

**SELECCIÓN, CALIBRACIÓN Y APLICACIÓN DE UN MODELO DE  
VALORACIÓN DE UN FUTURO SOBRE BONO NOCIONAL TENIENDO EN  
CUENTA LA OPCIÓN DE ENTREGA IMPLÍCITA.**

**ANTONY ARENAS ARDILA  
JUAN MANUEL LOZANO PICÓN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO – MECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
BUCARAMANGA**

**2008**

**SELECCIÓN, CALIBRACIÓN Y APLICACIÓN DE UN MODELO DE  
VALORACIÓN DE UN FUTURO SOBRE BONO NOCIONAL TENIENDO EN  
CUENTA LA OPCIÓN DE ENTREGA IMPLÍCITA.**

**ANTONY ARENAS ARDILA  
JUAN MANUEL LOZANO PICÓN**

**Trabajo de Grado Modalidad Investigación Presentado Como Requisito  
Parcial Para Optar al Título de  
INGENIERO INDUSTRIAL**

**Tutor:  
Ing. José Joaquín Álzate Marín  
Universidad Industrial de Santander**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO – MECÁNICAS  
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES  
BUCARAMANGA**

**2008**

## **AGRADECIMIENTOS**

A la docente Olga Patricia Chacón Arias quien inicialmente jugó el papel de directora de este trabajo. Al docente José Joaquín Álzate Marín, por el apoyo y la confianza depositada en nosotros en el momento de asumir el papel de director de nuestro proyecto de grado.

Un agradecimiento especial, a Daniel Velázquez Vergara, líder de administración del mercado de derivados de la Bolsa de Valores de Colombia S.A., quien fue un apoyo constante en el proceso de desarrollo de nuestro trabajo.

## DEDICATORIAS

A mis padres y hermanos

Antony Arenas Ardila

A mis padres y hermanos

Juan Manuel Lozano Picón

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	14
TABLA DE LOGROS .....	16
1. MARCO TEORICO.....	18
1.1. HISTORIA DEL MERCADO DE VALORES EN COLOMBIA.....	18
1.2. MERCADO DE DERIVADOS .....	23
1.2.1. FORWARDS Y FUTUROS .....	25
1.2.2. OPCIONES.....	29
1.2.3. SWAPS .....	33
1.3. ARREGLOS INSTITUCIONALES .....	35
2. ESTRUCTURA PLAZOS DE TASAS DE INTERÉS.....	37
2.1. TASAS DE INTERÉS AL CONTADO Y A PLAZO .....	39
3. METODOLOGÍA ACTUAL DE VALORACIÓN TEÓRICA DE FUTUROS SOBRE BONO NOCIONAL (CANASTA DE ENTREGABLES).....	40
4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS .....	45
4.1. MODELOS ESTOCÁSTICOS DE TASAS DE INTERÉS.....	47
4.1.1. MODELOS DE EQUILIBRIO .....	47
4.1.2. MODELOS DE NO ARBITRAJE .....	52
4.2. SELECCIÓN DEL MODELO A UTILIZAR .....	57
4.3. AMPLIACIÓN DEL MODELO A UTILIZAR.....	59
5. CALIBRACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO.....	66
5.1. ESTIMACIÓN TASAS .....	69

5.2. VALORACIÓN DEL FUTURO CON CANASTA DE ENTREGABLES (MODELO BDT).....	75
5.3. VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE ENTREGA IMPLÍCITA .....	77
5.4. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN .....	78
5.5. ANÁLISIS GRÁFICO.....	79
CONSIDERACIONES Y CONCLUSIONES .....	87
BIBLIOGRAFIA.....	89

## LISTA DE FIGURAS

**GRÁFICO 1.** EJEMPLO DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LOS TIPOS DE INTERÉS

**GRÁFICO 2.** CURVA CERO CUPÓN DEL EJEMPLO DE ESTIMACIÓN DE TASAS

**GRÁFICO 3.** ÁRBOL DE TASAS CONSTRUIDO - FRACCIÓN

**GRÁFICO 4.** ÁRBOL DE PRECIOS DE LA ÚLTIMA EVOLUCIÓN A AJUSTAR (ÚLTIMO PERIODO)-FRACCIÓN

**GRÁFICO 5.** ESQUEMA DE OBTENCIÓN DE PRECIOS A VENCIMIENTO DEL FUTURO

**GRÁFICO 6.** SERIE DE VALORACIÓN DEL FUTURO CON LA METODOLOGÍA BDT

**GRÁFICO 7.** HISTÓRICO CURVAS CERO CUPÓN PESOS

**GRÁFICO 8.** RELACIÓN VENCIMIENTO PRECIOS CONTADO, FUTURO Y FORWARD

**GRÁFICO 9.** SENSIBILIDAD DEL PRECIO DEL BONO Y LA OPCIÓN SEGÚN EL CAMBIO EN LA TASA DE INTERÉS

**GRÁFICO 10.** MÁXIMO EMPINAMIENTO

**GRÁFICO 11.** CURVA PLANA

**GRÁFICO 12.** PRECIOS CURVA INVERTIDA 1

**GRÁFICO 13.** PRECIOS CURVA INVERTIDA 2

## **LISTA DE TABLAS**

**TABLA 1.** EJEMPLO DE CANASTA DE ENTREGABLES

**TABLA 2.** PARÁMETROS DEL EJEMPLO PARA ESTIMACIÓN DE TASAS

**TABLA 3.** RENTABILIDADES, VOLATILIDADES Y PRECIOS DE AJUSTE PARA  
LOS 6 PLAZOS DE LA CURVA CERO CUPÓN DEL DÍA 14/12/2007

**TABLA 4.** RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE LA HERRAMIENTA  
DISEÑADA POR EL EQUIPO DEL PROYECTO

**TABLA 5.** COMPONENTES PRINCIPALES

## **LISTA DE ANEXOS**

**ANEXO 1.** “A ONE FACTOR MODEL OF INTEREST RATES AND ITS APPLICATION TO TREASURY BOND OPTIONS” Ensayo original de Black, Derman y Toy.

**ANEXO 2.** MOVIMIENTO BROWNIANO O PROCESO DE WIENER

**ANEXO 3.** DISTRIBUCIÓN LOG NORMAL

**ANEXO 4.** NELSON & SIEGEL

**ANEXO 5.** FACTORES COMUNES EN LA ETTI.

**ANEXO 6.** EJEMPLO

## RESUMEN

**TITULO:** SELECCIÓN, CALIBRACIÓN Y APLICACIÓN DE UN MODELO DE VALORACIÓN DE UN FUTURO SOBRE BONO NOCIONAL TENIENDO EN CUENTA LA OPCIÓN DE ENTREGA IMPLÍCITA.<sup>1</sup>

**AUTORES:** Antony Arenas Ardila, Juan Manuel Lozano Picón\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Futuros, Valoración de Futuros, Opciones, Procesos Estocásticos, Canasta de Entregables, Árboles Binomiales.

### DESCRIPCIÓN O CONTENIDO

Para la valoración de un futuro sobre un bono del tesoro colombiano (TES) nocional (canasta de entregables como subyacente), se selecciona de un grupo de modelos un modelo estocástico sobre tasas de interés para realizar la valoración estimada del futuro mostrando a través de la construcción de un árbol binomial, el camino de la tasa de interés de corto plazo a través del tiempo, y de esta forma se valoran los bonos entregables a través de la tasa forward siguiendo el principio de no-arbitraje reflejando el valor que tiene la opción de entrega implícita respecto a la metodología “actual” de valoración propuesta en el mercado colombiano para este producto derivado. Se muestra que la metodología escogida anticipa el cambio en el valor del futuro minimizando los valores que podrán seguir los bonos pertenecientes a la canasta de entregables en cada uno de los nodos del vencimiento del futuro en el árbol construido, y como resultado la optimización al mínimo del valor del futuro haciendo esta serie de precios mucho más suave que la serie de precios obtenida por la metodología actual. Se muestra que el valor de la opción de entrega implícita es significativo y veraz y obedece a comportamientos de mercado.

---

<sup>1</sup> Proyecto de grado modalidad investigación

\*\* Facultad de Ingeniería Físico-Mecánica; Escuela de Estudios Industriales y Empresariales; Programa de Ingeniería Industrial; Ingeniero José Joaquín Álzate Marín, Director del Proyecto

## SUMMARY

**TITLE:** SELECTION, CALIBRATION AND APPLICATION OF A PRICING MODEL FOR A NOTIONAL BOND FUTURE TAKING INTO ACCOUNT THE IMPLICIT OPTION OF DELIVERY.<sup>2</sup>

**AUTHORS:** Antony Arenas Ardila, Juan Manuel Lozano Picón\*\*

**KEY WORDS:** Futures, Futures Valuation, Options, Stochastic Processes, Basket of deliverables, binomial trees.

## DESCRIPTION

For the valuation of notional (Basket of deliverables as underlying asset) colombian treasury bond (TES) Future, a model its picked from a group of stochastic interest rate models to make the estimate valuation of Future showing by the construction of a binomial tree (long as the biggest maturity of derivable bonds), the way for the short interest rate in time, and with this possible outcomes of the short interest rate valuate each one of the derivable bonds following the non-arbitrage principle showing the value that implicit option of deliver has respect to methodology in Colombian derivatives market to calculate this price. It's shown in this document that the picked methodology for the valuation of this product anticipates the change of the future price minimizing the possible prices of the derivable bonds (of a defined basket) in each node of the constructed binomial tree for the maturity of the future (distance of time), this anticipation property make this price series (picked methodology) much soft than the price series for the actual valuation methodology. It's shown also, that the implicit option of deliver value in this structured product (difference between the two prices of the two methodologies) is significant and trustly, and obeys to market activity.

---

<sup>2</sup> Bachelor Degree Project, Modality as Investigation.

\*\* Physical- Mechanical engineering's Faculty; School of Industrial and Enterprise studies; Industrial Engineering Program; IE José Joaquín Álzate Marín, Project Director

## INTRODUCCIÓN

El mercado de capitales a nivel mundial tiene una especial importancia para la economía ya que lleva el ahorro de las personas o entidades a acciones productivas de largo plazo como la inversión privada o la infraestructura física. El uso de los diferentes instrumentos de dicho mercado ha permitido a varios países dar un paso en sus estándares de desarrollo y acceder a una superior transferencia de recursos y riesgos entre los actores del mercado.

En Colombia la idea de avanzar en el mercado de capitales ha sido un punto importante en la agenda económica de los últimos años. Esta estrategia ha arrojado resultados significativos, sin embargo, hay un camino largo por recorrer en aspectos fundamentales como la regulación y la puesta en marcha de mecanismos que sirvan de impulso al mercado.

El mercado de renta fija colombiano se ha desarrollado en los últimos años de forma destacable. Uno de los factores estimulantes de este desarrollo es la estrategia de endeudamiento del gobierno colombiano a lo largo de los últimos 10 años, que ha concentrado su exposición en moneda local a través de nuevos y mayores montos de emisión de los títulos TES (Títulos de deuda pública emitidos por la Tesorería General de la Nación que son subastados por el Banco de la República; se caracterizan por ser una de las mayores fuentes de financiación del Gobierno), complementado con estrategias periódicas de emisión.

De esta forma podemos ver que el mercado colombiano ha llegado a niveles que favorecen la expansión de un mercado de derivados. Aunque el impulso de este desarrollo ha sido la deuda pública, sus resultados se han traducido en la evolución de renta variable y la renovación de emisores que señalan un fortalecimiento del mercado colombiano. En estos mercados es evidente la

necesidad de establecer instrumentos de diversificación de propósitos, por ejemplo la cobertura en riesgos de mercado, dicha necesidad crea una oportunidad de avance en el proceso de desarrollo.

La experiencia internacional ha demostrado la amplia posibilidad de crecimiento generada por los instrumentos derivados (contratos referenciados a un activo o a una variable económica para ser liquidado en una fecha futura, y en función de las cuales se manejan los riesgos de un portafolio de inversión, son valores cuyo precio depende del valor de una o más variables, haciendo posible aislar o concentrar un riesgo existente y transferido al mercado ), no sólo por la gran variedad de beneficios que ofrecen sino por que apoyan la corrección de los resultados no favorables del mercado de contado.

En este proyecto se dará a conocer un poco más a fondo el mercado de derivados colombiano, su funcionamiento y cual es su futuro. Sin embargo su objetivo primordial busca lograr un avance en el proceso de valoración (obtención de Precios) del futuro (contrato a plazo estandarizado negociado en un mercado organizado en donde las partes se obligan a comprar o vender un activo en una fecha futura) sobre bono nocional (TES) el cual es (entendiéndose como nocional), un bono que logra un punto de referencia común para la comparación de los bonos que pertenecen a una canasta de TES. Este es el producto (futuro sobre bono nocional) inicial con el que la Bolsa de Valores de Colombia piensa dar un mayor impulso a este mercado.

Se realizará inicialmente un proceso de obtención de información tanto de datos como de teoría base. Seguido a la depuración de lo anterior, se realizará un proceso de selección del modelo más afín al mercado de capitales colombiano y a las condiciones que este proyecto permiten; después se realizará su calibración (estimación de los parámetros: valores estáticos en el modelo), para obtener resultados que lleven al hallazgo de conclusiones y recomendaciones.

## TABLA DE LOGROS

OBJETIVOS	CAPITULO DE CUMPLIMIENTO
<b>OBJETIVO GENERAL</b>	
Valorar la opción de entrega implícita de un contrato de futuro sobre bono nocional (TES) mediante el modelo que mejor se ajuste a las condiciones del mercado de capitales colombiano.	CAPITULO 6.4 RESULTADOS E INTERPRETACIÓN
<b>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</b>	
Definir un modelo estocástico para tasas de interés, a través de un análisis de la adaptación de éstos al mercado colombiano, con el fin de que la valoración del producto considere la evolución del comportamiento de los datos.	CAPITULO 5.2. SELECCIÓN DEL MODELO A UTILIZAR
Estimar los parámetros del modelo estocástico, haciendo un análisis detallado de la información base y series financieras; para lograr una calibración adecuada del modelo previamente seleccionado y su aplicabilidad en el tiempo.	CAPITULO 6. CALIBRACIÓN Y APLICACIÓN DEL MODELO
Mostrar a través de los resultados obtenidos el valor de la opción implícita de entrega en los precios teóricos del futuro sobre bono nocional, mediante la	CAPITULO 6.4 RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

aplicación del modelo estocástico sobre tasas de interés seleccionado para concluir sobre su relevancia en la valoración del producto.	
--	--

## **1. MARCO TEORICO**

### **1.1. HISTORIA DEL MERCADO DE VALORES EN COLOMBIA<sup>3</sup>**

El inicio del mercado de valores en Colombia se remonta a finales del siglo XVI, época en que comenzaron las sociedades anónimas que emitieron acciones y valores en masa, actividad que las identificó como la razón de ser del mercado bursátil. Las sociedades anónimas surgieron como consecuencia del dinámico crecimiento de la producción y el comercio a nivel mundial. Con ellas aparecieron otra clase de bienes objeto de comercio conocidos como los valores mobiliarios o títulos valores entre los cuales inicialmente surgieron las acciones y para facilitar su negociación, se formaran las bolsas de valores.

En Colombia la evolución del mercado de capitales ha estado ligada al desarrollo de la economía del país. El proceso de industrialización ocurrido en Colombia en las primeras dos décadas del siglo XX, fruto del desarrollo del sector cafetero, intensificó el progreso en la tecnificación de sectores importantes para la economía colombiana, movilizandando una corriente de capitales de gran importancia en regiones como Antioquía y Cundinamarca.

Sin embargo, la transformación de una economía basada principalmente en el comercio y la agricultura hacia un proceso de industrialización, hizo necesaria la acumulación de capitales para crear empresas que se convirtieran en pioneras del desarrollo nacional. Paralelamente, el crecimiento vertiginoso del sector financiero llevó a que algunos ciudadanos, vinculados al mercado, pensaran en la creación de una bolsa de valores, dando vida a un organismo adecuado para la transacción controlada y pública de los valores que empezaban a representar las nuevas expresiones de la riqueza nacional.

---

<sup>3</sup> Fuente: Bolsa de Valores de Colombia S.A.

El surgimiento de la primera Bolsa de Valores ocurrió en un momento oportuno de la vida económica nacional. La institución cumplió un importante papel a favor del desarrollo industrial en Colombia, en instantes en que el mundo vivía duras restricciones comerciales por efectos de la guerra.

Por la misma época, el sistema financiero empezaba a adquirir una organización moderna, con la creación del Banco de la República, la Superintendencia Bancaria y la constitución de varios bancos comerciales, se sentaron las bases de un período de consolidación de actividades crediticias.

La historia narra que fueron necesarios 20 años de intentos fallidos, como el de la Bolsa Popular de Medellín en 1901, para consolidar finalmente la Bolsa de Bogotá. Entre 1905 y 1921 la actividad bursátil fue una realidad gracias al interés de los empresarios colombianos por crear un sistema idóneo para la transacción de valores.

Fue así como en 1928 se creó la primera junta promotora que tuvo como finalidad diseñar y redactar los estatutos de la Bolsa de Valores. La Bolsa de Bogotá se conformó con un capital social de \$20.000 y con la vinculación de un pequeño grupo de comisionistas en ejercicio.

El 28 de noviembre de 1928 se firmó la escritura pública mediante la cual se constituyó la sociedad anónima Bolsa de Bogotá, bajo la vigilancia de la Superintendencia Bancaria. La consecución de la sede, la elección del primer consejo directivo, el remate de los 17 puestos a los comisionistas y la inclusión de las empresas cuyas acciones se negociaron en el mercado, permitieron que finalmente, el día 2 de abril de 1929 a las 3 de la tarde, se registrara la primera rueda de la Bolsa de Bogotá.

## **Depresión Económica**

Los primeros años de actividad de la Bolsa de Bogotá, no fueron fáciles porque su incursión coincidió con la parálisis en la actividad económica, reflejo de la depresión internacional y en octubre de 1.934 se estableció la Bolsa de Colombia, organismo que terminó fusionándose con la Bolsa de Bogotá.

Concluida la fusión, resurgió la actividad bursátil. Fue así como el país observó que los primeros negocios con acciones realizados a través de la Bolsa de Bogotá cobraron una elevada importancia y su participación fue fomentada en el común de la población. Sin embargo, el modelo económico implantado en los años 50, en el que el Estado intervenía en las decisiones económicas, deprimió la actividad bursátil desplazándola por los mercados de financiación crediticia. A partir de 1.953 se presentó un gran y negativo giro en el mercado bursátil nacional, al adoptarse una legislación que gravó las acciones con una doble tributación, imposición tributaria que incentivó la financiación de las empresas por la vía del endeudamiento, en deterioro de la capitalización accionaria.

El 19 de enero de 1.961 se dio otro gran paso en la evolución del mercado bursátil. Nació la Bolsa de Medellín en una región colombiana caracterizada por ser un centro empresarial e industrial importante para el crecimiento y desarrollo socioeconómico del país. Esta plaza bursátil se constituyó con un capital pagado de \$522.000, suma aportada por 29 corredores, que hasta ese momento conformaban la Asociación de Corredores de Medellín. Por aquellos días, 3 de abril de 1.961, se realizaban dos ruedas diarias y solo duraban una hora.

A diferencia de la época en que fue creada la Bolsa de Bogotá, la década de los 60 fue una época de desarrollo industrial, crecimiento en las exportaciones, expansión demográfica y urbanística, entre otros; esto permitió el indiscutible éxito de la Bolsa de Medellín. Durante esa época esta institución fue fundamental para

la descentralización del mercado de capitales colombiano, aspecto a su vez, básico para la capitalización y financiación de la industria antioqueña que mostró, al igual que la Bolsa un especial auge.

En 1.982 la vigilancia y el control de las Bolsas de Valores dejó de asumirlo la Superintendencia Bancaria y la función pasó a la Comisión Nacional de Valores, hoy Superintendencia de Financiera de Colombia.

### **Nuevo escenario**

La presencia de los recintos bursátiles en la capital del país y en la región antioqueña prontamente se vio acompañada por el empuje y crecimiento del occidente colombiano. En ese escenario nació la Bolsa de Occidente S.A., entidad que inició operaciones el 7 de marzo de 1.983. En los años siguientes, el crecimiento de esta plaza bursátil fue significativo, con incrementos del volumen transado hasta del 236% anual.

En 1.986 el gobierno expidió la ley 75 de este mismo año, a través de la norma se buscaba que de manera gradual, una porción creciente del gasto financiero no sería deducible para efectos tributarios, decisión que reactivó la oferta de las acciones.

Intentar narrar la historia de las Bolsas de Valores en Colombia exige un mayor registro de acontecimientos. Sin embargo, la misma historia confirma que el comienzo del siglo XXI coincidió con la necesidad para las Bolsas de Valores del país de imponerse un gran reto, consolidar el mercado de capitales colombiano. Escenario que exigió concretar el actual proceso de modernización, internacionalización y democratización a través de la integración de las Bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente, para darle paso a la nueva y única Bolsa de Valores de Colombia.

La historia del mercado de valores colombiano cambió el 3 de julio de 2001. Ese día, como producto de la integración de las bolsas de Bogotá, Medellín y Occidente, nació la Bolsa de Valores de Colombia, institución que hoy por hoy se encuentra consolidada para administrar los mercados accionario, cambiario, de derivados y de renta fija. Hoy la BVC está inscrita en el mercado de valores y es una entidad de carácter privado público.

### **Derivados en el Mundo**

El origen de los mercados de futuros y opciones financieros se encuentra en la ciudad de Chicago, que puede considerarse el centro financiero más importante en lo que a productos derivados se refiere. El subsector de productos derivados da empleo directo a 150.000 personas de la ciudad de Chicago, ya que es en dicha ciudad donde se ubican los tres mercados más importantes en cuanto a volumen de contratación, dichos mercados son:

Chicago Board of Trade (CBOE)

Chicago Mercantile Exchange (CME)

Chicago Board Options Exchange (CBOE)

En la década de los ochenta, aproximadamente diez años después de su creación en Estados Unidos, los contratos de futuros y opciones financieros llegan a Europa, constituyéndose mercados de forma gradual en los siguientes países:

Holanda EOE (European Options Exchange) 1978

Reino Unido LIFFE (London International Financial Futures Exchange) 1978

Francia MATIF (Marché a Terme International de France) 1985

Suiza SOFFEX (Swiss Financial Futures Exchange) 1988

Alemania DTB (Deutsche Terminbourse) 1990

Italia MIF (Mercato Italiano Futures) 1993

Suecia, Bélgica, Noruega, Irlanda, Dinamarca, Finlandia, Austria y Portugal también disponen de mercados organizados de productos derivados.

Otros países que disponen de mercados de futuros y opciones son Japón, Canadá, Brasil, Singapur, Hong Kong y Australia.

Una característica consustancial a todos los países que han implantado mercados de productos derivados ha sido el éxito en cuanto a los volúmenes de contratación, que han crecido espectacularmente, superando en muchas ocasiones a los volúmenes de contratación de los respectivos productos subyacentes que se negocian al contado, considerando que éstos también han experimentado considerables incrementos en sus volúmenes de negociación.

## **1.2. MERCADO DE DERIVADOS**

Los derivados son aquellas operaciones financieras que permiten comprar o vender activos en una fecha futura. Estas transacciones se pueden pactar sobre diversos activos (activo subyacente) como la tasa de cambio entre dos monedas, el valor de un índice, una tasa de interés, etc. Los derivados, que abarcan desde simples contratos a plazo hasta complicados productos de opciones, constituyen cada vez más una importante característica de los mercados financieros en todo el mundo. Se les utiliza ya en muchos mercados emergentes, y a medida que el sector financiero se vuelve más profundo y estable, su uso indudablemente aumentará.

Los derivados son útiles para la administración de riesgos pueden reducir los costos, mejorar los rendimientos, y permitir a los inversionistas manejar los riesgos con mayor certidumbre y precisión, aunque, usados con fines especulativos, pueden ser instrumentos muy riesgosos, puesto que tienen un alto grado de

apalancamiento y son a menudo más volátiles que el instrumento subyacente. Esto puede significar que, a medida que los mercados en activos subyacentes se mueven, las posiciones de los derivados especulativos pueden moverse en mayor medida aún, lo que da por resultado grandes fluctuaciones en las ganancias y pérdidas. Recientemente, la atención se ha enfocado en grandes pérdidas, y se ha subrayado la necesidad de contar con buenos controles de gestión al negociar tales instrumentos. Un contrato de derivados asume su valor por el precio de la partida o ítem subyacente, por ejemplo un producto básico, un activo financiero o un índice. El activo subyacente puede ser un bien físico, como trigo, cobre, o panza de puerco, donde el precio de los derivados se ve afectado por las expectativas en cuanto a los constreñimientos o escaseces a que se sujetarán la oferta y demanda futuras; o bien un producto financiero, como por ejemplo, acciones, títulos de renta fija, o simplemente saldos en efectivo. Un contrato de derivado financiero deriva el precio futuro para tal activo sobre la base de su precio actual (el precio al contado) y las tasas de interés (el valor del dinero en el tiempo).

Los activos subyacentes son típicamente un préstamo a corto o largo plazos (normalmente una tasa de interés interbancaria a tres meses y el rendimiento de bono gubernamental a largo plazo), divisas, o acciones, sean acciones individuales o un índice. Por su parte, los derivados con base en el riesgo de crédito han surgido recientemente en los mercados financieros. Los contratos de derivados pueden subdividirse en *futuros*, en los cuales ambas partes están obligadas a conducir la transacción a un precio específico y en fecha convenida; *swaps*, que pueden considerarse como una subsección de los contratos adelantados e implican el intercambio de un activo (o pasivo) contra otro a fecha futura (o fechas futuras); y opciones, que dan al tenedor el derecho pero no la obligación de requerir a la otra parte que compre o venda un activo subyacente a un precio especificado o en fecha convenida.

También se requiere hacer una distinción entre contratos negociados en bolsa, que se hallan estandarizados, y contratos extrabursátiles (Over the Counter OTC) o de ventanilla, que, típicamente, no están estandarizados.

### **1.2.1. FORWARDS Y FUTUROS**

Un forward es el que se lleva a cabo entre dos contrapartes para comprar/vender una partida o ítem subyacente en tiempo futuro y a cierto precio. Al precio convenido se hace referencia como precio de entrega, y permite tanto al comprador como al vendedor cerrar el trato a determinado precio, por lo que quedan protegidos de los movimientos de precio durante el periodo que transcurre hasta la entrega.

La razón para concertar un acuerdo como éste puede ser el tener certidumbre del precio. Por ejemplo, si un fabricante ha convenido cierto precio para sus productos con sus clientes, es posible que quiera ponerse a resguardo de los incrementos de precio de las materias primas para el periodo en que los precios de su producto están fijos. Puede ser utilizado también como instrumento especulativo<sup>4</sup>, conforme al cual el comprador/vendedor anticipa los movimientos de precio futuros y espera obtener una ganancia de ello, o como arbitraje<sup>5</sup> contra otros mercados donde existe esa oportunidad. Un acuerdo adelantado OTC<sup>6</sup> puede ser de cualquier tamaño, monto y periodo. Será negociado bilateralmente entre dos contrapartes y el riesgo de crédito subsistirá en las propias contrapartes.

---

<sup>4</sup> Entiéndase como especular a negociar en cualquier mercado con el objeto de conseguir utilidades aprovechando las diferencias de precios entre distintos momentos de tiempo.

<sup>5</sup> Arbitrajes es el proceso mediante el cual se pueden obtener ganancias de muy corto plazo, libres de riesgo, por la existencia simultánea de diferentes precios para el mismo producto, en el mismo o en diferentes mercados.

<sup>6</sup> Mercado OTC ( Over the counter ) : A diferencia de los mercados organizados, se trata de aquellos mercados no organizados donde la negociación se hace directamente entre las partes, sin cámara de compensación.

Un contrato de futuros es un contrato forward “negociado en bolsa”, es decir, un contrato para entregar o recibir una cantidad específica de un activo en particular en una fecha futura fija, a un precio convenido en la negociación. Los instrumentos que subyacen en los contratos de futuros financieros son típicamente bonos gubernamentales, instrumentos del mercado monetario o divisas. En esta medida son exactamente lo mismo que los contratos forward OTC.

Las negociaciones en bolsa sólo son posibles en los casos en que la mayoría de las características del activo están estandarizadas. Un futuro tendrá un tamaño de contrato establecido; un vencimiento fijo, y un número limitado de fechas de liquidación; y la responsabilidad por el control del riesgo de crédito normalmente recaerá en una cámara de compensación, que es la contrapartida de cada posición vigente (el riesgo de contraparte está estandarizado). La bolsa también requiere especificar ciertos detalles sobre el contrato de futuros: o sea, cómo serán cotizados los precios, y cuando y cómo se efectuará la entrega.

Dada la liquidez de los mercados de futuros (lo que se facilita por la estandarización y la celeridad y seguridad de las transacciones), ésta a menudo guía al mercado al contado; y se usa como una aproximación para el mercado en su conjunto. De ahí que se le considere, y a menudo sea así usado, como barómetro del estado de ánimo del mercado en el instrumento subyacente.

Muchos inversores usarán futuros en lugar del mercado al contado, con objeto, por ejemplo, de cambiar la duración<sup>7</sup> de su cartera o su asignación de activos, o bien con propósitos de cobertura.

Los futuros son a veces más líquidos que los bonos de caja, implican pagos iniciales bajos (sólo, el margen inicial), y la compra/venta es muy rápida. Sin

---

<sup>7</sup> Duración: plazo al vencimiento promedio ponderado. La duración proporciona una medida de la sensibilidad a los precios: cuanto más larga la duración de la cartera, más sensible será su valor a los cambios de tasa de interés.

embargo, aunque en circunstancias ‘normales’, los mercados de derivados son frecuentemente más líquidos que el mercado al contado subyacente, dicha liquidez de los mercados de derivados se pierde más fácilmente en periodos de crisis, en parte debido a que no hay creadores de mercado en derivados (como sí puede haberlos en los activos subyacentes), y por lo tanto no es posible garantizar la liquidez.

Es relativamente raro que los contratos de futuros sean conservados hasta el vencimiento y que el activo subyacente sea entregado: generalmente, los inversores/corredores compran y venden el contrato sin desear recibir/entregar el activo subyacente. Simplemente quieren una exposición (o cobertura) durante un particular periodo. Si el contrato se conserva para la entrega, será el vendedor del contrato el que entregará el activo subyacente. En el caso de un futuro sobre bonos gubernamentales, el vendedor escoge el bono específico (de una canasta de bonos ‘entregables’<sup>8</sup>) que debe entregar. Un contrato forward OTC puede ser de cualquier tamaño, monto y periodo. Será negociado bilateralmente entre dos contrapartes y el riesgo de crédito subsistirá en las propias contrapartes.

#### **a) Contratos sobre divisas**

“Un contrato para el intercambio de una moneda por otra, a un tipo convenido, para una liquidación en fecha especificada en el futuro.”

Los contratos forwards de divisas son a menudo los primeros derivados que se negocian en un mercado emergente, puesto que suele ser el mercado de divisas

---

<sup>8</sup> Entiéndase “Canasta de Bonos Entregables” como el grupo de títulos disponibles para entregar en el momento del cumplimiento del futuro; la idea de tener una canasta de bonos, es que el vendedor del futuro tenga la opción de entregar uno de los bonos pertenecientes a la canasta de bonos entregables, normalmente el que mas le favorece.

el que se desarrolla en primer lugar<sup>9</sup>. En algunos casos, los controles de capital significan que existen problemas, particularmente para los no residentes, para que se les entregue o para entregar la moneda subyacente. A veces, los mercados de divisas negociarían “contratos forward sin entrega” (NDFs), para permitir a los no residentes aceptar exposiciones o bien tomar cobertura frente a la moneda en cuestión, aunque liquidarán el contrato en otra moneda, por ejemplo, el dólar de Estados Unidos. El banco o la entidad que negocie con los NDFs, sin embargo, no pueden siempre cubrir fácilmente su propia posición neta en el mercado al contado. Esto tiende a significar que los diferenciales son relativamente amplios, y la fijación de precio puede reflejar una demanda y oferta localizadas, más bien que una buena variable sustitutiva para el mercado interno. Los tipos de cambio futuros se basan en el tipo de cambio al contado, así como en el diferencial de la tasa de interés entre los dos países en cuestión.

#### **b) Contratos sobre tasas de interés**

Un contrato de futuro sobre tasas de interés es simplemente un contrato de cobertura sobre un activo cuyo precio depende únicamente del nivel de las tasas de interés. La importancia de este tipo de contratos radica que en la actualidad, el volumen total de operación de los contratos de futuros sobre instrumentos financieros representa más de la mitad del volumen de toda esta industria.<sup>10</sup>

El propósito de este mercado es que los participantes cuenten con un mecanismo que les permita fijar de manera anticipada las tasas de interés reales y cubrirse ante la volatilidad de éstas a causa de la inflación.

---

<sup>9</sup> Centre for Central Banking Studies Bank of England. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

<sup>10</sup> Centre for Central Banking Studies Bank of England. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

Con un futuro sobre tasa de interés el vendedor del mismo, se compromete a entregar una cierta cantidad de títulos de deuda que tengan un periodo de vigencia, a un precio pactado al momento de entrar en el futuro, en una fecha futura (al vencimiento del contrato); el comprador se compromete a recibir los títulos y pagar el precio pactado. Las ganancias de ambos al vencimiento, surgen porque existe una diferencia en tasas de interés entre la pactada y la que existe en el mercado cuando vence el contrato.

### **1.2.2. OPCIONES**

Un contrato de opciones confiere al tenedor el derecho, aunque no la obligación, de llevar a cabo una transacción en fecha futura a un precio predeterminado<sup>11</sup>. Las opciones pueden ser o bien puts (de venta) o calls (de compra).

Un put da al tenedor de la opción el derecho de vender el ítem subyacente a un precio especificado, y un call le da derecho de comprar el ítem. Como el contrato es asimétrico (el vendedor de la opción, está obligado a completar la transacción si el tenedor así elige, pero no viceversa), el escritor (vendedor) recibirá siempre una prima (mientras que en los contratos a plazo, aquél es simétrico y no se paga prima. Esto significa que un banco puede suscribir opciones, a fin de generar “comisiones”/ flujos de efectivo, en la creencia de que el ingreso compensará con creces, en promedio, cualquier pérdida futura. Por contraste, los contratos forwards/futuros permiten al banco tomar una posición, pero no generan flujo de efectivo.

Los contratos de opciones pueden ser o bien objeto de compraventa en bolsa u OTC. Las opciones negociadas en bolsa se relacionan con los contratos de futuros

---

<sup>11</sup> Centre for Central Banking Studies Bank of England. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

(negociadas en bolsa), las opciones OTC se relacionan directamente con el ítem financiero subyacente.

Las opciones call sobre algunos activos (acciones y productos básicos) poseen, en teoría, ilimitado potencial de beneficios nocionales, puesto que no existe límite a los incrementos de precio, aunque, claro está, existe un esperado beneficio probable máximo. Si el inversionista tiene una opción call para comprar petróleo crudo o acciones de Microsoft, a un precio dado, es posible que acontecimientos inesperados (como problemas políticos en el Medio Oriente, o un descubrimiento tecnológico) pudieran dar por resultado incrementos muy elevados en el valor de los activos implicados.

Existe un beneficio máximo para todas las opciones put, puesto que los valores de activos no pueden tornarse negativos. Una opción put para vender petróleo crudo a 15 dólares de Estados Unidos el barril, no puede valer más de 15 dólares de Estados Unidos (incluso si el petróleo pudiese ser obtenido gratis, no podría ser vendido más que a 15 dólares de Estados Unidos el barril); en tanto que una opción call para comprar petróleo crudo a un precio de ejercicio de 15 dólares de Estados Unidos el barril podría valer mucho más, por ejemplo, si los precios de contado se elevaran a 50 dólares de Estados Unidos el barril, en cuyo caso la opción valdría alrededor de 35 dólares de Estados Unidos.

La pérdida potencial para un comprador de opciones se limita a la prima pagada; pero la pérdida potencial para el vendedor puede ser mayor (aunque limitada al precio del activo subyacente).

#### **a) Precio de ejercicio**

El precio de ejercicio (o precio strike) es el precio pre-especificado al que se toma la posición del activo subyacente, si la opción es ejercida: una “posición larga” en

el caso de ejercer una opción call, o bien una posición corta en el caso de una opción put. El valor intrínseco de la opción es la diferencia entre el contrato de futuros subyacente (o el ítem subyacente, en el caso de la opción OTC) y el precio de ejercicio. Una opción no puede tener un valor intrínseco negativo. El valor intrínseco es una medida de la cantidad en que la opción está “en el dinero” (in-the-money).

A la par (at the money): una opción “está a la par” si el precio de ejercicio de una opción es el mismo que el del precio al contado (precio de mercado), de modo que el ejercicio del contrato no implica una ganancia o una pérdida para el tenedor de la opción. (Esto no incluye la ganancia/ pérdida causada por la prima pagada, dado que ésta es un costo irre recuperable.)

En el dinero (in-the-money): para una opción call, si el precio de ejercicio es más bajo que el del subyacente, entonces se dice que el contrato está en el dinero; en otras palabras, está implicado un beneficio para el tenedor de la opción, dado que podrá comprar el ítem subyacente por un precio más bajo que el que está en curso en el mercado al contado. Para una opción put, si el precio de ejercicio está por arriba del que tiene el subyacente, la opción está también en el dinero, dado que el tenedor puede vender el ítem subyacente por más que en el mercado al contado.<sup>12</sup>

Fuera del dinero o fuera de cotización (out-the-money): para una opción call, si el precio de ejercicio es más elevado que el subyacente, ello implicará una pérdida para el tenedor de la opción en caso de ser ejercida (es decir, sin valor intrínseco); en otras palabras, en caso de ejercer la opción, el tenedor tendría que comprar el ítem subyacente a un precio superior al disponible en el mercado de contado. En ese caso, el tenedor se limitaría a dejar que la opción expirase sin valor alguno, y

---

<sup>12</sup> Centre for Central Banking Studies Bank of England. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

el costo sería la prima de opción que se pagó en primer lugar. Para una opción put, un precio de ejercicio inferior al subyacente significa que el put quedaría “fuera del dinero”.

Lo anterior no significa que una opción fuera del dinero necesariamente representa una pérdida para su tenedor. Puede conservar todavía algún valor como cobertura. Aún en el caso de que expire sin valor alguno, el tenedor se seguirá beneficiando de la cobertura que proporcionará durante su periodo de vida, lo que puede haber facilitado la gestión de la tesorería o aun reducido los costos de capital (puesto que los reguladores de las instituciones financieras típicamente requieren una tenencia de capital menor para mantener una cartera bien cubierta).

#### **b) Tipos de opciones**

Las opciones pueden dividirse también en estilo americano (estadounidense) o europeo. Esta denominación no se refiere al lugar de las operaciones, sino al periodo en que la opción puede ser ejercida.

Las opciones estilo *europeo* no pueden ejercerse más que en un día específico, o sea en el último día de operaciones del periodo de vida de la opción. Por ejemplo, a fines de septiembre se puede comprar una opción estilo europeo con una fecha de expiración de fines de noviembre; la opción no podría ser ejercida más que en el último día de operaciones de noviembre. En contraste, las opciones estilo americano pueden ejercerse en cualquier momento de su periodo de vida. En el ejemplo anterior, podría ejercerse en cualquier día de operaciones desde el día en que la opción fue comprada hasta el último día de operaciones de noviembre, a elección del tenedor.

Para las opciones call, no tiene importancia si la opción es europea o americana. Las opciones tienen valor temporal, y normalmente tiene sentido para el tenedor de la opción call realizar su valor mediante la venta de la opción (por su “valor intrínseco más el valor temporal”), en vez de ejercerlo antes de que concluya su periodo de vida, dado que su ejercicio no rendirá más que su valor intrínseco. El valor temporal del dinero constituye un factor también en este caso, puesto que la opción da al tenedor derecho a comprar un activo a precio fijo en el futuro. Considérese un inversionista con 100 en efectivo y una opción para comprar un activo (títulos, divisas, etc.) por valor de 100 en cualquier momento durante los siguientes tres meses. Resultará más provechoso invertir el efectivo durante tres meses y luego pagar 100 por el activo, que ejercer la opción hoy día y perder tres meses de ingreso por intereses.

El valor temporal del dinero constituye un factor aquí. Si el inversor puede ejercer una opción put hoy día e invertir el efectivo recibido por la venta del activo implicado, en vez de esperar tres meses para vender el activo al mismo precio, obtendrá un ingreso por intereses durante el período y se encontrará en mejor situación. Esto significa que las opciones put estilo americano tienen una ventaja sobre las de estilo europeo, y en consecuencia tendrán mayor valor.

### **1.2.3. SWAPS<sup>13</sup>**

Un swap es un contrato de derivado financiero de la familia de los contratos forward, en el que dos contrapartes convienen en intercambiar flujos de efectivo determinados con referencia a los precios de, digamos, monedas o tasas de interés, de acuerdo con reglas predeterminadas. Un “swap” puede estar

---

<sup>13</sup> Swap en su traducción al español, significa “Intercambiar”.

relacionado con las tasas de interés, tipos de divisas, acciones, productos básicos o, más recientemente, riesgo de crédito.<sup>14</sup>

Las dos clases más comunes de swap son los swaps de tasas de interés y los swaps de divisas. El primero típicamente intercambia un pago de tasa flotante por un pago de tasa fija; el segundo intercambia la moneda A por la moneda B. Es posible también usar los swaps para cambiar la frecuencia u oportunidad de los pagos, aun si el tipo de interés o de moneda sigue siendo el mismo. Los swaps pueden cambiar, o bien el pasivo neto o el activo neto, por lo que a veces se hace referencia a ellos como “swap de activo” o “swap de pasivo”. La estructura es la misma en ambos casos; la motivación que se encuentra tras el swap es la que le da ese nombre.

Esencialmente, el mercado de swap proporciona un medio para convertir el flujo de efectivo, al cambiar la cantidad de pagos y/o el tipo, frecuencia o moneda. Los swaps son usados por los inversionistas para casar más estrechamente sus activos/pasivos (que pueden cambiar en el tiempo); por los corredores, con objeto de explotar las oportunidades de arbitraje; para cubrir las exposiciones; para sacar ventaja de las mejores calificaciones crediticias en diferentes mercados; para especular y con el fin de crear ciertos productos sintéticos.

De esa manera, si una compañía británica desea tomar prestado en marcos alemanes (Deutschemarks), no necesita emitir un título denominado en esa moneda. Puede que le resulte más barato emitir en, digamos, esterlinas (mercado en el que su nombre es más conocido), para luego hacer un swap por Deutschemarks. El préstamo tomado por la compañía (es decir, su obligación neta) será en DM, aunque la “base de emisión” fue la esterlina. De la misma manera, un inversor podría comprar un activo a tasa fija, tal vez un título

---

<sup>14</sup> Centre for Central Banking Studies Bank of England. Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos.

gubernamental, y hacer un swap por un activo a tasa flotante, si deseara cambiar la clase de corrientes de ingreso.

El mercado en swaps ha crecido durante los últimos años por varias razones. La desregulación global ha significado el acceso a nuevos mercados y una mayor diversidad de elecciones para los inversores y prestatarios; la innovación financiera ha permitido que se desarrollen productos más avanzados, con lo cual se equiparan las necesidades de prestatario e inversionista más estrechamente; el interés aportado por los corredores ha contribuido a incrementar la liquidez; y la atracción de su naturaleza de partida fuera de la hoja de balance, que puede liberar capital para ser usado en otro lugar. Los supervisores bancarios, claro está, se fijarán como objetivo tomar en cuenta los riesgos implicados en los swaps, no obstante estar fuera de la hoja de balance.

En algunas economías en desarrollo y en transición, el mercado de futuros es significativamente mayor que el mercado de swaps (o sea, lo opuesto al caso de los mercados desarrollados). La razón de esto puede residir en que los futuros, siendo negociaciones en bolsa, probablemente tendrán un riesgo de contraparte estándar y un mecanismo de marginación, lo que contribuye a la protección contra las incertidumbres mayores del riesgo de contraparte.

### **1.3. ARREGLOS INSTITUCIONALES**

#### **a) Cámaras de compensación**

Con el fin de atenuar el riesgo de contraparte en los derivados negociados en bolsa, la cámara de compensación típicamente es interpuesta entre los corredores. Si un corredor que pertenece a la firma “A” vende un contrato a un corredor que pertenece la firma “B”, entonces al final del día de operaciones, la cámara de compensación se interpondrá entre los dos, comprando (para futura

liquidación) de “A” y vendiendo (para futura liquidación) a “B”. Mientras la cámara de compensación sea confiable, ni “A” ni “B” tienen por qué preocuparse del riesgo de crédito. Sin embargo, la cámara de compensación tiene que protegerse contra el riesgo de crédito tanto de “A” como de “B”. Si los precios se elevan y “A” cae en incumplimiento, la cámara de compensación tendrá, de todos modos, que vender a “B” al precio más bajo preconvenido; y viceversa, si los precios declinan y “B” cae en incumplimiento.

La cámara de compensación se protege mediante la aplicación de márgenes (garantías). La bolsa o la cámara de compensación se reservarán un margen inicial al comienzo de los contratos, y demandará un margen de variación cada día. Las contrapartes obtendrán ganancias o pérdidas en los contratos sobre una base diaria de “valoración a precios de mercado”.

La cámara de compensación no sólo tiene la responsabilidad de controlar el riesgo de crédito (es decir, para asegurar que el sistema de marginación se aplica correctamente), sino también para la administración de los contratos al cierre y para los procedimientos de entrega.

### **b) Prácticas en la aplicación de márgenes (garantías)**

El margen o depósito de garantía se toma para protegerse contra la exposición de contraparte. Se usa regularmente en operaciones repo<sup>15</sup>, y por las bolsas de derivados. El margen inicial es tomado por la cámara de compensación al comienzo del acuerdo, para protegerse contra repentinos cambios de precio o futuras fallas en el suministro (diario) de margen de variación. El margen de

---

<sup>15</sup> Una operaciones repo son operaciones bursátiles especializadas que consisten en la compra y venta de títulos valores, donde el comprador adquiere la obligación de transferir nuevamente al vendedor inicial la propiedad de los títulos negociados (acciones, bonos, CDT, etc.) en un plazo y condiciones fijadas con anterioridad (no superior a 90 días), tal como consta en la fecha de cumplimiento de la factura. Son utilizadas para superar deficiencias financieras de corto plazo.

variación se toma sobre una base diaria y está relacionado con el movimiento en el precio diario del contrato.

La aplicación de márgenes en las bolsas de derivados tiene la misma función básica que con el repo, pero se diferencia en algunos importantes aspectos. Primero, el margen es pagado tanto por el vendedor como el comprador de contratos de futuros o de opciones, puesto que su objeto es proteger a la cámara de compensación, que se halla entre ambas partes. Segundo, el pago del margen de variación es diferente del margen de variación repo, dado que no es como una “garantía” que se devuelve al final del periodo si el “préstamo” es rembolsado; más bien, las posiciones de los corredores (generalmente su posición global en todas las bolsas servidas por la cámara de compensación relevante) son valoradas a precio de mercado diariamente, con el pago de las pérdidas y el retiro de las ganancias sobre una base diaria. Así, en un día cualquiera, incluido el día de liquidación para los contratos liquidados en efectivo, los corredores pagan/reciben los beneficios netos que arrojan los movimientos de precio de ese día. Este flujo de efectivo diario minimiza la exposición de la cámara de compensación a los corredores, y como sitúa a la cámara de compensación en una posición fuerte, la exposición de los corredores a la cámara de compensación no constituye un gran riesgo. La aplicación de márgenes está siendo usada cada vez más en los mercados OTC.

## **2. ESTRUCTURA PLAZOS DE TASAS DE INTERÉS**

La estructura temporal de las tasas de interés (ETTI) analiza la relación entre el tiempo que resta hasta el vencimiento de las diversas obligaciones o títulos (su

amortización), y sus rendimientos durante dicho plazo siempre que todos ellos tengan el mismo grado de riesgo (también se la denomina curva de rendimientos).

El rendimiento hasta el vencimiento se define como la tasa anual media de retorno que un inversor en títulos recibiría si los mantuviese en su poder hasta su vencimiento, y siempre que recibiese todos los pagos que le fueron prometidos en el momento de emitir dichos títulos. El tiempo que resta hasta el vencimiento es el número de años existentes hasta que se realice el último pago prometido.

La ETTI más famosa es la formada por los activos financieros emitidos por el Estado debido a que: a) carecen de riesgo de insolvencia y b) al ser el mercado de dichos títulos el más activo de cualquier país suele carecer de problemas de iliquidez.

Como ya hemos señalado, cuando hablemos de la ETTI nos referiremos a títulos que tengan el mismo, o parecido, nivel de riesgo (de impago) y un grado semejante de exposición fiscal. Gráficamente, se representa mediante una sucesión de puntos en el tiempo; cada punto muestra el rendimiento hasta su vencimiento y el plazo de tiempo hasta el mismo. La línea curva alisada que une todos esos puntos es la representación gráfica de la estructura temporal de los tipos de interés. Por ejemplo, en la figura 3 se muestra una estructura temporal ascendente, es decir, que los rendimientos a corto plazo son menores que los del largo plazo.

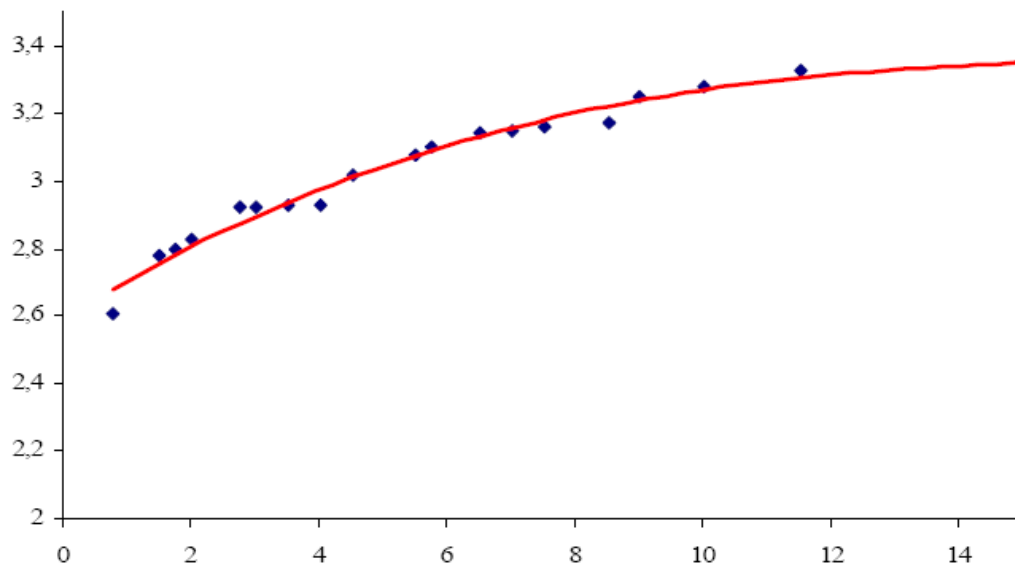


Gráfico 1. Ejemplo de la estructura temporal de los tipos de interés

## 2.1. TASAS DE INTERÉS AL CONTADO Y A PLAZO

Se denomina tipo de interés al contado (o tipo spot) a la tasa de descuento, o rendimiento requerido por el inversor, en el momento actual. Por ejemplo, una Letra del Tesoro emitida hoy mismo que prometa un 3,59% de rendimiento, mostrará el rendimiento que proporcionará a su propietario durante el próximo año, el cual sería el valor del tipo de interés al contado para un año de plazo.

Un tipo de descuento para un período de tiempo futuro se denomina tipo a plazo (o tipo forward). Ejemplo: un tesorero que supiera que dentro de un año su empresa va a tener un exceso de liquidez de 100 millones de pesos que no va a necesitar durante otro año a partir de esa fecha. Él podría invertir dicha cantidad, en el momento de disponer de ella, en títulos del Estado a un año de plazo, por lo tanto estaría muy interesado en saber cuál debería ser el tipo de rendimiento de los mismos dentro de un año. Este tipo de interés puede obtenerlo de una forma

implícita a través de la teoría de las expectativas del mercado o de una forma explícita a través del mercado de futuros financieros.

Previamente al cálculo del tipo de interés a plazo implícito, será necesario construir la denominada curva de rendimientos cupón-cero (curva spot) que nos proporcionará los tipos de interés al contado necesarios para obtener posteriormente los tipos a plazo implícitos.

### **3. METODOLOGÍA ACTUAL DE VALORACIÓN TEÓRICA DE FUTUROS SOBRE BONO NOCIONAL (Canasta de Entregables)<sup>16</sup>**

#### **✓ Entradas de la Metodología**

#### **Canasta de Entregables y Factor de Conversión**

La canasta de entregables se convierte en una de las entradas determinantes en el proceso de valoración de los futuros sobre bono nocial. La canasta de

---

<sup>16</sup> Fuente: Bolsa de Valores de Colombia - INFOVAL

entregables debe estar definida por cada bono notional que se genere (cada uno de los contratos creados para negociarse). La información requerida en la valoración debe contener el conjunto de títulos que sirve como entregables con su respectivo factor de conversión para cada contrato. El vencimiento del entregable, su tasa de cupón (valor del flujo periódico que otorga el título en su vida), su factor de conversión y su precio sucio (Precio Sucio: Precio que tiene en cuenta los flujos otorgados por los pagos de cupones), es información que debe estar disponible para la valoración. Esta información es tomada de INFOVAL (Sistema de Información para Valoración). La definición de la canasta de bonos entregables con su respectivo factor de conversión debe ser calculada el día en que se defina el bono notional.

### **Precios Sucios de los Títulos de la Canasta de Entregables**

Teniendo definidos los títulos que conforman la canasta de entregables del bono notional sobre el cual está diseñado el contrato, se debe tener en cuenta los precios sucios de dichos títulos para el día de valoración. Dichos precios resultan de la ejecución de la valoración de renta fija en el sistema transaccional. Esta información es obtenida de INFOVAL.

### **Tasa de Interés en Pesos Continua**

La tasa de interés en pesos que se debe tomar es la Curva Cero Cupón (Tasa Spot), teniendo en cuenta que se debe convertir a tasa continua por medio de la siguiente fórmula (1):

$$rc = 1 + \ln(r \text{ Discreta}) \quad (1)$$

*Donde:*

**rc:** Tasa de Interés en Pesos Continua

## r **Discreta:**Tasa de Interés en Pesos Discreta

### ✓ **Aplicación de la Metodología**

Los pasos generales para la aplicación de la metodología, se pueden resumir en:

- El cálculo de un precio forward para cada uno de los bonos que componen la canasta de entregables.
- El cálculo del precio futuro estimado de los bonos de la canasta de entregables
- La identificación del menor precio del futuro estimado (**Cheapest to Delivery o Mas barato a entregar**).

De esta información, es necesario identificar si entre la fecha de valoración y la fecha de vencimiento existen cupones intermedios de los bonos que componen la canasta, ya que esto determina en gran parte el valor obtenido para el posterior cálculo del Cheapest to Delivery.

Como se dijo anteriormente, como paso inicial es necesario calcular el precio forward de todos los bonos que participan en la canasta de entregables. La forma de calcular el precio forward de los entregables es encontrando el valor presente de los cupones intermedios (de existir) entre la fecha de valoración y el vencimiento del contrato, por medio de la siguiente fórmula(2):

$$I = \sum_{i < T} ce^{-r_c i} \quad (2)$$

Donde:

$c$ : Es el Cupón asociado a cada bono que se encuentra en las tablas de renta fija.

$r_c$ : Es la tasa libre de riesgo o tasa de interés en pesos continua para los días  $i$ .

$i$ : Es el número anualizado (base parámetro 365 o 360) de días entre la fecha de valoración y la fecha de pago de cupón intermedio.

De no existir cupones intermedios  $I$  es igual a cero. Una vez se tenga el valor presente del cupón intermedio, este se resta al precio del Bono y se lleva a futuro mediante la siguiente expresión (3).

$$fwd_{i,t} = (S_0 - I)e^{r_c t} \quad (3)$$

Donde:

$fwd_{i,t}$ : Es el precio forward del bono  $i$ , al vencimiento del contrato en  $t$  años

$S_0$ : Es el precio sucio del respectivo bono tomado de las tablas de renta fija.

$r_c$ : Tasa de Interés en pesos continua evaluada para los días al vencimiento del contrato.

$t$ : Días al vencimiento del contrato (base parámetro 365 o 360)

$I$ : Valor Presente de los cupones Intermedios

Cuando se tenga el precio forward de todos los bonos que componen la canasta de entregables, se hace necesario calcular el precio estimado de cada uno de los Bonos utilizando el factor de conversión, el cual permite que los precios de todos ellos, resulten financieramente equivalentes al precio pactado con el Bono Nacional. El uso del factor de conversión se hace necesario en la siguiente fórmula (4). En la que al precio forward se le resta el cupón acumulado, y el resultado se divide por el factor de conversión del respectivo bono.

$$F_{i,t} = \frac{fwd_{i,t} - c \cdot n}{FC} \quad (4)$$

Donde:

$F_{i,t}$ : Es el precio Futuro teórico del bono i, al vencimiento del contrato en t años.

$$c : \frac{\text{Cupón Asociado a cada Bono}}{365} \quad (5)$$

$fwd_{i,t}$ : Es el precio forward del bono i, al vencimiento del contrato en t años, calculado anteriormente

$FC$ : Factor de Conversión (Precio Limpio el día de vencimiento del futuro calculado con una tasa de conversión común a todos los bonos de la canasta).

$n$ : Es la proporción de días entre el pago del cupón intermedio y el vencimiento del futuro  $T$ . Su cálculo se puede realizar mediante la siguiente fórmula (6):

$$n = \frac{\text{Fecha de vencimiento} - \min(\text{Fecha de pago de cupón intermedio}, \text{fecha actual})}{365} \quad (6)$$

El menor precio de los calculados para cada bono será tomado como el Cheapest To Delivery (CTD).

$$\text{Min}(F_{1,T}, F_{2,T}, \dots, F_{h,T}) \quad (7)$$

Identificando el CTD se establece el valor del Futuro sobre Bono Ncional como el valor  $F_{i,t}$  del CTD.

✓ **Salidas de la Metodología**

La salida principal de la metodología es el precio del futuro. Básicamente, el precio del Futuro sobre el Bono Nocial corresponde al precio futuro teórico del Cheapest To Delivery.

#### **4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS**

Se denomina proceso estocástico a toda variable que evoluciona a lo largo del tiempo de forma total o parcialmente aleatoria. La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelación de sistemas que evolucionan a

lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio.

La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias. De esta manera, se puede estudiar cómo evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el número de personas que espera ante una ventanilla de un banco en un instante  $t$  de tiempo; el precio de las acciones de una empresa a lo largo de un año, etc.

La primera idea básica es identificar un proceso estocástico con una sucesión de variable aleatoria  $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  donde el subíndice indica el instante de tiempo (o espacio) correspondiente.

Esta idea inicial se puede generalizar fácilmente, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos. Así, se podrá hablar de una colección o familia de variable aleatoria  $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ , que da una idea más exacta de lo que es un proceso estocástico.

Se tenía que una variable aleatoria  $X(s)$  es una función que va desde un espacio muestral  $S$  a la recta real, de manera que a cada punto  $s \in S$  del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real.

De este modo, la probabilidad de cada suceso de  $S$  se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de  $X$  (variable aleatoria) caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal, se obtiene un proceso estocástico.

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelación de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio.

Los procesos estocásticos pueden ser clasificados en<sup>17</sup>:

- Tiempo discreto: Cuando el valor de la variable sólo puede cambiar en una serie de momentos determinados del tiempo (por ejemplo, los sorteos de la lotería tienen lugar en determinadas fechas).
- Tiempo continuo: Cuando el valor de la variable puede cambiar en cualquier momento del tiempo (la temperatura, por ejemplo).

Otra forma de clasificar a los procesos estocásticos es:

- Variable continua: La variable puede tomar cualquier valor comprendido en un rango (la temperatura, por ejemplo)
- Variable discreta: La variable sólo puede tomar determinados valores o estados discretos (los mercados financieros cotizan sus activos con unos precios que oscilan: de céntimo de euro en céntimo de euro, o en 1/8 de punto, etc.).

## **4.1. MODELOS ESTOCÁSTICOS DE TASAS DE INTERÉS**

### **4.1.1. MODELOS DE EQUILIBRIO<sup>18</sup>**

---

<sup>17</sup> MASCAREÑAS, Juan. Procesos Estocásticos. 2006

<sup>18</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003.

Estos modelos usualmente inician con hipótesis sobre variables económicas y derivan en un proceso para la tasa de corto plazo,  $r$ . La tasa de corto plazo  $r$  en un tiempo  $t$  es la tasa que se aplica a un corto periodo de tiempo infinitesimal en el momento  $t$ . En ocasiones se refieren a él como la tasa de corto plazo instantánea. En el mundo real lo que importa no es el proceso para  $r$ . Precios de bonos, precios de opciones y precios de otros derivados dependen sólo del proceso seguido para  $r$  en un mundo de riesgo neutral. El mundo de riesgo neutral que se considera es un mundo de riesgo neutral tradicional, en donde, un pequeño periodo de tiempo entre  $t$  y  $t+\delta$ <sup>19</sup>, los inversionistas ganan en promedio  $r(t)\delta t$ . El valor al tiempo  $t$  de un derivado sobre tasa de interés que provee una rentabilidad de  $f_t$  en un tiempo  $T$  es:

$$f_t = E(e^{-\int_t^T r} f_T) \quad (8)$$

Donde:

- $r$ : es el valor promedio de  $r$  en el intervalo de tiempo entre  $t$  y  $T$ .
- $E$ : denota el valor esperado en un tradicional mundo de riesgo neutral.
- $f_t$ : Rentabilidad del derivado.
- $T-t$ : Intervalo de tiempo.

Se define  $P(t,T)$  como el precio al tiempo  $t$  de un bono cero cupon que paga \$1 en el tiempo  $T$ .

$$P(t,T) = E(e^{-\int_t^T r}) \quad (9)$$

Las variables de esta fórmula son los mismos de la fórmula (8).

---

<sup>19</sup>  $\delta$  es una parte infinitesimal de tiempo.

<sup>20</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 537.

<sup>21</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 537.

Si  $R(t,T)$  es el compuesto continuo de la tasa de interés en un tiempo  $t$ , para un periodo de  $T-t$ , entonces:

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad (10)$$

De tal modo que

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (11)$$

Las variables de estas fórmula son los mismos de la fórmula (8).

La ecuación (11) permite que la estructura a plazos de la tasa de interés a cualquier tiempo dado a ser obtenida del valor de  $r$  a ese tiempo y un proceso de riesgo normal para  $r$ . Esto muestra que, una vez que se defina el proceso para  $r$ , se habrá definido todo acerca de la curva inicial cero cupón y su evolución a lo largo del tiempo.

#### Modelos de Equilibrio de un Factor

En los modelos de equilibrio de un factor, el proceso para “ $r$ ” (tasa de interés de corto plazo) implica solo una fuente de incertidumbre. Usualmente el proceso de riesgo neutral para la tasa en corto es descrita como un proceso Ito<sup>24</sup> de la forma

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (12)$$

Donde:

$m(r)$ : denota el flujo instantáneo en función de la tasa de interés de corto plazo.

$s(r)$ : desviación estándar en función de la tasa de interés de corto plazo.

<sup>22</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 538.

<sup>23</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 538.

<sup>24</sup> Un proceso Ito es un tipo de proceso estocástico generalizado donde el tipo de movimiento y volatilidad del proceso puede ser una función de la variable estocástica y el tiempo.

El flujo instantáneo,  $m$ , y la desviación estándar instantánea,  $s$ , son funciones de  $r$ , pero son independientes del tiempo. La hipótesis de un solo factor no es restrictiva como aparenta. Los modelos de un solo factor implican que todas las tasas se muevan en la misma dirección sobre cualquier intervalo corto de tiempo, pero no quiere decir que se muevan sobre un mismo monto. La forma de la curva cero cupon puede por lo tanto cambiar a medida que pasa el tiempo.

Las siguientes son ecuaciones de 3 modelos de equilibrio de un factor.

$$m(r) = \mu r, \quad s(r) = \sigma r \quad (13) \quad (\text{Rendleman and Bartter})^{25}$$

$$m(r) = a(b - r), \quad s(r) = \sigma \quad (14) \quad (\text{Vasicek})^{26}$$

$$m(r) = a(b - r), \quad s(r) = \sigma \sqrt{r} \quad (15) \quad (\text{Cox, Ingersoll y Ross})^{27}$$

### Modelo de Rendleman y Bartter<sup>28</sup>

En este modelo el proceso de riesgo neutral para  $r$  es:

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz \quad (16)$$

En donde:

$\mu$  y  $\sigma$ : son constantes.

Esto quiere decir que  $r$  sigue un movimiento geométrico Browniano<sup>29</sup>. El proceso para  $r$  es del mismo tipo que para el precio de una acción. Esto puede ser representado usando un árbol binomial similar al usado para acciones.<sup>30</sup>

### Reversión a la media<sup>31</sup>

<sup>25</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 538.

<sup>26</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 539.

<sup>27</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 542.

<sup>28</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 538.

<sup>29</sup> Ver Anexo 2.

<sup>30</sup> Ver R. Rendleman y B. Bartter. "The Pricing of Optionon Debt Securities". Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1980, 11-24.

<sup>31</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 539.

La hipótesis sobre la similitud del comportamiento entre la tasa de interés de corto plazo y el precio de las acciones, es un punto de inicio natural pero es menor que lo ideal. Una diferencia importante entre las tasas de interés y los precios de las acciones es que las tasas de interés parecen tender a un nivel medio a través del tiempo. Este fenómeno es a lo que se llama reversión a la media. Cuando  $r$  es alta, la reversión a la media tiende a causarle tener un movimiento negativo y viceversa. El modelo de Rendleman y Bartter no incorpora la reversión a la media. Existen complejos argumentos económicos a favor de la reversión a la media. Cuando las tasas están altas, la economía tiende a disminuir y existe poca demanda de fondos de los prestamistas, como resultado las tasas declinan. Y esto ocurre en forma viceversa también.

Modelo de Vasicek<sup>32</sup>

En este modelo, el proceso de riesgo neutral para “ $r$ ” (Tasa de interés de corto plazo) es:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz \quad (17)$$

En donde:

$a$ ,  $b$  y  $\sigma$ : Son constantes del proceso.<sup>33</sup>

Este modelo incorpora la reversión a la media. La tasa de corto plazo es llevada a un nivel  $b$  a una tasa  $a$ . Superpuesto a esta “llevada”, es distribuida normalmente termino estocástico  $\sigma dz$ . Vasicek muestra que la siguiente ecuación puede ser usada

<sup>32</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 539.

<sup>33</sup> Ver O. A. Vasicek. “An Equilibrium Characterization of Term Structure”, Journal of Financial Economics, 1977. 177-188

Modelo de Cox, Ingersoll y Ross<sup>34</sup>

En el modelo Vasicek la tasa de corto plazo “ $r$ ” puede ser negativa, Cox, Ingersoll y Ross propusieron un modelo alternativo en el cual la tasa es siempre no negativa<sup>35</sup>. El proceso de riesgo neutral para “ $r$ ” es:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r} dz_{36} \quad (18)$$

Este modelo tiene el mismo tratamiento de reversión a la media que el modelo Vasicek, pero la desviación estándar del cambio de la tasa de corto plazo en un corto periodo de tiempo es proporcional a  $\sqrt{r}$ . Esto quiere decir que, como la tasa de corto plazo incrementa, su desviación estándar crece.

#### 4.1.2. MODELOS DE NO ARBITRAJE<sup>37</sup>

La desventaja de los modelos de equilibrio es que no se ajustan automáticamente a la estructura de tasas de interés. Escogiendo los parámetros con criterio, ellos pueden proveer un ajuste aproximado a muchas estructuras de tasas de interés que son encontradas en la práctica. Pero el ajuste no es usualmente exacto y, en algunas ocasiones, presentan errores significativos.

Un modelo de no arbitraje es un modelo diseñado para ser exactamente consistente con la estructura de tasas de interés. La diferencia fundamental entre un modelo de equilibrio y un modelo de no arbitraje es que para un modelo de equilibrio la estructura de tasas de interés es una salida; por el contrario para un modelo de no arbitraje, la estructura de tasas de interés es una entrada.

---

<sup>34</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 542.

<sup>35</sup> Ver J. C. Cox, J. E. Ingersoll y S. A. Ross, “A Theory of Term Structure of Interest Rates”, *Econometrica*, 1985. 385 – 407.

<sup>36</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 542.

<sup>37</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 543.

En un modelo de equilibrio, el movimiento de la tasa de interés de corto plazo no está en función del tiempo. En un modelo de no arbitraje, este movimiento depende del tiempo. Esto es porque la forma inicial de la curva cero cupón gobierna la ruta promedio adoptada por la tasa de interés de corto plazo en el futuro en un modelo de no arbitraje. Si la curva cero cupón sube abruptamente a valores entre  $t_1$  y  $t_2$ ,  $r$  tiene movimientos positivos entre esos tiempos y viceversa.

### Modelo de Ho-Lee<sup>38</sup>

Ho-Lee presentan el modelo en la forma de un árbol binomial de precios de bonos con dos parámetros: la desviación estándar de corto plazo y el precio de mercado de riesgo de las tasas de interés de corto plazo. El límite en tiempo continuo del modelo es:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz \quad (19)$$

En donde:

$\sigma$ : Es la desviación estándar instantánea de la tasa de corto plazo, es constante

$\theta(t)$ : Es una función del tiempo escogida para asegurar que el modelo se ajuste a la estructura inicial de la tasa de interés.

La variable  $\theta(t)$  define la dirección promedio hacia la que  $r$  se mueve en el tiempo  $t$ . Esto es independiente del nivel de  $r$ . Es interesante, que los parámetros de Ho-Lee que conciernen al riesgo de precio de mercado son irrelevantes cuando el modelo es usado para el precio de derivados sobre tasas de interés<sup>39</sup>. Esto es análogo a que las preferencias de riesgo se vuelven irrelevantes cuando se calcula el precio de las opciones sobre acciones.

<sup>38</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 544.

<sup>39</sup> Ver T. S. Ho y S. B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance. 1986. 1011-1029.

La variable  $\theta(t)$  se puede calcular analíticamente. Esto es:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t \quad (20)$$

En donde:

$F_t(0, t)$ : Es la tasa forward instantánea para un instante t como es visto en el tiempo cero y el subíndice t denota la derivada parcial con respecto a t. como una aproximación  $\theta(t)$  igual a  $F_t(0, t)$ .

Esto quiere decir que la dirección promedio de la tasa de interés de corto plazo es aproximadamente igual a la pendiente de la curva forward instantánea.<sup>40</sup>

#### Modelo de Hull-White<sup>41</sup>

Este es un modelo de un factor, un modelo de curva de rendimientos de no arbitraje en donde la tasa de interés de corto plazo es el factor variable. El modelo asume que la tasa de interés de corto plazo esta distribuido normalmente y esta sujeto a la reversión a la media.

La ecuación diferencial estocástica que describe la forma del modelo Hull-White es:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz \quad (21)$$

En donde:

---

<sup>40</sup> Ver T. S. Ho y S. B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims", Journal of Finance. 1986. 1011-1029.

<sup>41</sup> HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. 2003. Página 546.

$\theta(r)$ : es una función del tiempo que determina la dirección promedio del movimiento de  $r$ , escogiendo este movimiento consistiendo con el movimiento de los rendimientos de la curva cero cupón.

$a$ : es la tasa de la reversión a la media.

$\sigma$ : es la desviación estándar de la tasa de corto plazo.

En la práctica, el modelo de Hull-White es calibrado escogiendo la tasa de la reversión a la media y la desviación estándar de la tasa de corto plazo, de tal forma que sean consistentes con el precio de la opción observado en el mercado.

Este modelo puede ser caracterizado como el modelo de Ho-lee con reversión a la media a una tasa  $a$ .

### Modelo de Black Derman y Toy<sup>42</sup>

Este modelo parte de cuatro hipótesis básicas:

1. Existe una única variable que determina los precios de todos los activos, que es la tasa de interés de corto plazo.
2. Las curvas de rendimientos de todos los bonos están perfectamente correlacionados, dado que se considera que es un único factor que determina la dinámica de los mismos.
3. La tasa de interés de corto plazo se distribuye como una log normal<sup>43</sup> en cualquier momento del tiempo.
4. No existen impuestos ni costos de transacción en el mercado.

Las entradas del modelo son: la curva cero cupón y la curva de volatilidades de los activos.

---

<sup>42</sup> REBONATO, Riccardo. "Interest-Rate Option Models". Segunda Edición. 1996.

<sup>43</sup> Ver Anexo 3

La implementación de este modelo se realiza a partir de la construcción de árboles binomiales que permiten que este sea consistente con la estructura temporal de tasas de interés y con la estructura temporal de volatilidades. A través de árboles binomiales es posible aproximar la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica de la tasa de interés al contado.

Para construir el árbol binomial de forma eficiente, se sigue un proceso de inducción forward que muestra que el nivel de la tasa de interés en el momento  $t$  viene dado por la expresión:

$$r(t) = U(t) \exp(\sigma(t)z(t)) \quad (22)$$

En donde:

$U(t)$ : es la mediana de la distribución log-normal<sup>44</sup> de  $r$  en el momento  $t$ .

$\sigma(t)$ : Se define como la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo.

$z(t)$ : Representa el movimiento browniano geométrico<sup>45</sup>, es decir es la parte de la ecuación (22) que define el movimiento estocástico de la tasa de interés.

Así, para ajustar el modelo a la curvas de tasa de interés y de volatilidad, o lo que es igual, para calibrar el modelo, habrá que determinar  $U(t)$  y  $\sigma(t)$ , los parámetros del modelo, para cada intervalo del árbol binomial.

Como el original modelo de Ho-Lee, este modelo se resuelve de forma algorítmica, describiendo la evolución de la estructura temporal de tasas de interés en tiempo discreto. La ecuación diferencial estocástica que describe el modelo es:

---

<sup>44</sup> Este concepto se explica en el anexo 3.

<sup>45</sup> Para la explicación de este concepto ver el anexo 2.

$$d \ln r(t) = \left[ \theta(t) - \frac{\partial \sigma(t)/\partial t}{\sigma(t)} \ln r(t) \right] dt + \sigma(t) dz \quad (23)$$

Esta representación del modelo permite entender la hipótesis implícita en el modelo.

## 4.2. SELECCIÓN DEL MODELO A UTILIZAR

En la literatura se encuentran dos grandes vertientes de modelos para la determinación de la tasa de interés (Tuckman, 1996). Los modelos de no arbitraje (Ho and Lee, 1986; Black, Derman and Toy, 1990; Hull and White, 1990; entre otros), los cuales están diseñados para replicar la estructura a plazo de las tasas de interés, y los modelos de equilibrio donde se asume un proceso que genera las tasas de interés a corto plazo que no está diseñado para ajustarse a la estructura a plazo del mercado.

De esta forma, los modelos de equilibrio difieren de su contraparte basada en no arbitraje, en esencia por lo siguiente: los primeros parten de una tasa de corto plazo para deducir una estructura a plazo de tasas de interés que incorpore una prima de riesgo en los retornos esperados. Los segundos se basan de un principio de no arbitraje expuesto en la teoría de expectativas puras según el cual todos los bonos tiene el mismo retorno esperado de corto plazo.

Dentro de los modelos de no arbitraje se encuentra el modelo Black, Derman y Toy (1990), que se enmarca dentro de los modelos de tasas de interés consistentes con la curva cero cupón. La característica principal de estos modelos es que se diseñan para ajustarse, en un momento dado y con absoluta precisión, a las tasas observadas. De ahí que, en el momento para el cual es calibrado, recoge toda la información existente en el mercado. El modelo de Black, Derman y

---

<sup>46</sup> REBONATO, Riccardo. "Interest-Rate Option Models". Segunda Edición. 1996.

Toy (1990) (a partir de ahora BDT) tiene una gran aceptación en la industria, debido, fundamentalmente, a su sencillez y fácil calibración.

El modelo BDT, por construcción, valora con total exactitud los activos de renta fija en el momento para el cual es calibrado. Conforme transcurre el tiempo y la curva cero cupón varía, el modelo deberá ser recalibrado para que se ajuste nuevamente a la curva. Esta circunstancia es la principal crítica de este tipo de modelos, la alternativa tradicional son los modelos de equilibrio. Aunque estos últimos siguen siendo la atención de investigadores, la industria utiliza los primeros para valorar activos financieros de renta fija.

Existen numerosos trabajos empíricos cuya finalidad es la de comparar la bondad de los modelos de tasas de interés relevantes de la literatura a la hora de valorar activos financieros de renta fija. Entre estos destacamos Navas(1999) cuyo estudio se centra en el mercado español, Moraleda y Pelsser(2000), en el mercado estadounidense, Bühler et al(1999), en el mercado alemán. En todos ellos se llega a la conclusión de que los modelos consistentes o de no arbitraje son los que mejor se ajustan a los precios de mercado de los activos objeto de análisis.

El modelo Black Derman y Toy, en comparación con el modelo Ho-Lee ofrece una mayor flexibilidad. En el caso de volatilidad constante, el rendimiento esperado del modelo Ho-Lee se mueve exactamente paralelo, pero el modelo BDT permite cambios mas complejos en la forma de la curva de rendimientos.

Otros beneficios de usar el modelo BDT son: es más fácil de implementar, toma menos tiempo de ejecución en el ordenador, y es más fácil de calibrar.

### 4.3. AMPLIACIÓN DEL MODELO A UTILIZAR

#### Modelo Black, Derman y Toy<sup>47</sup>

Para explicar este modelo se parte que para construir el árbol binomial de forma eficiente, se sigue un proceso de inducción forward que muestra que el nivel de la tasa de interés en el momento  $t$  viene dado por la expresión:

$$r(t) = U(t) \exp(\sigma(t)z(t)) \quad (24)$$

En donde:

$U(t)$ : es la mediana de la distribución log-normal<sup>48</sup> de  $r$  en el momento  $t$ .

$\sigma(t)$ : Se define como la volatilidad de la tasa de interés de corto plazo.

$z(t)$ : Representa el movimiento browniano geométrico<sup>49</sup>, es decir es la parte de la ecuación (24) que define el movimiento estocástico de la tasa de interés.

Así, para ajustar el modelo a la curvas de tasa de interés y de volatilidad, o lo que es igual, para calibrar el modelo, habrá que determinar  $U(t)$  y  $\sigma(t)$ , los parámetros del modelo, para cada intervalo del árbol binomial.

Cada nodo del árbol binomial que describe la dinámica de la tasa de interés al contado, se caracteriza por un par de valores  $(i, j)$  donde  $i$  hace referencia al momento del tiempo y  $j$  al estado de la naturaleza en la que se este. En el momento  $i=0$  hay un único estado posible que denotamos por  $j = 0$ . Se trata de una situación de certeza. En el momento  $i = 1$  existen dos estados posibles  $j = 1$  y

---

<sup>47</sup> GARCÍA ABADILLO, Marta, DIAZ PEREZ, Antonio. "Contrastación del Modelo de Black, Derman y Toy en el mercado Español". 2003.

<sup>48</sup> Este concepto se explica en el anexo 3.

<sup>49</sup> Para la explicación de este concepto ver el anexo 2.

$j = -1$ , que indican un movimiento al alza o a la baja de la tasa de interés, respectivamente. En el momento  $i = 2$  existen tres estados posibles  $j = -2, j = 0$  y  $j=2$ . En general, para cada momento del tiempo  $i$  existen  $i+1$  estados de la naturaleza posibles. En el momento  $N$ ,  $j$  se distribuye como una binomial con media 0 y varianza  $N$ . Así,  $j\sqrt{\Delta t}$  sigue una distribución binomial con media 0 y varianza  $t$ , de manera que conforme  $\Delta t \rightarrow 0$  el proceso binomial  $j\sqrt{\Delta t}$  converge a un movimiento browniano  $z(t)$ .

El valor de la tasa de interés en cada nodo del árbol binomial se determina a partir de la expresión:

$$r_{i,j} = U(i) \exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}) \quad (25)$$

Donde  $r_{i,j}$  es la tasa de interés correspondiente al nodo  $(i,j)$ .

Las probabilidades de que se produzca un movimiento al alza o a la baja asociadas a cada nodo son las probabilidades neutrales al riesgo iguales a 0,5.

Con el fin de determinar las funciones  $U(i)$  y  $\sigma(i)$  se utilizan los precios de estado.  $Q_{i,j}$  es el precio de estado para el momento  $i$  y el estado  $j$  y representan el valor, en el momento actual o momento 0, de un activo que paga 1 unidad monetaria si se alcanza el nodo  $(i,j)$  y 0 en cualquier otro caso. Por definición  $Q_{i,j} = 1$ . Una vez que se han determinado los precios de estado, se puede valorar cualquier activo financiero de los mismos.

En concreto, se puede expresar el precio en el momento 0 de un bono emitido al descuento, libre de riesgo de insolvencia y de liquidez, con valor nominal igual a una unidad monetaria y con vencimiento en  $(i+1)\Delta t$  en función de los precios de estado en la forma siguiente:

$$P(i+1) = \sum_j Q_{i+1,j} \quad (26)$$

Por otro lado, el factor de descuento asociado al nodo  $(i,j)$ ,  $d(i,j)$ , representa el valor emitido en el momento de tiempo  $i$  de una unidad monetaria con vencimiento en el momento  $i+1$  si se da el estado de la naturaleza  $j$

$$d_{i,j} = \frac{1}{1 + r_{i,j}\Delta t} \quad (27)$$

Con todo lo anterior, en el procedimiento de inducción forward y la valoración neutral al riesgo permiten determinar el árbol de precios de estado basándose en la expresión

$$Q_{i,j} = 0,5Q_{i-1,j-1}d_{i-1,j-1} + 0,5Q_{i-1,j+1}d_{i-1,j+1} \quad (28)$$

Para los nodos extremos del árbol de precios de estado, para los que únicamente existe una senda posible, la expresión anterior se simplifica de la forma siguiente

$$Q_{i,j} = 0,5Q_{i-1,j-1}d_{i-1,j-1} \quad (29)$$

Para los nodos que se encuentran en el nodo superior del árbol, y

$$Q_{i,j} = 0,5Q_{i-1,j+1}d_{i-1,j+1} \quad (30)$$

Para los nodos de los extremos inferiores.

Así por ejemplo, para el caso de un bono cero cupón, libre de riesgo de insolvencia y liquidez, y con vencimiento dentro de dos periodos de amplitud igual a  $\Delta t$ , tendríamos:

$$\begin{aligned}
P(2) &= (Q_{2,-2} + Q_{2,0} + Q_{2,2}) \\
&= [0,5Q_{1,-1}d_{1,-1} + (0,5Q_{1,-1}d_{1,-1} + 0,5Q_{1,1}d_{1,1}) + 0,5Q_{1,1}d_{1,1}] \\
&= Q_{1,-1}d_{1,-1} + Q_{1,1}d_{1,1} = 0,5Q_{0,0}d_{0,0}d_{1,1} = 0,5d_{0,0}(d_{1,-1} + d_{1,1}) \\
&= 0,5 \frac{1}{1 + r_{0,0}\Delta t} \left[ \frac{1}{1 + r_{1,-1}\Delta t} + \frac{1}{1 + r_{1,1}\Delta t} \right]
\end{aligned}$$

(31)

De cara a la construcción del árbol de precios de estado, se retoma la expresión que rige la dinámica de la tasa de interés a corto plazo

$$r_{t,j} = U(t) \exp(\sigma(t)j\sqrt{\Delta t}) \quad (32)$$

En el momento cero se encuentra en condiciones de certeza, es decir, se conoce la tasa de interés vigente para los distintos vencimientos. Conociendo  $r_{0,0}$  el siguiente paso consiste en extender el árbol un periodo. Si se sustituye las expresiones algunas de las expresiones antes mencionadas, obtenemos lo siguiente

$$P(t+1) = \sum_j Q_{t,j}d_{t,j} = \sum_j Q_{t,j} \frac{1}{1 + r_{t,j}\Delta t} = \sum_j Q_{t,j} \frac{1}{1 + U(t) \exp(\sigma(t)j\sqrt{\Delta t})\Delta t} \quad (33)$$

Los parámetros  $U(t)$  y  $\sigma(t)$  deben estimarse de forma simultánea. Para ello es necesario construir dos árboles de precios de estado, cada uno de los cuales permitirá determinar los valores de  $P_U(t)$  y  $P_D(t)$ , que representan una subida (U) o bajada (D) en el precio del bono respecto al periodo anterior, motivadas por un descenso o incremento en la tasa de interés.  $R_U(t)$  y  $R_D(t)$  son los correspondientes tantos de rendimiento para cada uno de los bonos calculados

como tantos de interés efectivos compuestos continuos, según la siguiente ecuación

$$R(t) = -\frac{1}{t} \ln P(t) \quad (34)$$

Así, para que el árbol de la tasa de interés se construya de forma que se ajuste perfectamente a la estructura temporal de tasas de interés (curva cero cupón) inicial y la curva de volatilidades,  $P_V(t)$  y  $P_D(t)$  deben ser consistentes con los valores conocidos de  $P(t)$  y  $\sigma_R(t)$ .

La relación entre la función conocida,  $P(t)$ , y las funciones que hay que determinar  $P_V(t)$  y  $P_D(t)$  viene dada por la ecuación de valoración libre de arbitraje, que incorpora las probabilidades neutrales al riesgo

$$\frac{1}{1 + r_{0,t} \Delta t} [0,5 P_V(t) + 0,5 P_D(t)] = P(t) \quad t = 2, \dots, N \quad (35)$$

Por tratarse de un modelo lognormal, las volatilidades de los tantos de rendimiento deben satisfacer la siguiente relación

$$\sigma_R(t) \sqrt{\Delta t} = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln P_V(t)}{\ln P_D(t)} \quad (36)$$

Despejando  $P_D(t)$  de la expresión anterior

$$P_D(t) = P_V(t) \exp(-2\sigma_R(t) \sqrt{\Delta t}) \quad (37)$$

Y sustituyendo se obtiene la relación que permite determinar las funciones de descuento, la cual presenta la siguiente forma

$$P_U(t) + P_D(t) \exp(-2\sigma_R(t)\sqrt{\Delta t}) = 2P(t)(1 + r_{0,t}\Delta t) \quad (38)$$

Con el fin de lograr que el modelo sea consistente tanto con la curva cero cupón como con la curva de volatilidades, es necesario construir dos árboles para los precios de estado, relacionados respectivamente con las funciones  $P_U(t)$  y  $P_D(t)$  a través de las siguientes expresiones

$$P_U(t) = \sum_I Q_{U,t,i} \quad (39)$$

$$P_D(t) = \sum_I Q_{D,t,i} \quad (40)$$

En donde:

$Q_{U,t,i}$ : es el valor en  $U$  de un activo que paga una unidad monetaria si se alcanza el nodo  $(i,j)$  y cero en caso contrario.

$Q_{D,t,i}$ : es el valor en  $D$  de un activo que paga una unidad monetaria si se alcanza el nodo  $(i,j)$  y cero en caso contrario.

Por definición  $Q_{U,t,i} = 1$  y  $Q_{D,t,i} = 1$ , de manera que los árboles de precios de estado se construyen mediante un procedimiento forward, para el que las expresiones básicas son las que muestran a continuación

$$Q_{U,t,j} = 0,5Q_{U,t-1,j-1}d_{t-1,j-1} + 0,5Q_{U,t-1,j+1}d_{t-1,j+1} \quad (41)$$

$$Q_{D,t,j} = 0,5Q_{D,t-1,j-1}d_{t-1,j-1} + 0,5Q_{D,t-1,j+1}d_{t-1,j+1} \quad (42)$$

Una vez que se conoce el conjunto de variables y relaciones que permiten calibrar e implementar el modelo, será necesario seguir una serie de etapas con este fin:

Primera etapa: Determinar  $P_U(t)$  y  $P_D(t)$  a partir de la expresión

$$P_D(t) = P_U(t) \exp(-2\sigma_R(t)\sqrt{\Delta t}) \quad (43)$$

Considerando que  $P_U$  es la solución de

$$P_U(t) + P_U(t) \exp(-2\sigma_R(t)\sqrt{\Delta t}) = 2P(t)(1 + r_{0,t}\Delta t) \quad (44)$$

Segunda etapa: Generar los árboles de precios de estado, sabiendo que

$$Q_{U,t,j} = 0,5Q_{U,t-1,j-1}d_{t-1,j-1} + 0,5Q_{U,t-1,j+1}d_{t-1,j+1} \quad (45)$$

$$Q_{D,t,j} = 0,5Q_{D,t-1,j-1}d_{t-1,j-1} + 0,5Q_{D,t-1,j+1}d_{t-1,j+1} \quad (46)$$

Tercera etapa: Utilizar las funciones de descuento calculadas para determinar simultáneamente los factores de calibración del modelo

$$d_{t,j} \frac{1}{1 + r_{t,j}\Delta t} = \frac{1}{1 + U(t) \exp(\sigma(t)j\sqrt{\Delta t})\Delta t} \quad (47)$$

Cuarta Etapa: Construir el árbol de la tasa de corto plazo a partir de los valores de los parámetros calculados. Además, esto permite hallar los correspondientes factores de descuento.

$$r_{t,j} = U(i) \exp(\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}) \quad (48)$$

$$d_{t,j} = \frac{1}{1 + r_{t,j}\Delta t} \quad (49)$$

## 5. CALIBRACIÓN y APLICACIÓN DEL MODELO

El proceso de calibración del modelo se entiende por el proceso que se sigue para la obtención de los parámetros que utiliza el modelo para su fin último (del modelo BDT) de obtener los posibles caminos que seguirá la tasa de interés de corto plazo a lo largo del tiempo.

### **Parámetros BDT:**

- Plazo Máximo: tiempo desde la fecha de evaluación (actual) que se quiere modelar la tasa de corto plazo (ej. 10 años, modelar la tasa de corto plazo 10 años en adelante).
- Periodo: indica cuan distante (en tiempo) se encuentran dos evoluciones consecutivas en el proceso.
- Cantidad Muestra de Volatilidad: número de observaciones de la tasa de interés sobre las cuales se realizará el cálculo de la volatilidad en una fecha específica.
- Periodo Muestra de Volatilidad: indica cuan distante (en tiempo) se encuentran dos datos de muestra de volatilidad.

Cada uno de estos se define de la siguiente manera:

### **PLAZO MAXIMO**

Dado que el alcance de este trabajo incluye la valoración de los bonos que se encuentran en la canasta de entregables para saber cual de estos es el Cheapest to Delivery (más barato para entregar) y por lo tanto el valor del futuro, se hace necesario modelar (definir el plazo máximo) lo suficiente para que se abarque la fecha de vencimiento más distante dentro de la canasta de entregables.

Ejemplo:

CANASTA DE ENTREGABLES		
NEMOTECNICO	FECHA EMISION	FECHA VTO
TFIT04180511	18/05/2007	18/05/2011
TFIT10250112	25/01/2002	25/01/2012
TFIT10260412	26/04/2002	26/04/2012
TFIT06141113	14/11/2007	14/11/2013
TFIT10120914	12/09/2004	12/09/2014

Tabla 1. Ejemplo de canasta de entregables

La fecha de evaluación es 12 de Septiembre de 2006, por lo tanto el plazo máximo que se debe escoger debe ser como mínimo 8 años para que las evoluciones de las tasas de interés de nuestro modelo puedan utilizarse para valorar el título con fecha de vencimiento 12 de Septiembre de 2014 (más lejano).

## PERIODO

Este parámetro junto con el plazo máximo descrito anteriormente indicará cuantas veces se tendrá que hacer el ajuste sobre plazos de la curva cero cupón, por lo tanto indica que tan grande será el árbol binomial.

Su valor puede variar desde días hasta meses, incluso años, pero su elección debe equilibrar dos factores: carga computacional y precisión contra los flujos.

1. Carga Computacional: cuando se escoge un periodo pequeño se generan más evoluciones de la tasa de interés en el modelo y el ajuste se vuelve mucho más tedioso, cuando se escoge un periodo largo se generan pocas evoluciones y el ajuste se facilita.

2. Precisión a los flujos: entre más pequeño sea el periodo más precisa será la asignación de un valor de tasa específico en cierta evolución para el descuento de un flujo de un título.

De estos dos factores se da más importancia al segundo y se desarrolla un algoritmo computacional para solventar la carga de operaciones necesaria debido a la escogencia de un periodo pequeño relativo al plazo máximo.

#### **CANTIDAD MUESTRA VOLATILIDAD:**

Decidir cuantas observaciones se tendrán en cuenta para el cálculo de la volatilidad de cada plazo de la curva depende de la suavización excesiva (serie histórica) que se le puede dar al estimador si se escoge una cantidad muy grande o de la estimación no representativa que se le pueden adjudicar si se escoge una pequeña cantidad.

Por lo tanto se escogió una cantidad que confirma la tendencia del estimador inmediatamente después de que este se pueda calcular (volatilidad, 2 observaciones), esto quiere decir que se escogen 3 o 4 observaciones para su cálculo.

#### **PERIODO MUESTRA VOLATILIDAD:**

Esta distancia en tiempo de las observaciones para el cálculo de la volatilidad debe ser consecuente con el periodo entre evoluciones anteriormente descrito puesto que las evoluciones periódicas en el tiempo modeladas de la tasa de interés utilizan como entrada ("Input") la volatilidad en el plazo específico.

### **5.1. ESTIMACIÓN TASAS**

Con los parámetros definidos se hace necesario diseñar y escoger un proceso de análisis numérico para el despeje y prueba de las tasas de modo que se cumplan las condiciones de no arbitraje y de distribución Log-Normal expuestas en el anexo 1.

Este proceso se hace necesario ya que el despeje de tasas en forma funcional con las volatilidades de cada plazo se hace engorroso a modo de despeje de ecuaciones (una variable dentro de otra) aumentando su complejidad a medida que se avanza en número de evoluciones. Por esto se incluye un algoritmo que converge periodo a periodo a los valores de tasas que satisfacen las condiciones del modelo.

Ejemplo<sup>50</sup>:

Para el día 14/12/2007, la curva cero cupón de deuda pública tiene los siguientes parámetros de la forma Nelson & Siegel explicada en el anexo 4:

fecha	beta0	beta1	beta2	tao
14/12/2007	9.76495	-0.920054	1.001556	1.400316

Tabla 2. Parámetros del ejemplo para estimación de tasas

Lo cual de acuerdo a la forma funcional, como resultado de 1 a 7300 días al vencimiento se tiene la siguiente curva cero cupón:

---

<sup>50</sup> Para un mejor detalle de ejemplo, ver anexo 6.

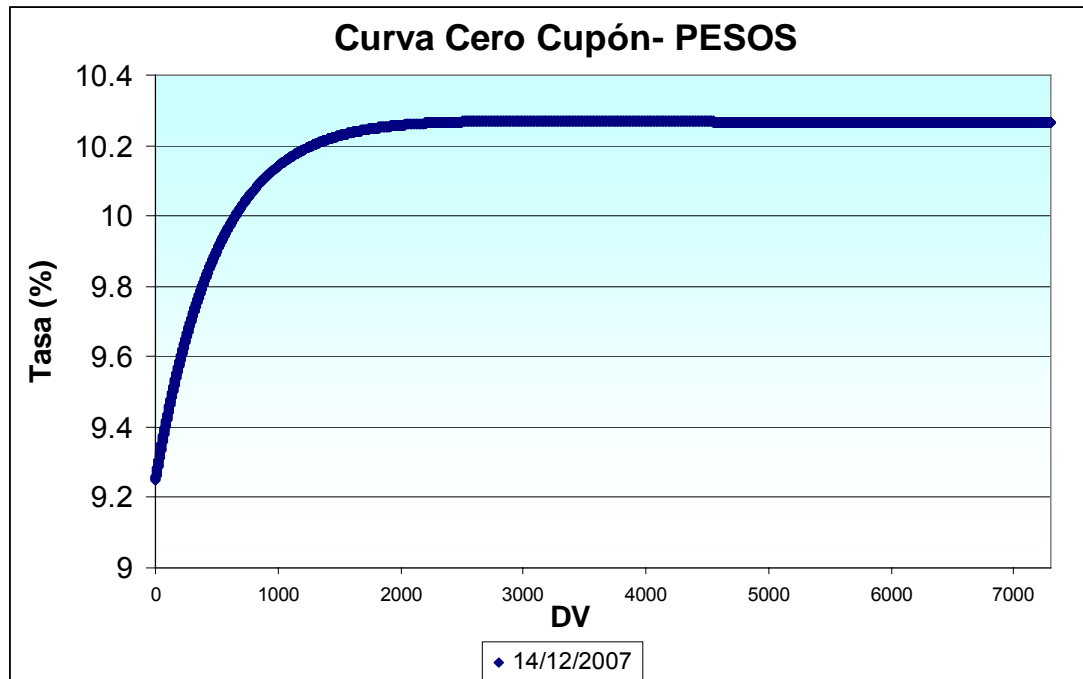


Gráfico 2. Curva cero cupón del ejemplo de estimación de tasas

Queremos modelar la tasa de interés a corto plazo (según periodo escogido, 1 mes) a un plazo máximo de 6 meses. Se tomará un periodo de volatilidad de 30 días y una cantidad de muestra de volatilidad de 3 aplicado en la siguiente fórmula:

$$\mu = \frac{\sum_{h=1}^l \text{Ln}\left(\frac{r_h}{r_{h-1}}\right)}{l} \quad (50) \text{ y } (51)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^l \left[ \text{Ln}\left(\frac{r_k}{r_{k-1}}\right) - \mu \right]^2}{l-1}}$$

Las rentabilidades y las volatilidades para los 6 plazos de la curva cero cupón del día 14/12/2007 y los precios de ajuste son:

Plazo	Rentabilidad	Volatilidad	Precio Ajuste
1	0.00744394	0.02878852	99.2611063
2	0.00748725	0.02863097	98.5192019
3	0.00752805	0.02847216	97.7751656
4	0.0075665	0.02831161	97.0297983
5	0.00760272	0.02814901	96.2838286
6	0.00763684	0.0279842	95.5379185

Tabla 3. Rentabilidades, volatilidades y precios de ajuste para los 6 plazos de la curva cero cupón del día 14/12/2007

$$r = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}, \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n\} \quad (52)$$

De acuerdo a la metodología descrita en el capítulo 3, se realizan los siguientes pasos:

1. La tasa forward a un mes dentro de 0 días (hoy) es ajustada con la tasa actual spot (cero cupón) a 1 mes; 1er nodo del árbol de tasas. Esto es, descontar un título teórico a la tasa spot debe ser igual a descontar este título con la tasa forward dentro de 0 días.

Para los siguientes periodos (evoluciones 2 a 6) se debe repetir los pasos de 2 a 5 a medida que se van encontrando los valores en cada evolución, hasta terminar de construir el árbol de tasas forward al plazo máximo que se requiere.

2. Para la siguiente evolución se prueban valores para la tasa del nodo superior e inferiores despejadas de la distribución Log-Normal como se muestra en el anexo 3. Se halla valor presente del bono teórico principal descontando a través del árbol de tasas.
3. El valor presente del bono teórico descontado a través del árbol de tasas hasta el momento construido y con los valores de tasas escogidos en 2 debe cumplir con una diferencia máxima con el valor

presente de este bono teórico principal descontado con la tasa spot leída de la curva del día de evaluación.

$$\varepsilon_{iter} = Pajuste - Pestimacion_{iter} \quad (53)$$

$$\varepsilon_{iter} < tol \quad (54)$$

Si no se cumple esta condición de error máximo permisible se vuelven a escoger valores de tasas para las mismas posiciones del árbol (pasos 2 y 3). Si se cumple la condición de tolerancia, se avanza con otra evolución en el árbol y se aplican los pasos 2 y 3 de nuevo.

Cumpliendo el plazo máximo modelado, el árbol de tasas forward está completo y se ha respetado la condición de no-arbitraje que realizado este ejercicio justifica la base de la teoría de las expectativas puras:

“Descontar una serie de flujos (n principales de igual valor, cada n es una evolución) con la tasa spot a tiempo presente es igual a descontar estos flujos a través de los periodos modelados de la tasa forward (descontar con la tasa a 1 mes hasta llegar a valor presente)”.

De igual forma se puede modelar con la herramienta diseñada para este propósito y base de la obtención de resultados de este proyecto (programada en Visual Basic por los autores) a cualquier plazo máximo que se necesite, como por ejemplo:

Plazo	Rentabilidad	Volatilidad	Vol Acum	Precios
1	<b>0.00648758</b>	0.05508093	0.05508093	99.3554239
2	0.00654786	0.05255857	0.05381975	98.7031796
3	0.00660745	0.05033885	0.05265945	98.0436742
82	0.00973307	0.03722001	0.04052637	45.1918907
83	0.00975827	0.03705536	0.04048455	44.663667
84	0.00978321	0.03688878	0.04044175	<b>44.1403413</b>

Tabla 4. Resultados obtenidos mediante la herramienta diseñada por el equipo del proyecto

Árbol de tasas construido - fracción

				0.0090332
			0.00854492	
		0.0078125		0.00817815
	0.00756836		0.00772225	
0.00695801		0.00704655		0.00740404
<b>0.00648758</b>	0.00681181		0.00697878	
0.00624795		0.00635569		0.0067032
	0.00613088		0.00630689	
		0.00573257		0.0060687
			0.00569969	
				0.00549426

Gráfico 3. Árbol de tasas construido - fracción

Árbol de Precios de la última evolución a ajustar (último periodo)-fracción

				38.2497561
			39.4079632	
		40.5849857		41.2396463
	41.7607836		42.3961485	
42.9504716		43.5687028		44.207438
<b>44.1479314</b>	44.737859		45.3552751	
45.9182176		46.5165065		47.1361611
	47.6723658		48.2690271	
		49.4127725		50.010748
			51.1230421	
				52.8181068

Gráfico 4. Árbol de Precios de la última evolución a ajustar (último periodo)-fracción

(Nótese que el cuadro celeste es el ajuste que hay entre valorar un flujo principal-100 desde 84 períodos en el futuro con la tasa de 84 meses de la curva cero cupón del día y de descontar período a período con las tasas forward a un mes contenidas en el árbol de tasas).

## 5.2. VALORACIÓN DEL FUTURO CON CANASTA DE ENTREGABLES (MODELO BDT)

Con el camino construido que seguirá la tasa de interés de corto plazo (tasa forward plazo 1 mes para este caso) a través del árbol binomial con  $n$  períodos para un día en específico, se realiza la valoración de los títulos que componen la canasta del futuro sobre TES y se obtendrá el valor del futuro como tal obteniendo el “Cheapest to Delivery”. Dado que estamos asignando hoy un valor a un activo (FUTURO) que depende del valor futuro de otros activos (bonos), hallamos el valor que tendrán dichos activos subyacentes para cuando se realice el cumplimiento del futuro. Esto es hallar el precio de valoración de los bonos descontando los flujos restantes a la fecha de cumplimiento del futuro (valor “presente” de los flujos en la fecha de vencimiento del futuro) , restarles el valor del cupón corrido y dividir esta diferencia entre el factor de conversión propio de cada bono (ver metodología actual de valoración en el capítulo 3).

Esquema de obtención de Precios a vencimiento del futuro:

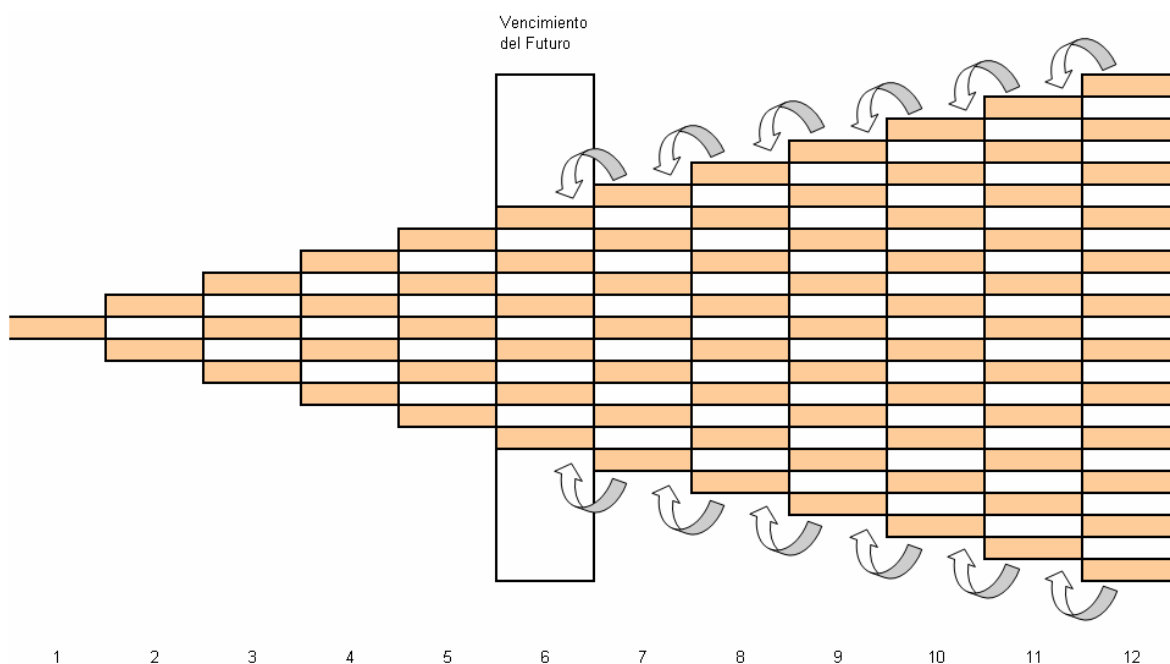


Gráfico 5. Esquema de obtención de Precios a vencimiento del futuro

De esta forma tengo  $k$  precios futuros (uno en cada nodo del árbol) de cada bono de la canasta de entregables.

En este punto aplicamos el criterio “Cheapest to Delivery” en cada nodo, esto es escoger el precio más barato de los  $m$  bonos que existan en la canasta de entregables en cada nodo del plazo del vencimiento del futuro, lo cual nos arroja  $k$  precios “Cheapest to Delivery”.

Los  $k$  precios “Cheapest to Delivery” representan el dominio de la variable “Cheapest to Delivery”(valor del futuro) en un día de valoración, esto es, los posibles valores que podrá tomar el bono más barato para entregar de acuerdo a la estructura de árbol binomial. Pero dado que necesitamos saber un solo valor para realizar la comparación con la metodología actual de valoración (ver capítulo 3) y obtener el valor de la opción implícita, es necesario aplicar el criterio de esperanza de la distribución binomial para este dominio de precios.

Sean:

$p$  = Probabilidad de aumento de la tasa en cada período.

$q = 1 - p$  = Probabilidad de descenso de la tasa en cada período.

$d$  = Número de períodos distantes del día de valoración al vencimiento del futuro (para el esquema anterior, 6).

$x_k$  = Número de aumentos de la tasa de interés de cada nodo  $k$  del plazo del vencimiento del futuro.

$k$  = Número del nodo del plazo del vencimiento del futuro (1 arriba del árbol).

Para cada  $k$ , la probabilidad que el resultado de las tasas de interés a un plazo específico sea el del nodo  $k$ , es:

$$P(k) = dCx * p^x * q^{(n-x)} \quad (55)$$

Donde:

$$dCx = \frac{d!}{(d-x)!x!} \quad (56)$$

Siguiente k

Resultado,  $P\{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$

Con los resultados de esperanza de cada uno de los nodos y los valores “Cheapest to Delivery” en cada uno de estos, se procede a hallar el **valor esperado** del “Cheapest to Delivery” (valor del futuro).

$$E(CTD) = \sum_{k=1}^n P(k) * CPT_k \quad (57)$$

De esta manera el valor del futuro en el día de valoración teniendo en cuenta el valor de la opción de entrega implícita es  $E(CTD)$ .

### 5.3. VALORACIÓN DE LA OPCIÓN DE ENTREGA IMPLÍCITA

Para obtener el valor de la opción de entrega que existe en la estructura de este futuro (futuro sobre bono notional, canasta de entregables) se tiene que hacer también la valoración con las tasas de hoy (metodología actual, ver capítulo 4) del futuro y contrastarla con la valoración obtenida con el modelo BDT, de esta forma se refleja la diferencia en precio que existe en considerar la evolución de la tasa de interés.

$$VOpcionEntrega = P_{Actual} - P_{BDT} \quad (58)$$

Se realiza esto para todos los días en que se quiera analizar dicho valor de entrega implícito.

#### 5.4. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

Para el intervalo 02/Abr/2004 – 31/Dic/2007 se calcularon los valores del futuro sobre bono nacional a 5 años (canasta de entregables entre 3 y 7 años al vencimiento), con una tasa de conversión de 9% por las dos metodologías a comparar, y se obtuvieron los siguientes resultados:

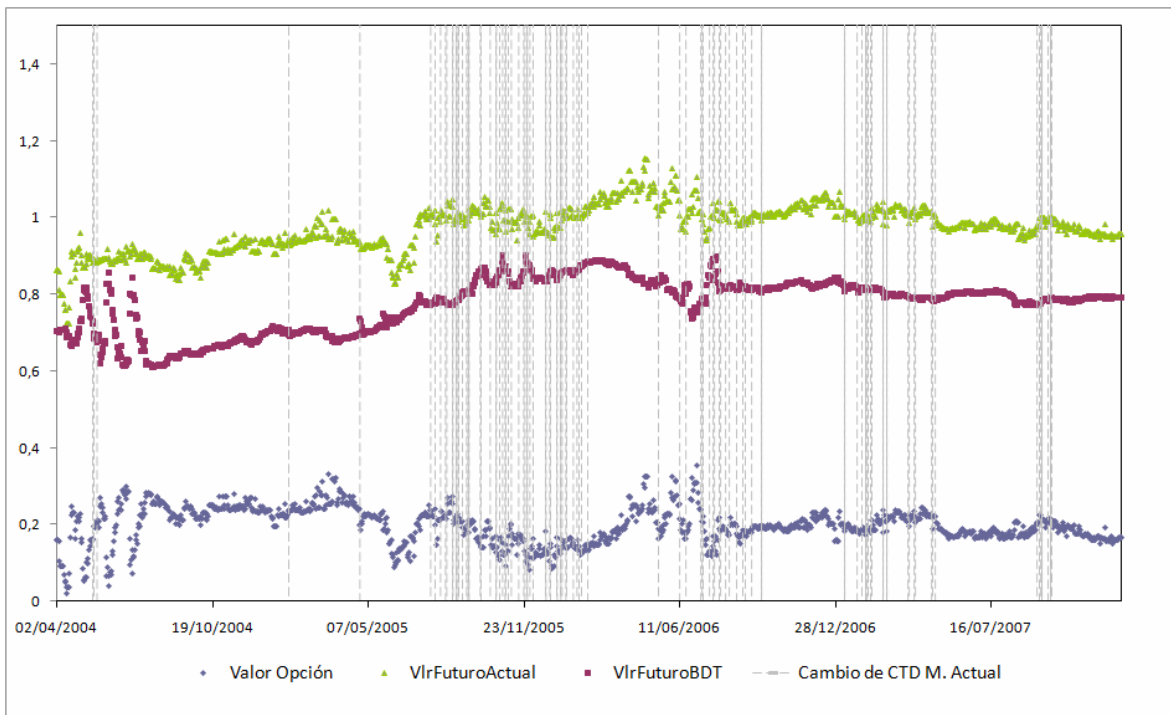


Gráfico 6. Serie de valoración del futuro con la metodología BDT

Como se aprecia, la serie de valoración del futuro con la metodología BDT se encuentra en todo momento por debajo o igual al valor del futuro con la “metodología actual” o como es similar, el valor de la opción implícita (fórmula 58)

es siempre positivo en todo momento, lo cual teóricamente es congruente puesto que la metodología BDT ofrece una optimización al menor valor posible que podrán tomar los valores futuros de los bonos sobre los niveles de tasas de las curvas llevados al ajuste de la tasa forward de corto plazo (1 mes) (ver primera parte de este capítulo y numeral 5.3).

También se observa que la serie de resultados de la metodología BDT es mucho más suave sin saltos como si se presenta en la “metodología actual” debido a que la valoración por BDT teniendo en cuenta las expectativas sobre las tasas de interés anticipando los cambios en el “Cheapest to Deliver” empalmado el valor del futuro cuando ocurren dichos cambios, lo cual no es visto con la “metodología actual” puesto que esta metodología asume la tasa de corto plazo del día como absoluta.

## **5.5. ANÁLISIS GRÁFICO**

Como ampliación a los resultados del modelo de valor de la opción de entrega implícita obtenido, se realiza un análisis gráfico de sensibilidad y optimización inherente al “Cheapest to Deliver”. Este análisis es justificado por la dinámica de las estructuras a plazo de tasas de interés a través del estudio de componentes principales.

### **Análisis de Componentes Principales (PCA)**

Con las curvas cero cupón en pesos diarias de los años 2006 y 2007, se realiza el análisis de componentes principales tomando como variables los diferentes plazos de la curva cero cupón y sus rentabilidades para los diferentes días.

## Histórico Curvas Cero Cupón PESOS

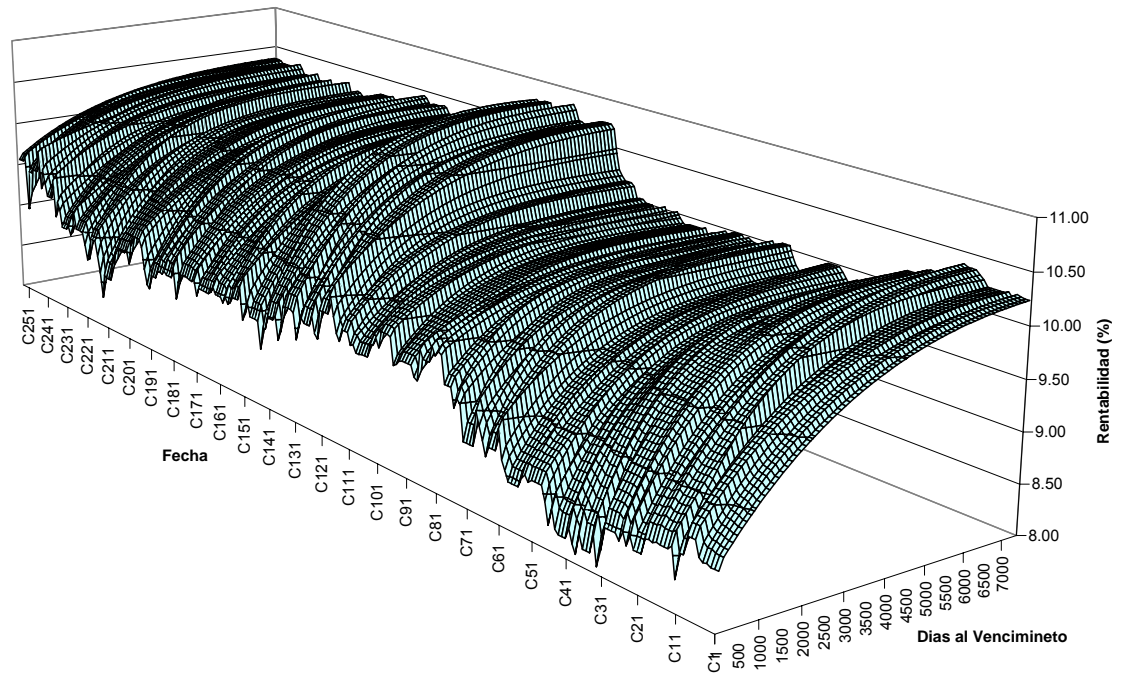


Gráfico 7. Histórico Curvas Cero Cupón PESOS

Los componentes principales son nuevas variables que abarcan en conjunto la variabilidad de igual magnitud que las variables originales pero su significado, proporción e interpretación son diferentes en cuanto a la variabilidad explicada del modelo. Es tal la aplicabilidad de esta herramienta que en finanzas el estudio de la dinámica de las estructuras a plazos de tasas de interés (en nuestro caso curvas cero cupón) es ampliamente explicado por sus resultados.

VARIABILIDAD Explicada (ACP) Curva Cero Cupón 2006-2007			
TOTAL	Comp1- Nivel	Comp2-Pendiente	Comp3-Curvatura
99,88%	91,80%	7,35%	0,73%

Días Vencimiento	Comp1- Nivel	Comp2-Pendiente	Comp3-Curvatura
DV 1	0,127336	0,699256	0,476923
DV 100	0,196951	0,480121	0,003663
DV 200	0,223425	0,292063	-0,231333
DV 300	0,232852	0,168073	-0,312431
DV 400	0,236475	0,086169	-0,318646
DV 500	0,237903	0,029648	-0,288092
DV 600	0,238401	-0,01099	-0,239239
DV 700	0,238467	-0,041171	-0,181814
DV 800	0,238319	-0,064148	-0,12136
DV 900	0,238057	-0,081982	-0,061229
DV 1000	0,237726	-0,096039	-0,003525
DV 1100	0,23735	-0,107264	0,050416
DV 1200	0,236939	-0,116334	0,099758
DV 1300	0,236499	-0,123745	0,144022
DV 1400	0,236037	-0,129875	0,182982
DV 1500	0,235556	-0,135009	0,216606
DV 1600	0,235061	-0,139369	0,245004
DV 1700	0,234557	-0,143129	0,268387
DV 1800	0,234048	-0,146424	0,287044

Tabla 5. Componentes Principales. Fuente EViews Análisis de Componentes Principales.

Como vemos gracias al estudio de PCA las curvas cero cupón se mueven casi en su totalidad por un componente de nivel y en menor proporción por los componentes pendiente y curvatura; sabemos que los componentes son de nivel, pendiente y curvatura por los coeficientes presentados en los vectores propios para los diferentes plazos de la siguiente manera:

El vector propio del primer componente observamos una variabilidad de igual magnitud en los diferentes plazos, por lo tanto es una variabilidad o movimiento de nivel. En el vector propio del segundo componente observamos una variabilidad descendiente proporcional a medida que

avanzamos en plazo, esto es empinamiento o pendiente. Por último en el tercer componente observamos una variabilidad en un sentido en los extremos de los plazos y en otro sentido la variabilidad en el centro junto con un cambio no proporcional al plazo lo cual podemos atribuir como un movimiento de curvatura.<sup>51</sup>

A partir de lo visto hasta el momento se deduce que el precio del futuro se debe mantener por debajo del precio forward debido a la opción implícita de entrega.

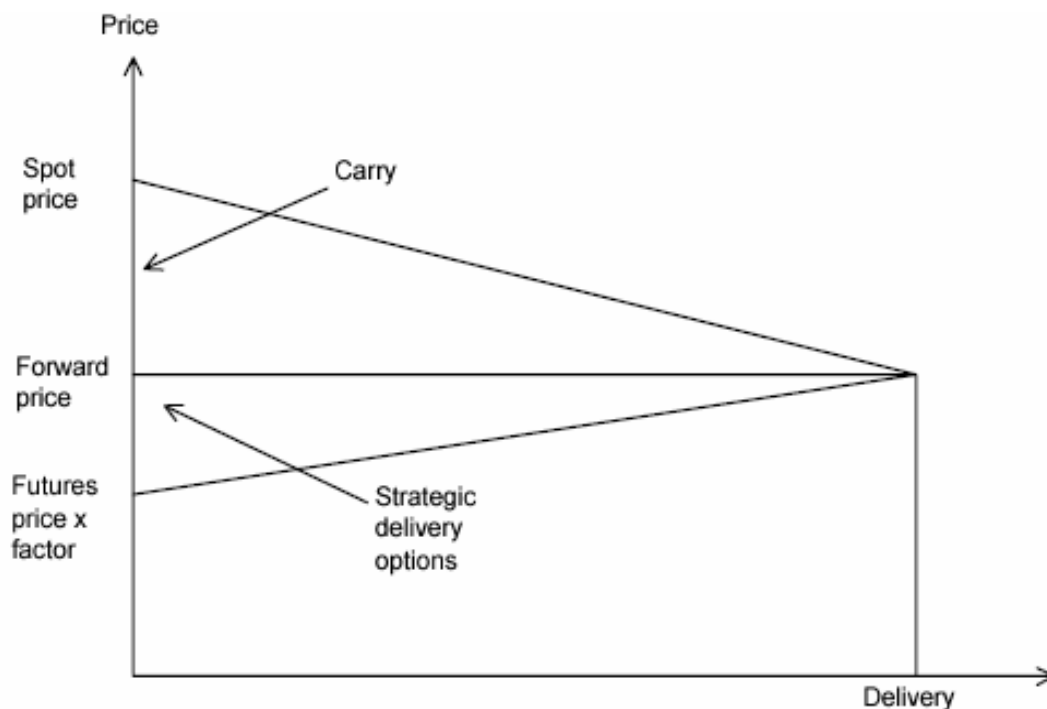


Gráfico 8. Relación Vencimiento Precios contado, futuro y forward

Es claro que cuando se analiza la relación PrecioForward/FactorConversión vs. Tasa de cada uno de los bonos en la canasta, el precio futuro por la metodología BDT se encontrará por debajo del menor precio forward ajustado por factor en

<sup>51</sup> Ver más en Anexo 5.

cada escenario de tasa. Cuando se aproxima una variación en el CTD por un desplazamiento paralelo en la curva, el valor de la opción comienza a aumentar haciendo que el precio futuro se distancie del precio forward.

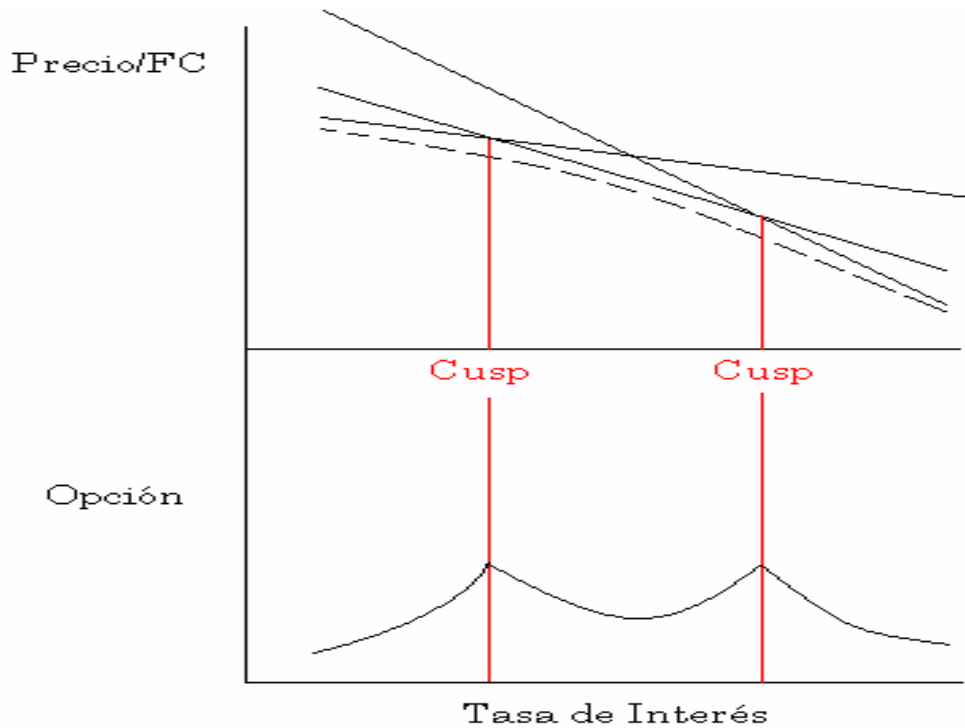


Gráfico 9. Sensibilidad del precio del bono y la opción según el cambio en la tasa de interés

Con base en las series de tiempo de tasas de interés de los bonos de la canasta de títulos entregables se establecieron tres escenarios de curva que reflejan los diferenciales de tasas en los títulos de la canasta de entregables: máximo empinamiento de la curva, curva plana, curva invertida. Los diferenciales de tasa de interés de los bonos es un elemento clave al momento de determinar el bono *chepeast to deliver* (CTD). Cada uno de los escenarios refleja un comportamiento diferente en el precio del futuro calculado por BDT y por ende en el valor de la opción implícita de entrega. A continuación se presentan los resultados.

## 1. Máximo empinamiento

La gráfica siguiente muestra los precios ajustados por factores de conversión como función de la una tasa de referencia de la curva. Cuando la curva se encuentra completamente empinada, el título de más duración (aquel con vencimiento en el 2015) es el CTD independiente del nivel general de tasas del mercado. Por tal razón, la trayectoria del precio futuro coincide *casi siempre* con el precio forward ajustado del bono. Asimismo, la opción de entrega mantiene un valor poco significativo y constante.

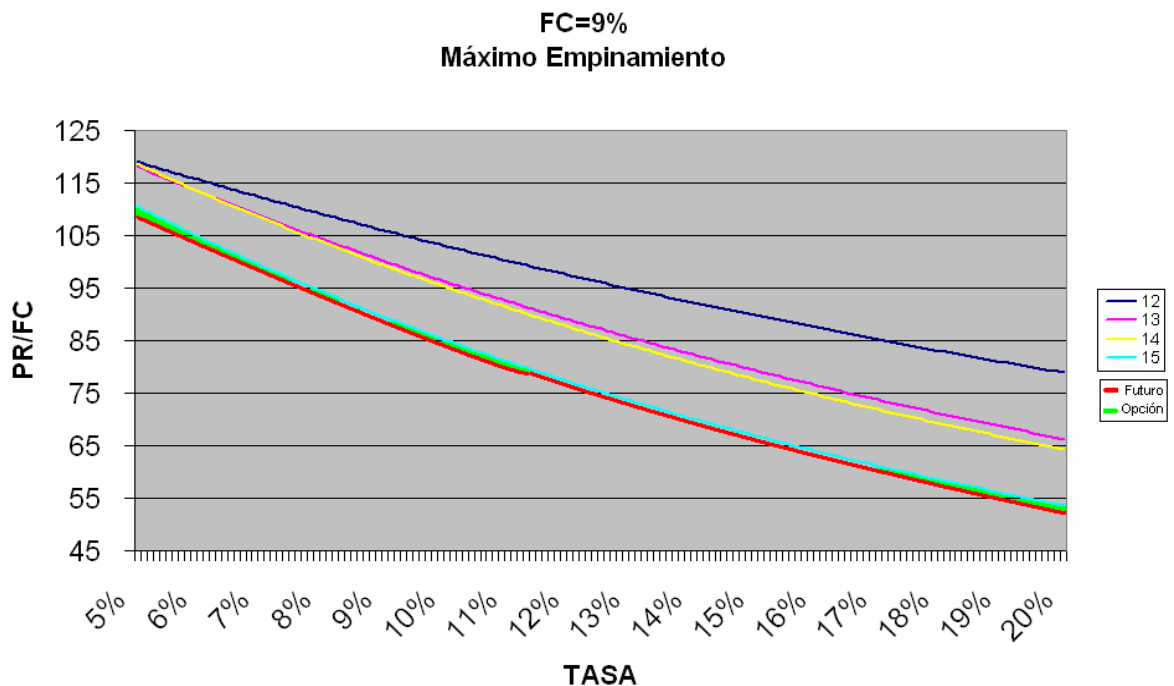


Gráfico 10. Máximo Empinamiento

## 2. Curva Plana

Asumiendo una estructura a plazo de tasas de interés plana, existe un punto en el cual el precio ajustado por factor de conversión de todos los títulos es similar. Cuando el nivel de tasas se acerca a ese punto, el valor de la opción de entrega es máximo, y el precio futuro se aleja del precio forward de bono CTD. LA gráfica a continuación evidencia esta situación.

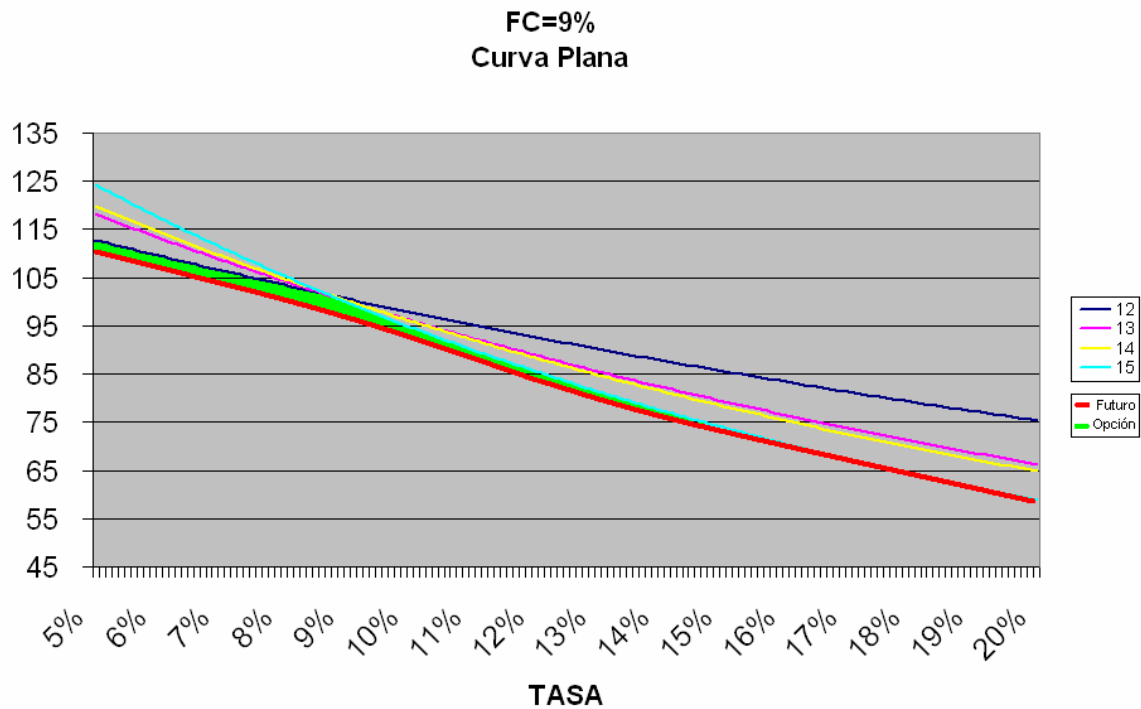


Gráfico 11. Curva Plana

## 3. Curva invertida

Cuando la curva está invertida y se desplaza paralelamente, la gráfica siguiente, muestra 2 puntos de cambio en CTD, alrededor de 9.5% y 20%. Es claro que alrededor de estos puntos, el valor de la opción es máximo y por ende, el precio futuro se aleja del precio forward ajustado.

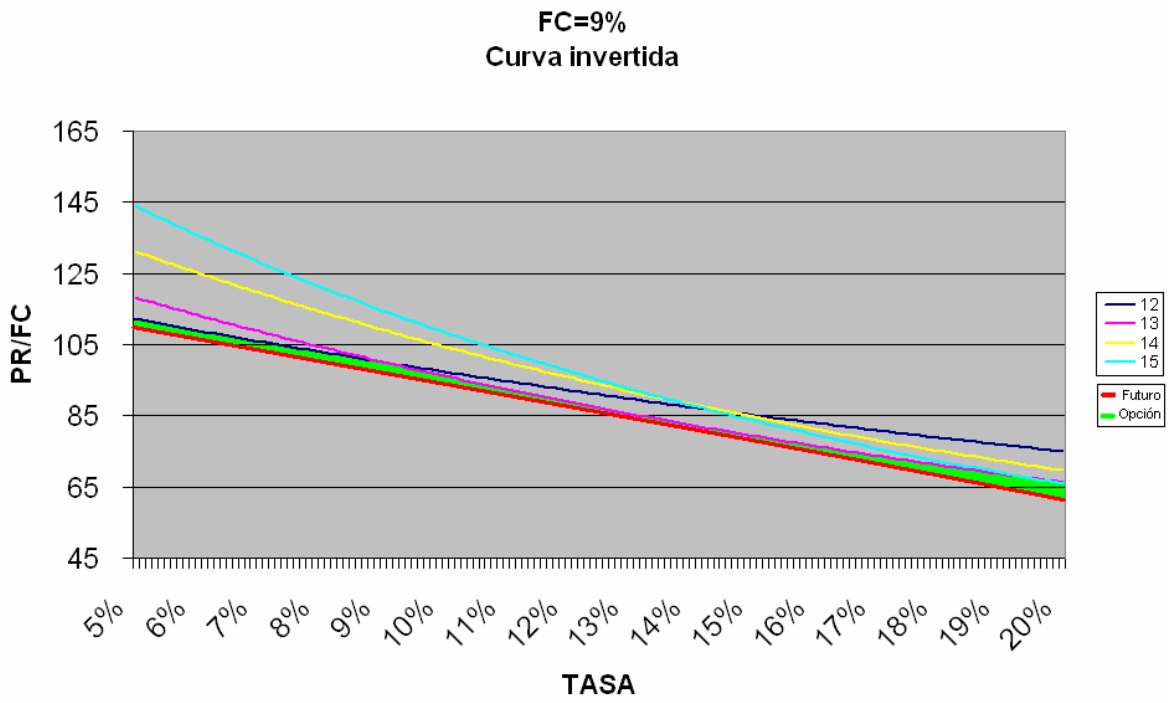


Gráfico 12. Precios Curva Invertida 1

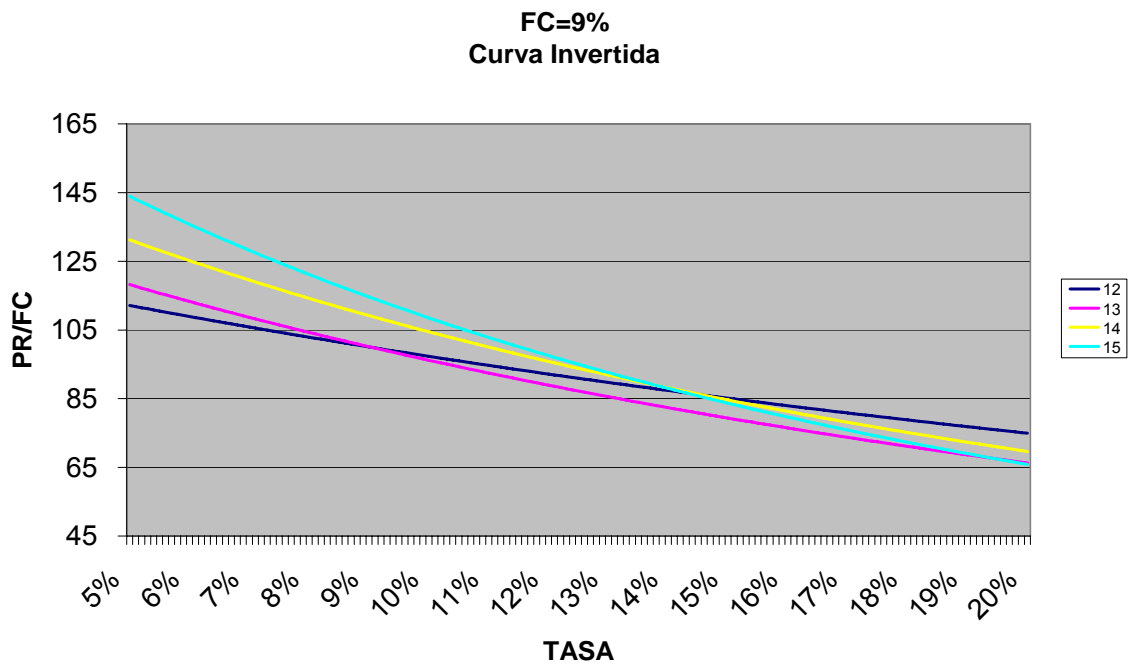


Gráfico 13. Precios Curva Invertida

## CONSIDERACIONES Y CONCLUSIONES

- Se evidenció una demora en la obtención de los datos, para solventar este inconveniente fue necesario programar de forma recursiva las funciones utilizadas dentro del programa “BDT Método de bisección” (diseñado en Visual Basic por los autores) de modo que se ahorrara tiempo de ejecución y memoria utilizada. Adicional se debió crear una salida por número máximo de iteraciones para el algoritmo del método de disección que despeja las tasas para una evolución específica, puesto que la convergencia duraba mucho en cumplir con la tolerancia requerida (250 iteraciones).
1. Gracias a la selección de un modelo parsimonioso, el número de parámetros a obtener para el modelo es pequeño y así mismo de fácil definición por su puntualidad y correspondencia con características del producto objetivo de valoración.
  2. Se confirma la noción teórica de que el precio por la metodología propuesta es menor en todo momento o igual que el precio por la metodología actual debido a que la primera realiza una optimización rigurosa tomando los posibles caminos de la tasa de interés, demostrando una alta significancia de los valores obtenidos de la opción de entrega implícita.
  3. Existe en una gran diferencia entre las series de precios de las dos metodologías puesto que la que contempla la evolución de la tasa de interés se anticipa a los cambios en el valor del futuro lo cual es reflejado en una serie de precios suavizada frente a la metodología actual que presenta saltos bruscos en todo su dominio.
  4. Los resultados del valor de la opción de entrega implícita muestran una alta variación debido al constante salto en los valores de los precios por la

metodología actual del futuro, así mismo se observa una tendencia común entre las dos metodologías corroborando la validez del modelo propuesto.

## BIBLIOGRAFIA

- REBONATO, Riccardo. Interest-Rate Option Models. Segunda Edición. Chichester, Inglaterra: John Wiley & Sons, 1996. 521p. ISBN 0-471-97958-9.
- HULL, John C. Options, Futures and Other Derivatives. Quinta Edición. Upper Saddle River, New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall, 2003. 744p. ISBN 0-13-009056-5.
- SHREVE, Steven E. Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model. Primera Edición. Pitsburg, PA, Estados Unidos: Springer Finance, 2005.183p. ISBN 0-387-22527-7.
- BINGHAM, N.H. y Kiesel, Rüdiger. Risk Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives. Segunda Edición. Pitsburg, PA, Estados Unidos: Springer Finance, 2004.437p. ISBN 1-85233-458-4.
- DUBOFSKY A., David y THOMAS W., Miller Jr. Derivatives – Valuation and Risk Management. Oxford University Press. 2003.
- BLACK, Fisher; DERMAN, Emanuel; TOY, William. A one factor model of interest rates and its application to treasury bond options. Financial Analysts Journal. 1990.

- GARCÍA ABADILLO, Marta, DIAZ PEREZ, Antonio. “Contrastación del Modelo de Black, Derman y Toy en el mercado Español”. Universidad de Castilla – La Mancha, Departamento de Economía y Empresa. 2003.
- BLACK, Fisher; DERMAN, Emanuel y TOY, William. “A One Factor Model of Interest Rates and its Application to Treasury Bond Options”. Financial Analysis Journal. 1990.
- AZORIN, F y PALACIOS, M. J. “Exposición General e Indicaciones para el uso de la Distribución Lognormal”. Departamento de Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Madrid.