

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación  
geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

DORIS EVILA GONZÁLEZ ROJAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
BUCARAMANGA

2017

# Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

DORIS EVILA GONZÁLEZ ROJAS

Trabajo de Grado para Optar al Título de  
Magister en Educación Matemáticas

Dra. Dora Solange Roa Fuentes  
Directora

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA  
2017

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar a Dios quien guía mis días.

A mis evaluadores Dra. Marcela Parraguez y Jorge Fiallo, por el tiempo dedicado a la lectura de este trabajo, por sus aportes, sugerencias y recomendaciones para mejorarlo.

A los profesores que hicieron parte de esta investigación, sus aportes, sugerencias y su amistad: Javier y Diana María.

De manera muy especial a los estudiantes que participaron en las clases, los talleres y entrevistas, en particular a mis chicos pilos de ingeniería mecánica.

A Claudita por su amistad, trato amable y la preocupación que muestra por los estudiantes de posgrado.

A la Escuela de Matemáticas y al Decanato de la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander por su aporte para participar en diferentes eventos durante el 2015 y 2016, dando a conocer mi trabajo.

Al programa de Movilidad 2015 y 2016 de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander, VIE-UIS (Colombia).

A Diego, mi camarógrafo.

A Doña Evila y a mi familia por su apoyo.

A mi compañero de camino, por su compañía, apoyo y aportes gráficos en este trabajo.

Y por supuesto, a Sol, por su orientación, dedicación, apoyo y paciencia en la dirección de este trabajo. Por su amistad y por mostrarme que el mundo está a la vuelta de la esquina. *Mil gracias.*

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

*A mis tres amores*

## Contenido

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| Introducción                                                                | 11 |
| Capítulo 1: Antecedentes y Planteamiento del Problema                       | 13 |
| 1.1. La transformación lineal desde diferentes perspectivas                 | 14 |
| 1.2. Investigaciones relacionadas con la teoría APOE                        | 22 |
| 1.3. Planteamiento del Problema: Preguntas y objetivos de la investigación  | 29 |
| Capítulo 2: Marco Teórico                                                   | 31 |
| 2.1. La teoría APOE                                                         | 31 |
| 2.1.1. Mecanismos mentales                                                  | 32 |
| 2.1.2. Construcciones mentales                                              | 32 |
| 2.1.3. La construcción de objetos abstractos a partir de Acciones concretas | 35 |
| 2.2. Ciclo de investigación de la teoría APOE                               | 37 |
| Capítulo 3: Desarrollo de la Investigación: Ciclo APOE                      | 39 |
| 3.1. Elementos iniciales del Análisis Teórico                               | 40 |
| 3.1.1. Un modelo de construcción de la transformación lineal                | 41 |
| 3.2. Diseño e implementación de un modelo de enseñanza                      | 48 |
| 3.2.1. Población                                                            | 49 |
| 3.2.2. Análisis general de las tareas propuestas en el Taller               | 50 |
| 3.2.3. Análisis a priori de la entrevista                                   | 52 |
| Capítulo 4: Evidencias: Análisis y verificación de los datos                | 65 |
| 4.1. Análisis de los datos obtenidos en el Taller                           | 65 |
| 4.1.1. Concepción Acción de la transformación lineal                        | 65 |
| 4.1.2. Concepción Proceso de la transformación lineal                       | 67 |
| 4.1.3. Concepción Objeto de la transformación lineal                        | 68 |
| 4.2. Análisis de los datos obtenidos en la entrevista                       | 70 |
| 4.2.1. Concepciones previas                                                 | 71 |
| 4.2.2. Evidencias de la concepción Acción de la transformación lineal       | 74 |
| 4.2.3. Evidencias de la concepción Proceso de la transformación lineal      | 78 |
| 4.2.4. Concepción Objeto de la transformación lineal                        | 83 |

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Capítulo 5: Conclusiones y reflexiones finales                                               | 89 |
| 5.1. Descomposición genética refinada                                                        | 89 |
| 5.2. Consideraciones didácticas                                                              | 92 |
| 5.3. Reflexiones para futuras investigaciones                                                | 92 |
| Referencias                                                                                  | 95 |
| ANEXOS                                                                                       | 97 |
| Anexo 1. Programas de la materia Álgebra Lineal I de la Universidad Industrial de Santander. |    |
| Anexo 2. Preguntas del Taller.                                                               |    |
| Anexo 3. Preguntas de la entrevista.                                                         |    |

## RESUMEN

**TITULO:** UN *ESQUEMA* DE TRANSFORMACIÓN LINEAL: CONSTRUCCIÓN DE LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA Y MATRICIAL RELACIONADA CON UNA BASE ORDENADA\*<sup>1</sup>

**AUTOR:** DORIS EVILA GONZÁLEZ ROJAS\*\*

**PALABRAS CLAVE:** TRANSFORMACIÓN LINEAL - TEORIA APOE - DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA - ESQUEMA

### DESCRIPCIÓN:

Este trabajo estudia la construcción del *Esquema* de transformación lineal tomando como elemento principal de relación el concepto de base ordenada. A partir de él se analizan las estructuras y los mecanismos que hacen parte del *Esquema* y que pueden dar lugar a la construcción de la representación matricial y geométrica de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las interpretaciones mencionadas, permite establecer la evolución del *Esquema* de este concepto a través de la descripción de los niveles Inter, Intra y Trans.

El documento está organizado en cinco capítulos: en el primero se presentan algunos trabajos sobre la transformación lineal, realizados desde diferentes marcos teóricos y los objetivos y preguntas de esta investigación. En el segundo capítulo se muestra aspectos relevantes de la Teoría APOE como la definición de las estructuras y mecanismos mentales para la construcción de un concepto en general, así como el ciclo de investigación que propone esta teoría y la explicación de cada una de sus componentes. En el tercer capítulo se expone el resultado del desarrollo del Análisis Teórico, a través de la descripción del *Esquema* de transformación lineal, se hace un análisis a priori de la tareas propuestas en el Taller y de las preguntas presentadas en la entrevista didáctica; en el capítulo cuatro se muestran las estructuras y mecanismos mentales evidenciados por los estudiantes en el desarrollo del Taller y en la entrevista didáctica. Finalmente en el capítulo de conclusiones, se presenta la descomposición genética refinada, resultado de los datos obtenidos.

---

\*Trabajo de Grado

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Dora Solange Roa Fuentes

## ABSTRACT

**TITLE:** A LINEAR TRANSFORMATION SCHEME:  
CONSTRUCTION OF GEOMETRIC AND  
MATRICIAL REPRESENTATION RELATED TO A  
ORDERED BASE <sup>2\*</sup>

**AUTHOR:** DORIS EVILA GONZÁLEZ ROJAS\*\*

**KEYWORDS:** LINEAR TRANSFORMATION - APOS THEORY- GENETIC  
DESCOMPOSITION - SCHEMA

### DESCRIPTION:

The present work studies the construction of the Scheme of Linear Transformation taking as main element of relation the concept of ordered base. From this conception, we analyze the structures and mechanisms that are part of the Scheme and which can give rise to the construction of the matrix and geometric representation of the linear transformation. The analysis of the role of the ordered base when constructing one of the mentioned interpretations allows us to establish the evolution of the Scheme of this concept through the description of the Inter, Intra and Trans levels. For this purpose, the description of these levels presented in Roa-Fuentes (2008) is taken as a basis.

The work is organized in five chapters: the first chapter presents some works on linear transformation, made from different theoretical frameworks; the objectives and the research questions. The second chapter shows relevant aspects of APOS Theory such as the definition of constructions and mental mechanisms for the construction of a concept in general, as well as the research cycle proposed by this theory and the explanation of each of its components. In the third chapter the result of the development of the Theoretical Analysis is exposed. Through the description of the Linear Transformation Scheme, it is made an a priori analysis of the tasks proposed in the workshop and of the questions presented in the didactic interview. The four chapters show the mental constructs and mechanisms evidenced by the students in the development of the workshop and in the didactic interview. Finally, the conclusion chapter shows the refined genetic decomposition, as a result of the data obtained.

---

\*Bachelor thesis

\*\*Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Dora Solange Roa Fuentes

## Introducción

Estudiantes de programas de Ingeniería, Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con un curso de Álgebra Lineal en el primer año de universidad. Algunas investigaciones muestran que esta experiencia puede ser frustrante ya que como mencionan Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), “es muy claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber aterrizado en un planeta nuevo y no son capaces de encontrar su camino en ese nuevo mundo” (p.86).

Particularmente en Francia entre 1987 y 1994 se desarrollaron un conjunto de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal. Dorier (1997), Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (1997), y Sfard (1994) mostraron las serias y profundas dificultades que presentan los estudiantes al intentar comprender conceptos básicos de Álgebra Lineal, principalmente por la naturaleza abstracta y formal de esta área de las matemáticas. De allí surgen constructos teóricos como *Obstacle of Formalism* y *Meta Lever*; el primero de orden cognitivo explica el tipo de dificultades asociadas con el lenguaje del Álgebra Lineal y el segundo, plantea estrategias sobre el tipo de actividades que debe abordar un estudiante.

Jean Dorier y Anna Sierpinska publican en 2001 una recopilación de los trabajos que hasta el momento se venían desarrollando sobre la Didáctica del Álgebra Lineal. Allí se propone la existencia de dos tipos de problemáticas principales: las dificultades conceptuales (asociadas con la naturaleza del Álgebra Lineal: generalizadora y unificadora) y las dificultades cognitivas (por la clase de pensamiento que se requiere para entender el Álgebra Lineal). Estas investigaciones toman problemáticas específicas, por ejemplo de orden epistemológico (Dorier 2000a; 2000b), otras asociadas con el lenguaje geométrico, algebraico y abstracto del Álgebra Lineal (Hillel, 2000; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999) o con los registros gráfico, tabular y simbólico a través de los cuales es posible representar los conceptos allí tratados (Artigue, Chatier & Dorier, 2000).

Por otra parte y más recientemente en Chile, México y Colombia se han desarrollado diferentes investigaciones desde perspectivas particulares que han buscado determinar no sólo el origen de las dificultades de los estudiantes, sino además formas de superarlas. En esta investigación nos interesa centrarnos en la perspectiva cognitiva desarrollada por Ed Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés), la teoría APOE. Actualmente se cuenta con una amplia lista de conceptos de Álgebra Lineal que han sido analizados desde esta perspectiva, por ejemplo: la representación matricial de la transformación lineal (Maturana y Parraguez, 2013); el concepto de espacio vectorial (Parraguez & Oktaç, 2010), transformación lineal (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, 2012); conjunto generador y espacio generado (Kú, 2012); base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008); sistemas de ecuaciones lineales (Ramírez, 2008); matriz cambio de base (Mendoza, 2015); valores y vectores propios (Salgado & Trigueros, 2015), entre otros. Sin embargo, no se tiene un consenso sobre cuáles son los temas más importantes, ni el enfoque con que deben realizarse los cursos básicos de Álgebra Lineal. Algunas universidades cuentan con un contenido específico para esta materia pero las formas de desarrollarla son diversas y en muchos casos tienen un acercamiento básico al trabajar con vectores en  $\mathbb{R}^n$  y matrices.

Con este panorama en mente nos interesa estudiar cómo un individuo (en general un estudiante que está desarrollando un curso de Álgebra lineal básico) construye el concepto de transformación lineal a partir

de su definición funcional, representación matricial y geométrica. Para esto describimos las estructuras y mecanismos mentales que puede construir al establecer relaciones entre dicho concepto, sus interpretaciones y el concepto de base.

Actualmente se cuenta con modelos cognitivos validados (denominados por la teoría APOE como *descomposiciones genéticas*) del concepto de transformación lineal y base de manera independiente. Sobre el primero Roa-Fuentes y Oktaç (2010) proponen un Análisis Teórico que toma la definición funcional de transformación lineal; el análisis de datos publicados por las mismas autoras en 2012, muestra que los estudiantes utilizan la interpretación geométrica de la transformación lineal para comprender ciertas situaciones planteadas en un contexto puramente analítico. Además señalan la dependencia de la evolución de las concepciones que un individuo construye sobre la transformación lineal con el concepto de base. Este último fue estudiado por Kú, Oktaç y Trigueros (2008) haciendo referencia a la base de un espacio vectorial como un conjunto ordenado de vectores linealmente independiente que lo genera. Maturana, Rodríguez y Parraguez (2014), investigaron las construcciones y mecanismos mentales necesarios para reconstruir el Teorema de la Matriz Asociada a una transformación lineal, donde de manera explícita se necesita la definición de una base ordenada. Cada una de estas investigaciones ha aportado elementos particulares sobre las diferentes interpretaciones de una transformación lineal de manera independiente.

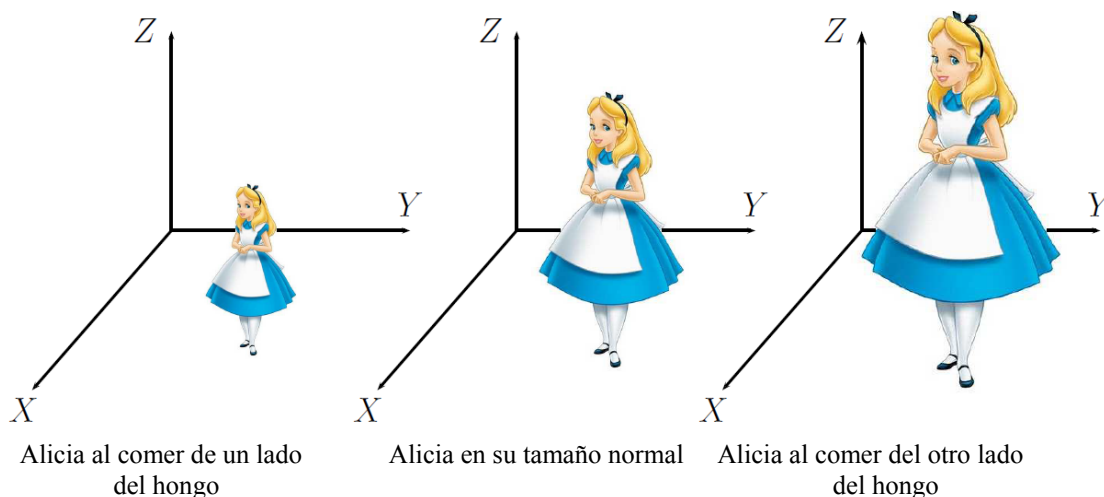
Tomando en cuenta los diferentes elementos descritos, el principal interés de esta investigación es estudiar la construcción del *Esquema* de transformación lineal tomando como elemento principal de relación entre sus diferentes interpretaciones el concepto de base ordenada. A partir de él se analizan las estructuras y los mecanismos que hacen parte del *Esquema* y que pueden dar lugar a la construcción de las interpretaciones matricial y geométrica (entendidas como argumentos observables) a partir de la interpretación funcional de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las interpretaciones mencionadas, permite establecer la evolución del *Esquema* de este concepto a través de la descripción de los niveles Inter, Intra y Trans. Para esto se toma como fundamento la descripción de estos niveles presentada en Roa-Fuentes (2008).

Este documento está organizado en cinco capítulos: en el primer se presentan algunos trabajos sobre la transformación lineal, realizados desde diferentes marcos teóricos, además de los objetivos y las preguntas de investigación. En el segundo capítulo se muestran aspectos relevantes de la Teoría APOE como la definición de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de un concepto en general, así como el Ciclo de Investigación que propone esta teoría y la explicación de cada una de sus componentes. En el tercer capítulo se expone el resultado del desarrollo del Análisis Teórico, a través de la descripción del *Esquema* de transformación lineal, se hace un análisis a priori de la tareas propuestas en el Taller y de las preguntas presentadas en la entrevista didáctica; en el capítulo cuatro se muestran las estructuras y mecanismos mentales evidenciados por los estudiantes en el desarrollo del Taller y la entrevista didáctica. Finalmente en el capítulo de conclusiones, se presenta la descomposición genética refinada a partir de los datos obtenidos y una discusión sobre las implicaciones de contar con un modelo cognitivo para apoyar el trabajo en el aula.

## Capítulo 1.

### Antecedentes y planteamiento del problema

Las transformaciones lineales asumen un papel importante en diferentes áreas como las matemáticas, física, ingeniería, entre otras. Por ejemplo, las rotaciones, traslaciones, reflexiones, estiramientos, etc., representan transformaciones lineales, y estas son empleadas para el procesamiento de imágenes y gráficas por computador. Para los diseñadores gráficos cada vector representa un píxel de una imagen, así una transformación lineal puede agrandar o girar los píxeles hasta conseguir la imagen deseada. En la *Figura 1.1.* se puede observar a Alicia después de comer el hongo que la cambia de tamaño.



*Figura 1.1.* Tomado de <http://algebra-ii.blogspot.com.co/>

En el comercio, las transformaciones lineales permiten resolver diversos problemas cotidianos. Es el caso en que se comparan diferentes tipos de productos para determinar cuál produce el mayor beneficio para el fabricante de dichos productos. Por ejemplo:

Un fabricante elabora cuatro tipos de productos distintos, de los cuales cada uno requiere tres tipos de materiales. Se identifican los cuatro productos como  $P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  y a los materiales por  $R_1, R_2$  y  $R_3$ . La tabla siguiente muestra el número de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.

|                                              |       | Necesarios para producir<br>1 unidad de |       |       |       |
|----------------------------------------------|-------|-----------------------------------------|-------|-------|-------|
|                                              |       | $P_1$                                   | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
| Número de<br>unidades<br>de materia<br>prima | $R_1$ | 2                                       | 1     | 3     | 4     |
|                                              | $R_2$ | 4                                       | 2     | 2     | 1     |
|                                              | $R_3$ | 3                                       | 3     | 1     | 2     |

Surge una pregunta natural: si se produce cierto número de los cuatro productos, ¿Cuántas unidades de cada material se necesitan? (Grossman, 2007, p. 459).

Sin embargo, al igual que otros conceptos de Álgebra lineal los estudiantes presentan profundas dificultades al estudiarlo. Este concepto está relacionado con conceptos como espacio vectorial, combinación lineal, base, valores y vectores propios, entre otros; pero es común que los estudiantes se apropien de estos de manera aislada y no identifiquen las relaciones que se dan entre ellos. Estas relaciones pueden identificarse cuando la construcción de los conceptos supera la mecanización; por ejemplo, cuando un estudiante busca establecer una transformación lineal dadas las imágenes de los vectores una base ordenada (esto a través del concepto de combinación lineal), no es suficiente si su concepción de transformación lineal sólo se asocia con la verificación de dos propiedades independiente (suma vectorial y producto por un escalar). El estudio de este tipo de relaciones es el interés principal de este trabajo.

A continuación se presentan algunas de las investigaciones que se centran en el estudio de la transformación lineal desde diferentes miradas y que son importantes para fundamentar el problema de investigación.

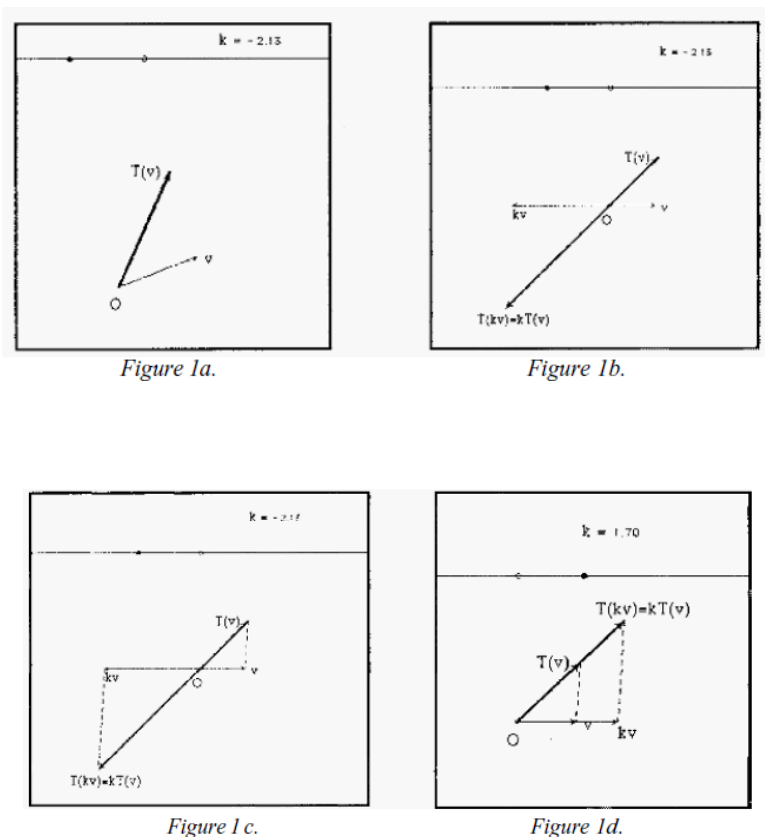
### 1.1. La transformación lineal desde diferentes perspectivas teóricas

La transformación lineal ha sido un tema ampliamente estudiado desde diferentes perspectivas en Matemática Educativa. Por ejemplo, Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999) investigaron cómo introducir los conceptos de vector, transformación y transformación lineal a través de la implementación del software Cabri-Géomètre II.

Anna Sierpinska entre 1993 y 1999, realizó una investigación cuyo objetivo era detectar dificultades sobre algunas nociones de Álgebra Lineal. De 1993 a 1996, la investigación se centró en estudiar las estructuras de los modelos de comportamiento matemático de los alumnos al interactuar individualmente con los tutores y los textos de Álgebra Lineal (Sierpinska, 1997, citado en Sierpinska 2000). De 1996 a 1999, su trabajo se centró en el diseño de una introducción al Álgebra Lineal, basada en un modelo geométrico del espacio bidimensional dentro del entorno geométrico de Cabri-Géomètre II. Los autores eligieron trabajar con este software por la representación que puede hacerse de los vectores y las transformaciones lineales; sin embargo, la interpretación que dieron los estudiantes no fue la esperada ya que no poseían la teoría necesaria para hacerlo.

Con dicho diseño, Sierpinska y su grupo de colaboradores, intentaron disminuir en los estudiantes el desarrollo del “Obstáculo del Formalismo” abordando las nociones de vector, transformación, transformación lineal y vector propio en dos dimensiones. Sobre este obstáculo Sierpinska (2000) considera que un estudiante está bajo el “hechizo del obstáculo del formalismo”, cuando considera las representaciones simbólicas de los objetos del Álgebra Lineal como si fueran los mismos objetos, sin embargo, comprende la estructura de estas representaciones.

Dentro de las conclusiones obtenidas en este proyecto, Sierpinska (2000) manifiesta que no importa el contenido que se trate de abordar en Álgebra Lineal, las dificultades de los estudiantes persisten. Una razón por la que los estudiantes parecen no entender la teoría, es porque quieren comprenderla desde un modo de pensar práctico y no teórico. Es decir no hay preocupación por los conceptos y técnicas que parecen ser coherentes, el estudiante utiliza y toma lo que le parece ser más fácil en una situación dada. Sierpinska et al., (1999) muestran que los estudiantes usaron el término transformación al considerar la relación dinámica que se establece en la pantalla del computador entre el vector  $v$  y  $T(v)$ . Este dinamismo fue interpretado como: la dilatación del vector libre, acompañada por una dilatación proporcional del vector dependiente. Esto se observa al presentar la siguiente situación: En la construcción macro se le presentó a los estudiantes los vectores  $v$  y  $T(v)$ . Al multiplicar el vector  $v$  por el escalar  $k$ , los estudiantes obtuvieron el vector  $kv$ . Luego obtienen el vector  $T(kv)$ , usando la construcción macro dada obteniendo al vector  $kT(v)$ .



Estudiante 2: Cuando el valor de  $k$  cambia entonces  $kv$  cambia en proporción con  $T(kv)$ .

Estudiante 1:  $T(kv)$  es proporcional a  $T(v)$  un factor de  $k$ . (Sierpinska, 2000, p. 215).

Los estudiantes llamaron transformación lineal a la dilatación o compresión de los vectores, quedando oculta la suma vectorial. La idea que persistió en ellos fue interpretar este concepto en términos de proporciones entre longitudes de vectores particulares. Esto seguramente gracias a la experiencia con situaciones puramente geométricas del concepto y a sus concepciones sobre el concepto de vector.

Los conceptos del Álgebra Lineal están relacionados entre sí, los sistemas de ecuaciones lineales con las matrices, la matrices con los determinantes, los determinantes con los valores propios y los valores propios con los vectores, entre otros; un ejemplo de ello lo podemos ver en el siguiente párrafo.

Por ejemplo una matriz puede considerarse como un arreglo de números pero si se sabe que  $Ax = b$  donde  $A$  es una matriz (de orden  $m \times n$ ) de coeficientes en un sistema de ecuaciones y que si  $A$  es invertible implica que el sistema de ecuaciones representado por  $Ax = b$  tiene solución única dada por  $x = A^{-1}b$  entonces  $A$  forma parte de una estructura conceptual. (Uicab y Okaç, 2006, p.468).

Retomando el trabajo de Sierpinska, Uicab y Okaç (2006) quienes abordan el problema de extensión lineal (ver figura 1.2) que consiste en: determinar una transformación lineal (en el plano) a partir de las imágenes de dos vectores no colineales. A partir de este problema es posible establecer conexiones entre los conceptos de transformación lineal y base, conexiones que difícilmente los estudiantes logran establecer.

Abre un nuevo archivo en Cabri, pon dos rectas numéricas en ella, pon el origen y los vectores etiquetados  $v_1, v_2, T(v_1)$  y  $T(v_2)$  pariendo del origen, en una configuración similar a la Figura de abajo.

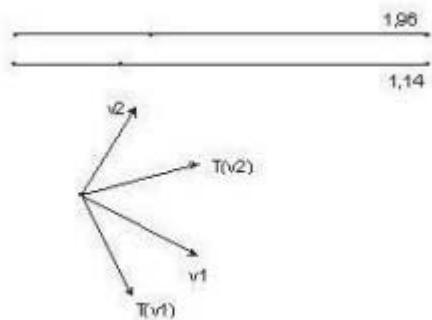


Figura 1.2. Problema de extensión lineal (Uicab y Okaç, 2006, p. 16).

Vamos a suponer que los vectores  $T(v_1)$  y  $T(v_2)$  son las imágenes de los vectores  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente, bajo alguna transformación lineal  $T$ . Con sólo esta información, puedes construir:

- a)  $T(v_1 + v_2)$
- b)  $T(2v_1)$
- c)  $T(-1.5v_1 + 0.8v_2)$
- d)  $T(v)$  donde  $v$  es un vector arbitrario.

El inciso c) procura que los estudiantes consideren el vector  $v$  como combinación lineal de vectores  $v_1$  y  $v_2$  ya que estos forman una base para  $\mathbb{R}^2$ . Este hecho no está explícito en el enunciado por lo que se esperaba que los estudiantes realizaran conexiones entre los conceptos conocidos y logaran resolver el inciso d).

Desde la perspectiva de esta investigación para resolver el inciso d) es necesario que los estudiantes reconozcan que cualquier vector  $v$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base. Además que  $v_1, v_2$  forman una base para  $\mathbb{R}^2$ , es decir, que al responder los incisos anteriores tienen información suficiente para abordar de manera acertada este ítem. Sin embargo, como se muestra en el trabajo no hay una conexión entre el concepto de base y transformación lineal y por tanto los estudiantes no pueden considerar el vector  $v$  como combinación lineal de vectores  $v_1$  y  $v_2$ .

Para apreciar la presencia de un pensamiento teórico, “el pensamiento teórico se caracteriza por una reflexión consciente sobre los medios semióticos de representación del conocimiento y los sistemas de conceptos en lugar de ideas” (Sierpinska, 2000, p.211) en particular en los estudiantes que enfrentan el problema de extensión lineal, las autoras consideran que deben estar presentes los siguientes comportamientos:

- Reflexión sobre los datos empíricos y aquellos que podrían estar involucrados implícitamente en la interpretación del problema.
- Actitud indagadora respecto a posibles conceptos involucrados.
- Desarrollo de estrategias con un propósito, haciendo uso de los conceptos involucrados en un problema.
- Toma de decisiones pertinentes que involucren conceptos relacionados para llegar a la solución de un problema, ofreciendo argumentos válidos que permitan justificar el planteamiento de la solución, con una coherencia que haga ver un sistema de conceptos.

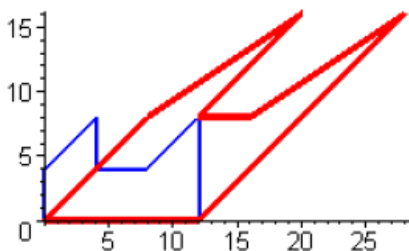
(Uicab y Oktaç, 2006, p. 27).

Según las autoras, al estudiar la información recopilada en el diagnóstico se destaca que los estudiantes hacen referencia a las transformaciones basándose en intuiciones relacionadas con su propia experiencia que en algunos casos son distantes a la definición. Los principales resultados de esta investigación muestran que los estudiantes tuvieron problemas al encontrar la transformación lineal  $Tv$ , ya que no lograron expresar  $v$  como combinación lineal de los vectores dados  $v_1$  y  $v_2$  (Uicab y Oktaç, 2006). En este caso los estudiantes no pueden conectar los conceptos de base y transformación lineal, “es como si pensarán sólo en el concepto de transformación lineal y todas sus estrategias giraran en torno a dicha noción” (Uicab y Oktaç, 2006, p. 481).

Otro resultado interesante en dicha investigación, es que algunos estudiantes trataron de encontrar la transformación lineal a partir de la combinación de dos movimientos simples como rotación y dilatación, sin obtener resultados favorables. En este caso se puede pensar que la construcción del concepto se asocia con aquello que constituye un cambio y que puede ser descrito a partir de transformaciones desconocidas.

En la literatura se encuentran trabajos que aluden a la representación geométrica de transformaciones lineales en  $\mathbb{R}^2$  a partir de su representación matricial. Por ejemplo Kłasa (2001) usa matrices como representación de las transformaciones lineales y también se apoya en el problema de extensión lineal, empleando los software Derive y Maple. Ella proporciona a los estudiantes un conjunto de matrices  $2 \times 2$  junto con una matriz  $2 \times n$  que representa un polígono cerrado con  $n$  vértices, incluido el origen (0,0).

La actividad consiste en describir el polígono inicial, transformarlo a partir de la matriz dada y posteriormente describir el polígono final (imagen del polígono inicial). Al repetir varias veces la misma tarea los estudiantes observan que al aplicar las diferentes transformaciones lineales (matrices) al polígono, se preserva: el paralelismo entre sus segmentos y la imagen del origen (siempre igual al origen); además, se preservan los ángulos rectos sólo si la transformación representa simetrías, rotaciones y homotecias; además que el área y la orientación cambian dependiendo del determinante de la matriz de la transformación. Un ejemplo se puede observar en la *Figura 1.3*.



*Figura 1.3.* Transformación a lo largo del eje x dada por la matriz  $G = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  (Klasa, 2001, p. 4).

Otras conclusiones a las que llegaron los estudiantes fueron:

- La imagen de cualquier línea que pasa por el origen es de nuevo una línea que pasa por el origen.
- La imagen de cualquier par de líneas paralelas es de nuevo un par de líneas paralelas.
- La imagen de cualquier polígono cerrado es de nuevo un polígono cerrado o un intervalo cerrado, en el caso de una matriz singular. (Klasa, 2001, p.2).

En este trabajo la representación geométrica jugó un papel importante para mostrar que la transformación lineal no consiste sólo en dilatar, comprimir o rotar vectores en el plano. Además la relación entre la representación matricial y geométrica de la transformación permite el análisis de características propias de la función.

La construcción del concepto de transformación lineal, en muchos casos, es afectada por ideas intuitivas que los estudiantes desarrollan en contextos no escolares. Molina y Oktaç (2007) por ejemplo, tomando como referente los modelos intuitivos (Fischbein 1987, tomado de Molina y Oktaç, 2007), muestran que los estudiantes al trabajar con representaciones geométricas de dicho concepto lo relacionan específicamente con el “movimiento de vectores”. Estos investigadores trabajaron con situaciones geométricas en  $\mathbb{R}^2$  que les permitieron identificar modelos geométricos que pueden afectar la comprensión del concepto de transformación lineal. En particular muestran en su artículo que para los estudiantes las transformaciones lineales representaban expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y combinaciones entre estas, excluyendo cualquier otro tipo de transformación lineal. Por ejemplo las proyecciones.

Desde nuestro punto de vista, las dificultades de los estudiantes para realizar conexiones entre los diferentes conceptos del Álgebra Lineal están relacionadas con la falta de estructuras previas para construir nuevos conceptos. La falta de elementos formales para comprender diferentes conceptos y

nociones genera construcciones asociadas con aquello que es percibido de manera intuitiva. En particular, Molina y Oktaç (2007) muestran que los estudiantes asocian la transformación lineal como:

- Movimientos geométricos simples: Ciertos movimientos asociados a transformaciones lineales; por ejemplo, una TL de expansión o de contracción, una TL de rotación o una TL de reflexión.
- Combinación de movimientos geométricos simples: Las combinaciones que los estudiantes puedan realizar con los movimientos simples, por ejemplo, la composición de una rotación y una expansión.
- Transformaciones difíciles o imposibles de describir con movimientos geométricos simples o combinación de éstos: Es el caso de la TL de trasquilado, la cual requiere de interpretaciones algebraicas para ser aceptada como TL, o bien otras transformaciones como  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$ .

(Molina y Oktaç, 2007, p. 244).

De los principales resultados del trabajo es importante destacar: La transformación lineal como movimientos simples y combinaciones de estos. Los investigadores logran probar su hipótesis identificando en los estudiantes que los modelos intuitivos sobre la transformación lineal son una serie de casos particulares de transformaciones lineales (expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de estos). A continuación se presentan algunos de los razonamientos realizados por los estudiantes:

Para cada uno de los casos que se muestra a continuación diga si es posible que exista una Transformación lineal que convierta los vectores de la Figura 1 en los vectores de la Figura 2.

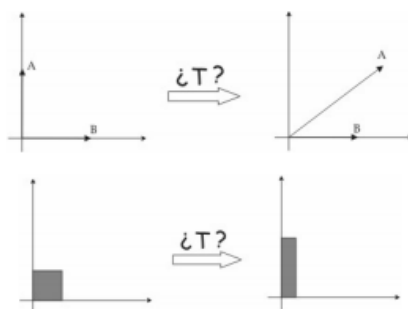


Figura 1.4. Problemas l. y m. de la entrevista (Molina y Oktaç, 2007, p. 256).

El caso de Hermes (un estudiante que participó en esta investigación) permite a los investigadores dar evidencia sobre la verificación de su hipótesis. Durante toda la entrevista Hermes respondió las preguntas de manera correcta y sin vacilar, dejando ver la facilidad para transitar entre las representaciones gráficas y las algebraicas. Pero, en el inciso l) mostró dificultades para responder a la pregunta planteada; la dificultad estaba en que él veía sólo el movimiento de un vector, sin embargo, al trabajar en el inciso m) pudo reflexionar sobre el inciso l) al utilizar argumentos relacionados con los vectores base de una transformación lineal para determinar su existencia.

Los investigadores además concluyen que la mayoría de los estudiantes entrevistados, no habían reflexionado sobre la relación geométrica-analítica y el modelo geométrico que tenían de una transformación lineal estaba asociado con aquella función que gira o expande los vectores.

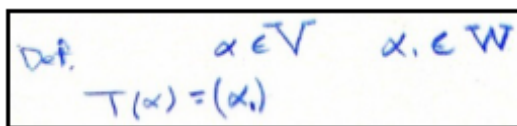
- La Transformación lineal como la transformación de un vector en particular, y no como una función que transforma todo el plano. En la entrevista se observó que varios estudiantes consideraban la Transformación lineal como la transformación de un vector en particular y no como una función que transformaba todo los vectores del plano.
- Con respecto al adjetivo “lineal” en el término Transformación lineal. Un estudiante relacionaron este adjetivo con vectores; dos estudiantes con líneas rectas; otro con que “la Transformación lineal transforma líneas rectas en líneas rectas”; y otros estudiantes con “el orden en que deberán efectuarse las operaciones”. Es de resaltar que cada estudiante relaciona la linealidad con algo concreto y no con la definición. Los investigadores piensan que esta podría ser la razón por la que en la mayoría de los estudiantes la linealidad de la Transformación lineal no tiene importancia.
- La noción de espacio vectorial: En las respuestas obtenidas, los estudiantes se puede ver que no relacionan la Transformación lineal con el concepto de espacio vectorial.
- La noción geométrica del movimiento de un vector llevada al contexto aritmético.
- Con respecto al movimiento: Los investigadores pudieron evidenciar cómo los modelos intuitivos de los estudiantes está relacionado con el movimiento. Esto se puede ver cuando los estudiantes trabajan con rotaciones: la transformación hace que el vector gire.

(Molina y Oktaç, 2007, p.270).

La aplicación de las entrevistas evidenció que el concepto de la transformación lineal se va degradando y sólo queda la idea de la transformación, asociada al cambio que sufre un vector en el plano. Es por esto que Molina y Oktaç (2007) consideran que es pertinente investigar sobre diseños didácticos que hagan énfasis en la linealidad, con el propósito de reducir dicha degradación. Estos resultados pueden apuntar a la necesidad de un tipo de conexión entre las diferentes interpretaciones del objeto matemático.

En esta vía se encuentra el trabajo de Ramírez, Romero y Oktaç (2014) que toma como marco de referencia los Registros de Representación Semiótica para analizar el concepto de transformación lineal. Ramírez et al., (2014) diseñan actividades considerando cuatro registros de representación: gráfico sintético, gráfico cartesiano, algebraico y matricial. Se concluye que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente frente a una situación matemática busca el registro más apropiado, el que le permite desarrollar mejores estrategias. Esto en oposición a un estudiante que logre sólo trabajar en un registro específico.

Ramírez et al, (2014) muestran el caso de Natalia una estudiante que evidenció “una gama de registro no coordinados” (p. 238) al dar un ejemplo de transformación lineal, al parecer debido a que tiene una definición del concepto que es incompleta.



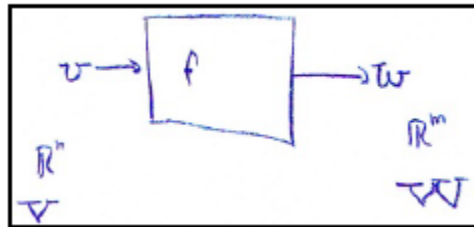
A handwritten note in blue ink, enclosed in a rectangular box. The text reads: 'Def.  $\alpha \in V$   $\alpha_i \in W$   $T(\alpha) = (\alpha_i)$ '. The handwriting is somewhat informal and slightly blurry.

Se observa que Natalia considera la transformación lineal como una función que relaciona elementos de  $V$  con elementos de  $W$  y no toma en cuenta la preservación de las combinaciones lineales. Sin embargo, sí conoce las dos propiedades de las transformaciones lineales que aparecen en los libros de texto:

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

$$\begin{aligned} \text{Def } T(v+w) &= T(v) + T(w) \\ T(\beta v) &= \beta T(v) \end{aligned} \quad \beta \in \mathbb{K}$$

Esta definición excluye la naturaleza de los objetos que expresa, esto es como una función que está definida entre espacios vectoriales. Pero por otro lado, ella insiste en usar su definición.



Aquí Natalia muestra que una transformación lineal es una función entre  $V$  y  $W$ , y se puede notar que esta representación hace referencia a las funciones trabajadas en Cálculo, es decir, no está considerando el hecho de que  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales. Al parecer la estudiante piensa en  $T$  como una función de variable real, como se puede apreciar en la siguiente imagen.

$$\begin{aligned} \text{Sea } \alpha &\in \mathbb{R}^3 \\ T: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(\alpha) &= \beta \quad \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se puede notar que Natalia presenta dificultades con el registro algebraico ya que considera a  $\beta$  como un elemento de  $\mathbb{R}$  y no de  $\mathbb{R}^2$ . También presenta dificultades con otros tipos de representación como el matricial: “la matriz tendría que ser de  $2 \times 2$  bueno, sería buscar entonces una matriz, tal que al multiplicarse entonces diera al producto, entonces como éste es un vector  $(x, y, z)$  la matriz que buscamos nos va a mandar a  $\mathbb{R}^2$ ” (Ramírez et al., 2014, p. 242).

$$\begin{pmatrix} a \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^2$$

Ramírez et al., (2014) destacan que Natalia no logra realizar la conversión entre el registro algebraico al registro matricial, desde nuestro punto de vista debido a su definición, que evidentemente deja de lado el concepto de base ordenada. Dentro de las conclusiones expuestas por estos investigadores es de interés destacar:

En nuestras observaciones comprobamos que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros, al presentársele alguna situación matemática busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverla. Sin embargo, el hecho de que resuelva alguna situación no implica que tenga esta habilidad. Por ejemplo el estudiante Franco al solicitarle una Transformación lineal responde con la transformación identidad, caracterizándola con  $T(I) = I$  y comprobando algebraicamente las propiedades de la definición. Aunque el estudiante proporcionó una respuesta correcta, la pregunta no nos permite averiguar si el estudiante realiza o no coordinación; simplemente pudo haber recordado un ejemplo trivial de Transformación lineal.

(Ramírez, Romero y Oktaç, 2014, p. 247).

Los investigadores destacan la importancia de analizar las producciones semióticas de los estudiantes sin dejar de lado sus expresiones verbales, además plantean que es fundamental hacer preguntas de seguimiento que permitan comprobar lo que significa cada expresión para ellos.

De los trabajos descritos puede evidenciarse la necesidad de establecer conexiones entre las diferentes interpretaciones de la transformación lineal. Las situaciones de las investigaciones descritas hacen énfasis en transformaciones lineales que podían ser representadas gráficamente y estaban asociadas a un movimiento geométrico; o representaciones matriciales que buscan destacar características geométricas de la imagen de un conjunto de vectores.

Surge entonces la necesidad de trabajar sobre las diferentes interpretaciones de la transformación lineal; cuando se hace referencia a las “interpretaciones” éstas se consideran como los argumentos observables que un individuo puede poner en juego a la hora de abordar una situación matemática y están determinadas por la presencia de la transformación lineal como: una función, una matriz o como la transformación de un conjunto de vectores de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Lo fundamental entonces es centrar la mirada en la siguiente pregunta: ¿cómo puede un estudiante establecer relaciones entre dichas interpretaciones? La principal hipótesis de esta investigación es que esto se logra gracias a la construcción de un *Esquema* que establezca caminos de construcción a partir de la base como un Proceso. Esto será discutido y analizado ampliamente en el siguiente capítulo.

Como ya hemos mencionado en esta investigación analizamos la construcción del *Esquema* de transformación lineal en términos de la teoría APOE, tomando las tres representaciones de este objeto matemático. A continuación describimos los principales constructos que usa esta teoría para explicar cómo un estudiante construye conocimiento matemático.

## 1.2. Investigaciones relacionadas con la teoría APOE

El trabajo de Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) aborda la construcción del concepto de transformación lineal tomando como referente la teoría APOE. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) muestran un análisis sobre cómo construir una descomposición genética, enfocado en el concepto de transformación lineal y en 2012, publican una validación de dicha descomposición y un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de la teoría APOE. El desarrollo del Análisis Teórico llevó a dichas investigadoras a proponer una descomposición genética preliminar de dicho concepto. Para esto proponen dos caminos de construcción de dicho concepto, determinados por diferentes mecanismos mentales: el primero por la

coordinación de Procesos y el segundo por la aplicación de Acciones específicas sobre objetos iniciales. A continuación aparecen los caminos:

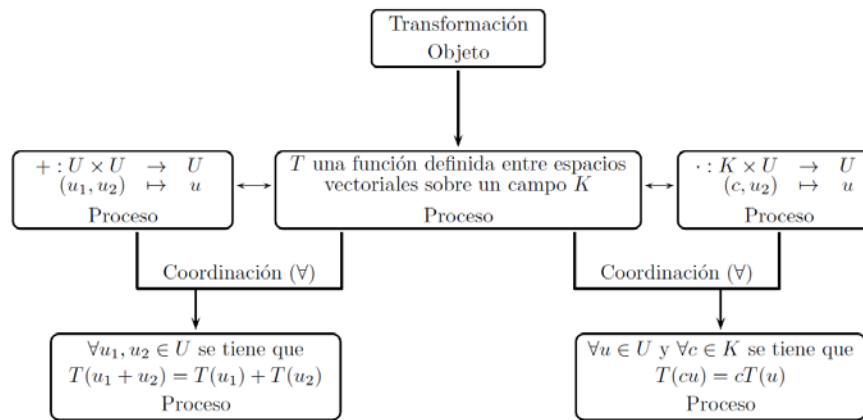


Figura 1.5. Camino 1: Objeto de transformación como elemento preliminar (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010 p.103).

En la *Figura 1.5*, es necesario que el estudiante tenga una concepción objeto de transformación, de esta manera será posible desencapsular la transformación y así puede trabajar con el proceso que lo generó. Mediante la coordinación de dos Procesos multiplicación por escalar y suma vectorial, y por el cuantificador  $\forall$ , se podrá generar un nuevo proceso que le permitirá probar si se cumple la propiedad  $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ . Esta coordinación es posible cuando el estudiante logra considerar que la transformación se cumple para todo vector de  $U$ , y que al sumar un par de vectores de  $U$ , la suma  $u_1 + u_2$  también va a estar en  $U$ , por ser este un espacio vectorial.

De manera similar, la coordinación por el cuantificador  $\forall$  se realiza entre los Procesos de transformación y multiplicación por escalar, de esta manera el estudiante puede lograr una concepción proceso de la propiedad  $T(cu) = cT(u)$ , para todo  $u$  en  $U$  y para todo  $c$  en  $K$ .

El otro modelo propuesto para la construcción del concepto de transformación lineal se puede observar en la *Figura 1.6*.

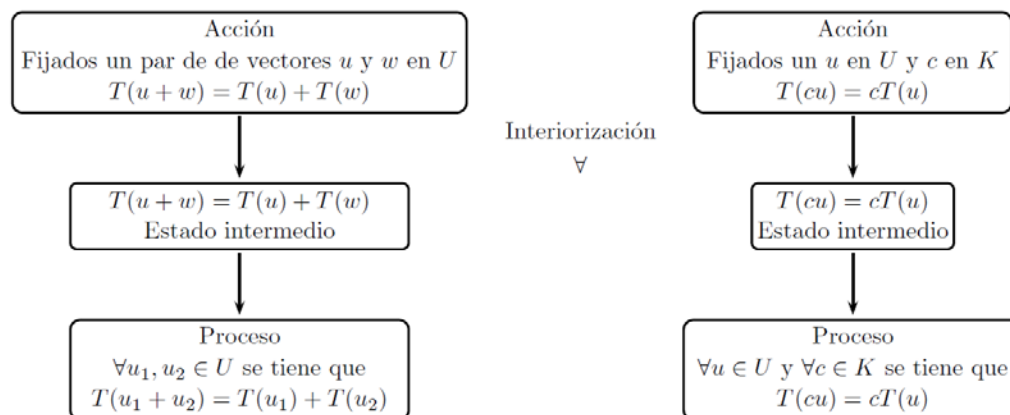


Figura 1.6. Camino 2: Asimilación del objeto vectorial por el *Esquema* de función (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, p.105).

En este caso un estudiante puede iniciar la construcción realizando Acciones que consisten en comprobar las dos condiciones de linealidad. Reflexionar sobre las Acciones puede dar lugar a dos Procesos que se coordinan y ahora, las dos propiedades se ven ahora como una, en términos de la preservación de combinaciones lineales. Esto se da cuando el estudiante considera como equivalentes la preservación de las operaciones de linealidad con la preservación de combinaciones lineales. En particular cuando surge la necesidad de realizar Acciones sobre el proceso construido, éste se encapsula para dar lugar al objeto de transformación lineal.

En ambos caminos podemos observar la importancia que tiene el cuantificador, es necesario que para la construcción del concepto abordado, los estudiantes tengan claro que estas propiedades se deben cumplir para todos los elementos del espacio vectorial y para todo elemento del campo sobre los cuales el espacio vectorial está definido. Según Dorier (2000), una de las dificultades que presentan los estudiantes es comprender el uso de los cuantificadores que en muchas ocasiones se encuentran implícitos. Esto lo notamos a menudo en la clase, cuando el estudiante quiere demostrar una proposición mostrando que se cumple para un elemento del conjunto en que se definen los elementos de la proposición.

Como resultado del trabajo realizado por estudiantes resolviendo situaciones diseñadas con base en los Análisis Teóricos expuestos, Roa-Fuentes y Oktaç en 2012 plantean una descomposición genética refinada del concepto de transformación lineal. Entre otros asuntos plantean la importancia de realizar un modelo de enseñanza en donde se resalte la importancia del campo. Por ejemplo, “la transformación  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como  $T(z) = \bar{z}$ , es una transformación lineal si el espacio vectorial se define sobre el campo de los reales ( $\mathbb{R}$ ). Pero si se define sobre el campo de los complejos ( $\mathbb{C}$ ), no lo es, puesto que la multiplicación por escalar no se preserva. Si  $z = 1 - i$  y  $\alpha = 1 + i$  tenemos que  $T(\alpha z) = 2$  y que  $\alpha T(z) = 2i$ ” (Roa-Fuentes y Oktaç, 2012, p.228). Con ejemplos de este estilo podemos mostrar a nuestros estudiantes que el campo no es invisible, que está presente así no se mencione en las situaciones planteadas o trabajadas en el salón de clase; en donde generalmente se trabaja con los números reales.

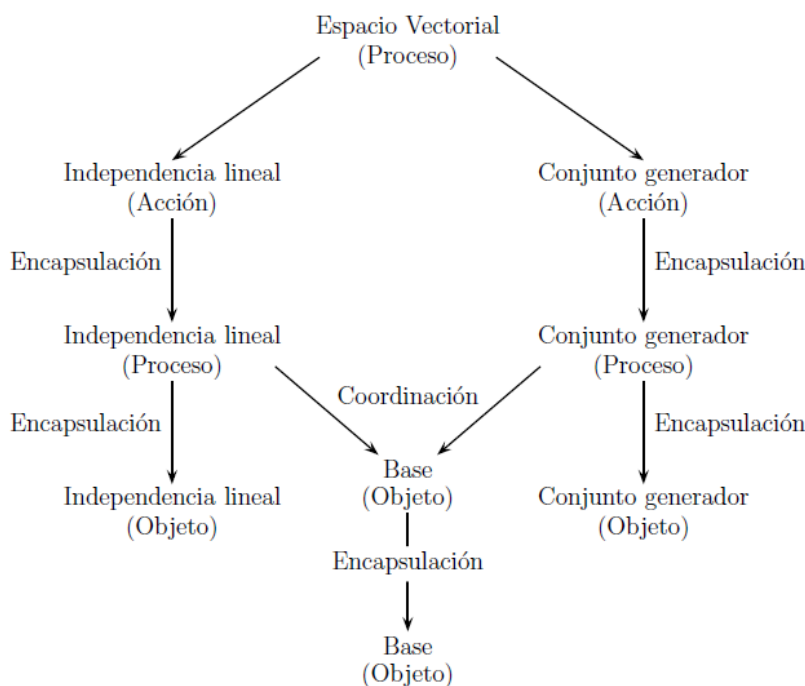
Otro aspecto que destacan Roa-Fuentes y Oktaç (2012), es el hecho de trabajar las dos propiedades que se debe cumplir para que una transformación sea transformación lineal como una sola propiedad, ya que algunos estudiantes tienden a adoptar la definición de dicho concepto con el cumplimiento de una de las dos propiedades; esto lo hemos notado tanto en nuestro salón de clase como en el trabajo de otros investigadores, por ejemplo, Ramírez et al. (2014). De esta manera también se debe hacer énfasis en que las transformaciones lineales preservan combinaciones lineales.

Es necesario resaltar que después del análisis de los resultados surge la necesidad de construir el concepto de transformación lineal de manera paralela con otros, tales como, el concepto de base. Observemos que este ha sido el común denominador de los trabajos descritos en este apartado, no podemos construir un concepto de la nada, necesitamos tener en cuenta de relación o relaciones con otros conceptos. A su vez Kú, Trigueros y Oktaç (2008) estudian la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. Mientras que Maturana, Rodríguez y Parraguez (2013) estudian las construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal, siendo este último un trabajo que relaciona los conceptos de transformación lineal y base.

A continuación trataremos de presentar algunos de los resultados presentados en estos trabajos para luego mostrar algunas reflexiones iniciales sobre el rol que jugarán en nuestra investigación.

Kú, Trigueros y Oktaç (2008) consideran que la base es una componente relevante en el estudio de los espacios vectoriales y en sus aplicaciones, y que resulta difícil de aprender para los estudiantes. Con el propósito de comprender la manera como los estudiantes construyen el concepto de base de un espacio vectorial y teniendo en cuenta los resultados previos, las investigadoras proponen una descomposición genética del concepto de base.

A continuación se muestra dicho análisis y posteriormente explicaremos algunos elementos que nos interesan resaltar, ver *Figura 1.7*.



*Figura 1.7.* Descomposición genética del concepto de base (Adaptado de Kú, Trigueros y Oktaç, 2008, p. 71).

Kú, Trigueros y Oktaç (2008) consideran que para construir el concepto de base de un espacio vectorial  $V$ , el estudiante necesita mostrar una concepción proceso del concepto de espacio vectorial, como se muestra en la *Figura 1.7*. Esta concepción incluye un manejo de las operaciones entre vectores incluyendo la multiplicación por escalar. Si un estudiante tiene una concepción proceso del concepto de espacio vectorial, entonces también puede realizar Acciones sobre sus elementos. Es decir, puede verificar si un vector puede escribirse como combinación lineal de otros vectores dados, llamemos a ese conjunto  $S$ . También puede verificar si los elementos de  $S$  son linealmente independientes o no en términos de la definición correspondiente. En este caso, se dice que un estudiante muestra una concepción Acción de los conceptos de independencia lineal y conjunto generador.

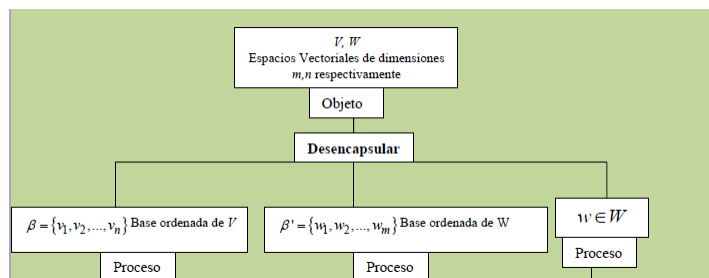
Cuando el estudiante repite estas Acciones con vectores de diferentes espacios vectoriales dados, y reflexiona sobre estas Acciones, logra interiorizarlas en un proceso que le permite establecer si un vector

se puede expresar como combinación lineal de un conjunto de vectores pertenecientes al espacio vectorial al cual pertenece dicho vector. Un estudiante que presenta una concepción proceso de conjunto generador, puede decir qué propiedades deben tener los vectores que pertenecen a un espacio vectorial generado por un conjunto generador dado. Observemos en la *Figura 1.7.*, que cuando el estudiante que tiene una concepción proceso de independencia lineal y conjunto generador logra coordinar los Procesos antes mencionados en un nuevo proceso en el que se verifica si los vectores son linealmente independientes y determina cuáles vectores de un espacio vectorial se pueden generar a partir de ellos. Según las autoras, este proceso incluye decidir si dichos vectores son necesarios para generar a todo el espacio vectorial. Siguiendo la *Figura 1.7.*, este proceso se encapsula, como un todo, en un objeto relacionado con el espacio vectorial: la base.

Dentro de las conclusiones obtenidas por Kú, Trigueros y Oktaç (2008) se destacan:

- Los conceptos de conjunto y subespacio no se relacionaron en la descomposición genética propuesta, estos conceptos se relacionaron con las dificultades acerca de las propiedades de conjunto generador e independencia lineal que satisface un conjunto para ser una base y que es una característica fundamental para la construcción de dicho concepto.
- La descomposición genética propuesta fue útil para explicar la dificultad de construir la base como proceso.
- Es necesario incluir en la descomposición genética los conceptos de conjunto generador y subespacio vectorial como proceso para que se puedan coordinar con los conceptos de dependencia e independencia lineal y conjunto generador.
- Es más fácil para el estudiante verificar si un conjunto es una base para un espacio vectorial que dado un espacio encontrar una base.
- Se sugiere que en los cursos de Álgebra Lineal se trabaje con diferentes espacios vectoriales diferentes a  $R^n$ , ya que en las entrevistas se evidenció que los estudiantes no podían trabajar con otros espacios vectoriales. (p.86).

Maturana, Rodríguez y Parraguez (2013) investigan las construcciones y mecanismos mentales necesarios para reconstruir el teorema matriz asociada a una transformación lineal (MATL). En el trabajo, los investigadores presentan una descomposición genética del teorema de la matriz de la transformación lineal, considerando que para que un estudiante llegue a construir la MATL como objeto, necesita tener una concepción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, el cual debe desencapsular en los conceptos de base ordenada como proceso y vector de un espacio vectorial como proceso.



*Figura 1.8.* Descomposición genética de MATL (Maturana et al., 2013, p.1806).

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

Los Procesos de base ordenada se coordinan a través de la transformación lineal y el proceso de vector se coordina con el de combinación lineal de vectores.

En la primera coordinación, los Procesos de las bases ordenadas  $B$  del espacio vectorial  $V$  y  $B'$  del espacio vectorial  $W$ , se hallan por medio de la transformación lineal, las imágenes de los vectores de la base  $B$ . La segunda coordinación los vectores  $w \in W$ , se expresan como combinación lineal de los vectores de la base ordenada  $B'$  del espacio vectorial  $W$ . Posteriormente este proceso se encapsula en el objeto vector coordinado en términos de la base ordenada  $B'$ , esto es  $[w]_{B'}$ .

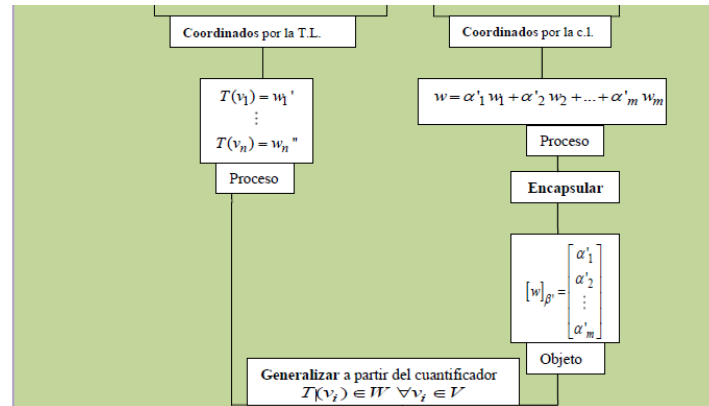


Figura 1.9. Descomposición genética de la MATL (Maturana et al. 2013, p. 1806).

La coordinación de los Procesos que se obtienen de desencapsular el objeto vector coordinado y el proceso que se obtiene de la coordinación dada mediante la transformación lineal, se coordinan por la generalización del cuantificador para todo,  $\forall$ , el cual determina que el proceso se repite en todos los vectores de la base ordenada  $B$  de  $V$ , para finalmente obtener la MATL,  $[T]_{B'}^{B'}$ , como se muestra en la Figura 1.10:

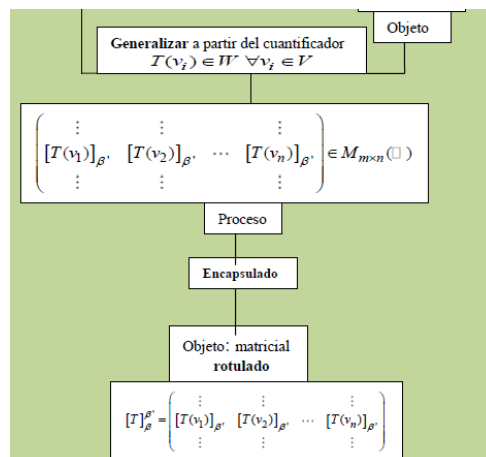


Figura 1.10. Descomposición genética de la MATL (Maturana et al. 2013, p. 1806).

Cabe resaltar que los autores asocian al éxito de la construcción de la MATL con la importancia en la transformación lineal como función:

proponemos que la construcción de dicha matriz se logra de forma adecuada si se identifica con su rol de función, así la porción de descomposición genética de la figura 1, da cuenta de las construcciones y mecanismos mentales para la construcción de la MATL como un objeto operativo.

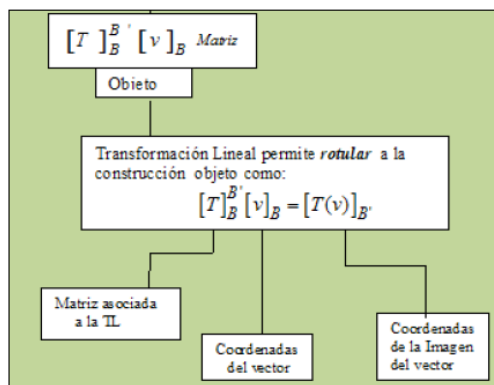


Figura 1. La MATL en uso.

(Maturana et al, 2013, p. 1803).

A continuación se muestra un análisis a priori del cuestionario que emplearon los investigadores para diseñar las entrevistas que les permiten documentar las construcciones y mecanismos mentales dispuesto dicha descomposición y algunas observaciones sobre el desempeño de los estudiantes en las entrevistas y un análisis a posteriori de ellas. Las entrevistas fueron realizadas a tres estudiantes y el cuestionario aplicado tiene 10 preguntas. Dentro del cuestionario se pregunta:

Considere la transformación lineal  $F: \langle (1,0,0,1), (0,1,1,0) \rangle \rightarrow \langle x^2, x+1 \rangle$  definida por  $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ ; donde  $B = \langle (1,0,0,1), (0,1,1,0) \rangle$  y  $B' = \langle x^2, x+1 \rangle$ . Determine las coordenadas del vector  $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

Para los investigadores, esta pregunta permite observar si la construcción de la MATL es un objeto encapsulado y afirman que si un estudiante no construye este objeto es poco probable que tenga la interpretación funcional de transformación lineal como un objeto.

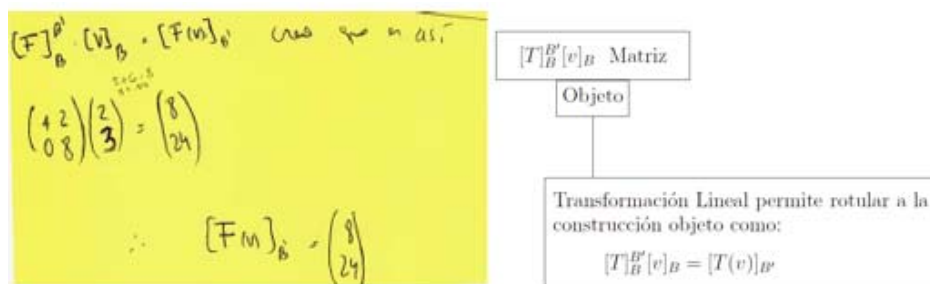


Figura 1.11. Producción E4 (Maturana et al., 2013, p. 1804).

Maturana et al. (2013) en el ejemplo anterior presentan el trabajo realizado por el estudiante E4 y al lado parte de la descomposición genética de la MATL; y se puede observar como las autoras lo indican, que el estudiante E4 logra seguir el camino propuesto en dicha descomposición, es decir, construye el objeto.

Maturana et al. (2013) han llegado a la conclusión que el concepto de coordenadas de la imagen de un vector, por medio de una transformación lineal no representa dificultad a los estudiantes, sin embargo la generalización representa un obstáculo. Algunos estudiantes que hicieron parte de esta investigación, no logran construir la matriz asociada a la transformación lineal.

Kú, Trigueros y Oktaç (2008) y Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) hablan de la necesidad de estudiar los *Esquemas* de los conceptos abordados en sus investigaciones. Podemos observar que estos tres últimos trabajos, tratan sobre temas del Álgebra Lineal que están muy relacionados entre sí, y ¿por qué no?, podemos pensar que tenemos herramientas suficientes para pensar en elaborar un *Esquema* de la transformación lineal.

### 1.3. Planteamiento del Problema

Como se puede ver en los antecedentes, en algunos países como Canadá, Estados Unidos, Francia, Colombia, Chile y México, entre otros, se han realizado diferentes estudios sobre la enseñanza del Álgebra Lineal en algunos programas universitarios y sobre el fracaso de los estudiantes al abordar los conceptos básicos de esta área. Entre ellos Dubinsky (1991) y otros miembros de *Research Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), han diseñado una teoría que busca explicar cómo un estudiante construye su conocimiento matemático, la teoría APOE. Los constructos teóricos de este acercamiento han permitido la construcción de modelos cognitivos para Álgebra Lineal, en particular de conceptos como: combinación lineal, espacio vectorial, base, conjunto generador, espacio generado, transformación lineal, entre otros. Como se mostró en la sección anterior diferentes trabajos han abordado particularmente el problema de la comprensión de la transformación lineal desde diferentes perspectivas. La teoría APOE ha servido como marco teórico para analizar las estructuras mentales de los estudiantes al construir su definición funcional (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010; 2012) y su representación matricial (Maturana & Parraguez, 2013).

Se cuenta entonces con elementos específicos que están relacionados con la transformación lineal, analizados en términos de la misma teoría que pueden ser usados para determinar las estructuras mentales necesarias para construir un *Esquema* de transformación lineal, que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base; sin embargo dichos análisis de alguna manera han sido independientes. Por ejemplo, en el trabajo realizado sobre transformación lineal por Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) se señala la necesidad de construir este concepto a la par con el concepto de base, pero hasta el momento no se ha analizado cómo. Pero por otra parte, se tiene una descomposición genética del concepto de base propuesta por Kú, Trigueros y Oktaç (2008) que incluye un análisis inicial sobre la combinación lineal como estructura necesaria la construcción de la base. No podemos dejar a un lado el estudio realizado por Maturana y Parraguez (2013; 2014) que presenta no solo las construcciones y mecanismos mentales asociados a la matriz asociada a la transformación lineal, sino que también plantean un *Esquema* de transformación lineal considerando las tres interpretaciones de la transformación lineal: funcional, matricial y geométrica. En este *Esquema* juega un papel fundamental el vector coordenado y por supuesto la combinación lineal.

Estos elementos nos permitirán estudiar la construcción del *Esquema* de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base ordenada. Dado que el *Esquema* es la estructura más

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

compleja, analizaremos con detalle las estructuras y los mecanismos que lo conforman y que pueden dar lugar a la construcción de la representación matricial y geométrica de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las interpretaciones mencionadas de la transformación lineal, nos permitirá establecer la evolución del *Esquema* de este concepto a través de la descripción de los niveles Inter, Intra y Trans. Para esto tomaremos como base la primera descripción de estos niveles presentada en Roa-Fuentes (2008).

Con este panorama en esta investigación nos proponemos analizar las siguientes preguntas:

¿Qué estructuras y mecanismos mentales debe construir un estudiante para lograr un *Esquema* de transformación lineal?

¿A través de qué mecanismos la base como proceso, determina la representación matricial y/o geométrica de una transformación lineal?

¿Qué clase de situaciones matemáticas deben abordarse en un curso regular de Álgebra Lineal para potenciar la construcción de dicho *Esquema*?

De estas preguntas se desprenden los siguientes objetivos:

Construir en términos de la teoría APOE un *Esquema* validado de transformación lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir de su relación con el concepto de base.

Diseñar con base en el Análisis Teórico propuesto un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa por parte de los estudiantes del *Esquema* de transformación lineal en cursos regulares de Álgebra Lineal.

En el siguiente capítulo mostraremos algunos aspectos importantes relacionados con la teoría APOE, que nos permitirán responder las preguntas de investigación y así alcanzar los objetivos mencionados anteriormente.

## Capítulo 2. La teoría APOE

En este capítulo presentamos el marco teórico que sustenta nuestro trabajo de investigación. Como lo mencionamos en el capítulo anterior, los objetivos de este proyecto se centran en la construcción de un *Esquema* del concepto transformación lineal asociado al concepto base, teniendo en cuenta su representación matricial y geométrica en el caso de transformaciones sobre el plano cartesiano y para ello es necesario que los estudiantes logren establecer conexiones dichos conceptos. A continuación analizaremos algunos aspectos teóricos que nos permitirán fundamentar este trabajo.

### 2.1. La teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas)

La teoría APOE es una teoría constructivista que toma como marco de referencia la teoría de Piaget, principalmente en el concepto de *abstracción reflexiva*, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños (Asiala, et al., 1996); Dubinsky extiende esta idea al análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se estudian en un nivel escolar superior.

La abstracción reflexiva permite describir cómo un estudiante logra construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, pues para la teoría los conceptos matemáticos no se aprenden directamente sino que se aprenden si el estudiante posee las estructuras mentales adecuadas para comprenderlo, como se muestra a continuación:

El conocimiento matemático de un estudiante es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo Acciones, Procesos y objetos y organizándolos en Esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky & Mc Donald, 2001, p.276)

Para la teoría APOE estas estructuras están compuestas por las construcciones mentales (Acciones, Procesos, Objetos y *Esquemas*) que un estudiante realiza para comprender determinado concepto matemático y para ello cuenta con unos mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión) que son considerados casos particulares de la abstracción reflexiva.

La herramienta que permite describir la manera cómo se construye el conocimiento se denomina *Descomposición Genética*, además de describir aspectos favorables de una porción de conocimiento matemático, se espera determine aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas (Arnon et al, 2014; Asiala et al, 1996). La descomposición genética es un modelo cognitivo que explica las relaciones que se deberían dar entre las estructuras (Acciones, Procesos, Objetos,

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

*Esquemas*) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización, generalización, reversión) para que un estudiante logre construir un concepto y/o noción matemática.

### 2.1.1. Mecanismos mentales

Dubinsky considera seis tipos de abstracción reflexiva: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión.

*Interiorización:* Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de Acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Así mediante este mecanismo es posible que una Acción sea transformada en un proceso.

*Coordinación:* Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de Acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más Acciones para construir nuevos objetos o Acciones. Mediante este mecanismo dos o más Procesos pueden coordinarse para generar nuevos Procesos.

*Encapsulación:* Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática).

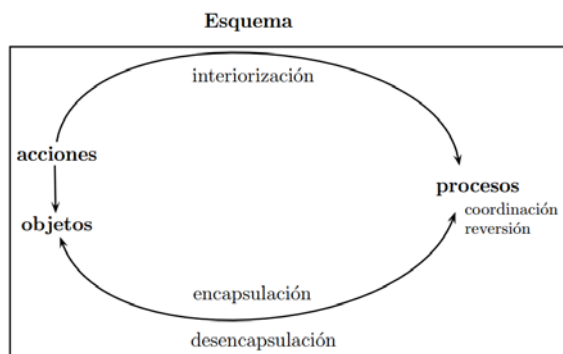
*Generalización:* Este mecanismo está relacionado con la capacidad del estudiante para aplicar un determinado *Esquema* en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los *Esquemas* no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un *Esquema* para ser contextualizados en otros contextos.

*Reversión:* Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Y consiste básicamente en desencapsular un objeto o revertir el mecanismo que lo generó. De esta manera un estudiante puede regresar sobre el proceso siempre que lo requiera. (Dubinsky 1991, citado en Roa-Fuentes 2008 p.30).

*Tematización:* Cuando un estudiante reflexiona sobre un *Esquema*, viéndolo como “un todo”, y además puede realizar Acciones sobre el *Esquema*, se dice que el *Esquema* ha sido tematizado en un objeto (Asiala, et al., 1996). Para Piaget y García (2004, p.103), la tematización es “el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización.

### 2.1.2. Construcciones mentales

En el siguiente gráfico mostramos el proceso dinámico de cómo un estudiante construye sus estructuras matemáticas.



*Figura 2.1.* Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

Como puede verse en la *Figura 2.1*, cuando un estudiante inicia la construcción de un concepto o noción matemática realiza transformaciones (Acciones y Procesos) sobre Objetos preexistentes. Una vez interiorizadas estas Acciones decimos que el estudiante tiene una concepción Proceso; una vez que este Proceso es encapsulado pasa a ser un Objeto cognitivo. Un Objeto se puede des-encapsular para volver al proceso que le dio origen y de esta manera coordinarlo con otro(s) Proceso(s), para posteriormente ser encapsulado(s). Una vez el estudiante logra un Objeto es posible dar paso a la construcción del *Esquema*.

A continuación haremos una descripción más detallada de estas construcciones mentales tomando y presentaremos de ejemplo el concepto de transformación lineal definido por Roa-Fuentes y Okaç (2010):

*Acción:* Una Acción es una transformación de un objeto que es percibida por el estudiante como externa y se realiza como una reAcción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un estudiante que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una Acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de Acciones. (Asiala, et al., 1996, p.10)

Si el estudiante se limita a realizar operaciones aplicar algoritmos y procedimientos externos, sin mostrar reflexión sobre ellos, decimos que el estudiante muestra una concepción Acción. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, el estudiante necesitará de una fórmula explícita que le permita verificar las propiedades de linealidad. Además será necesario hacer la pregunta: *¿es  $T$  una transformación lineal?* Las Acciones para este caso, se determinan por la repetición de un algoritmo y la notación de los objetos, sin que haya consciencia de la naturaleza de los elementos.

*Proceso:* Cuando una Acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma Acción en la mente del estudiante, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un estudiante que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. (Asiala, et al., 1996, p.10)

La concepción Acción requiere de estímulos externos, pero la concepción proceso de un control interno. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, es claro que hay interiorización cuando el estudiante puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente la preservación de la suma vectorial y el producto por escalar, o la preservación de combinaciones lineales. Un proceso también

puede darse por la *coordinación* de dos Procesos, este mecanismo permite formar relaciones entre los Procesos (por ejemplo mediante conectores lógicos) para determinar un nuevo proceso. (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010).

*Objeto:* Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean Acciones o Procesos) que pueden actuar sobre él, y es capaz de construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. (Asiala, et al., 1996, p.11)

Las Acciones y los Procesos pueden considerarse transformaciones dinámicas mientras que los objetos se consideran construcciones estáticas. Retomando el ejemplo del concepto de transformación lineal propuesto por Roa-Fuentes y Oktaç (2010), al realizar preguntas específicas como si  $T$  es una transformación lineal, ¿es siempre  $T^{-1}$  una transformación lineal?, o al considerar  $L(U, V)$  como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales  $U$  y  $V$ , donde cada función  $g$  definida entre  $U$  y  $V$  es una transformación lineal y se considera como un vector del espacio vectorial  $L(U, V)$ , en estos casos la transformación lineal es considerada como un objeto.

*Esquema:* La abstracción reflexiva permite describir cómo un estudiante logra construcciones mentales sobre un concepto matemático determinado, ya que él considera que los conceptos matemáticos no se aprenden directamente sino que se aprenden si el estudiante posee las estructuras mentales adecuadas para comprenderlo, como se muestra a continuación:

El conocimiento matemático de un estudiante es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo Acciones, Procesos y objetos y organizándolos en Esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky & Mc Donald, 2001, p.276).

Para la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático está condicionada por el “paso” que un estudiante puede dar entre las estructuras, Acción, Proceso y Objeto, para lograr una organización general de su conocimiento matemático en *Esquemas*. La coherencia de los *Esquemas* de un estudiante le permite decidir cómo abordar una determinada situación matemática. Por tanto esta teoría es especialmente útil para describir la forma como un estudiante puede construir un concepto o noción matemática exitosamente, a partir de las relaciones que pueden establecerse entre las “viejas” y nuevas estructuras (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014).

Arnon et al. (2014) describen el *Esquema* de un estudiante sobre un concepto matemático como la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros *Esquemas* que están unidos por algunos principios o relaciones generales para formar una estructura en la mente del estudiante que puede ser ejercida sobre una situación problemática que implica ese concepto. Los *Esquemas* son estructuras dinámicas que según Dubinsky (1991), están caracterizados por su reconstrucción continua y están determinados por la actividad matemática del sujeto. Cuando el *Esquema* es coherente, el estudiante podrá ver toda la estructura relacionada con el concepto. *La evolución de los Esquemas* la describe Piaget en términos de los niveles Intra, Inter y Trans.

Según Trigueros (2005), el nivel Intra determina las Acciones, Procesos y Objetos relacionados con un mismo concepto matemático, mientras que el nivel Inter determina las relaciones entre los diferentes conceptos; y el Trans se refiere a la posibilidad de tomar un conjunto de conceptos que se pueden considerar como Acciones, Procesos, Objetos o *Esquemas* y las relaciones entre sí como un Objeto sobre el cual se pueden ejercer nuevas Acciones.

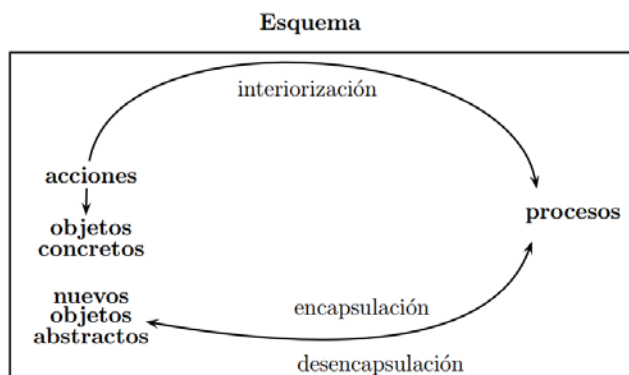
Hasta el momento son pocos los trabajos que incluyen la idea de *Esquema*, en su mayoría relacionados con conceptos de cálculo diferencial. Entre ellos podemos nombrar los trabajos de: Clark et al. (1997) que estudio la regla de la cadena relacionada con el concepto de derivada; Cottrill, et al. (1999), la regla de la cadena y su relación con la composición de funciones; McDonal, et al. (2000) el concepto de serie y sucesión, Trigueros (2000) quien trabajó con sistemas de ecuaciones diferenciales y Maturana, Parraguez y Trigueros (2015).

Para Trigueros (2005), el estudio de los *Esquemas* de los estudiantes es una herramienta útil ya que arroja mucha información sobre las dificultades que en muchos casos no se notan en investigaciones de otro tipo o en el aula. Además, estos estudios señalan aquellas relaciones en las que hay que hacer mayor énfasis.

Entonces lo que queremos específicamente en nuestra investigación es, tomar esos elementos que con cierto detalle ya han sido estudiados, “levantar la mirada sobre ellos” y determinar cuáles son las relaciones que tiene que establecer un estudiante entre sus construcciones para estructurar su *Esquema* de transformación lineal. Hipotéticamente y dada la relación que tiene con el concepto de base, tratamos de determinar ese tipo de relaciones que en términos de la teoría APOE y cómo están determinadas por el tipo de estructuras.

### 2.1.3. La construcción de Objetos abstractos a partir de Acciones concretas

En Arnon et al. (2014) se propone el uso de la teoría APOE para la enseñanza de matemáticas en la Escuela Básica. Los conceptos que se desarrollan en la universidad generalmente se construyen a partir de Acciones específicas sobre Objetos abstractos tal como señalamos en la *Figura 2.1*. Ahora como se muestra en la *Figura 2.2*, en la escuela básica la construcción de Objetos matemáticos inicia mediante la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos.



*Figura 2.2.* La diferencia en la teoría APOE entre contextos abstractos y contextos concretos (Arnon et al., 2014, p.154)

Estos Objetos se interiorizan en Procesos que son finalmente encapsulados en Objetos abstractos. En la construcción del *Esquema* de transformación lineal ha tomado gran importancia la representación geométrica. Esta representación del Objeto matemático puede en un momento dado darle elementos a un estudiante para comprender una situación aun cuando ésta esté definida en términos funcionales y/o matriciales. Gracias a las características concretas, entendido esto como aquello que involucra el uso de Objetos físicos reales o imaginarios (Arnon et al., 2001) de la representación geométrica de transformaciones lineales, un estudiante puede inferir sobre las características funcionales y/o matriciales que están más relacionadas con la construcción de Objetos abstractos.

Como se discutió en la sección anterior el acercamiento exclusivo a la representación geométrica de la transformación lineal, puede obstaculizar la construcción del Objeto matemático; ya que los estudiantes tienen a centrarse sólo en aquello que es observable. Consideremos la siguiente situación:

Dibuje cómo queda la casita de la figura al aplicarle cada una de las transformaciones representadas por las matrices:

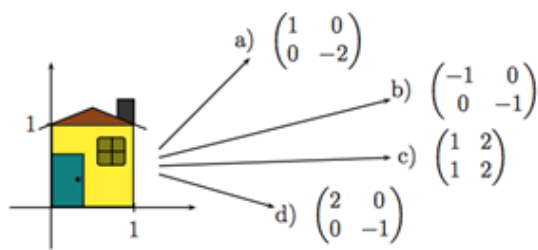


Figura 2.3. Transformaciones lineales y matrices (Isaacs y Sabogal, 2009, p.86).

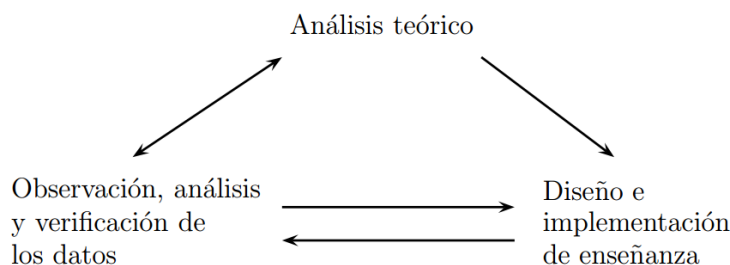
En este caso los estudiantes pueden centrarse en identificar “puntos principales de la casita” (ver Figura 2.3) que al multiplicarse por las matrices determinen la figura correspondiente. En este caso no se plante una reflexión previa sobre la importancia de calcular las imágenes de los vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$  (base canónica) que determinan todas las características de la imagen total por ser estos una base de  $\mathbb{R}^2$ . O una reflexión sobre lo que cada representación matricial implica sobre la transformación del Objeto.

Lo importante aquí es considerar como plantean Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) la coordinación entre estrategias visuales y analíticas que converjan a la construcción del *Esquema* de transformación lineal.

En el análisis que presentamos aquí buscamos mostrar las profundas relaciones entre los conceptos de vector, combinación lineal, base, matriz y transformación lineal. La construcción de estos Objetos así como el estudio de las relaciones entre sus diferentes estructuras será la base para desarrollar un modelo de clase que propicie el análisis de los estudiantes sobre dichas relaciones.

## 2.2. Ciclo de investigación de la teoría APOE

La teoría APOE proporciona un paradigma o ciclo de investigación que consta de tres elementos: Análisis Teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de los datos. El ciclo de investigación pasa a través de las tres componentes como se muestra en la *Figura 2.4*.



*Figura 2.4.* Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014, p. 94)

El Análisis Teórico es la primera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE, se realiza un Análisis Teórico del concepto a estudiar, y aquí se hace un análisis de las construcciones mentales que debe desarrollar un estudiante para la comprensión de dicho concepto. Este análisis nos lleva a la construcción e implementación de una estrategia de enseñanza, con el fin de que los estudiantes logren alcanzar las construcciones mentales propuestas en el Análisis Teórico; en base a la descomposición genética obtenida se diseñan unas actividades que se implementarán en la clase y para finalizar, a raíz de la aplicación de diseños de enseñanza se obtienen datos que se analizan desde la teoría APOE, en algunos casos es necesario refinar la descomposición genética obtenida en el Análisis Teórico.

1. *Análisis teórico:* El ciclo parte de un Análisis Teórico del concepto matemático y para ello tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores (estudiante y/o profesor), exámenes diagnóstico y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que permitan obtener información sobre cómo se estructura el concepto, para luego determinar un camino posible para la construcción de dicho concepto. De este análisis surge una descomposición genética, que como lo mencionamos anteriormente, es un camino que nos muestra cómo un estudiante puede construir un concepto matemático en términos de las construcciones y mecanismos mentales (Roa, 2008). Asiala, et al. (1996) plantea dos preguntas que guían el trabajo en esta componente: ¿Qué significa comprender un concepto matemático? y ¿cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un estudiante? Estas preguntas permiten la reflexión sobre el concepto de estudio y la forma como los estudiantes lo conciben. Como se mencionó anteriormente la descomposición genética de determinado concepto no es única.
2. *Diseño y aplicación de instrumentos:* La segunda componente del ciclo de investigación tiene que ver con el diseño y la aplicación de instrumentos basados en los Análisis Teóricos (Asiala, et al., 1996). Después de tener la descomposición genética preliminar necesitamos documentarla para validarla o refinarla. Por ello es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las

construcciones mentales señaladas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluido pero que sean necesarias según los procedimientos realizados por los estudiantes (Roa, 2008).

3. *Análisis y verificación de los datos:* Por último, la tercera componente del ciclo de investigación es el análisis y verificación de los datos. En esta componente se analizan los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los datos obtenidos se analizan desde la descomposición genética preliminar teniendo en cuenta los elementos que no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas en la descomposición genética preliminar no se perciben. Después de este análisis obtenemos una descomposición genética refinada. (Roa, 2008)

## Capítulo 3.

### Desarrollo de la Investigación: Ciclo APOE

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción del *Esquema* de transformación lineal, un estudiante universitario que asiste por primera vez a un curso de Álgebra Lineal I, se diseñó una descomposición genética que se describe en el apartado anterior, y se crearon instrumentos y registro de observación basado en dicha descomposición, para llevar a cabo el análisis de la producciones escritas y video grabadas de los estudiantes, en particular de sus estrategias de solución. Para analizar los datos, se consideró que el estudio de casos. Los estudios de casos se insertan dentro de la teoría APOE para llevar a cabo un análisis coherente del trabajo de los participantes en la investigación.

Este capítulo se inicia con la descripción de las componentes del Ciclo de investigación propuesto por APOE, tomando en cuenta las características de los estudiantes, profesores y en general las condiciones del escenario en que se desarrolla esta investigación.

*Análisis Teórico:* En esta investigación, el Análisis Teórico se basa en estudiar el concepto de transformación lineal y determinar cómo está relacionado con el concepto de base en términos de las relaciones que deben establecerse entre las diferentes estructuras que un estudiante puede lograr para construirlo. Además se establece cuál es el rol que juega en dicha relación la representación matricial y la representación geométrica (en el caso de las transformaciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ). Para esto nos apoyamos principalmente en las descomposiciones genéticas que han sido estructuradas sobre los dos conceptos de interés para describir dichas relaciones en un *Esquema* de transformación lineal: la descomposición genética del concepto de base (Kú y Oktaç, 2008) y la descomposición genética de la transformación lineal como función (Roa Fuentes y Oktaç, 2010).

Esto sumado a la experiencia de las investigadoras como profesoras y estudiantes nos permite establecer de manera hipotética las relaciones que se destacan en la construcción del *Esquema* de transformación lineal. De este Análisis Teórico se obtiene una descomposición genética preliminar que permite construir los instrumentos que serán aplicados durante la investigación. De tal manera que una vez desarrollado el ciclo completo se espera obtener un análisis refinado y más real, teniendo en cuenta el trabajo que logran desarrollar los estudiantes. Más adelante se muestra la construcción detallada de la descomposición genética preliminar como principal resultado de esta componente.

*Diseño y aplicación de instrumentos:* El interés de esta investigación es realizar el ciclo completo que propone la teoría APOE. Es por ello que a partir del Análisis Teórico no solo se busca estructurar una descomposición genética del *Esquema* de transformación lineal, sino además se espera proponer

sugerencias de tipo didáctico sobre cómo desarrollar en un curso de Álgebra Lineal básico el concepto de transformación lineal. Además de considerar cuestiones de tipo curricular que validen que los conceptos no se construyen de forma lineal, sino que hay conexiones entre ellos que deben establecerse previamente. Se propone que en primer lugar es responsabilidad del profesor posibilitar la construcción de conexiones, esto a partir del tipo de situaciones que propone en su clase. Dentro de lo expuesto, de manera natural va a jugar un papel importante la interpretación matricial y en algunos casos su interpretación geométrica.

*Análisis y verificación de los datos:* En esta componente se analizan los datos obtenidos en los talleres que realizaron los estudiantes, no solo el material escrito sino que también las grabaciones de dichos talleres, así como de las grabaciones de las clases. Con base en los análisis obtenidos en la componente anterior, además del trabajo en el aula y el interés en las actividades extracurriculares, se seleccionó un grupo de estudiantes para realizar una entrevista didáctica. Esto permite refinar aún más la pertinencia y validez de la descomposición genética preliminar, así como el rediseño de las diferentes actividades planteadas durante el desarrollo del ciclo de investigación.

### 3.1. Elementos iniciales del Análisis Teórico

Una transformación lineal  $T$  puede definirse como una función entre espacios vectoriales ( $T: V \rightarrow W$ ) que preserva combinaciones lineales. Además, si consideramos que todo vector  $v \in V$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores de una base ordenada de  $V$ , entonces sabemos que basta con conocer el efecto de  $T$  sobre los vectores de dicha base para determinar la imagen de cualquier vector en  $V$ .

Por otro lado una transformación lineal donde los espacios vectoriales  $V$  y  $W$  son de dimensión  $n$  y  $m$  respectivamente, puede representarse por medio de una matriz  $A_T$  en  $M_{m \times n}$  cuyas columnas están definidas por las imágenes de los vectores de una base para el espacio  $V$  tal como se propone en el siguiente teorema:

*Teorema:* Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$ ,  $W$  un espacio vectorial de dimensión  $m$  y  $T: V \rightarrow W$  una transformación lineal. Sea  $\beta_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base para  $V$  y sea  $\beta_W = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  una base para  $W$ . Entonces existe una matriz única  $A_T$  de  $m \times n$  tal que:  $[T(v)]_{\beta_W} = A_T[v]_{\beta_V}$ . (Hoffman 1971, p.88)

De esta manera es posible encontrar la transformación de cualquier vector  $v \in V$  por medio de la matriz de la transformación. Este resultado, establece un isomorfismo en donde la matriz de la transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita, se puede expresar como una matriz y toda matriz puede representar una transformación lineal entre dichos espacios, jugando un papel importante la base.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

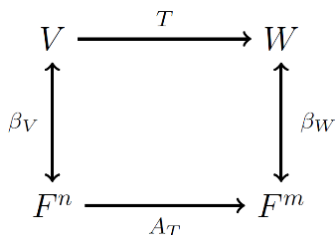


Figura 3.1. Transformaciones lineales y matrices.

En la *Figura 3.1.* como se plantea en Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon y Dubinsky (2002) las flechas verticales indican el isomorfismo entre el espacio vectorial  $V$  y el espacio vectorial  $F^n$ , así como el isomorfismo entre los espacios vectoriales  $W$  y  $F^m$ , resaltando la importancia de las bases ordenadas fijadas.

La flecha horizontal  $T$  indica la transformación lineal de  $V$  en  $W$ , mientras que la flecha  $A_T$  muestra la representación matricial de  $T$  con respecto a las bases ordenadas  $\beta_V$  y  $\beta_W$ . Esta relación entre las transformaciones lineales y las matrices, permite, para el caso particular de transformaciones del plano en el plano, o del espacio, describir el efecto geométrico de la transformación lineal.

Es necesario resaltar que por lo general, en los primeros cursos de Álgebra Lineal solo se trabaja con la base canónica en ambos espacios, obteniendo que  $T(v) = A_T v$ , esto hace que para los estudiantes el papel de la base sea invisible. En el desarrollo de este documento, iremos analizando diferentes situaciones que pueden generar la reflexión de los estudiantes sobre el rol de las diferentes representaciones de un concepto en una situación matemática. En particular haciendo énfasis en las interpretaciones de una transformación lineal y la importancia del concepto de base. Para esto iniciamos con la presentación de un Análisis Teórico.

### 3.1.1. Un modelo de construcción de la transformación lineal

Un estudiante que inicia la construcción de su *Esquema* de transformación lineal debe relacionar básicamente tres estructuras; dos estructuras Proceso, una de base y de transformación lineal y, una estructura Objeto de vector.

Entendemos la base como Proceso cuando un estudiante logra verla como un conjunto de vectores  $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , linealmente independientes que le permite expresar cualquier vector de un espacio vectorial  $V$  como una combinación lineal de ellos (Kú et al, 2008). Una estructura dinámica de transformación lineal permite que el estudiante piense en ella como una función definida entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales (Roa-Fuentes et al, 2010). Diremos que un estudiante tiene una estructura Objeto de vector, cuando lo concibe como un elemento de un espacio vectorial.

La primera estructura que buscamos establecer en este análisis es la construcción de la representación matricial a partir del establecimiento de relaciones entre las estructuras mencionadas. Con éstas la experiencia de un estudiante con diferentes situaciones que involucren la transformación lineal puede iniciar con la construcción de una concepción dinámica de un vector  $v$  en  $V$  al expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base  $\beta_V$ , esto es con la construcción del vector de coordenadas

(Parraguez, Lezama, Jiménez, 2016). Así el vector  $v$  inicialmente percibido por el estudiante en términos de sus componentes, ahora es visto a partir de los escalares que permiten construir la combinación lineal:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n. (*)$$

El mecanismo a través del cual el estudiante logra esta nueva estructura es la coordinación; este mecanismo le permite caracterizar el nuevo Proceso a partir de la unicidad de los escalares  $c_i$  y el orden de la base. Entonces en la expresión \* tenemos en el lado izquierdo una estructura estática y en el derecho una dinámica del mismo Objeto matemático. La construcción del vector de coordenadas es fundamental para determinar la representación matricial de una transformación lineal. Con base en lo descrito, daremos paso a la construcción de este nuevo Objeto.

Un estudiante con una concepción Proceso de transformación lineal debe manifestar que la función  $T$  le permite transformar combinaciones lineales. En algunos casos esto se aplica de manera mecánica, como un algoritmo dado para resolver ciertos ejercicios. Sin embargo en este punto para la construcción del *Esquema* es necesario que el estudiante manifieste su coherencia ya sea de manera verbal o escrita, para aplicar la transformación sobre la igualdad (\*), esto es:

$$Tv = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n)$$

$$Tv = T(c_1 v_1) + T(c_2 v_2) + \cdots + T(c_n v_n)$$

$$Tv = c_1 T v_1 + c_2 T v_2 + \cdots + c_n T v_n. (**)$$

Las Acciones específicas que logra aplicar para transformar la primera expresión en la tercera, requieren de una concepción Proceso de la transformación lineal en términos de la preservación en primer lugar de la suma vectorial y en segundo del producto por un escalar. Esto entre otras cosas le permite al estudiante establecer que una transformación lineal queda definida a partir de las imágenes de los vectores una base del espacio vectorial del dominio.

Resultado de la aplicación de las transformaciones descritas se tiene la expresión (\*\*), que puede ser vista como un Objeto igualado a un Proceso, una forma dinámica del vector  $Tv$  que está totalmente definida por los escalares de la combinación lineal. Este Proceso visto como un vector de coordenadas de  $Tv$  en términos de las imágenes de la base, puede ser encapsulado en un Objeto cuando dicho vector es construido como un Objeto del espacio vectorial  $W$ . Así el estudiante logra ver el vector  $Tv$  como una

énupla de la forma,  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$  un vector definido de manera única por los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  en  $F$  (Campo

sobre el cual se definen los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ ).

La construcción de este Objeto requiere que el estudiante trabaje con diferentes situaciones que enfaticen en la unicidad de este vector dada una base.

Ahora, la construcción de la Matriz que representa la transformación lineal  $A_T$ , implica realizar las Acciones descritas para todos los vectores de  $\beta_V$ . Sabemos que cada uno de los nuevos vectores  $T v_1, T v_2,$

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

...,  $Tv_n$  en términos de  $W$ ,  $[T_{v_i}]_{\beta_W}$  para  $i = 1, \dots, n$ , determinan las columnas de la matriz  $A_T$  que representa la transformación lineal. Una vez un estudiante logra construir dichos vectores está en capacidad de iniciar con la construcción de la matriz  $A_T$ .

La representación geométrica de una transformación lineal la consideramos como un sub-Esquema de este, enfocándonos en transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . En este caso, las transformaciones lineales (Matrices) que vamos a considerar representarán giros, cambio de escala, reflexiones, cortes con respecto a los ejes de coordenadas y la composición entre ellos, siempre y cuando la matriz de la transformación sea invertible.

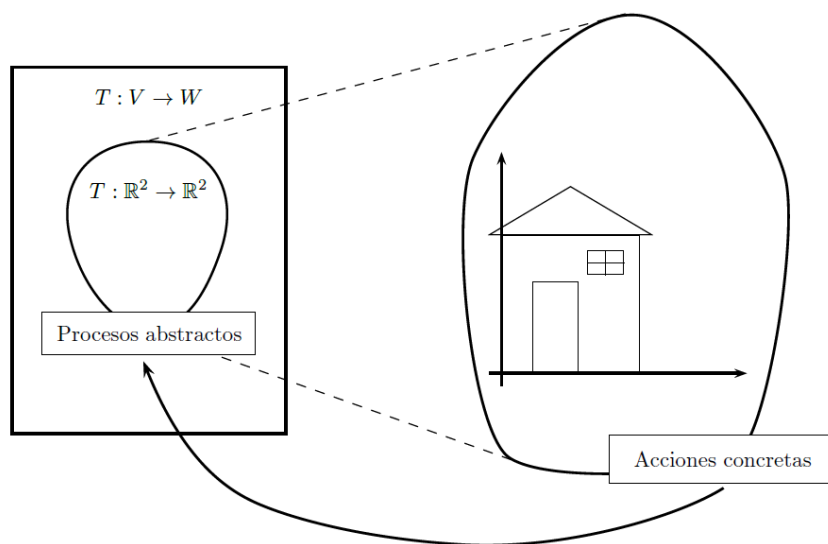


Figura 3.2. La representación geométrica de transformaciones lineales como un subesquema..

En este sentido vamos a entender la representación geométrica de este tipo de funciones como Objetos concretos en términos de Arnon et al., (2014). La representación geométrica permite que el estudiante vea características de los Objetos “físicos” un punto, una flecha o un polígono como representantes de los vectores de un espacio vectorial. Es decir, la representación geométrica le permite realizar Acciones concretas sobre Objetos concretos que pueden ser interiorizadas en Procesos que permiten la construcción de Objetos abstractos (ver Figura 2.3). Dado que previamente el estudiante ha iniciado la construcción del *Esquema* de transformación lineal a partir de su definición funcional y su representación matricial, esta interiorización estará caracterizada por el establecimiento de una transformación, una función que está determinada por las imágenes de los elementos de una base que definen la imagen de cualquier vector en  $\mathbb{R}^2$ .

A continuación describimos un camino que puede dar paso a la construcción de dichas estructuras.

*Concepción Acción:* Diremos que un estudiante tiene una concepción Acción de la representación matricial de la transformación lineal  $T$  ( $A_T$ ) cuando puede “organizar” la matriz a partir de las columnas logradas en las Acciones descritas anteriormente. En esta concepción, puede “usar” dicha matriz para determinar la imagen de uno o más vectores. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal, suponga que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad \text{Calcular } T\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo es posible que un estudiante construya la matriz  $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$  y realice el producto  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$  para determinar la imagen del vector dado, esto es evidencia de que ha logrado una concepción Acción de la matriz que representa la transformación lineal. Pero por otra parte, gracias a las relaciones que ha logrado entre la transformación lineal y la base es posible que escriba el vector  $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$  como combinación lineal de los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , para determinar finalmente la imagen bajo  $T$  de  $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Con esto queremos señalar que la construcción de una concepción Acción de  $A_T$  no puede ser independiente de las estructuras previas que el estudiante ha logrado.

Las Acciones descritas de construcción y uso de la matriz  $A_T$  pueden interiorizarse en un Proceso. Para esto el mecanismo de interiorización puede lograrse por la experiencia del estudiante con diferentes situaciones relacionadas con dicha matriz, en donde inicie su reflexión sobre las características de la matriz sin estar condicionado sólo a calcularla de manera mecánica.

Esta estructura Acción de la representación matricial de la transformación lineal y su concepción Proceso del mismo Objeto como función, pueden potenciar en el estudiante una concepción Acción de la representación geométrica. Cuando él o ella realiza Acciones específicas sobre cada uno de los vectores representativos del conjunto sobre el cual está trabajando. Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea  $f$  una transformación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ y/3 \end{pmatrix}$ .

- a. Describa cómo queda transformado el conjunto presentado en la siguiente figura.

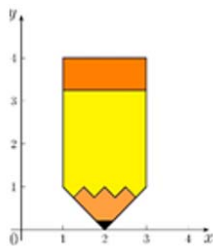


Figura 3.3. Representación de un conjunto de puntos en el plano.

- b. Determine la matriz  $A_f$ .

Un estudiante puede transformar “puntos representativos”, por ejemplo, calcular las imágenes de  $(1,1), (2,0), (3,1), (3,4)$  y  $(1,4)$ . Estas Acciones sobre cualquier conjunto de vectores pueden interiorizarse en un Proceso gracias a la relación con la base ordenada. De tal manera que el estudiante ya

no transforme los vectores que considere importantes dentro del conjunto, sino que pueda definir una base en  $\mathbb{R}^2$  por ejemplo  $\beta = \{(1,1); (2,0)\}$ . En esta concepción habitan la representación matricial y geométrica de la transformación lineal junto con una concepción Proceso de la representación funcional. Es importante resaltar en este punto que aunque las descomposiciones genéticas en muchos casos se presenten de forma lineal, responden sólo a una forma de describir cómo se estructura un concepto y/o noción matemática. En nuestro caso dado que tomamos las tres representaciones del Objeto, estamos estableciendo relaciones entre ellas haciendo un ir y venir entre las diferentes estructuras de cada representación que buscamos conectar a través de la base ordenada como un Proceso.

*Concepción Proceso:* un estudiante con una concepción Proceso de la matriz  $A_T$  puede reflexionar sobre ella sin tener que calcular de manera específica sus columnas. Para esto requiere enfrentar situaciones en donde la tarea implique algo más que el cálculo de la matriz. Por ejemplo, dada una matriz  $M = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$  que representa una transformación lineal  $T: V \rightarrow W$ , puede determinar las dimensiones de los espacios  $V$  y  $W$ . Esta concepción está asociada entonces con una estructura dinámica, dado que el estudiante puede caracterizar la transformación lineal a partir de las propiedades de la matriz, asociadas a su representación funcional.

La estructura dinámica de la matriz  $A_T$  puede verse como una estática a partir del mecanismo de encapsulación; este permite la construcción del Objeto.

En este punto el *Esquema* de transformación lineal evoluciona gracias a la relación que se establece entre el conjunto de funciones lineales y el conjunto de matrices a través de la fijación de una base.

Consideramos que un estudiante evidencia una concepción Proceso de la representación geométrica de la transformación lineal, cuando logra comprender que para encontrar la imagen de un conjunto en el plano, puede encontrar la imagen de dos vectores no colineales, que en este caso representan dos vectores linealmente independientes. Teniendo en cuenta que al aplicar la transformación lineal las rectas paralelas se mantiene, al igual que los ángulos y el número de lados se conservan. Así la relación directa entre la representación geométrica se relaciona con la funcional a través de la base como Proceso; las características que identifica en términos geométricos (concretos) tienen implicaciones sobre la transformación que ésta define; la preservación de dichas características es gracias a la linealidad de la función. Esto es en términos funcionales, gracias a la preservación de combinaciones lineales de  $T$ .

Es aquí donde las características de las Acciones concretas se transforman en Procesos que pueden dar lugar a un Objeto abstracto. La relación entre lo que es observable en la representación geométrica y las propiedades funcionales de la transformación lineal permiten la evolución de las estructuras hasta ahora descritas. El estudiante puede concluir que al aplicar la transformación lineal a los vectores de la base se conoce la transformación lineal para todos los vectores del conjunto de salida. Consideremos la siguiente situación:

¿Qué le sucede al tren que aparece en la siguiente figura, cuando se le aplica la transformación lineal dada por la matriz  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ?

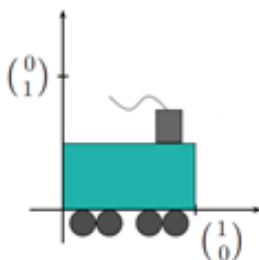


Figura 3.4. Representación de transformaciones lineales y matrices (Tomado de Isaacs y Sabogal, 2009, p. 86).

A diferencia del problema del “lápiz”, en la Figura 3.4. se presentan de manera específica los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , por tanto, en esta concepción sin realizar ningún cálculo el estudiante podría establecer que la matriz dada constituye una transformación lineal  $T$  tal que:  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

Y por tanto determinar la imagen del tren al aplicar  $T$ .

Esta descripción de cómo la representación matricial y geométrica evolucionan gracias a la relación con las características funcionales de la transformación lineal, pueden determinar la construcción del Proceso que da lugar al Objeto; un Objeto que mantiene las características particulares de cada representación pero que juega un rol diferente en el contexto en donde es posible que emerja en una situación matemática. A continuación analizaremos esta estructura.

*Concepción Objeto:* diremos que un estudiante tiene una concepción Objeto de la matriz que representa una transformación lineal y de su representación geométrica, cuando puede aplicar Acciones para hallar nuevas transformaciones lineales. A continuación hacemos una descripción del tipo de Acciones que puede aplicar sobre dicho Objeto.

- Determinar si una transformación lineal es o no invertible. Una vez el estudiante conoce la representación matricial  $A_T$  de una transformación lineal podrá, establecer criterios sobre la matriz para determinar si la función  $T$  es o no invertible. Por ejemplo consideremos la siguiente tarea:

Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal tal que  $A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ . Encuentre si es posible  $T^{-1}$ .

En este caso él o ella puede determinar si  $A_T$  es o no invertible. Esto le permitirá inferir sobre las características funcionales de  $T$  y en este contexto decidir si  $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  está o no definida.

- Componer dos transformaciones lineales a partir del producto de sus matrices asociadas. La construcción del Objeto matriz de la transformación implica la comprensión del comportamiento del producto matricial y su relación con la forma funcional de las transformaciones lineales que representan. Así componer funciones resulta equivalente a multiplicar matrices. Consideremos la siguiente situación:

Sean  $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1/2 \end{pmatrix}$  y  $A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  dos transformaciones lineales. Determine, si es posible,

$T \circ S$  y  $S \circ T$ .

Problemas de este tipo implican la construcción de relaciones entre las diferentes formas de ver la transformación lineal. En este caso el estudiante puede determinar la forma funcional de las

transformaciones  $S$  y  $T$  para componerlas, transformando los vectores de una base ordenada de  $\mathbb{R}^2$ . Pero por otra parte, puede explorar la relación entre la operación producto entre las transformaciones lineales  $A_T$  y  $A_S$ ; este resultado es planteado en algunos textos como un teorema.

La experiencia de los estudiantes con situaciones similares a las presentadas y una reflexión constante sobre las diferentes relaciones descritas, motiva la evolución del *Esquema* de transformación lineal en la medida en que su coherencia le permite resolver o no un problema específico. A continuación describimos cómo las relaciones descritas a través de las diferentes estructuras pueden determinar la evolución del *Esquema* a partir del desarrollo de los niveles.

*Niveles del Esquema de transformación lineal:* de acuerdo al modelo de construcción descrito, el concepto de transformación lineal está constituido por la relación entre sus diferentes interpretaciones (funcional, matricial y geométrica), jugando un papel importante la base ordenada como Proceso. A continuación describimos un primer acercamiento a los niveles de evolución del *Esquema*.

*Nivel Intra:* En este estudio se considera que un estudiante se encuentra en un nivel Intra cuando aplica Acciones, Procesos y Objetos a las diferentes interpretaciones de la transformación lineal; por ejemplo, dada la transformación lineal puede encontrar la matriz de la transformación y viceversa. Cuando al conocer la matriz de la transformación, o la transformación lineal, aplica transformaciones sobre puntos, flechas o polígonos (que representan vectores de un espacio vectorial) y logra encontrar la imagen de dichos vectores bajo la transformación dada.

*Nivel Inter:* Un estudiante se encuentra en un nivel Inter cuando en sus argumentaciones considera la base como concepto fundamental en las diferentes interpretaciones de la transformación lineal. Por ejemplo, dada la matriz de la transformación puede dar información sobre la dimensión del espacio de salida y la dimensión del espacio de llegada. O cuando al tener un polígono, reconoce dos vectores linealmente independientes y sus respectivas imágenes bajo la transformación lineal dada (en su representación funcional y/o matricial) y a partir de ellas logra establecer la imagen del polígono sin necesidad de hallar la imagen de cada uno de los vectores que la conforman.

*Nivel Trans:* Un estudiante se encuentra en un nivel Trans cuando puede reconocer las diferentes interpretaciones de la transformación lineal, funcional, matricial y geométrica y la importancia de la base ordenada y escoger la representación más adecuada para resolver una situación dada. Esto se evidencia cuando al construir nuevas transformaciones lineales, por ejemplo, la composición entre dos funciones, puede encontrar la composición a través de la multiplicación de sus interpretaciones matriciales. O en el caso de la suma de funciones, sumando sus interpretaciones matriciales. Ahora si la transformación lineal es invertible, podrá encontrar la inversa empleando la matriz inversa de la transformación. O el núcleo y la imagen de la transformación conociendo el Núcleo o la Imagen de la matriz de la transformación.

El desarrollo de estos niveles está íntimamente relacionado con la experiencia de cada estudiante; si bien las situaciones planteadas son básicas y son desarrolladas generalmente en los primeros cursos de Álgebra Lineal, lo que muestra la investigación en Didáctica en Álgebra Lineal es que los estudiantes no lo logran reflexionar sobre las relaciones que hemos descrito y sus procedimientos frente a este tipo de situaciones son de tipo dinámico. Esta reflexión la ampliaremos en la siguiente sección.

### 3.2. Diseño e implementación de un modelo de enseñanza

En esta investigación se desarrollan las tres componentes del Ciclo de investigación planteado por la teoría APOE. Esto permite entre otras cosas, proponer sugerencias de tipo didáctico sobre cómo desarrollar en un curso de lineal básico el concepto de transformación lineal. Además de considerar cuestiones de tipo curricular, que permiten mostrar que los conceptos no se construyen de forma lineal sino que hay conexiones entre ellos; por tanto el grado de comprensión que un estudiante logre de un concepto matemático dependerá de las relaciones que logre establecer entre sus estructuras previas y el nuevo concepto. En un primer plano podemos pensar que este asunto es responsabilidad del profesor dado que a partir del tipo de situaciones que propone en su clase puede dar o no paso al desarrollo de una estructura de un concepto o noción matemática específica.

Tomando la descomposición genética preliminar se diseñaron los instrumentos que fueron introducidos en los cursos y desarrollados por los estudiantes. A partir del modelo descrito en la sección anterior se seleccionaron las situaciones presentadas en el aula, ejemplos desarrollados por el profesor y ejercicios propuestos. Todas las situaciones inducían de manera directa o indirecta las diferentes interpretaciones de la transformación lineal, y las relaciones entre ellas.

El curso de Álgebra Lineal en la Universidad Industrial de Santander, contempla un conjunto de contenidos mínimos que deben ser abordados: Geometría vectorial en  $\mathbb{R}^n$  (Álgebra de vectores, longitud de un vector, ángulo entre vectores, producto puntos, rectas y planos en el espacio y proyecciones ortogonales sobre rectas y planos); sistemas de ecuaciones lineales; álgebra de matrices y determinantes. Por otra parte, el curso que puede ser dirigido desde diferentes enfoques: Clásico, Categórico, Moderno o Matricial (en los anexos se encuentran los contenidos que contemplan los diferentes enfoques). Los enfoques Clásico y Matricial no contemplan el estudio de las transformaciones lineales en su contenido. Es por ello que en esta investigación los profesores participantes abordan el desarrollo del curso desde una perspectiva Categórica o Moderna.

En esta investigación es muy importante el rol de los profesores que trabajan con los estudiantes que participan en el desarrollo de la segunda y tercera componente del ciclo de investigación. Inicialmente participaron cuatro profesores con los que desarrollamos tres reuniones:

- En la primera reunión se discutieron dos aspectos importantes, el primero relacionado con las características del Análisis Teórico particularmente sobre la descomposición genética preliminar. Además se analizó la relevancia de trabajar el concepto de transformación lineal en un curso básico y del tiempo pertinente para hacerlo.
- En la segunda reunión se socializó el diseño de los talleres programados para desarrollar en cada clase; los talleres fueron diseñados teniendo en cuenta la descomposición genética preliminar. Como se verá en el transcurso de este documento, la opinión y visión de los profesores desde su experiencia y formación fue fundamental para enriquecer estas actividades, así como el Análisis Teórico.

- En la tercera reunión se tomaron decisiones sobre el desarrollo de las clases y la posibilidad de grabar dichas sesiones; esto permite tener evidencias escritas y orales del trabajo de los estudiantes. Así los análisis de procedimientos realizados por ellos permiten evidenciar las construcciones mentales al estudiar el concepto de transformación lineal y su relación con el concepto de base.

En general la clase fue desarrollada con la visión de cada profesor sobre los aspectos más relevantes de la descomposición genética. La intervención física del investigador se dio en dos sesiones extra clase a la que los estudiantes asistieron de manera voluntaria. Allí se aplicaron los talleres mencionados.

### 3.2.1. Población

*Los estudiantes:*



Figura 3.5. Estudiantes 2015-I Ingeniería Mecánica.

Los estudiantes involucrados en esta investigación, fueron estudiantes que cursaban por primera vez la materia de Álgebra Lineal I, en la Universidad Industrial de Santander (UIS). Se seleccionaron cuatro grupos que incluyen estudiantes de ingeniería mecánica, industrial, sistemas, química y civil, entre los 15 y 23 años (ver tabla 3.1.). Cada grupo asistió a clase durante el semestre con un profesor diferente.

Tabla 3.1. Características generales de la población.

| <i>Grupo</i>  | <i>Número de Estudiantes</i> | <i>Rango de edades (años)</i> | <i>Programa</i>                         |
|---------------|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------|
| Grupo 1 (PO4) | 33                           | 15 – 19                       | Ingeniería Mecánica                     |
| Grupo 2 (B1)  | 15                           | 17 – 20                       | Ingeniería Industrial- Ingeniería Civil |
| Grupo 3 (D1)  | 25                           | 17 – 22                       | Ingeniería Química                      |
| Grupo 4 (D2)  | 27                           | 17 – 23                       | Ingeniería de sistemas                  |

*Los profesores:* Formaron parte de esta investigación cuatro profesores, todos Licenciados en Matemáticas egresados de la UIS; dos de ellos con estudios de posgrado en Matemática y los otros dos con estudios de posgrado en Educación Matemática. Uno de ellos no había trabajado el tema de transformaciones lineales en sus cursos anteriores de Álgebra Lineal I hasta ese semestre.

### 3.2.2. Análisis general de las tareas propuestas en el Taller

El Taller se realizó en horario extra clase, según lo acordado con los profesores involucrados en el proyecto. Estos se desarrollaron en dos sesiones con una duración aproximada de 120 minutos cada una; en estas sesiones participaron alrededor de 90 estudiantes organizados en dos grupos, acompañados por la autora de esta investigación. En las dos sesiones los estudiantes abordaron un conjunto de 20 tareas (ver Anexos), organizados en parejas, cada grupo tenía la opción de elegir qué tareas abordar durante la actividad. Esto permitió la discusión previa de las diferentes tareas propuestas así como la discusión de los procedimientos realizados en el tablero por algunos estudiantes. Quedó registro video grabado de algunas discusiones presentadas en el desarrollo de los talleres, con el fin de evidenciar las estructuras y mecanismos mentales de los estudiantes participantes.



Figura 3.6. Algunos estudiantes que asistieron a los talleres.

Las tareas del Taller se clasificaron tomando en cuenta las estructuras y/o mecanismos que los estudiantes podrían reflejar al abordar cada una. Se presentaron preguntas desde las tres interpretaciones de la transformación lineal: funcional, matricial y geométrica (VER ANEXO 2). A continuación se presenta dicha clasificación:

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Grupo 1 | En las tareas 1, 2, 3 y 19 el estudiante debe tener presente qué es una transformación lineal y qué propiedades satisface; además que éstas se deben cumplir para todo vector del espacio de salida. En estas tareas se aborda al concepto transformación lineal desde lo funcional.                                                                                                           |
| Grupo 2 | En las tareas 3 y 4 se pide a los estudiantes representar la transformación lineal como una matriz, aquí se pueden evidenciar las Acciones y los Procesos que los estudiantes logran poner en juego.                                                                                                                                                                                           |
| Grupo 3 | En las tareas 5, 6, 10 y 12 se proporcionan información sobre la transformación de unos elementos del espacio de salida y la idea es que con esta información se proporcione la transformación lineal. Los estudiantes pueden aplicar Acciones específicas sobre los vectores dados para hallar la transformación lineal; aquí es fundamental una concepción proceso de transformación lineal. |

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Grupo 4 | En las tareas 7 y 13 se espera que la matriz de la transformación proporcione información sobre los espacios de salida y llegada de la transformación lineal, en esta situación nuevamente el papel de la base es fundamental y puede evidenciarse el tipo de estructuras asociadas con este concepto.                                                                                                                                                                             |
| Grupo 5 | En las tareas 8 y 9 se pregunta si es posible encontrar una transformación lineal de un subespacio vectorial en otro subespacio; estas preguntas destacan la relación que debe establecerse entre los conceptos de base y transformación lineal.                                                                                                                                                                                                                                   |
| Grupo 6 | En la tarea 11 se espera que los estudiantes proporcionen características de la matriz de la transformación lineal, conociendo lo que le sucede a la región sobre la que se aplica la transformación, es decir, conociendo la imagen del conjunto transformado. Se busca establecer una relación entre las interpretaciones geométrica y matricial de la transformación lineal. Esta tarea puede dar evidencia de la interiorización de Acciones concretas en Procesos abstractos. |
| Grupo 7 | En las tareas 14 y 15 se cuestiona sobre el núcleo y la imagen de la transformación a partir de la información suministrada; en este caso los estudiantes pueden abordar el problema desde cualquier representación de la transformación lineal. Estas tareas pueden dar evidencia de la concepción objeto de los estudiantes, debido a que se están aplicando Acciones concretas sobre transformaciones lineales.                                                                 |
| Grupo 8 | En las tareas 16, 17, 18 y 20 se pide encontrar nuevas transformaciones lineales a partir de transformaciones lineales conocidas. Se espera que los estudiantes apliquen Acciones sobre la transformación lineal; estas situaciones permiten evidenciar la concepción objeto de la transformación lineal.                                                                                                                                                                          |

Por ejemplo en el segundo grupo de tareas se presenta:

Tarea 3. Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal, suponga que  $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  y

$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Encuentre:

- La matriz de la transformación.
- $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
- $T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Para encontrar la matriz la transformación, el estudiante debe reconocer que los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  forman la base canónica para el espacio de salida y al conocer las imágenes de estos, puede hallar la

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

matriz de la transformación aplicando Acciones específicas sobre los vectores dados, es decir, organizando la matriz a partir de las imágenes de la base del espacio de salida.

Para determinar  $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , y  $T\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$  el estudiante puede aprovechar que ya conoce la matriz de la transformación y multiplicarla por el vector dado:  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 5z \\ 3x + 4y - 3z \end{pmatrix}$ ,  
 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -22 \end{pmatrix}$ .

También puede encontrar la transformación  $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 5z \\ 3x + 4y - 3z \end{pmatrix}$  y posteriormente aplicarlo al vector dado  $T\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Esta pregunta en particular, hace parte también del grupo uno de preguntas pues es necesario reconocer qué es una transformación lineal y la relación de esta con las imágenes de la base del espacio de salida.

En el tercer grupo de preguntas se encuentra la siguiente:

Tarea 12. Si la Figura 2 es la imagen de la Figura 1, bajo una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , ¿es posible hallar una expresión para  $T$ ? Justifique su respuesta. Si es posible hallar  $T$ , escriba la expresión y halle  $T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

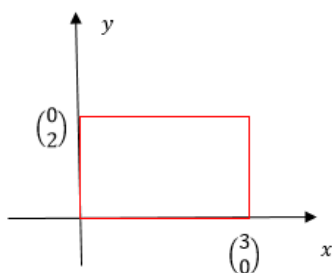


Figura 1.

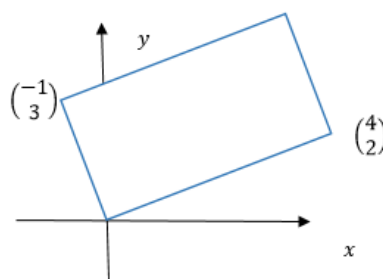


Figura 2.

Como ya se mencionó en este grupo de preguntas, se espera que el estudiante aplique Acciones específicas a dos vectores linealmente independientes (forman una base para  $\mathbb{R}^2$ ) con el fin de obtener una expresión funcional o algebraica de la transformación lineal. Para ello, es necesario que tenga una concepción proceso de la transformación lineal en su interpretación funcional o en su interpretación matricial, de acuerdo la forma como aborde la tarea.

En el cuarto grupo de preguntas, se encuentra una que ya discutimos en la descomposición genética:

Tarea 7. La matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  representa la matriz de una transformación lineal definida de un espacio vectorial  $V$  en un espacio vectorial  $W$ . ¿Cuáles son las dimensiones de los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ ? Justifica tus respuestas.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

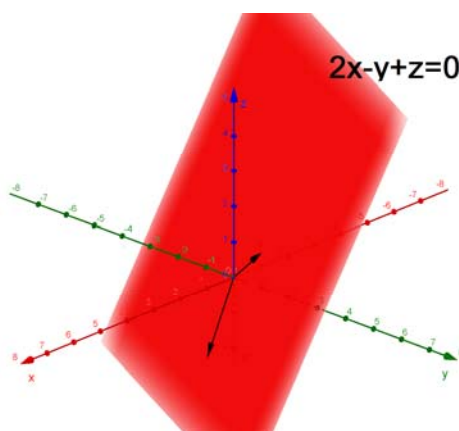
Para dar respuesta a esta pregunta, el estudiante puede reflexionar sobre la matriz sin tener que calcular de manera específica sus columnas. Identifica que la matriz es de orden  $3 \times 2$  y por tanto el espacio de salida es de dimensión 2 y el de llegada es de dimensión 3. En este caso, es posible afirmar que tiene una concepción proceso de la matriz de la transformación lineal, ya que puede caracterizar la transformación lineal a partir de las características su interpretación matricial.

En las tareas 8 y 9, como se muestra en la tabla anterior, se destaca la relación entre los conceptos de base y transformación lineal.

Tarea 8. ¿Es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + z = 0 \right\}$ ? Si es posible lleve a cabo sus ideas, en caso contrario justifique su respuesta.

Esta es una pregunta un poco diferente a las otras, puesto que en las anteriores se hacía referencia de manera explícita a la base. Sin embargo, para dar una respuesta afirmativa es necesario conocer la imagen de una base para el conjunto de salida y de esta manera se puede determinar la transformación lineal.

También es posible que el estudiante responda de manera afirmativa identificando que el espacio de llegada es un plano que pasa por el origen, y por tanto un espacio vectorial. Halla una base para  $W$  y le asigna a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  un vector de la base de  $W$ , encontrando así la transformación lineal.



Si la respuesta es negativa, es necesario conocer los argumentos del estudiante para determinar si ha construido la relación que hay entre la base y la transformación lineal.

El último grupo de preguntas, busca evidenciar que los estudiantes que han logrado una concepción objeto de la transformación lineal:

Tarea 16. Defina dos transformaciones lineales  $f$  y  $g$  donde este  $f \circ g$  este definida.

En esta tarea, a partir de dos transformaciones lineales se pide mostrar si otra función está definida, la composición. En esta situación el estudiante puede considerar las interpretaciones matriciales de cada transformación lineal y encontrar que la composición se puede ver como el producto de las interpretaciones matriciales de cada transformación lineal. La construcción del objeto matriz de la transformación lineal, implica la comprensión del producto matricial y la relación con la forma funcional de las transformaciones lineales que representan, así como se describe en la descomposición genética.

La entrevista se constituye de siete situaciones basadas en el Análisis Teórico, a continuación se presenta el análisis a priori de cada una.

### 3.2.3. Análisis a priori de la entrevista

Después de analizar detalladamente la información obtenida en los talleres (análisis de hojas de trabajo de los estudiantes y video grabaciones de las sesiones), se seleccionaron 13 estudiantes para realizar una entrevista didáctica que permitiera analizar las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes evidencian al construir el concepto de transformación lineal. El análisis de estos datos puede validar o refinar la descomposición genética planteada en la primera componente del método.

#### Pregunta 1

Si  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Con esta información, ¿es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$ ? Explique claramente su respuesta.

En esta situación se presentan tres vectores y sus respectivas imágenes bajo  $T$ ; es pertinente aclarar que dentro de la información dada no se estipula qué relación tienen los vectores o qué tipo de función es  $T$ . Podemos considerar dos caminos de solución, uno en el caso en que el estudiante conteste afirmativamente y otro en el caso contrario.

El estudiante puede considerar que Sí es posible encontrar una transformación lineal que cumpla las condiciones dadas, y de manera mecánica realizar el siguiente procedimiento:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} (*)$$

$$\begin{aligned} x &= c_1 + 4c_2 \\ y &= 2c_1 + 4c_3 \\ z &= 6c_2 + 3c_3 \end{aligned}$$

Mediante algunos cálculos es posible determinar que  $c_1 = \frac{1}{2}y - c_3$ ;  $c_2 = \frac{2x - y + 4c_3}{24}$  y  $c_3 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Una vez el estudiante realiza estos cálculos puede continuar desarrollando el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= c_1 T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (**) \\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \left(\frac{1}{2}y - c_3\right) T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{2x - y + 4c_3}{24}\right) T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{y - 2c_3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2x - y + 4c_3}{24} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considerando que la transformación lineal se define como:  $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y - 2c_3}{2} \\ \frac{2x - y + 4c_3}{24} \\ c_3 \end{pmatrix}$ .

En esta situación podemos considerar que el estudiante tiene una concepción Acción de las estructuras previas: transformación lineal y base de un espacio vectorial. Pues tiene claro que la transformación lineal preserva combinaciones lineales y que un vector se puede expresar como combinación lineal de un conjunto de vectores dados, pero no reflexiona sobre los procedimientos realizados. Aquí podemos observar la importancia que tienen las estructuras previas descritas en nuestra descomposición genética preliminar.

Por otro lado, si el estudiante después de plantear o de resolver el sistema de ecuaciones que resulta en (\*), evidencia de manera oral o escrita que los vectores dados no forman una base y por eso No es posible definir una transformación lineal con las condiciones dadas, diremos que tiene una concepción proceso de la base de un espacio vectorial y de la forma funcional de la transformación lineal.

En esta situación se puede dar paso a las relaciones que puede construir un estudiante entre los Procesos de base y transformación lineal de forma funcional. Como mostramos en la descomposición genética inicial, la coordinación entre estos dos Procesos le permite determinar que la función quedará totalmente establecida por las imágenes de los vectores de una base.

## Pregunta 2

¿Existe una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que tiene como imagen el subespacio generado por los vectores  $(1,0,-1)$  y  $(1,2,2)$ ? Si es posible encontrarla, describa explícitamente la transformación. En caso contrario, justifique por qué no es posible hallar  $T$ .

En esta pregunta se pide a los estudiantes determinar si existe o no una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Consideramos el caso en que el estudiante diga que Sí es posible encontrar una transformación lineal que cumpla las condiciones dadas. Para encontrar una transformación lineal con las especificaciones requeridas, el estudiante puede tener en cuenta que para definir una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  necesitan tres vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^3$ , por ejemplo,  $u, v$  y  $w$ . Y que pueden asignarle a dos de ellos los vectores que generan la imagen de la transformación, por ejemplo,  $T(u) = (1,0,-1), T(v) = (1,2,2)$  y además que  $T(w) = z$ , donde  $z$  es cualquier vector que pertenece al espacio generado por los vectores  $(1,0,-1)$  y  $(1,2,2)$ . Un estudiante con una concepción proceso de la transformación lineal de forma funcional puede definir una transformación lineal a partir de las imágenes de la base canónica, considerando, por ejemplo que:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (*)$$

En este caso a dos vectores de la base canónica le asigna los vectores dados y al tercer vector de la canónica le asigna el vector  $(0,0,0)$ . En esta situación hay una clara conexión entre los conceptos de imagen, transformación lineal con el concepto de base.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cuando el vector se expresa en término de la base canónica, las constantes arbitrarias son iguales a las componentes del vector, es decir,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y al aplicar la transformación lineal, se obtiene:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

En este caso consideramos que el estudiante tiene una concepción proceso de la transformación lineal pues está considerando características importantes de ella y no realizando Acciones sobre los objetos preexistentes. En esta situación se evidencia una clara relación entre los conceptos de base, conjunto generado y transformación lineal. Y consideramos, como lo mencionamos en el *Esquema*, que no es necesario conocer la forma explícita de la transformación lineal para dar información sobre ella, es decir, que un estudiante con una concepción proceso de la transformación lineal puede caracterizarla a partir de las propiedades de la base, asociadas a su representación funcional.

Si un estudiante afirma que No es posible encontrar una transformación lineal con las especificaciones dadas, haremos una reflexión de las razones que lo llevan a concluir que no. Es posible que la limitación esté dada porque el problema presenta sólo dos vectores en  $\mathbb{R}^3$  y el estudiante esté esperando tres, en este caso pensamos que el estudiante no tiene claro el concepto de imagen de una transformación lineal y en este caso el estudiante presentaría evidencia del nivel Intra del *Esquema*, pues no logra identificar relación entre la imagen de un espacio vectorial y la base.

### Pregunta 3

Sea  $f$  una transformación lineal definida por  $f(x, y, z) = (-x, y + z, x - y - z)$ . Encuentre todos los vectores  $(x, y, z)$  de la forma que:

- $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$
- $f(x, y, z) = (1, 2, 2)$
- $f(x, y, z) = (1, 2, -3)$
- Describa en términos geométricos el conjunto que encontró en cada caso.

En esta situación se presenta una función al estudiante en forma explícita, se le dice que es una transformación lineal y se pide que encuentre para qué vectores la imagen es  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 2, 2)$  y  $(1, 2, -3)$ , así como también, que describa las regiones correspondientes a dichos conjuntos.

El estudiante puede abordar estas situaciones en conjunto, teniendo en cuenta la definición de imagen de una transformación lineal:  $\text{imagen } f = \{w \in W : w = f(v) \text{ para alguna } v \in V\}$ . De la siguiente manera, el estudiante toma un vector  $(a, b, c)$  del espacio de llegada,  $\mathbb{R}^3$ , y lo iguala con  $f(x, y, z)$ .

$$f(x, y, z) = (a, b, c)$$

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

$$(-x, y + z, x - y - z) = (a, b, c)$$

De aquí puede formar el sistema de ecuaciones:  $\begin{cases} -x = a \\ y + z = b \\ x - y - z = c \end{cases}$ . Este sistema lo puede resolver por ejemplo, utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

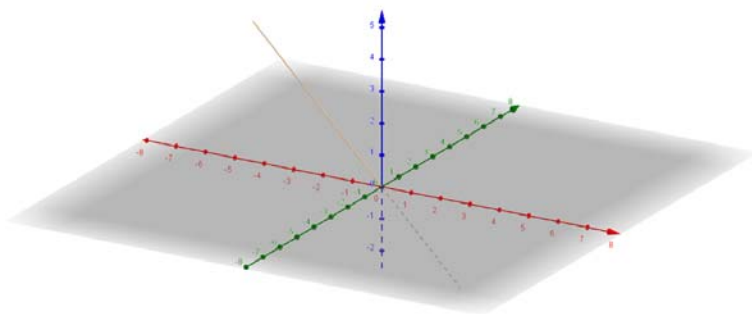
$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & -1 & -1 & c \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c + a + b \end{array} \right).$$

Para que el sistema tenga solución se debe cumplir que  $c + a + b = 0$ , es decir,  $a = -b - c$ . Es decir la solución tiene la forma  $x = -a$ ,  $y$ ,  $y + z = b$ .

En este caso el estudiante debe establecer si el vector dado en cada ítem cumple la condición.

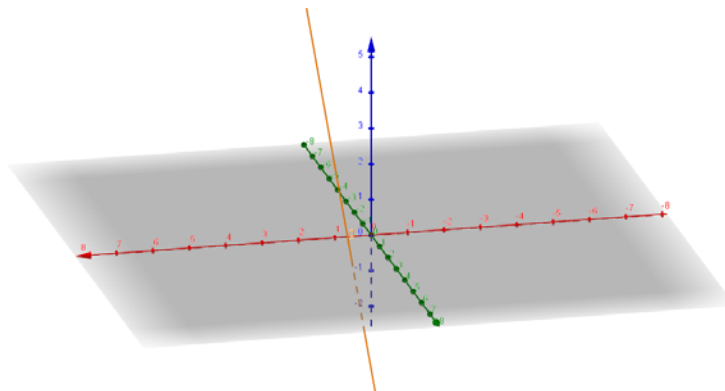
- a. Para que la imagen  $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ : Es claro que el vector cumple la condición,  $c + a + b = 0$ , luego  $x = 0$  y además  $y + z = 0 \Leftrightarrow -y = z$ . Por lo tanto los vectores de  $\mathbb{R}^3$ , cuya imagen es  $(0, 0, 0)$  (pertenecen al  $N_u T$ ) son los que tienen la forma  $(0, y, -y)$ .

Gráficamente, estos vectores pertenecen a la recta  $z = -y$ .



- b. En esta situación es posible observar que no hay vectores para los cuales  $f(x, y, z) = (1, 2, 2)$  debido a que no cumple la condición  $a + b + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2 = 0$ .
- c. Mientras que si existen vectores para los cuales al aplicarle la transformación lineal,  $f(x, y, z) = (1, 2, -3)$ , puesto que  $a + b + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 + (-3) = 0$ . Estos vectores son aquellos tales que  $x = -1$  y  $y + z = 2$ .

Gráficamente, estos vectores forman la recta mostrada en la siguiente figura:



Puede presentarse el caso en que el estudiante no vea relación alguna entre las preguntas y aborde cada una por separado; en este caso estaría aplicando Acciones concretas sobre cada situación, por tanto diremos que tiene una concepción Acción de transformación lineal.

Esperamos que el estudiante reconozca que si conoce la transformación lineal puede encontrar la transformación sobre cualquier vector, en particular los vectores de la base canónica. De esta manera puede establecer un sistema de ecuaciones lineales y al resolverlo, encontrará las herramientas necesarias para responder cada uno de los ítems de *a* a *c*. En este caso diremos que el estudiante tiene una concepción proceso de transformación lineal. Para describir cada región, el estudiante puede representar algunos puntos que le permitan dar información general sobre cada región. Como lo mencionamos en la descomposición genética un estudiante puede transformar “puntos representativos” sobre cualquier conjunto de vectores, estas Acciones se pueden interiorizar en un proceso gracias a la relación con la base ordenada como proceso.

Esta tarea se puede resolver representando la transformación lineal como una matriz y se pueden estudiar las características de la matriz, por ejemplo, no es invertible y por tanto el núcleo no es el vector nulo, hay más vectores en él. En este caso incluiríamos los conceptos de núcleo e imagen de la transformación lineal.

#### Pregunta 4

Si la Figura 2 es imagen de la Figura 1, bajo una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , ¿es posible hallar una expresión para  $T$ ? Justifique ampliamente su respuesta.

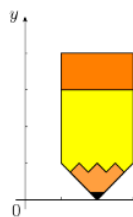


Figura 1.

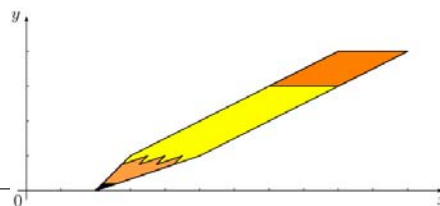


Figura 2.

En esta situación esperamos que el estudiante tenga en cuenta que si conoce dos vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^2$  y sus imágenes, puede conocer la transformación lineal, ya que la transformación lineal preserva combinaciones lineales. En este caso diremos que el estudiante tiene una concepción proceso de la transformación lineal.

Por ejemplo, para hallar los vectores linealmente independientes, el estudiante puede darle una escala a los ejes coordenados, podríamos suponer que escoge la punta del lápiz como el punto  $(2,0)$  y el vértice inferior izquierdo como el punto  $(0,1)$ . Los vectores  $(2,0)$  y  $(0,1)$  son vectores linealmente independientes y forman una base para  $\mathbb{R}^2$ , si se conocen las imágenes de la base, se puede determinar la transformación lineal. El estudiante puede pensar que  $T(2,0) = (2,0)$  y  $T(0,1) = (3,1)$ .

Cualquier vector  $(x,y)$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores  $(2,0)$  y  $(0,1)$ , es decir,  $(x,y) = c_1(2,0) + c_2(0,1)$ , para un par de escalares  $c_1$  y  $c_2$ . Esto lo puede hacer gracias a que el estudiante tiene una concepción proceso de base. Debe ahora, encontrar los valores de los escalares  $c_1$  y  $c_2$ .

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

$$\begin{cases} x = 2c_1 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2}x \\ y = c_2 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $(x, y) = c_1(2, 0) + c_2(0, 1) = \frac{1}{2}x(2, 0) + y(0, 1)$ .

Aplicando la transformación lineal a la combinación lineal anterior, tenemos que:

$$T(x, y) = T\left[\frac{1}{2}x(2, 0) + y(0, 1)\right] = \frac{1}{2}xT(2, 0) + yT(0, 1) = \frac{1}{2}x(2, 0) + y(3, 1) = (x + 3y, y).$$

Es claro que para hallar la transformación lineal es necesario que el estudiante tenga una concepción proceso de la transformación lineal en su interpretación funcional.

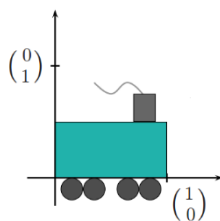
Sin embargo, el estudiante al conocer las imágenes de los vectores de la base, puede representar la transformación lineal como una matriz, esto es:  $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . En este caso, podemos considerar que tiene una concepción proceso de la interpretación matricial de la transformación lineal.

Por otra parte, el estudiante puede tomar diferentes puntos representativos de la figura 1., por ejemplo los vértices, encontrar las imágenes de dichos puntos y de esta manera tratar de encontrar una relación entre las imágenes y los puntos para hallar la transformación lineal; en este caso, el estudiante no reflexiona sobre la información que la base le proporciona para hallar dicha transformación, por consiguiente diremos que tiene una concepción Acción de transformación lineal en su forma funcional. En este caso, debemos mirar la forma en que le da respuesta a la pregunta dada para contar con mayor información sobre sus estructuras.

Es necesario recordar, que consideramos la representación geométrica de una transformación lineal como un sub- *Esquema* de este. Es decir, entendemos que la representación geométrica de este tipo de funciones como objetos concretos en términos de Arnon et al., (2014), y que precisamente esta representación le permite al estudiante realizar Acciones concretas sobre objetos concretos que pueden ser interiorizadas en Procesos que le permiten la construcción de objetos abstractos; en este caso, encontrar una representación funcional o matricial de la transformación lineal.

### Pregunta 5

¿Qué le sucede al tren que aparece en la siguiente figura, cuando se le aplica la transformación lineal dada por la matriz  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ? Justifique geoméricamente su respuesta.



Esta situación es un poco diferente a la anterior pero también busca relacionar las tres interpretaciones de la transformación lineal y obtener mayor información sobre el *Esquema*. Aquí se pide al estudiante que

brinde información sobre la figura transformada y además que apoye sus ideas en la representación geométrica.

Puede suceder que el estudiante aplique la transformación a diferentes vectores representativos del tren y de esta manera encuentre la imagen de la transformación, sin hacer ningún tipo de reflexión sobre los vectores, si son o no linealmente independientes, es decir, si forman una base para el conjunto. En este caso diremos que el estudiante tiene una concepción Acción de la transformación lineal.

Por ejemplo, el estudiante puede obtener las siguientes imágenes, en el caso de analizar el vagón:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lo descrito en la descomposición genética muestra que si un estudiante tiene una estructura Acción de la representación matricial de la transformación lineal y una concepción proceso de está como función puede lograr una concepción Acción de la representación geométrica. Es decir, el estudiante puede obtener de manera gráfica la imagen del trencito bajo la transformación lineal dada, sin hacer mayor reflexión sobre la base o sobre la matriz de la transformación.

Por otro lado, el estudiante puede tomar dos vectores linealmente independientes (dos vectores no colineales) transformarlos y tener en cuenta que si conoce la transformación de la base conoce la transformación de todo el conjunto, el tren. En este caso podemos afirmar que el estudiante tiene una concepción proceso tanto de transformación lineal como de base, puesto que reconoce que todo elemento del espacio se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base y además que la transformación lineal, preserva combinaciones lineales.

Puede tomar, por ejemplo, los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  y hacer una reflexión sobre sus imágenes  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Puede concluir que en el eje  $x$  se comprime a la mitad y que en el eje  $y$  se cuadriplica, además que se produce una reflexión sobre el eje  $x$ . Y si esto ocurre con los vectores de la base, va a suceder con cada uno de los vectores que hacen parte del tren: paralelismo, forma de la figura, etc.

Nuevamente la base juega un papel importante para resolver esta situación, la coordinación entre la base como proceso y la representación funcional de la transformación lineal como proceso. En este caso podemos afirmar que el estudiante tiene una concepción proceso de la transformación lineal. Ya que un estudiante con una concepción proceso de la matriz de la transformación lineal puede reflexionar sobre ella, considerando que las columnas representan las imágenes de los vectores de la base, en este caso la base canónica. En esta concepción el estudiante puede caracterizar la transformación lineal a partir de las propiedades de la matriz, asociada a su representación matricial.

Otro hecho que podemos esperar, es que el estudiante haga una reflexión sobre las columnas de la matriz de la transformación y observe que el lápiz se comprime en  $x$ , pero lo refleja sobre el eje  $x$  y estira en  $y$ , al tren. En este caso diremos que el estudiante tiene una concepción proceso de la transformación lineal representada matricialmente. Esto gracias a que consideramos en la descomposición genética que la representación geométrica permite que el estudiante vea características de los objetos “físicos” y aplique Acciones específicas a dichos objetos concretos que pueden interiorizarse en Procesos.

### Pregunta 6

- ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(2,5)$  y  $(0,1)$  en  $(1,3)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(2,5)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Por qué ninguna matriz transforma  $(2,6)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(r,s)$  y  $(0,1)$  en  $(t,u)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(a,b)$  en  $(1,0)$  y  $(c,d)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Qué condiciones sobre  $a, b, c$  y  $d$  hace imposible el inciso anterior?

En los ítems a. y b. se pide encontrar la matriz de la transformación lineal, en este caso el estudiante debe tener presente que los vectores transformados son vectores linealmente independientes del espacio de salida, por lo tanto representan una base para él y que por ello es posible encontrar dichas matrices.

En a., el estudiante debe reconocer que los vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$  forman la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y por tanto, la matriz de la transformación será  $A_T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ , considerando que la base del espacio de llegada es la canónica.

En b., nuevamente debe tener en cuenta que los vectores  $(2,5)$  y  $(1,3)$  forman una base para  $\mathbb{R}^2$ , y por tanto, la matriz de la transformación se puede encontrar sin ninguna dificultad,  $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

De acuerdo a lo descrito en la descomposición genética, diremos que el estudiante tiene una concepción Acción de la interpretación matricial de la transformación lineal, pues puede organizar la matriz a partir de las imágenes de la base.

Es posible que algún estudiante represente la transformación en su forma funcional para obtener la matriz de la transformación, en cada caso.

En el caso a., el estudiante procederá a realizar:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, y, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xT \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 5x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego la matriz de la transformación es:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

En b., el estudiante puede escribir el vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  como combinación lineal de  $(2,5)$  y  $(1,3)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Encontrando que  $c_1 = 3x - y$ ,  $y$ ,  $c_2 = -5x + 2y$ .

$$\text{Luego, } T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3x - y)T\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + (-5x + 2y)T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (3x - y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-5x + 2y)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ -5x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si el estudiante escoge este camino evidencia una concepción proceso de la transformación lineal, como lo mencionamos en la descomposición genética, la construcción de la matriz de la transformación no puede ser ajena a las estructuras previas. Es posible además, que logre determinar que las matrices encontradas en a. y b. son inversas y las relacione con las transformaciones lineales. Esperamos que al aplicar Acciones específicas sobre un conjunto de vectores dados, el estudiante pueda interiorizar estas Acciones en un proceso gracias a la relación con la base ordenada como proceso. Situación que puede permitirle en los ítems d. y e. Interiorizar las Acciones realizadas en a. y b. para obtener la matriz de cualquier transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  a partir de los vectores de la base canónica y la matriz de su transformación inversa.

Mientras que en c., el estudiante puede observar los vectores transformados no proporcionan información suficiente para encontrar dicha transformación, pues los vectores son linealmente dependientes por tanto no forman una base y por ello no puede encontrar la matriz de la transformación por ello el estudiante evidencia una concepción proceso de la transformación lineal.

Por otro lado, el estudiante puede intentar encontrar la matriz de la transformación a partir de la información dada sin reflexionar en los vectores (2,6) y (1,3), y con sus imágenes encontrar la matriz  $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , en este caso consideramos que el estudiante tiene una concepción Acción de la transformación lineal.

Para f., teniendo en cuenta los resultados anteriores permiten dar evidencia de la evolución de la base en relación con la transformación lineal. Ya que en este ítem, el estudiante puede reflexionar sobre los elementos del conjunto de salida sobre los cuales se conoce la transformación y concluir que esos elementos deben formar una base para  $\mathbb{R}^2$ . Luego, los vectores  $(a, b)$  y  $(c, d)$  deben ser linealmente independientes, es decir, el determinante de la matriz formada por estos vectores debe ser diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

### Pregunta 7

Considere  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = \sqrt{3}x$ , y  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = -x$ .

- Muestre que la composición  $T_1 \circ T_2$  representa una rotación y encuentre el ángulo de rotación.
- Grafique  $(2,1)$ ,  $T_1(2,1)$  y  $T_1 \circ T_2((2,1))$  en el mismo plano. ¿Esta gráfica coincide con lo que usted probó en a.?

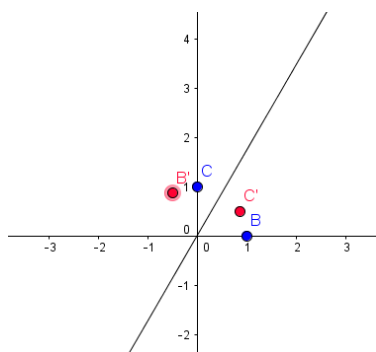
En esta situación se presenta al estudiante dos transformaciones lineales y se pide información sobre una nueva transformación lineal, además se pide representar gráficamente la transformación de un vector dado; esta situación busca poner en juego elementos matriciales, funcionales y geométricos de la

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

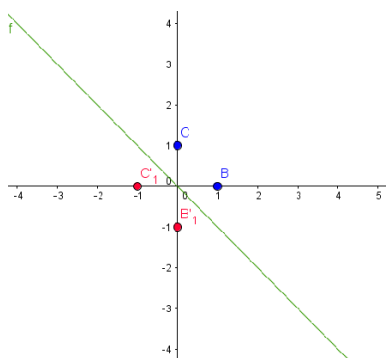
transformación lineal. A la luz de la descomposición genética, el estudiante debe aplicar Acciones sobre dos transformaciones lineales para obtener una nueva transformación lineal con lo que se espera encontrar evidencia sobre la concepción objeto.

En la parte a., es posible que el estudiante se apoye en la interpretación matricial de cada transformación lineal, para de esta manera al multiplicar las matrices encuentre la nueva transformación.

Es decir, puede encontrar que  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  se puede expresar por medio de la matriz  $A_{T_1} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ . Puede hallarla ubicando los vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$  y haciendo la reflexión sobre la recta se puede apoyar de manera gráfica así:



De manera similar puede obtener la matriz de la transformación lineal  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que refleja a un punto del plano sobre la recta  $y = -x$ .



Obteniendo que  $A_{T_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . En esta situación el estudiante estaría evidenciando la importancia que tiene la base para la transformación lineal y la relación con su interpretación matricial.

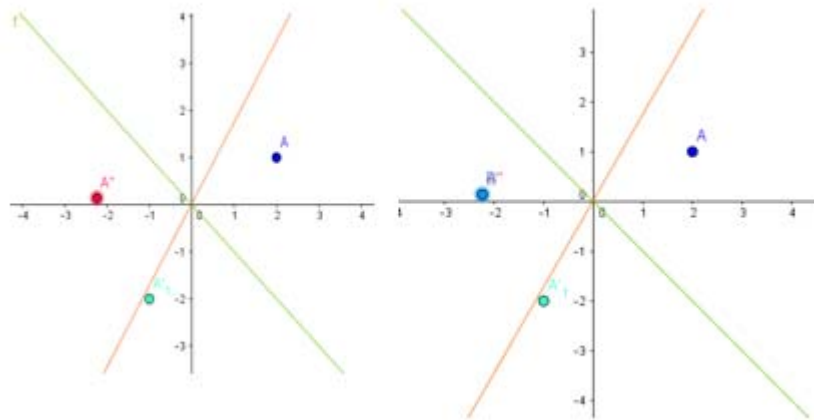
También es posible que halle la función composición sin recurrir a las matrices. En este caso estaría trabajando con la interpretación funcional de la transformación lineal, manipulando las transformaciones como objetos de otros conjuntos, de la siguiente manera:

$$T_1 \circ T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_1 \left( T_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = T_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}.$$

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

Después de obtener la composición en su forma matricial o funcional, el estudiante debe mostrar que ésta representa una rotación y encontrar el ángulo de rotación, puede hacerlo de manera geométrica o si necesita, le podemos dar la forma que tiene la matriz de la transformación lineal que representa una rotación  $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$  para encontrar el ángulo.

En b., esperamos que el estudiante se apoye en la representación gráfica y compruebe los resultados en el ítem anterior. Refleje, en el plano, al punto (1,2) y a su imagen con respecto a la primera transformación, sobre las rectas dadas respectivamente (ver gráfica inferior izquierda). Y luego compare el resultado con la imagen (1,2) bajo la composición de las transformaciones dadas (ver gráfica inferior derecha).



En el siguiente capítulo mostraremos con detalle algunas respuestas de los estudiantes entrevistados, a cada una de las situaciones mencionadas. Gracias a sus respuestas es posible refinar el Análisis Teórico y determinar tanto las estructuras como los mecanismos mentales al construir su *Esquema* de transformación lineal.

## Capítulo 4.

### Análisis y verificación de los datos: Evidencias de las construcciones y mecanismos mentales

En este capítulo se presenta el análisis de los datos obtenidos en el Taller y la entrevista a la luz de la descomposición genética. A partir del estudio de las construcciones que se evidencian en los estudiantes se determina la viabilidad de la descomposición genética preliminar.

#### 4.1. Análisis de los datos obtenidos en el Taller

A continuación se presentan algunas de las tareas que fueron seleccionadas y analizadas por los estudiantes durante el Taller, presentadas por los estudiantes. Para organizar los datos se usan abreviaciones como E1 haciendo referencia al estudiante cuyo cuestionario es el número 1. E1P1 haciendo referencia a la respuesta que el estudiante 1 presenta de la pregunta 1. Cabe señalar que esta clasificación no es la misma que se toma en cuenta en las entrevistas.

El Taller consta de 20 tareas que se desarrollaron durante dos sesiones, cada una de dos horas cada una. A los estudiantes se les proporcionó el Taller impreso, ellos trabajaron por parejas pero entregaron las tareas realizadas de manera individual. Los estudiantes escogieron qué tareas realizar y por cuál de ellas empezar, algunas se socializaron en el tablero.

Las tareas que más estudiantes trabajaron fueron las correspondientes al grupo 1 (ver clasificación de las preguntas del Taller por grupos sección 3.2.2.). A continuación se presenta un análisis de algunas de las tareas del Grupo 1 tomando como referente las estructuras descritas en la descomposición genética.

A continuación se presenta un análisis de algunas de las tareas del Grupo 1.

##### 4.1.1. Concepción Acción de la transformación lineal

Un estudiante con una concepción Acción de la transformación lineal, puede considerar que al aplicar la transformación a dos vectores dados se preservan las propiedades (suma y multiplicación por escalar), (Roa-Fuentes, 2008, p.72). Por ejemplo, el estudiante 39 (E39) en la pregunta 1 (ver Anexo) responde que  $g$  es una transformación lineal. Dado que preserva las operaciones para los vectores particulares dados:

$$\begin{aligned}
 c) \cdot u+v &= (2,1) \\
 g(u+v) &= (1+2(1), -1) = (3, -1) \\
 \cdot g(u) &= (1+2(0), -1) = (1, -1) \\
 g(v) &= (0+2(1), -0) = (2, 0) \\
 g(u) + g(v) &= (1, -1) + (2, 0) = (3, -1) \\
 \cdot c(u) &= (3, 0) \\
 g(cu) &= (3+2(0), -3) = (3, -3) \\
 \cdot g(u) &= (3+2(0), -3) = (3, -3) \\
 \cdot g(u) &= 1(3, -3) = (3, -3)
 \end{aligned}$$

E39 concluye que “ $g$  si es una transformación lineal ya que cumple que  $T(a_1v_1, a_2v_2, \dots, a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \dots + a_nT(v_n)$ ”. Cabe resaltar que aunque en esta situación E39 muestra una concepción Acción de la transformación lineal, e incluso presenta problemas al escribir la propiedad que satisface una transformación lineal, en preguntas posteriores muestra evidencia de tener una concepción proceso de base y proceso de transformación lineal, puesto que para encontrar la matriz de la transformación tiene en cuenta la relación entre la base y la transformación lineal.

En la descomposición genética preliminar se considera que un estudiante evidencia una concepción Acción de la transformación lineal si al conocer las imágenes de algunos vectores dados, encuentra la transformación lineal sin considerar si dichos vectores forman una base para el espacio de salida.

Evidencia de ello se observa en E61P5; allí el estudiante logra encontrar la transformación lineal analizando la relación entre los vectores del espacio de salida y sus imágenes:

5). Observando las imágenes de la transformaciones lineales  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  Encuentro que una  $T$  podría ser  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \end{pmatrix}$

E61P5: En el proceso de observación noté qué sucedía en la  $T$  de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Ví que el vector era el doble, y para llegar al doble habían 2 maneras: sumándose entre sí y multiplicando por el escalar 2. Antes de decidir cuál trabajar tuve que mirar la segunda, y noté que solamente me servía 1 en cada caso, sumando  $x + y$  podía hallar  $x$  en ambos casos, y multiplicando  $y \cdot 2$  podía encontrar  $y$  en cada caso.

E61 en la pregunta 5 explica detalladamente la forma como encontró la transformación lineal pero en ningún caso considera revisar si los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  forman una base para  $\mathbb{R}^2$ . En esta pregunta tampoco tiene en cuenta que es la transformación lineal la función que preserva combinaciones lineales. Sin embargo al igual que E39, en otras situaciones da evidencia de conocer las propiedades que debe satisfacer una transformación lineal.

#### 4.1.2. Concepción proceso de la transformación lineal

Los estudiantes que tienen una concepción proceso logran reflexionar sobre la matriz que representa la transformación lineal, sin tener que calcular de manera específica sus columnas. Este es el caso de E57P7, quien proporciona información sobre los espacios de salida y llegada al conocer la matriz de la transformación lineal.

E57P7 tiene en cuenta que si la matriz es de orden  $3 \times 2$ , para hallar la transformación, necesita multiplicar la matriz por un vector con dos filas; esto implica que el conjunto de llegada debe tener dimensión 2 y por lo tanto el espacio de llegada debe tener dimensión 3.

$T: V \rightarrow W$

7.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_t$

para  $v_i \in V$  tenemos

$T(v_i) = A_t \cdot v_i$  como  $A_t$  es de orden  $3 \times 2$   
 $v_i$  debe tener 2 componentes  $(x, y)$

$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x-y \\ x+2y \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dim V = 2$

$\dim W = 3$  porque tiene 3 coordenadas  $\begin{bmatrix} x \\ 3x-y \\ x+2y \end{bmatrix}$

Se puede observar que E57P7 intenta relacionar la representación matricial con la representación funcional de la transformación lineal y de esta manera dar respuesta a la pregunta dada. Mientras que algunos estudiantes como por ejemplo E46P7 o E62P7, dieron respuesta a la pregunta enunciando el teorema de la matriz de la transformación:

E46P7: De ahí vemos que  $A_{m \times n}$  tendrá “n” vectores columna, que son la misma cantidad de vectores de la base de  $V$ , y además  $A_{m \times n}$  tendrá la misma cantidad de filas que la cantidad de vectores de la base de  $W$ .

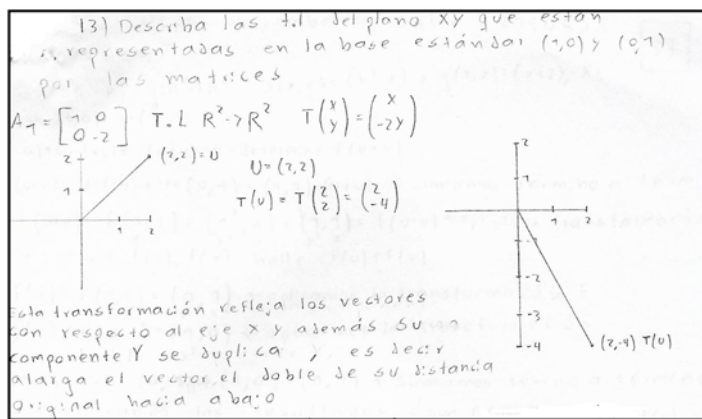
Como sabemos que la cantidad de vectores de una base del e.v. es la dimensión de dicho espacio, entonces podemos decir:

Como la matriz de la transformación es de  $3 \times 2$  entonces la dimensión de  $V = 2$  y la dimensión de  $W = 3$ ...

En las situaciones que abordaron estos estudiantes, la relación entre la base y la transformación lineal estuvo presente. Incluso estos estudiantes abordaron tareas del grupo 8, que corresponde a aplicar Acciones sobre transformaciones lineales para obtener nuevas transformaciones lineales; en algunos casos con éxito.

Por otro lado E37P13, relaciona las tres formas de interpretar la transformación lineal: matricial, funcional y geométrica. E37P13 no solo encuentra la expresión funcional de la transformación sino que además representa un vector dado y su imagen, y a partir de esta información hace una descripción detallada sobre la transformación lineal.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada



E24P12 también relaciona las tres interpretaciones de la transformación lineal, toma dos vectores no colineales (linealmente independientes), los multiplica por la matriz de la transformación cuyas componentes se desconocen y las iguala a sus respectivas imágenes. De esta manera resuelve un sistema de ecuaciones  $2 \times 2$  que le permite encontrar las componentes de dicha matriz.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x(0) + 2y = -1 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ 2(0) + 2w = 3 \Rightarrow 2w = 3 \Rightarrow w = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x(3) + y(0) = 4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \\ 2(3) + w(0) = 2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$$

Aunque no expresa de forma explícita que necesita conocer las imágenes de una base para encontrar la transformación lineal, el hecho de que escoja solo dos vectores no colineales para encontrarla, evidencia que la relación entre la base y la transformación lineal está presente.

Esta descripción de cómo la representación matricial y geométrica evolucionan gracias a la relación con las características funcionales de la transformación lineal, pueden determinar la construcción del Proceso que da lugar al objeto.

### 4.1.3. Concepción objeto

Los estudiantes tienen una concepción objeto de la transformación lineal (funcional, matricial y geométrica) cuando por ejemplo, logran aplicar Acciones sobre transformaciones lineales existentes para construir nuevas transformaciones lineales.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

E16P16 define dos transformaciones indicando, que son lineales pues cumple las condiciones (no lo prueba ni indica cuáles son las condiciones). Sin embargo, posteriormente muestra que conoce cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que una transformación sea lineal.

$$16. \quad T_1 = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} \quad (T_1 \text{ cumple las condiciones para t.l.})$$

$$T_2 = \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix} \quad (T_2 \text{ cumple las condiciones para t.l.})$$

Este estudiante realiza la composición, aunque según el análisis a priori se esperaba que el estudiante representara las transformaciones lineales de forma matricial, decide hacerlo de forma funcional.

Aplicamos  $T_1$  a  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  y al vector resultante le aplicamos  $T_2$ .

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}; \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ x+y+(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

Podemos decir que  $T_1 \circ T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida como  $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$

Para asegurarse que  $T_1 \circ T_2$  es una transformación lineal, E16P16 muestra que esta función preserva combinaciones lineales. En el desarrollo de esta tarea se evidencia la manera como una concepción Proceso y Objeto de un concepto matemático pueden ponerse en juego en la solución de una situación matemática. En este caso la concepción Objeto de E16P16, donde la transformación lineal es interpretada como una función, le permite encontrar una nueva función gracias a la composición. Pero para asegurar que la nueva función es lineal, recurre a la verificación de la preservación de combinaciones lineales para cualquier par de vectores  $u = (a, b)$  y  $v = (c, d)$  que caracteriza la concepción Proceso de este concepto.

Verificamos si  $T_1 \circ T_2$  es una t.l. Para que sea t.l. debe cumplir que  $T(\alpha u + v) = \alpha T u + T v$ .

Hallamos  $\alpha u + v$  y aplicamos  $T_1 \circ T_2$   $u = (a, b)$   
 $v = (c, d)$

$$\alpha u + v = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + c \\ \alpha b + d \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha u + v) = \begin{pmatrix} \alpha a + c \\ \alpha b + d \\ \alpha a + c + \alpha b + d \\ 2\alpha a + 2c + 2\alpha b + 2d \end{pmatrix}$$

Ahora hallamos  $\alpha T u$ ,  $T v$  y  $\alpha T u + T v$ .

$$\alpha T u = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \\ a+b \\ 2a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha a + \alpha b \\ 2\alpha a + 2\alpha b \end{pmatrix}; \quad T v = \begin{pmatrix} c \\ d \\ c+d \\ 2c+2d \end{pmatrix}$$

$$\alpha T u + T v = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha a + \alpha b \\ 2\alpha a + 2\alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \\ c+d \\ 2c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + c \\ \alpha b + d \\ \alpha a + c + \alpha b + d \\ 2\alpha a + 2c + 2\alpha b + 2d \end{pmatrix}$$

¿ $T(\alpha u + v) = \alpha T u + T v$ ? Si, son iguales. Por lo tanto  $T_1 \circ T_2$  es una t.l.

Las tareas que pedían encontrar nuevas transformaciones lineales que es una condición necesaria de una concepción Objeto, fueron las menos trabajadas por los estudiantes. Aquellos que las seleccionaron de la

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

lista inicial decidieron abordar la construcción desde la interpretación funcional. Como es el caso de E16P16 o el caso de E38P18 que encontró la transformación inversa.

18.  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $T(u, v, w) = (u, u+v, u+v+w)$ .

$T^{-1}(x, y, z) = ?$

$T^{-1}(x, y, z) = (u, v, w)$

Como  $T$  es una transformación inversa se aplica a un vector resultado para hallar el vector original. El vector  $(x, y, z)$  debe cumplir:

entonces  $\begin{cases} u = x \\ u+v = y \\ u+v+w = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = y-u \rightarrow v = y-x \\ w = z-u-v = z-x-(y-x) = z-x-y+x = z-y \end{cases}$

$T^{-1}(x, y, z) = (x, y-x, z-y)$

Del análisis de los datos obtenidos en el desarrollo del Taller, se evidencia la “preferencia” de los estudiantes por tratar la transformación lineal desde su interpretación funcional. Esto puede darse por el énfasis del profesor en el curso de Álgebra Lineal, por el tiempo de dedicación para esta interpretación de la transformación lineal, o por ser la función el concepto más familiar. El análisis de los procedimientos realizados por los estudiantes sobre las tareas propuestas en la entrevista, puede evidenciar elementos más puntuales sobre la manera como la interpretación funcional de la transformación lineal es puesta en juego por un estudiante al resolver una determinada situación.

## 4.2. Análisis de los datos obtenidos en la entrevista

En este apartado se presenta el análisis de datos obtenidos en el desarrollo de las nueve entrevistas. Se analiza con base en las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética preliminar en donde se busca identificar las estructuras que los estudiantes muestran al construir su *Esquema* de transformación lineal. Además se identifican aquellas estructuras que no fueron consideradas en la descomposición genética, pero que son construidas por los estudiantes dentro de su *Esquema*. Para dar cuenta de las estructuras y mecanismos mentales se agregan partes de la transcripción de la entrevista, así como imágenes las cuales contienen las producciones realizadas por los estudiantes.

Cinco de las entrevistas realizadas fueron individuales y 4 en parejas con el fin de determinar la forma como interactúan los estudiantes al defender sus argumentos frente a un par. Para organizar los datos se usan abreviaciones como E1 haciendo referencia al estudiante que se cuya entrevista es la número 1; E1G1 haciendo referencia al estudiante 1 del grupo 1, entrevistado.

Como ya se mencionó se prepararon siete tareas que fueron realizadas por los estudiantes o el grupo una a una, no se pasaba a la siguiente sin resolver la anterior. Los estudiantes fueron seleccionados por el trabajo realizado en el desarrollo del Taller, así como por sus aportes durante las clases; es de destacar que los estudiantes que participaron en la entrevista asistieron a clase con diferente profesor.

A continuación presentamos un análisis de las estructuras mentales de las estudiantes evidenciadas durante el desarrollo de la entrevista.

### 4.2.1. Concepciones previas

Para iniciar el camino hacia la construcción del *Esquema* de transformación lineal, es necesario que el estudiante relacione tres estructuras: base como proceso, transformación lineal como proceso y vector como objeto. Consideramos que la pregunta 1 de la entrevista puede dar evidencia de estas estructuras.

Si  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Con esta información, ¿es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$ ? Explique claramente su respuesta.

En esta situación a primera instancia la mayoría de los estudiantes entrevistados asintieron que era posible encontrar una transformación lineal con las características dadas. Sin embargo, al tratar de encontrar la transformación lineal llegaron a que no es posible. Solo dos estudiantes entrevistados (de manera individual) revisaron en primer lugar si los vectores dados formaban una base para el espacio de salida.

A continuación se presentan dos ejemplos.

*Entre la concepción Acción y Proceso de la transformación lineal:* En el análisis de la entrevista se notó que algunos estudiantes se encuentran entre una concepción Acción y Proceso de la transformación lineal., dado que aunque reconocen que una función  $T$  debe preservar combinaciones lineales no logran determinar la forma de los escalares de la combinación y su relación con una base ordenada. Esto muestra que la construcción de estructuras de conceptos y/o nociones matemáticas requiere de la evolución conjunta entre conceptos. En este caso la evolución de las estructuras asociadas a la transformación lineal depende de las relaciones que el estudiante logre establecer con el concepto de base.

Este caso el estudiante E1, quien reconoce que necesita la imagen de tres vectores en  $\mathbb{R}^3$  para encontrar la transformación lineal, pero al definir la combinación lineal no tiene en cuenta que los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  son una base para  $\mathbb{R}^3$ ; además como se muestra a continuación, hace un procedimiento que parece indicar un algoritmo mecánico al trabajar solo con bases canónicas.

E1: [Lee la pregunta en voz alta]

E: ¿Usted qué opina?

E1: [Vuelve a leer la pregunta en voz baja] Yo opino que sí.

E: ¿Por qué?

E1: Porque tengo tres vectores tanto en  $\mathbb{R}^3$  como en  $\mathbb{R}^2$ , entonces puedo plantear la combinación lineal

para encontrar  $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

E: ¿cómo lo haría?

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E1: Entonces tenemos:

Entonces,... Aquí tengo que escribir la transformación lineal de estos tres [señala los vectores en  $\mathbb{R}^3$ ]

E: ¿Para qué?

E1: Para hallar las constantes  $a, b, c$  para que en combinación lineal me genere  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

E: Pero, ¿qué es lo que quiere hallar? La imagen de qué. Porque si es la imagen de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ya la tiene.

E1: ... Bueno voy a escribir  $x$  por la imagen de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , y por la imagen de  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  y  $z$  por la imagen de

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

E: ¿Quiere encontrar la imagen de cualquier vector?

E1: Si [escribe lado izquierdo segundo renglón].

E: ¿Eso a qué es igual?

E1: A  $x, y, z$ .

E: ¿Al vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  o a la imagen de  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

E1: No, la imagen [escribe lado derecho renglón 2]

$$xT\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + zT\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ -y + z \\ \end{pmatrix}$$

El estudiante E1 muestra en este caso, solo una concepción Acción de transformación lineal dado que no reflexiona sobre las características de  $T$ . La forma funcional de la transformación lineal requiere de la preservación de combinaciones lineales, sobre vectores de una base del conjunto de salida. Dado que E1 no relaciona los conceptos de base y transformación lineal responde de manera mecánica.

*Concepción proceso de base:* Como lo mencionamos anteriormente, las estructuras previas juegan un papel importante en la construcción del *Esquema* de transformación lineal de un estudiante. En este caso, podemos observar que E2 no necesita montar el sistema de ecuaciones lineales para hallar la transformación lineal con las condiciones dadas, solo necesita reflexionar sobre los elementos dados para responder la pregunta. En primera instancia E2 revisó si los vectores dados forman una base, además lo menciona, si conoce cómo se comporta la base bajo la transformación dada, conoce cómo se comportan los otros elementos del espacio. Esto da evidencia de que tiene una concepción proceso del concepto de base.

E2:[Lee la pregunta en voz alta] Entonces... Ah... Parto de la idea de que la transformación si es lineal, que cumple las dos condiciones.

E: ¿Cuáles condiciones?

E2: La transformación si es lineal, entonces debe cumplir dos condiciones. Dados dos vectores  $u$  y  $w$  la transformación de  $u$  más la transformación de  $w$  va a ser igual a la transformación de la sumatoria de los vectores.

E: Si.

E2: La otra condición es que,  $u$  y  $w$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ . La otra condición es que  $\alpha$ ,  $\alpha$  es un escalar. La transformación de  $\alpha u$  es igual a  $\alpha$  por la transformación de  $u$ . [Escribe]

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

$$\begin{aligned} & \text{1. } L: U \times W \rightarrow \text{Vectores} \quad \alpha \text{ es escalar.} \\ & \text{1) } T(u) + T(w) \neq T(u+w) \\ & \text{2) } T(\alpha u) = \alpha T(u). \end{aligned}$$

E2: Entonces tengo que la transformación va a ir de  $\mathbb{R}^3$  a  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, pues yo interpreto una transformación como una relación que lleva un conjunto de vectores a otro sitio; en este caso voy a partir de  $\mathbb{R}^3$  y lo voy a llevar a  $\mathbb{R}^2$ .

E: Listo.

E2: Por teorema sé que como se comportan las bases, entonces voy a poder determinar cómo se comporta cualquier vector.

E: ¿las bases o la base?

E2: La base, en este caso tengo los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Entonces en primera instancia lo que haría sería determinar si esto es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

E: Listo, ¿cómo lo haría?

E2: Entonces primero voy a determinar si son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

E: ¿Qué significa que los vectores sean linealmente independientes?

E2: [señalando la expresión anterior] Que los escalares  $c_1, c_2$  y  $c_3$  son iguales e iguales a cero. Entonces verifico esta condición.

[Después de realizar algunas cuentas el estudiante llega a]

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3: R_3 - 2R_1 \\ R_2: \frac{1}{6}R_2 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 = R_3 + 8R_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} c_2 - \frac{1}{2}c_3 &= 0 & c_1 + 4c_2 &= 0 \\ c_2 &= \frac{1}{2}c_3 & c_1 &= -4c_2 \\ & & c_1 &= -2c_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2c_3 \\ \frac{1}{2}c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = t$$

E2: Como llego a una fila nula al final, este vector [señalado con azul] fila final va a ser  $n$  veces este [fila no nula anterior]. Por lo tanto los vectores no son linealmente independientes.

E: Si no son linealmente independientes, ¿qué puede concluir?

E2: Me devuelvo a la pregunta... [Lee la pregunta en voz alta]. Yo diría que no, no porque no sé cómo está afectando la transformación lineal a la base, si tuviera cómo afecta la base si sería fácil determinar cómo sería la transformación lineal.

Aunque E2 evidencia una concepción proceso de la base, muestra también que tiene una concepción proceso de la transformación lineal funcional y además que estas estructuras deben relacionarse entre sí. Puesto que para que un estudiante tenga una concepción proceso de transformación lineal debe evidenciar que ésta preserva combinaciones lineales, también es necesario que muestre que estas combinaciones lineales deben estar formadas por vectores de la base.

*Relación entre la transformación lineal en su forma funcional y una base:*

Como se muestra en la descomposición genética, para dar paso a la construcción del *Esquema* es fundamental haber establecido la transformación lineal y la base como Procesos, con estos dos elementos lo que queremos destacar es que no solo es necesaria la construcción de las dos estructuras sino la relación entre ellas, como lo muestra E2 en la situación anterior. Podemos pensar que esta relación se da mediante la coordinación entre el conjunto base y la transformación lineal, donde la transformación lineal actúa sobre los elementos de la base, así el estudiante puede conocer la imagen de cualquier vector si conoce las imágenes de los vectores de la base.

Con este panorama vamos a analizar las otras preguntas de la entrevista. Cabe señalar que por la disponibilidad de tiempo de los estudiantes solo un grupo respondió la última situación, los otros grupos respondieron 6 de las 7 situaciones presentadas en el análisis a priori.

#### 4.2.2. Evidencias de la concepción Acción de la transformación lineal (funcional, matricial y geométrica)

En la descomposición genética preliminar consideramos que un estudiante tiene una concepción Acción de la interpretación matricial de la transformación lineal  $T$  ( $A_T$ ) cuando puede “organizar” la matriz a partir de las columnas sin reflexionar sobre los vectores de la base del espacio de salida. En esta concepción, puede “usar” dicha matriz para determinar la imagen de uno o más vectores.

En las primeras situaciones presentadas a los estudiantes fueron pocas las evidencias que se registraron haciendo uso de la representación matricial de la transformación lineal, sin embargo, en las últimas tareas es más evidente su uso.

A continuación se presentan algunas evidencias sobre la concepción Acción de la interpretación matricial. Para empezar nos centramos en el análisis que realiza E1G3 para la siguiente pregunta:

¿Existe una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que tiene como imagen el subespacio generado por los vectores  $(1,0,-1)$  y  $(1,2,2)$ ?

E1G3: [Lee la pregunta] Este es el espacio columna, es decir estos vectores [Escribe]

E1G3: Esto quiere decir que estos dos vectores generarían todo lo que podría generar la transformación. La transformación, podríamos transformarlo a la matriz asociada.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

E: Ahí se cierra.

E1G3: No, tienen que haber tres [vectores].

E: ¿Por qué?

E1G3: Para que sea una base en  $\mathbb{R}^3$ . O sea para que... O sea, así coloque otro vector acá ya todo esto (los vectores señalados anteriormente) esto podría generar mi transformación.

[Después de una discusión sobre qué forma debería tener el otro vector (sí existiese), el estudiante escoge el cero como tercera columna y encuentra la matriz].

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ -x+2y \end{pmatrix} //$$

En este caso E1 reconoce que aunque el espacio de llegada de la transformación lineal  $T$  sea  $\mathbb{R}^3$ , la imagen de  $T$  no es todo el espacio vectorial. Muestra que la imagen de  $T$  es el conjunto generado por los

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  y que la transformación queda determinada por ellos, por lo tanto las columnas de la matriz

está formada por estos vectores. Sin embargo se contradice en su discurso cuando agrega al vector nulo en

la matriz. No reconoce que al agregar al vector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  al conjunto  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , este deja de ser base de la

imagen. E1G3, en esta situación, aplica Acciones a vectores dados de un conjunto pero no relaciona los conceptos de transformación lineal y base, mostrando encontrarse en un nivel Intra del Esquema de transformación lineal.

A continuación analizamos la pregunta 3 que hace referencia a:

***Dada la transformación lineal encuentre los vectores del espacio de salida cuya imagen se indica en el problema.***

Los estudiantes entrevistados abordaron cada situación por separado. Es decir analizando ítem por ítem.

E5: Aquí nos están pidiendo el núcleo de la función... Como no nos dan la canónica, suponemos que es

la canónica y entonces  $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  y

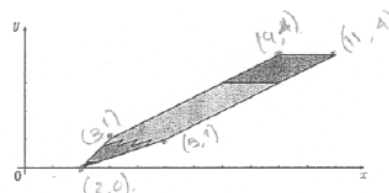
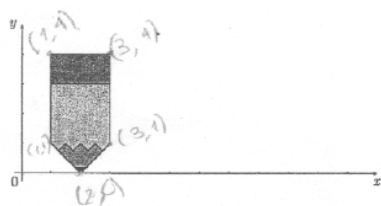
por lo tanto la matriz de la transformación es

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

En esta situación se le presenta al estudiante la transformación lineal en su representación funcional y él la representa de manera matricial para responder cada una de las preguntas asignadas, lo hace calculando

las imágenes de los elementos de la base canónica para  $\mathbb{R}^3$ . En este caso consideramos que E5 tiene una concepción Acción de la matriz de la transformación lineal. Se puede notar en la forma de escribir que reflexiona sobre el vector coordenado que es quien forma las columnas de la matriz de la transformación. Si el estudiante revelara una concepción Proceso, no necesitaría revisar ítem por ítem, podría considerar que las pre imágenes forman una base para el espacio vectorial de salida y eso le puede permitir dar información sobre dicho conjunto.

### Encontrando la función que transformó el lápiz



El grupo 2 necesita escribir las coordenadas de cada punto “representativo” del lápiz, sin embargo se cuestiona si es necesario hallar “todos los puntos”.

E1G2: Yo sé que la transformación de un vector es la matriz asociada a la transformación por el vector.

¿Listo?

E: Si.

E1G2: Entonces [halla las imágenes de tres puntos y vuelve y se cuestiona si es necesario usarlos todos].

E: ¿Van a usar todos los puntos?

E1G2: Vamos a ver qué sale.

E2G2: Un sistema de ecuaciones lineales.

E1G2: Es que es más, yo creo que solamente con dos.

E: ¿Por qué?

E1G2: Por que vea, yo hago  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y la multiplico por  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$T(\vec{v}) = A_{(1)} \vec{v}$$

$$\begin{aligned} T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \\ T\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix} \\ T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aunque al preguntarle a los estudiantes qué información proporciona la matriz de la transformación, tratan de recurrir a diversos teoremas que no recuerdan; lograron establecer que la matriz tiene dos filas y dos columnas y que son esos elementos los que deben encontrar para hallar la transformación lineal. Al identificar el tamaño de la matriz, observan que no es necesario trabajar con “todos los puntos” sino con dos de ellos.

$$\begin{aligned} a + 4b &= 9 \\ c + 4d &= 4 \\ 3a + 4b &= 11 \\ 3c + 4d &= 11 \end{aligned}$$

"Porque con dos vectores basta para resolver el sistema que me da aqui"

El estudiante abordó el problema buscando la transformación lineal para esto determina la matriz de la transformación, en el momento de responder la pregunta expresa la transformación lineal en su forma funcional, como puede verse a continuación.

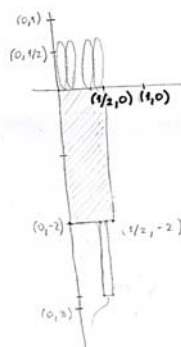
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/2 & 1/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2/2x + 1/8y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A los ojos de la descomposición genética, E1G2 muestra una concepción Acción de la transformación ya que la aplica a puntos representativos del lápiz sin hacer reflexión sobre cuántos puntos necesita. Y aunque finalmente decide tomar dos puntos, observando cuántas filas y cuántas columnas tiene la matriz porque el vector  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tiene dos componentes; necesitará abordar más situaciones de este tipo que le permita reflexionar sobre las características de la matriz y qué información proporciona esta sobre los espacios de salida y llegada. De esta manera podrá interiorizar estas Acciones y tener una concepción proceso de la matriz de la transformación.

### ¿Qué le pasó al tren?

Al pedirle a los estudiantes que encontraran la imagen del tren al aplicarle la transformación lineal dada por una matriz, como se predijo en el análisis a priori, algunos encontraron la imagen a diversos puntos de la figura, este es el caso de E1. Además E1, necesita escribir la transformación lineal en su forma funcional para hallar dichas imágenes. Algo interesante que pasó con la mayoría de los estudiantes, es que aplicaron la transformación al vagón, olvidando las otras partes de la figura.

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 x \\ -4y \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ T \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 1) \quad T \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 2) \quad T \begin{pmatrix} 0,9 \\ 1/2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,45 \\ -2 \end{pmatrix} \\ 3) \quad T \begin{pmatrix} 0,9 \\ 0,7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,45 \\ -2,8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Como se considera en la descomposición genética, la estructura Acción de la representación matricial de la transformación lineal y su concepción proceso del mismo objeto como función, pueden potenciar en el estudiante una concepción Acción de la representación geométrica. Cuando el estudiante realiza Acciones específicas sobre cada uno de los vectores representativos del conjunto sobre el cual está trabajando.

Aunque El aplica la transformación lineal a puntos representativos del conjunto, tiene en cuenta que la transformación mantiene características geométricas de este, como por ejemplo el paralelismo de sus segmentos y el trencito original, realizar Acciones concretas sobre Objetos concretos que pueden ser interiorizadas en Procesos que permiten la construcción de Objetos abstractos.

### 4.2.3. Evidencias de la concepción Proceso de transformación lineal (funcional, matricial y geométrica)

En la descomposición genética preliminar se considera que un estudiante evidencia una concepción Proceso de la representación geométrica de la transformación lineal, cuando logra comprender que para encontrar la imagen de un conjunto en el plano, puede encontrar la imagen de dos vectores no colineales, que en este caso representan dos vectores linealmente independientes. Esto lo podemos notar en la siguiente situación:

#### *¿Qué le pasó al tren?*

E5 reflexiona sobre las características de la matriz para dar información sobre cómo queda el tren después de aplicar la transformación.

E5: Eso se ve más fácil si se descompone la matriz como combinación lineal de dos matrices en términos de contracciones y expansiones y luego le aplica la transformación, así:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Se generó discusión: "además de reflexión en el eje x, ¿hay contracción o expansión?"

E: Entonces ¿qué le pasa al trencito?

E5: El trencito se contrae en el eje y.

E: ¿Seguro?

E5: Hagamos  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$ . Pues si ya tengo la matriz de la transformación, multiplico un vector por esa matriz y me va a dar la imagen de eso, entonces:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 x \\ -4y \end{pmatrix}$$

Aquí vemos que se contrae la mitad en x, se refleja con y y se alarga un factor de 4.

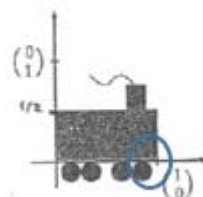
E: Entonces no se contrae en y.

E5: No, se contrae en x.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

E: ¿Cómo le quedaría el trencito?

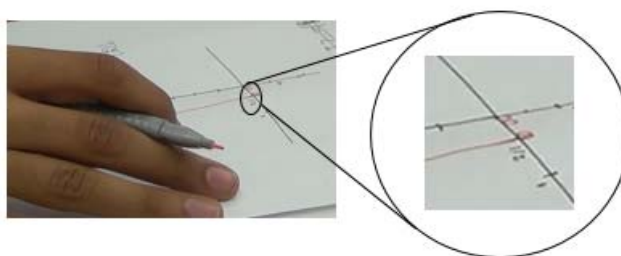
E5: Tomamos este punto.



[al aplicarle la transformación lo deja sobre el eje y, se genera discusión y observa que la reflexión es sobre el eje x. Toma el vector y se da cuenta de esto].

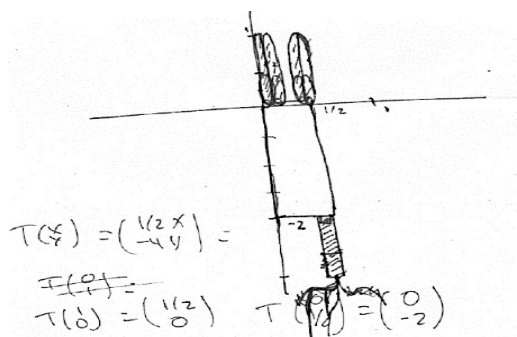
$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E5: [Grafica empezando por el vagón, al dibujar la las ruedas, no las transforma].



[Se genera discusión sobre la transformación y concluye que es a toda la figura a la que se le aplica la transformación]

Quedando el trencito:



En este caso sea consideran las tres interpretaciones de la transformación lineal. Se puede observar que el estudiante tiene claro que si conoce la matriz de la transformación lineal puede encontrar fácilmente la expresión funcional; también reflexiona sobre el hecho de que al aplicarle la transformación lineal a un conjunto es a cada elemento del conjunto y esto se nota en los detalles al hacer las llantas y el humo. Otro aspecto para resaltar, es que a partir de la matriz, E5 logró concluir que el trencito se contraía, expandía y reflejaba. Como E5 puede reflexionar sobre la matriz de la transformación sin tener que calcular de manera específica sus columnas, E5 muestra una concepción Proceso de la matriz  $A_T$ .

### Otra forma de solución:

El estudiante E2 analiza la situación el problema del tren de una manera interesante. E2 encuentra la imagen del vector (3,2) bajo la transformación dada, observa qué le sucede y a partir de ese escenario concluye cómo queda transformado el trencito.

E2: De acuerdo a la matriz que me dieron puedo decir que la transformación va de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ .

E: ¿Qué le sugiere que la transformación va de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ?

E2: La forma como está planteada la pregunta. Dice qué le sucede al trencito, el trencito está en el plano al aplicarle la transformación lineal va a tener que moverse dentro de este plano cartesiano.

E: ¿Seguro?

E2: Sí, él no va a pasar a  $\mathbb{R}^3$ .

E: ¿Esa información no se la da la matriz?

E2: La matriz también me da esa información. Tomo la base, como no me están diciendo nada voy a trabajar con la canónica.

E: La matriz ¿dónde le muestra que la transformación va de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ ?

E2:

Handwritten notes showing the transformation of basis vectors and the resulting matrix. A green box highlights the text "Porque si hago esto obtengo la matriz".

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Después de discutir sobre qué información brindan las filas y las columnas de la matriz sobre el espacio de llegada y el espacio de salida, nos concentramos nuevamente en la pregunta.

E2: Sería como aplicarle la transformación a otro vector que me permita como empezar a entender que está pasando con esa transformación. Yo sé que el problema es qué le sucede al tren, pero en este momento no estoy en capacidad de verlo, así que voy a tomar otro vector, para determinar cómo va a cambiar ese vector en ese plano para después saber cómo va a afectar a todo tren.

E: Bueno, entonces ¿cómo lo haría?

E2: Entonces tengo por acá un plano, y diría por ejemplo un vector (3,2). Diría  $A_T \cdot x = ?$ ,  $x$  es ese vector.

Handwritten notes showing the calculation of the transformed vector (3,2) using the matrix  $A_T$ .

$$A_T \cdot x = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- ① Reflexión en  $x$ .
- ② Magnitud  $4$  (se ve en  $y$ ).
- ③  $x_0 = 3 \rightarrow x_1 = 3/2$   
 $y_0 = 2 \rightarrow y_1 = -8$ .

E: ¿Qué le hizo la transformación al vector?

E2: Lo está rotando.

E: ¿O lo reflejo?

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

E2: También, haciendo eje de reflexión el eje  $x$ .

E: ¿Qué más le pasó al vector?

E2: Cambio la magnitud [realiza cálculos]. Ya tengo dos características hay una reflexión y la magnitud se reduce.

E: ¿Y si miramos las componentes?

E2: En  $x$  se reduce a la mitad y la componente en  $y$  se va a reflejar y se mantiene en  $y$ . Ahora sí puedo decir que le pasa al tren.

En el extracto de la entrevista anterior se puede observar que este estudiante analiza lo que le sucede a un vector, le aplica Acciones a un vector, interioriza las Acciones y puede determinar lo que le sucede al tren. De acuerdo a lo descrito en la descomposición genética y en el análisis a priori, se considera que el estudiante tiene una concepción proceso de la transformación lineal en su representación geométrica, ya que no necesita aplicarle la transformación a varios puntos representativos de la figura, con conocer la transformación de un vector puede decir cómo se transforma todo el conjunto. Es de notar que el estudiante trabaja conjuntamente las tres interpretaciones de la transformación lineal: funcional, matricial y geométrica. Pues en primera instancia logra reconocer la transformación lineal como una función del plano cartesiano en el plano cartesiano e identifica las columnas de la matriz como las imágenes de la base canónica en  $\mathbb{R}^2$ , mostrando así la importancia de la base al estudiar la transformación lineal.

### ¿Cuál es la matriz de la transformación?

En la pregunta 6 se plantean seis interrogantes buscando relacionar la interpretación matricial de una transformación lineal con la interpretación matricial de la transformación lineal inversa. Esta pregunta se planteó en las tareas de los talleres, pero fueron pocos los estudiantes que la abordaron, por ello decidimos proponerla nuevamente en la entrevista.

Los estudiantes no tuvieron problema al encontrar la matriz que transforma a los vectores  $(1,0)$  en  $(2,5)$  y  $(0,1)$  en  $(1,3)$ . Sin embargo, solo el estudiante E2 reconoció que los vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$  forman una base para  $\mathbb{R}^2$  y además que dicha transformación va de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$ .

La transformación va de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  y además los vectores  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  son la base canónica de  $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$

$\downarrow$

$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

E2: Luego la matriz de la transformación es

$$A_T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

Acá podemos notar que el estudiante E2, nuevamente, considera importante la base para establecer la matriz de la transformación lineal.

Mientras que en la pregunta a. la respuesta de los estudiantes fue casi inmediata, sin algún tipo de reflexión sobre la base; en la pregunta b., E5, por ejemplo, halló el determinante  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ , concluyendo que por ser diferente de cero la matriz que busca es la inversa.

E5: ¿Estas preguntas están relacionadas entre sí?

E: ¿Usted qué cree?

E5: Entonces se expresa este [señala a las imágenes] como combinación lineal de las otras [señala a las pre imágenes] y esas combinaciones lineales me permiten hallar la matriz .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \stackrel{?}{=} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{array} \right)$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

E: ¿No importa cuáles sean los vectores [haciendo referencia a las pre- imágenes]? O ¿los vectores deben ser linealmente independientes?

E5: Los vectores deben formar una base, luego deben ser linealmente independientes.

E: ¿Cómo puede determinar que los vectores son linealmente independientes?

E5: Si el determinante es diferente de cero los vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Al mostrar que los vectores forman una base para  $\mathbb{R}^2$ , se devuelve a resolver los sistemas planteados y encuentra los valores de “a” y “b” que forman las columnas de la matriz.

$$A_T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

El análisis realizado en esta pregunta, les permite a los estudiantes responder sin dificultad las preguntas siguientes y concluir que las matrices que representan transformaciones lineales inversas, deben ser inversas entre sí. Y de esta manera encontrar las condiciones generales que deben tener los elementos de la matriz.

En el caso de E2, considera que si las bases son iguales las matrices son inversas:

Un Esquema de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

2)

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A = \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \quad A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vectores que forman una base para  $\mathbb{R}^2$

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$u \neq kt \quad k \text{ escalar.}$

$$\det(A) = ad - bc \neq 0 \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Base de llegada y salida iguales

$$B_1 = B_2 = \left[ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

#### 4.2.4. Concepción Objeto de la transformación lineal

En la descomposición genética se considera que un estudiante tiene una concepción objeto de la transformación lineal si puede aplicar Acciones para hallar nuevas transformaciones. En la pregunta 7, los estudiantes deben encontrar la composición entre dos transformaciones lineales; sin embargo, de las transformaciones solo conocen que son rotaciones, deben representar de manera funcional o matricial cada función para poder hallar la nueva transformación.

#### El grupo 4 y la composición entre dos transformaciones lineales

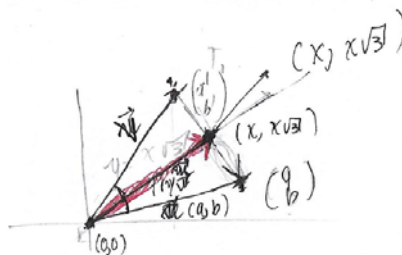
El grupo 4, G4, fue el único que respondió la pregunta 7. La entrevista con este grupo fue diferente puesto que con ellos contamos con 4 horas. Esta pregunta también fue una tarea presentada en los talleres pero ningún estudiante la realizó. Recordando, la pregunta 7 plantea la siguiente situación:

Considere  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = \sqrt{3}x$ , y  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = -x$ .

- Muestre que la composición  $T_1 \circ T_2$  es una rotación y encuentre el ángulo de rotación.
- Grafique  $(2,1)$ ,  $T_1(2,1)$  y  $T_1 \circ T_2((2,1))$  en el mismo plano. ¿Esta gráfica coincide con lo que usted probó en a.?
- Muestre que si  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = m_1x$ , y  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = m_2x$ , y  $m_1 \neq m_2$ , entonces  $T_1 \circ T_2$  es una rotación cuyo ángulo de rotación es dos veces el ángulo entre las líneas que reflejan.

En el análisis a priori se dijo que si los estudiantes no conocían la matriz de la transformación lineal que representa geoméricamente reflexiones sobre una recta, esta se les proporcionaría a los estudiantes. Sin embargo, estos estudiantes usaron “las herramientas” proporcionadas durante el semestre.

Lo primero que hicieron los estudiantes de este grupo fue ubicar el punto de coordenadas  $(a, b)$  en el plano cartesiano, trazaron la recta  $y = \sqrt{3}x$  y posteriormente encontraron  $T_1(a, b)$ .



Definieron los vectores  $u = (a, b)$  y  $v = T(a, b) = (a', b')$  y  $w = (x, x\sqrt{3})$ . Trabajando los vectores de proyección  $Proy_w u = Proj_w v$  logran encontrar las componentes de  $u = (a, b)$  y de  $v = (a', b')$ , es decir,  $T(a, b)$ .

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (x, x\sqrt{3}) \\ \|\vec{w}\| &= \|\vec{w}'\| \\ Proj_{\vec{w}} \vec{u} &= Proj_{\vec{w}} \vec{v} \\ Proj_{\vec{w}} \vec{u} &= \left( \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right) \vec{w} = \left( \frac{(a, b) \cdot (x, x\sqrt{3})}{(x^2 + 3x^2)} \right) (x, x\sqrt{3}) = \left( \frac{a + b\sqrt{3}}{4} \right) (x, x\sqrt{3}) \\ &= \left( \frac{a + b\sqrt{3}}{4}, \frac{a\sqrt{3} + 3b}{4} \right) \end{aligned}$$

Handwritten notes in green ink:  $u - Proj_{\vec{w}} u = \lambda \vec{w} \rightarrow -u + Proj_{\vec{w}} u = \lambda \vec{w}$

Obteniendo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{a + b\sqrt{3}}{4}, \frac{a\sqrt{3} + 3b}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a - \frac{a + b\sqrt{3}}{4}, \frac{b - a\sqrt{3} + 3b}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3a - b\sqrt{3}}{4}, \frac{b - a\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un Esquema de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

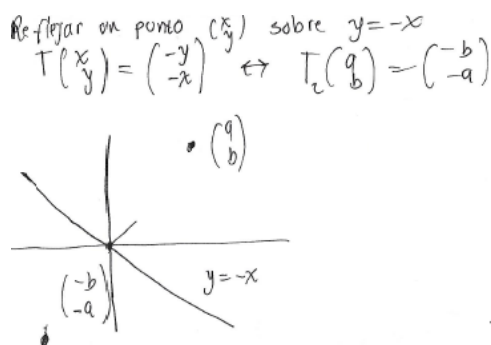
Y su imagen bajo la transformación 1:

$$T_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b\sqrt{3}-a}{2}, \frac{a\sqrt{3}-b}{2} \end{pmatrix}$$

Con estos datos, los estudiantes encontraron las imágenes de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y la matriz de la transformación lineal.

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A_T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para encontrar  $T_2$ , ubicaron el punto  $(a, b)$ , lo reflejaron sobre la recta  $y = -x$  obteniendo al punto  $(-b, -a)$ .



Aunque la transformación  $T_1$  la representaron de manera matricial, al encontrar la composición  $T_1 \circ T_2$  emplearon la representación funcional.

$$\begin{aligned} T_1 \circ T_2 (z) &= T_1 (T_2(z)) \quad ; \quad z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= T_1 \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-a)\sqrt{3} + b}{2} \\ \frac{-b\sqrt{3} + a}{2} \end{pmatrix} \\ (T_1 \circ T_2) (z) &= \begin{pmatrix} \frac{b - a\sqrt{3}}{2}, \frac{a - b\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para probar que la transformación,  $T_1 \circ T_2$ , representa una reflexión. Los estudiantes compararon el resultado obtenido con el producto entre la matriz de la transformación (dada por la profesora) y el vector  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

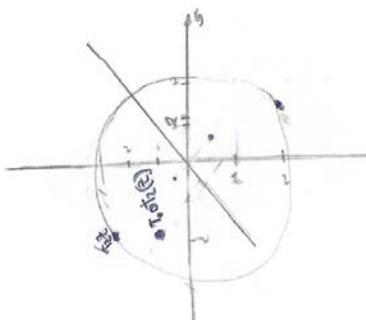
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b - a\sqrt{3}}{2} \\ \frac{a - b\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

A la pregunta: ¿Cuál es el ángulo entre las rectas  $y = x\sqrt{3}$  y  $y = -x$ ? Los estudiantes respondieron:

Dado que la recta  $y = -x$  forma un ángulo de  $45^\circ$  medido ~~en sentido~~ a favor de las manecillas del reloj (y la horizontal) se ve que dicho ángulo medido en posición normal es de  $135^\circ$  o  $135^\circ \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{135\pi}{180}$ .

$$= \frac{135}{180} \cdot \frac{\pi}{1} \text{ rad} = \frac{135\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{9\pi}{12} \text{ rad}$$

Por último, los estudiantes hallaron la imagen del punto  $(1, 2)$ .



Podemos notar en el trabajo de E1G4, que construyen una nueva transformación lineal a partir de dos transformaciones de rotación e involucran las diferentes interpretaciones de la transformación lineal (funcional, matricial y geométrica), por ello consideramos que E1G4 evidencia una concepción objeto.

Cabe resaltar que el trabajo de E1G4 cubre gran cantidad de los temas estudiados en el curso de Álgebra Lineal: la ubicación de un punto en el plano cartesiano, la formación de vectores en  $\mathbb{R}^2$  usando proyecciones hasta encontrar el ángulo entre las rectas usando el teorema del coseno para hallar ángulo entre dos vectores. Podemos pensar que el *Esquema* de transformación lineal de este grupo se encuentra en un nivel Inter, que está evolucionando gracias al tratamiento de la situación.

Con base en los análisis descritos, y en general con los elementos que fueron estudiados durante el desarrollo del ciclo de investigación, a continuación se describen los niveles del *Esquema* de transformación lineal.

En la tabla 2 podemos observar que la mayoría de los estudiantes entrevistados dan evidencia de tener en sus argumentaciones presente a la base, es decir, su *Esquema* de transformación lineal se encuentra en un

nivel Intra o Inter. En sus respuestas dan evidencia implícita o explícita de considerar la base al momento de dar información sobre la transformación lineal en las situaciones que se presentaron.

Tabla 2. En qué nivel del *Esquema* se encuentran los estudiantes entrevistados

| Niveles | Definición                                                                                                                                                                                                                                                                    | Esquema transformación lineal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Estudiantes          |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| Intra   | El desarrollo del nivel Intra del Esquema se caracteriza por un enfoque en Acciones, Procesos y Objetos individuales aislados de otros elementos cognitivos de naturaleza similar. (Arnon et al., 2014, p.114)                                                                | El estudiante logra un nivel Intra cuando identifica diferentes estructuras que se relacionan con la transformación lineal como función, como matriz o como una región del plano que puede transformar. Aquí el concepto de base aparece como un Proceso que puede coordinarse con cada forma de ver la transformación lineal. Por ejemplo, dada la transformación lineal puede encontrar la matriz de la transformación y viceversa. Cuando al conocer la matriz de la transformación, o la transformación lineal, aplica transformaciones sobre puntos, flechas o polígonos (que representan vectores de un espacio vectorial) y logra encontrar la imagen de dichos vectores bajo la transformación dada.                                                                                                                                                                              | E3, G2, E4, E1       |
| Inter   | El nivel Inter se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre las estructuras cognitivas que componen el Esquema donde un individuo puede comenzar a agrupar elementos juntos e incluso llamarlos con el mismo nombre. (Arnon et al., 2014, p.114) | El nivel Inter se caracteriza por las transformaciones que el estudiante realiza de una forma de la transformación lineal (funcional, matricial o geométrica) a otra tomando como referente fundamental la base como Proceso. Por ejemplo, dada la representación matricial de la transformación lineal, un estudiante puede determinar la dimensión de los espacios de salida y llegada. Por ejemplo, dada la matriz de la transformación puede dar información sobre la dimensión del espacio de salida y la dimensión del espacio de llegada. O cuando al tener un polígono, reconoce dos vectores linealmente independientes y sus respectivas imágenes bajo la transformación lineal dada (en su representación funcional y/o matricial) y a partir de ellas logra establecer la imagen del polígono sin necesidad de hallar la imagen de cada uno de los vectores que la conforman. | E2, E5, E2G4, G1, G3 |
|         | El nivel Trans, el individuo                                                                                                                                                                                                                                                  | Un estudiante evidencia un nivel Trans cuando puede establecer las características                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |       |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Trans | construye una estructura subyacente implícita o explícita a través de la cual se entienden las relaciones desarrolladas en el nivel Inter y por el cual el Esquema alcanza la coherencia que se indica por la capacidad del individuo para determinar lo que está en el alcance del Esquema y lo que no es. (Arnon et al., 2014, p.114) | invariantes de la transformación lineal. Por ejemplo cuando determina que si una función lineal es invertible entonces la matriz que la representa también lo es. También se evidencia al construir nuevas transformaciones lineales, por ejemplo, la composición entre dos funciones, puede encontrar la composición a través de la multiplicación de sus interpretaciones matriciales. O en el caso de la suma de funciones, sumando sus interpretaciones matriciales. | E1G4, |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|

La tabla 2 caracteriza cada nivel describiendo las relaciones, transformaciones e invariantes como indicadores que determinan la evolución del Esquema (Parraguez, 2015) y que están totalmente definidos por el concepto de base

## Capítulo 5. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones finales de esta investigación. Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el Taller y en las entrevistas se refina la descomposición genética inicial, señalando aspectos destacados del trabajo de los estudiantes. Además se incluyen algunas consideraciones didácticas para el tratamiento de la transformación lineal en cursos regulares de Álgebra Lineal, así como planteamientos para futuras investigaciones.

### 5.1. Descomposición genética refinada

En la descomposición genética preliminar se considera que un estudiante inicia la construcción de su *Esquema* de transformación lineal si logra relacionar tres estructuras. Dos estructuras Proceso: una de base y otra de transformación lineal y una estructura Objeto de vector. El análisis de datos evidencia que los dos Procesos deben estar relacionados mediante el mecanismo de coordinación. Como muestra la Figura 5.1. El resto de la descomposición genética no presenta cambios; aunque el diseño se basó solo en Tareas en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  la descomposición genética se encuentra descrita para cualquier par de espacios vectoriales  $V$  y  $W$  de dimensión finita. A continuación se presenta la descomposición genética validada.

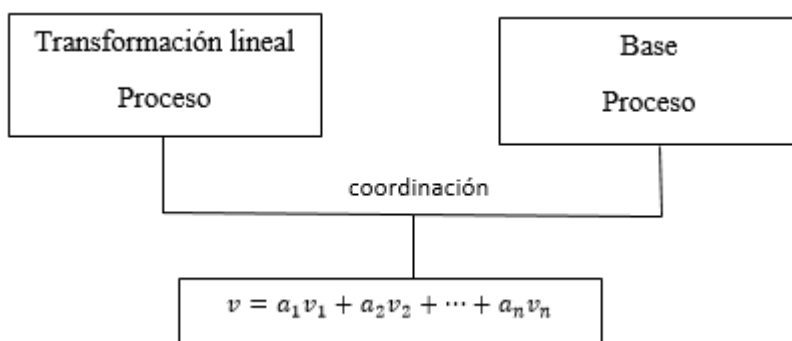


Figura 5.1. Coordinación entre los Procesos de transformación lineal y base.

Los estudiantes aplican de manera mecánica transformaciones  $T$  sobre un vector  $v$  expresado como combinación lineal de un conjunto de vectores  $S$ , sin tener en cuenta si los vectores de  $S$  son una base para el conjunto de salida de  $T$  y sin tener presente si la función  $T$  es una transformación lineal. Esto es clave en la construcción del *Esquema* de transformación lineal, dado que la coordinación entre estos Procesos determina su evolución. Esta coordinación permite la evolución del *Esquema* de transformación lineal y por tanto evidencia un nivel Inter.

El análisis de los datos muestra que un estudiante que no logra coordinar los procesos de transformación lineal y base, evidencia un nivel Inter del Esquema de transformación lineal. Ya que aunque identifica diferentes estructuras asociadas con la transformación lineal por un lado y con la base por otro, su experiencia no le permite establecer relaciones y está limitado a la aplicación de Acciones específicas sobre vectores de la base canónica. En este punto es importante resaltar la importancia de la construcción de combinaciones lineales dentro del Esquema de transformación lineal.

A continuación se resaltan los elementos del Esquema de transformación lineal asociados con su interpretación geométrica.

*Construcción de la matriz de la transformación lineal:* Un estudiante puede iniciar con la construcción de una concepción dinámica de un vector  $v$  en  $V$  al expresarlo como combinación lineal de los vectores de la base  $\beta_V$ , esto es con la construcción del vector de coordenadas (Parraguez, Lezama, Jiménez, 2016). Así el vector  $v$  inicialmente percibido por el estudiante en términos de sus componentes, ahora es visto a partir de los escalares que permiten construir la combinación lineal:

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n. (*)$$

El mecanismo a través del cual el estudiante logra esta nueva estructura es la coordinación; este mecanismo le permite caracterizar el nuevo Proceso a partir de la unicidad de los escalares  $c_i$  y el orden de la base. Entonces en la expresión \* tenemos en el lado izquierdo una estructura estática y en el derecho una dinámica del mismo Objeto matemático. La construcción del vector de coordenadas es fundamental para determinar la representación matricial de una transformación lineal. Con base en lo descrito, daremos paso a la construcción de este nuevo Objeto.

Un estudiante con una concepción Proceso de transformación lineal debe manifestar que la función  $T$  le permite transformar combinaciones lineales. En algunos casos esto se aplica de manera mecánica, como un algoritmo dado para resolver ciertos ejercicios. Sin embargo en este punto para la construcción del *Esquema* es necesario que el estudiante manifieste su coherencia ya sea de manera verbal o escrita, para aplicar la transformación sobre la igualdad \*, esto es:

$$Tv = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)$$

$$Tv = T(c_1 v_1) + T(c_2 v_2) + \dots + T(c_n v_n)$$

$$Tv = c_1 T v_1 + c_2 T v_2 + \dots + c_n T v_n. (**)$$

Las Acciones específicas que logra aplicar para transformar la primera expresión en la tercera, requieren de una concepción Proceso de la transformación lineal en términos de la preservación en primer lugar de la suma vectorial y en segundo del producto por un escalar. Esto entre otras cosas le permite al estudiante, establecer que una transformación lineal queda definida a partir de las imágenes de los vectores una base del espacio vectorial del dominio.

Resultado de la aplicación de las transformaciones descritas se tiene la expresión \*\*, que puede ser vista como un Objeto igualado a un Proceso, una forma dinámica del vector  $Tv$  que está totalmente definida por los escalares de la combinación lineal. Este Proceso visto como un vector de coordenadas de  $Tv$  en términos de las imágenes de la base, puede ser encapsulado en un Objeto cuando dicho vector es construido como un Objeto del espacio vectorial  $W$ . Así el estudiante logra ver el vector  $Tv$  como una

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

énupla de la forma,  $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$  un vector definido de manera única por los escalares  $c_1, c_2, \dots, c_n$  en  $F$  (Campo sobre el cual se definen los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ ).

La construcción de este Objeto requiere que el estudiante trabaje con diferentes situaciones que enfaticen en la unicidad de este vector dada una base.

Ahora, la construcción de la Matriz que representa la transformación lineal  $A_T$ , implica realizar las Acciones descritas para todos los vectores de  $\beta_V$ . Sabemos que cada uno de los nuevos vectores  $Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n$  en términos de  $W$ ,  $[Tv_i]_{\beta_W}$  para  $i = 1, \dots, n$ , determinan las columnas de la matriz  $A_T$  que representa la transformación lineal. Una vez un estudiante logra construir dichos vectores está en capacidad de iniciar con la construcción de la matriz  $A_T$ .

La interpretación geométrica de una transformación lineal se plantea como un sub-Esquema del Esquema de transformación lineal, centradas en las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . En este sentido se entiende la representación geométrica de este tipo de funciones como Objetos concretos (Arnon et al., 2014). La representación geométrica permite que el estudiante identifique características de los Objetos “físicos” un punto, una flecha o un polígono como representantes de los vectores de un espacio vectorial. Es decir, la representación geométrica le permite a un estudiante realizar Acciones concretas sobre Objetos concretos que pueden ser interiorizadas en Procesos que permiten la construcción de Objetos abstractos (ver *Figura 2.3*). Dado que previamente el estudiante ha iniciado la construcción del *Esquema* de transformación lineal a partir de su definición funcional y su representación matricial, esta interiorización estará caracterizada por el establecimiento de una transformación, una función que está determinada por las imágenes de los elementos de una base que definen la imagen de cualquier vector en  $\mathbb{R}^2$ .

Los niveles del *Esquema* de transformación lineal se describen a continuación, teniendo como principal indicador el papel que juega la base en cada uno de estos niveles. Los niveles están descritos en términos de las relaciones, transformaciones e invariantes como indicadores de la evolución del Esquema (Parraguez, 2015).

Tabla 3. Clasificación de los Niveles del *Esquema*.

| Niveles      | <i>Esquema de transformación lineal</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Intra</i> | El estudiante logra un nivel Intra cuando identifica diferentes estructuras que se relacionan con la transformación lineal como función, como matriz o como una región del plano que puede transformar. Aquí el concepto de base aparece como un Proceso que puede coordinarse con cada forma de ver la transformación lineal. |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Inter</i> | El nivel Inter se caracteriza por las transformaciones que el estudiante realiza de una forma de la transformación lineal (funcional, matricial o geométrica) a otra tomando como referente fundamental la base como Proceso. Por ejemplo, dada la representación matricial de la transformación lineal, un estudiante puede determinar la dimensión de los espacios de salida y llegada. |
| <i>Trans</i> | Un estudiante evidencia un nivel Trans cuando puede establecer las características invariantes de la transformación lineal. Por ejemplo cuando determina que si una función lineal es invertible entonces la matriz que la representa también lo es.                                                                                                                                      |

La mayoría de los estudiantes que participaron en la entrevista, mostraron la importancia de las estructuras previas que se consideraron como fundamentales para la construcción del *Esquema*: concepción proceso de base ordenada y de transformación lineal, además de concepción objeto del vector. Sin estas estructuras desde el modelo descrito en esta investigación no es posible que el estudiante inicie la construcción de su *Esquema* de transformación lineal.

Los estudiantes que participaron en esta investigación evidenciaron estar en el nivel Intra o Inter del *Esquema*, solo uno de los estudiantes entrevistados evidenció estar en un nivel Trans.

## 5.2. Consideraciones didácticas

Un modelo de enseñanza que se base en el modelo descrito puede considerar el análisis entre las relaciones de la base ordenada con la transformación lineal (funcional, matricial y geométrica). Para ello es necesario contar en las clases de Álgebra Lineal con ejemplos diferentes a los tradicionales, con situaciones que potencien la construcción de la relaciones entre las estructuras asociadas a dichos conceptos. Esto puede generar en los estudiantes la evolución de su *Esquema* de transformación lineal y les permitirá establecer conexiones con otros conceptos. Es aquí donde el papel del profesor es fundamental, puesto que es él quien inicialmente puede propiciar el diseño y desarrollo de tareas que involucren las tres interpretaciones de la transformación lineal, resaltando la importancia de la base para establecer relaciones entre ellas y por ende potenciar la construcción y desarrollo del *Esquema* de transformación lineal.

## 5.3. Futuras investigaciones

En el desarrollo del Curso, el Taller y la Entrevista, se presentaron pocas situaciones donde el estudiante resaltara la importancia del vector coordenado. Esto debido a que la experiencia de trabajar con bases diferentes a la canónica fue escasa, esta situación fue considerada en las reuniones con los profesores que rescataban la importancia de trabajar con la base canónica para entender el concepto y en cursos posteriores trabajar con nuevos espacios de dimensión finita y bases diferentes a las canónicas.

Es por ello que para refinar los resultados presentado en esta investigación es posible aplicar nuevamente el ciclo de investigación desarrollado, considerando otros espacios de dimensión finita como el espacio de

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

matrices ( $M_{m \times n}$ ), o el conjunto de polinomios de grado menor o igual a  $n$  ( $P_n[\mathbb{R}]$ ); además de motivar el trabajo de los estudiantes en situaciones que involucren bases diferentes a las canónicas.

El uso de bases diferentes a las canónicas permitirá que los estudiantes relacionen, transformen e identifiquen las características invariantes del *Esquema* de transformación lineal tomando como principal elemento la base.

Un aspecto importante por destacar es el uso de diferentes tipos de software para tratar la interpretación geométrica de la transformación lineal. Específicamente es necesario profundizar sobre el impacto de los argumentos observables en la construcción y evolución del *Esquema* de transformación lineal. Para esto puede tomarse el modelo planteado en esta investigación y tratar con mayor detalle y profundidad el sub esquema que explica la construcción de la interpretación geométrica.

En general los resultados presentados en este documento buscan ser material de trabajo y reflexión para profesores en ejercicio respecto a la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal centrada en los Procesos de cognición que se desarrollan al construir conceptos abstractos, en este caso los involucrados con la transformación lineal.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

## Referencias

- Algebra-ii.blogspot.com.co. (2017). Mis clases de Álgebra II en la Web. [online] Available at: <http://algebra-ii.blogspot.com.co/search/label/Transformaciones%20Lineales> [Accessed 17 Jan. 2017].
- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, H. Shoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education*, 6 (pp. 1–32). Michigan: American Mathematical Society..
- Clark, J. M., F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. John, G. Tolias y D. Vidakovic (1997), “Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule”, *Journal of Mathematical Behavior*, núm. 16, pp. 345-364.
- Cottrill, J., E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas y D. Vidakovic (1996), “Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema”, *The Journal for Mathematical Behavior*, vol. 15, pp. 167-192.
- Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the theory of vector spaces, J.-L. Dorier (Ed) *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, 6-11.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.
- Grossman, S., & Godoy, J., (2012). *Álgebra Lineal con aplicaciones*, Séptima Edición. México: The McGraw-Hill.
- Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal*. México: Prentice-Hall.
- Isaacs, R., & Sabogal, S. (2009). *Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico*. Colombia: Ediciones UIS
- Klasa, J. (2001) Linear Transformations with Cabri II via Maple V, A friendly Reply to Anna Sierpinska. Talk presented at Cabriworld, Montréal.
- Kú, D., Trigueros, M. y Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), pp. 65-89.
- Martínez-Sierra, G., & García-González, M.D.S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16 (3), 234–250.
- Maturana, I., y Parraguez, M. (2013). APOE: Una perspectiva cognitiva para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM 2013*, ISSN 2301-0797, pp. 1798-1807. Montevideo-Uruguay.
- Maturana, I., y Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. . En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 771-778). México, DF.
- Mendoza, E. (2015). *Construcción de la Matriz de Cambio de Base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

- McDonald, M. A., D. Mathews y K. Strobel (2000), "Understanding Sequences: A Tale of Two Objects", en E. Dubinsky, J. J. Kaput y A. H. Schoenfeld (eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, pp. 77-102, Providence, R.I., AMS y Washington MAA.
- Molina, J. y Oktac, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.
- Oktac, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-II), 373-385.
- Parraguez, M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio de base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias* 34(2), 129 – 150.
- Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de nivel superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. Tesis de Maestría no publicada, CINVESTAV – IPN.
- Ramírez, O., Romero, C. y Oktac, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de Transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 225-250.
- Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal. Tesis de maestría no publicada, CINVESTAD. México.
- Roa-Fuentes, S. & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto Transformación Lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa-Fuentes, S. & Oktac, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.
- Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. México, México: International Thomson Editores, S.A. de C.V.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra*. pp. 209 - 246. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Trigueros, M. (2000). "Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations", *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I*, 93-97. Columbus, OH.
- Trigueros, M. (2005) La noción de Esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), pp. 5-31.
- Uicab, R. y Oktac, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (3), 459-490.
- Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M. & Arnon, I. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*, Recuperadode: <http://pc75666.math.cwu.edu/Montgomery/scholar/2002/0731-b-IIawi.pdf>.

## Anexo 1

### Programas de Álgebra Lineal

#### UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

**Universidad Industrial de Santander**  
**Escuela de Matemáticas**  
**Programa de Álgebra Lineal I**

#### **Introducción**

El Álgebra Lineal es una rama de las matemáticas que estudia fenómenos de naturaleza lineal en muchas variables tales como los sistemas de ecuaciones lineales, introduciendo el lenguaje de las matrices y los vectores y conceptos estructurales como el de espacio vectorial y de transformación lineal. Su nacimiento se remonta a mediados del siglo XIX pero solamente en la segunda mitad del siglo XX se instala prácticamente en todos los currículos de las carreras de ciencias e ingeniería de todo el mundo al mismo nivel que el ya clásico cálculo diferencial e integral.

Entrado el siglo XXI el Álgebra Lineal es una herramienta básica para casi todas las ramas de la matemática y también para disciplinas afines tales como la física, la ingeniería y la computación, entre otras.

En nuestro medio, durante casi toda la segunda mitad del siglo XX la materia *Álgebra Superior* fue obligatoria para todos los estudiantes de ciencias e ingeniería de la UIS y comprendía el estudio de los vectores sobre todo tridimensionales, el álgebra vectorial y el álgebra de matrices, además de temas anexos como inducción, teorema del binomio, números complejos. Todo muy enfocado a apoyar los cursos de cálculo. Entrando al siglo XXI todo esto se ha querido enfocar hacia el Álgebra Lineal. Así la materia *Álgebra Lineal I* quiere ser una materia altamente formativa que abra las puertas al estudiante para el estudio de los fenómenos lineales en muchas variables con herramientas algebraicas. El eje central es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sistemas que el estudiante debe haber tratado superficialmente en su bachillerato y cuyas soluciones aquí se exploran a profundidad dando una interpretación geométrica y herramientas algorítmicas apropiadas. Los enfoques y la ambientación de esta temática pueden variar de acuerdo al docente orientador del curso y a los intereses de los estudiantes. Los objetos a tratar son entes concretos ( $n$ -plas, vectores, matrices) que sirvan de base para aproximarse a entes abstractos.

#### **Propósitos:**

##### **Generales**

- Propiciar en el estudiante el desarrollo de su capacidad para formalizar algebraicamente situaciones geométricas, de la ciencia y de la tecnología.
- Familiarizar al estudiante con los ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial y del espacio vectorial euclidiano.

##### **Específicos**

- Dar herramientas básicas para el desarrollo de las matemáticas universitarias
- Identificar lugares geométricos del espacio tridimensional (puntos, planos y rectas) con sistemas de ecuaciones lineales
- Manejar el álgebra de matrices y su utilidad para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

- Reconocer la función determinante como una generalización del concepto de área y volumen y utilizarla para el análisis de la consistencia de sistemas de ecuaciones lineales
- Identificar fenómenos de naturaleza ideal y modelarlos algebraicamente.

## Componentes

- **Algorítmico:** Es indispensable que el estudiante maneje ciertos algoritmos por ejemplo, el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, algoritmos para calcular el determinante de una matriz, su inversa, además de manejar cierta operatoria, como el álgebra de matrices, las operaciones entre vectores de  $R_n$ , etc.. Es de tener en cuenta y esto puede ser muy específico de nuestro medio, que los estudiantes que recibimos en su mayoría, comprenden la matemática como una colección de algoritmos. Sin embargo, es indispensable no quedarse en el manejo de estos algoritmos ni exigir excesiva destreza en cálculos largos. Siempre el estudiante debe entender el porqué del algoritmo, más importante que ejecutar determinado algoritmo puede ser describirlo.
- **Argumentación:** El curso comprende una buena cantidad de afirmaciones que además de su comprensión, deben interrelacionarse por medio de argumentaciones que sin necesidad de ser excesivamente formales expliquen la naturaleza de estas afirmaciones. Por ejemplo, una vez el estudiante entiende el papel de la matriz idéntica entre matrices cuadradas del mismo orden, debe comprender qué significa ser la inversa y porqué la inversa del producto de dos matrices invertibles se comporta así y la demostración formal es conveniente, sencilla y útil. Debe relacionar esta inversa con los inversos multiplicativos de los números reales, y entender su diferencia. Se exige pues la comprensión de las ideas y el dominio del lenguaje propicio para expresarlas.
- **Geométrico:** Se trata de mostrar elementos del Álgebra Lineal en  $R_n$  y para ello es indispensable guiarse por lo que sucede en  $R^2$  y  $R^3$ , que son los casos visibles en donde la intuición funciona bien. Por otra parte cuando trabajamos  $R^2$ , podemos hacer un puente con los posibles conocimientos que el estudiante debe traer de su geometría analítica. Hay que asombrar al estudiante mostrándole que, por ejemplo en  $R^5$ , podemos hablar de triángulos rectángulos aunque no los podamos ver.
- **Computacional:** muchos textos incluyen ejercicios y rutinas para trabajar con paquetes computacionales. Es indudablemente útil introducir estas ayudas, sin embargo se debe tener cuidado pues algunas veces el manejo del paquete no es tan amigable y su uso hace que el estudiante pierda de vista los conceptos que se tratan de explorar. Estos paquetes computacionales, (Matlab, Octave, Geogebra, Mathematica o Sage) pueden utilizarse como una manera de agilizar cálculos que de manera manual sería engorroso, o pueden usarse como ilustración de las muchas aplicaciones del Álgebra Lineal. El uso de estos paquetes es algo que a nivel mundial es experimental y sería muy bueno compartir experiencias al respecto.

## Contenidos

Se presentan a continuación los contenidos posibles de la materia, teniendo en cuenta que los marcados con \* son opcionales, que a juicio del docente deben ambientar los no marcados, que son considerados como contenidos mínimos e indispensables.

### 1. Introducción\*

- 1.1. Naturales e inducción, sumatoria.\*
- 1.2. Números complejos\*.
- 1.3. Operaciones\*.
- 1.4. Campos finitos\*

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

## **2. Geometría Vectorial en $\mathbb{R}^n$ ( Ilustrar ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ).**

- 2.1. Álgebra de vectores.
- 2.2. Longitud y ángulo: producto punto.
- 2.3. Rectas y planos.
- 2.4. Proyección ortogonal sobre rectas y planos.

## **3. Sistemas de ecuaciones lineales**

- 3.1. Introducción: definición de ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales y solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- 3.2. Métodos directos (Gauss) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- 3.3. Métodos iterativos para resolver sistemas de ecuaciones lineales\*.

## **4. Álgebra de matrices y determinantes**

- 4.1. Operaciones con matrices.
- 4.2. Inversa de una matriz.
- 4.3. Determinantes.
- 4.4. Factorización LU\*.

## **5. Subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$**

- 5.1. Definición y ejemplos.
- 5.2. Espacio generado y espacio nulo.
- 5.3. Dependencia e independencia lineal.
- 5.4. Bases y dimensión.
- 5.5. Subespacios afines\*
- 5.6. Transformaciones lineales y transformaciones afines\*.

## **6. Valores y vectores propios\***

- 6.1. Definiciones: valores y vectores propios y polinomio característico\*.
- 6.2. Espacios propios\*.
- 6.3. Matrices semejantes y diagonalización\*.
- 6.4. Aplicaciones\*.

## **7. Ortogonalidad\***

- 7.1. Ortogonalidad en  $\mathbb{R}^n$ .\*
- 7.2. Bases ortogonales\*.
- 7.3. Proceso de Gram-Schmidt y factorización QR\*.
- 7.4. Diagonalización ortogonal\*.

## **Posibles Organizaciones**

### **Clásica:**

Se estudia el álgebra vectorial y matricial, como preámbulo para generalizar a las estructuras de espacio vectorial.

### **1. Preliminares, Principio de Inducción Matemática**

- Aplicaciones
- Sucesiones recursivas, coeficientes binomiales y el teorema del binomio
- El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

- Teorema Fundamental del álgebra.

## **2. $\mathbb{R}^n$ como Espacio vectorial y como Espacio Euclidiano**

- Vectores geométricos
- Vectores y coordenadas
- Suma de vectores, producto de un vector por un escalar, producto escalar de vectores, producto vectorial y proyecciones
- Rectas y planos en el espacio.
- Dependencia e independencia lineal, generado lineal, bases.

## **3. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales**

- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Solución general de un sistema de ecuaciones lineales.
- Álgebra de matrices.
- Operaciones elementales entre filas.
- Matrices equivalentes por filas.
- Matrices escalonadas reducidas por filas.
- Matrices invertibles.
- Matrices elementales.
- Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.

## **4. Determinantes**

- Ampliación del concepto de volumen.
- Cálculo de determinantes por diagonalización.
- Fórmula del producto y sus consecuencias.
- Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- Determinante de la transpuesta.
- Regla de Cramer.

### **Categoría:**

Está implícita la distinción entre objetos y morfismos de las categorías que se estudian: Los espacios vectoriales, y los espacios euclidianos. La operatoria entre matrices aparece de manera natural como las operaciones correspondientes a operaciones naturales entre transformaciones lineales. Está basada en el libro de los profesores Sonia Sabogal y Rafael Isaacs.

## **1. Los Escalares. Preliminares, Principio de Inducción Matemática**

- Números naturales. Principio de Inducción.
- El campo de los Números complejos: representación geométrica, potencias y raíces Complejas.
- Campos finitos.

## **2. $\mathbb{R}^n$ como Espacio vectorial.**

- Solución general de un sistema de ecuaciones lineales. Método de Gauss.
- El espacio de las  $n$ -plas. Operaciones.
- Subespacios vectoriales. Independencia lineal, generado y bases.
- Rectas, planos subespacios afines en  $\mathbb{R}^n$ .

## **3. Transformaciones lineales y Matrices.**

- Transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$
- Representación de transformaciones por matrices.
- Álgebra de matrices vs álgebra de transformaciones.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

- Matrices invertibles. Algoritmo para encontrar la inversa de una matriz cuadrada.
- Nucleo e imagen. Relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

#### **4. $R^n$ como espacio vectorial Euclideo.**

- Producto punto. Otros productos internos en  $R^n$
- Norma de un vector. Distancia entre puntos.
- Desigualdad de Cauchy-Schwarz.
- Coseno entre vectores. Proyección.
- Producto cruz, producto punto.

#### **Determinantes**

- Ampliación del concepto de volumen.
- Cálculo de determinantes por diagonalización.
- Fórmula del producto y sus consecuencias.
- Fórmulas de expansión para calcular determinantes.
- Determinante de la transpuesta.
- Regla de Cramer.

#### **Moderna:**

A partir del texto de Poole.

- 1.1 Introducción: el juego de la pista de carreras.
- 1.2 Geometría y álgebra de vectores.
- 1.3 Longitud y ángulo: el producto punto.
- 2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
- 2.2 Métodos directos para resolver sistemas lineales.
- 2.3 Conjuntos generadores e independencia lineal.
- 3.1 Operaciones con matrices.
- 3.2 Álgebra matricial.
- 3.3 La inversa de una matriz.
- 3.5 Subespacios, bases, dimensión y rank.
- 4.1 Introducción a eigenvalores y eigenvectores.
- 4.2 Determinantes.

#### **Matricial:**

Basada en el libro de Howard Anton capítulos 1,2,3,4.

#### **1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES**

- 1.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales.
- 1.2 Eliminación gaussiana.
- 1.3 Sistemas homogéneos de ecuaciones lineales.
- 1.4 Matrices y operaciones matriciales.
- 1.5 Reglas de la aritmética matricial.
- 1.6 Matrices elementales y un método para hallar la inversa.
- 1.7 Resultados adicionales acerca de los sistemas de ecuaciones y la inversibilidad.

#### **2 LA FUNCIÓN DETERMINANTE.**

- 2.1 Evaluación de los determinantes por reducción en los renglones.
- 2.2 Propiedades de la función determinante.
- 2.3 Desarrollo por cofactores; regla de Cramer
- 2.4 Vectores en los espacios bidimensional y tridimensional.

#### **3. INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES (GEOMÉTRICOS).**

- 3.2 Normas de un vector; aritmética vectorial.
- 3.3 Producto escalar (punto); proyecciones.
- 3.4 Producto vectorial (cruz).
- 3.5 Rectas y planos en el espacio tridimensional.

#### 4 ESPACIOS VECTORIALES

- 4.1 Espacio euclidiano  $n$  dimensional.
- 4.2 Espacios vectoriales generales.
- 4.3 Subespacios.
- 4.4 Independencia lineal.
- 4.5 Base y dimensión.
- 4.6 Espacio de renglones y columnas de una matriz; rango; aplicaciones para hallar bases.
- 4.7 Espacios de productos interiores.
- 4.8 Longitud y ángulo en los espacios de productos interiores.
- 4.9 Bases ortonormales; proceso de Gram-Schmidt.
- 4.10 Coordenadas; cambio de base.

#### **Logística:**

El docente escoge la distribución de los temas, el número de evaluaciones y su ponderación teniendo en cuenta este documento, sus concepciones particulares y los intereses de sus estudiantes (ya que Álgebra Lineal I es un curso de primer semestre puede saber a qué carrera pertenecen sus estudiantes). También incluirá el o los textos guía y la bibliografía.

El primer día de clase hace llegar a sus estudiantes y a la coordinación de la materia la distribución de los temas y su manera de evaluar junto con la bibliografía empleada y otros recursos.

El tema de cada parcial lo hace llegar a la coordinación de la materia así como los resultados obtenidos.

El docente intentará estar en contacto con el seminario docente, participando directamente o informándose de los temas tratados. También tratará de saber de la experiencia de otros docentes de la materia.

El docente debe colaborar con el programa ASAE para que sus estudiantes reciban orientación efectiva en la materia.

#### **Bibliografía.**

*Álgebra Lineal*. Stanley I. Grossman.

*Calculus Tomo I y II*. Tom M. Apostol.

*Linear Algebra*. Fraleigh B.

*Álgebra Lineal: Una introducción Moderna*. David Poole.

*Álgebra Lineal e Aplicaciones*. Reginaldo J. Santos.

*Elementary Linear Algebra*. Howard Anthon.

*Aproximación al Álgebra Lineal: Un enfoque geométrico*. Sonia Sabogal y Rafael Isaacs.

*Álgebra Lineal con aplicaciones*. Restrepo Patricia, Franco Rosa, Luz Elena Muñoz. Universidad Nacional de Colombia.

*Um Curso de Geometria Analitica e Algebra Linear*. Reginaldo J. Santos.

*Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. David Lay *On the Teaching of Linear Algebra*. J.-L. Dorier (Ed).

## Anexo 2

### Preguntas del Taller

- Sean  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  funciones definidas por  $f(x, y) = (y^2, x)$  y  $g(x, y) = (x + 2y, -x)$ .
  - Sean  $u = (1, 0)$  y  $v = (0, 1)$ .
    - Calcule  $(u + v)$  y determine  $f(u + v)$ .
    - Calcule  $f(u)$ ,  $f(v)$  y encuentre el vector  $f(u) + f(v)$ .
    - Comparando los resultados anteriores, ¿son  $f(u + v)$  y  $f(u) + f(v)$  iguales?
  - Sean  $u = (3, 0)$  y  $c = 1$ .
    - Calcule  $cu$  y determine  $f(cu)$ .
    - Calcule  $f(u)$  y encuentre el vector  $cf(u)$ .
    - Comparando los resultados anteriores, ¿son  $f(cu)$  y  $cf(u)$  iguales?
  - Realiza los puntos a. y b. para la función  $g$ .
  - ¿Son  $f$  y  $g$  transformaciones lineales? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuáles de las siguientes transformaciones satisfacen  $T(v + w) = T(v) + T(w)$ , y cuáles  $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ ?
  - $T(v) = \frac{v}{\|v\|}$ .
  - $T(v) = v_1 + v_2 + v_3$ .
  - $T(v) = (2v_1, 3v_2, -v_3)$ .
  - $T(v)$  es la menor componente de  $v$ .
- Sea  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal y suponga que  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Encuentre:
  - La matriz de la transformación.
  - $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .
  - $T\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ .
- Sea  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal definida por  $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}$ , escriba la matriz de la transformación con respecto a las bases  $\beta_1$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  y  $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ .
- Suponga que  $T$  es una transformación lineal que transforma a  $(1, 1)$  en  $(2, 2)$  y  $(2, 0)$  en  $(0, 0)$ . Encuentre  $T(v)$  cuando
  - $v = (2, 2)$
  - $v = (3, -1)$
  - $v = (a, b)$

6. Usted sabe que  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Con esta información, ¿es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$ ? Explique claramente su respuesta.
7. La matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  representa la matriz de una transformación lineal definida de un espacio vectorial  $V$  en un espacio vectorial  $W$ . ¿Cuáles son las dimensiones de los espacios vectoriales  $V$  y  $W$ ? Justifica tus respuestas.
8. ¿Es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + z = 0 \right\}$ ? Si es posible lleve a cabo sus ideas, en caso contrario justifique su respuesta.
9. Encuentre una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + z = 0 \right\}$ , referida a las bases  $\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  y  $\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .
10.
  - a. ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(2,5)$  y  $(0,1)$  en  $(1,3)$ ?
  - b. ¿Qué matriz transforma  $(2,5)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
  - c. ¿Por qué ninguna matriz transforma  $(2,6)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
  - d. ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(r,s)$  y  $(0,1)$  en  $(t,u)$ ?
  - e. ¿Qué matriz transforma  $(a,b)$  en  $(1,0)$  y  $(c,d)$  en  $(0,1)$ ?
  - f. ¿Qué condición sobre  $a, b, c, d$  hace imposible en inciso e.?
11. Suponga que todos los vectores  $x = (a,b)$  en el cuadrado unitario  $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$  se transforman en  $Ax$  ( $A$  es 2 por 2).
  - a. ¿Cuál es la forma de la región transformada (para toda  $Ax$ )?
  - b. ¿Para qué matrices  $A$  esta región es cuadrada?
  - c. ¿Para qué matrices  $A$  es una recta?
  - d. ¿Para qué matrices  $A$  la nueva área sigue siendo 1?
12. Si la Figura 2 es la imagen de la Figura 1, bajo una transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , ¿es posible hallar una expresión para  $T$ ? Justifique su respuesta, en caso de que sea posible hallar  $T$ , escriba la expresión. Halle  $T\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

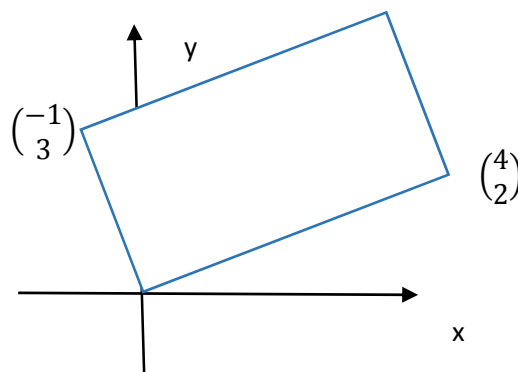
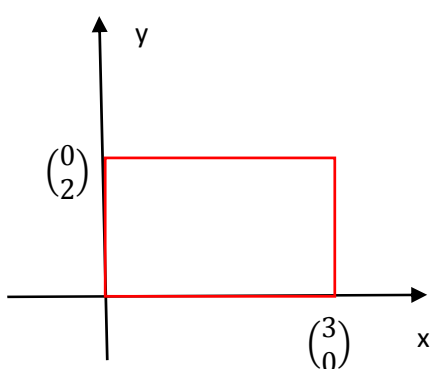


Figura 1.

Figura 2.

13. Describa las transformaciones lineales del plano  $xy$  que están representadas en la base estándar  $(1,0)$  y  $(0,1)$  por las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. ¿Puede determinar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $nu(T) = \{(x, y, z): 3x - 2y + z = 0\}$ ? Si es posible defínala específicamente, en caso contrario justifique su respuesta.
15. ¿Puede determinar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $Im(T) = \{(x, y, z): 2x + 3y - 5z = 0\}$ ? Si es posible defínala específicamente, en caso contrario justifique su respuesta.
16. Defina dos transformaciones lineales  $f$  y  $g$  donde este  $f \circ g$  este definida.
17. Si  $S$  y  $T$  son lineales con  $S(v) = T(v) = v$ , entonces ¿ $S(T(v)) = v$  o  $v^2$ ? Explique su respuesta.
18. Suponga que  $T$  es una transformación lineal sobre  $\mathbb{R}^3$  que transforma cada punto  $(u, v, w)$  en  $(u, u + v, u + v + w)$ . Describa lo que  $T^{-1}$  hace al punto  $(x, y, z)$ .
19. Pruebe que una rotación es una transformación lineal, pero que una traslación no es una transformación lineal.
20. Sean  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = \sqrt{3}x$ , y sea  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = -x$ .
- Muestre que la composición  $T_1 \circ T_2$  es una rotación, y encuentre el ángulo de rotación.
  - Grafique  $(2,1)$ ,  $T_1(2,1)$  y  $(T_1 \circ T_2)((2,1))$  en el mismo plano. ¿Esta gráfica coincide con lo que usted probó en a.?
  - Muestre que si  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = m_1x$ , y sea  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = m_2x$ , y  $m_1 \neq m_2$ , entonces  $T_1 \circ T_2$  es una rotación a través de dos veces el ángulo entre las dos líneas que reflejan.

## Anexo 3

### Preguntas de la entrevista

#### **Pregunta 1**

Usted sabe que  $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  y  $T\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Con esta información, ¿es posible encontrar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^2$ ? Explique claramente su respuesta.

#### **Pregunta 2**

¿Existe una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  que tiene como imagen el subespacio generado por los vectores  $(1,0,-1)$  y  $(1,2,2)$ ? Si es posible encontrarla, describa explícitamente la transformación. En caso contrario, justifique por qué no es posible hallar a  $T$ .

#### **Pregunta 3**

Sea  $f$  una transformación lineal definida por  $f(x, y, z) = (-x, y + z, x - y - z)$ . Encuentre todos los vectores  $(x, y, z)$  de la forma que:

- $f(x, y, z) = (0,0,0)$
- $f(x, y, z) = (1,2,2)$
- $f(x, y, z) = (1,2,-3)$
- Describa el conjunto que encontró en cada caso.

#### **Pregunta 4**

Si la Figura 2 es imagen de la Figura 1, bajo una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , ¿es posible hallar una expresión para  $T$ ? Justifique ampliamente su respuesta.

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

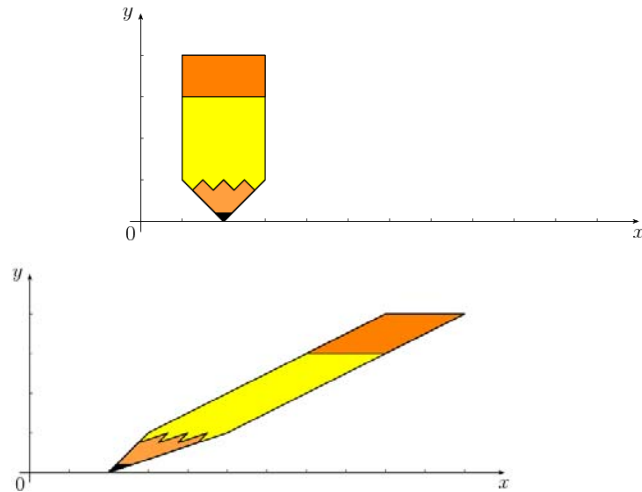


Figura 1.

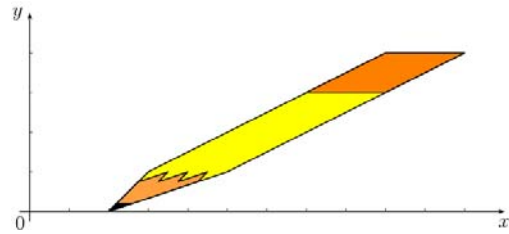
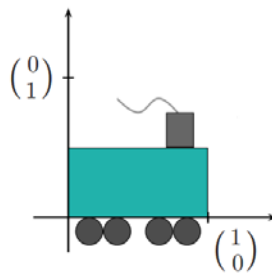


Figura 2.

### Pregunta 5

¿Qué le sucede al tren que aparece en la siguiente figura, cuando se le aplica la transformación lineal dada por la matriz  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ ? Justifique geoméricamente su respuesta.



### Pregunta 6

- ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(2,5)$  y  $(0,1)$  en  $(1,3)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(2,5)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Por qué ninguna matriz transforma  $(2,6)$  en  $(1,0)$  y  $(1,3)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(1,0)$  en  $(r,s)$  y  $(0,1)$  en  $(t,u)$ ?
- ¿Qué matriz transforma  $(a,b)$  en  $(1,0)$  y  $(c,d)$  en  $(0,1)$ ?
- ¿Qué condiciones sobre  $a, b, c$  y  $d$  hace imposible el inciso anterior?

### Pregunta 7

Un *Esquema* de transformación lineal: construcción de la representación geométrica y matricial relacionada con una base ordenada

Considere  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = \sqrt{3}x$ , y  $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una reflexión alrededor de la recta  $y = -x$ .

- a. Muestre que la composición  $T_1 \circ T_2$  es una rotación y encuentre el ángulo de rotación.
- b. Grafique  $(2,1)$ ,  $T_1(2,1)$  y  $T_1 \circ T_2((2,1))$  en el mismo plano. ¿Esta gráfica coincide con lo que usted probó en a.?