación	C2 Razonamiento	C3 Solución de problemas		C1 Comunicación	C2 Razonamiento	C3 Solución de problemas
I (Bajo)	5,80	26,09	37,68	I (Bajo)	27,27	27,27	35,06
II (Medio)	94,20	68,12	57,97	II (Medio)	68,83	72,73	61,04
III (Alto)	0,00	5,80	4,35	III (Alto)	3,90	0,00	3,90

Fuente: Resultados Prueba Saber 2012-2013 Colombia, ICFES.

Por consiguiente, los resultados de la Prueba Saber 11 de los años 2012 y 2013 obtenidos en la Institución Educativa, muestran una situación similar frente a los internacionales (Pruebas PISA, 2012), donde según cada una de las competencias, únicamente una proporción muy mínima de los estudiantes (inferior al 6% en el año 2012 e inferior al 4% en el año 2013), logra un nivel alto en cada una de las 3 competencias.

De acuerdo con lo mencionado, lo anterior evidencia el problema en las competencias que se requieren trabajar con los estudiantes de décimo grado en la Institución Educativa Publica del Municipio de Bucaramanga (Santander), el análisis de los resultados que muestran las dos pruebas, SABER y PISA, llevan a una serie de cuestionamientos como los siguientes:

- ¿Cómo los estudiantes interpretan problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos?,
- ¿Cuáles son las dificultades conceptuales y procedimentales que presentan los estudiantes en la solución de problemas trigonométricos?

- ¿Qué condiciones didácticas favorecen en el estudiante la aplicación del conocimiento trigonométrico?

Estas preguntas llevan a plantearse *¿Cómo favorecer en los estudiantes de décimo grado, la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, a través de situaciones didácticas?,* para las cuales se requieren presaberes relacionados con semejanza de triángulos, Teorema de Pitágoras Teorema de Thales y esquemas necesarios como la comprensión lectora y el lenguaje matemático, los cuales ofrezcan al estudiante la posibilidad de construir por sí mismo un conocimiento nuevo en un proceso de ingeniería didáctica[4]. Es así, como el profesor debe imaginar y proponer a los estudiantes situaciones matemáticas que ellos puedan vivenciar, que provocaron la ocurrencia de genuinos problemas matemáticos y en las cuales el conocimiento en cuestión apareció como una solución óptima a dichos problemas, con la condición adicional de que dicho conocimiento fue construible por los estudiantes.

1.2 JUSTIFICACIÓN

En la labor docente constantemente se llama a participar en los cambios educativos propuestos en matemáticas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). A partir de las propuestas del MEN[5] se conocen algunos trabajos realizados específicamente en geometría. Trabajos que motivan a ser partícipe de esta renovación, en lo que respecta al desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, a través del análisis de las dificultades que presenta el estudiante, al resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.

La necesidad de enfocar el trabajo hacia problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, ha surgido a raíz de las dificultades reflejadas por los estudiantes en

[4] Ibíd., p. 16.
[5] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. MATEMÁTICAS – Lineamientos Curriculares. Cooperativa Editorial MAGISTERIO. Santa Fe de Bogotá, D.C. Julio 1998, pág. 56

el momento de aplicar la modelación geométrica, las razones trigonométricas y algunos presaberes, tales como: propiedades geométricas de los triángulos y Teorema de Pitágoras en la solución de problemas sobre triángulos rectángulos. Por ello, es pertinente proponer el uso de situaciones didácticas que incidan sobre las prácticas pedagógicas y el contenido didáctico, que permita la integración e interpretación de los tópicos geométricos en contextos de la naturaleza y la técnica, el énfasis en aplicaciones de la geometría, el estudio de la interpretación de representaciones visuales, para lo cual se requiere fortalecer el pensamiento geométrico y métrico en la solución de problemas. Es así, como se puede incurrir en determinar las dificultades procedimentales y conceptuales que presenta el estudiante al resolver problemas trigonométricos, y generarse desde allí estrategias metodológicas basadas en las situaciones didácticas que contribuyan en mejorar las competencias de los estudiantes.

Por consiguiente, mejorar los procesos de aprendizaje de la geometría y la trigonometría en el estudiante, aportará en la comprensión, aplicación y dominio de conceptos físicos tales como: Cinemática (movimiento parabólico), dinámica (diagramas de cuerpo libre), vectores (componentes rectangulares). Y más adelante ver los avances en el razonamiento deductivo, para el estudio del álgebra lineal, las aplicaciones del cálculo diferencial e integral, las modelaciones físico-mecánicas y la teoría electromagnética[6].

Aportes como los de Adler[7], citado por el Ministerio de Educación Nacional, de la Unidad de Desarrollo Curricular y Recursos Educativos de Educación Secundaria-UDCREES (2001), donde afirma que el modelaje matemático constituye una rama

[6] Secretaria de Educación Distrital. Resultados: Evaluación de Competencias Básicas en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Naturales. Unibiblos- Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, 2001, pág. 56.
[7] Ministerio de educación UDCRESS. Orientaciones del trabajo pedagógico-Matemáticas. Perú. 2001. Recuperado el 23 de abril de 2005 de: http://www.minedu.gob.pe/gestion_pedagogica/dir_edu_secun_tecnologica/dir_edu_secun_tecnologica/xtras/otp_matematica.pdf

propia de la matemática que intenta traducir situaciones reales en un lenguaje matemático. A partir de la experiencia y el pensamiento es necesario encontrar medios para desarrollar en los estudiantes la capacidad de leer e interpretar la matemática, y su aplicación, porque "el divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa, priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una caja vacía de símbolo sin significado", constituyen una significativa defensa de los procesos de modelaje matemático, en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Las ideas expresadas por Adler[8] citado por el Ministerio de Educación UDCRESS (2.001), también sirven de fundamento para mostrar la importancia de analizar cómo el estudiante utiliza la modelación en el momento de abordar los problemas en estudio.

A través de este trabajo se involucra activamente a los estudiantes, donde se da un espacio para hacer evidentes sus procesos mentales en el pensamiento geométrico y métrico, es por eso la importancia de conocer de ellos, sobre lo que piensan y sienten al resolver un problema, el por qué utilizan determinadas estrategias y cuál es la argumentación que dan dichas estrategias, para que los profesores puedan llegar a comprender el lenguaje matemático que utilizan en la argumentación de sus ideas.

Es así como el docente, basado en las dificultades reflejadas, encuentra una herramienta que lo ayude a construir un referencial sobre posibles fallas metodológicas, identificando fortalezas y falencias en las estrategias. De otro lado, permite conocer la actitud de los estudiantes frente a la trigonometría y así motivar el cambio en el trabajo de aula por parte del docente, donde este pueda esperar de la didáctica conocimientos relativos a los diferentes aspectos de su trabajo como: las condiciones requeridas en las situaciones de aprendizaje, mantener una conducción y análisis de los resultados específicos de la enseñanza y los fenómenos a los que se ven confrontados educando y educador.

[8]Ibíd., p. 36.

De acuerdo con el uso de las situaciones didácticas y las observaciones que se realicen, se espera generar conclusiones que sirvan de apoyo en el mejoramiento de estrategias metodológicas, que contribuyan a superar las dificultades de enseñanza y aprendizaje, que proporcionen medios de regulación de la práctica escolar, permitiendo la difusión de los saberes y volviendo más democrático su uso, generando con ello una renovación curricular.

1.3. OBJETIVO

1.3.1 Objetivo General. Implementar las situaciones didácticas para favorecer en los estudiantes de décimo grado, la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, aplicado en una Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga (Santander).

1.3.2 Objetivos Específicos. Se desarrollan en la aplicación de este proyecto, los siguientes:

- Indagar cómo los estudiantes interpretan problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos
- Identificar las dificultades conceptuales y procedimentales que presentan los estudiantes en la solución de problemas trigonométricos.
- Determinar situaciones didácticas generadoras de condiciones que favorezcan en el estudiante la aplicación del conocimiento trigonométrico.
- Diseñar situaciones didácticas donde se desarrolle acción, formulación y validación de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.
- Implementar las situaciones didácticas relacionadas con la acción, formulación y validación.

2. MARCO TEÓRICO

Hace algunos años, un estudiante era considerado competente en matemáticas si dominaba las operaciones matemáticas y aprendía una serie de algoritmos, pero actualmente se hace énfasis en que el estudiante discuta el sentido y la aplicación de las ideas matemáticas. Por estas y otras razones el trabajo de investigación toma como referencia algunos autores, proyectos y artículos de investigación, que concuerdan y aportan ideas para este proyecto.

2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

2.1.1 Ámbito Internacional. En la propuesta del "Estudio Socio-epistemológico de la Función Trigonométrica", realizada por Gisela Montiel Espinosa, plantea un fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la función trigonométrica, contemplado en investigaciones de corte cognitivo (De Kee, et. Al, 1996) y didáctico (Maldonado)[9]; donde su propósito fundamental fue proponer estrategias didácticas empleando las Tics dirigida a los profesores del área de trigonometría de Educación Media. El estudio se orientó en los principios del aprendizaje significativo y de las estrategias didácticas. En virtud de los resultados obtenidos y el contraste de la información, se evidencia que la estrategia didáctica utilizada por la mayoría de los profesores es la exposición, si bien es cierto, que el sistema de enseñanza impone restricciones propias del contexto, también debe entenderse y aprenderse que en la construcción de conocimiento debe estar relacionado a otros ámbitos y asignaturas, es así, como los fenómenos didácticos logran una visión científica en los estudiantes. En consecuencia, el enfoque clásico de la enseñanza no ha podido resolver que no hay recursos didácticos que permitan al profesor el transito constructivo entre los conceptos de triangulo rectángulo, circulo trigonométrico y función trigonométrica. Este enfoque atiende a

[9] MONTIEL, Espinos Gisela. Estudio Socio-epistemológico de la Función Trigonométrica. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional – IPN. México, DF. 2005, pág. 1- 163

la construcción del conocimiento con base en la experiencia, en el planteamiento de ciertas situaciones-problemas, en la identificación de regularidades, en la argumentación, en los consensos, en las experiencias, entre otras.

Por otro lado, la investigación realizada por Gonzalo Andrés Donoso Gormaz (2012), en la Universidad de la Frontera ubicada en Temuco-Chile, referente a la Estrategia didáctica como apoyo al aprendizaje de la trigonometría en alumnos de tercer año de enseñanza media, permite tener una visión integral del proceso de aprendizaje de los alumnos y conduce a la adquisición de mejores conocimientos, donde se utilizó las Tic´s. como herramienta de enseñanza y aprendizaje. La experiencia posibilitó desde la perspectiva del conocimiento de contenido, reforzar aquellos temas relacionados con la unidad de trigonometría; desde el recurso informático, permitió que se formaran una idea sobre una propuesta metodológica que permite articular la enseñanza tradicional y la enseñanza en el laboratorio con tópicos curriculares del área temática; desde la percepción, los docentes mostraron una visión positiva sobre la posibilidad de realizar actividades en la sala de computación, conjugando motivación, disciplina, entretenimiento y aprendizajes; desde el trabajo colaborativo, quedó el precedente que es posible articular alianzas profesionales que permitan, por un lado enriquecer la experiencia docente, en cuanto a investigar conjuntamente líneas de innovación pedagógica. Así mismo, se evidencia que la implementación de estrategias didácticas apoyadas de herramientas tecnológicas en la unidad de trigonometría, estimula su aprendizaje tanto en su aspecto formativo, funcional e instrumental; a su vez, los alumnos muestran mayor motivación y predisposición para el estudio y aprendizaje.

Otro de los estudios encontrados, es el realizado por Idania Marvely Castellanos Espinal (2010), de la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Vicerrectoría de Investigación y Postgrado, de Tegucigalpa M.D.C, titulada Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra, con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N.. El objetivo de la investigación se centra en conocer cómo enseñar los contenidos de un área específica (geometría) y los problemas de aprendizaje que los estudiantes puedan tener, haciendo uso de la visualización y su capacidad para explorar, representar y describir su entorno, habilidad que según algunos autores (Duval, Hitt, Zimmerman) está en el centro de la comprensión matemática.

En los resultados encontrados, se evidencia que los estudiantes prestan cierta dificultad para utilizar un razonamiento adecuado para comunicar o explicar lo que descubrían en cada uno de los problemas planteados, o en las construcciones que realizaban; no llevaban seguimiento adecuado de los argumentos y conjeturas que se les sugería en las construcciones; no estaban acostumbrados a confrontarse con situaciones o problemas en un contexto geométrico y esto los conducían a equivocarse en el razonamiento que creían hacer. A su vez, el desempeño de los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo utilizando el software GeoGebra, lograron desarrollar habilidades visuales como la captación de representaciones visuales externas, la coordinación visomotora, la constancia perceptual, discriminación visual y memoria visual. También, lograron adquirir las principales funciones del razonamiento como los son: entender, explicar y convencerse de lo que se ha planteado y como ha llegado a obtener dicha solución.

En síntesis, las estrategias didácticas como la resolución de problemas fue efectiva y adecuada, para el desarrollo de las habilidades que se pretendía con cada guía de trabajo y laboratorio, y el uso del GeoGebra como una herramienta apropiada para el desarrollo de la visualización y el razonamiento, generó un aprendizaje más dinámico en la geometría y en la resolución de problemas.

2.1.2 Ámbito Nacional. El estudio realizado por John Fredy Morales, Fredy Yesid Arenas y Evans Leonardo Urrutia con el título “Razones Trigonométricas. Una experiencia de aula” de la Universidad de los Andes, esta propuesta se desarrolló en el marco del proyecto de innovación en el aula de matemáticas de la Institución de Educación Distrital (IED) José Joaquín Castro Martínez en la ciudad de Bogotá[10]. Una de las principales contribuciones que tuvo esta experiencia, es el desarrollo de una visión mejorada y más compleja de los elementos de tipo didáctico con los que a diario se trabaja. El diseño y la planificación de tareas son aspectos que no presentaban ninguna posibilidad de discusión, inmersa en los planes de estudio que son débiles en su fundamento didáctico. Del mismo modo, se desarrolló la capacidad para lograr coherencia entre los objetivos de aprendizaje, las tareas que se diseñan y las actuaciones de profesor y estudiantes en el aula. Así mismo, la ausencia de recursos y situaciones didácticas en las prácticas pedagógicas, generan que los estudiantes solo alcancen a reconocer los elementos, relaciones y aplicaciones de las razones trigonométricas de un triángulo cualquiera, no alcanzando una competencia argumentativa y propositiva al resolver situaciones problema de un contexto determinado.

De la misma manera, la investigación elaborada por Alejandro Castañeda Castro (2011) de la Universidad Nacional de Colombia, de Manizales, donde se estudia la Aplicación de estrategias que conduzcan a la comprensión y apropiación de metodologías para la resolución de triángulos de cualquier tipo, en estudiantes de grado décimo. En esta investigación, se elabora una unidad didáctica, cuyo objetivo es facilitar el aprendizaje de la resolución de triángulos en los estudiantes. Este trabajo muestra la evolución que tuvo un grupo de jóvenes donde en un momento inicial los conocimientos acerca de triángulos eran bastante reducidos y después de la aplicación de las diferentes estrategias planteadas en la unidad didáctica, se logró un cambio significativo acerca del tema general de triángulos y especialmente en la forma de solucionarlos. Esto evidencia la importancia de implementar nuevas estrategias que propendan por facilitar el aprendizaje de esta

---

[10] ARENAS, F., BECERRA, M., MORALES, F., URRUTIA, L., GÓMEZ, P. Razones trigonométricas. En Gómez, P. (Ed.), Diseño, Implementación y Evaluación de Unidades Didácticas Matemáticas en MAD 1 (pp. 342-414). Bogotá: Universidad de los Andes. 2012.

área, es necesario realizar más trabajo práctico, para que los estudiantes logren ilustrar gráficamente situaciones planteadas en forma verbal, así como en el manejo de conceptos sobre problemas concretos.

Por otro lado, en la investigación sobre El pensamiento variacional: el estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos, elaborado en la Universidades de Medellín, por Ferney Tavera Acevedo (2013), sustenta desde los elementos teóricos observados en la literatura, donde se hizo indispensable un análisis de algunos libros de texto frente al tipo de ejercicios que se proponía para abordar la trigonometría plana; de este análisis surgió la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se hizo hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; es así como se aportó elementos para superar la idea de que las relaciones trigonométricas son "fórmulas" para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

Los resultados de esta investigación reportan que el uso de la geometría dinámica (estudio geometria: Software Geogebra) permitió estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, ya que incorporó el movimiento en forma de variable para que el estudiante identificará los fenómenos de cambio y variación, de tal manera que se analizó e interpretó las relaciones producidas por éstas en una situación determinada. En este sentido, este estudio llama la atención, para que se promueva el uso de herramientas de visualización puesto que incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de propiedades invariantes, posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas.

2.1.3 Ámbito Local. Pasando al plano departamental, se analiza el estudio realizado por los autores Jorge Fiallo Leal de la Universidad Industrial de

Santander y Ángel Gutiérrez Rodríguez de la Universidad de Valencia – España[11], donde presentan los resultados de su investigación realizada con estudiantes de 10º de bachillerato en tres instituciones de Santander (Colombia) en este proceso se le brinda interés a que el estudiante no solo adquiera una serie de conceptos, sino que logre explorar, relacionar, conjeturar, demostrar y aprenda con sentido los conceptos y propiedades trigonométricas, a que aprenda a utilizar diferentes procedimientos y estrategias de razonamiento, a producir distintos tipos de demostraciones en la solución de problemas, conjeturar propiedades trigonométricas y relacionar las diferentes representaciones de los conceptos de tal manera que el aprendizaje sea más efectivo.

Esta investigación se basó en la experimentación, permitiendo afirmar que el uso de la herramienta didáctica de la geometría dinámica "El Cabri Géometre", contribuyo a mejorar el nivel de las habilidades de demostración de los estudiantes, destacando una tendencia de transición hacia la producción de demostraciones de un mejor nivel, donde los estudiantes pasaron del empirismo ingenuo a la consideración del experimento crucial intelectual, recurriendo al uso de propiedades generales de las razones trigonométricas estudiadas y aprendidas en el transcurso de la experimentación, llegando a la producción de demostraciones deductivas.

Es así, como se logra identificar la importancia que tiene el implementar las *Situaciones Didácticas*, las cuales según Guy Brousseau (2007), quien ha sido el impulsor de esta renovación con su teoría y su estudio de las distintas interacciones con el medio por parte del alumno, evidencia que una situación es didáctica cuando el profesor tiene la intención de enseñar al estudiante un saber matemático dado explícitamente y debe darse en un medio, con unas fases claras:

[11] FIALLO Leal, J. E.Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia. 2010.

La acción (experimentando y descubriendo), la comunicación (hipótesis y comunicado) y validación (demostración y comprobación).

Por consiguiente, en las situaciones didácticas se busca que proporcione un cambio en las prácticas del docente, logrando que tenga sentido el contexto educativo con el pedagógico, llevando a los estudiantes a construir un saber que no les fue enseñado y que puedan aplicarlo para resolver nuevos problemas. De ahí, la importancia de implementar las situaciones didácticas, para mejorar el razonamiento deductivo y las estrategias que el educando utiliza para resolver problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, igualmente contribuiría en fortalecer las estrategias metodológicas que el docente aplique en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

2.2 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.2.1 Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática: Didáctica de la Matemática.

El docente debe conocer ampliamente la disciplina que enseña para poder proponer actividades interesantes de aprendizaje a sus estudiantes, no existe consenso en cuanto a qué parte de ella es fundamental en la formación de los maestros. La experiencia sugiere que muchos de los maestros que se forman en las escuelas de ciencias e ingenierías no necesariamente desarrollan una práctica exitosa en el salón de clases. El problema fundamental radica en identificar los aspectos de la actividad matemática que ayuden a los maestros a proponer actividades de aprendizaje consistentes con la práctica de la disciplina (Santos, 1999)[12].

Algunos aspectos necesariamente involucran una discusión sobre los contenidos y su organización, mientras que otros apuntan al tipo de interacción y participación

[12] SANTOS, Trigo. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo editorial Iberoamericana. 1999.

que los estudiantes deben realizar durante el aprendizaje de la disciplina. ¿Qué tipos de problemas o tareas ayudan a los estudiantes a aprender el contenido matemático? ¿Qué significa y cómo se documenta el aprendizaje de determinado concepto o idea matemática? ¿Qué actividades instruccionales son importantes dentro y fuera del salón de clases? Son algunas preguntas que pueden ayudar a organizar la discusión de los aspectos que inciden directamente en la enseñanza de las matemáticas. En particular, un aspecto central que ayuda a organizar las preguntas anteriores es la concepción de aprendizaje que se busca promover en los estudiantes.

La noción de que el aprender un determinado concepto es un proceso que toma fuerza en función del tiempo, y a través de una discusión directa de aspectos que examinen sus conexiones y representaciones, ayuda a ubicar la importancia de explicar donde se debe poner atención durante el aprendizaje. Según Greeno (1997) sugiere que para que los estudiantes aprendan es importante ponerle atención a los aspectos fundamentales o invariantes vinculados con el contenido en estudio. Además, es importante reconocer que el aprendizaje se logra bajo la perspectiva de una práctica social.

El aprendizaje puede interpretarse en función de la participación de los estudiantes al interactuar con los obstáculos e identificar argumentos y explicaciones que le ayuden a avanzar en su entendimiento. En este sentido, si el aprendizaje se logra al ponerse a tono con la situación en estudio y atender las diversas representaciones de los invariantes, entonces es posible que fácilmente se favorezca una transferencia del aprendizaje a otras situaciones. La transferencia es importante y puede darse dentro del estudio de un determinado concepto o al intentar aplicarlo a problemas en contextos diferentes. Conviene hacer notar, que el aprender a través de las actividades de búsqueda necesariamente incluye la formulación y evaluación de preguntas o problemas, así como el proponer soluciones y conclusiones, criticar explicaciones, argumentos y ejemplos, esto desarrolla un pensamiento crítico para una participación significativa en la sociedad.

La propuesta de investigación se inscribe en una perspectiva teórica que propone el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas, la cual tuvo su origen en los Institutos de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) creados en Francia luego de la Reforma Educativa a finales de los años 60, con la que se impuso la enseñanza de la "Matemática moderna". Inicialmente, los IREM se dedicaron a complementar la formación matemática de los docentes y la preparación de nuevos maestros, en las escuelas normales. Otro ámbito importante de su actividad fue la producción de materiales de apoyo para el trabajo de los docentes en el salón de clase: textos de matemáticas, fichas de trabajo para los estudiantes, juegos y juguetes didácticos, colecciones de problemas y de ejercicios, etcétera. La producción de estos materiales solía acompañarse de una experimentación de rutina, como prueba de su factibilidad y de ahí realizar ajustes mínimos, antes de proceder a su difusión dentro del sistema educativo. Estas prácticas fueron rotuladas como "innovación" y a partir de la reflexión sobre la validez de las acciones desarrolladas en el IREM, fue surgiendo otras clases de actividades destinadas a la producción de conocimientos, para controlar y producir tales acciones sobre la enseñanza; su promoción y desarrollo fue dado por Guy Brousseau, profesor e investigador del IREM de Burdeos, quien propone el estudio de las condiciones que permiten reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar de conocimientos.

Por otra parte, la enseñanza de las matemáticas no puede reducirse a la observación y análisis de los procesos que tienen lugar cotidianamente en los salones de clase, puesto que su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los estudiantes, y para esto se necesita ejercer un cierto grado de control sobre ellas, lo que implica que el docente investigador debe participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. El objeto de estudio de la Didáctica de la Matemática es ***La Situación Didáctica***, definida por Brousseau (1982) como "un conjunto de relaciones establecida explicita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objeto) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución"[13].

Estas relaciones se establecen a través, de una negociación entre maestro y estudiante definido como contrato didáctico, donde se definen las reglas de funcionamiento dentro de la situación con componentes explícitos e implícitos: delegación de responsabilidades, asignación de plazos temporales a diferentes actividades, permisos o prohibición del uso de determinados recursos de acción, etc. El objetivo fundamental de la Didáctica de las Matemáticas es averiguar cómo funcionan las situaciones didácticas, es decir, cuáles de las características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento de los alumnos y, subsecuentemente, de sus conocimientos. Esto no significa que sólo interese analizar las situaciones didácticas exitosas. Incluso si una situación didáctica fracasa en su propósito de enseñar algo, su análisis puede constituir un aporte a la didáctica, si permite identificar los aspectos de la situación que resultaron determinantes de su fracaso, lo anterior según Parra (1997).

Para Brousseau, en cambio, un momento fundamental de la investigación en Didáctica lo constituye el análisis a priori de la situación. El investigador en Didáctica debe ser capaz de prever los efectos de la situación que ha elaborado, antes de ponerla a prueba en el salón de clase; sólo posteriormente podrá contrastar sus previsiones con los comportamientos observados. Para analizar las situaciones didácticas, Brousseau las modeliza, utilizando elementos de la teoría de los juegos y de la teoría de la información. Para una situación didáctica

[13] PARRA, Cecilia. SAIZ, Irma. Didáctica de Matemáticas, Aportes y reflexiones. Buenos Aires. Editorial Paidós Educador. Quinta edición, 1997. Pág. 42.

determinada se identifica un estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución del problema involucrado en la situación. Se explicitan las reglas que permiten pasar de un estado a otro. La situación es descrita, entonces, en términos de las decisiones que los jugadores (estudiantes) pueden tomar en cada momento y de las diferentes estrategias que pueden adoptar para llegar al estado final.

Otro aspecto que facilita el análisis de las situaciones didácticas es su clasificación. Brousseau distingue, entre las situaciones que él produce para su estudio experimental, tres tipos, cuya secuencia, en los procesos didácticos que organiza, es la siguiente:

1. Las situaciones de acción, en las que se genera una interacción entre los estudiantes y el medio físico, quienes deberán tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
2. Las situaciones de formulación, cuyo objetivo es la comunicación de informaciones, entre los estudiantes. Para esto deben modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándolo y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
3. Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los estudiantes deben elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierta; hay que explicar que, necesariamente, debe ser así.

A partir de estas situaciones, se intenta que el conjunto de estudiantes de una clase asuma la significación socialmente establecida de un saber que ha sido elaborado por ellos en situaciones de acción, de formulación y de validación. Es así, como una parte importante del análisis de una situación didáctica lo constituye la identificación de las variables didácticas y el estudio, tanto teórico como experimental, de sus efectos. Lo que interesa son los intervalos de valores de estas variables que resultan determinantes para la aparición del conocimiento que la situación didáctica pretende enseñar.

Por otro lado Osborne & Freyberg, plantean la enseñanza y el aprendizaje de las áreas del conocimiento, que implica diversos aspectos relacionados explícitamente con la comprensión del lenguaje propio de ese conocimiento; la comunicación didáctica con mediación en las relaciones que se establecen en el aula, determinada por los sujetos o actores, los objetos de conocimiento y los diversos contextos en que se sitúan, actores y conocimiento, las estrategias didácticas que guían y materializan los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como las relaciones teórico prácticas; las técnicas, instrumentos, recursos o apoyos de infraestructura, bibliográficos, técnicos, tecnológicos, constituyen los medios en el proceso de enseñanza y que favorecen la funcionalidad y efectividad de las estrategias en los procesos de aprendizaje. Luego la secuencia didáctica es un instrumento que configura un sistema de relaciones entre las actividades pensadas sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, constituye además un hilo conductor en la organización de una Unidad Didáctica.

Por otra parte, en el ámbito de la didáctica se ha asistido a una difusión muy importante del concepto de transposición didáctica en todas las didácticas de las disciplinas, la cual surge en el seno de la didáctica de las matemáticas. Gran parte de los investigadores en didáctica están de acuerdo en atribuir la paternidad del concepto de transposición didáctica a Michel Verret (1975). Este autor define la didáctica como “la transmisión de aquellos que saben a aquellos que no saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden”. (1975, p. 139). Esta definición nos remite al concepto de transposición didáctica como “el proceso por el cual se modifica un contenido de saber para adaptarlo a su enseñanza. De esta manera, el *saber sabio* es transformado en *saber enseñado*, adecuado al nivel del estudiante”[14]. Hay de esta forma transposición didáctica (en el sentido restringido) cuando los elementos del saber pasan al saber enseñado, a su vez, según Chevallard, identifica las siguientes características a tener en cuenta de la trasposición didáctica:

- **Desincretización del saber**. La primera etapa en la formación de un saber apropiado, consiste en una delimitación de “saberes parciales”, cada uno de esto se expresa en un discurso autónomo (Chevallard, 1985, p. 60)
- **Despersonalización del saber.** Todo saber sabio, en el momento de su nacimiento, se ata a su productor. “Su compartimiento, al interior mismo de la comunidad sabia, supone un cierto grado de despersonalización, que sólo permite la publicidad del saber” (Chevallard, 1985, p. 20).
- **Programabilidad de la adquisición del saber.** La textualización del saber supone igualmente la introducción de una programación, de una “norma de progresión en el conocimiento” (Chevallard, 1985, p. 62).
- **Publicidad y control social de los aprendizajes.** La objetivación producida por la textualización del saber conduce ella misma a la posible publicidad de este saber. El saber a enseñar se deja de esta manera ver, él llega a ser público, en oposición al carácter “privado” de los saberes personales adquiridos.

2.2.2 Sistemas y Pensamiento Geométrico - Métrico. A comienzos del año 1994, la ley General de Educación (Ley 115), toma la potestad curricular para fijar centralmente los programas de áreas fundamentales y obligatorias estipuladas allí, antes asumida por el Ministerio de Educación Nacional, después de cuatro años, se publicaron los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. En dichos documentos se enfatiza en una potente idea central: el propósito de las matemáticas no es tanto el manejo de muchos sistemas matemáticos

[14] CHEVALLARD, Yves. La trasposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Aique. 3ª edición. 2005. p. 45.

conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamientos matemáticos: numérico, espacial, métrico, estocástico y variacional, a través, de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y comparar y ejercitar procedimientos algorítmicos.

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de las matemáticas escolares, propuesto durante los veinte años de la renovación curricular, desde 1978 a 1998. En los lineamientos, los sistemas matemáticos se ubican en su lugar apropiado como herramientas de las que se puede valer el pensamiento matemático respectivo y como medios potentes que ayudan a desarrollarlo y a refinarlo. Ahora, el propósito principal es el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático. El paso de los sistemas concretos y familiares, para los estudiantes a los sistemas conceptuales y simbólicos que se proponía en la renovación curricular, se concreta ahora en el proceso de modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana.

Los sistemas numéricos, geométricos, métricos y estocásticos se señalaban como los cuatro pilares de la educación matemática en la básica primaria, y los sistemas analíticos se agregaban para la básica secundaria de sexto a noveno grado (según renovación curricular de 1974 a 1993). Había además, tres sistemas instrumentales: los lógicos, los conjuntistas y los sistemas generales de relaciones y transformaciones.

La idea principal es que los sistemas analíticos son colecciones de funciones, transformaciones u operadores con sus operaciones y sus relaciones. Los números naturales, racionales o reales, o los puntos de la línea, el plano o el espacio no son elementos del universo de los sistemas analíticos. En este sentido, los sistemas analíticos, son apenas un tipo particular de sistemas generales cuyos objetivos son transformaciones, operaciones, operadores o funciones tomadas activamente, no como relaciones y mucho menos como conjuntos de parejas. Usando una metáfora, podemos decir que los objetos de los sistemas analíticos son monstruos que absorben y transforman números, pero no son números. Desde el punto de vista de Anna Sfard, son redificaciones de procedimientos o algoritmos de operaciones.

La propuesta de trabajar por tipos de pensamiento fue un paso adelante significativo, pues establece el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y en su utilización socialmente más relevante: la modelación, sin limitar las matemáticas a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para resolver problemas que apenas son ejercicios y no verdaderos problemas abiertos y retadores. Una de las dificultades encontradas en la interpretación de los lineamientos curriculares del área de matemáticas, es que no es claro qué se debe entender por “pensamiento geométrico y métrico”. Se intentará acercar a este concepto.

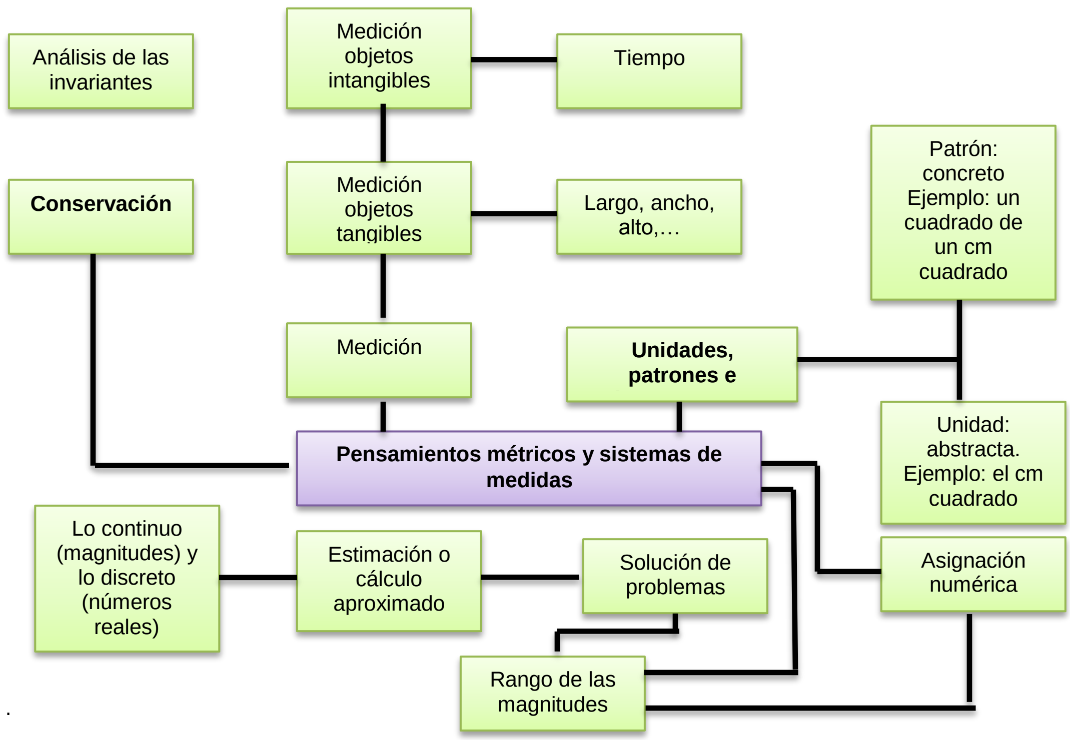
Una de las prioridades de los programas curriculares, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional lo constituye el dominio de los sistemas geométricos que facilitan la exploración y modelación del espacio, tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. El currículo de matemáticas ha de incluir geometría bidimensional y tridimensional para que los estudiantes sean capaces de:

- Describir, elaborar, dibujar y clasificar figura
- Investigar y predecir el resultado de combinar, subdividir y cambiar figuras
- Desarrollar la percepción espacial
- Relacionar ideas geométricas con ideas numéricas y de medición
- Reconocer y apreciar la geometría en su mundo.

El pensamiento geométrico es importante en la solución de situaciones cotidianas y tiene una conexión con otros temas matemáticos y otras materias escolares, ayuda a representar y describir de forma organizada el mundo en el cual se vive; la capacidad espacial que se desarrolla en este pensamiento supera la destreza numérica e impulsa y mejora las estructuras conceptuales. Los conceptos espaciales se necesitan para interpretar, entender y apreciar el entorno que es inherentemente geométrico. Aspectos importantes de sentido espacial son las ideas e intuiciones sobre figuras bi y tri-dimencionales, y sus características; la relación entre figuras y el efecto que ejercen los cambios sobre las figuras. Los estudiantes que desarrollan un sentido sólido de los espaciales y que domina los conceptos y el lenguaje de la geometría, están mejor preparados para aprender ideas numéricas y de medición, así como otros temas matemáticos avanzados.

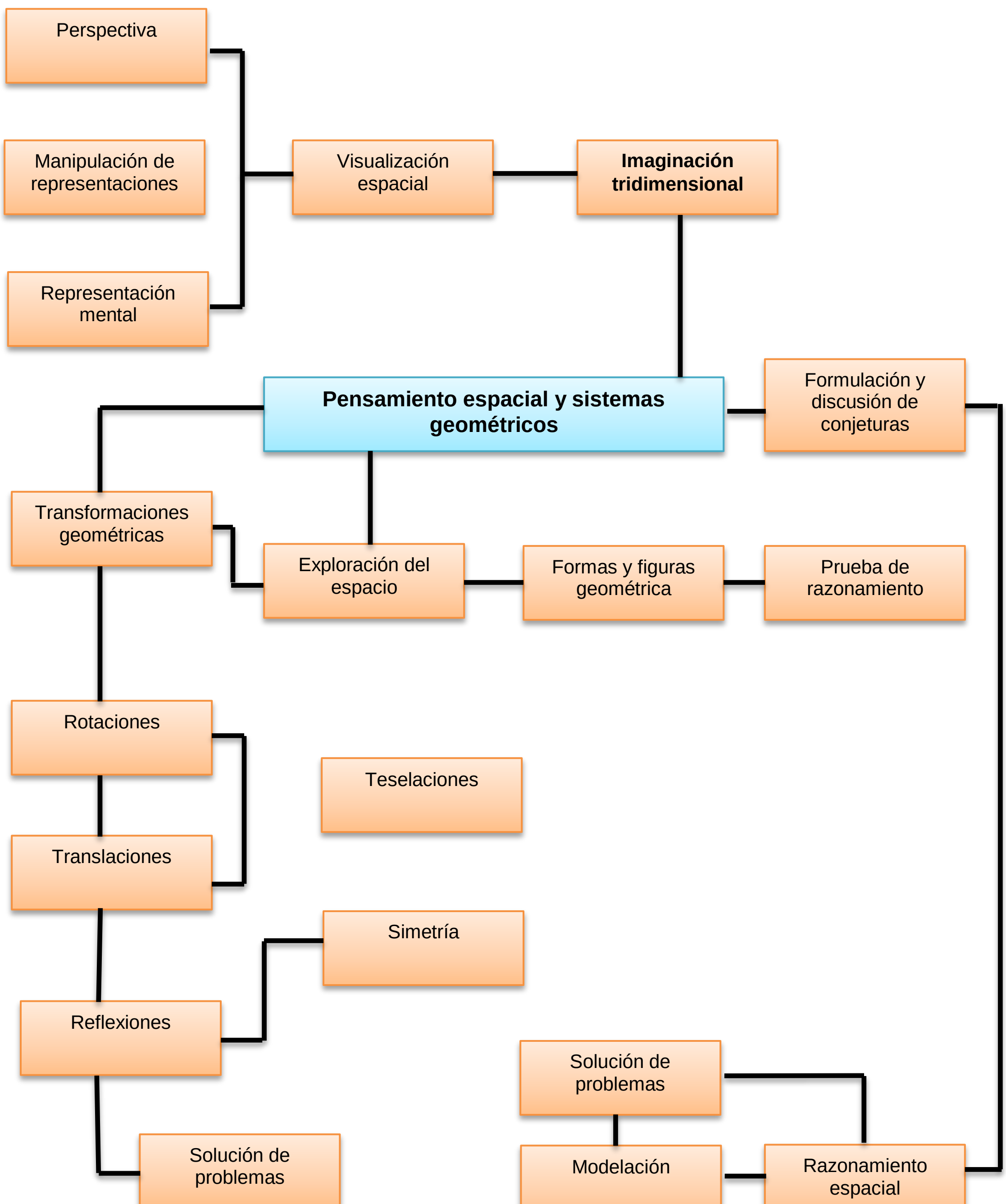
Hay evidencias de que el desarrollo de ideas geométricas crece en progresión a través de toda una jerarquía de niveles. Los estudiantes aprenden primero a reconocer formas enteras y después analizar las propiedades más características de una figura. Más tarde llegan a ver las relaciones entre figuras y elaboran deducciones simples. El desarrollo del currículo y el proceso de enseñanza-aprendizaje han de considerar dicha jerarquía ya que, aunque pueda darse un aprendizaje en varios niveles de forma simultánea, el aprendizaje de conceptos y estrategias más complejas requieren que las destrezas básicas estén firmemente asentadas (Ver figura 1 y 2).

Figura 1. Pensamiento métrico y sistemas de medidas frente a los estándares



Fuente: Ministerio de Educación Nacional. Guía de Docencia Planeación del Área de Matemáticas

Figura 2. Pensamiento espacial y sistema geométrico frente a los Estándares



Fuente: Ministerio de Educación Nacional. Guía de Docencia Planeación del Área de Matemáticas.

Una de las conexiones más importantes de la matemática es la que se da entre la geometría, la trigonometría y el álgebra. Las ideas geométricas de los antiguos se expresaron usando el lenguaje de la trigonometría, haciendo surgir así nuevas herramientas para la resolución de una gran variedad de problemas. La interacción entre la trigonometría y el álgebra contribuye a reforzar la capacidad de los estudiantes para formular y analizar problemas a partir de situaciones que están dentro o fuera de las matemáticas. Los estudiantes en la trigonometría deben contrastar estos sistemas y pasar con destreza de uno a otro. Una idea fundamental que los estudiantes habrán de comprender, es que un problema trigonométrico en particular puede resolverse con más facilidad en uno o en otro de estos sistemas (geométrico-métrico y algebraico). Este tipo de correspondencias son las que permiten el paso de un “lenguaje” al otro, y hacen posible que los conceptos de uno de ellos aclaren y refuercen los conceptos del otro. De hecho, es normal que resulte más fácil a los estudiante deducir las propiedades de una figura por medio de su representación, que llegar a una demostración sintética.

La trigonometría tiene su origen en el estudio de las medidas del triángulo, muchos problemas del mundo real, incluyendo problemas de navegación y de topografía, requieren la resolución de triángulos. Además, en algunos temas matemáticos de importancia, tales como la representación matricial de giros, los ángulos de dirección de vectores, las coordenadas polares y la expresión en forma trigonométrica de números complejos, se necesitan razones trigonométricas, subrayando más intensamente la conexión que existe entre geometría y álgebra.

Al generalizar de forma natural las razones trigonométricas del ángulo recto se originan funciones trigonométricas y circulares. Estas funciones especialmente el seno y coseno, constituyen modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos del mundo real, tales como el movimiento circular uniforme, los cambios de temperatura, los biorritmos, las ondas de sonidos y la variación de las mareas.

Aunque la variación de los datos de estos fenómenos deban realizarla todos los estudiantes, es importante que logren identificar y analizar los modelos trigonométricos correspondientes a la resolución de problemas, ya que éste es un proceso que realiza a diario un estudiante, cuando se enfrenta con situaciones en donde hay preguntas que no puede contestar de inmediato. En algunas ocasiones los problemas tienen más de una solución y en otras, ninguna. Para Polya, un problema se resuelve correctamente si se tiene en cuenta: una correcta comprensión, concebir un plan para descubrir la solución, ejecución del plan y verificación del procedimiento y del resultado, esto indica que la resolución y el planteamiento del problema requiere de procesos, es así, como la labor del maestro de matemáticas, es buscar ayudar al alumno a crear una estructura mental que no encuentre límites sobre el proceso de pensamiento al analizar un problema, según lo menciona Ed Labinowicz .

La trigonometría no solo sigue constituyendo una herramienta poderosa e importante para la ciencia y la ingeniería, sino que sigue teniendo un gran atractivo para muchos estudiantes debido a sus aplicaciones, regularidades y simetrías. La disponibilidad de calculadoras y ordenadores hacen que ambos aspectos de este tema sean accesibles a un mayor número de estudiantes; eso facilita a su vez una mayor integración de la trigonometría con la geometría y el álgebra.

2.2.3 Lenguaje matemático. Las matemáticas fueron primeramente utilizadas como método de medida de las circunstancias y fenómenos físicos. Y quizás esa debería ser su principal función. Sin embargo, con el desarrollo de operaciones y sistemas matemáticos se cree haber sobrepasado el simple método de medida para convertir las matemáticas en un leguaje de expresión y demostración con el cual podemos averiguar toda la realidad física.

El lenguaje matemático es una forma de comunicación a través de símbolos especiales para realizar cálculos matemáticos, se liga a la existencia de símbolos donde, paradójicamente, son necesarios para expresarlas de forma concisa y sencilla. Es así como se describe reflexiones de algunos autores frente al uso del lenguaje matemático en la resolución de problemas:

"En la fase de comprensión del problema, el pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos importantes del problema sino que también puede sugerir alguna estrategia para resolverlo". Santos (1997, p. 54).

A su vez, Arbeláez (2002) refiere que las representaciones mentales se entienden como aquellas formas materiales o simbólicas de dar cuenta de algo real en su ausencia; están organizadas en estructuras que permiten darle sentido al entorno. Sin embargo, no es posible construir representaciones puras y aisladas, sino que se construyen a partir de un contexto representacional delimitado por la actuación cognitiva, constituida por una serie de interacciones aprendidas de la realidad, que la tradición cultural de cada grupo social ha llevado a cabo y que por lo tanto es histórica y dependerá del contexto en el que el sujeto se desarrolle.

De otro lado, las representaciones de los conceptos se constituyen en atributos de carácter abstracto, que se forman a través de las experiencias directas, de procesos hipotéticos y de comprobación, y se expresan de manera simbólica. Por ello, es necesario comprender los procesos de construcción representacional.

2.2.4 Comprensión lectora. La comprensión lectora se enmarca en el proceso de elaborar un significado por la vía de aprender las ideas relevantes de un texto y relacionarlas con los conceptos que ya tienen un significado para el lector, como proceso de interacción entre el pensamiento y el lenguaje. Rosenblatt (2002), plantea un modelo teórico que intenta explicar cómo se desarrolla la lectura, que comprende: lector, texto y contexto que están interrelacionados unos con otros.

Además, Schoenfeld, (1996), señala que existen fuertes analogías entre el desempeño competente en matemática y el desempeño competente en lecto-escritura. Así como no se puede aprender a leer sin aprender a decodificar las palabras, no se puede aprender matemática sin decodificar su lenguaje propio, ni se puede resolver un problema sin comprender su enunciado. Queda muy entrelazado esto, con lo que plantea, Österholm, (2006), que el proceso de lectura, parece algo obvio, y su carencia afecta y limita implícitamente el intento por resolver problemas; en particular analiza una perspectiva, como la comprensión lectora influye notablemente en la solución de problemas, y las enlaza con planes de resolución de problemas de Polya (1989), en particular con la primera etapa de resolución, que tiene que ver con entender bien un problema matemático.

Es así, como se puede encontrar en algunas ocasiones, donde la verdadera dificultad no se centra tanto en lo puramente matemático, es decir, el razonamiento matemático, lógico, aplicación de operaciones, etc., como las dificultades que encuentra el estudiante para poder entender el enunciado verbal del problema.

2.2.5 Analíticos y descriptivos. La percepción que el estudiante tenga acerca de los procesos simples de mecanización y de razonamientos sencillos, usados al resolver un problema; determina la dirección y los recursos que utilizan en la solución. Aquí se identifican técnicas no algorítmicas, es decir, seleccionar una variable independiente, obtener una fórmula para la variable dependiente. Es así como Schonenfeld (1985) ubica este tipo de procedimientos a un nivel táctico y no estratégico, teniendo en cuenta que cuando el estudiante tiene acceso a un procedimiento rutinario, generalmente no incluye decisiones estratégicas y comete grandes errores en procedimientos simples, se puede pensar que es resultado de un mal aprendizaje. Por esta razón, según Pozo citado por Mateos (2001, p. 49): "Es absolutamente preciso hacerle consciente al estudiante de los procesos que emplea en la elaboración de conocimientos, facilitándole por todos los medios la reflexión metacognitiva sobre las habilidades de conocimiento, los procesos cognitivos, el control y la planificación de la propia actuación y la de otros, la toma de decisiones y la comprobación de resultados".

De modo que Schoenfeld (1987), se refiere a la metacognición como el conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema, donde se identifica tres categorías: el conocimiento y la descripción de nuestro propio proceso de pensar, el control y la autorregulación y finalmente las creencias e intuiciones.

2.2.6 Presaberes. Durante los últimos 20 años, las investigaciones en la educación matemática han estado marcadas por el paradigma constructivista. Las ideas claves de este paradigma provienen o tienen sus raíces en las investigaciones de muchos autores, entre los cuales se destacan: Piaget, Wallon, Vygotsky, Bruner, Dewey, Gagné, Ausubel, Novak y Henesian, entre otros. Todos ellos han coincidido en que aprender cualquier contenido escolar supone, desde la concepción constructivista, atribuir un sentido y construir los significados implicados en dicho contenido, y que esta construcción no se lleva a cabo partiendo de cero.

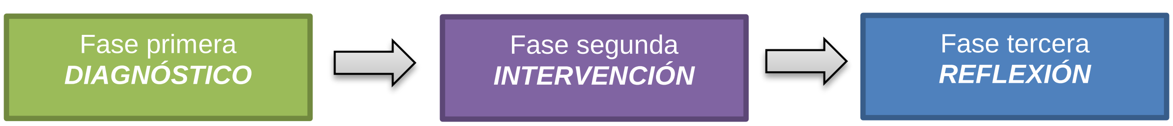
Al respecto, Miras (1999:47) señala: "el estudiante construye personalmente un significado (o lo reconstruye desde el punto de vista) sobre la base de los significados que ha podido construir previamente. Justamente, gracias a esta base, es posible continuar aprendiendo, continuar construyendo nuevos significados. Así mismo, los conocimientos no se apilan, no se acumulan, sino que pasan de estados de equilibrio a estados de desequilibrio, en el transcurso de los cuales los conocimientos anteriores son cuestionados. Una nueva fase de equilibrio corresponde entonces a una fase de reorganización de los conocimientos, donde los nuevos saberes son integrados al saber antiguo, a veces modificado (cf. Piaget).

Así, un nuevo saber puede cuestionar las concepciones del estudiante originadas por un saber anterior. Del mismo modo, un saber adquirido puede hacerse fracasar fácilmente aun ante mínimas modificaciones de las variables de la situación. Aun así, se reconoce a un educando no solo con una estructura cognitiva, sino también con unos pre-saberes que hace del aprendizaje un proceso de confrontación constante, de inconformidad conceptual entre lo que se sabe y la nueva información. Es entonces, el educando, sujeto activo de su propio proceso de aprehensión y cambio conceptual, objeto y propósito de este modelo.

3. DISEÑO METODOLÓGICO DE INVESTIGACIÓN

La investigación aplicada es Investigación - Acción con enfoque cualitativo, exploratorio – descriptivo, porque se trabaja en el entorno natural de los participantes y su contexto, con el fin de conocer las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos, esto se realiza durante un periodo académico, donde se trabaja con los estudiantes de décimo grado de una Institución Educativa pública del Municipio de Bucaramanga. El enfoque exploratorio se selecciona en este caso, pues la intención es comprender la perspectiva de un grupo de estudiantes acerca de la incidencia cognitiva y motivacional de las estrategias metodológicas aplicadas, en la enseñanza de la trigonometría en el grado décimo. El propósito del estudio fue describir o analizar lo que las personas de un sitio, estrato o contexto determinado hacen usualmente frente a la información, así como los significados que le dan a ese comportamiento realizado bajo circunstancias comunes o especiales. Para lograrlo se desarrolla en tres fases:

Figura 3. Diseño Metodológico.



En la figura 3 se presenta el diseño metodológico empleado en la investigación, el cual involucra tres fases: Diagnóstica, Intervención y reflexión, esto se trabaja mediante una revisión teórica inicial sobre las estrategias de aprendizaje, implementadas desde un saber específico, la trigonometría (las razones trigonométricas), y exploradas a partir de las siguientes técnicas con sus respectivos instrumentos: la observación participativa y no participativa, mediante la aplicación del taller diagnóstico utilizando como recurso el cuestionario, y el diario de campo, luego se realiza la entrevista semiestructurada. A su vez, se hace intervención mediante el taller de investigación tomando como instrumento la unidad didáctica que consta de tres situaciones: acción, formulación y validación. Por otro lado, se sigue el proceso de reflexión en el cual se da paso al análisis de los resultados, brindando pautas para el replanteamiento (si se requiere) y validación del problema de Investigación.

3.1 CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La propuesta de investigación se desarrolla en la Institución educativa pública del municipio de Bucaramanga (Santander), ésta es una entidad de carácter oficial, que ofrece educación formal en los niveles de preescolar, básica y media, comprometida con la formación de personas para la continuidad en la Educación Superior, la cual busca el desarrollo del pensamiento tecnológico, apropiándose de los principios y valores institucionales. En el plantel educativo se trabaja para garantizar el desarrollo integral de los estudiantes y alcanzar la mejora continua de los procesos académicos, además de brindarles una formación integral que facilite las condiciones para el desarrollo de la autonomía, la participación y el respeto mutuo, que oriente acciones formativas y contribuyan en mejorar el pensamiento matemático.

Es así, como este estudio busca mejorar las competencias de los estudiantes, atendiendo las dificultades que se manifiestan en el dominio del sistema geométrico métrico, referente a la interpretación y argumentación conceptual y procedimental que utilizan para solucionar una situación problémica, donde se hace necesario un análisis de las estrategias que proponen los participantes y hasta qué punto son validadas desde un razonamiento lógico matemático, y además, permita reestructurar y reevaluar el enfoque metodológico en el aula por parte del docente, contribuyendo en la calidad de los procesos llevados en la institución.

Para este trabajo se cuenta con una comunidad educativa conformada por tres sedes, con un número poblacional de 1700 estudiantes aproximadamente, con un cuerpo administrativo: rector, tres coordinadores y una psicorientadora, también existe 60 docentes, donde cuatro de ellos son del área de matemáticas, uno para primaria, dos para la básica secundaria y uno para la media.

3.2 DESCRIPCIÓN POBLACIONAL PARTICIPANTE

En la investigación participan estudiantes de una institución educativa publica, del grado décimo, en la actualidad cuenta con dos cursos de 25 participantes cada uno, aquí se hizo intervención a un solo curso, conformado por 12 mujeres y 8 hombres, entre los 14 y 16 años de edad, se cuenta con tres repitentes. Ésta población se define con el interés de poder describir y analizar las estrategias que emplean para resolver problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, dadas su falencia conceptual y procedimental en el pensamiento geométrico-métrico, específicamente la comprensión y el uso de las razones trigonométricas, con la idea de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, además, el docente investigador forma parte del contexto educativo, luego tiene conocimiento, experiencia e información sobre los ritmos de aprendizaje y los rasgos características de los participantes.

3.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

La aplicación fundamental en la investigación acción, es el método de observación con estudios observacionales no estructurados, el instrumento a utilizar es el diario de campo, que registra la información generada en los espacios del aula de clase, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, también se elaboran protocolos de análisis de la interacción, para lo cual se requiere de evidencias que necesitan fotografías producidas por el investigador, junto con la grabación de cintas de videos. Además, se usan técnicas no observacionales como la encuesta diagnóstica, tomando como instrumento el cuestionario, igualmente se establece el taller de investigación con lo cual se busca minimizar las dificultades encontradas, aplicando la unidad didáctica como instrumento y finalmente la entrevista semiestructurada con preguntas abiertas y cerradas para afianzar lo trabajado.

Por otro lado, a través del análisis y de las observaciones encontradas al aplicar las técnicas e instrumentos, se exponen algunas conclusiones que se espera sirvan de reflexión al docente, en cómo el uso de las situaciones didácticas inciden en el mejoramiento de estrategias metodológicas apropiadas en la enseñanza de la trigonometría, específicamente en la solución de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos; de esta manera, cuando el estudiante se enfrente a un problema, pueda interiorizar y apropiarse de una serie de estrategias que le permitan resolverlo.

3.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO METODOLÓGICO

El proceso comprende tres fases, se hace revisión bibliográfica, ésta sirve de referente, para dar inicio a la primera fase diagnóstica, se trabaja con el taller diagnóstico de conceptos y procedimientos, donde se busca evidenciar, cómo los estudiantes resuelven los problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos y las estrategias que implementan, para ello se aplica un cuestionario que incluye problemas tradicionales, llamados así, a los que además del enunciado, presentan un dibujo interpretativo, y no tradicionales, los cuales describen solo el enunciado. A partir de esto, se pretende explorar las guías, pautas y los presaberes que los participantes utilizan para resolver una situación y a su vez, las rutas procedimentales que aplican. Seguido de ésta, se realiza la entrevista semiestructurada que indague en los estudiantes las actitudes frente a la trigonometría; las dificultades que ellos reconocen tener frente a lo conceptual como en lo procedimental. Paralelamente, se hace observación no participativa, ésta analiza a los participantes en el trabajo individual durante la realización del cuestionario, aquí se determinan las categorías emergentes que llevan a la revisión o validación del problema de investigación.

En la fase de Intervención, se lleva a cabo la construcción o diseño de una unidad didáctica que integre las tres situaciones didácticas: *Acción, Formulación y Validación.* En la Acción, el estudiante explora el pensamiento espacial y métrico, mediante el uso de un juego virtual, el cual tiene unas orientaciones específicas para explorar los conceptos de semejanza de triángulos, Teorema de Pitágoras y razones trigonométricas, esto basado en un taller que incluye presaberes y estrategias recurrentes en la solución de situaciones. A su vez, el juego tiene elementos y contenidos de las razones trigonométricas, el cual pretende contextualizar al participante en lo conceptual y procedimental, además, se aplica una encuesta escrita la cual evalúa las estrategias empleadas por los participantes para la resolución de problemas, las dificultades encontradas en la ejecución del taller y qué aportes genera el juego virtual.

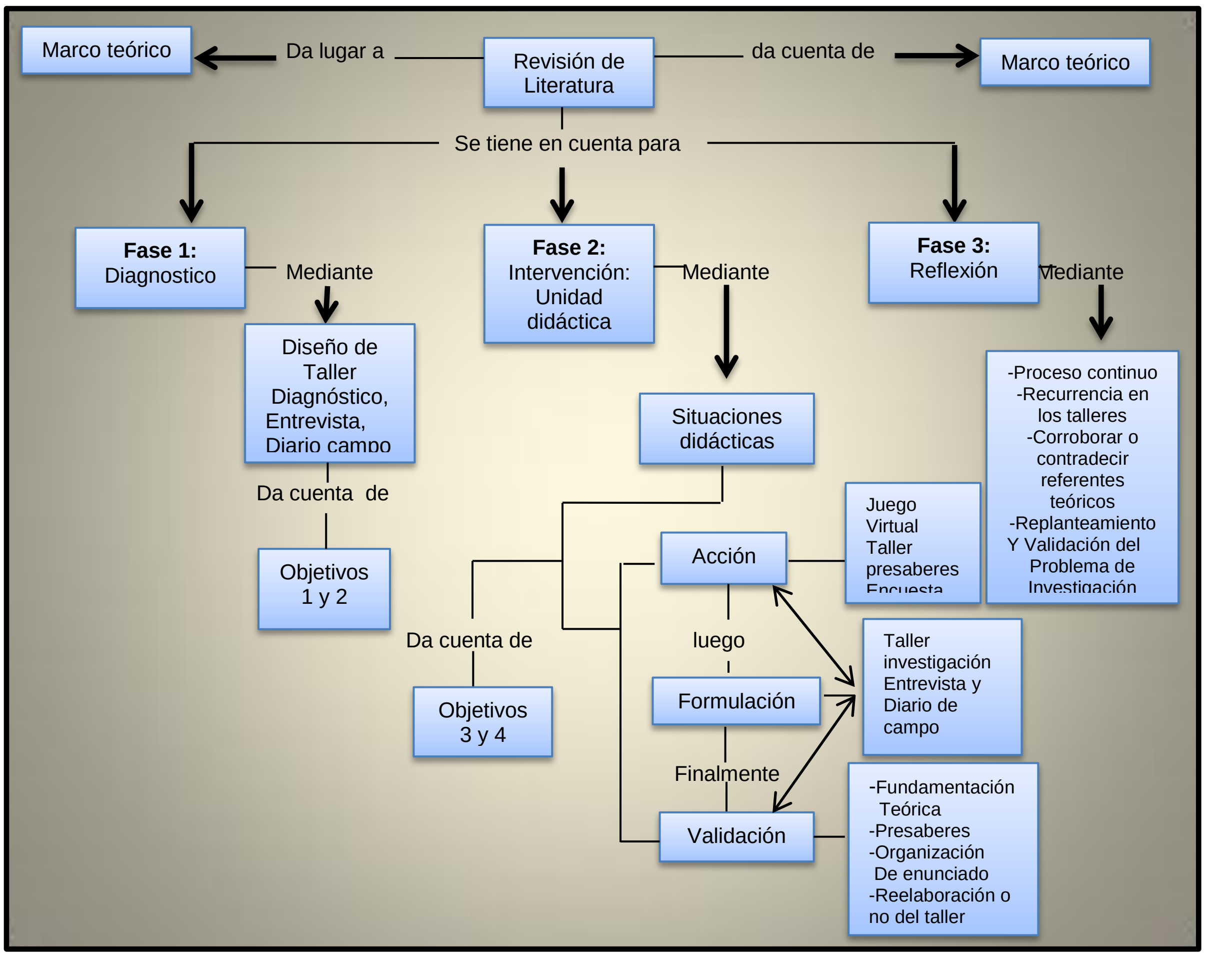
Para la Formulación, se trabaja a partir de los resultados encontrados en el proceso anterior, de donde se toman elementos para el diseño del taller de investigación, que inicia y complementa la situación acción. Para el desarrollo de este, se plantean problemas en cuyo enunciado aparece la información necesaria para su resolución y suele implícitamente indicar la estrategia a seguir; no requiere reorganizar los datos, ni plantear submetas para resolverlos, sino seguir directamente las instrucciones; otros donde el enunciado no insinúa una estrategia a seguir, sino que el estudiante debe reorganizar la información; y otros, donde no hay datos estructurados que permitan realizar directamente una modelación, lo que posibilita diferentes formas de abordarlos, el estudiante debe descubrir relaciones no explicitas que le posibiliten establecer una estrategia para encontrar la solución.

En este taller de investigación se definen dos momentos; cuando el participante lo desarrolla individualmente; aquí el investigador analiza y describe las acciones expuestas por ellos, luego viene la interacción grupal, en esta se busca generar una discusión entre ellos, que lleven a expresar y argumentar las estrategias y planteamientos que se utiliza para la solución de las situaciones presentadas. Lo anterior, se complementa con una entrevista semiestructurada, donde la comunicación que se genere entre los participantes y el investigador, está sometida a dos tipos de retroacciones, una inmediata, por parte de los compañeros que la comprenden o no, y una mediata, por parte del medio, que determina si la estrategia resulta efectiva o no, frente al colectivo de participantes. Es así, como a partir de esta actividad, surgen planteamientos de hipótesis o cuestionamientos sobre lo que se descubra, a su vez, el investigador orienta a los estudiantes para que desarrollen razonamientos matemáticos.

Con respecto a la situación de validación, los participantes organizan procesos de comprobación y demostración de la hipótesis, mediante la organización de enunciados, fundamentación teórica y presaberes, hallados en la recurrencia y contraste de los talleres aplicados, que sirvan para convencer o dejarse convencer de los demás participantes, sin ser persuadidos por emociones o sentimientos (autoridad, amistad, intimidación, simpatía, etc.), las razones que ellos propongan y argumenten, son puestas a prueba, debatidas y convenidas en un sistema determinado, para ello se deben sostener en su opinión o presentar una demostración. Lo anterior orienta la necesidad de reestructurar o no el taller de investigación, como parte de la validez del mismo.

La fase de reflexión, es un proceso de retroalimentación y reelaboración continua y progresiva de lo aplicado durante el mismo, el cual se presenta en el desarrollo de toda la investigación, de donde emergen argumentos que justifican los análisis y procedimientos realizados. Por otro lado, permite contrastar los resultados arrojados por el diagnóstico y la intervención de ser necesario, esto brinda pautas para nuevas hipótesis, revisar el plan de acción, poner en práctica éste y determinar si se requiere replantear el problema de investigación. Así esta, da la validación necesaria para reafirmar los resultados encontrados en cada uno de las fases de la investigación. A continuación se presenta el esquema mental de representación del proceso metodológico:

Figura 4. Secuencia y relaciones entre las fases y los objetivos de Investigación

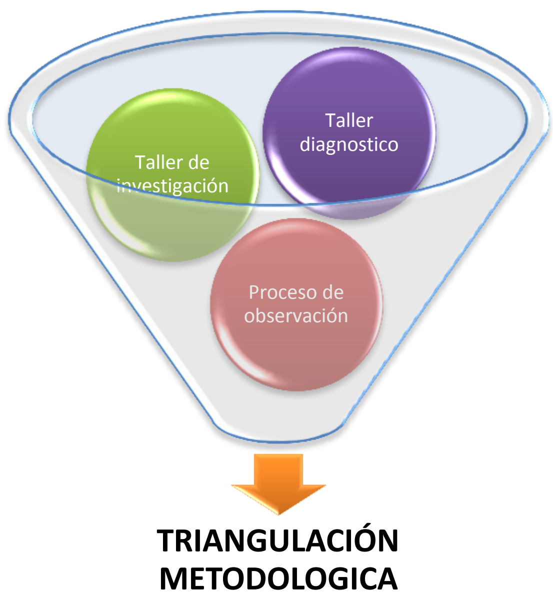


4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En el análisis de los datos obtenidos, una vez aplicado el método y sus instrumentos de recolección de información, realiza la triangulación como un procedimiento para organizar los diferentes tipos de datos, que surgen de un marco de referencia en el que se puedan comparar y contrastar (Elliott, 1978), pues este autor la analiza como “una teoría del método para la autoevaluación dentro de un sistema profesional-democrático de rendición de cuentas en el aula” esta se introdujo pidiendo a los profesores que auto-supervisarán sus actividades.

Es así, como se utiliza el proceso de triangulación metodológica que implica la obtención y análisis de la información tomada desde tres puntos de vista, en este caso, en la aplicación de métodos e instrumentos como lo son las situaciones didácticas, la observación participativa y no participativa (talleres, diario de campo, entrevista y cuestionarios), y los referentes teóricos.

Figura 5. Triangulación Metodológica



Para dar validez a la investigación es necesario comparar los datos obtenidos a través de diferentes instrumentos, principalmente aquellos cuyas características resulten significativos, a esto se le conoce como triangulación, "Por triangulación se entiende el proceso de utilizar diferentes estrategias de investigación para estudiar el problema" (Mejía y Sandoval., 1998:171), esto tiene como propósito demostrar que los rasgos que se encuentren se puedan manifestar en distintos niveles o hayan sido percatados por otras personas, evitando caer en tomar como base exclusivamente las subjetividades propias del investigador.

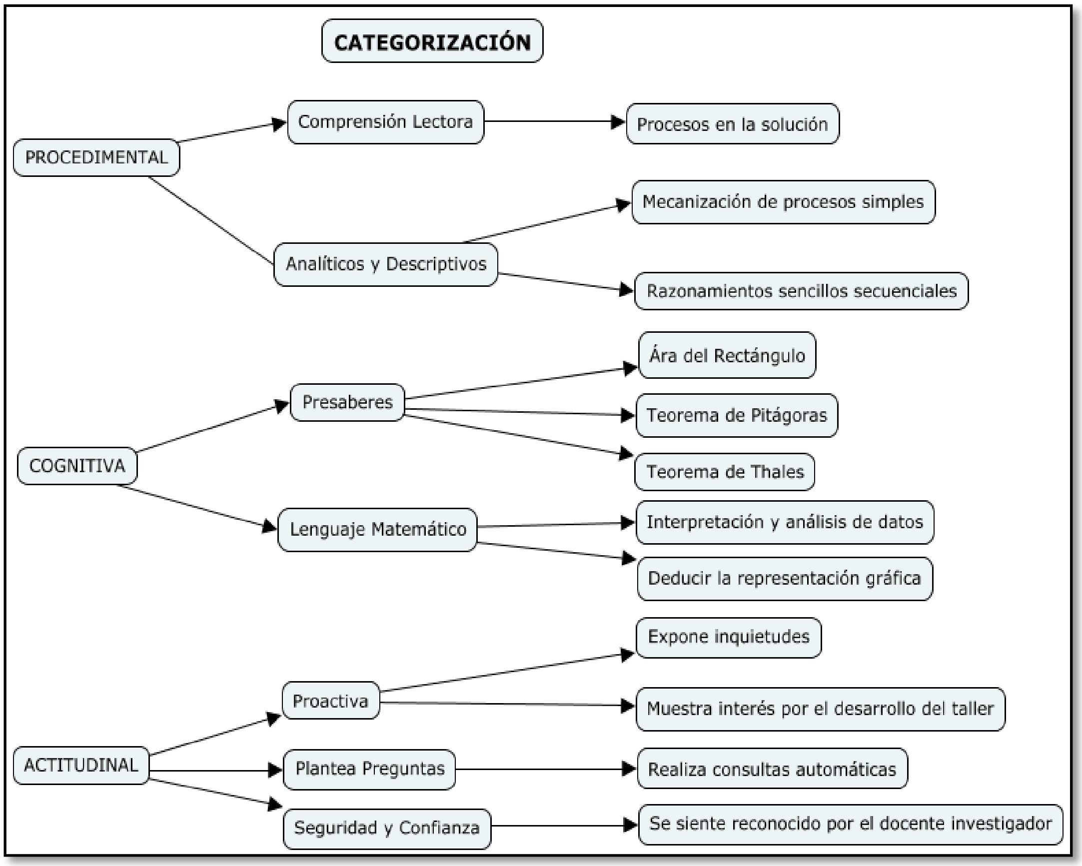
Para ello, en el trabajo realizado, se inicia con un ***taller diagnóstico*** donde se aplica el cuestionario y la entrevista, en esta los estudiantes socializan y argumentan las estrategias utilizadas en la solución de problemas trigonométricos. En un segundo momento se desarrolla de acuerdo a los resultados obtenidos de la actividad anterior, se implementa una unidad didáctica, que consta de tres situaciones (acción, formulación y validación); en la acción se hace uso de un juego virtual, en la formulación un ***taller de investigación*** que luego sirve para contrastar y validar las categorías emergentes del primer momento y segundo momento, que se van registrando durante este proceso en el diario de campo, teniendo en cuenta el cruce de información y la recurrencia de la misma, combinada con ***el proceso de observación*** participativa y no participativa, para luego dar paso a un tercer momento con los referentes teóricos que dan soporte a las categorías encontradas, de acuerdo a los errores recurrentes en tales talleres, los aportes encontrados al trabajar situaciones didácticas y corroborar o contradecir la información que se sustenta con los hallazgos teóricos, con esto se lleva a cabo un proceso comparativo, que finaliza con una actividad reflexiva, expresando que la triangulación metodológica se ha completado, y poder con ello, replantear o sustentar la pregunta de investigación.

4.1 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se muestra el análisis de resultados y aportes didácticos que permiten al docente enriquecer sus diseños curriculares, sus prácticas pedagógicas y sus propuestas de evaluación. En el área de Matemáticas tiene fuerte nexos con los referentes teóricos como los Lineamientos Curriculares que orientan su énfasis en el planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos, en el uso con significado del lenguaje matemático, en la comunicación de ideas, en la modelación de situaciones, en la construcción e interpretación de diversas representaciones y en el desarrollo del pensamiento matemático.

En consecuencia, para el proceso de triangulación se tomó como precedente, la implementación de los instrumentos (taller diagnóstico, entrevista, unidad didáctica y diario de campo), análisis del investigador y justificación teórica. De donde se identificaron tres categorías emergentes: ***Procedimental, Cognitiva y actitudinal***. A su vez, desde lo procedimental emergen las siguientes subcategorías: comprensión lectora, analíticos y descriptivos; en la cognitiva surgen: presaberes y lenguaje matemático; y en la actitudinal: proactiva, plantea preguntas, seguridad y confianza.

Figura 6. Categorías emergentes.



4.1.1 Lenguaje Matemático. Cuando los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa, desarrollaron las situaciones planteadas en el Taller diagnóstico (ver anexo A) y en la unidad didáctica (ver anexo C) referentes a problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, manifestaron dificultades en el lenguaje matemático, situación que llevó a generar la necesidad de un dominio tanto en la interpretación y análisis de datos como en la representación gráfica, estas subcategorías fueron relevantes.

> ***"Pues creo que lo más difícil sería comprender perfectamente y el interpretar el problema, porque sin eso, así sepamos solucionar o resolver, pero si no interpreta todo quedará mal"***
>
> (Entrevista, octubre 28: FSNC)

Dichas dificultades se deben a un conocimiento incompleto o no acabado que procede de la falta de dominio en los conceptos fundamentales y de un esquema cognitivo inadecuado que se traduce en obstáculos epistemológicos y cognitivos. Los obstáculos corresponden a los cambios en los dominios conceptuales de las matemáticas.

Un obstáculo epistemológico se presenta cuando los estudiantes tienden a llevar las propiedades que tienen los objetos de conocimiento de un dominio conceptual a otro diferente (Corzo y La Menza, 1999).

Algunos estudiantes de los que participaron en las actividades propuestas manifestaron dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales como: ubicación espacial, procesos de variación, representaciones mediante un dibujo o gráfica, conceptos algebraicos y geométricos, los cuales son importantes al abordar las aplicaciones de la trigonometría.

Al respecto la estudiante FLJE contestó a la pregunta:

"Tenemos que prestarle atención, leerlo muy bien antes de responderlo, sacar datos, sino se entiende, preguntar"

(Entrevista, octubre 28)

Con estas palabras FLJE hace notar que es muy importante comprender lo que se lee en el momento de resolver un problema, porque en matemáticas la comprensión de lectura generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, equivalente al lenguaje natural de una persona, y necesita del manejo de un lenguaje matemático adecuado, para lograr una interpretación que facilite plantear estrategias de solución.

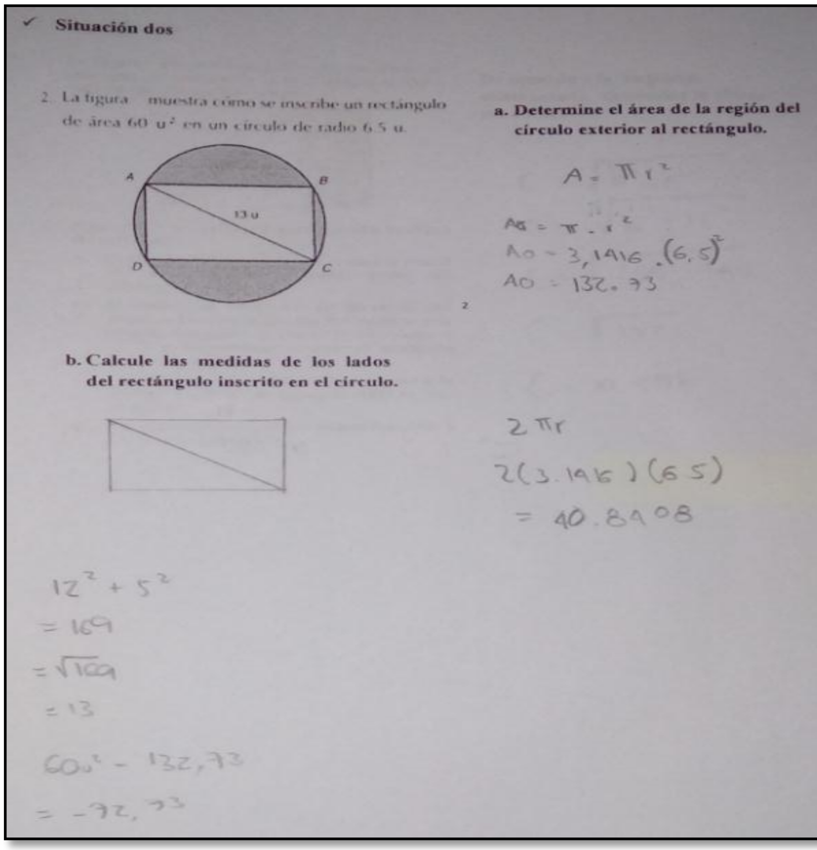
Sin embargo, los estudiantes trasladaban automáticamente el lenguaje natural que utilizan cotidianamente al sistema de escritura matemática, como puede suceder con lo propio de otras áreas del conocimiento, esta particularidad hace que el lenguaje de las matemáticas dificulte la comprensión de los conceptos matemáticos, la forma como se relacionan, el uso de los mismos en la resolución de problemas. Todas estas falencias en cuanto al lenguaje se dan al pasar del lenguaje natural al lenguaje de las matemáticas o viceversa.

Concordando con La Menza (1999), la comprensión de cualquier área del conocimiento sólo es posible a través del manejo de su lenguaje instrumental. Cada disciplina posee un lenguaje particular construido sobre la base de un sistema de signos y de reglas que le es propio. Hay que saber oír, hablar, leer, y escribir en matemática para acceder a la disciplina matemática.

El vocabulario específico de la matemática no es fácil de adquirir, pero tampoco es factible de ser simplificado o modificado. Comprender y usar un concepto matemático, supone saber expresarlo en forma oral o escrita. Al estudiante puede resultarle muy difícil aprender a expresarse matemáticamente con un lenguaje específico, pues tiene que sustituir el lenguaje cotidiano por uno particular que designe los elementos básicos, las operaciones con ellos, sus cualidades o propiedades, los nuevos conceptos, etc.

Cuando se desarrolló el taller diagnóstico en la situación 2 (ver anexo A) y la unidad didáctica en la situación 3 (ver anexo C), la mayoría de los estudiantes, acerca de los términos empleados como: alcance máximo, longitud de la sección de la carretera, circunferencia, área del círculo exterior y rectángulo inscrito en el círculo; realizaron:

Figura 7. Taller diagnóstico: Situación dos

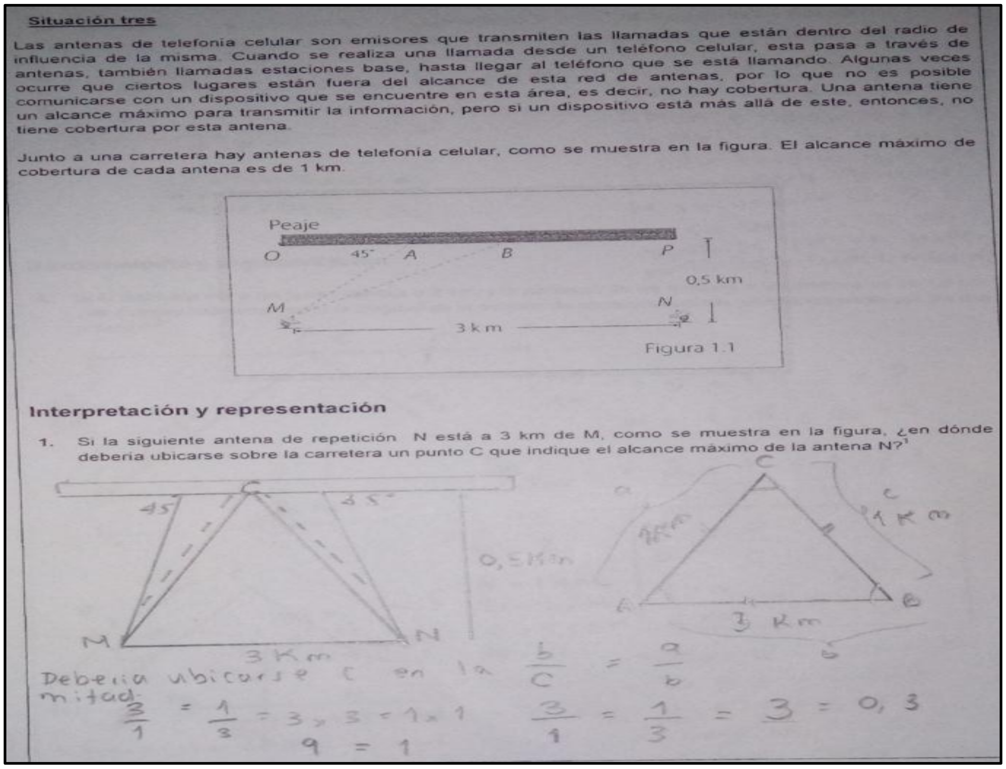


Fuente: Taller diagnóstico; estudiantes MSEA y FSNC, 2015

Al igual que lo sucedido en la figura 6, se evidenció que un 5% de los estudiantes, toman el dato del área del rectángulo como una longitud y suponen que el área del mismo es igual al área de un cuadrado. El procedimiento anterior muestra un error conceptual, de comprensión lectora y de interpretación, al relacionar el área del rectángulo con la longitud del mismo. Así mismo, el otro 5% por ciento de este grupo, tienen claridad en la fórmula del área del rectángulo pero asume ésta y la diagonal como las longitudes de sus lados (base y altura); frente a esto se evidencia confusión en el concepto de área y longitud, lado y diagonal. Por otro lado, el 25% restante del grupo determinan el área del círculo sin comprender que el área de la región externa al rectángulo no es simplemente el área de éste, por consiguiente no hay una interpretación entre el dibujo y la pregunta planteada.

Luego, el lenguaje técnico incide de manera directa e indirecta en la comprensión de un problema, porque al hablar del área sombreada o el área de la región del círculo exterior al rectángulo, simplemente representan lo mismo, solo que en la primera está más relacionada directamente con el dibujo, y que podría ayudar al estudiante a aclarar su interpretación.

Figura 8. Unidad didáctica: Situación tres



Situación tres

Las antenas de telefonía celular son emisores que transmiten las llamadas que están dentro del radio de influencia de la misma. Cuando se realiza una llamada desde un teléfono celular, esta pasa a través de antenas, también llamadas estaciones base, hasta llegar al teléfono que se está llamando. Algunas veces ocurre que ciertos lugares están fuera del alcance de esta red de antenas, por lo que no es posible comunicarse con un dispositivo que se encuentre en esta área, es decir, no hay cobertura. Una antena tiene un alcance máximo para transmitir la información, pero si un dispositivo está más allá de este, entonces, no tiene cobertura por esta antena.

Junto a una carretera hay antenas de telefonía celular, como se muestra en la figura. El alcance máximo de cobertura de cada antena es de 1 km.

Figura 1.1

Interpretación y representación

1. Si la siguiente antena de repetición N está a 3 km de M, como se muestra en la figura, ¿en dónde debería ubicarse sobre la carretera un punto C que indique el alcance máximo de la antena N?[1]

Debería ubicarse C en la mitad

$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$

$\frac{3}{1} = \frac{1}{3} = 3 \times 3 = 1 \times 1$

$9 = 1$

$\frac{3}{1} = \frac{1}{3} = 3 = 0,3$

Fuente: Unidad didáctica; estudiante FSNC, 2016

A sí mismo, otros participantes al igual que en la figura 7, se analizó que un 10% no realizaron una interpretación correcta del enunciado del problema, porque su representación no corresponde al contexto que proporciona la situación abordada y no hay una comprensión de la pregunta que se requiere resolver. Por consiguiente, se puede observar que el 35% en el taller diagnóstico evidencian falencias en el lenguaje matemático, mientras que en la unidad didáctica luego de un proceso metodológico de enseñanza y aprendizaje, se logra mejorar los resultados significativamente, ya que solo en un 10% predominó su dificultad.

Respecto a Pimm, citado por Polya (1999, p.83), afirma: “Es claro que el discurso matemático incluye términos especializados y significados distintos de los habituales en el habla cotidiana”, y por ello el lenguaje usado en matemáticas, que es “claro” para los docentes, no siempre lo es para los estudiantes.

El manejo del lenguaje matemático no se adquiere espontáneamente, ni de manera inmediata, requiere que el estudiante maneje habilidades intelectuales como el análisis,[15] la síntesis[16] y la traducción[17].

Por tal razón, es imperativo que el docente planifique y proponga actividades que posibiliten al estudiante poner en juego y desarrollar dichas habilidades importantes para el buen ejercicio en la escuela y en la vida misma, lo que se visualizó en la implementación de la unidad didáctica.

Si no se tiene en cuenta lo anterior, el lenguaje puede convertirse en un inconveniente para comprender los contenidos matemáticos generando una traducción errónea que a menudo se refleja en apatía y desinterés por parte del estudiante tomando posiciones como: “es muy complicado”, “no se le entiende”, “son muy difíciles sus conceptos”, entre otros. Contrario a lo anterior, se observó que en el desarrollo de la unidad didáctica, el estudiante presento interés y

[15] Es la habilidad que se tiene para dividir un todo en sus partes constitutivas, para identificar y clasificar cada parte, ver cómo están relacionadas entre sí para determinar conexiones e interacciones.
[16] A nivel de síntesis se estará en capacidad de reunir las partes para formar un todo, que antes no estaba presente con claridad.
[17]Nivel de la comprensión en la que el estudiante puede expresar la comunicación recibida en otro lenguaje o en términos distintos de los originales.

participación activa, liderazgo, motivándolo en la sustentación de sus ideas frente al grupo.

> ***"Si, porque las gráficas y los problemas interactivos hacen más fácil y entendible el uso de los conceptos y preconceptos".***

(Unidad didáctica: pregunta abierta, MSFR)

> ***"Entendible, ya que tenía cosas claras, surgieron dudas pero el material ayuda a resolverlos, al igual que las intervenciones del profesor"***

(Unidad didáctica: pregunta abierta, FMFV)

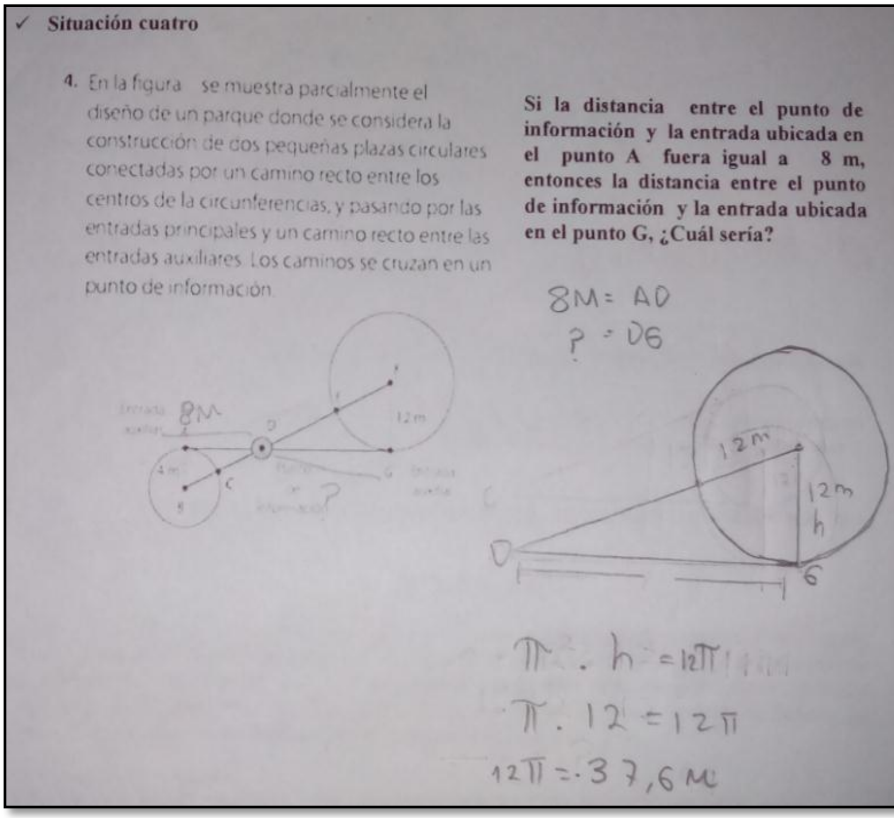
Teniendo en cuenta lo anterior, se logra deducir que en ocasiones el estudiante al no lograr comprender, recurre a la repetición literal, (estrategia de procesamiento superficial) en esfuerzo de memorizar un concepto transformándolo en un conjunto de palabras sin significación. En ese sentido Rojas (2002, p.16) expresa:

> "Una de las razones para que la comunicación en matemáticas sea poco exitosa en nuestros salones de clase, es la ausencia de comprensión significativa, tanto de aquello que hablamos cuando hablamos de matemáticas, como de las conexiones lógicas que validan la coherencia del discurso involucrado".

Por tanto se requiere de reevaluar las metodologías implementadas en el salón de clase, que brinden mejores resultados de aprendizaje y enseñanza en los educandos.

A continuación se presenta la situación cuatro del Taller diagnóstico, donde se pueden observar los conceptos matemáticos necesarios que se requerían en el problema, donde se evidenciaron otros aspectos:

Figura 9. Taller diagnóstico: Situación cuatro



Fuente: Taller diagnóstico; estudiante FSNC, 2015

En esta situación los estudiantes necesitaban relacionar los dos triángulos semejantes que se daban en la representación gráfica del problema; los dos triángulos formados coincidían en uno de sus lados y sus alturas estaban relacionadas proporcionalmente.

Para algunos estudiantes no es claro la relación existente entre los teoremas de semejanza, proporcionalidad y las razones trigonométricas, por ello la actitud desesperada de mirar al compañero en busca de una luz frente a qué concepto podría permitirle resolver el problema; otros asocian el concepto de proporcionalidad al cálculo de área y uso del teorema de Pitágoras, sin un razonamiento inductivo, que establezca la relación entre la pregunta del problema y los conceptos involucrados.

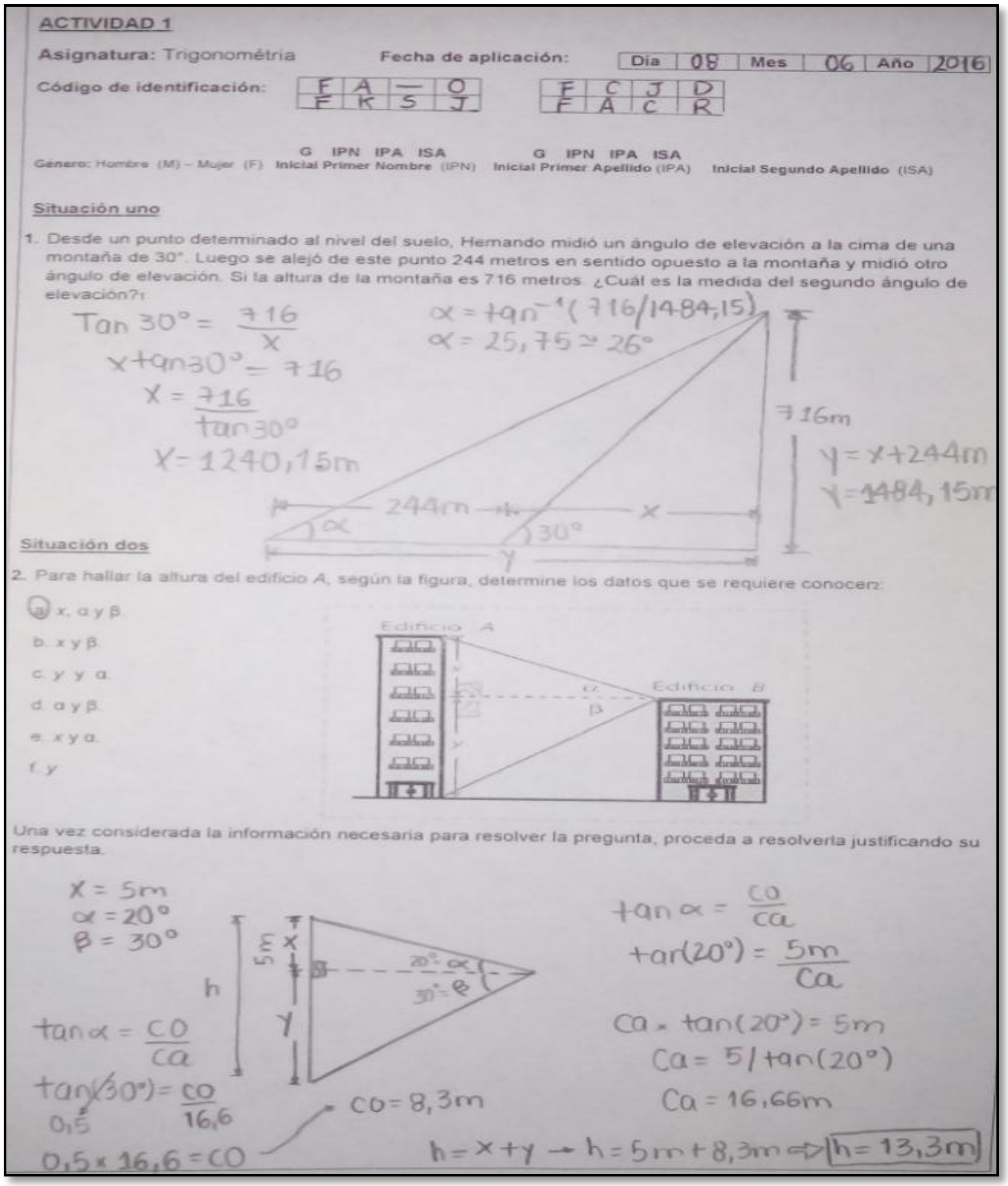
Además se notó que los estudiantes necesitaron para la solución del problema que involucraba el planteamiento de un sistema de ecuación lineal, que surgía de la semejanza de los triángulos, donde se relacionaban las alturas de los triángulos con sus respectivas bases.

Luego, las matemáticas presentan un lenguaje de una especificidad semántica y sintáctica que les son propias y que, por lo tanto, lo diferencian significativamente del lenguaje ordinario y frente al planteamiento de ecuaciones lineales, Corso y La Menza (1999, p.151), además dicen:

> "Plantear una ecuación es expresar por medio de símbolos matemáticos, una condición formulada en palabras; para ello se requiere interpretar la situación y conocer las formas de expresión matemática; la traducción de un problema al lenguaje simbólico presenta serias dificultades; así como también su resolución, puesto que implica el dominio de conceptos algebraicos".

Por otro lado, en el desarrollo de la Actividad uno, planteada en la Unidad Didáctica, que consta de la situación uno y dos, se observó que en la primera situación la totalidad de los grupos, exitosamente comprendieron y resolvieron el problema usando correctamente los elementos conceptuales y presaberes en los procedimientos realizados, además, cada grupo realizó una representación gráfica del mismo, destacándose la interpretación y el uso del lenguaje matemático. Para la segunda situación planteada, igualmente todos los grupos interpretan los datos necesarios y suficientes para determinar la altura del edificio, sin embargo un número significativo de los participantes, plantean un procedimiento correspondiente al razonamiento geométrico que aporta el dibujo y acompaña el enunciado del problema, donde los argumentos descritos tienen conexión entre el lenguaje matemático y la pregunta del problema, se visualiza a continuación un ejemplo elaborado por uno de los grupos:

Figura 10. Unidad didáctica, Actividad 1: Situación uno y dos


ACTIVIDAD 1

Asignatura: Trigonométria — Fecha de aplicación: Día 08 Mes 06 Año 2016

Código de identificación: F A — O / F K S J — F C J D / F A C R

G IPN IPA ISA — G IPN IPA ISA

Género: Hombre (M) – Mujer (F) Inicial Primer Nombre (IPN) Inicial Primer Apellido (IPA) Inicial Segundo Apellido (ISA)

Situación uno

1. Desde un punto determinado al nivel del suelo, Hernando midió un ángulo de elevación a la cima de una montaña de 30°. Luego se alejó de este punto 244 metros en sentido opuesto a la montaña y midió otro ángulo de elevación. Si la altura de la montaña es 716 metros. ¿Cuál es la medida del segundo ángulo de elevación?:

$\operatorname{Tan} 30° = \frac{716}{x}$

$x \tan 30° = 716$

$x = \frac{716}{\tan 30°}$

$x = 1240{,}15m$

$\alpha = \tan^{-1}(716/1484{,}15)$

$\alpha = 25{,}75 \simeq 26°$

716m

$y = x + 244m$

$y = 1484{,}15m$

244m, x, α, 30°, y

Situación dos

2. Para hallar la altura del edificio *A*, según la figura, determine los datos que se requiere conocer:

a. x, α y β.

b. x y β.

c. y y α.

d. α y β.

e. x y α.

f. y

Edificio A — Edificio B

Una vez considerada la información necesaria para resolver la pregunta, proceda a resolverla justificando su respuesta.

$x = 5m$

$\alpha = 20°$

$\beta = 30°$

$\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$

$\tan(20°) = \frac{5m}{CA}$

$CA \cdot \tan(20°) = 5m$

$CA = 5/\tan(20°)$

$CA = 16{,}66m$

$\tan\alpha = \frac{CO}{CA}$

$\tan(30°) = \frac{CO}{16{,}6}$

$0{,}5$

$0{,}5 \times 16{,}6 = CO$

$CO = 8{,}3m$

$h = x + y \rightarrow h = 5m + 8{,}3m \Rightarrow \boxed{h = 13{,}3m}$

Fuente: Unidad didáctica; estudiantes FAO-FCJD-FKSJ y FACR, 2016

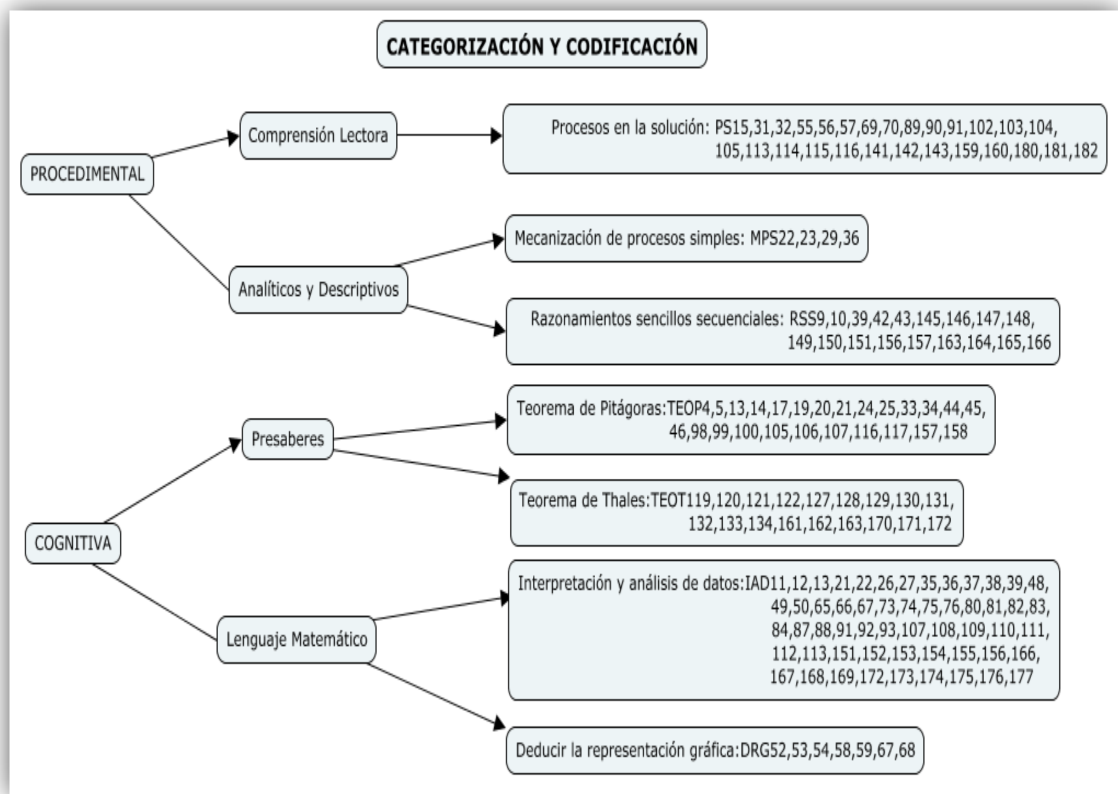
En otras palabras, los aspectos relacionados con la metacognición, mencionados en el modelo de aprendizaje estratégico elaborado por Pressley, Borkowsky y Schneider citado por Mateos (2001, p. 46) “postula que la autorregulación que llevan a cabo los aprendices competentes, resulta de la coordinación de tres componentes entre ellos, el conocimiento de la eficacia de las estrategias (creencias motivacionales, tales como la creencia en la posibilidad general de modificar las propias capacidades mediante el esfuerzo o la creencia en la propia eficacia)". Es decir, el éxito del desarrollo de la Unidad Didáctica se evidencia, en la implementación de las situaciones didácticas, entre las que se encuentra la ***formulación***, esta muestra cuando el representante de cada equipo debate sus argumentos exponiendo sus ideas, sustentándolas y comunicando las estrategias frente a su grupo y los demás, esto resolviendo las dos situaciones problema, donde la metodología permitió encontrar hallazgos significativos, mejorando las habilidades cognitivas frente al lenguaje matemático, como lo son la interpretación, análisis de datos y la deducción de la representación gráfica.

Finalmente, muchas veces sucede que los estudiantes no resuelven un problema no por desconocer el concepto matemático correspondiente, sino porque no saben qué es lo que tienen que hacer; es decir, no entienden el enunciado, ya sea por falta de comprensión de lectura y el manejo del lenguaje matemático, por desconocimiento del significado de algunos términos, porque el enunciado no es claro, o ya sea que el proceso pedagógico no incluye una metodología acorde a las necesidades del aprendizaje requerido.

4.1.2 Comprensión Lectora. La comprensión de lectura juega un papel importante en la representación gráfica de un problema; si el estudiante tiene falencias en la comprensión de lectura se verá reflejada en los pocos elementos y herramientas que le aportan a la imaginación y creatividad en el momento de diseñar la representación gráfica.

Es así como en la figura 11 a continuación, esquematiza la importancia de la comprensión lectora en la resolución de problemas al interior de la matemática misma, siendo una habilidad que se relaciona directamente con el lenguaje matemático, comunicar ideas, razonar y analizar, cuestionar e interpretar críticamente la información y tomar decisiones consecuentes, que permiten enriquecer y ampliar continuamente el conocimiento del estudiante, por ello fue relevante observar en el análisis de resultados que en la comprensión lectora emergen procesos de solución (PS), como estrategia necesaria por los estudiantes para resolver las situaciones planteadas en el taller diagnóstico.

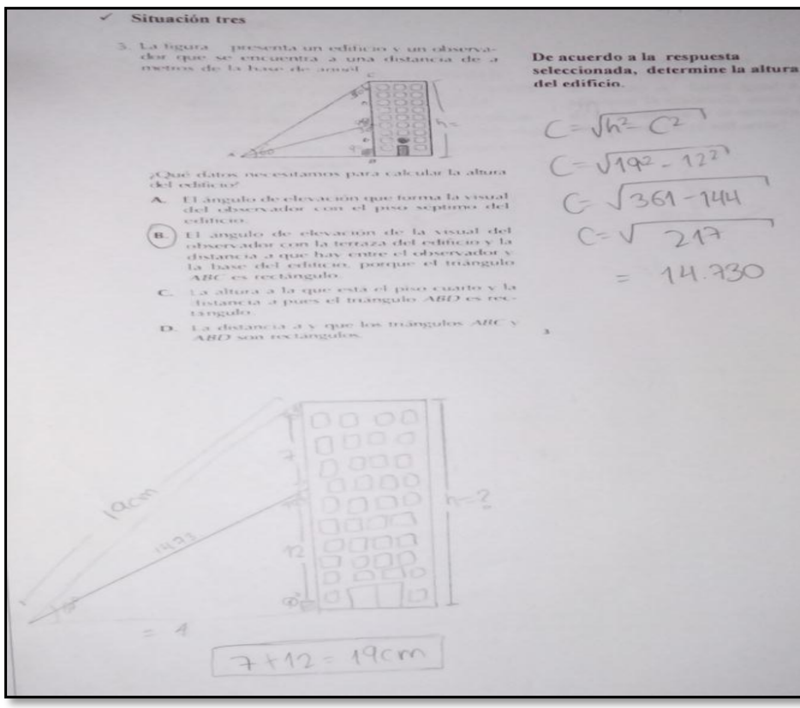
Figura 11. Categorias del Analisis del Taller Diagnóstico.



Del mismo modo, el investigador Filloy (1999), resalta que la atención del aprendizaje debe colocarse sobre el punto de vista pragmático y el uso con significado, con preferencia al uso exclusivo formal; anota, que tanto la gramática (sistema formal abstracto) como la pragmática (principios del uso del lenguaje matemático en la comprensión lectora), son dominios complementarios del conocimiento matemático y por lo tanto deben ser dominios relacionados en los diferentes modelos de la enseñanza matemática. Por ello, la presencia de la carga semántica (práctica o experiencia con ciertos usos de nociones y procedimientos de solución en las matemáticas) producida por la experiencia del estudiante juega un papel decisivo en la comprensión lectora, que contribuye en la lógica natural en dar sentido y significado a conceptos y operaciones matemáticas.

Analizando el dibujo elaborado por el estudiante (ver figura 12) a partir de la interpretación dada a la situación tres del taller diagnóstico:

Figura 12. Taller diagnóstico: Situación tres



Fuente: Taller diagnóstico, Situación tres. Estudiante FMCV. 2015

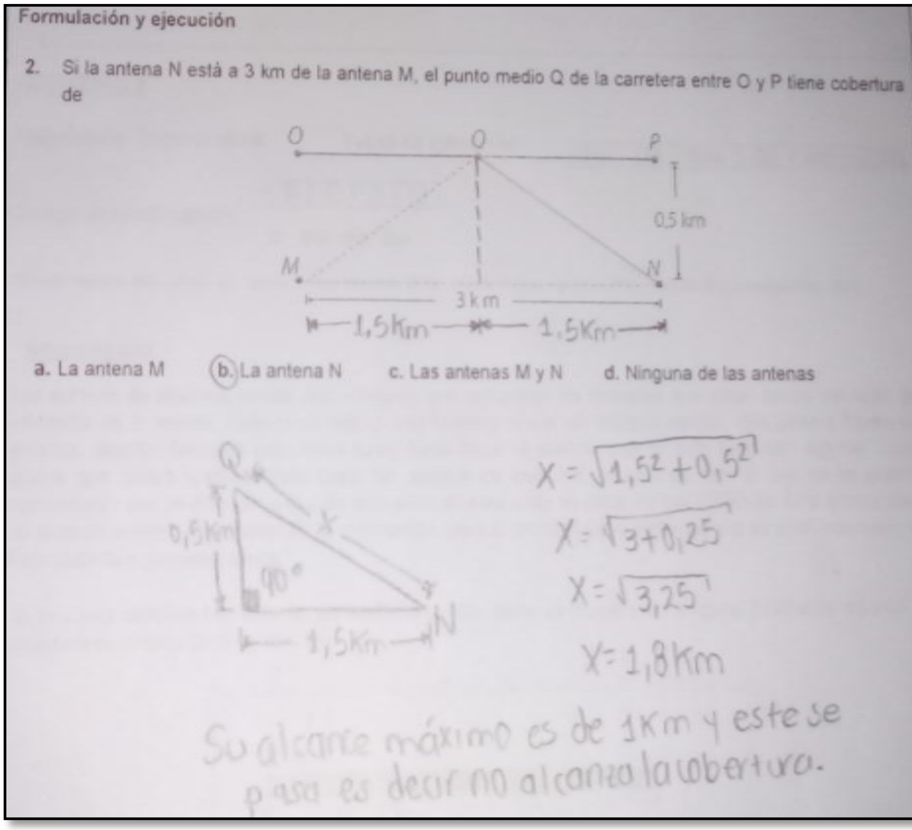
Se analiza que en el problema planteado, no se da una respuesta numérica como normalmente se esperaría, sino alternativas en la información de los datos para determinar si son suficientes en el desarrollo del problema; donde al estudiante se le dan varias opciones, entre esas aplicar directamente semejanza de triángulos, o la aplicación del Teorema de Pitágoras, sin ser suficiente aún para deducir la altura del edificio, luego se observa que el estudiante busca en un solo procedimiento analítico poder resolver la situación, es decir, se reflejan falencias en la combinación de procedimientos y conceptos, limitando así el razonamiento deductivo a simples recursos de mecanización, haciéndose ausente el poder inferir a partir de los datos, y qué concepto matemático es el más pertinente. Así mismo, el estudiante infiere a partir de los datos de un problema, sin realizar conexiones conceptuales y procedimentales complejas, alejándolo a su vez de la memorización con sentido lógico y de los procedimientos solamente algorítmicos, sin explorar la creatividad y la argumentación.

En ocasiones el estudiante al no lograr comprender, recurre a la repetición literal (estrategia de procesamiento superficial) en el esfuerzo de memorizar un concepto, transformándolo en un conjunto de palabras sin significación. En ese sentido Rojas (2002, p.16) expresa:

> "Una de las razones para que la comunicación en matemáticas sea poco exitosa en nuestros salones de clase, es la ausencia de comprensión significativa, tanto de aquello que hablamos cuando hablamos de matemáticas, como de las conexiones lógicas que validan la coherencia del discurso involucrado".

A continuación se presenta la figura 13, donde se describe como parte del proceso de solución de la situación tres, la necesidad de realizar un dibujo que refleja la comprensión lectora del estudiante:

Figura 13. Unidad didáctica, Actividad 2: Situación tres



Fuente: Unidad didáctica, Actividad 2; situación 3. Estudiante FCJD. 2016

Donde se observó que aproximadamente la mitad de los participantes interpretaron y representaron correctamente el enunciado del problema. Sin embargo, una minoría de los educandos no realizaron una interpretación correcta del enunciado del problema, porque su representación no corresponde al contexto que proporciona la situación abordada y no hay una comprensión de la pregunta que se requiere resolver; luego los procesos de solución que involucran conceptos matemáticos no eran los requeridos, por consiguiente sus respuestas son incorrectas.

También se analiza que otro grupo poco representativo, realizan una representación a partir de la interpretación de la pregunta, pero no es clara, es decir, no contribuye en la conexión entre la comprensión lectora y el uso del lenguaje matemático, generando así un manejo inadecuado de conceptos y procedimientos, luego la comprensión lectora alcanzada no es suficiente, debido a la incoherencia que ilustra la representación con el procedimiento analítico planteado.

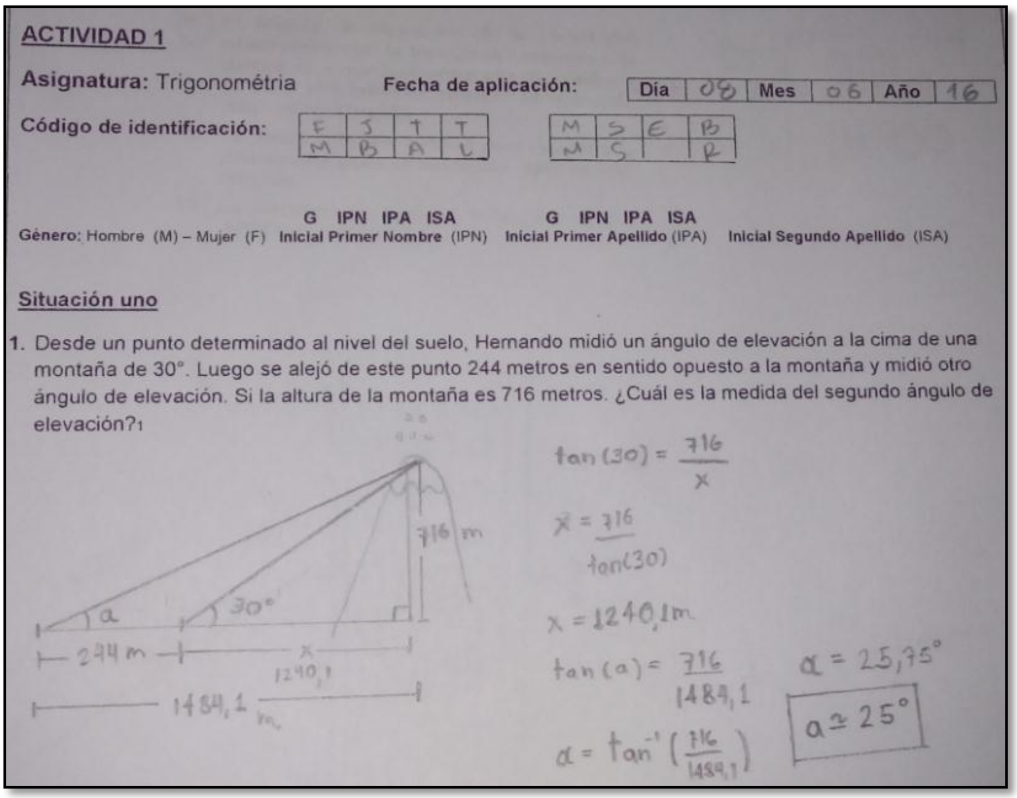
Por esta razón, la solución de trazar figuras sobre el papel, son más fáciles de hacer, reconocer y recordar que cuando sólo están en nuestra imaginación. En geometría son particularmente familiares, de hecho las gráficas y diagramas de todo tipo utilizadas en todas las ciencias. Sé considera que los estudiantes cuando realizan una representación geométrica apropiada, tratan de expresarlo todo en el lenguaje de las figuras y de reducir todo tipo de problemas a problemas de geometría, lo que les permite un avance sensible hacia la solución.

En ese sentido, se cita una sugerencia hecha por Arbeláez (2002, p.13) respecto a la elaboración de un dibujo correspondiente a un problema, donde es necesario tener en cuenta:

> “El dibujo debe ser siempre un esbozo esquemático del objeto principal del problema (la figura o imagen, el conjunto de figuras), que incluya la representación por medio de literales y de otros símbolos, de todos los elementos de dicho objeto y de algunas de sus características. Si en la formulación del problema se dan las simbolizaciones de los objetos, entonces se deben emplear estas mismas simbolizaciones en el dibujo; si en el problema no se proporciona simbolización alguna, entonces es necesario emplear las simbolizaciones comúnmente adoptadas o inventar las propias.”

Ante lo mencionado, se resalta la importancia de la unidad didáctica, en cómo esta ayuda en mejorar la comprensión lectora en los estudiantes, ya que en sus procesos de solución se evidenció una conexión entre el lenguaje matemático y los procedimientos analíticos usados. Para lo cual, se muestra otro ejemplo de mayor relevancia, donde un grupo de estudiantes FJTT-MBAL-MSEB-MSR, reflejan la coherencia entre la comprensión lectora a partir de la representación gráfica dada y el lenguaje matemático, involucrados en los procesos de solución:

Figura 14. Unidad didáctica; actividad 1: Situación uno



ACTIVIDAD 1

Asignatura: Trigonométria Fecha de aplicación: Día 08 Mes 06 Año 16

Código de identificación: F J T T / M B A L M S E B / M S _ R

G IPN IPA ISA G IPN IPA ISA

Género: Hombre (M) – Mujer (F) Inicial Primer Nombre (IPN) Inicial Primer Apellido (IPA) Inicial Segundo Apellido (ISA)

Situación uno

1. Desde un punto determinado al nivel del suelo, Hernando midió un ángulo de elevación a la cima de una montaña de 30°. Luego se alejó de este punto 244 metros en sentido opuesto a la montaña y midió otro ángulo de elevación. Si la altura de la montaña es 716 metros. ¿Cuál es la medida del segundo ángulo de elevación?1

Fuente: Unidad didáctica, Actividad 1; situación uno. Estudiantes FJTT-MBAL-MSEB-MSR, 2016

Al respecto, se observó que el haber trabajado en parejas permitió la interacción de ideas, conceptos, procesos de solución y la reflexión para elegir la estrategia más adecuada, llevándolos a un análisis más detallado. De la misma manera, la totalidad de los grupos en el desarrollo de la actividad, tomaron la iniciativa de realizar un dibujo, de acuerdo a la comprensión lectora realizada, retroalimentando el dibujo con el uso del lenguaje matemático, que resulto exitoso. Por otro lado se observó el apoyo de los demás compañeros, el manejo de conceptos, la comprensión lectora, la identificación de la pregunta con respecto a la información dada, la lectura que hacen al dibujo realizado por ellos, lo que contribuye en la interpretación del mismo.

De acuerdo a lo anterior, Polya (1993, p. 94) afirma:

> "las figuras exactas juegan por principio, en geometría, el mismo papel que las mediciones exactas en física, pero en la práctica tiene menos importancia que estas, ya que los teoremas de geometría se verifican de un modo más extenso que las leyes de la física. Sin embargo, los principiantes deben construir un gran número de figuras tan exactas como le sean posibles, a fin de adquirir una buena base experimental. Sucede que una figura inexacta sugiere una conclusión errónea, pero el peligro no es grande y podemos subsanarlo de diferentes modos, en especial modificando la figura. El peligro será nulo si nos concentramos en las relaciones lógicas y asumimos que la figura no es más que una ayuda, que no constituye la base de nuestras conclusiones; son las relaciones lógicas las que constituyen la base real".

Cuando se sustenta la segunda situación se evidencia que los equipos debatían y argumentaban frente a los otros grupos, tanto sus ideas y estrategias empleadas en la solución del problema, con razonamientos conceptuales deductivos que se generan cuando se logra una interpretación y comprensión del problema. Por consiguiente se deduce que la comprensión lectora se enmarca en el proceso de elaborar un significado por la vía de aprender las ideas relevantes de un texto y relacionarlas con los conceptos que ya tienen un significado para el lector, como proceso de interacción entre el pensamiento y el lenguaje. También, Paulo Freire (2008), afirma: Relación entre texto y contexto. Para entender la importancia y el sentido de esta categoría, es necesario tomar en cuenta que el aprender a leer las letras no implica el desarrollo de la capacidad reflexiva. De esta manera, lo que expresa Freire, se relaciona muy bien con lo que plantea la autora, Gadotti (2007) quien afirma: el acto de aprender a leer y escribir no implica por sí mismo el desarrollo de la capacidad de reflexión. Una lectura no crítica separa texto y contexto, transformando el texto en un discurso abstracto, sin lazos con la realidad. Por el contrario, leer es pronunciar el mundo, codificarlo para, al final, nos conozcamos internamente. El vínculo entre el acto de leer y la realidad permite que acontezca un proceso genuino de conocimiento, transformador del hombre y del mundo. (p.107). Además, Schoenfeld, (1996), señala que existen fuertes analogías entre el desempeño competente en matemática y el desempeño en la escritura. Así como no se puede aprender a leer sin aprender a decodificar las palabras, no se puede aprender matemática sin decodificar su lenguaje propio, ni se puede resolver un problema sin comprender su enunciado.

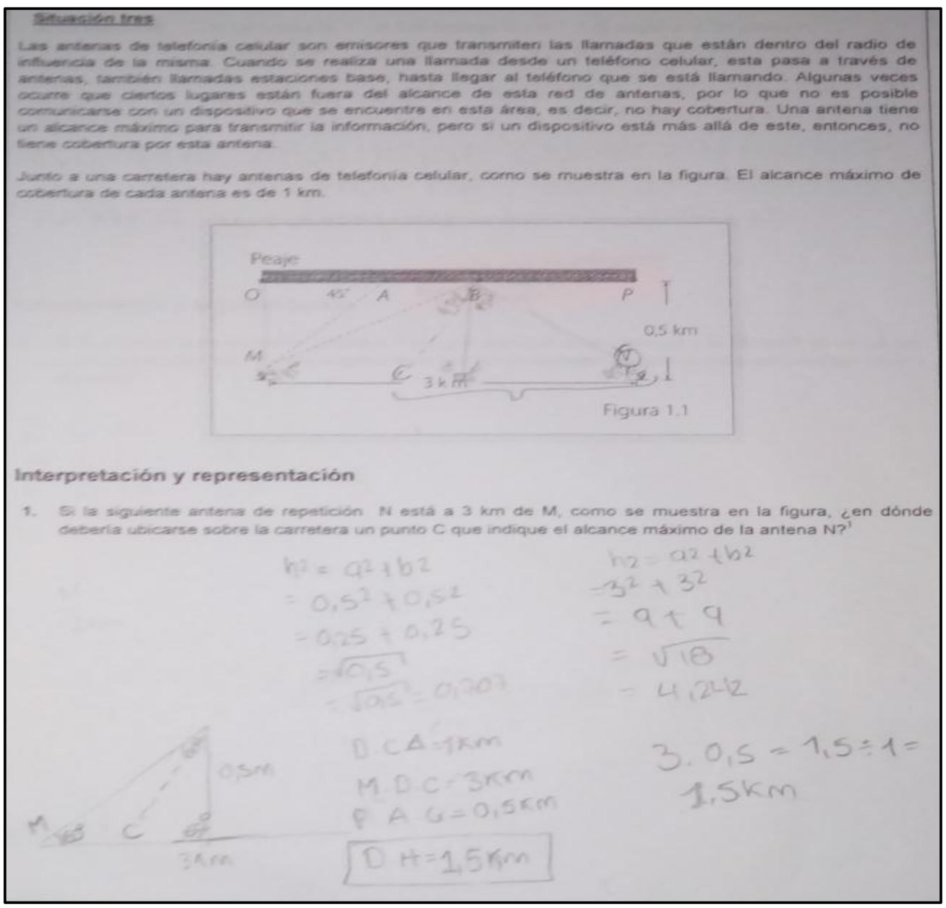
De modo que el análisis detallado, la concertación de ideas y los procesos de solución fueron posibles en los grupos, facilitando la solución de las situaciones uno y dos de la actividad uno, esto gracias al desarrollo de las situaciones didácticas dentro del marco metodológico, en la implementación de la unidad didáctica, logrando así una comprensión lectora.

4.1.3 Analíticos y Descriptivos. Saber que la organización de la información en un esquema favorece su adquisición y recuperación posterior o saber que se recuerda mejor palabras que números son estrategias de aprendizaje que utilizamos en nuestro quehacer diario. Esto implica que de una u otra forma se tienen conocimientos de sus propios métodos de aprendizaje, lo que lleva a tomar el concepto de metacognición.

Flavell, citado por Mateos (2001, p.97), se refiere a la metacognición como el conocimiento que las personas adquieren, supervisan y regulan de los propios procesos para el logro de una meta determinada; o como lo define Brown, también citado por Mateos (2001, p.98), es el control deliberado y consciente de la propia actividad cognitiva; a partir de estas definiciones la metacognición constituye procesos que incluyen la planificación de las estrategias más adecuadas para resolver un problema, supervisar y regular el uso que se hace de las mismas y de su efectividad así como del progreso hacia la meta establecida y de evaluación de los resultados obtenidos.

A partir de lo que es la metacognición, cuando los estudiantes enfrentaron la solución de un problema, lo primero que hacían es leerlo y hasta tener la “luz” necesaria para empezar a resolverlo. En ese momento era cuando empezaban a pensar cómo utilizar los procesos de aprendizaje que poseían, cómo podían funcionar, cómo hacían para optimizar su funcionamiento y llevar el control de esos procesos, ejemplo de ello se presenta en la figura 15, a continuación:

Figura 15. Unidad didáctica, Actividad 2: Situación tres



Situación tres

Las antenas de telefonía celular son emisores que transmiten las llamadas que están dentro del radio de influencia de la misma. Cuando se realiza una llamada desde un teléfono celular, esta pasa a través de antenas, también llamadas estaciones base, hasta llegar al teléfono que se está llamando. Algunas veces ocurre que ciertos lugares están fuera del alcance de esta red de antenas, por lo que no es posible comunicarse con un dispositivo que se encuentra en esta área, es decir, no hay cobertura. Una antena tiene un alcance máximo para transmitir la información, pero si un dispositivo está más allá de este, entonces, no tiene cobertura por esta antena.

Junto a una carretera hay antenas de telefonía celular, como se muestra en la figura. El alcance máximo de cobertura de cada antena es de 1 km.

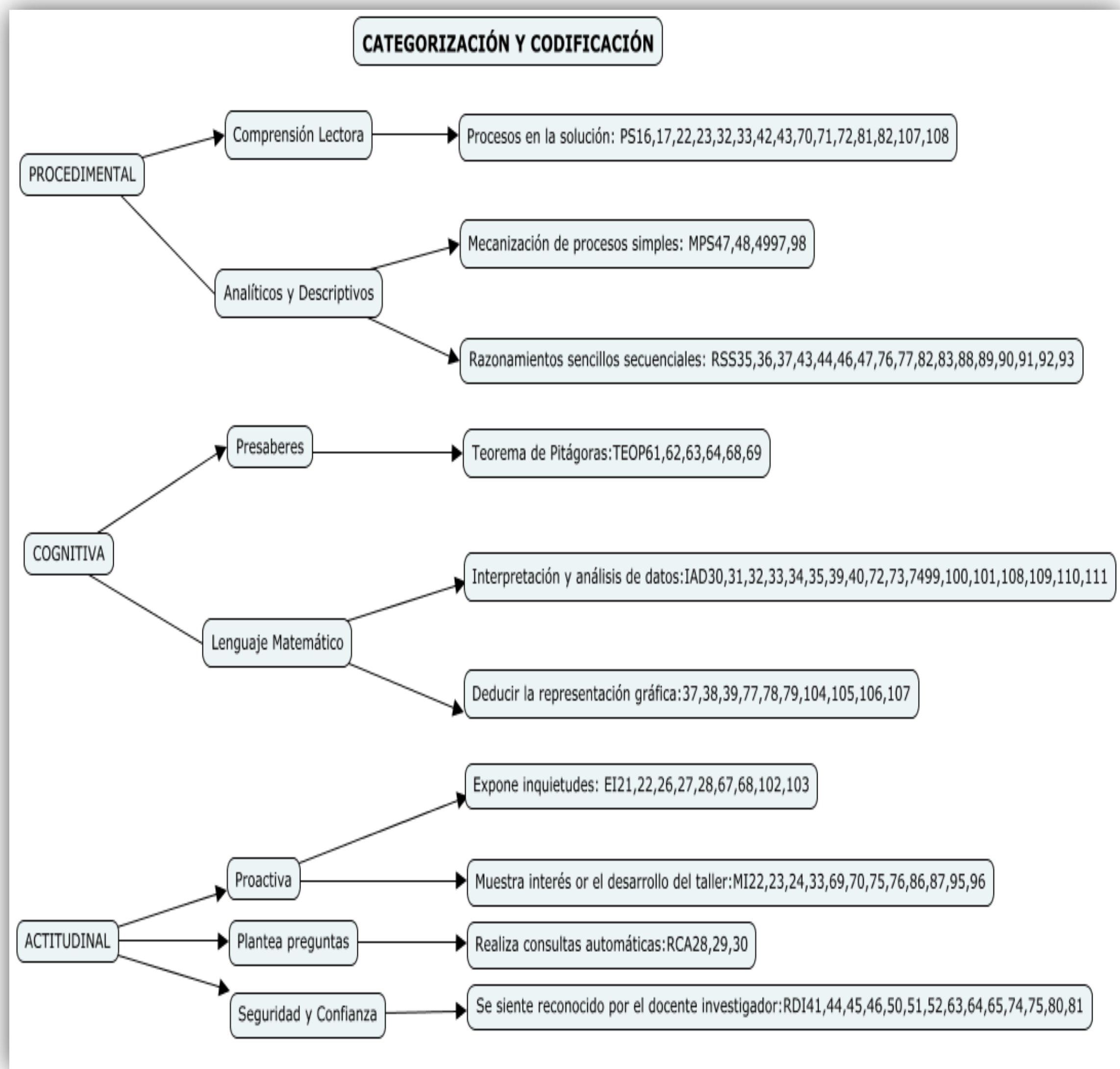
Interpretación y representación

1. Si la siguiente antena de repetición N está a 3 km de M, como se muestra en la figura, ¿en dónde debería ubicarse sobre la carretera un punto C que indique el alcance máximo de la antena N?[1]

Fuente: Unidad didáctica, actividad 2; Situación tres. Estudiante FMVP, 2016

Estos procesos analíticos y descriptivos que el estudiante realiza al usar mecanización de procesos simples (MPS) y razonamientos sencillos secuenciales (RSS) dan origen a otra categoría relevante en la aplicación de los instrumentos del taller diagnóstico y la unidad didáctica, seguidamente se visualiza el esquema mental, donde se describe lo mencionado:

Figura 16. Categorias del Analisis de Unidad Didactica.



Así mismo, en el enunciado de un problema trigonométrico, se requieren características importantes para entenderlos, luego al indagar sobre estas, el estudiante menciona al respecto:

> ***"Saber muy bien las ecuaciones, qué es un lado, reconocer la razón trigonométrica, saber las operaciones básicas, saber interpretar un problema"***
>
> *(*Entrevista, octubre 28: *estudiante* FKMVO)

Con esta respuesta, se vislumbró el proceso utilizado en la solución de la situación tres (ver, figura 15) del problema planteado, lo cual es importante porque se les permitió pensar y expresar la forma como resolverían el problema, como lo expresa Pozo citado por Mateos (2001, p. 49):

> "Es absolutamente preciso hacerle consciente al alumno de los procesos que emplea en la elaboración de conocimientos, facilitándole por todos los medios la reflexión metacognitiva sobre las habilidades de conocimiento, los procesos cognitivos, el control y la planificación de la propia actuación y la de otros, la toma de decisiones y la comprobación de resultados".

Luego para los estudiantes las características que son importantes en el enunciado de un problema trigonométrico están relacionadas con el "*tener los datos, que las figuras estén entendibles, el enunciado este claro y no enredado*"[18]; y cuando el enunciado no está acompañado de una imagen o dibujo entonces…"*el primer paso sería dibujarlos, después hallar los lados*"[19]

De esto se observa que, para los estudiantes era, y es, importante iniciar con problemas más sencillos y análogos respecto a uno nuevo, es decir, ir de lo particular a lo general.

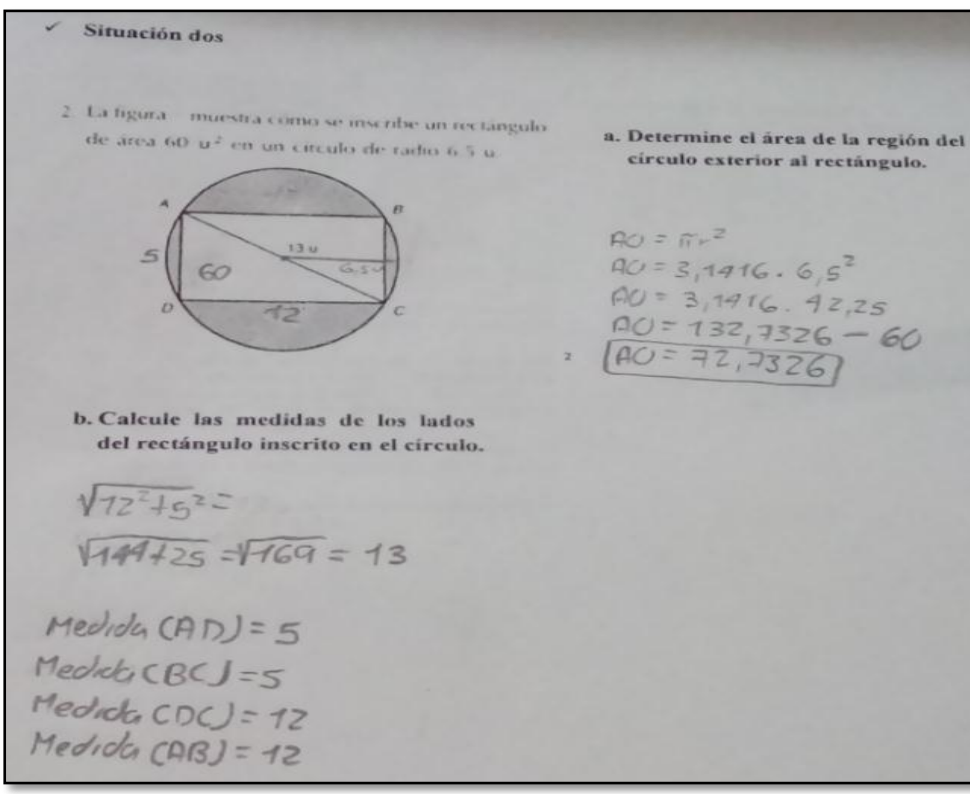
[18] Entrevista, octubre 28: *estudiante* MMAE
[19] Entrevista, octubre 28: *estudiante* MSPQ

Por esta razón, se identificó que la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de procesos generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones; al combinar la inducción con las analogías de un problema referente al problema que desean resolver, esto les dará pautas para llegar a su solución, porque como lo asegura Santos Trigo (1997, p. 53):

> *"la reducción de un problema a casos más simples es una estrategia que aparece frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos. La idea es considerar casos más simples que se derivan del problema original. Estos casos ayudan atacar el problema por partes. Posteriormente al considerar las soluciones parciales como un todo se obtendrá la solución del problema".*

Ejemplo de ello, se observa al estudiante MJEA:

Figura 17. Taller diagnóstico, Actividad 2: Situación tres



Fuente: Taller diagnóstico; Situación dos. Estudiante MJEA, 2015

Con respecto a la anterior figura, se analiza que en la parte **b** del problema, un grupo significativo de los estudiantes participantes utilizaron el concepto del Teorema de Pitágoras, para determinar los lados del rectángulo de forma correcta y creativa, ya que construyen una tripla pitagórica "$a^2 + b^2 = c^2$, $entonces \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$" a partir de su diagonal; es decir, no fue necesario plantear un sistema de ecuaciones de dos por dos, donde resulta una ecuación de grado cuatro, que puede ser reducida a grado dos y factorizada para poder determinar los lados del rectángulo. Así mismo, se resalta en el proceso de razonamiento sencillo secuencial que el participante utiliza de manera práctica una aplicación de un concepto de manera particular e ingeniosa, sin tener que resolver la situación en la forma convencional, esto destaca el uso de mecanización de procesos simples que permiten obtener los mismos resultados, que cuando se usan procesos generales, resaltando el razonamiento inductivo más que el deductivo.

Para ampliar esta idea, se hace referencia al manejo de las habilidades que había venido adquiriendo a través de los años el estudiante en la escuela. El poseer estas habilidades metacognitivas acompañadas de un conocimiento, le ha permitido ser recursivo y creativo en el momento de resolver problemas, no sólo en matemáticas, situación que se evidencia en la solución de las situaciones propuestas en el taller diagnóstico y la unidad didáctica.

Otro hallazgo, según lo registrado en la entrevista, es que los estudiantes presentan creencias respecto a la matemática, una de ellas es que la consideran como un proceso de mecanización sin darse cuenta que la matemática va hacia el desarrollo de un pensamiento lógico, crítico, reflexivo, deductivo e inductivo a través del cual desarrollará habilidades tales como creatividad, imaginación, reversibilidad, extrapolación e invención. De la misma manera, se evidencia que en el momento de cuestionar a los estudiantes sobre: ¿Qué considera difícil en el momento de resolver un problema?, el participante FMFV responde:

"en el momento de resolver un problema considero que es difícil, cuando vamos a despejar la variable para llegar a la respuesta"

(Entrevista, octubre 28)

Luego, es evidente que los estudiantes no han podido romper el paradigma de ver la matemática como un proceso terminado, lo que los conduce a exigir que el profesor les evalúe los mismos problemas desarrollados en clase, queriendo optar por una estrategia facilista que les evite analizar y proponer estrategias para resolverlos, quedándose únicamente en la repetición de un proceso dado por el docente en clase. Santos (1997). A su vez, Schoenfeld, citado por Santos Trigo (1997, p.43), cita un ejemplo de sus investigaciones donde afirma que:

> *"las ideas que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas moldean sus comportamientos en el estudio de esta disciplina y estas creencias provienen de los problemas usados en la clase, la forma de evaluación, las dinámicas de grupo y las tareas contribuyen directamente a que el estudiante desarrolle este tipo de creencias".*

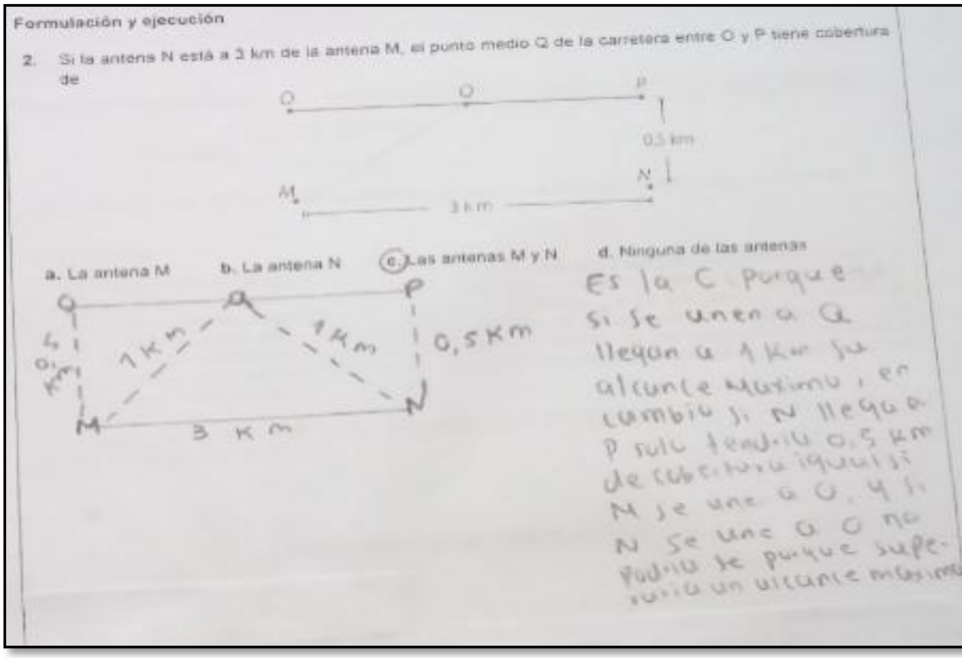
Del mismo modo, si los docentes caen en esta situación se pierde el sentido y la esencia de la matemática, nuevamente es importante resaltar que a través de la matemática, se debe formar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y de análisis respecto a las situaciones que se le planteen; he ahí la importancia de implementar las situaciones didácticas como estrategia metodológica, e incorporar en las practica pedagógicas Unidades Didácticas.

Según lo anterior, en la implementación de las herramientas utilizadas en el proceso de investigación realizada en el aula, un número no representativo de estudiantes encontraban relación entre la semejanza de triángulos y las razones trigonométricas en el contexto matemático, pero no en el contexto aplicativo. Es decir, los estudiantes mostraron una dualidad en el análisis de relaciones que matemáticamente son equivalentes al momento de resolver situaciones problema. Sus experiencias previas delinearon sus formas de razonar o explicar las diversas relaciones.

Entre los resultados de estudios dedicados a investigar este tipo de conocimiento de los estudiantes, se ha encontrado que muchas de las ideas simplistas que los estudiantes poseen al llegar al salón de clase, persisten a pesar de la instrucción formal que reciben en sus cursos.

Por consiguiente en matemáticas, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrentan a problemas donde sólo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, generalmente se observa cierta fluidez y eficiencia al resolverlos. Sin embargo, cuando se les pide explicar o interpretar cierta información, estos mismos estudiantes muestran serias dificultades (Santos, 1994, p. 44). Esto se identificó en una minoría de estudiantes que aplicaron conocimientos en una forma ritual; esto es, se mostraron poco seguros en el momento de tratar situaciones nuevas o diferentes aun cuando tenían el conocimiento base adecuado, para afrontar las mismas. Los estudiantes desarrollaron ideas de cómo trabajar ejercicios matemáticos, en base a procedimientos que abstraen de su propia experiencia, como se observa en la figura 18, donde los estudiantes no obtienen una interpretación clara del problema a pesar del uso de conceptos que se requiere para la solución del mismo; además, los mismos realizaron una interpretación y representación del enunciado que no corresponde a la comprensión de la pregunta, donde se visualiza el uso de los conceptos de las razones trigonométricas, sin tener en cuenta que no se requiere su aplicación, luego su procedimiento y respuesta son incorrectos, descritos a continuación:

Figura 18. Unidad didáctica, Actividad 2: Situación tres



Formulación y ejecución

2. Si la antena N está a 3 km de la antena M, el punto medio Q de la carretera entre O y P tiene cobertura de

a. La antena M b. La antena N c. Las antenas M y N d. Ninguna de las antenas

Fuente: Unidad didáctica, actividad 2; Situación tres. Estudiante FSNC, 2016

Otra estrategia metacognitiva implícita en el proceso que se observo fue revisar y verificar lo que iban haciendo los estudiantes, visto así, que autores como Zimmerman y Schunk, citados por Mateos (2001, p.43), lo denominan aprendizaje auto-regulado, donde esta supervisión permite al estudiante, hallar posibles errores cometidos en el proceso de solución de un problema o darle mayor seguridad en lo que está realizando. Este ejercicio se pudo evidenciar en el manejo de la Unidad Didáctica en la actividad uno, al solucionar la situación uno y dos, realizado en grupos de 4 estudiantes, donde para implementar la situación didáctica (formulación), el representante del equipo debatía, comunicaba y argumentaba sus ideas frente a los demás, y luego de concluida la fase de confrontación, el docente investigador realizó una retroalimentación.

De manera que la auto revisión del camino escogido, puede permitirle al estudiante analizar, si esta estrategia es la más adecuada o no; generando una posible reestructuración o cambio total de la estrategia seleccionada, situación que se presenta cuando un proceso lógico no le es claro al estudiante, para argumentar el siguiente paso que se da en la solución del problema. Ahora bien, de acuerdo con Zimmerman, citado también por Mateos (2001, p. 45):

> "*uno de los rasgos característicos del aprendizaje auto-regulado es el uso que hace el sujeto de las estrategias con el propósito de optimizar su aprendizaje. Aunque tampoco podemos encontrar una postura unánime a la hora de definir las estrategias de aprendizaje, la mayoría de autores atribuyen a las estrategias las siguientes propiedades: 1) son procedimientos o secuencias integradas de acción 2) que constituyen planes de acción 3) que el sujeto selecciona entre diversas alternativas 4) con el fin de conseguir una meta fijada de aprendizaje. En la supervisión del plan trazado por los estudiantes, tienden a ser más concientes de los errores que cometen y regulan su actuación ajustando las estrategias planificadas o modificándolas, cuando es necesario. En cambio los estudiantes novatos, no realizan esta auto revisión, y suelen actuar de un modo menos sistemático, sin supervisar su actuación". (Weinstein y Mayer, 1986; Nisbet y Shucksmith, 1986; Pozo, 1990; Monereo 1994).*

La metacognición mantiene también relaciones muy estrechas con el aprendizaje auto-regulado y las estrategias de aprendizaje. La idea básica para las teorías del aprendizaje auto-regulado es que el aprendiz experto o competente es un participante intencional y activo, capaz de iniciar y dirigir su propio aprendizaje, y no un aprendiz reactivo. El aprendizaje auto-regulado está, por tanto, dirigido siempre a una meta y controlado por el propio sujeto que aprende según Mateos (2001).

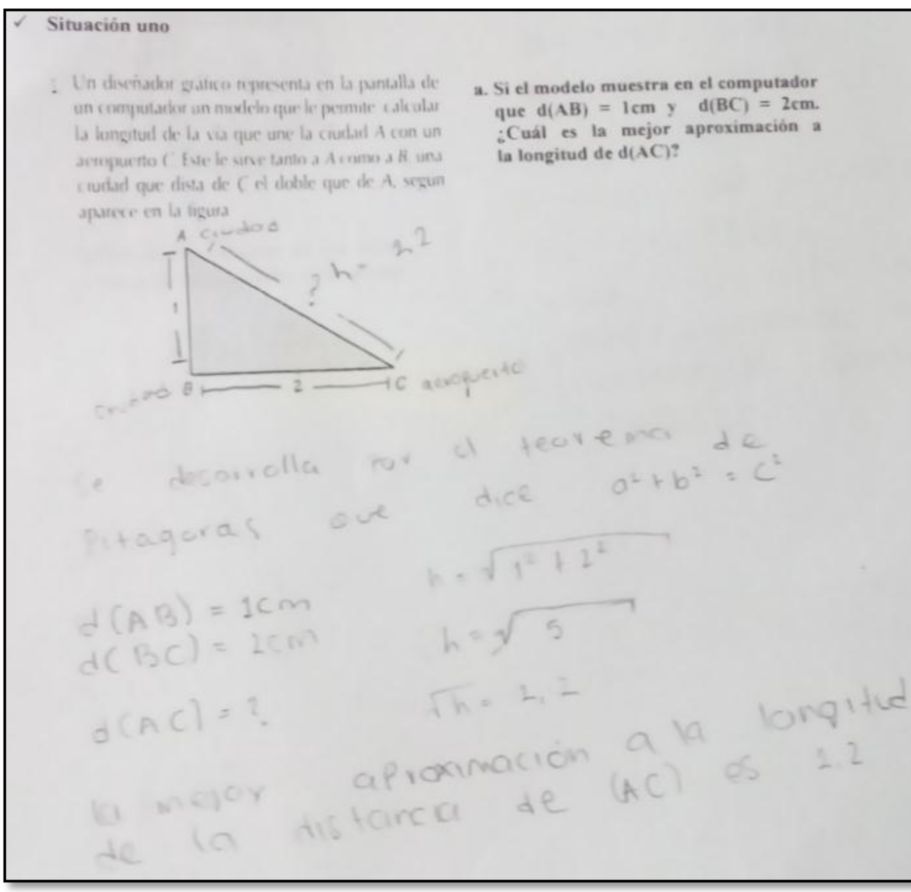
El aprendizaje auto-regulado se daba en algunos de los estudiantes de cada grupo que se trabajó en la Unidad Didáctica, en la actividad uno, ya que los representantes de cada equipo eran capaces de replantear o cambiar una estrategia seleccionada cuando está, presentaba inconsistencia en el desarrollo del proceso lógico que aplicaban (fase de confrontación), para resolver la situación uno o dos que debían sustentar frente a los demás; esto refleja la iniciativa del estudiante y, por tanto, madurez en la capacidad de revisar y confrontar los resultados que iba obteniendo con respecto a la pregunta del problema, con lo mencionado se reafirma el éxito de las situaciones didácticas implementadas en la Unidad Didáctica.

4.1.4 Presaberes. El conocimiento del estudiante se refiere al que se tiene de sí mismo, y al de sus capacidades y limitaciones cognitivas, así como de otros estados y características que incluye sus presaberes, que pueden afectar su rendimiento en la solución de situaciones problema. Esta categoría de conocimientos metacognitivos permite elegir estrategias más adecuadas para tener una mejor comprensión, frente al desarrollo de razonamientos lógicos que relacionan las preconcepciones con respecto a las nuevas, confrontándolas y validándolas de acuerdo a las estrategias exitosas o poco exitosas utilizadas en su cotidianidad.

Por esta razón, los estudiantes se inclinan por el sentido dado por D´ Amore (1999), considerando las misconcepciones, también como "concepciones momentáneas no correctas, en espera de organización cognitiva, más elaborada y crítica. Atención: el estudiante, sin embargo, no lo sabe y por lo tanto considera que las suyas, aquellas que para el investigador son misconcepciones, son para él concepciones absolutamente verdaderas. Por lo tanto, es el adulto quien puede determinar cuándo las concepciones elaboradas y asumidas como propias por los estudiantes son misconcepciones. Llamarlas errores es demasiado simplista y banal, no se tata de castigar, de evaluar negativamente; se trata, en cambio, de dar los elementos para la elaboración crítica" (D´Amore, 1999,2003b).

Teniendo en cuenta lo anterior; se evidencia del taller diagnóstico (situación uno), según figura 19, un número representativo de estudiantes, quienes realizaron procedimientos analíticos correctos, identificando la incógnita y la relación entre la longitud de los lados del triángulo, es decir, reconocen los catetos y la hipotenusa, mostrando así la diferencia entre ellos; luego se evidencia una interpretación y argumentación valida del Teorema de Pitágoras. Además, al escribir la solución a la pregunta del problema, realizan una conexión entre la respuesta hallada y la pregunta, teniendo en cuenta la aproximación que le realizan al valor numérico encontrado; pero otro grupo representativo, no evidencia conexión entre la pregunta y la solución planteada, pues simplemente se usa la fórmula de acuerdo con la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

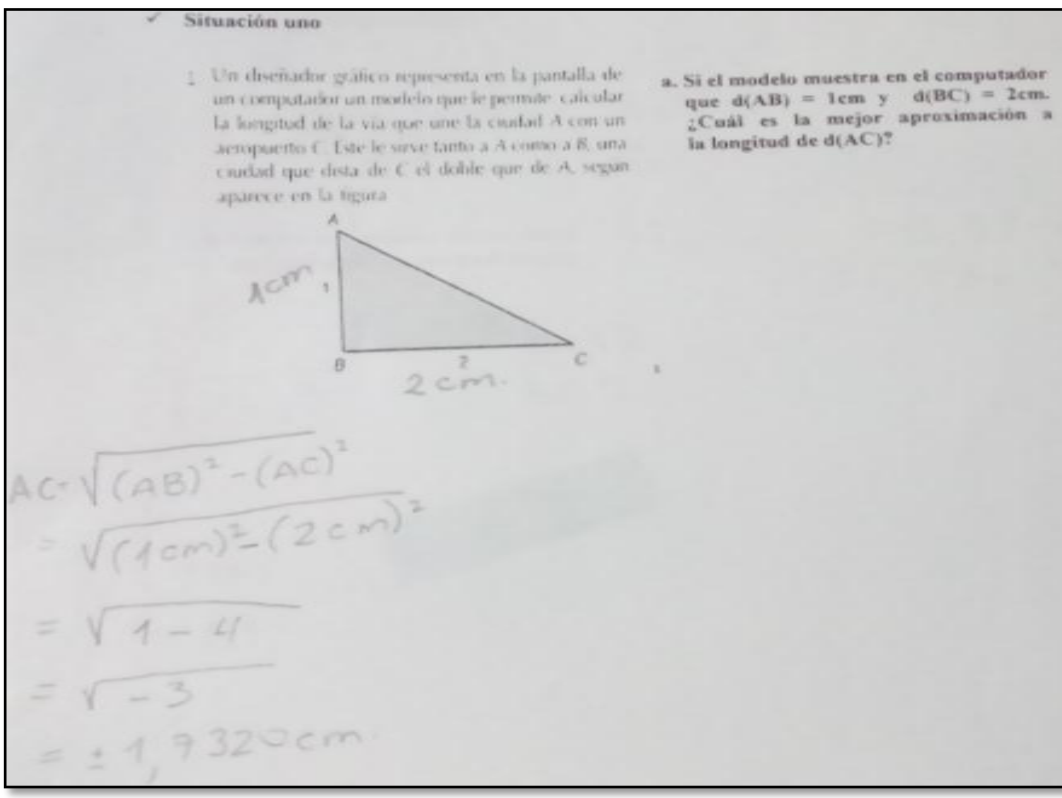
Figura 19. Taller diagnóstico: Situación uno



Fuente: Taller diagnóstico; Situación uno. Estudiante FJTT, 2015

También, se evidencia un número no significativo de la población estudio, quienes presentaron una noción leve del Teorema de Pitágoras asociado con las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, pero la relación conceptual entre el cateto y la hipotenusa del triángulo no es clara, y por consiguiente no están bien utilizadas en la fórmula. La mitad del grupo mencionado, refleja un error conceptual en términos numéricos y desconocen la propiedad “todo número elevado al cuadrado siempre es positivo en el conjunto de los números reales”, por lo tanto no existe la raíz cuadrada de números negativos, situación que se evidenció en el desarrollo procedimental de algunos estudiantes, ver a continuación:.

Figura 20. Taller diagnóstico: Situación uno



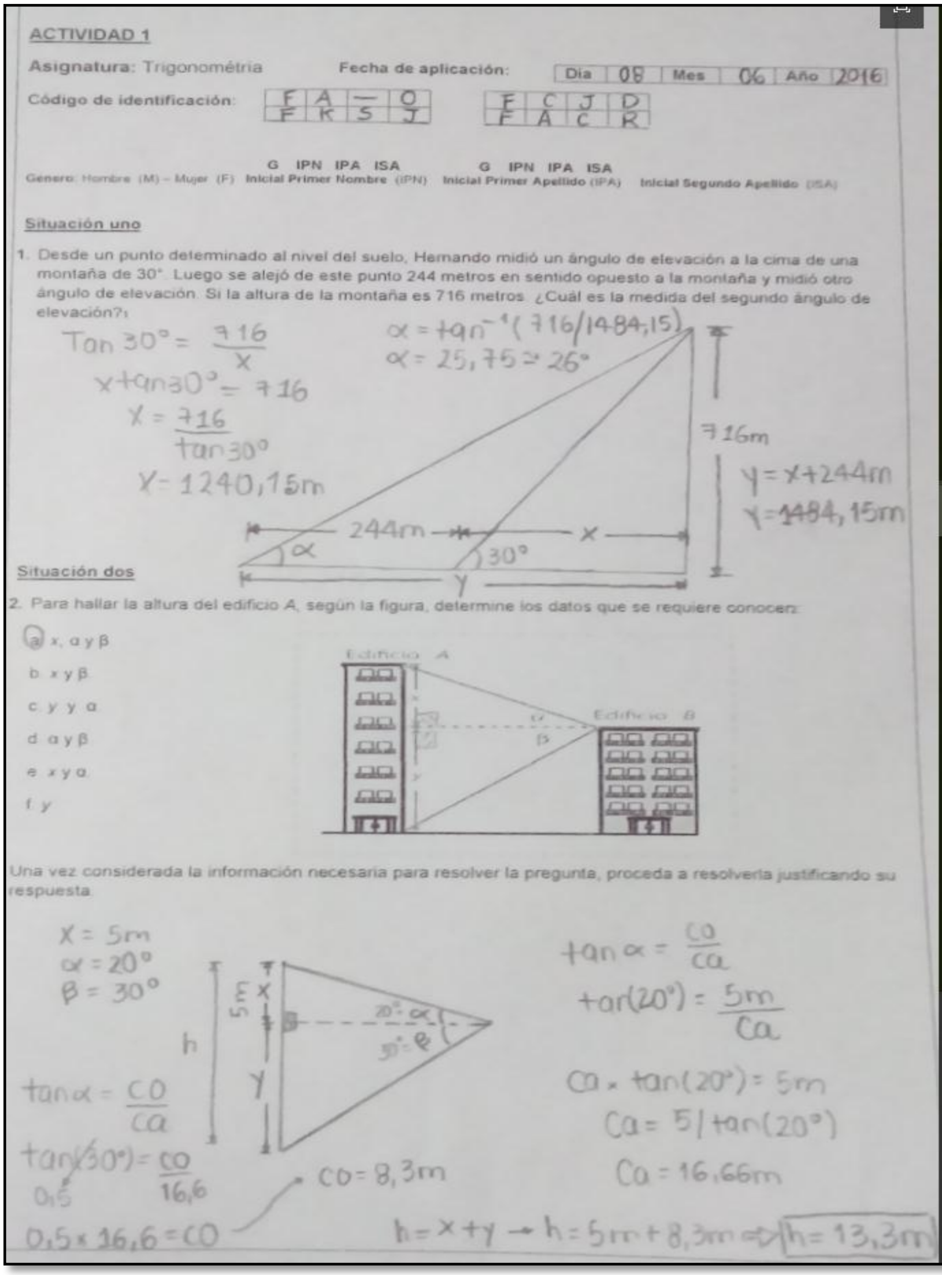
Fuente: Taller diagnóstico; Situación uno. Estudiante FKSJ, 2015

De la misma manera, según Usaré a D´ Amore (2003b) (que tiene no por casualidad, un prefacio justamente de Guy Brousseau) para entrar inmediatamente en el tema: “(…) obstáculos es la idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para afrontar problemas (incluso sólo cognitivos), precedentes, pero que se releva ineficaz cuando se intenta aplicarla a un nuevo problema. Dado el éxito obtenido (es más: con mayor razón a causa de éste), se tiende a conservar la idea ya adquirida y comprobada y, no obstante el fracaso, se trata de salvar; pero este hecho termina por ser una barrera hacia sucesivos aprendizajes”[20].

Por otro lado, el teórico D´ Amore (2003b), nos reitera, que “cada docente elige un proyecto, un currículo, un método, interpreta de manera personal la transposición didáctica, según sus convicciones ya sean científicas como didácticas: él cree en esa elección y la plantea a la clase porque piensa que es eficaz; pero lo que es efectivamente eficaz para algún estudiante, no está dicho que lo sea para todos. Para estos otros, la elección de este proyecto se revela como un obstáculo didáctico”[21], he aquí la importancia de la aplicación de diversas estrategias metodológicas, que involucren a todos los estudiantes, que logré captar su atención y mejore los procesos de aprendizaje, ejemplo de ello, se evidencia en la implementación de las situaciones didácticas, a través de la Unidad Didáctica, donde los cinco grupos conformados, reflejaron un apropiamiento y refuerzo de sus presaberes, relacionados con los adquiridos en el desarrollo del ejercicio, por consiguiente arrojo resultados efectivos que estimularon los procesos de análisis lógico reflexivo, el pensamiento hipotético deductivo, la explicación, la búsqueda de argumentos, de alternativas, y generación de nuevas ideas, los que se pueden evidenciar a continuación.

[20] FANDIÑO, PINILLA, Martha Isabel. Las Fracciones, Aspectos Conceptuales y Didácticos. Didácticas Magisterio. Bogotá. 2009. Pág. 171.
[21] Ibíd., Pág. 171

Figura 21. **Unidad didáctica, Actividad 1**: **Situación uno**


ACTIVIDAD 1

Asignatura: Trigonométria   Fecha de aplicación: Día 08 Mes 06 Año 2016

Código de identificación: F A — O / F K S J   F C J D / F A C R

G IPN IPA ISA   G IPN IPA ISA

Genero: Hombre (M) – Mujer (F) Inicial Primer Nombre (IPN) Inicial Primer Apellido (IPA) Inicial Segundo Apellido (ISA)

Situación uno

1. Desde un punto determinado al nivel del suelo, Hernando midió un ángulo de elevación a la cima de una montaña de 30°. Luego se alejó de este punto 244 metros en sentido opuesto a la montaña y midió otro ángulo de elevación. Si la altura de la montaña es 716 metros. ¿Cuál es la medida del segundo ángulo de elevación?:

Tan 30° = 716 / x
x·tan30° = 716
X = 716 / tan30°
X = 1240,15m

α = tan⁻¹(716/1484,15)
α = 25,75 ≃ 26°

716m
y = x+244m
Y = 1484,15m
244m   x   α   30°   y

Situación dos

2. Para hallar la altura del edificio A, según la figura, determine los datos que se requiere conocer:

a. x, α y β
b. x y β
c. y y α
d. α y β
e. x y α
f. y

Edificio A   Edificio B

Una vez considerada la información necesaria para resolver la pregunta, proceda a resolverla justificando su respuesta

X = 5m
α = 20°
β = 30°

tan α = CO / ca
tan(20°) = 5m / Ca
Ca × tan(20°) = 5m
Ca = 5/tan(20°)
Ca = 16,66m

h   5m x   y   20° α   30° β

tan α = CO / ca
tan(30°) = CO / 16,6
0,5
0,5 × 16,6 = CO
CO = 8,3m

h = x + y → h = 5m + 8,3m ⇒ h = 13,3m

Fuente: Unidad didáctica, Actividad 1; Situación uno. Estudiante FAO-FKSJ-FCJD-FACR. 2016

En lo que se refiere en la Educación Matemática, es importante encontrar los mecanismos regulares que presentan los estudiantes en la construcción de cada concepto matemático, en la forma como se estructura, puesto que el educando cuando actúa no presenta un número de ideas que ilumina el problema, sino que en la solución de este, presenta toda una estructura que se manifiesta desde la forma en que la entiende, la forma en que la usa y la explica, y el cómo termina formalizándola. Es por eso, que se debe mirar el aprendizaje como “un proceso que se desarrolla en el individuo; donde los educadores no pueden forzarlo, ni imponerlo, ni realizarlo por los estudiantes, pero sí pueden facilitarlo y potenciarlo mediante las condiciones adecuadas” (Tausch, 1981; 300), esto con el fin último, de que en los procesos de enseñanza-aprendizaje los estudiantes, guiados por el docente, afronten soluciones de problemas nuevos para ellos, a causa de lo cual aprenden a adquirir conocimientos de manera independiente, a emplear dichos conocimientos y a dominar la experiencia de la actividad creativa, experiencia vivida en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

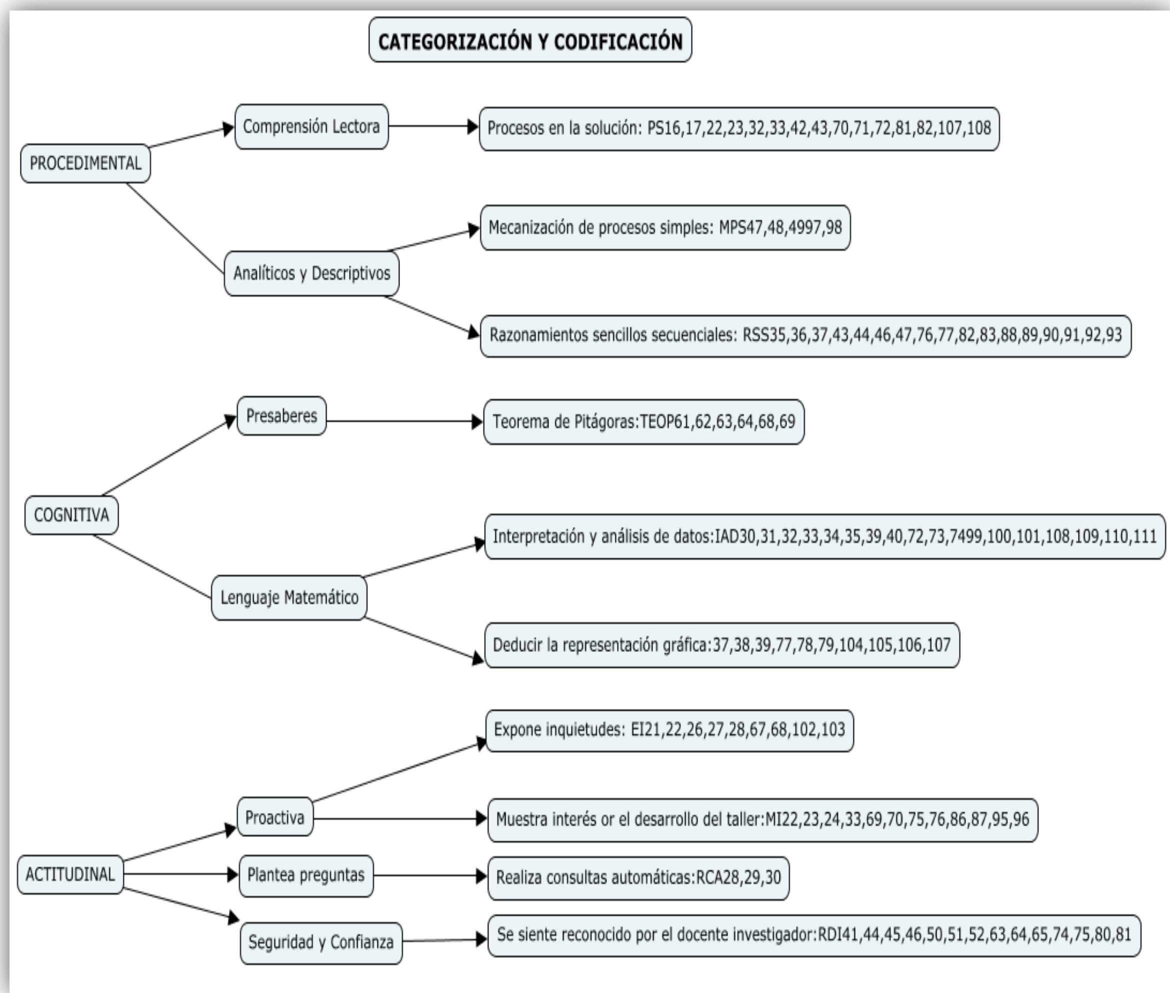
4.1.5 Actitudinal. Parte fundamental del proceso de investigación fue el hallazgo de las actitudes y acciones que fluctuaron en la participación de los procesos metodológicos de intervención (Taller Diagnóstico y Unidad Didáctica), allí se visualizó como los estudiantes resaltaron diversas emociones al formar parte de un trabajo conjunto, denotando actitudes que se evidenciaron al indagar sobre el uso, entendimiento y aportes que les brindo la herramienta virtual, propuesta en la unidad didáctica, en la que respondieron:

> ***“Claro que sí, ya que me pareció muy didáctica y eso hace que uno le ponga más ánimo, además el manejo fue fácil, entendí todo gracias al profesor y me aclaró muchas dudas que tenía desde antes, para mi cumplió todas las expectativas”.***

(Unidad didáctica, estudiante FSNC, junio 2016)

A su vez, en la implementación de la unidad didáctica, emergen categorías como actitud proactiva, seguridad y confianza, evidenciadas en la forma como el estudiante expone inquietudes (EI), muestra interés por el desarrollo del taller (MI), realiza consultas automáticas (RCA) y se siente reconocido por el docente investigador (RDI), a continuación se muestra su relevancia en la figura 22:

Figura 22. Categorias del Analisis de Diario de Campo de Unidad Didactica



De acuerdo a lo mencionado, es importante que los estudiantes muestren interés en las actividades que se desarrollan en el salón de clases, situación que permite proceso dinámico de aprendizaje y enseñanza, según la metacognición, Borkowsky y Schneider citado por Mateos (2001, p. 46), elaboraron un modelo de aprendizaje estratégico que “postula que la autorregulación que llevan a cabo los aprendices competentes, resulta de la coordinación de tres componentes entre ellos, el conocimiento de la eficacia de las estrategias (creencias motivacionales, tales como la creencia en la posibilidad general de modificar las propias capacidades mediante el esfuerzo o la creencia en la propia eficacia)”.

Estos autores defienden la idea de que el desarrollo de la metacognición inicialmente depende del desarrollo de un sistema motivacional positivo, caracterizado por el sentido de auto-eficacia, la autoestima positiva y las atribuciones del éxito a factores controlables tales como el propio esfuerzo, más que a factores incontrolables, como la habilidad o la suerte y la creencia en que el propio esfuerzo es instrumental para conseguir resultados exitosos”.

Para argumentar lo anterior, en el inicio del desarrollo de la unidad didáctica, se observó que cuando los estudiantes exploraban la herramienta digital (Red de Apoyo Digital – RAD, ver figura 23), la mayoría de los mismos, tomaban apuntes realizando pequeños resúmenes de lo leído, solicitaban hojas blancas para solucionar los ejercicios que se planteaban en las explicaciones digitales, como en las actividades interactivas; para ello usaban calculadora, se apoyaban entre compañeros de al lado, de acuerdo a sus interpretaciones, donde se evidenció un trabajo colaborativo y cooperativo entre ellos, mostraban interés en la herramienta, por lo novedosa, creativa y generaba espacios de confrontación de acuerdo a sus presaberes, además, usaban estrategias para su comprensión como, el indagar al profesor investigador, de manera abierta y espontánea. También se logró percibir espacios de libertad, participación activa entre los estudiantes y el profesor en los momentos en que surgían dudas y cuestionamientos en las evaluaciones digitales. En consecuencia, el estudiante se sintió reconocido por el docente investigador, cuando sus inquietudes eran respondidas y se les brindaba la atención de forma individual.

Por otra parte, todos los estudiantes presentaron interés por abordar y conocer la herramienta, pues en ella se encontraron explicaciones digitales, actividades interactivas y evaluaciones digitales, mostrando una actitud dinámica y participativa, donde este instrumento captó su atención y apropiamiento, además, facilitó el aprendizaje, enseñanza y evaluación de los procesos cognitivos, reforzando a su vez sus presaberes.

Figura 23. Herramienta virtual RAD, implementada en la Unidad Didactica.

Fuente: Recuperado agosto 11 de 2016: http://www.reddeapoyodigital.com/

Del mismo modo, los estudiantes indagan otros elementos que tiene la herramienta didáctica como las “notas de apuntes”, donde se describen conceptos importantes y relevantes en el análisis de un problema. También se evidencia, al maestro investigador como un apoyo y más funcional cuando monitorea el trabajo de los estudiantes, sus presaberes: ¿Qué saben, y qué deben reforzar?, es decir, la herramienta permite consecutivamente evaluar el aprendizaje del estudiante.

Las actividades interactivas van valorando el nivel de satisfacción logrado, situación descrita a continuación:

> ***"Sí es de fácil manejo, entendible y reforzó bien los preconceptos que se tienen sobre la trigonometría, además se pueden aprender nuevos temas con las explicaciones digitales, junto con las actividades y las evaluaciones"***
>
> (Unidad didáctica, estudiante MJFR, junio 2016)

> ***"Entendible, ya que tenía cosas claras, surgieron dudas pero el material ayuda a resolverlos, al igual que las intervenciones del profesor"***
>
> (Unidad didáctica, estudiante FMFV, junio 2016)

A su vez, se percibió el trabajo en equipo, el liderazgo por parte de algunos integrantes de cada grupo, se refleja manejo de presaberes, solidaridad cognitiva, es decir, algunos explicaban o aclaraban dudas de los temas vistos entre ellos mismos, fortaleciendo la capacidad receptiva y de confiabilidad frente a la capacidad cognitiva. Se reafirma espacios de indagación del estudiante hacia el docente investigador, quien retroalimentó los temas. Además, se observaron avances significativos con respecto al manejo y uso de presaberes, hubo iniciativa y creatividad frente a las estrategias usadas al resolver los problemas. A su vez, las opiniones de los estudiantes y la observación del docente investigador llevó a corroborar que existen factores motivacionales que influyen en el aprendizaje y en la continuidad de los procesos que se llevan a cabo en la metodología y estrategias que se desarrollan en el salón de clase.

También se analizó la necesidad que presentaban los estudiantes frente a la motivación extrínseca que resalta los aspectos positivos durante el desarrollo de la Unidad Didáctica. La motivación extrínseca, resaltó más los aspectos positivos que se pueden presentar en los estudiantes, creando actitudes proactivas, de motivación y de seguridad. De igual manera, se resaltó las habilidades que mostró el estudiante experto y se tuvo en cuenta los esfuerzos que realizaron algunos por mostrar sus capacidades a pesar de no tener las habilidades matemáticas suficientes. Por consiguiente, los estudiantes requieren la necesidad de que los profesores los estimulen, los animen para así sentirse motivados hacia las actividades propuestas en clase, por ello la importancia del rol del docente, al igual que la implementación de las situaciones didácticas en el desarrollo de una Unidad Didáctica, como estrategias metodológicas que se utilizan para generar un aprendizaje significativo.

> ***"Sí, fue fácil el manejo, y me gusto, que al verse digitalmente aprendí o más bien capté el tema mucho más rápido, además, al profesor intervenir cuando tenía alguna duda, fue rápida y completa esta explicación"***

(Unidad didáctica, estudiante FLJ, junio 2016)

Con lo anterior Alexander Ortiz (2009), reafirma que la motivación es la etapa inicial del aprendizaje, el cual consiste en crear una expectativa que mueve el aprendizaje y que puede tener origen interno o externo. Mediante la categoría de seguridad y confianza, que emerge de lo actitudinal, se identifica que en la motivación para que un contenido cree necesidades, tiene que estar identificado con la cultura, vivencia e interés del estudiante y solo así creará las motivaciones y valores que le permitan construir un instrumento de educación. Motivar al estudiante es significar la importancia que tiene para él la apropiación del objeto de la cultura para la solución de los problemas y establecer nexos afectivos entre el estudiante y el objeto de la cultura, para lo cual ha de referirse a la cultura que el estudiante ya tiene.

Por esta razón, si los maestros empezaran por motivar a los estudiantes, quizás su labor iniciaría por buen camino y las dificultades y el rechazo hacia las matemáticas sería menos frecuente en el salón de clase, es decir, si los profesores se preocuparan más en las praxis por el “yo” de cada estudiante el proceso de enseñanza-aprendizaje formaría, finalmente, personas más humanas, consecuentes en sus actos y seguras de sí mismas.

Por otro lado, una parte fundamental de la Unidad Didáctica era el aprendizaje colaborativo (se trabajó en grupos, la actividad uno), visto como una estrategia más con la que cuenta el estudiante y el profesor en el aula, en su sentido básico, se refiere a la actividad de pequeños grupos desarrollada en el salón de clase que pretende favorecer el aprendizaje y desarrollo de determinadas estrategias. No solo el aprendizaje colaborativo es más que el simple trabajo en equipo por parte de los estudiantes, la idea que lo sustenta es sencilla: los estudiantes forman “pequeños equipos” después de haber recibido instrucciones del docente; dentro de cada equipo los estudiantes intercambian información y trabajan en una tarea hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración.

Por esta razón y comprobando los resultados de esta forma de trabajo con modelos de aprendizaje tradicionales, se ha encontrado que los estudiantes aprenden más cuando utilizan el aprendizaje colaborativo, recuerdan por más tiempo (memoria a largo plazo), desarrollan habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico, se sienten más confiados, aceptados por ellos mismos y por los demás (Millis, 1996).

Respecto a este tópico, la importancia del aprendizaje colaborativo como una de las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver problemas se evidenció, el apoyo entre compañeros de al lado, de acuerdo a sus interpretaciones, evidenciando un trabajo colaborativo y cooperativo entre ellos, donde se dio un espacio abierto al diálogo y a la participación activa en las diferentes situaciones planteadas en la Unidad Didáctica. Es así como, la implementación de las situaciones didácticas y el enfoque de Osborne, en esta, fue una gran instrumento en la resolución de las situaciones, a través de la cual se negociaron nuevos significados, interpretaciones, conceptos y estrategias repercutiendo positivamente en el aprendizaje de los estudiantes.

Para sustentar lo anterior, las investigaciones de Johnson y Johnson (1997) sobre el aprendizaje cooperativo aportan elementos que siempre están presentes en éste, los cuales son:

- **Cooperación.** Los estudiantes se apoyan mutuamente para cumplir un doble objetivo: lograr ser expertos en el conocimiento del contenido, además de desarrollar habilidades de trabajo en equipo. Los estudiantes comparten metas, recursos, logros y entendimiento del rol de cada uno. Un estudiante no puede tener éxito a menos que todos en el equipo tengan éxito.
- **Responsabilidad.** Los estudiantes son responsables de manera individual de la parte de la tarea que les corresponde. Al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponden a los compañeros.
- **Comunicación.** Los miembros del equipo intercambian información importante, se ayudan mutuamente de forma eficiente y efectiva, ofrecen retroalimentación para mejorar su desempeño en el futuro y analizan las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad en la solución de problemas.

Del mismo modo, el trabajo en equipo permite no sólo que los estudiantes aprendan a resolver juntos los problemas sino que desarrollen habilidades de liderazgo, comunicación, confianza, toma de decisiones y solución de situaciones problema, fortalecido en la fase de confrontación, realizada en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

De manera, que el aprendizaje de los estudiantes es mayor cuando el tipo de ayuda es de un nivel de elaboración alto y hace referencia a aspectos del proceso de resolución del problema (Webb, 1989) citado por Pifarré (2001, p.5). Este tipo de ayuda beneficia tanto al estudiante que la ofrece como al que la recibe; la correlación de la ayuda recibida y el aprendizaje que los diferentes miembros del grupo obtienen, depende de la calidad de la ayuda recibida y de la adecuación de la misma.

Además, de desarrollar habilidades sociales y de trabajo en equipo, los grupos pequeños deben cumplir con actividades académicas asociadas a la solución de problemas, lo que incluye: hacer análisis, comprobar el nivel de comprensión, construir una representación, hacer estimaciones, formular y generar preguntas, hacer listados y predicciones, presentar información, hacer razonamientos, entre otros. Todo esto requiere de un tiempo adecuado para que los estudiantes puedan trabajar en equipo, porque al principio los equipos trabajan lentamente, deben analizar lo que funciona y lo que no funciona, llegar a un consenso y formular opiniones. Una vez que los estudiantes se acoplan al proceso, su nivel de retención y de pensamiento crítico se incrementa al punto de que pueden avanzar más rápidamente (Prescott, 1996). Citado por Pifarré (2001).

También, las habilidades que tengan los estudiantes de argumentación, defensa, capacidad crítica y escucha permitirán que el ambiente de trabajo en equipo sea armónico ya que contribuirá al trabajo individual de los integrantes del grupo, situación reflejada en los representantes de cada equipo. Finalmente, todos estos factores estuvieron presentes en el proceso de ejecución de la Unidad Didáctica, aplicado incluso en la retroalimentación realizada por el docente investigador, al culminar la actividad uno. Por consiguiente la implementación de las situaciones didácticas, en la Unidad Didáctica, favoreció en el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, y contribuyó como aporte metodológico en la práctica pedagógica del docente.

5. CONCLUSIONES

La experiencia investigativa permitió no solo cambiar el enfoque metodológico en las practicas pedagógicas del docente, sino incorporar como estrategia la Unidad Didáctica a través de la implementación de las situaciones didácticas, para buscar cambios significativos en los procesos actitudinales, cognitivos y procedimentales en la enseñanza de las matemáticas, y formas de aprendizaje que el estudiante pueda mostrar avances en el enfoque de resolución de problemas, siendo esto reflejado en los resultados de las pruebas Saber Once.

El trabajo condujo a reflexionar sobre como los cambios metodológicos contribuyen en el quehacer profesional del docente y en el desempeño académico del estudiante, que termina generando mejoramiento en la calidad de la educación, que no solo abre camino hacia nuevas investigaciones en este campo: Cómo a través de las situaciones didácticas el educando puede obtener un dominio satisfactorio en el lenguaje matemática, y Cómo mejorar sus niveles de metacognición para que desarrolle ideas novedosas donde reformule o diseñe sus propios problema, esto permite que sea proactivo frente a las competencias científicas. A continuación se presentan las conclusiones de la investigación:

- La implementación de las situaciones didácticas, en la Unidad Didáctica, favoreció en el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, y contribuyó como aporte metodológico en la práctica pedagógica del docente.
- El uso de las situaciones didácticas en la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, favoreció en los estudiantes su nivel de interpretación (comprensión lectora y lenguaje matemático) y argumentación (presaberes y razonamientos sencillos secuenciales) en la resolución de problemas, esto se evidenció en los resultados satisfactorios

alcanzados en las pruebas saber once 2016, donde el promedio de desempeño en matemáticas superó el 61% a nivel nacional.

- La unidad didáctica diseñada e implementada en la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, permitió a los estudiantes estar en un ambiente matemático donde se desarrolló actitudes, métodos y formas de razonamiento de la disciplina de manera gradual y continua, además esta propuesta metodológica motivo a los educandos a realizar formulación y evaluación de preguntas, problemas, conjeturas, argumentos y explicaciones como aspectos de una práctica social, con el fin de encontrar sentido y conexión de las ideas matemáticas.
- El análisis detallado, la concertación de ideas y los procesos de solución fueron posibles en los grupos, facilitando la solución de las situaciones, esto gracias al desarrollo de las situaciones didácticas dentro del marco metodológico, en la implementación de la Unidad Didáctica, logrando así una comprensión lectora.
- La falta de comprensión de lectura y el manejo del lenguaje matemático, en el proceso pedagógico no incluye una metodología acorde a las necesidades del aprendizaje requerido.
- La importancia del rol del docente, y la implementación de las situaciones didácticas en el desarrollo de una Unidad Didáctica, como estrategia metodológica, se debería utilizar para generar un aprendizaje significativo.
- El trabajo en equipo se debería motivar, pues es donde se establecen metas, se evalúan y confrontan estrategias e identifican cambios cognitivos, procedimentales y actitudinales, que deben realizarse para mejorar el desempeño en las actividades de clase.
- Dentro de las estrategias metacognitivas, se tuvo la oportunidad de observar que para los estudiantes, era muy valioso ser motivados por los profesores, compañeros y personas que los rodean, ya que esto eleva su autoestima, se vuelven más proactivos y los hace sentir que son capaces de resolver situaciones problemáticas.

- Se observó en algunos estudiantes, la dificultad de resolver situaciones problemas debido a que no entendían el lenguaje matemático empleado, en los enunciados; tal fue el caso de las palabras: círculo, circunferencia, cuerda, ángulo de elevación, perpendicularidad, alcance máximo, entre otros, además del manejo de presaberes.
- Cuando los estudiantes terminaban de leer el enunciado de un problema (comprensión lectora), generalmente buscaban relacionar los datos con la pregunta planteada, y así resolverlo, ya sea simplificando el problema inicial a uno más sencillo o relacionándolo con otro realizado por el profesor en clase; permitiendo la organización de los procesos en la solución, mecanización de procesos simples y razonamientos sencillos secuenciales que facilita determinar la solución al problema planteado.
- La retroalimentación dada en la Unidad Didáctica en la fase de confrontación, permitió entre el docente investigador y estudiantes, un ambiente de confianza, facilitando un conocimiento más a fondo de las concepciones que tienen los estudiantes, sus falencias y aciertos sobre las estrategias que emplearon al resolver situaciones problema.
- Finalmente, la implementación de las Situaciones Didácticas, como estrategia metodológica generó en los estudiantes cambios positivos actitudinales, además de los cognitivos y procedimentales, resaltando el uso de la herramienta virtual en el desarrollo de la Unidad Didáctica, la cual posibilitó también, el mejoramiento en el proceso de enseñanza y aprendizaje en forma dinámica, activa y participativa.

6. RECOMENDACIONES

- Se requiere reevaluar las metodologías implementadas en el salón de clases, que permitan reestructurar las prácticas pedagógicas del docente, que incentiven realmente al estudiante en cuanto lo actitudinal, cognitivo y procedimental para brindar mejores resultados de aprendizaje y enseñanza en los educandos.
- Es importante resaltar que a través de la matemática, se debe formar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y de análisis respecto a las situaciones que se le planteen; he ahí la importancia de implementar las situaciones didácticas como estrategia metodológica e incorporar en las prácticas pedagógicas unidades didácticas.
- Establecer el trabajo en equipo como estrategia de aprendizaje grupal, que permita la retroalimentación entre estudiantes, facilitando el aprendizaje colaborativo y cooperativo, donde se afiance el conocimiento orientado por el docente y a su vez se generen espacios de confrontación y debate, que permita exponer inquietudes con respecto a los avances cognitivos logrado por los estudiantes, de esta manera que refleje mayor interés y actitud proactiva del mismo, quien finalmente termine siendo reconocido por el docente.

BIBLIOGRAFÍA

ARBELÁEZ, G. Las representaciones mentales. Revista Ciencias humanas. [En línea]. 2002, No. 29. [Recuperado el 13 de septiembre de 2005]. Disponible en: <http://utp.edu.co/%7Echumanas/revistas/revistas/rev29/arbelaez.htm>

ARENAS, F., BECERRA, M., MORALES, F., URRUTIA, L., GÓMEZ, P. Razones trigonométricas. En: GÓMEZ, P. Diseño, Implementación y Evaluación de Unidades Didácticas Matemáticas en MAD 1. Bogotá: Universidad de los Andes, 2012. 342 – 414 p.

BROUSSEAU, Guy. Iniciación al Estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. Buenos Aires, Argentina. Libros del Zorzal, 2007. 7 p.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné. Paris. La Pensée Sauvage, 1985.

D´ AMORE, Bruno; FANDIÑO, Martha; MARAZZANI, Inés y SBARAGLI, Silvia. La Didáctica y la Dificultad en Matemáticas: Análisis de situaciones con falta de aprendizaje. Bogotá. Editorial Magisterio, primera edición, 2010.

El Lenguaje Matemático y sus Aplicaciones. [En línea]. [Recuperado el 22 de julio de 2016]. Disponible en: <http://www.monografias.com/trabajos76/lenguaje-matematico aplicaciones/lenguaje-matematico-aplicaciones.shtml>

ESCRIBANO, J.; JIMÉNEZ, M.; PÉREZ, M. y VIRTO, J. Resolución de triángulos: Un reto para la diversidad. [En línea]. [Recuperado el 21 de abril de 2005]. Disponible en: <http://www.educarioja.org/educarioja/html/docs/premios_innovacion/2004/2_secundaria_b.pdf.>

FANDIÑO PINILLA, Martha Isabel. Las Fracciones, Aspectos Conceptuales y Didácticos. Didácticas Magisterio. Bogotá. 2009. 171 p.

FERNANDEZ ARTEAGA, Maytte Lorena. I Congreso de Educación Matemáticas de América Central y El Caribe – I CEMACYC. Importancia de la comprensión lectora en el abordaje de la primera etapa de resolución de problemas matemáticas con un enfoque crítico. [En línea]. 2013. [Recuperado 21 julio de 2016]. Disponible en: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/447-543-1-DR-C.pdf>

FIALLO LEAL, J. E. Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica. Tesis doctoral Valencia – España: Universidad de Valencia. 2010.

FLOREZ BETANCUR, Sor lucero y BETANCUR GALLEGO, Sor María. Prácticas pedagógicas de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el Colegio Eugenia Ravasco en los grados Evaluados por el ICFES en las pruebas saber. [En línea]. [Manizales, Caldas]. 2015. [Recuperado el 27 de julio de 2016]. Disponible en: <http://repositorio.ucm.edu.co:8080/jspui/bitstream/handle/10839/1116/Sor%20Lucero%20Florez%20Betancur.pdf?sequence=1> Universidad Católica de Manizales. Facultad de educación Maestría en educación.

FREIRE, Paulo. La importancia de leer y el proceso de liberación. México, D. F.: Siglo XXI Editores. 2008.

GADOTTI, M. La Escuela y el Maestro Paulo Freire y la Pasión de Enseñar. Brasil, Sao Pablo. Publisher, 1ª.Ed., 2007. 108 p.

Información sobre las Pruebas Saber 2012 y 2013 (qué evalúan las Pruebas Saber). [En línea]. [Recuperado febrero 2015]. Disponible en: <file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20SABER%202009.pdf>

Información sobre Pruebas PISA 2012 (que evalúan las Pruebas PISA). [En línea]. [Recuperado febrero 2015). Disponible en: <file:///D:/Users/HP/Downloads/RESUMEN%20PISA%202012.PDF>

LA MENZA, A. y & CORSO, L. La Matemática: del conflicto al diálogo. Buenos Aires. Editorial AIQUE. Primera edición.1999

MAYA BETANCOURT, Arnobio. El Taller Educativo, ¿Qué es? Fundamentos, cómo organizarlo y dirigirlo, cómo evaluarlo. Bogotá, D. C. Cooperativa Editorial Magisterio, tercera edición. 2012

McKERNAN, J. Investigación - Acción y Curriculum. Editores Morata. Madrid, 1999.

MALDONADO, E. Un Análisis Didáctico de la función Trigonométrica – Tesis de maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México. 2005.

MATEOS, M. Metacognición y Educación. Argentina. Editorial AIQUE. Primera edición. 2001

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Guía de Docencia Planeación del Área de Matemáticas. Editorial Voluntad. 2002. 18-19 p.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN UDCRESS. Orientaciones del trabajo pedagógico- Matemáticas Cooperativa [En línea]. Editorial MAGISTERIO, 1998. [Recuperado el 23 de abril de 2005]. Disponible en:

<http://www.minedu.gob.pe/gestion_pedagogica/diredusecuntecnologica/diredusecuntecnologica/xtras/otpmatematica.pdf>.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas – Lineamientos Curriculares. Santa Fe de Bogotá, D.C. Cooperativa Editorial MAGISTERIO. Julio 1998. 56 p.

MOREIRA, M.A. Modelos mentales y lenguaje. [En línea]. [Recuperado el 25 de febrero de 2006]. Disponible en: <http://www.if.ufrgs.br/ienci>. 1996.

MORENO, V. Conexiones matemáticas 10. Bogotá. Editorial Norma. 2005.

PARRA, Cecilia y SAIZ, Irma. Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones. México D.F. Editorial Paidos. 1999. 58 y 59 p.

PIFARRÉ, MANOLI, SANUY Y JAUME. Investigación didáctica. Enseñanza de las ciencias. [En línea]. [Recuperado el 10 de enero de 2006]. Disponible en: <http://pifarre.pip.udl.es.>. 2002.

POLYA, G. Cómo plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas. Vigésimo segunda edición.1998

SANTOS, T. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo editorial Iberoamericana. 1999

SANTOS, Trillos. Luz Manuel. Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. D.F. Grupo Editorial Iberoamericana S.A. Segunda edición. 1997. 33 y 34 p.

SCHOENFELD, A. “La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas”, en: Currículum y Cognición. Buenos Aires: Ed. Aique. 1996. 141-170 p.

Resultados prueba PISA 2012 Colombia, ICFES. [En línea]. [Recuperado 6 de junio de 2014]. Disponible en: file:///C:/Users/PERSONAL/Downloads/Resumen%20ejecutivo%20Resultados%20Colombia%20en%20PISA%202012.pdf.

Resultados Prueba Saber 2012-2013 Colombia, ICFES. [En línea]. [Recuperado 30 de mayo de 2014]. Disponible en: http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultadosPreSaber/.

ROJAS, P. La Transición Aritmética-Algebra. Santa Fe de Bogotá. Editorial Gaia. Tercera edición. 2002.

ORTIZ, Ocaña Alexander. Pedagogía Problémica; Modelo Metodológico para el Aprendizaje Significativo por problemas. Bogotá. Editorial Magisterio. 2009. 86 p.

ORTIZ, R. Diseño metodológico para llegar a la conceptualización de identidades pitagóricas a partir de la aplicación de actividades pedagógicas que requieren el uso de material didáctico. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2000.

VERRET, M. Le temps des études, Paris, Librairie Honoré Champion.1975

ANEXOS

Anexo A Formato del Taller Diagnóstico

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

AUTOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro

PROYECTO: LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LAS SOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS, EN EL APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES DE DÉCIMO GRADO DE UNA INSTITUCIÓN PÚBLICA DE BUCARAMANGA

TALLER DIAGNÓSTICO

Asignatura: Trigonométria **Fecha de aplicación:**

Día		Mes		Año	

Código de identificación:

G	IPN	ISN	IPA

Género: Hombre (M) – Mujer (F) **Inicial Primer Nombre** (IPN) **Inicial Primer Apellido** (ISN) **Inicial segundo Apellido** (IPN)

Propósito: Identificar las dificultades conceptuales y procedimentales que evidencian los estudiantes en el uso de los pre saberes (semejanza y proporcionalidad de triángulos, Teorema de Pitágoras, área y perímetro) al solucionar problemas trigonométricos.

NOTA: el trabajo de éste taller, no se asignará calificación y la información se utilizará solo para fines investigativos.

1. INTRODUCCIÓN

El taller propuesto aborda los conceptos geométricos que se emplean para desarrollar una situación problema relacionada con triangulo rectángulos e igualmente los procedimientos analíticos y geométricos necesarios para su solución; que está diseñado y dirigido a estudiantes de décimo grado de una institución pública de Bucaramanga. Las situaciones planteadas en este taller fueron tomadas de Serrano de Plazas, Celly. Espiral nueve. Bogotá- Colombia. Editorial Norma, S. A., 2005.

Tiempo estimado: 80 minutos
Recursos: lápiz, borrador, hoja blanca anexa, transportador, escuadra o regla, lapicero y calculadora.

2. CONTENIDOS Y PROCESOS

CONTENIDOS	PROCESOS
• Triángulos semejantes • Triángulos rectángulos • Área de rectángulo y círculo • Teorema de Pitágoras • Teorema de Thales • Longitudes proporcionales • Variable: dependiente e independiente	**Comunicación:** • **Utilizar** conceptos, propiedades y teoremas geométricos para hallar medidas desconocidas como longitudes, perímetros o áreas de polígonos. **Razonamiento lógico:** • **Verificar** implicaciones lógicas acerca de las semejanzas de triángulos y su aplicación en las solución de problemas geométricos **Resolución de problemas:** • **Aplicar** conceptos, propiedades y teoremas geométricos en la resolución de diferentes situaciones que involucren semejanza, proporcionalidad y deducción formal. **Conexiones:** • **Establecer** relaciones entre situaciones del mundo real y diversos conceptos y propiedades de la geometría plana

3. DESARROLLO DE CONTENIDOS

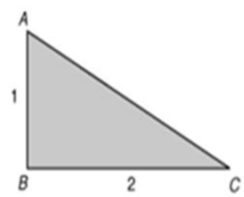
De antemano se agradece, el hecho de que se tome el tiempo respectivo para solucionar el siguiente taller.

A continuación se desarrollarán 3 problemas, a los cuales dará una solución justificada y argumentada para cada situación planteada:

✓ **Situación uno**

1. Un diseñador gráfic repreesenta en la pantalla de un computador un modelo que le permite calcular la longitud de la vía que une la ciudad *A* con un aeropuerto *C*. Éste le sirve tanto a *A* como a *B*, una ciudad que dista de *C* el doble que de *A*, según aparece en la figura[1]

a. Si el modelo muestra en el computador que d(AB) = 1cm y d(BC) = 2cm. ¿Cuál es la mejor aproximación a la longitud de

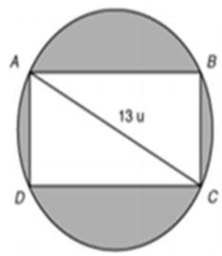


[1] SERRANO DE PLAZAS, Celly. Espiral nueve. Bogotá- Colombia. Editorial Norma, S. A., 2005.

✓ **Situación dos**

2. La figura muestra cómo se inscribe un rectángulo De área $60 u^2$ en un círculo de radio 6.5 u.

a. Determine el área de la región del círculo exterior al rectángulo.



[2]

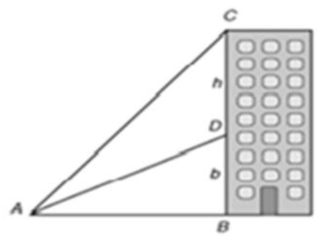
b. Calcule las medidas de los lados del rectángulo inscrito en el círculo.

[2] Ibid., p.2

✓ **Situación tres**

De acuerdo a la respuesta seleccionada, determine la altura del edificio.

3. La figura presenta un edificio y un observador que se encuentra a una distancia de **a** metros de la base de aquél.



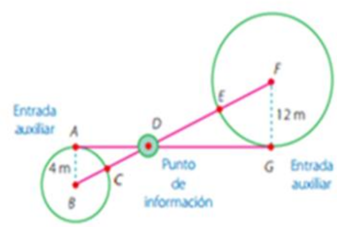
¿Qué datos necesitamos para calcular la altura del edificio?

A. El ángulo de elevación que forma la visual del observador con el piso séptimo del edificio.
B. El ángulo de elevación de la visual del observador con la terraza del edificio y la distancia ***a*** que hay entre el observador y la base del edificio, porque el triángulo ABC es rectángulo.
C. La altura a la que está el piso cuarto y la distancia ***a*** pues el triángulo ABD es rectángulo.
D. La distancia ***a*** y que los triángulos ABC y ABD

[3] Ibid., p.4

✓ **Situación cuatro**

4. En la figura se muestra parcialmente el diseño de un parque donde se considera la construcción de dos pequeñas plazas circulares conectadas por un camino recto entre los centros de las circunferencias, y pasando por las entradas principales y un camino recto entre las entradas auxiliares. Los caminos se cruzan en un punto de información.[4]



Si la distancia entre el punto de información y la entrada ubicada en el punto A fuera igual a 8 m, entonces la distancia entre el punto de información y la entrada ubicada en el punto G, ¿Cuál sería?

[4] Ibid., p.6

Anexo B. Formato entrevista

Universidad Industrial de Santander

ESTRATEGIAS QUE USAN LOS ESTUDIANTES PARA
RESOLVER PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS
CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
2015

Código del estudiante:

Fecha de aplicación:

Día	DD	Mes	MM	Año	AAAAA

De antemano queremos agradecerle el hecho de que se tome unos minutos de su tiempo para contestar esta encuesta.

1. **En el enunciando de un problema trigonométrico, ¿qué características son importantes para entenderlo?**
   ____
   ____
   ____

2. **Los datos, la descripción del enunciado del problema a partir de un dibujo generan cualidades del mismo, ¿hasta qué punto estas favorecen la interpretación del problema?**
   ____
   ____
   ____

3. **Enuncie los pasos que normalmente realiza al resolver un problema trigonométrico con triángulos rectángulos**
   ____
   ____
   ____

4. **De acuerdo con los pasos mencionados, ¿existe alguno de mayor y menor importancia?, y ¿por qué?**
   ____
   ____

5. **¿Qué considera difícil en el momento de resolver un problema?**
   ____
   ____
   ____

Anexo C. Formato Unidad Didáctica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

TEMÁTICA: Las situaciones didácticas en las solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, en el aprendizaje de estudiantes de décimo grado de una institución pública de bucaramanga

AUTOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro

CONTEXTUALIZACION

Actualmente me desempeño como docente de matemáticas de los grados décimo, undécimo y como coordinador del área, en una Institución Educativa del Municipio de Bucaramanga. El colegio es público, de calendario A, mixto y de jornada en la mañana. Los estudiantes que asisten al colegio son de estrato 1, 2 y 3, la mayoría de ellos hijos de empleados e independientes, algunos tienen acceso a herramientas de informática, a internet y a la adquisición de libros. El objetivo es crear un ambiente de convivencia armónica, entre todos los estamentos de la Comunidad Educativa, a través del cumplimiento y la práctica de normas de comportamiento que garanticen la formación de valores, hábitos y buenas costumbres de tal forma que faciliten una convivencia social; además, brindar a los estudiantes una formación integral que faciliten las condiciones para el desarrollo de la autonomía, la participación y el respeto mutuo. Es una entidad que ofrece educación formal en los niveles de preescolar, básica y media, comprometida con la formación de personas para la continuidad en la Educación Superior, con un eficiente desempeño laboral y desarrollo del pensamiento tecnológico, apropiándose de los principios y valores institucionales y de una cultura del medio ambiente.

En el Colegio se organiza el trabajo académico a partir del pensamiento científico, tecnológico y emprendimiento laboral. Desarrollar estos campos de pensamientos permite que cada estudiante se acerque al mundo con diversas miradas y habilidades. Cada campo desarrolla unos estándares de competencias de manera progresiva, desde preescolar hasta undécimo. Se trabajan dos metodologías que permiten la construcción del conocimiento: "En preescolar y primaria el proyecto integrado por dimensiones busca desarrollar en los campos de pensamiento habilidades y destrezas propias de cada edad, a partir de los intereses, preguntas y deseos de los niños". En secundaria se trabaja en proyectos por disciplinas y de forma articulada y transversal "Quiero mi entorno, gobierno escolar, educación sexual y manejo del tiempo libre, además se celebra el día de la ciencia, del idioma y de las matemáticas, en esta última se organiza una olimpiada interna y se acondiciona un aula con juegos matemáticos que permiten el desarrollo del pensamiento lateral y el enfoque de resolución de problemas, al enfrentar los diferentes desafíos que genera los respectivos juegos. Este proceso se evalúa entendiéndose como "un ejercicio participativo, continuo y libre, que busca el crecimiento, no únicamente de los niños y jóvenes sino de toda la comunidad que aprende y se transforma.

Para ello se aplicará en un grupo focal de décimo grado, como proceso metodológico una unidad didáctica que involucre las situaciones didácticas en la solución de problemas trigonométricos, donde se busca contribuir con el mejoramiento de las prácticas pedagógicas y la transformación del proceso metodológico, para fortalecer los niveles de aprendizaje y enseñanza por parte de los educandos.

JUSTIFICACION

La necesidad de enfocar el trabajo hacia problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, ha surgido a raíz de las dificultades reflejadas por los estudiantes en el momento de aplicar la modelación geométrica, las razones trigonométricas y algunos presaberes tales como: propiedades geométricas de los triángulos y teorema de Pitágoras en la solución de problemas sobre triángulos rectángulos. Por ello, es pertinente proponer el uso de situaciones didácticas que incidan sobre las practicas pedagógicas y el contenido didáctico, que permita la integración e interpretación de los tópicos geométricos en contextos de la naturaleza y la técnica, el énfasis en aplicaciones de la geometría, el estudio de la interpretación de representaciones visuales, para lo cual se requiere fortalecer el pensamiento geométrico y métrico en la solución de problemas. Es así como se puede incurrir en determinar las dificultades procedimentales y conceptuales que presenta el estudiante al resolver problemas trigonométricos y generarse desde allí estrategias metodológicas basadas en las situaciones didácticas que contribuyan en mejorar las competencias de los estudiantes.

OBJETIVOS

Implementar las situaciones didácticas para favorecer en los estudiantes de décimo grado, la solución de problemas trigonométricos con triángulos rectángulos, aplicado en una Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga (Santander).

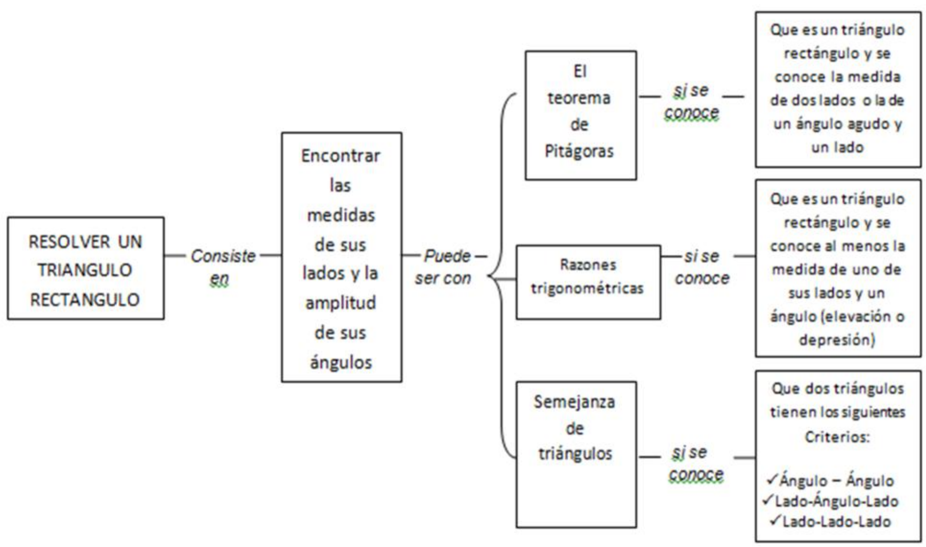
OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Determinar las situaciones didácticas generadoras de condiciones que favorecen en el estudiante la aplicación del conocimiento trigonométrico.
- Diseñar situaciones didácticas donde se desarrolle acción, formulación y validación de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.

COMPETECIAS

- *Competencias cognitivas:* Modela y argumenta mediante las razones trigonométricas, Teorema de Pitágoras y de semejanza de triángulos, situaciones descritas en un triángulo rectángulo en forma coherente y analítica.
- *Competencias procedimentales:* Usa estrategias y herramientas apropiadas en la interpretación de un problema, a través del dibujo y la comprensión lectora, que le permite analizar, procesar, sintetizar y transferir información de manera organizada para darle solución a un problema.
- *Competencias actitudinales:* Desarrolla y evidencia habilidades proactivas, participativas, de seguridad y confianza, además del planteamiento de preguntas

CONTENIDOS DISCIPLIARES



ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS Y ORGANIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE ENSENANZA Y DE APRENDIZAJE

Para el desarrollo de esta unidad didáctica se plantearan las situaciones didácticas según Guy Brousseau, las cuales son: *Acción*, donde se constituye el proceso por el cual el alumno va a "aprender" un método de resolución de un problema; luego a partir del conjunto de relaciones o reglas, el alumno toma sus decisiones sin tener conciencia de ellas, luego comunica a sus compañeros las estrategias que propone, dicha comunicación está sometida a dos tipos de retroacciones, una inmediata por parte de sus compañeros y otra mediata, por parte del medio, siendo esta la *formulación*; Finalmente el alumno no solo tiene que comunicar una información, sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración, que determina la *validación*. Además, se sigue la estructura de Osborne & Freyberg, donde hay confrontación de conocimientos y problematización, especificando los momentos o fases y algunas de las actividades propias del docente y del estudiante. El desarrollo de las situaciones seguirá la propuesta planteada por los autores mencionados, según se explica a continuación:

Fase	Actividad del profesor	Actividad del estudiante
Preliminar	Se ubica en la sala de informática a los 20 estudiantes, con sus respectivos equipos conectados a internet, teniendo cada computador su herramienta virtual "Red de apoyo digital- RAD", la cual se caracteriza porque viene por grados y cada unidad cuenta con explicaciones digitales, actividades interactivas y evaluaciones digitales. Luego se brinda las especificaciones de manejo del instrumento a utilizar. Para ello cuentan con 50 minutos y tres momentos: -Explicaciones digitales: 10 sesiones -Actividad interactiva: 2 sesiones -Evaluaciones digitales: 4 sesiones Durante el desarrollo de esta, se genera un ambiente participativo, enfocado al punto de vista del estudiante con respecto al uso de la plataforma, si es amigable, comparativa de acuerdo con las clases cotidianas, sus criterios (presaberes), y el abandono de criterios adquiridos antes del uso de este instrumento.	Luego de estar organizados individualmente en su respectivo equipo, y de explicarle el manejo de la herramienta, el estudiante pasa a la parte exploratoria, basada en las : **1. <u>Explicaciones digitales</u>:** Teorema de Pitágoras, clasificación de los triángulos, razones trigonométricas básicas, propiedades de la altura de un triángulo equilátero, aplicaciones de las razones trigonométricas (2), triángulos rectángulos especiales, catetos opuestos y adyacentes de un ángulo, razones trigonométricas con respecto aún ángulo dado. **2. <u>actividades interactivas:</u>** Triángulos rectángulos especiales y elementos de un triángulo rectángulo **3. <u>Evaluaciones digitales:</u>** Razones para ángulos notables, aplicaciones de las razones trigonométricas (2) y razones trigonométricas de run triangulo rectángulo Con lo anterior, se busca familiarizar al estudiante con los presaberes, correspondientes a las aplicaciones de las razones trigonométricas, en la solución de situaciones problema. Con este medio virtual, se evidenciará la ***situación de acción***, porque el estudiante inicialmente refuerza sus presaberes a partir de las explicaciones digitales, pasando luego

		a las actividades interactivas, donde podrá tomar decisiones proponiendo soluciones y apreciaciones, ya sea rechazando intuitivamente o racionalmente una estrategia anterior. A su vez, surgirán estrategias nuevas, que serán asumidas según su eficacia, por el estudiante, puesto que las evaluaciones digitales muestran sus respectivos resultados una vez finalizadas, y se pueden repetir las veces que se desee, para reforzar y mecanizar, ya que son preguntas cerradas con de selección múltiple con única respuesta. Luego las evaluaciones digitales constituirán y afianzará el proceso que le permitirá al estudiante encontrar y "aprenderse" un método de resolución de un problema. Dirección de herramienta virtual a utilizar: http://www.reddeapoyodigital.com/

Fase	Actividad del profesor	Actividad del estudiante
Enfoque	Durante esta fase, se realiza la interpretación de las preguntas y respuestas de los estudiantes, generadas por el uso de la herramienta; aclarando sus distintos puntos de vista, y estableciendo un ambiente que facilite la participación espontanea de los mismos.	Una vez, finalizada la evaluación digital, pasará el estudiante, a responder una pregunta abierta, con relación a la herramienta, a su uso, a los preconceptos y conceptos manejados. Donde compara, clasifica y clarifica sus conocimientos anteriores, con respecto a los adquiridos mediante el uso de la herramienta.
	Con relación a la herramienta, a su uso, a los preconceptos y conceptos manejados. ¿Fue de fácil manejo, entendible, y facilitó el aprendizaje? y ¿por qué? ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________	

Confrontación	Luego de finalizado el uso de la herramienta (RAD) y para poder indagar los alcances obtenidos a través de ella, se conforman 5 grupos de cuatro participantes cada uno, a quienes se les plantea dos situaciones problemas que contienen elementos conceptuales trigonométricos: uno con dibujo y otro sin dibujo, para evidenciar criterios cognitivos, procedimentales y actitudinales que el grupo de estudiantes posee. Cada monitor seleccionado por el grupo sustentará frente a los demás grupos sus propuestas de solución, donde se intercambiarán y debatirán sus diferentes puntos de vista. El docente investigador sugerirá procedimientos analíticos y demostrativos, si son necesarios. Además, se tendrá en cuenta argumentos de manera provisional durante el debate.	Los estudiantes en grupo analizarán y desarrollarán dos situaciones problemas que contienen elementos conceptuales trigonométricos, los cuales se exponen y se debaten frente a los demás grupos, para realizar comparaciones de sí mismos o del grupo. Para la exposición de la resolución de las dos situaciones planteadas, tendrá cada grupo dos pliegos de papel cartulina y marcadores, para plasmar sus ideas y socializarla con los demás grupos, las cuales serán fotografiadas como evidencias y soporte del trabajo realizado. Esta etapa se lleva a cabo la ***situación de formulación***, porque se puede observar dos momentos: - Cuando el representante del equipo está en frente de su grupo y el de los demás, exponiendo sus ideas y sustentándolas. - Cuando el equipo debate sus argumentos ante los demás grupos, comunicando las estrategias que se usaron para resolver las dos situaciones problemas.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

Asignatura: Trigonometría **Fecha de aplicación:**

Día		Mes		Año	

Código de identificación:

G	IPN	IPA	ISA		G	IPN	IPA	ISA

Género: Hombre (M) – Mujer (F) Inicial Primer Nombre (IPN) Inicial Primer Apellido (IPA) Inicial Segundo Apellido (ISA)

Situación uno

1. Desde un punto determinado al nivel del suelo, Hernando midió un ángulo de elevación a la cima de una montaña de 30°. Luego se alejó de este punto 244 metros en sentido opuesto a la montaña y midió otro ángulo de elevación. Si la altura de la montaña es 716 metros, ¿Cuál es la medida del segundo ángulo de elevación?

Situación dos

2. Para hallar la altura del edificio *A*, según la figura, determine los datos que se requiere conocer:

a. x, α y β.

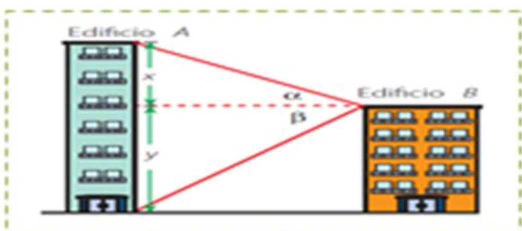
b. x y β.

c. y y α.

d. α y β.

e. x y α.

f. y



Una vez considerada la información necesaria para resolver la pregunta, proceda a resolverla justificando su respuesta

[1] BÄES, Sánchez. Andrés D. Espiral 10: Guía Para Docentes. Grupo Editorial Norma. Bogotá, D.C., Colombia. 2007. Pág. 114
[2] Ibíd., p. 115

Fase	Actividad del profesor	Actividad del estudiante
Aplicación	Finalizado el debate y la retroalimentación, realizada por los grupos conformados y el docente investigador, se presenta a continuación un problema, en el cual se evalúa las competencias que se abordaron en las fases anteriores. Este problema se resuelve de manera individual, donde se le orienta al estudiante que describa la solución que encuentre. Con lo cual, se busca evidenciar los avances significativos que el estudiante alcanzo, de acuerdo al proceso realizado.	El estudiante resolverá el problema utilizando los conceptos trabajados durante el desarrollo de esta unidad didáctica. Luego al justificar la solución del problema, se requiere que evalué críticamente su solución. Y se sugiere a los estudiantes otros enlaces para retroalimentar los conceptos trabajados. http://www.colombiaaprende.edu.co/recursos/skoool/matematica_y_geometria/funciones_trigonometricas/index.html Finalizando la confrontación y durante la fase de aplicación se evidencia la ***situación de validación***, aquí el alumno comunica y afirma sus argumentos y procedimientos de solución frente al problema planteado.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

Asignatura: Trigonometria **Fecha de aplicación:** Día | | Mes | | Año | |

Código de identificación: | | | | |

G IPN IPA ISA

Género: Hombre (M) – Mujer (F) Inicial Primer Nombre (IPN) Inicial Primer Apellido (IPA) Inicial Segundo Apellido (ISA)

Situación tres

Las antenas de telefonía celular son emisores que transmiten las llamadas que están dentro del radio de influencia de la misma. Cuando se realiza una llamada desde un teléfono celular, esta pasa a través de antenas, también llamadas estaciones base, hasta llegar al teléfono que se está llamando. Algunas veces ocurre que ciertos lugares están fuera del alcance de esta red de antenas, por lo que no es posible comunicarse con un dispositivo que se encuentre en esta área, es decir, no hay cobertura. Una antena tiene un tiene un alcance máxima para transmitir la información, pero si un dispositivo está más allá de este, entonces, no tiene cobertura por esta antena.

Junto a una carretera hay antenas de telefonía celular, como se muestra en la figura. El alcance máximo de cobertura de cada antena es de 1 km.

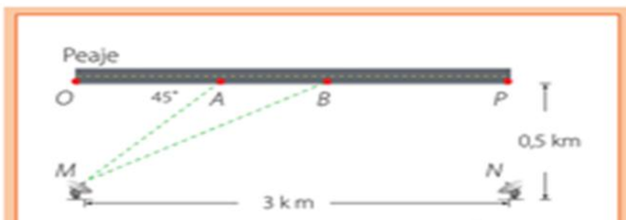


Figura 1.1

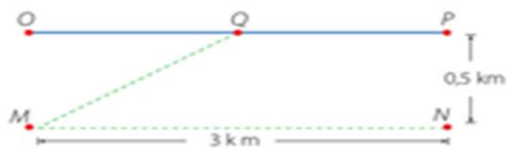
Interpretación y representación

1. Si la siguiente antena de repetición N está es a 3 km, como se muestra en la figura, ¿en dónde debería ubicarse sobre la carretera un punto C que indique el alcance máximo de la antena N?[9]

[9] LÓPEZ OSPINA. Héctor Andrés. Avanza Matemáticas 10. Editorial Norma. Bogotá, D.C., Colombia. 2015. Pág. 28

Formulación y ejecución

2. Si la antena N está a 3 km de la antena M, el punto medio Q de la carretera entre O y P tiene cobertura de



a. La antena M b. la antena N c. las antenas M y N d. ninguna de las antenas

Razonamiento y argumentación

3. Si la distancia entre las torres cambia a 2 km, y la distancia de las antenas a la carretera es de 1,5 km, ¿de cuántos kilómetros sería la longitud de la sección de carretera cubierta simultáneamente por las dos antenas?[4]

[4] Ibíd., p. 28, 29

Tiempo en minutos según horas de clase: 120 minutos, dividido en dos sesiones:

- *Primera sesión:*
  Herramienta virtual (explicaciones y evaluaciones digitales, actividad interactiva.)

- *Segunda sesión:*
  Desarrollo de dos problemas en grupo, debate - confrontación, retroalimentación y desarrollo de un problema final (validación)

Recursos didácticos: se utilizó papel cartulina 10 pliegos, marcadores, herramienta virtual, calculadora, lápiz, borrador. etc.

Bibliografía:

BÄES, Sánchez. Andrés D. Espiral 10: Guía Para Docentes. Grupo Editorial Norma. Bogotá, D.C., Colombia. 2007. Pág. 114

LÓPEZ OSPINA. Héctor Andrés. Avanza Matemáticas 10. Editorial Norma. Bogotá, D.C., Colombia. 2015. Pág. 28

Fuentes electrónicas

LÓPEZ OSPINA. Héctor Andrés. Avanza Matemáticas 10. Editorial Norma. Bogotá, D.C., Colombia. 2015. Pág. 28. Recuperado el 15 de mayo de 2016, de http://www.reddeapoyodigital.com/

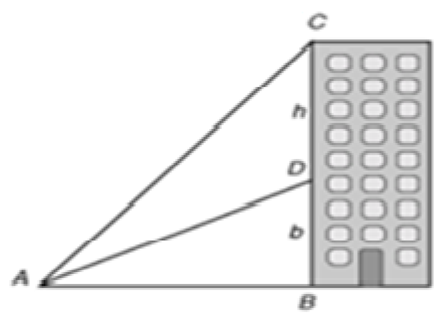
Anexo D. Diario de Campo de Observación del Taller Diagnóstico

REGISTRO DE: Clases **DURACIÓN DEL REGISTRO:** 6:30 A.M. a 7:50 A.M.
LOCALIDAD: Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga
OBSERVADOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro
ACTORES: Estudiantes de décimo grado **FECHA:** 26/10/2015

DESCRIPCIÓN OBSERVACIÓN	INTERPRETACION (Inferencias, preguntas y conjeturas)
Se realizó en la Institución Educativa pública del Municipio de Bucaramanga, en las primeras horas de la mañana (6:30 a.m. a 8:00 a.m.) el desarrollo del taller diagnóstico, con los estudiantes del grado decimo uno, en este horario los estudiante mostraron una actitud dinámica y proactiva para el desarrollo del mismo. Con antelación se realiza la firma de consentimientos y asentamientos con padres de familia y estudiantes para su aplicación. Al inicio del taller se socializo en qué consistía, su propósito, los recursos necesarios a utilizar (calculadora, lápiz, borrador, escuadra, lapicero y transportador), el tiempo estimado, contenidos y procesos, además, indagaban si se haría un repaso sobre los conceptos que se requerían para abordar el taller diagnóstico, donde se explicó, que el objetivo era evidenciar el uso y manejo de éstos presaberes que habían sido trabajados en geometría de octavo y noveno grado, por otro lado se explicó el desarrollo de contenidos que se presentaban en el taller; en este último se describieron cuatro (4) situaciones sobre el tema de semejanza de triángulos, triángulos rectángulos, longitudes proporcionales, Teorema de Pitágoras y de Thales. La prueba fue presentada por 20 estudiantes, entre los cuales 12 son del género femenino y 8 mujeres.	Se evidencio que la actitud presentada por los estudiantes, eran incentivadas porque serían participantes de una investigación, que contribuiría en determinar las dificultades que los estudiantes presentan al resolver problemas y mejorar las practicas pedagógicas del maestro. La actitud proactiva se observa porque el estudiante muestra inquietudes que surgen a medida que se va desarrollando el taller y participa activamente consultando sobre el mismo, generando un espacio de confiabilidad entre el estudiante y el maestro investigador, al encontrar que sus respuestas eran tenidas en cuenta y resueltas al instante. Por otro lado, se analiza que las preguntas reflejan dominios conceptuales que los estudiantes emplean para resolver problemas, siendo

Antes de aplicar la prueba, se organizó el salón por filas, se distribuye a los estudiantes en forma aleatoria, se contó con un tablero acrílico, expografo y borrador, elementos básicos para trabajar. Durante la aplicación del taller se observa lo siguiente: dificultades en la interpretación en el enunciado de los problemas, específicamente de la situación tres:

"3. La figura presenta un edificio y un observador que se encuentra a una distancia de **a** metros de la base de aquél.



¿Qué datos necesitamos para calcular la altura del edificio?

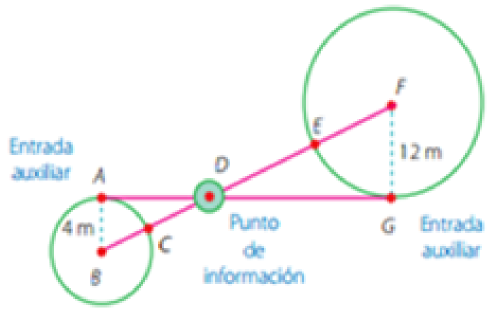
- **A.** El ángulo de elevación que forma la visual del observador con el piso séptimo del edificio.
- **B.** El ángulo de elevación de la visual del observador con la terraza del edificio y la distancia ***a*** que hay entre el observador y la base del edificio, porque el triángulo ABC es rectángulo.
- **C.** La altura a la que está el piso cuarto y la distancia ***a*** pues el triángulo ABD es rectángulo.
- **D.** La distancia ***a*** y que los triángulos ABC y ABD son rectángulos."

básicos, puesto que no logran relacionarlos entre sí, pues estos están relacionados de manera directa con las longitudes de los lados de un triángulo; es relevante resaltar que los procedimientos analíticos y deductivos que cada estudiante ha adquirido desde su experiencia y aprendizaje vivido en los cursos de geometría y álgebra, proporcionando unos razonamientos sencillos, donde se queda en la mecanización de procesos simples, sin la posibilidad de realizar conexiones conceptuales más complejas.

Frente a la pregunta realizada por los estudiantes de hacer un repaso antes de resolver el taller, se explica que no sería conveniente para el objetivo de la investigación porque no permitiría evidenciar falencias conceptuales y procedimentales que los estudiantes tienen al resolver problemas.

El problema planteado en la situación tres, no da una respuesta numérica como normalmente se esperaría, sino alternativas en la información de los datos para determinar si son suficientes en el desarrollo del problema; donde existen datos insuficientes, si el estudiante

Donde preguntaban: - “en el texto hace falta información”, o “sí las opciones de respuestas ¿estaban incompletas?”, a lo que se dio como respuesta: -“no, no hace falta información, y ubíquese en los datos que la respuesta ofrece y determine si son suficientes para desarrollarlo”; además, algunos estudiantes indagaron: - ¿puedo usar las razones trigonométricas ó solamente semejanza de triángulos y Pitágoras? dando como respuesta: - “cualquiera de estos conceptos son válidos, ya que se basan en la proporcionalidad de las longitudes de los lados del triángulo, siempre y cuando sean semejantes los triángulos”; sin embargo, otros estudiantes intentaban usar el concepto de área, para determinar la altura del edificio.	desea aplicar directamente semejanza de triángulos, por otro lado hay datos que orientan hacia la aplicación del teorema de Pitágoras, sin ser suficiente aun para deducir la altura del edificio, luego el estudiante busca en un solo procedimiento analítico poder resolver el problema, es decir se reflejan falencias en la combinación de procedimientos y conceptos, limitando así el razonamiento deductivo a simples recursos de mecanización, haciéndose ausente el poder inferir a partir de los datos, qué concepto matemático es el más pertinente.
Se observa que el espacio es reducido, esto facilita que los estudiantes, pudieran observar la forma como sus compañeros resolvían los problemas, es decir conceptos o estrategias empleadas. Frente a esto se realiza una reflexión sobre la autoconfianza en sus presaberes y la no necesidad de copiarle a sus compañeros, dado que el taller no genera una nota negativa frente a su proceso académico.	Si el estudiante infiere a partir de los datos de un problema, permite que él pueda realizar conexiones conceptuales y procedimentales complejas, que lo alejan de la memorización sin sentido lógico y procedimientos solamente algorítmicos, sin explorar la creatividad y la argumentación.
Otra observación relevante en el taller, se presentó en la situación cuatro del taller, pues género en los estudiantes preguntas tales como: -“¿cómo puedo argumentar que los dos triángulos son semejantes?, ¡esto lo veo en el dibujo, pero no sé cómo hacerlo!, donde se dio como orientación que se debía retomar el concepto de semejanza y proporcionalidad de triángulos.	Para algunos estudiantes no es claro la relación existente entre los teoremas de semejanza, proporcionalidad y las razones trigonométricas, por ello la actitud desesperada de mirar al compañero en busca de una luz frente a qué concepto podría permitirle
“4. En la figura se muestra parcialmente el diseño de un parque donde se considera la construcción de dos pequeñas plazas circulares conectadas por un camino recto entre los	

centros de las circunferencias, y pasando por las entradas principales y un camino recto entre las entradas auxiliares. Los caminos se cruzan en un punto de información.  Si la distancia entre el punto de información y la entrada ubicada en el punto A fuera igual a 8 m, entonces la distancia entre el punto de información y la entrada ubicada en el punto G, ¿Cuál sería?”	resolver el problema; otros asocian el concepto de proporcionalidad al cálculo de área y uso del teorema de Pitágoras, sin un razonamiento inductivo, que establezca la relación entre la pregunta del problema y los conceptos involucrados. Las cuatro situaciones planteadas en el taller diagnóstico presentaban una representación gráfica que permitía tener una interpretación visual del enunciado del problema, sin embargo las preguntas que surgen durante el desarrollo del taller evidencia, para algunos estudiantes dificultades frente al lenguaje matemático, cuando éste intenta relacionar la estrategia de solución y el concepto a utilizarse, no había correlación lógica, surgían ideas aisladas carentes de un análisis deductivo y comprensivo, luego en sus presaberes existen vacíos conceptuales y por consiguiente no logra encontrar la relación entre ellos. Finalizado el taller se corrobora que el tiempo fue suficiente y en los problemas planteados se hacía énfasis en la interpretación, argumentación y proposición de una solución, llevando al

		estudiante a realizar conexiones entre el razonamiento inductivo y deductivo, apoyado en la capacidad de inferir.

El texto marcado en color respectivo representa:

Color rojo: Procesos en la solución
Color azul claro: Mecanización de procesos simples
Color verde oscuro: Razonamiento sencillo secuencial
Color gris claro: Área del rectángulo
Color morado: Teorema de Pitágoras
Color amarillo: Teorema de Thales
Color azul marino: Interpretación y análisis de datos
Color verde claro: Deducir la representación gráfica
Color violeta: Expone inquietudes
Color verde oscuro: Muestra interés por el desarrollo del taller
Color vino tinto: Realiza consultas automáticas
Color gris claro: Se siente reconocido por el docente investigador

Anexo E. Análisis de Observaciones Taller Diagnóstico: Categorización

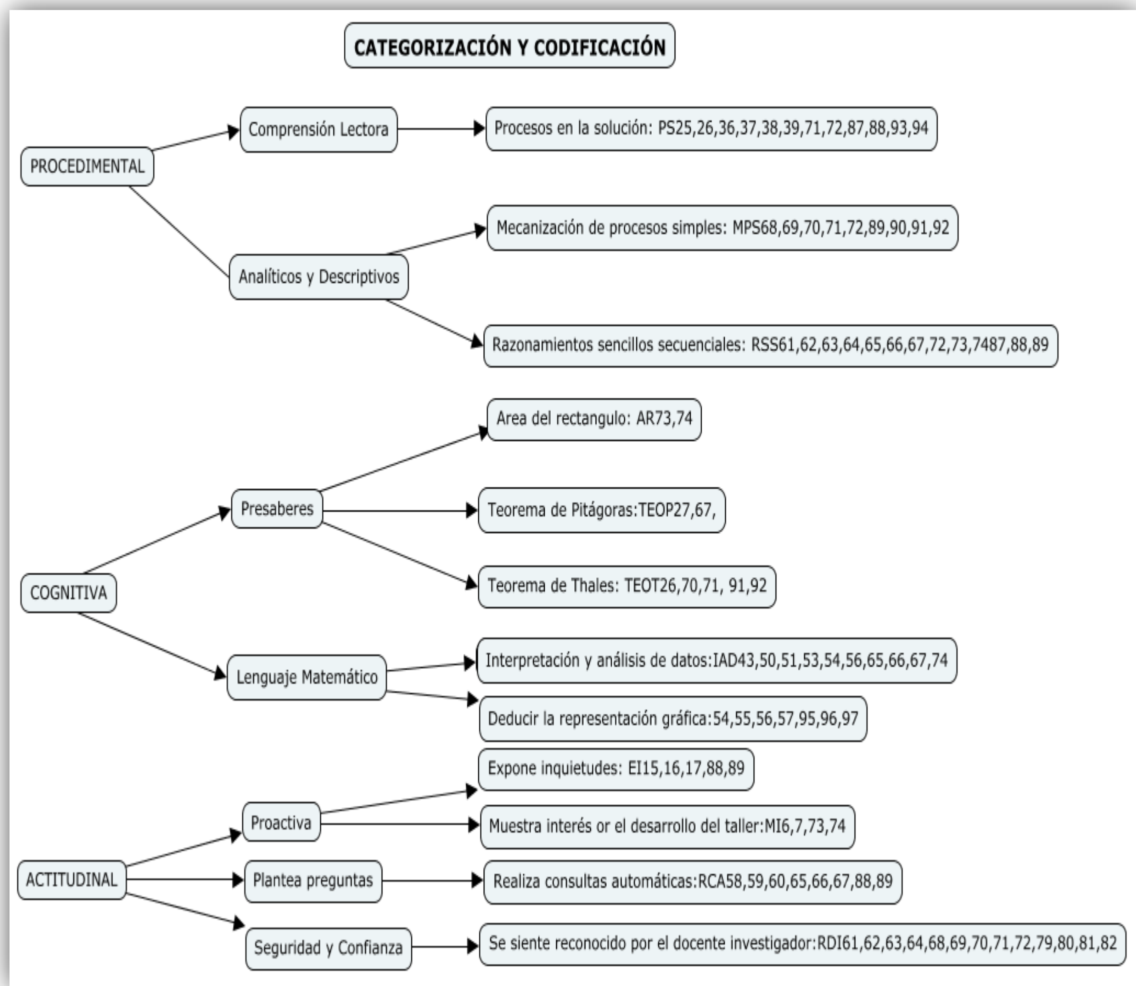
<table>
<tr><th colspan="2">CATEGORIAS</th><th>SUBCATEGORIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">PROCEDIMENTAL</td><td>COMPRENSIÓN LECTORA</td><td>Procesos en la solución

- PS25,26-2 tema de semejanza de triángulos, triángulos rectángulos
- PS36,37,38,39-2 dificultades en la interpretación en el enunciado de los problemas, específicamente de la situación tres
- PS71,72-7 siempre y cuando sean semejantes los triángulos”
- PS87,88-9“¿cómo puedo argumentar que los dos triángulos son semejantes?
- PS93,94-10 muestra parcialmente el diseño de un parque</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ANALÍTICOS Y DESCRIPTIVOS</td><td>Mecanización de procesos simples
- MPS 68,69,70,71,72-6 “cualquiera de estos conceptos son válidos, ya que se basan en la proporcionalidad de las longitudes de los lados del triángulo, siempre y cuando sean semejantes los triángulos”
- MPS89,90,91,92-7 se dio como orientación que se debía retomar el concepto de semejanza y proporcionalidad de triángulos.</td></tr>
<tr><td>Razonamiento sencillo secuencial
- RSS 61,62,63,64-6 “no, no hace falta información, y ubíquese en los datos que la respuesta ofrece y determine si son suficientes para desarrollarlo”
- RSS 65,66,67-6 ¿puedo usar las razones trigonométricas o solamente semejanza de triángulos y Pitágoras?
- RSS 72,73,74-6 sin embargo, otros estudiantes intentaban usar el concepto de área, para determinar la altura del edificio.
- RSS 87,88,89-7 “¿cómo puedo argumentar que los dos triángulos son semejantes?, ¡esto lo veo en el dibujo, pero no sé cómo hacerlo!</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">PRESABERES</td><td>Área del rectángulo
AR73,74-7 usar el concepto de área</td></tr>
<tr><td>Teorema de Pitágoras
- TEOP27-2Teorema de Pitágoras
- TEOP67-7Pitágoras</td></tr>
</table>

COGNITIVO		**Teorema de Thales** - TEOT26-2 longitudes proporcionales - TEOT70,71-7 proporcionalidad de las longitudes de los lados del triángulo - TEOT91,92-9 semejanza y proporcionalidad de triángulos.
	LENGUAJE MATEMÁTICO	**Interpretación y análisis de datos** - IAD43-5 calcular la altura - IAD50,51-6 la distancia ***a*** que hay entre el observador y la base del edificio, - IAD53,54-6 altura a la que está el piso cuarto y la distancia ***a*** - IAD56-6 La distancia ***a*** - IAD65,66,67-7 usar las razones trigonométricas ó solamente semejanza de triángulos - IAD74-6 para determinar la altura del edificio
		Deducir la representación gráfica - DRG54,55-6 triángulos ABD es rectángulo. - DRG56,57-6 los triángulos ABC y ABD son rectángulos.**”** - DRG95-10 construcción de dos pequeñas plazas circulares - DRG96,97-10 un camino recto entre los centros de las circunferencias
ACTITUDINAL	PROACTIVA	**Expone inquietudes** - EI15,16,17-2 indagaban si se haría un repaso sobre los conceptos que se requerían para abordar el taller diagnóstico - EI 88,89-8 ¡esto lo veo en el dibujo, pero no sé cómo hacerlo!, **Muestra interés por el desarrollo del taller** - MI6,7-1 Los estudiante mostraron una actitud dinámica y proactiva para el desarrollo del mismo - MI 73,74-6 “sin embargo, otros estudiantes intentaban usar el concepto de área, para determinar la altura del edificio”
	PLANTEA PREGUNTAS	**Realiza consultas autónomamente** - RCA 58,59,60-6 “en el texto hace falta información”, o “sí las opciones de respuestas ¿estaban incompletas? - RCA 65,66,67-6 ¿puedo usar las razones trigonométricas o solamente semejanza de triángulos y Pitágoras?

		- RCA 87,88-8¿cómo puedo argumentar que los dos triángulos son semejantes?
	SEGURIDAD Y CONFIANZA	**Se siente reconocido por el docente investigador** - RDI 61,62,63,64-6 “no, no hace falta información, y ubíquese en los datos que la respuesta ofrece y determine si son suficientes para desarrollarlo” - RDI 68,69,70,71,72-6 “cualquiera de estos conceptos son válidos, ya que se basan en la proporcionalidad de las longitudes de los lados del triángulo, siempre y cuando sean semejantes los triángulos” - RDI 79,80,81,82-7 “se realiza una reflexión sobre la autoconfianza en sus presaberes y la no necesidad de copiarle a sus compañeros”

Anexo F. Categorizacion y Codificación Diario de Campo



Anexo G. Análisis Taller Diagnóstico

REGISTRO DE: Clases
LOCALIDAD: Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga
OBSERVADOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro
ACTORES: Estudiantes de décimo grado **FECHA:** 26/10/2015

NO.	INTERPRETACION (Inferencias, preguntas y conjeturas)
	Se inicia el análisis del taller diagnóstico, según las cuatro situaciones planteadas: **Situación uno** El 35% de los estudiantes participantes sustentan como recurso conceptual el Teorema de Pitágoras, para determinar la distancia entre la ciudad A y el aeropuerto, dado que la trayectoria entre las ciudades A, B y el aeropuerto están representadas por un triángulo rectángulo, donde se conocen las distancias de dos de sus lados y para calcular el tercer lado lo más conveniente es utilizar el teorema. Sus procedimientos analíticos son correctos, identificando la incógnita y la relación entre la longitud de los lados del triángulo, es decir, identifica los catetos y la hipotenusa, mostrando así la diferencia entre ellos; con respecto a la formula hay claridad entre su interpretación y los datos involucrados en ella, luego se evidencia una interpretación y argumentación valida del Teorema de Pitágoras. Además, al escribir la solución a la pregunta del problema, realizan una conexión entre la respuesta hallada y la pregunta, teniendo en cuenta la aproximación que le realizan al valor numérico encontrado. El 30% de los estudiantes tienen claridad del concepto matemático que se requiere para determinar la distancia entre la ciudad A y el aeropuerto, identifican los catetos y la hipotenusa que se relacionan con el Teorema de Pitágoras, es decir existe un claro dominio e interpretación del teorema de Pitágoras; pero no se evidencia conexión entre la pregunta y la solución planteada, pues simplemente se usa la fórmula de acuerdo con la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Por otro lado, el 10% de la población objeto presenta una noción cercana al concepto del Teorema de Pitágoras, asociando correctamente los catetos y la hipotenusa con el triángulo rectángulo, pero se evidencia un error de sintaxis en el lenguaje matemático usado, producto de una incoherencia en el manejo de la variable o incógnita en términos alfa numéricos, donde se podría conjeturar

desconcentración en el procedimiento mecánico del uso de la fórmula que está relacionada con el Teorema de Pitágoras, sin embargo, los estudiantes llegan a la respuesta correcta. No se evidencia un sentido de relación o conexión entre la pregunta y la respuesta encontrada.

También, se evidencia un 20% de la población estudio, presenta una noción leve del Teorema de Pitágoras asociados con las longitudes de los lados del triángulo rectángulo, pero la relación conceptual entre el cateto y la hipotenusa del triángulo no es clara, y por consiguiente no están bien utilizadas en la fórmula. Se observa que en la utilización de la misma, el estudiante confunde el cateto con la hipotenusa, llevándolo a un resultado incorrecto, teniendo en cuenta que la ecuación asociada con el teorema, era correcta. De este 20%, la mitad reflejan un error conceptual en términos numéricos y desconocen la propiedad "todo número elevado al cuadrado siempre es positivo en el conjunto de los números reales", por lo tanto no existe la raíz cuadrada de números negativos, situación que se evidenció en el desarrollo procedimental de algunos estudiantes.

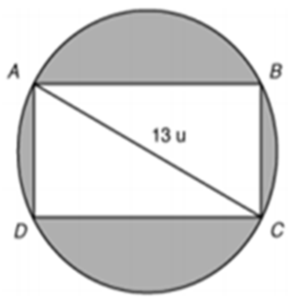
Finalmente se analiza, que el 5% restante muestra desconocimiento del Teorema de Pitágoras, y la relación entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

<u>Situación dos</u>

En este problema en la parte **a**, se identificó que el 55% de los estudiantes realizaron una interpretación adecuada entre el enunciado del problema y la pregunta planteada, donde se evidencia el manejo del área del circulo y del rectángulo, quedando claro el concepto de radio y diámetro del circulo y su relación con el área. Es de resaltar que la representación gráfica del problema facilito el planteamiento de solución, porque el estudiante requería encontrar la diferencia entre el área del circulo y el área del rectángulo inscrito en él. Además, dentro de ese 55%, el 36.36% de los estudiantes no solo plantean la solución sino que presentan un argumento frente a la respuesta obtenida en su planteamiento respectivo, se observa que este porcentaje de estudiantes intenta inferir frente a la solución planteada. Por otro lado, un 10% llega a la respuesta sin realizar una lectura a la representación gráfica del problema, presentando así un planteamiento invertido, donde no determina si el área externa es mayor que el área interna, generada por el rectángulo inscrito, llegando así a una cantidad negativa que representa el área sobrante; sin embargo, el otro 35% del total de los estudiantes solo evidencian el concepto del área de circulo, identificando la relación entre el radio y el diámetro del círculo, pero a pesar de la representación gráfica del enunciado del problema, los estudiantes no interpretan la pregunta frente al área sobrante que hay entre el círculo y el área del rectángulo. Es decir, no encuentran una conexión entre el dibujo y la pregunta planteada. Se resalta que el área del rectángulo era dada en el enunciado del problema, por consiguiente se identifica una dificultad en la comprensión lectora, más que en la parte conceptual matemática, dado que hay dificultad en la interpretación entre el área de la región del circulo exterior al rectángulo, y el área de la región sombreada, que era evidente en el dibujo, ambas frases representan lo mismo, en conclusión se refleja también falencia en el lenguaje matemático, esto exige que las frases utilizadas en los problemas deben ser más explícitas en lo posible, porque el lenguaje técnico no facilita mejorar su comprensión.

A continuación se evidencia la situación dos

“2. La figura muestra cómo se inscribe un rectángulo de área 60 u2 en un círculo de radio
6.4 u.



a. Determine el área de la región del círculo exterior al rectángulo.
b. Calcule las medidas de los lados del rectángulo inscrito en el círculo.”

Igualmente, otro 10% determinan correctamente el área del círculo, pero presentan dificultad con respecto al área del rectángulo, siendo que esta información era dada en el enunciado del problema, sin embargo, un 5% de éste grupo, toman el dato del área del rectángulo como una longitud y suponen que el área del mismo es igual al área de un cuadrado. El procedimiento anterior muestra un error conceptual, comprensión lectora y de interpretación, al relacionar el área del rectángulo con la longitud del mismo. Así mismo, el otro 5% por ciento de este grupo, tienen claridad en la fórmula del área del rectángulo pero asume ésta y la diagonal como las longitudes de sus lados (base y altura); frente a esto se evidencia confusión en el concepto de área y longitud, lado y diagonal.

Finalmente, el 25% restante del grupo determinan el área del círculo sin comprender que el área de la región externa al rectángulo no es simplemente el área de éste, por consiguiente no hay una interpretación entre dibujo y la pregunta planteada. Luego, el lenguaje técnico incide de manera directa e indirecta en la comprensión de un problema, porque al hablar del área sombreada o el área de la región del círculo exterior al rectángulo, simplemente representan lo mismo, solo que en la primera está más relacionada directamente con el dibujo, y que podría ayudar al estudiante a aclarar su interpretación.

Por otro lado, se analiza que en la parte **b** del problema, el 30% de los estudiantes participantes utilizaron el concepto del Teorema de Pitágoras, para determinar los lados del rectángulo de forma correcta y creativa, porque construyen una tripla pitagórica "$a^2 + b^2 = c^2$, *entonces* $c = \sqrt{a^2 + b^2}$" a partir de su diagonal; es decir no fue necesario plantear un sistema de ecuaciones de dos por dos, donde resulta una ecuación de grado cuatro, que puede ser reducida a grado dos y factorizada para poder determinar los lados del rectángulo. En este mismo punto, encontramos un 10% de los estudiantes que asignan el radio como uno de los catetos del rectángulo, teniendo en cuenta que reconocen la fórmula del Teorema de Pitágoras. Aquí se evidencia un error conceptual geométrico, donde el estudiante tiene en cuenta la representación gráfica pero su interpretación no es correcta. El 5% de los participantes confunde el área del rectángulo con el área de un triángulo, por consiguiente plantea el área del triángulo y de esta manera deduce la base y altura del mismo, se evidencia que no hubo una interpretación correcta frente a la pregunta plantada. Además, supone que al dividir el rectángulo en dos triángulos rectángulos, no son congruentes, esto refleja que no hay claridad frente a los criterios de semejanza de triángulos y conceptos básicos de la geometría plana. Finalmente, en este punto se identifica que el 55% de la población estudio, no evidencia el uso del Teorema de Pitágoras, o el planteamiento de un sistema de ecuaciones de dos por dos, teniendo en cuenta que en este punto existe un 10% que intenta establecer una relación de proporcionalidad entre el área del rectángulo y su diagonal, para deducir el valor de uno de sus lados, luego existe un uso inadecuado del criterio de semejanza de triangulo, donde no se puede relacionar área con longitud.

Situación tres

En esta situación la primera parte consiste en indagar sobre qué datos son necesarios para calcular la altura del edificio, donde hay un dibujo que representa la situación de dos triángulos rectángulos relacionando su respectiva altura. En este problema se identifica que el 55% de los estudiantes, en la pregunta cerrada de opción múltiple con única respuesta escogen la **b,** que relaciona el ángulo con uno de los lados del rectángulo con respecto a la altura del edificio, no hay una conexión con la semejanza de triángulo que plantea la proporcionalidad entre los lados del mismo. La opción **c** la selecciona el 15% de los participantes, donde se relacionan dos lados del triángulo ABD el cual es semejante al triangulo ABC, luego involucra el criterio de semejanza de triangulo para determinar la altura del edificio. Por otro lado se identifica que el 20% de la población estudio escoge la opción **d,** quien describe un lado de los triángulos rectángulos ABC y ABD, ésta información permite usar el criterio de semejanza de triángulos, sin embargo se requiere conocer la medida de otro lado de alguno de los dos triángulos, por consiguiente la información no es completa. Y un 10% no escogieron ninguna opción.

Por otro lado, la segunda parte de la situación tres es el procedimiento para hallar la altura del edificio, donde se evidencian cinco aspectos distintos: el 30% de los estudiantes usaron la razón trigonométrica de la tangente del ángulo de elevación, para relacionar la altura con la distancia que hay entre el observador y la base del edificio; que está relacionado con la opción **b** escogida de acuerdo a los datos que fueron dados. Luego existe una correlación entre la parte procedimental y la información suministrada, esto permite que el concepto utilizado sea acorde a la solución planteada. Así mismo, un 25% de los participantes, en lo procedimental usan la semejanza de triángulos de acuerdo con los datos proporcionados en la primera parte, sin un razonamiento deductivo e inferencial que conecte la información dada, por consiguiente la solución planteada no es satisfactoria, por otra parte es de resaltar que el 10% de estos estudiantes escogieron la opción **c** y el 15% la opción **d,** donde se describe dos triángulos rectángulos, para lo cual se plantea un criterio de semejanza, surgiendo dos incógnitas en una ecuación, luego el sistema es inconsistente para poder determinar una única solución, es decir falta información. El otro 25% de los estudiantes se dividió: el 10% planteó el área de un triángulo sin sentido lógico con respecto a la pregunta planteada y el restante usa el teorema de Pitágoras igualmente sin un razonamiento lógico. Finalmente surge un 20% que no responden, ósea no presentan un procedimiento.

El 60% de los participantes en la situación planteada usaron el criterio de proporcionalidad entre triángulos semejantes, asociado de manera correcta con respecto a la pregunta planteada, se evidencia una conexión clara conceptual, entre las longitudes de los lados de los triángulos. Así mismo, el 25% de los estudiantes plantean una relación entre las longitudes de los triángulos sin un criterio lógico, igualmente entre estos estudiantes el 10% usa el teorema de Pitágoras para cada triángulos rectángulo, tratando de encontrar una relación de proporcionalidad, sin tener en cuenta que no era suficiente porque solo se conocía la longitud de uno delos tres lados; por otro lado hay un 5% que al plantear la relación de proporcionalidad refleja una comparación arbitraria entre las longitudes de los lados de cada triángulo relacionado (lados opuestos con lados adyacentes) y además el otro 10% plantea una relación entre las áreas de los círculos que tienen como radio, la longitud de uno de los lados correspondientes a cada triángulo rectángulo formado, luego no hay un criterio que permita relacionar la longitud del otro lado de cada triángulo, no hay un uso conceptual y procedimental que correlacione las longitudes de los lados de los triángulos.

Finalmente un 15% de los educandos no plantean ningún tipo de solución, donde no se evidencia el recurso conceptual para plantear alguna propuesta procedimental.

El texto marcado en color respectivo representa:

Color rojo: Procesos en la solución
Color azul claro: Mecanización de procesos simples
Color verde oscuro: Razonamientos sencillos secuenciales
Color morado: Teorema de Pitágoras
Color amarillo: Teorema de Thales
Color azul marino: Interpretación y análisis de datos
Color verde claro: Deducir la representación gráfica

Anexo H. Categorización Taller Diagnóstico

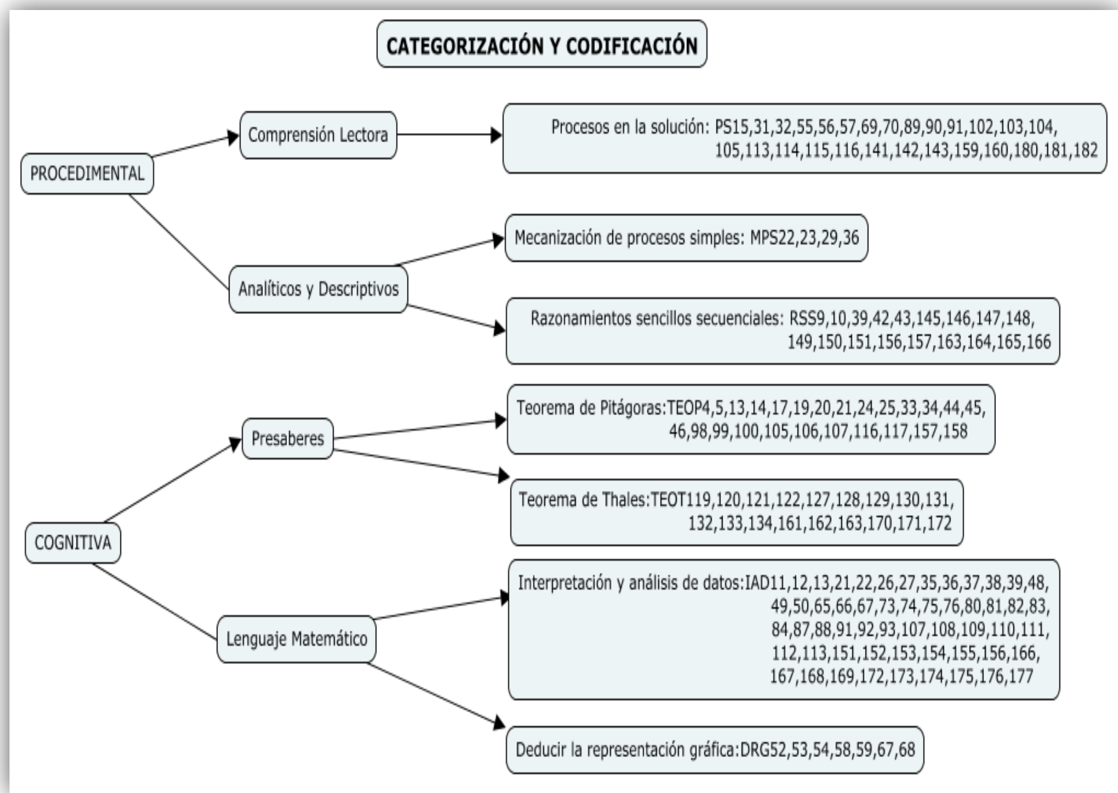
CATEGORIAS		SUBCATEGORIAS
PROCEDIMENTAL	COMPRENSIÓN LECTORA	**Procesos en la solución** - PS15-2“realizan una conexión entre la respuesta hallada y la pregunta” - PS31,32-3“no se evidencia un sentido de relación o conexión entre la pregunta y la respuesta encontrada” - PS55,56,57-6“36.36% de los estudiantes no solo plantean la solución sino que presentan un argumento frente a la respuesta obtenida en su planteamiento respectivo” - PS69,70-6“se identifica una dificultad en la comprensión lectora, más que en la parte conceptual matemática” - PS89,90,91-9“el 25% restante del grupo determinan el área del círculo sin comprender que el área de la región externa al rectángulo no es simplemente el área de éste” - PS102,103,104,105-10“no fue necesario plantear un sistema de ecuaciones de dos por dos, donde resulta una ecuación de grado cuatro, que puede ser reducida a grado dos y factorizada para poder determinar los lados del rectángulo”. - PS113,114,115,116-10“al dividir el rectángulo en dos triángulos rectángulos, no son congruentes, esto refleja que no hay claridad frente a los criterios de semejanza de triángulos y conceptos básicos de la geometría plana”. - PS141,142,143-12“30% de los estudiantes usaron la razón trigonométrica de la tangente del ángulo de elevación” - PS159,160-12“un 20% que no responden, ósea no presentan un procedimiento”. - PS180,181,182-14“un 15% de los educandos no plantean ningún tipo de solución, donde no se evidencia el recurso conceptual para plantear alguna propuesta procedimental”.
	ANALITICOS Y DESCRIPTIVOS	**Mecanización de procesos simples** - MPS22,23-2 “se usa la fórmula de acuerdo con la relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo” - MPS29-3 “desconcentración en el procedimiento mecánico del uso de la fórmula” - MPS36-4 “no están bien utilizadas en la fórmula”
		Razonamiento sencillo secuencial - RSS9,10-2 “Sus procedimientos analíticos son correctos, identificando la incógnita y la relación entre la longitud de los lados del triángulo” - RSS39, 40-4 “De este 20%, la mitad reflejan un error conceptual en términos numéricos y desconocen la propiedad” - RSS42,43-4 “no existe la raíz cuadrada de números negativos, situación que se evidenció en el desarrollo procedimental de algunos estudiantes”.

		- RSS145, 146, 147, 148, 149, 150, 151-12 “existe una correlación entre la parte procedimental y la información suministrada, esto permite que el concepto utilizado sea acorde a la solución planteada. El 25% de los participantes, en lo procedimental usan la semejanza de triángulos de acuerdo con los datos proporcionados en la primera parte, sin un razonamiento deductivo e inferencial que conecte la información dada, por consiguiente la solución planteada no es satisfactoria” - RSS156, 157-12 “el 10% planteó el área de un triángulo sin sentido lógico con respecto a la pregunta planteada” - RSS163,164, 165, 166-13 “se evidencia una conexión clara conceptual, entre las longitudes de los lados de los triángulos. Así mismo, el 25% de los estudiantes plantean una relación entre las longitudes de los triángulos sin un criterio lógico”
COGNITIVO	PRESABERES	**Teorema de Pitágoras** - TEOP4,5-2 “El 35% de los estudiantes participantes sustentan como recurso conceptual el Teorema de Pitágoras” - TEOP13,14-2 “se evidencia una interpretación y argumentación valida del Teorema de Pitágoras”. - TEOP17-2 “El 30% de los estudiantes tienen claridad del concepto matemático” - TEOP19,20,21-2 “identifican los catetos y la hipotenusa que se relacionan con el Teorema de Pitágoras, existe un claro dominio e interpretación del teorema de Pitágoras” - TEOP24,25-3 “el 10% de la población objeto presenta una noción cercana al concepto del Teorema de Pitágoras” - TEOP33,34-4 “se evidencia un 20% de la población estudio, presenta una noción leve del Teorema de Pitágoras” - TEOP44,45,46-5 “el 5% restante muestra desconocimiento del Teorema de Pitágoras, y la relación entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo”. - TEOP98,99,100-10 “el 30% de los estudiantes participantes utilizaron el concepto del Teorema de Pitágoras, para determinar los lados del rectángulo de forma correcta y creativa” - TEOP105,106,107-10 “un 10% de los estudiantes que asignan el radio como uno de los catetos del rectángulo, teniendo en cuenta que reconocen la fórmula del Teorema de Pitágoras” - TEOP116,117-10 “el 55% de la población estudio, no evidencia el uso del Teorema de Pitágoras” - TEOP157,158-12 “el restante usa el teorema de Pitágoras igualmente sin un razonamiento lógico”. **Teorema de Thales** - TEOT119,120,121,122-10 “un 10% que intenta establecer una relación de proporcionalidad entre el área del rectángulo y su diagonal, para deducir el valor de uno de sus lados, luego existe un uso inadecuado del criterio de semejanza de triangulo, donde no se puede relacionar área con longitud”. - TEOT127, 128,129,130,131-11 “el 55% de los estudiantes, en la pregunta cerrada de opción múltiple con única respuesta escogen la **b,** que relaciona el ángulo con uno de

		los lados del rectángulo con respecto a la altura del edificio, no hay una conexión con la semejanza de triángulo que plantea la proporcionalidad entre los lados del mismo” - TEOT131,132,133,134-11 “15% de los participantes, donde se relacionan dos lados del triángulo ABD el cual es semejante al triangulo ABC, luego involucra el criterio de semejanza de triangulo para determinar la altura del edificio”. - TEOT161,162,163-13 “El 60% de los participantes en la situación planteada usaron el criterio de proporcionalidad entre triángulos semejantes, asociado de manera correcta con respecto a la pregunta planteada” - TEOT170,171,172-13 “un 5% que al plantear la relación de proporcionalidad refleja una comparación arbitraria entre las longitudes de los lados de cada triángulo relacionado”
	LENGUAJE MATEMÁTICO	**Interpretación y análisis de datos** - IAD11,12,13-2 “con respecto a la formula hay claridad entre su interpretación y los datos involucrados en ella” - IAD21,22-2 “evidencia conexión entre la pregunta y la solución planteada” - IAD26,27-3 “evidencia un error de sintaxis en el lenguaje matemático usado” - IAD27,28-3 “incoherencia en el manejo de la variable o incógnita en términos alfa numéricos” - IAD35,36-4 “relación conceptual entre el cateto y la hipotenusa del triángulo no es clara” - IAD37,38,39-4 “el estudiante confunde el cateto con la hipotenusa, llevándolo a un resultado incorrecto, teniendo en cuenta que la ecuación asociada con el teorema, era correcta” - IAD48,49,50-6 “se identificó que el 55% de los estudiantes realizaron una interpretación adecuada entre el enunciado del problema y la pregunta planteada” - IAD65,66,67,-6 “a pesar de la representación gráfica del enunciado del problema, los estudiantes no interpretan la pregunta frente al área sobrante que hay entre el círculo y el área del rectángulo” - IAD73,74,75,76-6 “se refleja también falencia en el lenguaje matemático, esto exige que las frases utilizadas en los problemas deben ser más explícitas en lo posible, porque el lenguaje técnico no facilita mejorar su comprensión” - IAD80,81,82, 83,84-8 “un 5% de éste grupo, toman el dato del área del rectángulo como una longitud y suponen que el área del mismo es igual al área de un cuadrado. El procedimiento anterior muestra un error conceptual, comprensión lectora y de interpretación, al relacionar el área del rectángulo con la longitud del mismo” - IAD87,88-8 “se evidencia confusión en el concepto de área y longitud, lado y diagonal” - IAD91,92,93-9 “no hay una interpretación entre dibujo y la pregunta planteada, el lenguaje técnico incide de manera directa e indirecta en la comprensión de un problema” - IAD107,108,109-10 “se evidencia un error conceptual geométrico, donde el estudiante tiene en cuenta la representación gráfica pero su interpretación no es

		correcta" - IAD109,110,111,112,113-10 "El 5% de los participantes confunde el área del rectángulo con el área de un triángulo, por consiguiente plantea el área del triángulo y de esta manera deduce la base y altura del mismo, se evidencia que no hubo una interpretación correcta frente a la pregunta plantada" - IAD151,152,153,154,155,156-12 "el 10% de estos estudiantes escogieron la opción **c** y el 15% la opción **d,** donde se describe dos triángulos rectángulos, para lo cual se plantea un criterio de semejanza, surgiendo dos incógnitas en una ecuación, luego el sistema es inconsistente para poder determinar una única solución, es decir falta información" - IAD166,167,168,169-13 "el 10% usa el teorema de Pitágoras para cada triángulos rectángulo, tratando de encontrar una relación de proporcionalidad, sin tener en cuenta que no era suficiente porque solo se conocía la longitud de uno delos tres lados" - IAD172,173,174,175,176,177-13 "El 10% plantea una relación entre las áreas de los círculos que tienen como radio, la longitud de uno de los lados correspondientes a cada triángulo rectángulo formado, luego no hay un criterio que permita relacionar la longitud del otro lado de cada triángulo, no hay un uso conceptual y procedimental que correlacione las longitudes de los lados de los triángulos"
		Deducir la representación gráfica - DRG52,53,54-6 "la representación gráfica del problema facilito el planteamiento de solución, porque el estudiante requería encontrar la diferencia entre el área del circulo y el área del rectángulo inscrito en él" - DRG58,59-6 "un 10% llega a la respuesta sin realizar una lectura a la representación gráfica del problema" - DRG67,68-6 "no encuentran una conexión entre el dibujo y la pregunta planteada"

Anexo I. Categorización y Codificación de Taller Diagnóstico



Anexo J. Codificación Entrevista

NOMBRE: DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PÚBLICA DE BUCARAMANGA

ESTUDIANTES DE GRADO 10°

ASIGNATURA: Trigonometría

INSTRUMENTO: Cuestionario

TÉCNICA: Entrevista

ENCUENTA: Estrategias que Usa el Estudiante Para Resolver Problemas Trigonométricos

CODIFICACIÓN ABIERTA

1. **En el enunciado de un problema trigonométrico, ¿qué características son importantes para entenderlo?**

Respuesta	Código Identificación
"Los datos, los números que se dan y la pregunta que nos dan"	MSPQ
"Tener claridad en los datos que nos dan, las claves para solucionarlo"	FKSJ
"Pienso que son los datos que nos dan, como: cantidades, alturas, distancia, etc."	FMFV
"Saber muy bien las ecuaciones, qué es un lado, reconocer la razón trigonométrica, saber las operaciones básicas, saber interpretar un problema"	FKMVO
"tener todos los datos, que las figuras estén entendibles. El enunciado este claro y no enredado"	MMAE
"La pregunta debe estar concreta de lo que preguntan, los datos"	MJEAA
"tenemos que prestarle atención, leerlo muy bien antes de responderlo, sacar datos, sino se entiende, preguntar"	FLJE
"Los datos numéricos que se dan y la pregunta que nos dan"	MLNJP
"Debe ser importante interpretar el problema y sacarle los datos del problema"	FCJD
"Los datos, lo que se pide resolver, las incógnitas y las ecuaciones sean claras y precisas"	FSRR

CÓDIGOS: **Color rojo:** Interpretación y análisis de datos **Color verde:** Razonamientos sencillos secuenciales **Color azul:** Deducir la representación gráfica **Color celeste:** Procesos en la solución	**CÓDIGO IDENTIFICACIÓN** **Género:** Hombre (M) – Mujer (F) **Iniciales:** primer nombre - segundo nombre - primer apellido **Ejemplo:** **Hombre Daniel Oswaldo Téllez = MDOT**

Según los estudiantes esas características son:

Los estudiantes consideran	Código	Respuesta
"Los datos, los números que se dan y la pregunta que nos dan"	MSPQ; FMFV; MJEA; FLJL; FSNC; MSEBS; FKSJ; FACR; FJCO; FMCV; MJFRN	55%
"Saber muy bien las ecuaciones, qué es un lado, reconocer la razón trigonométrica, saber las operaciones básicas, saber interpretar un problema"	FKMVO; FJTT; MSRR; FAOV	20%
"tener todos los datos, que las figuras estén entendibles. El enunciado este claro y no enredado"	MMAE; MBALH	10%
"tenemos que prestarle atención, leerlo muy bien antes de responderlo, sacar datos, sino se entiende, preguntar"	FLJE; FCJD; MSEA	15%
CATEGORIAS **Lenguaje Matemático:** Interpretación y análisis de datos **Analíticos y descriptivos:** Razonamientos sencillos secuenciales **Lenguaje Matemático:** Deducir la representación gráfica **Comprensión Lectora:** Procesos en la solución	**INTERPRETACIÓN** El proceso realizado en la entrevista, se identifica que en la pregunta, ¿Qué características son importantes para entender un problemas?, el 55% de los estudiantes requieren que los ***datos*** sean lo más específico, para mejorar la interpretación del problema, con respecto a la ***pregunta*** encontrando una conexión lógica entre las dos. El otro 20% manifiesta la necesidad de un dominio en los ***procesos de solución***, para desarrollar el problema, como parte procedimental en la solución del mismo. Otro grupo de estudiantes representado en un 15%, evidencia la importancia de la comprensión del problema y el uso de ***Razonamientos Sencillos Secuenciales,*** correlacionándose entre sí, como parte de la interpretación del problema. Finalmente el 10% restante de los estudiantes expresan que la ***representación gráfica*** es fundamental en la comprensión, interpretación y solución del problema, porque facilita la lectura de los datos con respecto a la pregunta planteada.	

2. Los datos, las descripciones del enunciado del problema a partir de un dibujo generan cualidades del mismo, ¿hasta qué punto estas favorecen la interpretación del problema?

Respuesta	Código Identificación
"Nos ayuda a ver el problema desde otra perspectiva, ya que nos interpreta el problema de forma dinámica"	**MSPQ-**
"Las representaciones gráficas del problema nos ayudaron bastante"	**FKSJ**
"Estos dibujos o representaciones gráficas del problema nos ayudaron bastante o por lo menos a mí, ya que por medio de ellos entendí mejor el problema o enunciado"	**FMFV**
"Cuando nos dice el planteamiento, las operaciones y ecuaciones"	**FCJD**
"Creo que favorece, porque a veces lo que no entienda, lo podré ubicar en el dibujo, siempre y cuando haya concentración"	**MSEBS**
"Sí, el dibujo puede generar aclaración de ideas, el dibujo me parece necesario"	**FMCV**
"Nos ayudan a ver el problema desde otra perspectiva que puede facilitarnos el procedimiento del problema"	**FJCO**
"Con el dibujo la persona se puede guiar mejor en el problema"	**MJEAA**
"Creo que son muy fundamentales a la hora de resolver el problema, los enunciados, porque es la guía que nos dan y el dibujo, porque es lo complementario que nos idealiza el problema"	**FSNC**
"Depende del dibujo, de que datos se le asignan al dibujo y si este es coherente"	**FSRR**

CÓDIGO: **Color amarillo:** Procesos en la solución **Color rosado:** Interpretación y análisis de datos **Color Azul oscuro:** Razonamientos sencillos secuenciales

Según los estudiantes esas características son:

Los estudiantes consideran	Código	Respuesta
"Nos ayuda a ver el problema desde otra perspectiva, ya que nos interpreta el problema de forma dinámica"	MSPQ; FJTT; FJCO; FAOV;FLJLP; FACR; MJFR; MBALH	40%
"Estos dibujos o representaciones gráficas del problema nos ayudaron bastante o por lo menos a mí, ya que por medio de ellos entendí mejor el problema o enunciado"	FKSJ; FMFV; MSEBS; FMCV; FSNC; MSEA; FLJE; MMAE; FKMVO	45%
"Cuando nos dice el planteamiento, las operaciones y ecuaciones"	FCJD; MJEAA; FSRR	15%
CATEGORIAS **Comprensión Lectora:** Procesos en la solución **Lenguaje Matemático:** Interpretación y análisis de Datos **Analíticos y Descriptivos:** Razonamientos sencillos secuenciales	**INTERPRETACIÓN** Según la pregunta realizada en la entrevista, "Los datos, la descripción del enunciado del problema a partir de un dibujo, generan cualidades del mismo, ¿hasta qué punto estas favorecen la interpretación", el 45% de los estudiantes resaltan la importancia del ***Lenguaje Matemático*** en el problema, desde un punto de vista concreto que lo proporciona el dibujo, dando conexión lógica para realizar lo procedimental. Por otro lado el 40% de los participantes, manifiestan que el dibujo contribuye en los ***procesos en la solución,*** donde se requiere razonamiento e inferencia en la parte procedimental. El 15% restante describen lo relevante que es el orden con respecto a los ***razonamientos sencillos secuenciales***, necesario para solucionar el problema, basado en el dominio de los presaberes.	

3. Enuncie los pasos que normalmente realiza al resolver un problema trigonométrico con triángulos rectángulos

Respuesta	Código Identificación
"Si no nos lo dibujan, el primer paso sería dibujarlos, después hallar todos los lados"	**MSPQ**
"Leer y releer, y pensar en las ecuaciones que empleare"	**FKSJ**
"Los pasos que realiza principalmente son: 1. Leer y comprender el problema. 2. Observar los datos. 3. Sacar y complementar datos"	**FMFV**
"Identificar el triángulo rectángulo, saber hacer las operaciones"	**FKMVO**
"Primero sacar los datos que nos dan, ubicarlos en la gráfica y hacer el triángulo de Pitágoras, interpretarlo y ya"	**MMAE**
"Leer más de una vez el problema, hacer pruebas de las respuestas (borrador, y luego desarrollar)"	**MJEAA**
"Intento interpretar si es rectángulo o no, mirar los ángulos cuanto miden, releer la pregunta, y luego hacer el problema cuidadosamente "	**MBALH**
"Reconocer la razón trigonométrica que va relacionada, identificar los lados de los triángulos, buscar la ecuación o las formas de resolverlos, Teorema de Pitágoras"	**MFJTT**
"1. Busco todos los lados y si falta uno, lo encuentro y después empiezo a resolver"	**MSEA**
"1. Analizar los problemas planteados. 2. Reunir los datos, las incógnitas y las ecuaciones. 3. Reemplazar valores y comprobar"	**MSRR**

CÓDIGO:

Color rojo: Deducir la representación gráfica
Color verde: Procesos en la solución
Color azul: Interpretación y análisis de datos

Según los estudiantes esas características son:

Los estudiantes consideran	Código	Respuesta
"Los pasos que realiza principalmente son: 1. Leer y comprender el problema. 2. Observar los datos. 3. Sacar y complementar datos"	FMFV; FKSJ; MJEAA; MBALH; FJCO; MSEBS; FCJD; FSNC;	40%
"Reconocer la razón trigonométrica que va relacionada, identificar los lados de los triángulos, buscar la ecuación o las formas de resolverlos, Teorema de Pitágoras"	MFJTT; MSPQ; FMCV; FLJE; MJFRN	25%
"1. Analizar los problemas planteados. 2. Reunir los datos, las incógnitas y las ecuaciones. 3. Reemplazar valores y comprobar"	MSRR; MSEA; FKMVO; MMAE; FACR; FLJLP; FAOV	35%
CATEGORIAS: **Lenguaje Matemático:** Deducir la representación gráfica **Comprensión Lectora:** Procesos en la solución **Lenguaje Matemático:** Interpretación y análisis del datos	**INTERPRETACIÓN:** Los resultados obtenidos en la pregunta, "Enuncie los pasos que normalmente realiza al resolver un problema trigonométrico con triángulos rectángulos", se identifica que el 40% de los estudiantes requieren leer y releer para mejorar la ***comprensión lectora***, y así poder aplicar una estrategia procedimental para su respectiva solución. El 35% manifiesta como estrategia la ***interpretación y análisis de los datos***, con relación a la pregunta, para encontrar una conexión lógica y analítica entre las dos. Por otro lado, el 25% de los participantes describen como parte de la solución del problema se necesita ***deducir la representación gráfica,*** porque de ella se puede inferir el razonamiento lógico para solucionar el problema.	

4. ¿Qué considera difícil en el momento de resolver un problema?

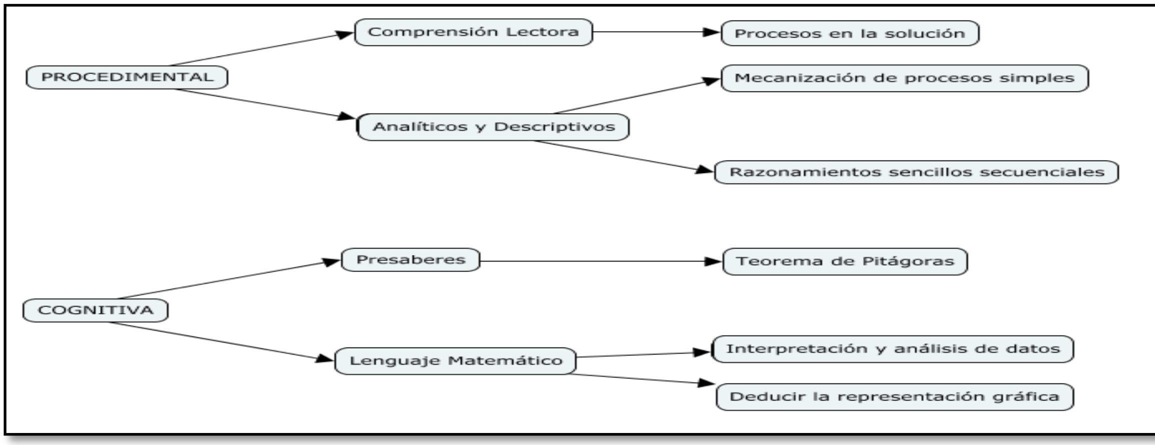
Respuesta	Código Identificación
"Analizarlo analíticamente"	**MSPQ**
"Que me confundo con algunos datos del problema"	**FKSJ**
"En el momento de resolver un problema considero que es difícil, cuando vamos a despejar la variable para llegar a la respuesta"	**FMFV**
"Lo difícil es que no se sabe casi interpretar ya que algunas veces el problema es algo complicado, y no muy entendible, falta de percepción"	**FLJE**
"creo que la confusión al tener una respuesta, o al escoger las ecuaciones y escoger las variables"	**FACR**
"Probablemente aprenderse las ecuaciones y los procedimientos claves"	**MJEAA**
"Pues creo que lo más difícil seria comprender perfectamente y el interpretar el problema, porque sin eso así sepamos solucionar o resolver, pero sino interpreta todo quedará mal"	**FSNC**
"Que se olviden las ecuaciones, que debo hacer en el planteamiento al resolver el problema"	**FJTT**
"Me parece difícil cuando se empieza a resolver la ecuación"	**MSEA**
"Algunas ecuaciones que están planteadas y que no son muy claras"	**MSRR**
CÓDIGO:	

Color morado: Procesos en la solución **Color verde:** Mecanización de procesos simples **Color celeste:** interpretación y análisis de los datos **Color rojo:** Teorema de Pitágoras

Según los estudiantes esas características son:

Los estudiantes consideran	Código	Respuesta
"Pues creo que lo más difícil seria comprender perfectamente y el interpretar el problema, porque sin eso así sepamos solucionar o resolver, pero sino interpreta todo quedará mal"	FSNC; FLJE; FKSJ; FAOV; FCJD	25%
"creo que la confusión al tener una respuesta, o al escoger las ecuaciones y escoger las variables"	FACR; MSPQ; FMCV; MSEBS, MJFRN	25%
"En el momento de resolver un problema considero que es difícil, cuando vamos a despejar la variable para llegar a la respuesta"	FMFV; MSEA; MSRR; FKMVO; MBALH; MMAE; FLJLP	35%
"Que se olviden las ecuaciones, que debo hacer en el planteamiento al resolver el problema"	FJTT; MJEAA; FJCO	15%
CATEGORIAS: **Comprensión Lectora:** Procesos en la solución **Analíticos y Descriptivos:** Mecanización de procesos Simples **Lenguaje Matemático:** interpretación y análisis de los Datos **Presaberes:** Teorema de Pitágoras	**INTERPRETACIÓN:** Para el análisis de la pregunta, ¿Qué considera difícil en el momento de resolver un problema?, se refleja un 35% de los participantes presentan dificultad en la parte ***procedimental*** que es necesaria para obtener una solución del problema. Así mismo, el 25% describe que su falencia radica en ***la interpretación de los datos*** y de la pregunta, para poder identificar la variable cuyo valor se desconoce. Por otro lado, el 25% manifiestan que el grado de complejidad en la solución de un problema se radica en lo ***analítico y descriptivo*** del mismo, estos permiten obtener un razonamiento lógico que da respuesta a la pregunta planteada. Finalmente, el 15% de los entrevistados resaltan la importancia del dominio de los ***presaberes*** para poder plantear un procedimiento analítico y lógico frente a la comprensión e interpretación del problema.	

Anexo K. Categorización y Codificación Axial de Entrevista



CODIFCACIÓN AXIAL

MEMORANDO DESCRIPTIVOS 1

Descripción:

"La interpretación a partir del dibujo que describe el enunciado del problema"

Categorías: Representación gráfica como vía de la interpretación entre los datos y la variable de un problema.

Para los niños y niñas, la característica que son importantes en el enunciado de un problema trigonométrico están relacionadas con el "*tener los datos, que las figuras estén entendibles, el enunciado este claro y no enredado*"; y cuando el enunciado no está acompañado de una imagen o dibujo entonces…"*el primer paso sería* *dibujarlos, después hallar los lados*" el triángulo, sin embargo "…problemas con enunciados sin gráficos, para mí se me hacen un poco dificultoso" su interpretación; luego "*con el dibujo la persona se puede guiar mejor en el problema*", porque logra diferenciar los datos de la variable, ya que "*con dibujos podemos entender mejor, porque cuando es solo el enunciado no sabemos exactamente que debemos hallar*" y si en el dibujo están los datos bien definidos esto "*ayuda mucho porque, si no entiende el problema, lo puede entender con la gráfica*" al poder relacionar la información con la pregunta del problema, mejorando así la comprensión la cual "*depende del dibujo, de que datos se le asignan al dibujo y si este es coherente*" con la estrategia de solución que plantea el estudiante.

Reflexión: La solución de problemas trigonométricos requiere estrategias que orientan la interpretación del mismo a partir del dibujo, que describe y presenta elementos que facilitan la comprensión y relación de los datos con la pregunta que se plantea, tal como lo enuncia en uno de los pasos para resolver el problema:

> *"Si no nos lo dibujan, el primer paso sería dibujarlo, después hallar todos los lados".*

El dibujo proporciona una organización y diferenciación entre los datos y las variables, que pueden ser asociados al concepto trigonométrico, quien valida y resuelve las preguntas del problema, según lo mencionado por:

> *"Tener todos los datos, que las figuras estén entendibles. El enunciado este claro y no enredado".*

Pregunta al investigador: ¿El dibujo o representación gráfica que describe el enunciado del problema, determina una estrategia desde lo interpretativo para solucionar un problema?

Preguntas de profundización: El dibujo que describe el enunciado del problema, ¿Qué tipo de relación establece entre el dato y la variable?

El dibujo como estrategia en la solución de problemas, ¿Qué relación tiene con la pregunta del problema?

CODIFCACIÓN AXIAL

MEMORANDO DESCRIPTIVO 2

Descripción:

"Los presaberes, son parte fundamental en lo procedimental al resolver un problema"

Categorías: Los presaberes, requisito fundamental en la solución de problemas

En los estudiantes es clave "*las incógnitas y las ecuaciones*", "*reconocer las razones trigonométricas, saber las operaciones básicas*", para poder plantear la relación entre los datos y la variable, sin embargo "*algunas ecuaciones planteadas y que no son muy claras*" dificulta la parte procedimental que realiza el educando, cuando desea relacionar "*los datos numéricos que se dan y la pregunta que nos dan",* porque para establecer "*el planteamiento, las operaciones y ecuaciones*" se requiere tener claridad en lo que "*me están pidiendo hallar*" para ello debe "*analizarlo analíticamente*" en especial "*cuando vamos a despejar la variable para* *llegar a la respuesta*” que plantea la pregunta del problema. Además, “*los procedimientos, paso a paso*” y “*aprenderse las formulas es difícil*”, luego “*aprenderse las ecuaciones y procedimientos son claves*” para desarrollar la solución del problema. El hecho de no saber “*bien las fórmulas*” complejiza el procedimiento de “*resolver la ecuación*” porque “*no son muy claras*” especialmente cuando se “*compara valores y se comprueban*”.

Preguntas de profundización:

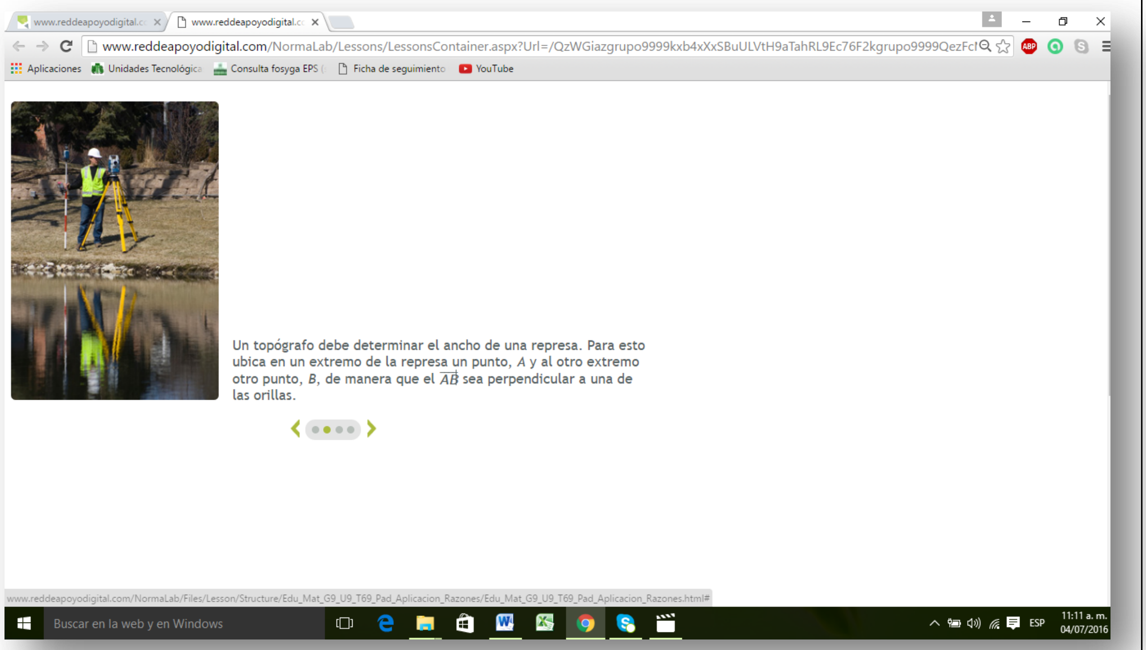
¿Qué presaberes se requieren para resolver problemas trigonométricos?
Los presaberes ¿en qué aspectos influyen en el planteamiento del problema como estrategia?

Anexo L. Diario de Campo: Observación Unidad Didáctica

REGISTRO DE: Clases **DURACIÓN DEL REGISTRO:** 7:30 A.M. a 10:00 A.M.
LOCALIDAD: Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga
OBSERVADOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro
ACTORES: Estudiantes de décimo grado **FECHA:** 08/06/2016

No.	DESCRIPCIÓN DE OBSERVACIÓN E INTERPRETACIÓN
	Se inicia con la presentación y explicación de los diferentes momentos que se desarrolla en la unidad didáctica, aquí se describe la justificación, los objetivos (generales y específicos), competencias y contenidos disciplinares. Además, se socializa las estrategias didácticas y organización de las actividades a realizarse. La actividad del estudiante inicia con la fase preliminar que contiene unas explicaciones digitales que permiten socializar e interactuar con la herramienta virtual (Red de Apoyo Digital – RAD), donde el estudiante se apropia de los presaberes y razones trigonométricas involucradas en la solución de problemas con triángulos rectángulos. Igualmente cada estudiante explora al finalizar las explicaciones unas evaluaciones digitales que permiten retroalimentar y afianzar los conceptos abordados. Se conformaron 4 grupos en pareja que fueron 8 estudiantes en total y 12 estudiantes individualmente, ya que solo se contó con 16 equipos para poder realizar la actividad en la sala de informática de la institución educativa. A partir de ese momento, inician la exploración digital de la herramienta y aproximadamente el 70% de los mismos, tomaban apuntes realizando pequeños resúmenes de lo leído. Durante el desarrollo de esta fase, los estudiantes solicitaron una hoja blanca para realizar los ejercicios que se planteaban en las explicaciones digitales, como en las actividades interactivas; para ello usaban calculadora, se apoyaban entre compañeros de al lado, de acuerdo a sus interpretaciones, evidenciando un trabajo colaborativo y cooperativo entre ellos, mostraban interés en la en la herramienta, por lo novedosa, creativa y generaba espacios de confrontación de acuerdo a sus presaberes, usando diversas estrategias para su comprensión como, el indagar al profesor investigador, de manera abierta y espontánea. Se percibe un espacio de libertad, participación activa entre los estudiantes y el profesor, en los momentos en que surgían dudas y cuestionamientos en las evaluaciones digitales.
	Por otro lado en el escenario de participación e interacción de los estudiantes con el docente investigador, surgen preguntas basadas en la interpretación de elementos conceptuales tales como Teorema de Pitágoras, Semejanza de triángulos y Razones trigonométricas; sus preguntas se basaban en la información presentada en los enunciados de los problemas, tales como “cuando se tenía la medida de dos lados de un triángulo o la medida de un ángulo y la medida de un lado del triángulo”, además, el interpretar “que razón trigonométrica relacionaba el lado dado con el desconocido, con respecto al ángulo dado”. Se observa un aprendizaje de lectoescritura en las evaluaciones digitales, una actitud de colaboración y trabajo en equipo. El 70%

aproximadamente de los participantes, piden explicación frente a la interpretación de problemas, pese a que estos presentan dibujos, donde se les plantea dos formas de cómo se podría analizase los problemas, es decir cuál sería la opción más pertinente y óptima para dar solución al problema. Por consiguiente, existen problemas sin dibujo, donde se presentaron dificultades para dar la representación gráfica del mismo, que pudiera facilitar su interpretación; es así, como el concepto de perpendicularidad no era claro en el enunciado del problema, lo que se evidencia a continuación



Para ello, se brindó orientación por parte del docente investigador. Por otro lado, los estudiantes indagan otros elementos que tiene la herramienta didáctica como las "notas de apuntes", donde se describen conceptos importantes y relevantes en el análisis de un problema. También se evidencia, al maestro investigador como un apoyo y más funcional cuando monitorea el trabajo de los estudiantes, sus presaberes: ¿Qué saben, y que, deben reforzar?, es decir, la herramienta permite consecutivamente evaluar el aprendizaje del estudiante. Las actividades interactivas van valorando el nivel de satisfacción logrado, aquí los estudiantes se apoyan de la calculadora para verificar sus respuestas.

Finalizada la fase preliminar, se continúa con el enfoque, donde el docente investigador pregunta a los estudiantes sobre el manejo de la herramienta; si fue de fácil manejo, entendible, facilitó el aprendizaje, a su vez, se le indica justificar su respuesta; esta actividad se desarrolló individualmente y por escrito. Luego de ello se continúa con la fase de confrontación, para lo cual se plantea a los estudiantes resolver dos situaciones problema en grupos de 4 estudiantes, donde cada grupo se les indica cuál de los dos problemas deben sustentar, frente a los cuatro grupos restantes. Se les entrega material de trabajo como cartulina, marcadores y reglas con el fin de luego socializar la solución del problema asignado. Para la sustentación, se selecciona un monitor por cada grupo, el cual sustentó una de las dos situaciones planteadas, frente a los demás grupos; tres grupos resolvieron la situación uno y dos la situación dos.

Los estudiantes toman como referente los apuntes en la herramienta virtual (explicaciones digitales) sobre los temas de Teorema de Pitágoras, Semejanza de triángulos y razones trigonométricas. Se evidencia el trabajo en equipo, el liderazgo por parte de algunos integrantes de cada grupo, se refleja manejo de presaberes, solidaridad cognitiva, es decir, algunos explicaban o aclaraban dudas de los temas vistos entre ellos mismos, fortaleciendo la capacidad receptiva y de confiabilidad frente a la capacidad cognitiva. Se reafirma espacios de indagación del estudiante hacia el docente investigador, quien retroalimentó los temas. Además, se observan avances significativos con respecto al manejo y uso de presaberes, hay iniciativa y creatividad frente a las estrategias usadas al resolver los problemas, por consiguiente esto favoreció la comprensión lectora en la primera situación, donde no hay una representación gráfica y se requiere del dibujo para poder resolverlo. Para la segunda situación hay un dibujo que ilustra el problema, esto facilita el poder identificar los presaberes y procedimientos que llevan a la solución del mismo. Luego, el representante del equipo sustenta sus ideas y argumenta la solución del problema, asignado a cada grupo. También, se observó el apoyo de los demás compañeros, el manejo de conceptos, la comprensión lectora, la identificación de la pregunta con respecto a la información dada, la lectura que hacen al dibujo que describe el enunciado del problema que por consiguiente contribuye en la interpretación del mismo.

Cuando se sustenta la segunda situación se evidencia que los equipos debatían y argumentaban frente a los otros grupos, tanto sus ideas y estrategias empleadas en la solución del problema, con razonamientos conceptuales deductivos que se generan cuando se logra una interpretación y comprensión del problema. Al final del debate el docente investigador, realiza la retroalimentación tomando como apoyo el material expuesto por los grupos, reafirmando las diferentes estrategias y procedimientos conceptuales que llevaron a resolver el problema. Por otro lado, se resalta el trabajo colaborativo, la proactividad y lo receptivo que fueron los grupos participantes. Se destacó, el respeto de la opinión de los demás, las preguntas conceptuales que se originaron a partir del debate y la interpretación con respecto al concepto usado para justificar la solución del problema, porque la situación uno y dos, podían presentar más de un procedimiento conceptual para llegar a su solución.

Para la actividad de la fase de aplicación, los estudiantes utilizan los conceptos trabajados durante el desarrollo de la unidad didáctica para resolver la situación tres, en forma individual, lo anterior para la validación del proceso. Igualmente se evidencio una actitud tranquila y segura para aplicar lo aprendido, se observa concentración en un su evaluación sin mirar a los demás, el docente investigador manifiesta si existe alguna inquietud o duda, teniendo la posibilidad de consultar al mismo. Durante esta fase cada estudiante usa la calculadora en los respectivos procedimientos; cada uno se apoya en sus propios conocimientos. En el tiempo intermedio se manifiestan dudas en la interpretación del enunciado de la primera pregunta del problema, enfocada en la comprensión lectora, pese que existe un dibujo que representa el enunciado. Es así como se generan preguntas entre ellos mismos, donde se percibe inquietudes con respecto al lenguaje matemático, cuando hace referencia al alcance máximo que se da en línea recta con respecto a dos puntos; no tenían claridad de cómo realizar una representación gráfica que pudiera plasmar los datos del problema y la relación con la pregunta. Se visualizó en algunos, dificultad entre la conexión del dibujo con el enunciado, sin embargo puede que se tenga claridad con el concepto y aun así no es suficiente para dar solución al problema. Luego de la mecanización, retroalimentación, confrontación de conocimientos y estrategias, se requiere en cada situación habilidades matemáticas, como lo es el lenguaje matemático, es así, que el problema a pesar de ser traído de la cotidianidad, el estudiante manifestó dificultades en su comprensión.

<u>El texto marcado en color respectivo representa:</u>

Color rojo: Procesos en la solución
Color azul claro: Mecanización de procesos simples
Color verde oscuro: Razonamientos sencillos secuenciales
Color morado: Teorema de Pitágoras
Color azul marino: Interpretación y análisis de datos
Color verde claro: Deducir la representación gráfica
Color violeta: Expone inquietudes
Color verde oscuro: Muestra interés por el desarrollo del taller
Color vino tinto: Realiza consultas automáticas
Color gris claro: Se siente reconocido por el docente investigador

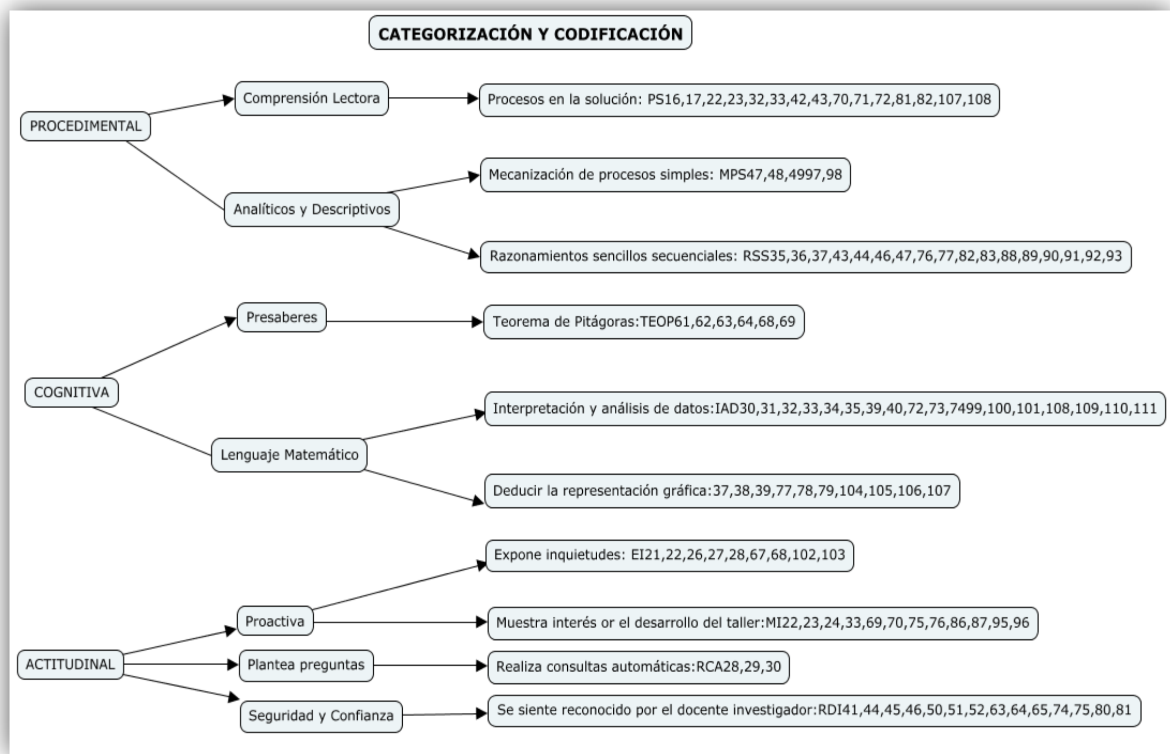
Anexo M. Análisis Diario de Campo Unidad Didáctica: Categorización

<table>
<tr><th colspan="2">CATEGORIAS</th><th>SUBCATEGORIAS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">PROCEDIMENTAL</td><td>COMPRENSIÓN LECTORA</td><td>Procesos en la solución
-PS16,17-1“realizar los ejercicios que se planteaban en las explicaciones digitales, como en las actividades interactivas; para ello usaban calculadora”
-PS22,23-1 “generaba espacios de confrontación de acuerdo a sus presaberes, usando diversas estrategias para su comprensión”
-PS32,33-2 ”Se observa un aprendizaje de lectoescritura en las evaluaciones digitales”
-PS42,43-3 los estudiantes indagan otros elementos que tiene la herramienta didáctica como las “notas de apuntes”
-PS70,71,72-5 “favoreció la comprensión lectora en la primera situación, donde no hay una representación gráfica y se requiere del dibujo para poder resolverlo”
-PS81,82-6 “sus ideas y estrategias empleadas en la solución del problema”
-PS107,108-7 ”puede que se tenga claridad con el concepto y aun así no es suficiente para dar solución al problema”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ANALÍTICOS Y DESCRIPTIVOS</td><td>Mecanización de procesos simples
-MPS47,48,49-3 “las actividades interactivas van valorando el nivel de satisfacción logrado, aquí los estudiantes se apoyan de la calculadora para verificar sus respuestas.”
-MPS97,98-7 “cada estudiante usa la calculadora en los respectivos procedimientos”</td></tr>
<tr><td>Razonamiento sencillo secuencial
- RSS35,36,37-2 “se les plantea dos formas de cómo se podría analizase los problemas, es decir cuál sería la opción más pertinente y óptima para dar solución al problema”
- RSS43,44-3 “se describen conceptos importantes y relevantes en el análisis de un problema.”
- RSS46,47-3 “herramienta permite consecutivamente evaluar el aprendizaje del estudiante”
- RSS76,77-5 “el manejo de conceptos, la comprensión lectora, la identificación de la pregunta con respecto a la información dada”
- RSS82,83-6 “razonamientos conceptuales deductivos que se generan cuando se logra una interpretación y comprensión del problema”
- RSS88,89,90,91-6 “las preguntas conceptuales que se originaron a partir del debate y la interpretación con respecto al concepto usado para justificar la solución del problema, porque la situación uno y dos, podían presentar más de un procedimiento conceptual para llegar a su solución”
- RSS92,93-7 “los estudiantes utilizan los conceptos trabajados durante el desarrollo de la unidad didáctica para resolver la situación tres”</td></tr>
</table>

	PRESABERES	**Teorema de Pitágoras** -TEOP61,62,63-5 “Los estudiantes toman como referente los apuntes en la herramienta virtual (explicaciones digitales) sobre los temas de Teorema de Pitágoras, Semejanza de triángulos y razones trigonométricas.” -TEOP64-5 “se refleja manejo de presaberes” -TEOP68,69-5 “se observan avances significativos con respecto al manejo y uso de presaberes”
COGNITIVO	LENGUAJE MATEMÁTICO	**Interpretación y análisis de datos** - IAD 30,31,32-2“el interpretar, que razón trigonométrica relacionaba el lado dado con el desconocido, con respecto al ángulo dado” - IAD33,34,35-2 “70% aproximadamente de los participantes, piden explicación frente a la interpretación de problemas - IAD39,40-2 “el concepto de perpendicularidad no era claro en el enunciado del problema” - IAD72,73,74-5 “Para la segunda situación hay un dibujo que ilustra el problema, esto facilita el poder identificar los presaberes y procedimientos que llevan a la solución del mismo” - IAD99,100,101-7 “se manifiestan dudas en la interpretación del enunciado de la primera pregunta del problema, enfocada en la comprensión lectora, pese que existe un dibujo que representa el enunciado” - IAD108,109,110,111-7 “la mecanización, retroalimentación, confrontación de conocimientos y estrategias, se requiere en cada situación habilidades matemáticas, como lo es el lenguaje matemático, es así, que el problema a pesar de ser traído de la cotidianidad, el estudiante manifestó dificultades en su comprensión”
		Deducir la representación gráfica - DRG37,38,39-2 “existen problemas sin dibujo, donde se presentaron dificultades para dar la representación gráfica del mismo, que pudiera facilitar su interpretación” - DRG77,78,79-5 “la lectura que hacen al dibujo que describe el enunciado del problema que por consiguiente contribuye en la interpretación del mismo” - DRG104,105,106-7 “no tenían claridad de cómo realizar una representación gráfica que pudiera plasmar los datos del problema y la relación con la pregunta” - DRG106,107-7 “Se visualizó en algunos, dificultad entre la conexión del dibujo con el enunciado”
		Expone inquietudes - EI21,22-1 “el indagar al profesor investigador, de manera abierta y espontánea” - EI26,27,28-2 “surgen preguntas basadas en la interpretación de elementos conceptuales tales como Teorema de Pitágoras, Semejanza de triángulos y Razones trigonométricas”

ACTITUDINAL	PROACTIVA	- EI67,68-5 “Se reafirma espacios de indagación del estudiante hacia el docente investigador, quien retroalimentó los temas”. - EI102,103-7 “se generan preguntas entre ellos mismos, donde se percibe inquietudes con respecto al lenguaje matemático” **Muestra interés por el desarrollo del taller** -MI22,23,24-2 “Se percibe un espacio de libertad, participación activa entre los estudiantes y el profesor, en los momentos en que surgían dudas y cuestionamientos en las evaluaciones digitales” -MI33-2 “una actitud de colaboración y trabajo en equipo” -MI65,66,67-5 “algunos explicaban o aclaraban dudas de los temas vistos entre ellos mismos, fortaleciendo la capacidad receptiva y de confiabilidad frente a la capacidad cognitiva” - MI69,70-5 “hay iniciativa y creatividad frente a las estrategias usadas al resolver los problemas” - MI75,76-5 “se observó el apoyo de los demás compañeros, se resalta el trabajo colaborativo, la proactividad y lo receptivo que fueron los grupos participantes”. - MI86,87-6 “se resalta el trabajo colaborativo, la proactividad y lo receptivo que fueron los grupos participantes” -MI95,96-7 “se observa concentración en un su evaluación sin mirar a los demás”
	PLANTEA PREGUNTAS	**Realiza consultas autónomamente** -RCA28,29,30-2 “sus preguntas se basaban en la información presentada en los enunciados de los problemas, tales como “cuando se tenía la medida de dos lados de un triángulo o la medida de un ángulo y la medida de un lado del triángulo”
	SEGURIDAD Y CONFIANZA	**Se siente reconocido por el docente investigador** - RDI41-3 “se brindó orientación por parte del docente investigador” - RDI44,45,46-3 “se evidencia, al maestro investigador como un apoyo y más funcional cuando monitorea el trabajo de los estudiantes, sus presaberes” - RDI50,51,52-4 “el docente investigador pregunta a los estudiantes sobre el manejo de la herramienta; si fue de fácil manejo, entendible, facilitó el aprendizaje” - RDI63,64-5 “se evidencia, al maestro investigador como un apoyo y más funcional cuando monitorea el trabajo de los estudiantes, sus presaberes” - RDI64,65-5 “solidaridad cognitiva” - RDI74,75-5 “el representante del equipo sustenta sus ideas y argumenta la solución del problema” -RDI80,81-6 “Cuando se sustenta la segunda situación se evidencia que los equipos debatían y argumentaban frente a los otros grupos”

Anexo N. Categorización Diario de Campo: Observación Unidad Didáctica

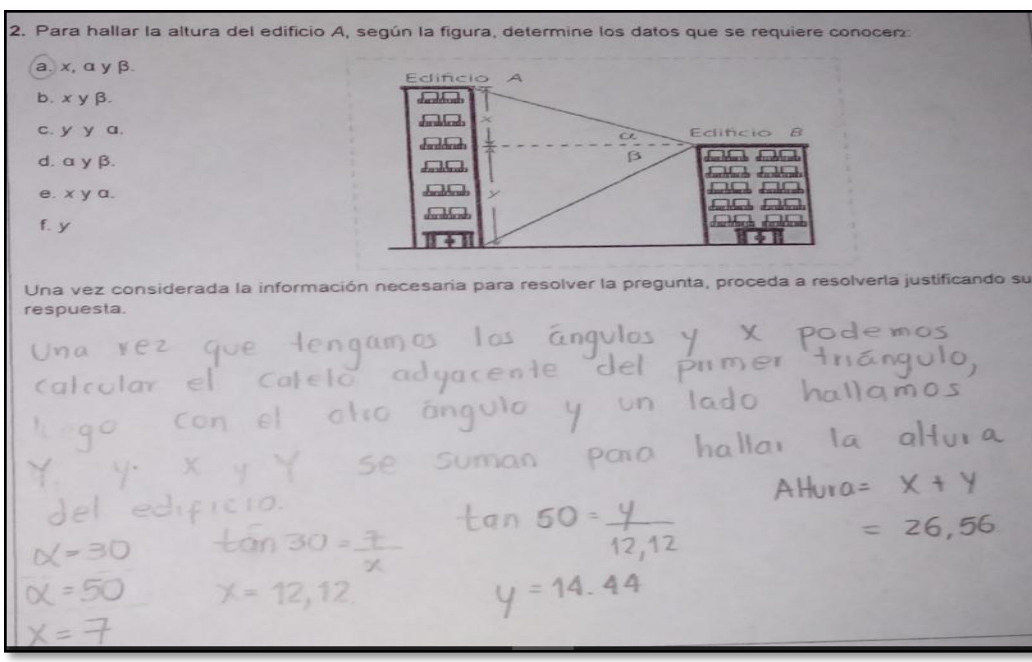


Anexo O. Análisis de la Unidad Didáctica

LOCALIDAD: Institución Educativa Pública del Municipio de Bucaramanga
OBSERVADOR: Daniel Oswaldo Téllez Navarro
ACTORES: Estudiantes de décimo grado **FECHA:** 08/06/2016

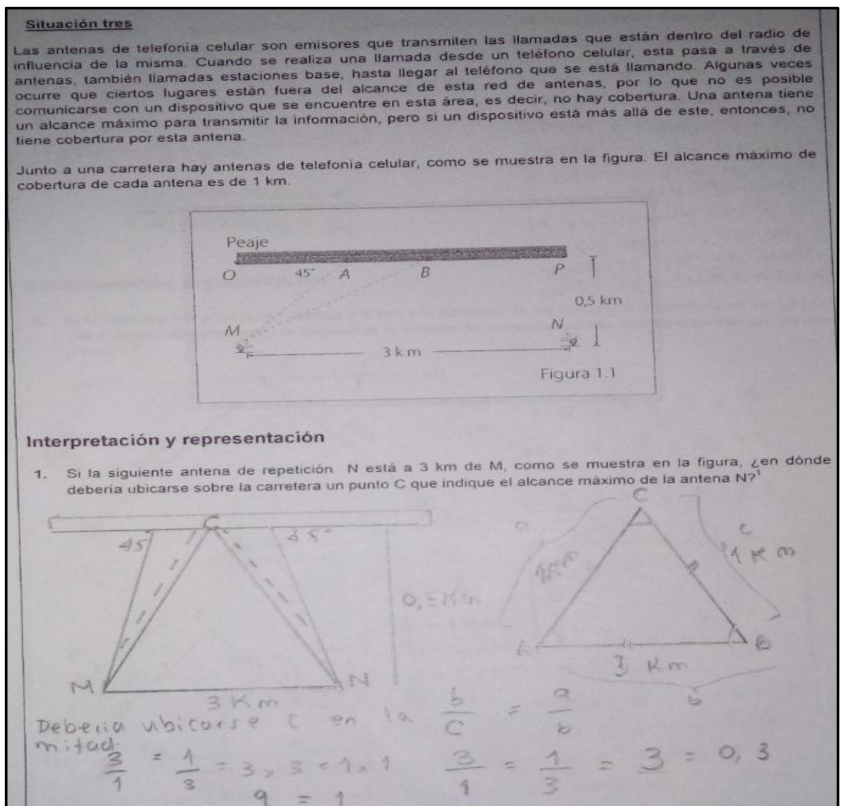
ANALISIS E INTERPRETACIÓN

Los estudiantes en la actividad 1 se organizaron en grupos de 4 participantes, para un total de 5 grupos, desarrollaron y analizaron dos situaciones problemas, donde se evidenció que en la primera situación el 100% de los grupos exitosamente comprendieron y resolvieron el problema usando correctamente los elementos conceptuales y presaberes en los procedimientos realizados, además, cada grupo realizó una representación gráfica del mismo, destacándose la interpretación y el uso del lenguaje matemático. Para la segunda situación planteada, el 100% de los grupos interpretan los datos necesarios y suficientes para determinar la altura del edificio, sin embargo el 80% plantea un procedimiento correspondiente al razonamiento geométrico que aporta el dibujo y acompaña el enunciado del problema, donde los argumentos descritos tienen conexión entre el lenguaje matemático y la pregunta del problema; pero el 20% restante no presento una correlación y diferencia entre la variable que identifica la altura que sobre pasa el edificio **A** del **B,** y la distancia horizontal que separa el edificio **A** del **B,** es decir, el procedimiento y la pregunta no tienen coherencia , luego la solución planteada refleja que no hay una comprensión de la pregunta, por tanto no es correcta.



Así mismo, el 100% de los grupos tomaron la iniciativa de asignarle valores a los respectivos datos que se requieren conocer su valor, para determinar la altura del edificio A, esto describe que los estudiantes manejan con propiedad el pensamiento numérico y la particularidad más que la generalidad, porque no trabajaron con los parámetros dados. Además, se resalta que aunque no es relevante para dar solución al problema, se identifica un 20% de los grupos participantes, que realizaron una lectura gráfica, sin tener en cuenta que el ángulo alfa (α) es menor que el ángulo beta (β), por consiguiente no se realiza una interpretación completa a partir del dibujo, lo que puede llevar en ocasiones a una respuesta incorrecta.

Por otro lado, en la actividad 2 al resolver la situación tres que contiene dos preguntas, los estudiantes de manera individual comunican, argumentan, representan y formulan procedimientos para la solución del mismo. Es así como el 45% de los participantes interpretaron y representaron correctamente el enunciado del problema, los presaberes fueron coherentes y pertinentes para responder asertivamente. El 10% de los educandos no realizaron una interpretación correcta del enunciado del problema, porque su representación no corresponde al contexto que proporciona la situación abordada y no hay una comprensión de la pregunta que se requiere resolver.


Situación tres

Las antenas de telefonía celular son emisores que transmiten las llamadas que están dentro del radio de influencia de la misma. Cuando se realiza una llamada desde un teléfono celular, esta pasa a través de antenas, también llamadas estaciones base, hasta llegar al teléfono que se está llamando. Algunas veces ocurre que ciertos lugares están fuera del alcance de esta red de antenas, por lo que no es posible comunicarse con un dispositivo que se encuentre en esta área, es decir, no hay cobertura. Una antena tiene un alcance máximo para transmitir la información, pero si un dispositivo está más allá de este, entonces, no tiene cobertura por esta antena.

Junto a una carretera hay antenas de telefonía celular, como se muestra en la figura. El alcance máximo de cobertura de cada antena es de 1 km.

Figura 1.1

Interpretación y representación

1. Si la siguiente antena de repetición N está a 3 km de M, como se muestra en la figura, ¿en dónde debería ubicarse sobre la carretera un punto C que indique el alcance máximo de la antena N?[1]

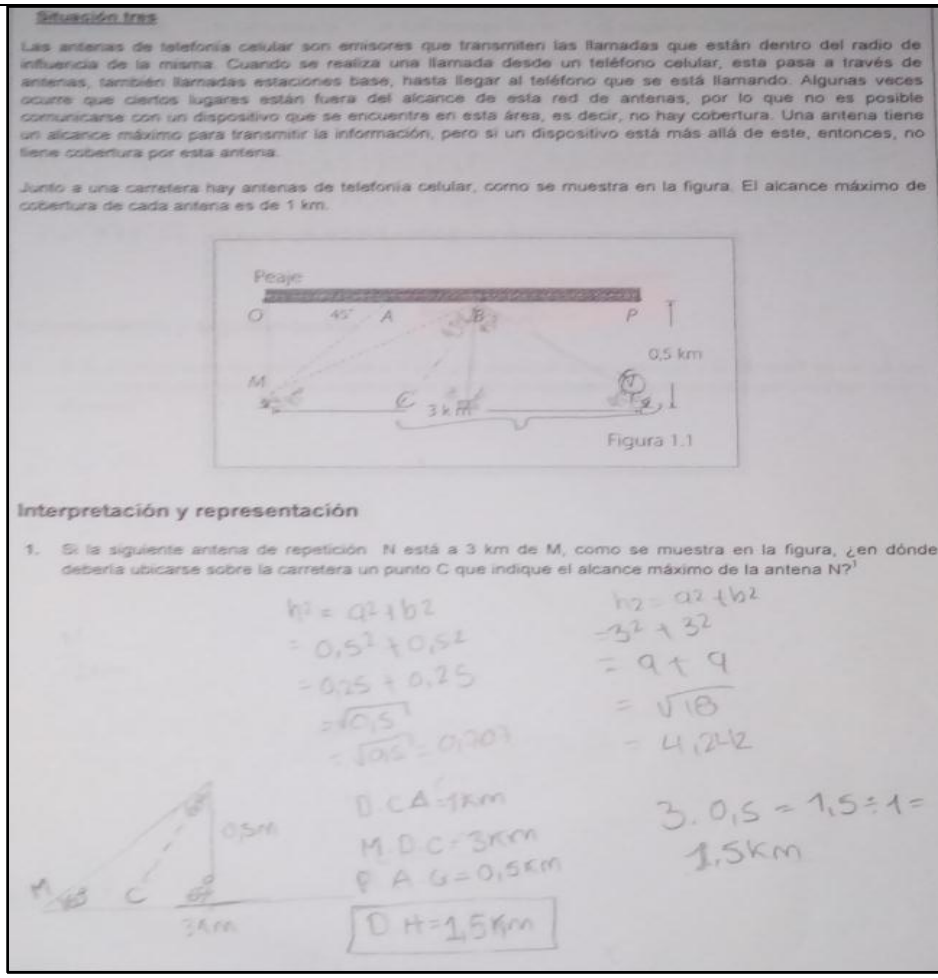
$\frac{b}{c} = \frac{a}{b}$

$\frac{3}{1} = \frac{1}{3} = 3 \times 3 = 1 \times 1$

$9 = 1$

$\frac{3}{1} = \frac{1}{3} = 3 = 0,3$

Igualmente, existe otro 20% de los estudiantes que no obtienen una interpretación clara del problema a pesar del uso de presaberes que se requiere para la solución del mismo.



Situación tres

Las antenas de telefonía celular son emisores que transmiten las llamadas que están dentro del radio de influencia de la misma. Cuando se realiza una llamada desde un teléfono celular, esta pasa a través de antenas, también llamadas estaciones base, hasta llegar al teléfono que se está llamando. Algunas veces ocurre que ciertos lugares están fuera del alcance de esta red de antenas, por lo que no es posible comunicarse con un dispositivo que se encuentra en esta área, es decir, no hay cobertura. Una antena tiene un alcance máximo para transmitir la información, pero si un dispositivo está más allá de este, entonces, no tiene cobertura por esta antena.

Junto a una carretera hay antenas de telefonía celular, como se muestra en la figura. El alcance máximo de cobertura de cada antena es de 1 km.

Figura 1.1

Interpretación y representación

1. Si la siguiente antena de repetición N está a 3 km de M, como se muestra en la figura, ¿en dónde debería ubicarse sobre la carretera un punto C que indique el alcance máximo de la antena N?[1]

$h^2 = a^2 + b^2$
$= 0{,}5^2 + 0{,}5^2$
$= 0{,}25 + 0{,}25$
$= \sqrt{0{,}5}$
$= \sqrt{0{,}5} = 0{,}707$

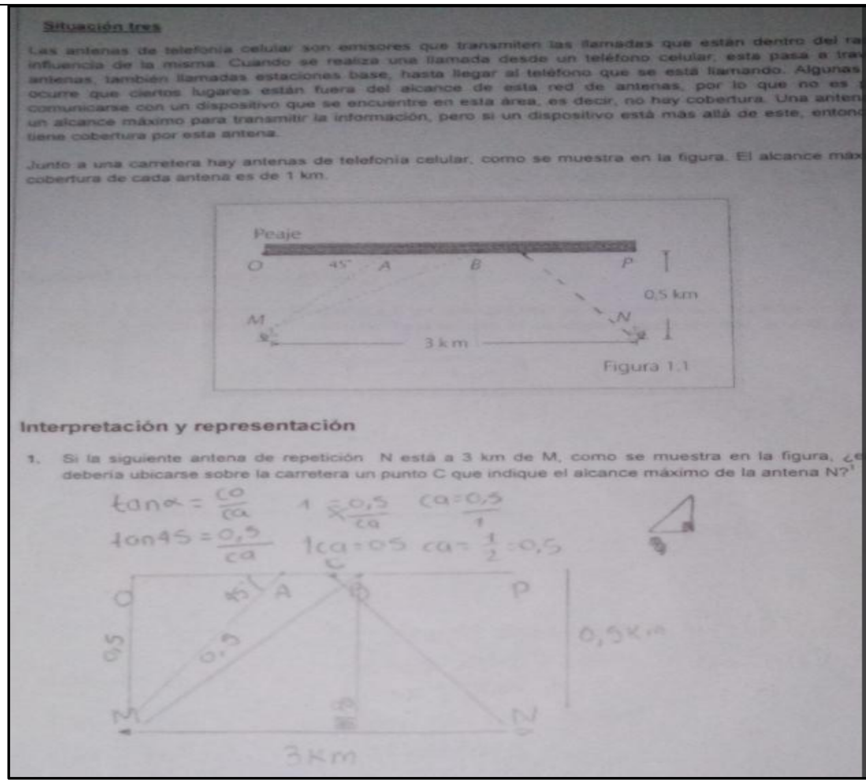
$h^2 = a^2 + b^2$
$= 3^2 + 3^2$
$= 9 + 9$
$= \sqrt{18}$
$= 4{,}242$

0,5m
M C
3km

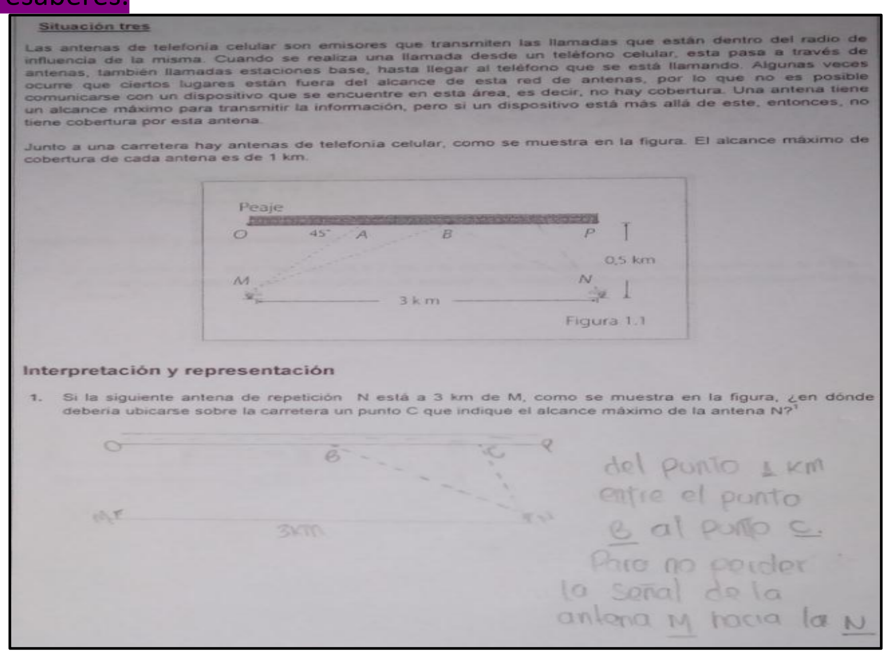
D CA = 1km
M D C = 3km
P A G = 0,5km
$\boxed{\text{D H} = 1{,}5\text{km}}$

$3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5 \div 1 =$
1,5km

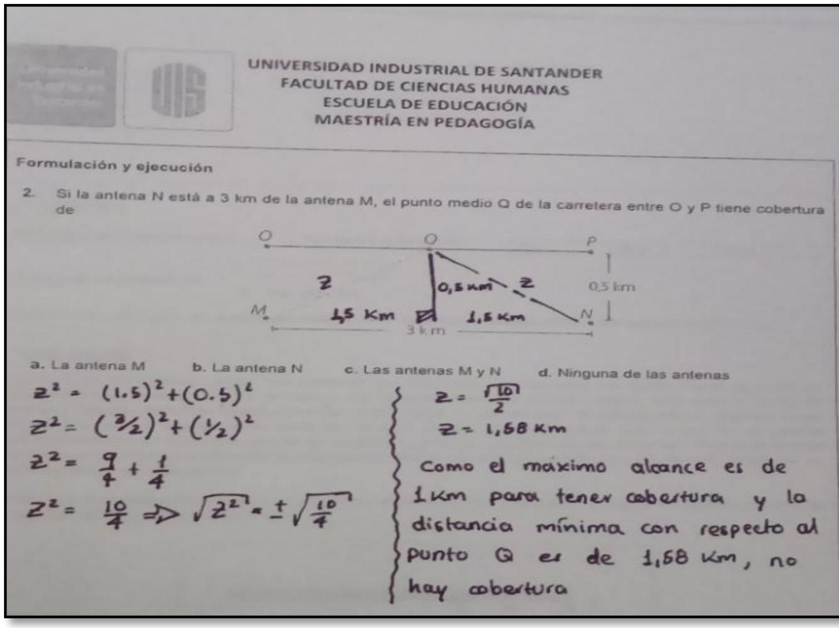
Además, el 10% de los mismos realizaron una interpretación y representación del enunciado que no corresponde a la comprensión de la pregunta, donde se visualiza el uso de los conceptos de las razones trigonométricas, sin tener en cuenta que no se requiere su aplicación, luego su procedimiento y respuesta son incorrectos.



Del mismo modo, el 15% realiza una representación sin una interpretación clara del enunciado del problema, es decir no hay una comprensión de la pregunta y no se evidencia el uso de presaberes.



Por otro lado, la pregunta dos de la situación 3, muestra que el 75% de los estudiantes toman la opción correcta en la pregunta cerrada de selección múltiple con única respuesta, sin embargo en el procedimiento que hace referencia al uso de la formulación y ejecución de presaberes, se visualiza algunas estrategias y argumentos de justificación diferentes que llevan a presentar falencias en el uso del lenguaje matemático, presaberes y representación de la pregunta planteada. Es así que de este porcentaje, el 35% realiza un uso de los presaberes, una representación a partir de la interpretación de la pregunta y manejo del lenguaje matemático, para argumentar la justificación correcta con respecto a la solución dada.



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA

Formulación y ejecución

2. Si la antena N está a 3 km de la antena M, el punto medio Q de la carretera entre O y P tiene cobertura de

a. La antena M b. La antena N c. Las antenas M y N d. Ninguna de las antenas

$z^2 = (1.5)^2 + (0.5)^2$

$z^2 = (3/2)^2 + (1/2)^2$

$z^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$

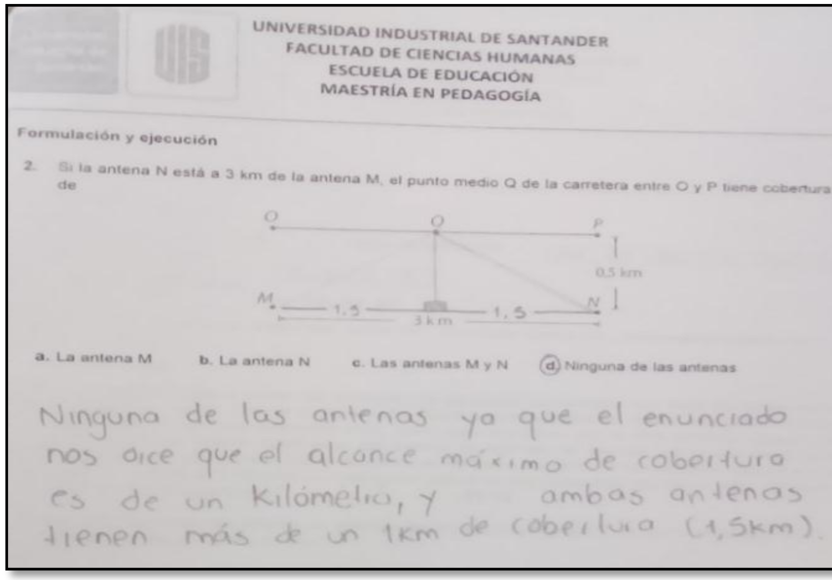
$z^2 = \frac{10}{4} \Rightarrow \sqrt{z^2} = \pm\sqrt{\frac{10}{4}}$

$z = \frac{\sqrt{10}}{2}$

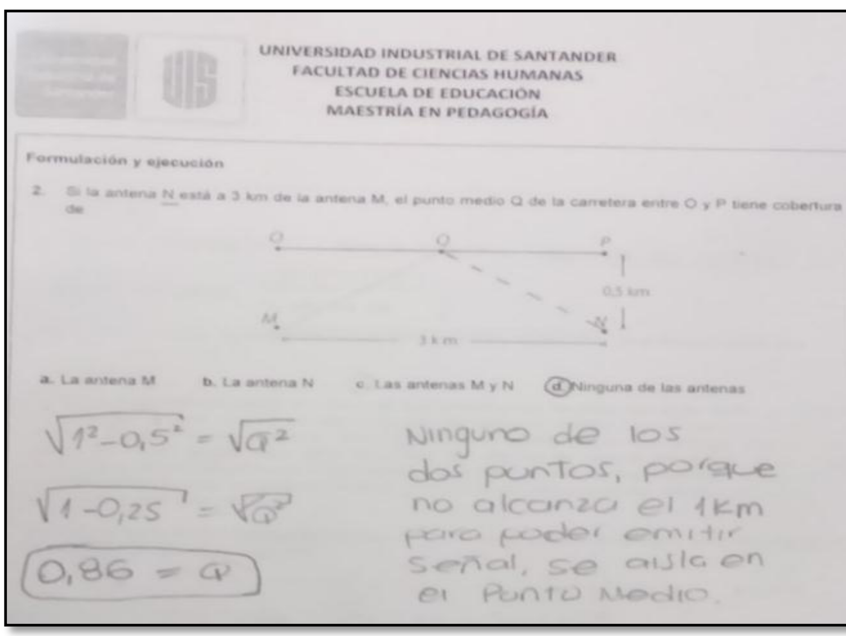
$z = 1,58$ Km

Como el máximo alcance es de 1 km para tener cobertura y la distancia mínima con respecto al punto Q es de 1,58 Km, no hay cobertura

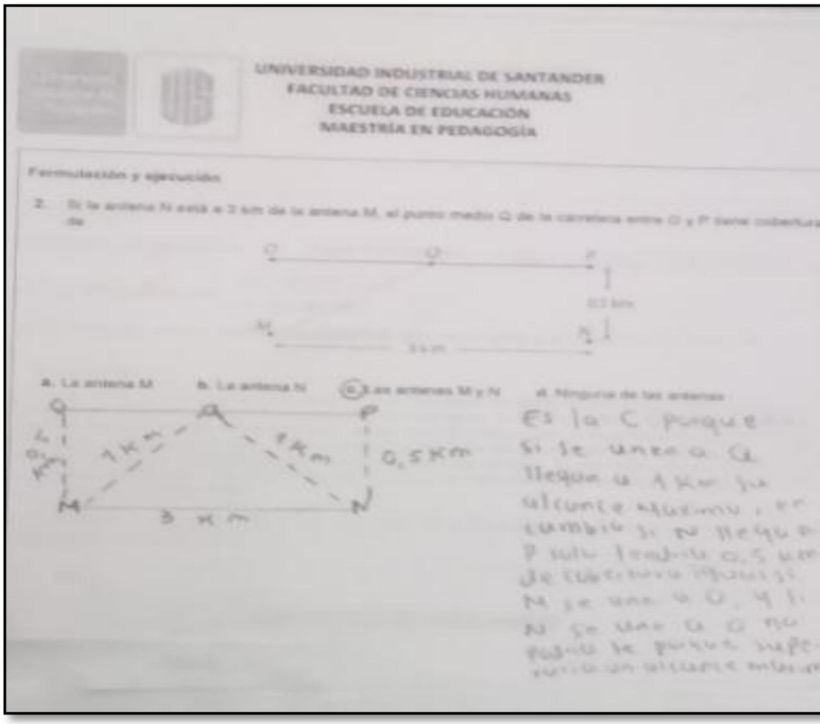
También, se analizó que otro 20% de esta población, realizaron una representación gráfica del enunciado de la pregunta, con una argumentación válida, pero incompleta ya que no hizo uso de los presaberes, para analizar todas las posibilidades que surgen con respecto a la cobertura que pueden tener simultáneamente las dos antenas, a pesar de que tuvieron en cuenta que le alcance máximo es de 1 km, condición que presenta el contexto de la situación tres.



Además, el 20% restante realizan una representación a partir de la interpretación de la pregunta, pero no es clara, es decir, no contribuye con uso del lenguaje matemático, generando así un manejo inadecuado de presaberes, luego la comprensión lectora alcanzada no es suficiente, debido a la incoherencia que ilustra la representación con el procedimiento analítico planteado.



Finalmente el 25% restante del 100%, no toman la opción correcta frente a la pregunta cerrada, se observa que realizan una representación gráfica y manifiestan interpretación de la misma, pero sus argumentos carecen de validez, porque no hay un uso de presaberes que puedan sustentar las afirmaciones dadas, igualmente no se evidencia procedimientos analíticos que justifique la formulación y razonamiento de la respuesta asumida, pues concluyen que las dos antenas logran tener cobertura con respecto al punto medio **Q**.



Con el objetivo de evaluar la herramienta empleada en la unidad didáctica, los estudiantes describieron desde la subjetividad la siguiente pregunta abierta estructurada: Con relación a la herramienta; su uso, los preconceptos y conceptos manejados. ¿Fue de fácil manejo, entendible, y facilito el aprendizaje de la misma? y ¿Por qué?, como resultado se observa que el 100% de los participantes manifestaron que la herramientas, era de fácil acceso y manejo, que permitió un aprendizaje dinámico que se distancia de lo cotidiano y rutinario, que es una herramienta que permite al docente investigador aclarar dudas, monitorear el proceso y ritmo de aprendizaje en forma individual. A continuación se evidencia las frases descritas por los estudiantes:

"Si, una herramienta muy práctica ya que me ayudo a aclarar algunas dudas por medio de las explicaciones y las diversas actividades y evaluaciones digitales, es de fácil uso, aunque podrían implementar audios para que sea más precisa a la hora de comprender los ejercicios y ejemplos"

" Si es de fácil manejo, entendible y reforzó bien los preconceptos que se tienen sobre la trigonometría, además se pueden aprender nuevos temas con las explicaciones digitales, junto con las actividades y las evaluaciones"

“Si, porque las gráficas y los problemas interactivos hacen más fácil y entendible el uso de los conceptos y preconceptos”.

“Claro que sí, ya que me pareció muy didáctica y eso hace que uno le ponga más ánimo, además el manejo fue fácil, entendí todo gracias al profesor y me aclaro muchas dudas que tenía desde antes, para mi cumplió todas las expectativas”.

“Sinceramente fue fácil y manejable, totalmente me gusto porque se manejaron más de una explicación, no hubo desorden y eso ayudo bastante, también porque ahora es más entendible la tecnología, aunque me gusto bastante la actividad”

“Entendible, ya que tenía cosas claras, surgieron dudas pero el material ayuda a resolverlos, al igual que las intervenciones del profesor”

El texto marcado en color respectivo representa:

Color rojo:	Procesos en la solución
Color azul claro:	Mecanización de procesos simples
Color verde oscuro:	Razonamiento sencillo secuencial
Color morado:	Teorema de Pitágoras
Color azul marino:	Interpretación y análisis de datos
Color verde claro:	Deducir la representación gráfica
Color violeta:	Expone inquietudes
Color verde oscuro:	Muestra interés por el desarrollo del taller
Color vino tinto:	Realiza consultas automáticas
Color gris claro:	Se siente reconocido por el docente investigador

Anexo P. Análisis de Unidad Didáctica: Categorización

CATEGORIAS		SUBCATEGORIAS
PROCEDIMENTAL	COMPRENSIÓN LECTORA	**Procesos en la solución** - PS13, 14,15-1 “el procedimiento y la pregunta no tienen coherencia , luego la solución planteada refleja que no hay una comprensión de la pregunta, por tanto no es correcta”. - PS16,17,18-2 “el 100% de los grupos tomaron la iniciativa de asignarle valores a los respectivos datos que se requieren conocer su valor, para determinar la altura del edificio **A”** - PS25,26,27-3 “los estudiantes de manera individual comunican, argumentan, representan y formulan procedimientos para la solución del mismo”. - PS37,38-5 “el 10% de los mismos realizaron una interpretación y representación del enunciado que no corresponde a la comprensión de la pregunta” - PS51,52,53,54-7 “el 35% realiza un uso de los presaberes, una representación a partir de la interpretación de la pregunta y manejo del lenguaje matemático, para argumentar la justificación correcta con respecto a la solución dada”. - PS56,57,58-8 “20% de esta población, realizaron una representación gráfica del enunciado de la pregunta, con una argumentación válida, pero incompleta ya que no hizo uso de los presaberes” - PS65,66,67-9 “la comprensión lectora alcanzada no es suficiente, debido a la incoherencia que ilustra la representación con el procedimiento analítico planteado”.
	ANALÍTICOS Y DESCRIPTIVOS	**Mecanización de procesos simples** - MPS18,19-2 “los estudiantes manejan con propiedad el pensamiento numérico y la particularidad más que la generalidad, porque no trabajaron con los parámetros dados” - MPS38,39,40-5 “se visualiza el uso de los conceptos de las razones trigonométricas, sin tener en cuenta que no se requiere su aplicación, luego su procedimiento y respuesta son incorrectos”.
		Razonamiento sencillo secuencial - RSS3,4,5-1 “en la primera situación el 100% de los grupos exitosamente comprendieron y resolvieron el problema usando correctamente los elementos conceptuales y presaberes en los procedimientos realizados” - RSS8,9,10-1 “el 80% plantea un procedimiento correspondiente al razonamiento geométrico que aporta el dibujo y acompaña el enunciado del problema” - RSS72,73-10 “no se evidencia procedimientos analíticos que justifique la formulación y razonamiento de la respuesta asumida”

<table>
<tr><td rowspan="3">COGNITIVA</td><td>PRESABERES</td><td>Teorema de Pitágoras
-TEOP28,29-3 “los presaberes fueron coherentes y pertinentes para responder asertivamente”.
-TEOP43,44-6 “no hay una comprensión de la pregunta y no se evidencia el uso de presaberes”
-TEOP70,71,72-10 “se observa que realizan una representación gráfica y manifiestan interpretación de la misma, pero sus argumentos carecen de validez, porque no hay un uso de presaberes que puedan sustentar las afirmaciones dadas”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">LENGUAJE MATEMÁTICO</td><td>Interpretación y análisis de datos
- IAD5,6-1 “cada grupo realizó una representación gráfica del mismo, destacándose la interpretación y el uso del lenguaje matemático”.
- IAD7,8-1 “el 100% de los grupos interpretan los datos necesarios y suficientes para determinar la altura del edificio”
- IAD10,11-1 “los argumentos descritos tienen conexión entre el lenguaje matemático y la pregunta del problema”
- IAD11,12,13-1 “el 20% restante no presento una correlación y diferencia entre la variable que identifica la altura que sobre pasa el edificio A del B, y la distancia horizontal que separa el edificio A del B”
- IAD23,24,25-3 “no se realiza una interpretación completa a partir del dibujo, lo que puede llevar en ocasiones a una respuesta incorrecta”.
- IAD27,28,-3 “el 45% de los participantes interpretaron y representaron correctamente el enunciado del problema”
- IAD29,30-3 “ 10% de los educandos no realizaron una interpretación correcta del enunciado del problema”
- IAD34,35-4 “20% de los estudiantes que no obtienen una interpretación clara del problema a pesar del uso de presaberes que se requiere para la solución del mismo”
- IAD42,43-6 “el 15% realiza una representación sin una interpretación clara del enunciado del problema”
- IAD49,50,51-7 “se visualiza algunas estrategias y argumentos de justificación diferentes que llevan a presentar falencias en el uso del lenguaje matemático, presaberes y representación de la pregunta planteada”
- IAD64,65,-9 “no contribuye con uso del lenguaje matemático, generando así un manejo inadecuado de presaberes”
- IAD92,93-14“Si, porque las gráficas y los problemas interactivos hacen más fácil y entendible el uso de los conceptos y preconceptos”.”</td></tr>
<tr><td>Deducir la representación gráfica
- DRG21,22-2 “un 20% de los grupos participantes, que realizaron una lectura gráfica, sin tener en cuenta que el ángulo alfa (α) es menor que el ángulo beta (β)”
- DRG30,31,32-3 “su representación no corresponde al contexto que proporciona la situación abordada y no hay una comprensión de la pregunta que se requiere resolver”
- DRG63,64-9 “20% restante realizan una representación a partir de la interpretación de la pregunta, pero no es clara”</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Expone inquietudes

- EI100,101-17, “Entendible, ya que tenía cosas claras, surgieron dudas pero el material ayuda a resolverlos, al igual que las intervenciones del profesor”</td></tr>
</table>

ACTITUDINAL	PROACTIVA	**Muestra interés por el desarrollo del taller** - MI86,87,88-12 *"es de fácil uso, aunque podrían implementar audios para que sea más precisa a la hora de comprender los ejercicios y ejemplos"* - MI89,90,91-14 *" Si es de fácil manejo, entendible y reforzó bien los preconceptos que se tienen sobre la trigonometría, además se pueden aprender nuevos temas con las explicaciones digitales, junto con las actividades y las evaluaciones"* - MI97,98,99-16 *"Sinceramente fue fácil y manejable, totalmente me gusto porque se manejaron más de una explicación, no hubo desorden y eso ayudo bastante, también porque ahora es más entendible la tecnología, aunque me gusto bastante la actividad"*
	SEGURIDAD Y CONFIANZA	**Se siente reconocido por el docente investigador** - RDI80,81,82,83-11 "el 100% de los participantes manifestaron que la herramientas, era de fácil acceso y manejo, que permitió un aprendizaje dinámico que se distancia de lo cotidiano y rutinario, que es una herramienta que permite al docente investigador aclarar dudas, monitorear el proceso y ritmo de aprendizaje en forma individual" - RDI85,86-12 *"una herramienta muy práctica ya que me ayudo a aclarar algunas dudas por medio de las explicaciones y las diversas actividades y evaluaciones digitales* - RDI94,95,96-15 *"Claro que sí, ya que me pareció muy didáctica y eso hace que uno le ponga más ánimo, además el manejo fue fácil, entendí todo gracias al profesor y me aclaro muchas dudas que tenía desde antes, para mi cumplió todas las expectativas".*

Anexo Q. Categorización y Codificación Unidad Didáctica