MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN PARA PROBLEMAS MAL PLANTEADOS EN MODELOS DE OPTIMIZACIÓN EN PROGRAMACIÓN LINEAL

DAYSI CAROLINA PINZÓN ARIAS
YURIAN FERNANDA OLAYA PEÑA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA
2012

MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN PARA PROBLEMAS MAL PLANTEADOS EN MODELOS DE OPTIMIZACIÓN EN PROGRAMACIÓN LINEAL

DAYSI CAROLINA PINZÓN ARIAS
YURIAN FERNANDA OLAYA PEÑA

Trabajo de investigación en la modalidad "Tesis de Grado" para optar al título de Ingeniera Industrial

DIRECTOR
HENRY LAMOS DÍAZ
PH.D MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE ESTUDIOS INDUSTRIALES Y EMPRESARIALES
BUCARAMANGA
2012

DEDICATORIA

A Dios por ser mi principal fuente de inspiración y darme el privilegio de ser llamada hija suya.

A mi amado padre Octavio Olaya Martínez, mi mayor ejemplo de vida, esfuerzo y valentía. Siempre estarás presente en mi mente y en mi corazón.

A mi madre y mi hermano por ser ese gran apoyo que Dios ha puesto en mi vida para los momentos de felicidad y de dificultades.

Yurian Olaya

A Dios por darme la capacidad de soñar y hacer de este sueño de ser profesional una realidad.

A mis padres José Pinzón y Delia Arias por su amor, esfuerzo y apoyo en esta etapa de mi vida, por ser mi mejor ejemplo de unión y lucha por encima de las dificultades.

A mis hermanos Christian y Jenny por estar a mi lado siempre y compartir este logro conmigo.

Deisy Pinzón

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Henry Lamos Díaz por su confianza, paciencia y dedicación.

A Jose Manuel Angel Fresco por su valiosa colaboración a pesar de la distancia.

Al grupo de investigación OPALO y su equipo de profesores por darnos la oportunidad de ser parte de éste.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS		
OBJETIVO	**CAPITULO**	**PÁGINAS**
• Comparar las definiciones de estabilidad en problemas de programación lineal.	Capitulo 2 Sección 2.4.4	35-38
• Investigar métodos de regularización para la solución de un problema mal puesto de programación lineal.	Capitulo 3 Sección 3.1	40-46
• Evaluar los métodos de regularización que mejor se ajustan a los problemas de optimización de programación lineal.	Capitulo 4 Sección 4.4;4.5	65-107
• Implementar y validar los métodos de regularización propuestos en MATLAB.	Capitulo 4 Sección 4.4;4.5	65-107

RESUMEN

TITULO:

MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN PARA PROBLEMAS MAL PLANTEADOS EN MODELOS OPTIMIZACIÓN DE PROGRAMACIÓN LINEAL[1]

AUTORES:

DAISY CAROLINA PINZÓN ARIAS Y YURIAN FERNANDA OLAYA PEÑA[2]

PALABRAS CLAVES:

Programación lineal, métodos de regularización, optimización, método Simplex, análisis de sensibilidad, estabilidad, problema perturbado.

DESCRIPCIÓN:

La ingeniería es una ciencia que se ocupa de utilizar los conocimientos científicos, matemáticos y de las ciencias naturales con el fin de dar solución a los problemas del mundo real y mejorar la calidad de vida del ser humano. Una herramienta muy utilizada en la ingeniería para la descripción de fenómenos físicos (como sistemas, procesos, realidad) es la modelación matemática, mediante la cual, se realiza una descripción lo más cercana posible al sistema. La ingeniería también se considera como un arte, debido a que requiere de mucha creatividad para lograr modelos que se ajusten al mundo real y que por lo tanto proporcionen resultados correctos.

Es frecuente que los datos de entrada en un modelo matemático no se conozcan de manera exacta debido a la incertidumbre en las mediciones, lo que lleva a que en la mayoría de los casos se usen sólo aproximaciones o estimaciones para los parámetros. Como consecuencia, el problema puede adolecer de condiciones como la no existencia de la solución, o bien que la solución no sea única, o algo tan importante como la no dependencia continua de la solución de los datos de entrada.

El presente trabajo trata sobre los problemas mal planteados y los métodos de regularización para determinar una solución aproximada del problema.

---

[1] Proyecto de Grado

[2] Facultad de Ingenierías Fisico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales. Ph.D Henry Lamos Díaz

ABSTRACT

TITLE:

REGULARIZATION METHODS FOR ILL POSED PROBLEMS IN LINEAR PROGRAMMING OPTIMIZATION MODELS[3]

AUTHORS:

DAISY CAROLINA PINZON ARIAS AND YURIAN FERNANDA OLAYA PEÑA.[4]

KEYWORDS:

Linear Programming, Regularization Methods, Optimization, Simplex Method, Sensitivity Analysis, Stability, Perturbed Problem.

DESCRIPTION:

Engineering is a science that has the task to use scientific knowledge, mathematical and natural science in order to solve real world problems and improve the quality life of human. A widely used tool in engineering to describe physical phenomena (systems, processes, reality, etc.) is mathematical modeling whereby present a description the closer possible form a system. Also, engineering is consider an art, because it requires creativity to make models that fit the real world and therefore provide correct results.

Frequently, input data into a mathematic model are unknown exactly due to uncertainty in the measurements, which leads to that in most cases are used only approximations or estimates for the parameters. As a result, the problem may suffer from conditions such as non-existence of the solution, or the solution is not unique, or something as important as the not continue dependence of the solution to input data.

In the present work is discussed about Ill Posed Problems and Regularization Methods to determine an approximately solution of the problem.

---

[1] Graduation Project

[2] Faculty of Engineering Physique-Mechanical. School of Industrial and Business Studies. Ph.D Henry Lamos Díaz

INTRODUCCIÓN

El desarrollo actual de las ciencias naturales y sociales está estrechamente relacionado con la elaboración y análisis de modelos matemáticos que describen fenómenos propios de la ingeniería. Entre las técnicas de modelación matemáticas se encuentran los modelos de optimización, éstos son modelos prescriptivos que de forma general se caracterizan por los siguientes elementos: función (es) objetivo, variables de decisión y restricciones.

Muchos de los problemas de optimización entran en la categoría de los denominados problemas mal planteados (Ill-Posed-Problems)[5](Hadamard, 1923). En el proceso de construcción de un modelo de optimización, el investigador debe tener en cuenta que los datos iniciales pueden ser imprecisos, el modelo inadecuado, se pueden presentar errores de los métodos numéricos por errores de redondeo, etcétera; estos aspectos pueden causar que la solución encontrada no corresponda con la solución del problema real. Por consiguiente, es frecuente que los coeficientes que aparezcan en el modelo sean sólo estimaciones de los verdaderos coeficientes del modelo de optimización, lo que lleva a trabajar con un problema que en cierto sentido se considera cercano al problema original.

En la presente investigación se presentan las definiciones sobre el concepto de problemas mal puestos, las consecuencias que se tienen al incumplir las condiciones, y los métodos de regularización. En el trabajo se consideran cuatro ejemplos académicos y uno práctico que permiten apropiarse de la teoría expuesta. También se usa el software Matlab con el propósito de programar los algoritmos discutidos para la solución de los problemas.

[5] TIKHONOV, A.N., GONCHARSKY, A. V, STEPANOV, V. V. y YAGOLA, A. G. Numerical Methods for the Solution of Ill Posed Problem. Moscow State University, 1990. p. 1

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Investigar y comparar métodos de regularización para la solución de problemas mal planteados en programación lineal.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Comparar las definiciones de estabilidad en problemas de programación lineal.
- Investigar métodos de regularización para la solución de un problema mal puesto de programación lineal.
- Evaluar los métodos de regularización que mejor se ajustan a los problemas de optimización de programación lineal.
- Implementar y validar los métodos de regularización propuestos en MATLAB.

2. PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN LINEAL Y NO LINEAL

2.1 PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La programación matemática es el nombre que se le da a una serie de métodos, procedimientos y teorías que se usan con el fin de resolver problemas de optimización en diversas áreas como la Ingeniería, la Biología, la Medicina, entre otras, con el propósito de tomar decisiones óptimas. A lo largo de este capítulo se presenta de manera breve conceptos sobre la programación lineal y no lineal.

Dentro de los problemas más estudiados en las matemáticas se encuentran aquellos dedicados a la búsqueda de magnitudes máximas y mínimas. Los problemas de optimización[6] que comúnmente se presentan en la ciencia pueden buscar la minimización de un costo, la maximización de un beneficio, la minimización del tiempo empleado en una operación, entre otros. La optimización parte de un problema de la vida real, el cual se debe representar de forma matemática por medio de un modelo. Un modelo debe ser el reflejo más parecido de la realidad, de la capacidad que tenga quien cree el modelo depende la calidad de los resultados de la optimización.

Resolver problemas es algo complejo, para hacerlo la primera etapa consiste en definir el problema (describiendo una situación indeterminada), luego se deben definir objetivos y, de acuerdo con lo anterior, analizar y sintetizar para finalmente ejecutar o resolver el problema, construyendo así un modelo matemático.

[6] Se habla de optimización cuando se selecciona la mejor solución de acuerdo a las necesidades planteadas en el problema.

El proceso de construcción de un modelo matemático requiere habilidad, imaginación y evaluación objetiva. En la formulación del problema se requiere una comprensión del área del problema, lo mismo que de las matemáticas correspondientes. Una posible metodología en la construcción de un modelo matemático es la siguiente:

- Formulación del problema.
- Planteamientos de las hipótesis a usar (supuestos para la solución del problema.)
- Formulación matemática; relacionar las diferentes variables mediante leyes empíricas o naturales
- Solución o estimación del modelo
- Interpretación de los resultados
- Verificación de las soluciones como respuesta al problema en estudio.

Es de anotar que en cada etapa de validación del modelo éste se puede ir refinando, ya que modelos más refinados pueden proporcionar una mejor comprensión de los procesos de la naturaleza; sin embargo, el refinamiento puede traer como consecuencia una mayor dificultad para la solución bien sea analítica o numérica.

2.2 FORMULACIÓN DE UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Un problema de optimización se compone generalmente de tres partes: la primera es la función objetivo, que es la función que se desea optimizar (maximizar o minimizar). La segunda parte, consiste en que debido a que los recursos con los que se cuenta no son ilimitados se encuentran ciertas restricciones a las cuales siempre está sujeta la función objetivo, éstas definen el entorno de la optimización y están dadas por un conjunto de ecuaciones e inecuaciones. Por último, las variables de decisión, que deben responder a las limitaciones puestas por las restricciones. La formulación de un problema de optimización, se puede escribir de la siguiente manera:

Dada la función $f: R^n \rightarrow R$ llamada función objetivo y el conjunto de restricciones $X \subseteq R^n$ se quiere encontrar el valor mínimo (máximo) de $f(x)$ con $x \in X$.

Si la función $f(x)$ y las restricciones son estrictamente lineales, se trata de un problema de programación lineal. La programación lineal es frecuentemente utilizada para abordar gran cantidad de problemas en diversos campos como el transporte, la industria, economía y la agricultura. Existe una gran variedad de algoritmos eficientes para hallar la solución del modelo matemático para un conjunto amplio de restricciones y variables.

Cuando la función objetivo o restricciones no corresponden a funciones lineales, el problema de optimización es un problema de programación no lineal. Muchos de los fenómenos de la vida real se representan de una manera más eficiente por medio de ecuaciones no lineales, como en el caso de las ciencias económicas, donde frecuentemente se analizan curvas de costos cuya demanda no es constante.

En un problema de programación matemática el propósito puede ser: (a) Hallar la magnitud $f_* = \min f(x)$, siendo f_* el valor mínimo de la función $f(x)$, sin estar interesados en el punto donde se alcanza este valor, o bien, (b) buscar no sólo f_* sino también el punto x_* correspondiente; esto es el conjunto $X_* = \{x : x \in X, f(x) = f_*\}$.

Es claro ver que en el problema (a) es natural suponer que $f_* > -\infty$, y en el problema (b) además de lo anterior, el conjunto de puntos $X_* \neq \phi$, esto es, el conjunto de puntos donde la función objetivo tiene su valor mínimo es diferente de vacío. Los puntos x que pertenecen al conjunto X se llaman admisibles y éste conjunto, se denomina conjunto factible.

La definición de un punto mínimo está dada de la siguiente manera: Sea $X \subseteq R^n$, se dice que el punto $x_* \in X$, es un punto mínimo local si existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in X$, cuando $\| x - x_* \| = \sum_{i=1}^{n} | x_i - x_{*i} |^2 < \delta$, se cumple la desigualdad $f(x) \geq f(x_*)$.

2.3 PROGRAMACIÓN NO LINEAL

2.3.1 Problemas con restricción. Se considera que la función objetivo es una función no lineal (o lineal) y las variables de decisión están sometidas a un conjunto de restricciones. En el problema de programación las restricciones se modelan mediante funciones bien sea lineales o no lineales.

El problema de programación no lineal con restricciones consiste en encontrar $X = (x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$.

$$\min f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= (x_1, x_2, x_3, .., x_n) = 0 \\ &\cdots \\ h_m &= (x_1, x_2, x_3, .., x_n) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
g_1 &= (x_1, x_2, x_3,..,x_n) \leq 0, \\
&\cdots \\
g_p &= (x_1, x_2, x_3,..,x_n) \leq 0
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

El conjunto de restricciones $h(x)=h(x_1,x_2,.x_n)=(h_1(x_1,x_2,.x_n),...h_m(x_1,x_2,.x_n))$; $g(x)=(g_1(x_1,x_2,.x_n),.g_p(x_1,x_2,.x_n))$ define un subconjunto de $E^n -$ espacio Euclidiano de dimensión n que se denomina conjunto factible. Existen diferentes tipos de problemas de programación no lineal dependiendo de las características de las funciones f, h, g.

2.3.1.1 Optimización restringida en el problema de programación convexa: Para hablar del problema de programación convexa, se hace necesario aclarar algunos conceptos importantes involucrados dentro de este tipo de problemas.

Definición: "*Un conjunto* $X \in E^n$ *es llamado conjunto convexo si dados dos puntos* x_1, x_2 *el punto genérico* $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ *para cada* $\lambda \in [0,1]$"[7]

Ahora bien, la función $f(x)$ es convexa si cumple con la siguiente relación:

$$
f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \forall \lambda \in [0,1] \tag{2.4}
$$

Un problema de programación se considera un problema de programación convexa si la función objetivo y las restricciones son funciones convexas. Considerando el problema de programación convexa:

---

[7] GALLEGO RENDON, R., ESCOBAR ZULUAGA, A. y TORO OCAMPO, E. Programación lineal y Flujo en Redes. Universidad Tecnológica de Pereira, 2007. p. 43

$$\min f(x), x \in E^n \tag{2.5}$$

$$g_i(x) \leq 0, i = 1,2..m \tag{2.6}$$

Donde $f(x), g(x)$ son funciones convexas diferenciables en E^n. Sea el conjunto factible U que satisface la condición llamada condición de regularidad: existe un punto $x^0 \in E^n$, tal que $g_i(x^0) < 0$ para todo $i = 1,2,\ldots,m.$

Si en cierto punto $x^0 \in U$ se cumple la desigualdad $g_i(x^0) < 0$ entonces, la restricción (1.6) con índice i se llama pasiva en el punto x^0. Es claro que para puntos interiores de la región factible U todas las restricciones de (2.6) son pasivas. En un punto de frontera $x^0 \in U$ aunque sea una de las restricciones de (2.6) se hacen igualdades $g_i(x^0) = 0$. Esta restricción se denomina activa en el punto x^0. Representemos por $I(x^0)$ el conjunto de índices de restricciones activas en el punto x^0:

$$I(x^0) = \{i \mid g_i(x^0) = 0, i = 1,2,\ldots m\} \tag{2.7}$$

La condición de regularidad se puede formular de otra forma: en cada punto de frontera x^0 del conjunto U los gradientes $g_i(x^0)$ para todo $i \in I(x^0)$ son linealmente independientes.

Se introducen una serie de variables $z_i, i = 1,2,\ldots,m$ para escribir las desigualdades en forma de igualdades

$$g_i(x^0) + z_i^2 = 0, i = 1,2,..m \tag{2.8}$$

Escribiendo la función de Lagrange para el problema (2.5) y (2.8)

$$\hat{L}(\mathbf{x},\lambda,\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(\mathbf{x}) + z_i^2].$$

El sistema de ecuaciones para hallar los puntos estacionarios tiene la forma;

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2,...,n. \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial z_i} = 2\lambda_i z_i = 0, \quad i = 1,2,...,m. \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \lambda_i} = [g_i(\mathbf{x}) + z_i^2] = 0, \quad i = 1,2,...m. \tag{2.11}$$

Las condiciones (2.9)-(2.11) son las condiciones necesarias de un mínimo para el problema (2.5)-(2.6). Eliminando de estas ecuaciones las variables $z_i.$ es claro que las igualdades en (2.9) con magnitudes $z_i^2 \geq 0$ son equivalentes a las desigualdades (2.6). Multiplicando cada igualdad en (2.10) por $z_i/2$ se obtiene: $\lambda_i z_i^2 = 0$.

La función de Lagrange para el problemas (2.5)-(2.6) es

$$L(\mathbf{x},\lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (2.6), (2.9) y (2.12) las condiciones necesarias del mínimo en el problema (2.5)-(2.6) toman la forma

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, .., m. \tag{2.14}$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, .., m. \tag{2.15}$$

La condición (2.15) significa que en el punto x_* algunas de las dos magnitudes se hacen igual a cero. Si $\lambda_i \neq 0,$ entonces $g_i(x_*) = 0$ (la restricción con número i es activa). Si en el punto $x_* g_i(x_*) < 0$ (restricción inactiva), entonces, $\lambda_i = 0.$ La condición (2.13) se puede escribir en forma vectorial:

$$-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_2} \\ \cdot\cdot \\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$-f'(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + .. + \lambda_n \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} \\ \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} + .. + \lambda_n \dfrac{\partial g_n}{\partial x_2} \\ \cdot\cdot \\ \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} + .. + \lambda_n \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$-f'(x)=\lambda_1\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2}..\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\end{bmatrix}+..+\lambda_n\begin{bmatrix}\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\\ \frac{\partial g_n}{\partial x_2}..\\ \frac{\partial g_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

$$-f'(x)=\lambda_1 g_1'(x)+..+\lambda_n g_n'(x) \qquad (2.16)$$

De aquí se desprende que el antigradiente $-f(x)$ en el punto mínimo x_* es una combinación lineal de las normales externas a las restricciones activas en el punto x_*

Sean (x_*,λ^*) la solución del sistema (2.13)-(2.16). Entonces, si el punto x_* es solución del problema (2.5) y (2.6) entonces $\lambda_i \geq 0$ para todo $i=1,2,.m.$

Suponga que x_* es un punto interior del conjunto U, es decir, $g_i(x_*)<0$ para todo $i=1,2,..,m.$ Entonces de (2.15) se desprende que todos los $\lambda_i^*=0.$ Ahora, suponga que x_* es un punto de frontera del conjunto U, o sea parte de las restricciones de (2.6) se hacen igualdades en este punto. Sea $I(x_*)$ el conjunto de índices que corresponden a las restricciones activas en el punto $x_*: I(x_*)=\{i \mid g_i(x_*)=0, i=1,2,...,m\}$ Se considera entonces las restricciones $g_i(x)\leq 0$, $i\in I(x_*)$como un caso particular de restricciones más generales de la forma $g_i(x)\leq c_i$, que corresponden a $c_i=0$.Es claro que a medida que se aumenten los valores c_i la región factible se extiende y el valor $f^*=\min_U f(x)$ sólo se disminuye. Por lo tanto,

$$\frac{\partial f^*}{\partial c_i} \leq 0,\ \ i \in I(x_*)\,. \tag{2.17}$$

Considerando la función de Lagrange en el punto (x_*, λ^*), debido a que $g_i(x_*) = c_i$ para $i \in I(x^*)$ y $\lambda_i^* = 0$ para $i \in I(x_*)$, se puede escribir

$$\begin{aligned} L(x_*, \lambda^*) &= f((x_*) + \sum_{i \in I(x_*)} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i \notin I(x_*)} \lambda_i g_i(x) \\ &= f((x_*) + \sum_{i \in I(x_*)} \lambda_i g_i(x) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial L}{\partial c_i} = \frac{\partial f^*}{\partial c_i} + \lambda_i^*\,. \tag{2.18}$$

Por otro lado, por la regla de diferenciación de una función compuesta se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial c_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial c_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^* \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial c_i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial x_j}{\partial c_i} = 0, \end{aligned}$$

La expresión entre paréntesis se hace igual a cero debido a (2.13). De aquí y de (2.18) se tiene

$$\frac{\partial f^*}{\partial c_i} + \lambda_i^* = 0,\ \ i \in I(x_*)\,. \tag{2.19}$$

por tanto, $\lambda_i \geq 0$ ya que $\dfrac{\partial f^*}{\partial c_i} \leq 0.$ Para las restricciones no activas de la igualdad (2.15) se desprende que $\lambda_i^* = 0,\ i \notin I(x_*)$. Por consiguiente, $\lambda_i \geq 0$ para todos los $i = 1,2,..,m.$

Para que el punto $x_* \in E^n$ sea la solución del problema de programación convexa (2.5)-(2.6) con funciones diferenciables $f(x)$ y $g_i(x),\ i = 1,2,..,m,\ U$ satisface la condición de regularidad es necesario y suficiente que exista un vector $\lambda^* \in E^m$ para el cual se satisface las siguientes condiciones denominadas condiciones de Kunh-Tuckker

$$
\begin{gathered}
\lambda_i^* \geq 0,\ \ i = 1,2,..,m, \\
\frac{\partial f(x_*)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x_*)}{\partial x_j} = 0,\ \ j = 1,2,...,n, \\
\lambda_i g_i(x_*) = 0,\quad i = 1,2,...,m, \\
g_i(x_*) \leq 0,\quad i = 1,2,...,m,
\end{gathered}
\tag{2.20}
$$

Se analizarán ahora las condiciones de optimalidad de Kuhn-Tucker para el problema de programación (2.5)-(2.6) para funciones no diferenciables. El punto (x_*, λ^*) se llama punto de silla de la función de Lagrange para el problema (2.5)-(2.6), si $L(x_*, \lambda) \leq (x_*, \lambda^*) \leq (x, \lambda^*)$ para todo $x \in U$ y todo $\lambda_i^* \geq 0, i = 1,2,..,m.$

Se puede demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la función de Lagrange del problema (2.5)-(2.6) tenga un punto de silla es la siguiente condición:

$$L(x_*, \lambda^*) = \min_{\mathbf{x} \in E^n} L(x, \lambda^*)$$
$$\lambda_i^* g_i(x_*) = 0, \quad i = 1, 2, .., m$$

2.4 PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal se formula de la siguiente forma:

$$\mathrm{Min} Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{2.21}$$

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &\le b_2, \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &\le b_m, \\ x_i &\ge 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Donde:

z : Valor de la medida global de efectividad

x_j : Nivel de la actividad j, para $j = 1, 2, .. n$

c_j :Incremento en Z que se obtiene al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j.

b_i :Cantidad del recurso i disponible para asignar a las actividades, para $i = 1, 2, .., m$

a_{ij} : Cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.

Como se observa en la formulación (2.21)-(2.22) el modelo matemático consta de funciones estrictamente lineales. A continuación se describe la terminología necesaria para el desarrollo de la presente temática:

- Se llama solución factible cualquier vector $X = (x_{1,} x_2, .. x_n)$ que satisface las restricciones.
- La región factible es la colección de todas las soluciones factibles.
- Una solución óptima es aquella que, siendo una solución factible proporciona el valor más favorable de la función objetivo.

Uno de los métodos más utilizados y sencillos para hallar la solución óptima de un problema de programación lineal es el algoritmo simplex, sobre el cual se ampliará la información en el siguiente numeral.

Dentro de los ejemplos clásicos de la programación lineal se encuentran el *problema de asignación*, el cual se presenta cuando se hace necesario distribuir cierta cantidad de recursos un número de tareas específicas con el fin de encontrar una combinación eficiente, como es el caso de una planta de producción donde se necesita asignar el personal a las máquinas o los turnos de trabajo

Otro problema muy investigado en programación lineal es el *problema de la dieta*, donde se tienen ciertos nutrientes y sus requerimientos dentro de una dieta, se busca una combinación óptima de las materias primas para obtener una dieta adecuada, la cual a su vez debe ofrecer el menor costo o las mejores utilidades.

Por otro lado está el *problema de transporte*, en este caso se considera que el costo por unidad enviada de un origen a un destino dado es fijo, independientemente de la cantidad enviada. Se denota el número de unidades enviadas desde el punto de origen i al punto de demanda j como x_{ij}, el costo que se incurre en el transporte se denota como c_{ij}. El punto de origen (suministro)

i abastece a lo sumo a s_i unidades; y el punto de demanda j debe recibir por lo menos d_j unidades del bien enviado.

Entonces la formulación general del problema de transporte es:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.a \quad &\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le s_i, \quad i=1,2,\dots,m \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le d_j, \quad j=1,2,\dots,n \\
&x_{ij} \ge 0, \quad \forall\ i,j
\end{aligned}
\qquad (2.23)
$$

Además del problema de transporte, se encuentran variantes de éste que son los *Problemas de rutas de vehículos (Vehicle Routing Problem - VRP),* este tipo de problemas son de gran utilidad en el área de la logística. El problema de rutas de vehículos consiste en hallar las rutas de una flota de transporte para dar servicio a unos clientes.

Un ejemplo importante en la literatura es el problema del agente viajero, conocido como TSP (Travelling salesman Problem). El problema se formula de la siguiente forma: Sean N ciudades de un territorio, el objetivo es encontrar una ruta (gira, tour) que comienza y termina en una ciudad concreta, pase una sola vez por cada una de las ciudades y minimice la distancia recorrida por el viajero.

La función objetivo depende de la tipología y características del problema, lo más habitual es intentar minimizar: el costo total de operación, el tiempo total de transporte, la distancia total recorrida, el tiempo de espera y la utilización de vehículos; maximizar el beneficio y el servicio al cliente, , equilibrar la utilización de los recursos, etcétera.

2.4.1 Método de solución de programación lineal. El Método Simplex como herramienta de programación lineal fue desarrollado para la época de los años cuarenta por George Dantzing[8]. El método constituye una forma sistemática y de búsqueda intensiva a través de todas las posibles soluciones para obtener una solución óptima.

Es un algoritmo iterativo que empieza en el origen o desde una solución básica factible y se desplaza hacia una solución mejor a la anterior, el proceso se detiene en el momento en que no se encuentre un valor mejor en la función objetivo, en este caso, se alcanza la solución óptima (si existe). Para hacer uso del método se deben llevar a cabo unos pasos previos a las iteraciones:

- Las restricciones expresadas a manera de desigualdades se deben convertir en igualdades agregando variables de Holgura y/o de Excedencia si son de la forma ≤ o ≥ respectivamente.
- Cada uno de los componentes del vector de recursos (b) debe ser positivo.
- Cada una de las variables de decisión debe cumplir con la condición de no negatividad.

En la actualidad existen gran cantidad de herramientas útiles para la solución de problemas de programación lineal; es común el uso del paquete de hojas de cálculo, Microsoft Excel, para elaborar pequeños modelo de optimización y luego el Excel Solver para resolverlos. Sin embargo, para problemas con un gran número de variables y restricciones es necesario considerar la utilización de

[8] VICENS SALORT, E., ÓRTIZ BAS, A y GUARCH BERTOLÍN, J. Métodos Cuantitativos Volumen I. Universidad Politecnica de Valencia, 1997. p. 107

software especializado que emplea lenguaje de modelado, entre los que se destacan AMPL, MPL, GAMS y LINGO que disponen de poderosos solucionadores. Otro software de uso común es Matlab, que se adopta en el presente trabajo con el fin de ilustrar los ejemplos.

2.4.2 Análisis de sensibilidad. Frecuentemente, los problemas de Programación Lineal sufren cambios en sus datos de entrada debido a la incertidumbre de éstos últimos y a la variación de las condiciones del sistema que se modela, ejemplo de ello es la modificación de precios, costos o disponibilidad de recursos. Estas alteraciones generan el planteamiento de un nuevo problema que difiere un poco del problema original.

Se conoce como *Análisis de sensibilidad* al proceso de análisis de la variación de la solución óptima al modificarse ciertos parámetros del problema. Dentro de los cambios más comunes que se presentan en los problemas de Programación Lineal se encuentran:

- Cambios en el vector b, es decir, en los recursos disponibles.
- Cambios en el vector c, los coeficientes de las variables de decisión correspondientes a precios o costos unitarios.
- Cambios en la matriz A, en decir, los coeficientes de las restricciones del problema.
- Cambios en el vector X, es decir, en la longitud del vector; esto ocurre al aparecer nuevas variables de decisión.
- Cambios en el número de restricciones del sistema modelado.

El *Análisis de Sensibilidad* permite, además de conocer el comportamiento de la solución óptima ante la variación de los parámetros de entrada, encontrar intervalos de valores de los parámetros modificados dentro de los cuales la solución óptima del problema original sigue siendo factible para el nuevo problema. En todos los casos, el análisis se hace al variar solamente un parámetro del problema mientras los otros se mantienen fijos.

2.4.2.1 Cambios en el vector *b.* En este caso se presenta una variación en un elemento del vector recursos. Interpretando como b el vector de recursos original, b' el vector de recursos modificado y B^{-1} como la matriz inversa de la base (ubicada en la última tabla del Simplex), la solución del problema continúa siendo óptima si:

$$B^{-1}b' \geq 0$$

Esto significa que la base sigue siendo la misma, no obstante, los valores de las variables son alterados. Los nuevos valores obtenidos son:

$$X_B = B^{-1}b'$$

Definiendo X_B como el vector solución.

2.4.2.2 Cambios en el Vector *c*. Cuando se presentan modificaciones en los coeficientes de las variables de decisión se pueden encontrar dos casos particulares así:

- ✓ x_k es una variable no básica cuyo coeficiente de costo o precio unitario ha sido alterado, donde c es el coeficiente original, c' el coeficiente modificado y $c_j - z_j$ el coeficiente del costo relativo de la variable x_j; entonces:

El valor de la función objetivo y de las variables básicas no depende de los coeficientes de las variables no básicas siempre que $c_j - z_j \leq 0$. Si el cambio de dicho coeficiente resulta $c_j - z_j \geq 0$, la solución deja de ser óptima y se hace necesario que la variable haga parte de la base con el fin de mejorar la calidad de la función objetivo.

- ✓ x_k es una variable básica cuyo coeficiente de costo o precio unitario ha sido perturbado; en este caso todos los valores de $c_j - z_j$ se modifican. El procedimiento a seguir es recalcular la última línea del cuadro del Simplex y verificar la optimalidad de la función objetivo.

2.4.2.3 Cambios en la matriz *A*: El cambio de un elemento en la matriz *A,* al igual que en el caso anterior se puede presentar tanto en variables básicas como en las no básicas de la siguiente manera:

- ✓ Sea x_j una variable no básica cuyo coeficiente a_{ij} ha sido modificado. El valor que se ve afectado es el costo relativo de la variable no básica, como en el caso anterior, se verifica la optimalidad y se lleva a cabo el respectivo procedimiento.

- ✓ Sea x_j una variable básica cuyo coeficiente a_{ij} ha sido modificado. Esta modificación altera la base óptima B y por consiguiente la matriz inversa B^{-1}, es decir, que se pueden ver afectados todos los elementos del cuadro simplex debido a su dependencia con la matriz inversa B^{-1}.

2.4.2.4 Cambios en el vector *X.* Realizar un cambio en la longitud del vector *X* significa incorporar una nueva actividad o variable de decisión al problema. Sea x_{n+1} una nueva variable en el problema, cuyo costo o precio unitario es c_{n+1} , su vector columna a_{n+1} y $(z_{n+1} - c_{n+1})$ su coeficiente de costo relativo. Al tener esta variación no se hace necesario resolver de nuevo el problema, basta con analizar la optimalidad para determinar si la nueva variable hace parte de la base o no:

Si $(z_{n+1} - c_{n+1}) \leq 0$ la solución óptima del problema no se ha visto afectada y por consiguiente $x_{n+1} = 0$.

Si $(z_{n+1} - c_{n+1}) \geq 0$ indica que x_{n+1} debe entrar a la base con el fin de buscar mejorar la función objetivo.

2.4.2.5 Cambios en el número de restricciones del modelo. Cuando se introduce una nueva restricción a un problema puede tratarse de una igualdad o de una desigualdad. La nueva restricción puede eliminar de la región factible el punto óptimo del problema original, por lo tanto, es necesario determinar si la nueva restricción elimina el punto óptimo de la región factible en cuyo caso se debe reoptimizar el problema partiendo de la base óptima del problema original.

2.4.3 Problema de optimización de Programación Lineal. Es frecuente asumir que los datos de entrada en un problema de programación lineal se conocen de manera exacta, esto es, que los valores de los problemas corresponden a los valores reales. Con todo, esta hipótesis no se cumple en muchos de los casos debido a la incertidumbre en las mediciones, que llevan a que en la mayoría de los casos se usen únicamente aproximaciones o estimaciones establecidas por predicciones de los datos.

Anteriormente se indicó que el planteamiento de un problema de programación lineal está dado de la siguiente manera:

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{2.21}$$

sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n &\le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n &\le b_2, \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &\le b_m, \\ x_i &\ge 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

De forma matricial, este tipo de problemas se escriben así:

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min, \quad x \in X = \{x \in E^n : x \ge 0,\ Ax \le b\}. \tag{2.24}$$

Suponiendo que el problema tiene solución, es decir, se asume que $f_* = \min f_{x \in X} f(x) > -\infty$.

Para el estudio de la estabilidad del problema (2.24) se define el siguiente problema denominado "Problema Perturbado" (PP). Asumiendo que en lugar de los datos exactos A, b, c se conocen los datos de forma aproximada, bien sea en los coeficientes de actividades, recursos o en los coeficientes de costos, los cuales se denotan como sigue:

$$A(\delta) = \{a_{ij}(\delta)\},\ b(\delta) = \left(b^1(\delta), .. b^m(\delta)\right)^T, c(\delta) = \left(c^1(\delta), .. c^n(\delta)\right)^T$$

Los cuales son los datos perturbados que satisfacen las siguientes condiciones:

$$|\, c^j(\delta) - c^j \,| \le \delta_0, \quad |\, a_{ij}(\delta) - a_{ij} \,| \le \delta_1, |\, b^i - b^i \,| \le \delta_2, \quad i = 1,2,..m,\ j = 1,2,..n\ .$$

Así, en lugar del problema (2.24) se tiene el problema perturbado. Es importante resaltar aquí que a diferencia del Análisis de Sensibilidad discutido anteriormente, estas modificaciones o perturbaciones del problema no se hacen a un solo parámetro como el vector de costos, la matriz de restricciones, etc., sino que se modifican todos a la vez. El nuevo problema generado se denomina problema perturbado y está dado de la siguiente manera:

$$f(x) = \langle c(\delta), x \rangle \to \min, \quad x \in X(\delta) = \{x \in E^n : x \geq 0,\, A(\delta)x \leq b(\delta)\} \qquad (2.25)$$

Obsérvese que para diferentes realizaciones del valor en los coeficientes, el problema (2.25) puede presentar comportamientos no adecuados, como por ejemplo no presentar una solución factible, tener múltiples soluciones o que la solución óptima del problema no se parezca a la solución del problema original.

Si el problema (2.25) no es estable, al resolver el problema puede llegarse a resultados erróneos y asimismo a tomar malas decisiones. Con el fin de obtener soluciones que presenten mejores garantías, en lugar de considerar el problema perturbado se considera un nuevo problema que sea lo más parecido al original; naturalmente, éste nuevo problema a diferencia del problema (2.25) es un problema bien planteado. El concepto de problemas bien planteados y mal planteados será ampliado en el siguiente capítulo.

2.4.4 Definiciones de Estabilidad. En esta parte del trabajo se presentan una serie de definiciones sobre el concepto de estabilidad y se dan varios ejemplos que nos permiten apropiarnos de éstas. Como se podrá observar, la inestabilidad de un problema de programación lineal puede llevarnos a tomar decisiones erróneas con un alto costo para la empresa, debido a que en muchos casos se trabaja con una solución posiblemente muy alejada de la solución verdadera. La pregunta que se deberá resolver es qué hacer cuando no se está seguro de trabajar con datos exactos de entrada. Para dar respuesta a la pregunta, se introduce el concepto de algoritmo regularizador, que se discute en una sección posterior.

En algunas situaciones las restricciones de la forma $Ax \leq b$ suelen dividirse en dos grupos de restricciones, de la misma manera se puede escribir la función objetivo:

$$f(x) = c^1 x^1 + c^2 x^2 \tag{2.26}$$

$$X = \{x = (x^1, x^2) : x^1 \in R^{n1}, x^2 \in R^{n2}, x^1 \geq 0, A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \leq b^1, A_{21}x^1 + A_{22}x^2 = b^2\} \tag{2.27}$$

Donde:

A_{ij} : es una matriz de dimensión $m_i \times n_j, c_j \in E^{nj}$

$b^j \in E^{m_i}, i, j = 1,2, c \in E^n$

El concepto de norma de un elemento v que pertenece a cierto espacio vectorial sirve para definir la cercanía entre elementos en (2.24) y (2.25). Se define la norma como una función que hace corresponder a cada elemento con un número positivo que se denota como $\|v\|$ y que satisface las siguientes condiciones:

- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, λ es un escalar
- $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$

La norma de una matriz se define como el máximo $\|Ax\|$. También se puede afirmar que la norma de A se representa así:[9]

[9] APOSTOL, T. Cálculus Volumen II. Editorial Reverté, Barcelona 1985. p. 240

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \tag{2.28}$$

Por consiguiente se puede usar la siguiente notación para describir la diferencia entre matrices y vectores

$$\begin{aligned}
&\|A_{ij}(\delta) - A_{ij}\| \le \delta \\
&\|c_j(\delta) - c_j\| \le \delta \; i, j = 1,2 \\
&\|b^i(\delta) - b^i\| \le \delta
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Considerándose nuevamente el problema (2.25):

$$f(x) = \langle c(\delta), x\rangle \to \min, \quad x \in X(\delta) = \{x \in E^n : x \ge 0,\ A(\delta)x \le b(\delta)\}$$

O bien:

$$\begin{aligned}
&fg(x) = c_1(\delta)x^1 + c_2(\delta)x^2 \to \inf; x \in X(\delta) \\
&X(\delta) = \begin{Bmatrix} x = (x^1, x^2) : x^1 \in E^n, x^1 \ge 0, A_{11}(\delta)x^1 + A_{12}(\delta)x^2 \le b^1(\delta) \\ A_{21}(\delta)x^1 + A_{22}(\delta)x^2 \le b^2(\delta) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Sería el problema perturbado correspondiente al problema (2.23) si:

$$f_{\delta*} = \inf f_\delta(x), x \in X(\delta) \tag{2.31}$$

$$x_*(\delta) = \{x \in X(\delta) = f_{\delta*}\} \tag{2.32}$$

2.4.4.1 Definición 1. El problema (2.24) se llama soluble establemente, si el problema tiene solución y existe un número $\delta_0 > 0$ tal que para todo δ, $0 \le \delta \le \delta_0$, el problema perturbado (2.30) también tiene solución para cualquier selección de los parámetros $A_{ij}(\delta), c_j(\delta)$ y $b^i(\delta)$ de (2.25) o sea, si $x_*(0) = x_*$, entonces de la estabilidad soluble de (2.24) se desprende que $x_*(\delta) \neq \phi$ para todo $\delta \in [0, \delta_0]$.

2.4.4.2 Definición 2. El problema (2.24) se llama estable respecto a la función objetivo, si el problema es estable soluble y para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra δ_1, $0 < \delta_1 \leq \delta_0$ tal que $|f_{\delta *} - f_*| < \varepsilon$ para todo δ , $0 < \delta \leq \delta_1$ para cualquier selección de $A_{ij}(\delta), c_j(\delta)$ y $b^i(\delta)$ del problema (2.25).

2.4.4.3 Definición 3. El problema (2.24) se llama estable respecto al argumento, si el problema es estable soluble y para cualquier $\varepsilon > 0$ se encuentra un número δ_2, $0 < \delta_2 \leq \delta_0$ tal que δ_1, $\beta(x_*(\delta), x_*) = \sup \inf |x - y| < \varepsilon$, $x \in x_*(\delta)$, $y \in x_*$ para todo δ, $0 < \delta \leq \delta_2$ y para cualquier selección de $A_{ij}(\delta), c_j(\delta)$ y $b^i(\delta)$ del problema (2.25).

3. PROBLEMAS BIEN PLANTEADOS Y MAL PLANTEADOS

El término “problemas mal puestos” apareció en el primer cuarto del siglo XX, cuando Jacques Hadamard (1865-1963) enunció por primera vez sus tan polémicos conceptos de “problema bien planteado” y “problema mal planteado” (ill posed problem). En forma general, la solución de cualquier problema consiste en la definición del elemento z (solución del problema), dado ciertos datos de entrada.

El problema se puede describir a través de la ecuación:

$$Az=u, z\in Z, u\in U \tag{3.1}$$

Se supone que los datos de entrada son elementos de cierto espacio U, y la solución z se busca en el espacio Z, esto es $z\in Z$.

El problema está “bien planteado” en la pareja de espacios Z y U si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para cada $u\in U$ la solución del problema existe.
b) Para cada $u\in U$ la solución del problema es única.
c) La solución del problema continuamente depende de los datos de entrada (condición de estabilidad).

Los problemas que no satisfacen alguna (s) de las condiciones (a), (b) y (c) se denominan problemas mal planteados. La condición de estabilidad es la que comúnmente no se cumple.

3.1 MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN PARA RESOLVER PROBLEMAS MAL PLANTEADOS EN PROGRAMACION LINEAL

Como se mencionó con anterioridad, una parte fundamental en el proceso de modelación de fenómenos de la Ingeniería es la necesidad de alimentar el modelo con datos sobre los parámetros y así poder determinar las magnitudes de interés. No obstante, el conjunto de datos de entrada puede contener valores imprecisos como consecuencia de la poca información o conocimiento acerca del sistema real, errores en las mediciones experimentales o una modelación incompleta. Por lo tanto, se debe optar por técnicas robustas que permitan hallar soluciones consistentes con el comportamiento del mundo real.

Como resultado de la no exactitud de los parámetros puede ocurrir que un problema resulte “mal puesto”, debido a que no satisface alguna (s) de las condiciones (a), (b) y (c) expuestas anteriormente.

Una de las metodologías más utilizadas al momento de resolver un problema “mal puesto” es por medio de los métodos de regularización, los cuales permiten determinar la solución mediante cierto problema que se considera “parecido” (en cierto sentido) al problema original.

Un término importante en la construcción de los métodos de regularización estudiados a continuación, es la función llamada “estabilizador”, definida de la siguiente manera:

La función $\Omega(z)$definida sobre un conjunto no vacío $Z_\Omega \subseteq Z$ se llama estabilizador del problema de optimización

$$f(z) \to \min, \; z \in Z,$$

si cumple las siguientes condiciones (3.2):

a) $\Omega(z) \geq 0, \ \forall z \in Z_{\Omega}$. El conjunto Z_{Ω} es el dominio de definición de la función estabilizador.

b) El conjunto $\Omega_c = \{z : z \in Z_{\Omega}, \Omega(z) \leq c\}$ es acotado y cerrado para cualquier $c = const \geq 0.$

c) $Z_{\Omega}^{*} = Z_{\Omega} \cap Z_{*}$ es diferente al conjunto vacío.

3.1.1 Método de Regularización de Tikhonov. La función de Tikjonov (Tikhonov, 1997), se define como:

$$T_{\delta}^{\alpha}(z) = f(z) + \alpha\Omega(z),$$

observe que la función consta de dos términos, el primer término es la función objetivo, y el segundo es el producto de un parámetro ∝, llamado parámetro de regularización y el estabilizador Ω.

Se selecciona como función de estabilización $\Omega(x)$ a una función lineal que satisface la definición dada anteriormente en (3.2)

$$\Omega(x) = |x|_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ con } x_i \geq 0$$

Por consiguiente, el problema de optimización que se define es el siguiente:

$$\min \quad T_{\delta}^{\alpha}(z) = f(z) + \alpha\Omega(z), \quad z \in Z_{\Omega}. \tag{3.3}$$

Observe que en (3.3) no se tiene un sólo problema, sino una familia de problemas de optimización que dependen naturalmente del parámetro de regularización. Cuando se seleccionan adecuadamente los parámetros δ y α se demuestra que la solución del problema de optimización (3.3) converge hacia la solución del problema original.

El objetivo del presente trabajo es presentar el método de regularización de Tikhonov para el problema de programación lineal.

Se considera el problema de programación lineal escrito de manera matricial.

$$f(x) = \langle c, x \rangle \to \min, \quad x \in X = \{x \in E^n : x \geq 0,\ Ax \leq b\}. \tag{3.4}$$

En mira a cumplir con la definición de un problema bien puesto, específicamente con la condición sobre la existencia de la solución, se asume que la función tiene un valor mínimo, esto es, $f_* = \min f_{x \in X} f(x) > -\infty$.

Ahora, suponga que en lugar de los datos exactos A, b, c se conocen sus aproximaciones:

$$A(\delta) = \{a_{ij}(\delta)\}, \quad b(\delta) = (b_1(\delta), \ldots b_m(\delta))^T, \ c(\delta) = (c_1(\delta), \ldots c_n(\delta))^T$$

Bajo tales condiciones

$$\left|c_j(\delta) - c_j\right| \leq \delta_0, \ \left|a_{ij}(\delta) - a_{ij}\right| \leq \delta_1$$
$$\left|b_j(\delta) - b_j\right| \leq \delta_2, \ i = 1,2\ldots m, j = 1,2,\ldots,n$$

Donde $\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2) \geq 0$ son parámetros. Para obtener una solución aproximada del problema original bajo las condiciones descritas, se puede intentar usar el problema perturbado:

$$f(x)=\langle c(\delta),x\rangle \to \inf, \quad x\in X(\delta)=\{x\in E^n : x\geq 0,\ A(\delta)x\leq b(\delta)\} \tag{3.5}$$

Sin embargo, usar esta estrategia es recomendable únicamente si el problema original (3.4) es estable. Ahora, si el problema original no es estable al resolver el problema (3.5) en algún caso se puede llegar a tener resultados erróneos. Entonces, en lugar de trabajar con el problema perturbado se define un nuevo problema que sea lo más parecido a él pero que sea estable usando la función de Tikhonov.

En primer lugar, se define una función objetivo denominada función de Tikhonov: $T_\delta(x)=\langle c(\delta),x\rangle+\alpha\Omega(x)$, donde el parámetro α se llama parámetro de regularización y permite mejorar el problema.

El nuevo problema de optimización planteado es:

$$MinT_\delta(x)=f_\delta(x)+\alpha|x|_1 \tag{3.6}$$

cuyo objetivo es encontrar el mínimo en cierto conjunto, llamado conjunto de trabajo $W(\delta)$.

Sujeto a:

$$W(\delta)=\{x\in E^n : x\geq 0, A(\delta)x-b(\delta)\leq \delta_1 I_m I_n^T x+\theta I_m\} \tag{3.7}$$

$$\{x\in E^n : x\geq 0, A(\delta)x-\delta_1 I_m I_n^T x\leq b(\delta)+\theta I_m\},$$

donde $|x|_1=x_1+x_2+\ldots x_n=I_n^T x$, para todo $x\geq 0, \theta=\theta(\delta)>0$, es un parámetro del método.

Si se supone que $0 \leq \delta_2 \leq \theta$, puede verse que el conjunto factible X es un subconjunto del conjunto $W(\delta)$, esto es, el conjunto $W(\delta)$ es una extensión del conjunto factible X.

El propósito de definir la función de Tikhonov (3.6) es considerar un nuevo problema que tiene dos importantes características: ser un problema bien puesto y aproximar al problema perturbado.

3.1.2 Método de regularización del Defecto. El segundo método que se considerará en el presente proyecto es el método del defecto. Véase el siguiente problema:

$$\Omega(x) = |x|_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \inf,\ x \in G = \{x \geq 0,: Dx \leq d\}$$

Donde D es una matriz de orden $mxn,\ d = (d_1,...,d_m) \in \mathrm{E}^m$

Suponga que es necesario resolver el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$\left\{\begin{array}{l} d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n \leq d_1 \\ . \\ . \\ . \\ d_{m1}x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{mn}x_n \leq d_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (3.8)$$

El conjunto solución de (3.7) se denota por G; esto es,

$$G = \{x \in \mathrm{E}^n : x \geq 0, Dx \leq d\}$$

Definición:

Un punto $x \in G$ se llama punto normal del conjunto G , si

$|x|_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n = \min y_1 + y_2 + ... + y_n ; y \in G$

El conjunto de puntos normales de G se denota por G_*

Debido a que $x \geq 0$, el problema de hallar el punto normal de G se puede formular mediante un problema de programación lineal.

$$Min\Omega(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n = I_n^T x$$

$$x \in G = \{x \geq 0, Dx \leq d\}.$$

Sea $\Omega_* = \min \Omega(x)$ entonces: $G_* = \{x \in G : \Omega(x) = \Omega_*\}$.

Asumimos que $G \neq \phi$ y que $\Omega(X) \geq 0$ para todo $x \in G$, $\Omega_* \geq 0$ y $G_* \neq \phi$.

Como en el caso anterior puede ocurrir que no se conozcan los datos exactos, en su lugar los datos de entrada se conocen de forma aproximada con cierto error de aproximación δ.

Esto es, se conocen los valores aproximados de la matriz D y el vector d , los cuales se denotan como $D(\delta) = \{d_{ij}(\delta)\}$ tales que

$$\{|d_{ij}(\delta) - d_{ij}| \leq \delta_1 ; |d_i(\delta) - d_i| \leq \delta_2\}$$

Donde: $i = 1,2,...,m$; $j = 1,2,...,n$; $\delta = (\delta_1, \delta_2) \geq 0$

El problema de encontrar el mínimo puede resultar no estable; en este caso se propone usar como método de regularización el método del defecto, el cual propone cambiar el problema (3.7) a:

$$MinT_{2\delta}(x) = \Omega(x) + \alpha|x|_1 = (1 + \alpha)|x|_1 \quad (3.9)$$

Sujeto a:

$$x \in G(\delta) = \left\{x \in \mathrm{E}^n : x \geq 0, (D(\delta) - \delta_1 I_m I_n^T)x \leq d(\delta) + \theta I_m\right\},$$

donde: $\alpha = \alpha(\delta) > 0,\ \theta = \theta(\delta) > 0$ son parámetros del método.

Regresando al problema que se discute en el presente trabajo, supóngase que éste tiene solución y el problema aproximado con datos $A(\delta)$, $b(\delta)$ y $c(\delta)$ satisfacen las condiciones de estabilidad. El problema de programación lineal se puede reformular como un problema de búsqueda del punto normal del conjunto.

$X_* = \left\{x \in \mathrm{E}^n \middle| x \geq 0, Ax \leq b; c.x \leq f_*\right\}$ Si hacemos $D = \begin{bmatrix} A \\ c \end{bmatrix}; d = \begin{bmatrix} b \\ f_* \end{bmatrix}$

Entonces el método del defecto para la búsqueda de punto normal de programación lineal coincide con lo previamente discutido. Ahora:

$$D(\delta) = \begin{pmatrix} A(\delta) \\ c(\delta) \end{pmatrix};\ \ \delta_0 = \delta_1;\ \ d(\delta) = \begin{pmatrix} b(\delta) \\ f_*(\delta) \end{pmatrix}$$

donde $f_*(\delta)$ es una cota conocida para f_*, tal que $|f_*(\delta) - f_*| \leq \delta_2$

4. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan algunos ejemplos pedagógicos y uno del mundo práctico con el propósito de mostrar los conceptos teóricos discutidos en apartados anteriores.

4.1 PROBLEMA 1

El primer ejemplo muestra que la solución cambia fuertemente para algunas realizaciones del problema perturbado con pequeñas variaciones en los parámetros. El problema original se formula de la siguiente manera:

$$f(x) = -x \rightarrow \min \tag{4.1}$$

$$x \in X = \{x \in E^1 : x \geq 0, x \leq 1\} \tag{4.2}$$

El problema consta de una sola restricción $0 \leq x \leq 1$, como la función objetivo es una función lineal, entonces la función objetivo tiene su punto máximo (mínimo) en los extremos. Por consiguiente, dado que la función $f(x) = -x$ es una función decreciente el punto mínimo y su respectivo valor mínimo es igual a

$$x_* = 1$$
$$f(x_*) = -1$$

A continuación, se considera un nuevo problema que resulta de la perturbación de la función objetivo y de la restricción:

$$f(x) = -x + \delta_2 x \rightarrow \min \tag{4.3}$$

$$x \in X = \{x \in E^1 : x \geq 0, x + \delta_1 x \leq 1 + \delta_3\} \tag{4.4}$$

Obsérvese que en el problema (4.1) se ha perturbado no sólo el coeficiente de la función objetivo sino el coeficiente de la restricción y el coeficiente del término independiente. Con el fin de ver el impacto que existe en la solución del problema original para pequeños cambios del problema perturbado se seleccionan los siguientes valores del parámetro delta. Estos valores de δ están comprendidos entre [0,1] y se seleccionaron de forma aleatoria.

Las ecuaciones (4.5) - (4.8) son el resultado de la asignación de diferentes valores de δ y muestran el nuevo planteamiento del problema tanto para la función objetivo como para las restricciones. A continuación, se da solución a cada uno de los problemas resultantes:

$$\delta_1 = 0{,}1 \ \delta_2 = 0{,}2 \ \delta_3 = 0{,}2$$

$$f(x) = -x + 0{,}2x$$

$$f(x) = -0{,}8x \tag{4.5}$$

$$S.A:$$

$$x + 0{,}1x \leq 1 + 0{,}2$$

$$1{,}1x \leq 1{,}2$$

$$x \leq 1{,}09 \tag{4.6}$$

$$x \geq 0$$

Al remplazar los valores de $\delta_i = \delta_1, \delta_2, \delta_3$ se obtuvo la nueva función objetivo (4.5) y su respectiva restricción (4.6). En la siguiente tabla se presentan los valores de delta δ_i, el punto mínimo de la función objetivo (x_*) y el valor mínimo $f_{\delta *}$

Tabla 1: Solución problema 1 original

δ_1	δ_2	δ_3	$x_*(\delta)$	$f_{\delta *}$	$\overline{x}$	$\overline{f_*}$
0,1	0,5	0,7	1,09	-0,872	8,26	14,68

Fuente: Autores

Al comparar los resultados de la tabla 1, con los del problema (4.1)-(4.2) se puede ver que los valores, tanto del punto mínimo como del valor mínimo de la función objetivo, se vieron afectados en un 8,26% y 14,68% de diferencia respectivamente.

Tomando otros valores para los δ_i, a continuación se muestra el problema resultante:

$$\delta_1 = 0{,}1 \ \delta_2 = 0{,}5 \ \delta_3 = 0{,}7$$

$$f(x) = -x + 0{,}5x$$

$$f(x) = -0{,}5x \tag{4.7}$$

$$S.A:$$

$$x + 0{,}2x \leq 1 + 0{,}7$$

$$1{,}2x \leq 1{,}7$$

$$x \leq 1{,}4 \tag{4.8}$$

$$x \geq 0$$

Se resuelve el problema y se obtiene la siguiente tabla:

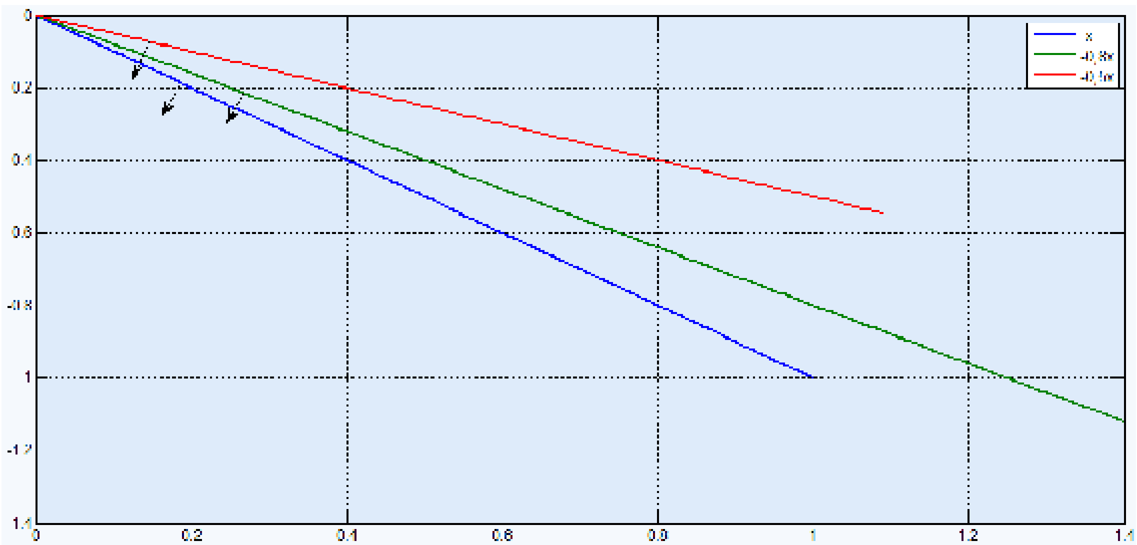
Tabla 2: solución problema 1 perturbado

δ_1	δ_2	δ_3	$x_*(\delta)$	$f_{\delta*}$	$\overline{x}$	$\overline{f_*}$
0,1	0,5	0,7	1,4	-1,12	28,57	10,71

Fuente: Autores

Contrario al caso anterior, para este nuevo problema, el valor de $f_{\delta*}$ es menor al del problema original y se diferencia en un 10,71% con respecto al original pero, $x_*(\delta)$ se encuentra más alejada de su valor en la función original que el $x_*(\delta)$ del problema (4.5)-(4.6) esto se ve reflejado en su porcentaje relativo de 28,57%, esto quiere decir que los valores de δ considerados en el presente problema tuvieron un impacto mayor en el valor mínimo.

Figura1: Comparación problema 1 original y perturbado



Fuente: Autores

En la gráfica se observa las funciones objetivos de los respectivos problemas original y perturbados. La función objetivo original corresponde a la línea azul, mientras la línea verde y roja a las funciones (4.5) y (4.7) respectivamente.

La gráfica muestra una comparación de la función objetivo original con las resultantes a partir de las perturbaciones, se puede ver también qué tanto se alejan los nuevos problemas generados con respecto al problema original. El tamaño de la región factible es diferente para cada uno de los casos, lo que puede generar errores al buscar soluciones factibles.

4.2 PROBLEMA 2

Como un segundo ejemplo, considérese el siguiente problema en el cual se presenta un conjunto solución dado por una línea recta. El problema original esta dado de la siguiente manera:

$$f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min \qquad (4.9)$$

$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \leq 1\} \qquad (4.10)$$

Asignando diferentes valores a x_1 en la restricción se hallan sus respectivos valores de x_2 y se sustituyen las parejas de puntos en la función objetivo para encontrar el valor óptimo en cada caso.

Tabla 3: Solución problema 2 original

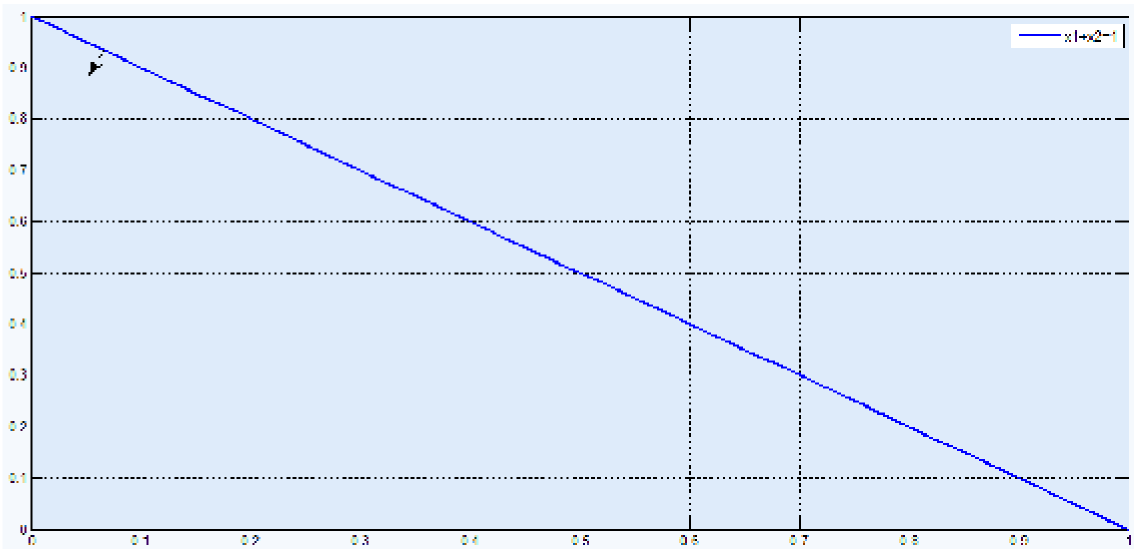
x_1	x_2	f_*
1	0	-1
0,5	0,5	-1
0	1	-1

-0,5	1,5	-1
-1	2	-1

Fuente: Autores

Para efectos del ejercicio se tomaron parejas de puntos que hacen parte de la recta $x_1 + x_2 = 1$, como resultado se obtuvo que el valor mínimo de la función objetivo es *-1.* Cualquier pareja de puntos por fuera de la recta y que se encuentre dentro de la región factible tiene un valor mayor de la función objetivo. Entonces, se puede afirmar que el valor mínimo es -1 y el conjunto de puntos que corresponden al valor mínimo es $x_* = X = x_1 + x_2 = 1$

Figura 2: x_2 **vs** x_1



Fuente: Autores

La gráfica muestra la línea recta que corresponde a $X_* = x_1 + x_2 = 1$. La flecha indica que la región factible corresponde a todos los puntos ubicados debajo de la línea.

Supóngase ahora que en lugar de los datos de entrada se tienen datos aproximados, se considera entonces el siguiente problema:

$$f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min \tag{4.11}$$

$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + \delta x_1 + x_2 - \delta x_2 \leq 1 + \delta\} \tag{4.12}$$

En primer lugar, se asigna de manera aleatoria un valor para δ el cual se encuentra entre [0,1]. Una vez se hace el remplazo de $\delta = 0{,}1$ en el problema se lleva a cabo el mismo procedimiento utilizado anteriormente.

$\delta = 0{,}1$

$x_1 + 0{,}1x_1 + x_2 - 0{,}1x_2 \leq 1 - 0{,}1$

$1{,}1x_1 + 0{,}9x_2 \leq 1{,}1$

$x_1 \leq 1 - 0{,}81x_2$

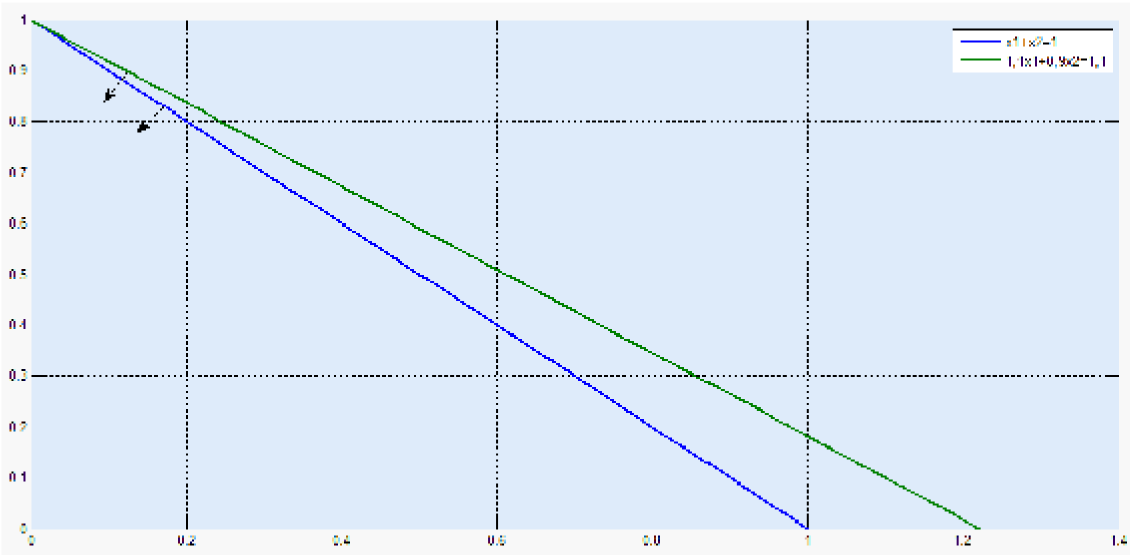
Tabla 4: Solución problema 2 perturbado

x_2	x_1	f_*
0	1	-1
3	-1,43	-1,57
3,5	-1,835	-1,665
4	-2,24	-1,76
4,5	-2,645	-1,855
5	-3,05	-1,95

Fuente: Autores

Al remplazar parejas de puntos que hagan parte de la recta se puede notar que a medida que el valor de x_2 aumenta, el valor óptimo de la función objetivo tiende a $-\infty$, por lo tanto, el conjunto X_* es vacío ya que no existe un valor o conjunto de valores correspondientes al punto mínimo de la función objetivo.

Figura 3: Comparación problema 2 original y perturbado



Fuente: Autores

Para este caso particularmente, al perturbar el problema con $\delta = 0{,}1$, los valores tanto de la función objetivo como de las variables de decisión se ven afectados completamente a tal punto de pasar de un problema donde se encuentra un valor mínimo y un conjunto de datos asociados a dicho valor mínimo a un problema donde no existe dicho valor o conjunto de valores que haga óptima a la función objetivo.

4.3 PROBLEMA 3

Los casos anteriores eran problemas donde se presentaba una sola restricción. En cambio, para este problema se tienen dos restricciones, además, se resolverá utilizando el método simplex tanto para el problema original como para el perturbado.

El problema de optimización está dado de la siguiente manera:

$$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \tag{4.13}$$

$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \leq 1; -x_1 - x_2 \leq -1\} \tag{4.14}$$

Al evaluar algunos puntos dentro de la recta $x_1 + x_2 = 1$ se encontraron los siguientes datos:

Tabla 5: Solución problema 3 original

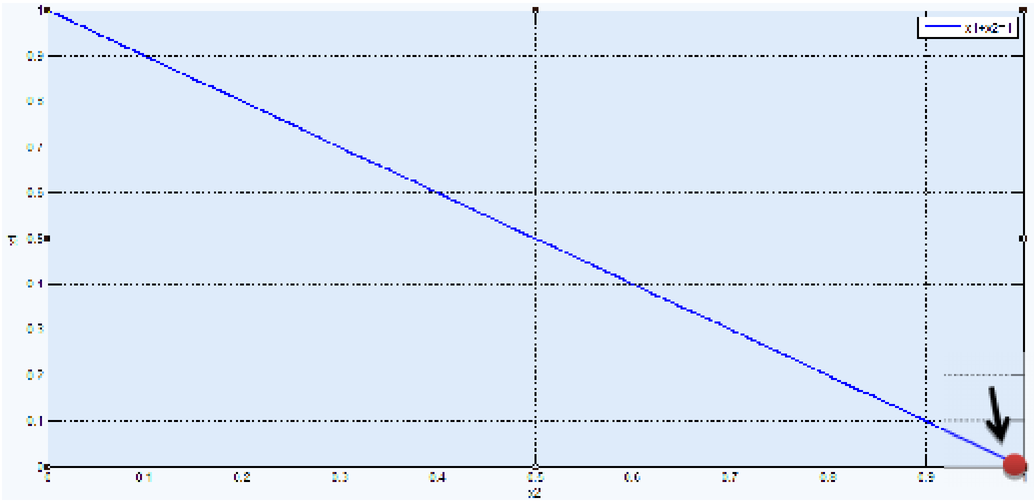
x_1	x_2	f_*
0,8	0,2	0,6
0,6	0,4	0,2
0,5	0,5	0
0,3	0,7	-0,4
0,2	0,8	-0,6
0	1	-1

Fuente: Autores

Se afirma entonces que el valor mínimo de la función objetivo es -1 y el punto asociado a dicho valor es $x_* = [x_1 = 0, x_2 = 1] \Rightarrow (0,1)$

A continuación, en la figura 4 muestra la línea recta $x_1 + x_2 = 1$ y el correspondiente punto mínimo de la función objetivo:

Figura 4: Región factible problema original



Fuente: Autores

Si en lugar de los datos de entrada se tienen datos aproximados el problema original se convierte en el siguiente:

$$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \tag{4.15}$$

$$x \in X = \begin{Bmatrix} (x_1, x_2) \in E^2 : x_1 - \delta x_1 + x_2 \leq 1 + \delta \\ -x_1 - \delta x_1 - x_2 \leq -1 - \delta \\ 0 < \delta < 1 \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) que se muestran adelante resultan de la asignación de un valor de δ aleatorio a las restricciones. Debido a que la función objetivo, para este caso, no tuvo ninguna perturbación sino que es la misma del problema original.

El nuevo problema de optimización resulta de la siguiente manera:

$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$\delta = 0{,}5$

$S.A$:

$$x_1 - 0{,}5x_1 + x_2 \leq 1 + 0{,}5 \qquad\qquad -x_1 - 0{,}5x_1 - x_2 \leq -1 - 0{,}5$$

$$0{,}5x_1 + x_2 \leq 1{,}5 \quad (4.17) \qquad\qquad -1{,}5x_1 - x_2 \leq -1{,}5 \quad (4.18)$$

Es importante notar que para este nuevo problema las restricciones son considerablemente diferentes a las del problema original. A partir de éstas, se halla la región factible, también, se evaluaron las siguientes parejas de datos con el fin de encontrar el punto mínimo de la función objetivo. Los datos obtenidos fueron:

Tabla 6: Solución problema 3 perturbado

x_1	x_2	f_*
0	1,5	-1,5
1	0	0
3	0	3

Fuente: Autores

Entonces, el valor óptimo de la función objetivo es -1,5 y el punto mínimo asociado a este valor es $x_* = [x_1 = 0, x_2 = 1{,}5] \Rightarrow (0{,}1.5)$. Considerando ahora el impacto que tiene la perturbación sobre el valor y el punto mínimo:

$$\overline{f_*} = \left| \frac{-1{,}5 - (-1)}{-1{,}5} \right| \times 100 = 33{,}33\%$$

Por un lado, el valor mínimo $f_*(\delta)$ de la función objetivo diverge en un 33,33% del valor mínimo f_* de la función objetivo original.

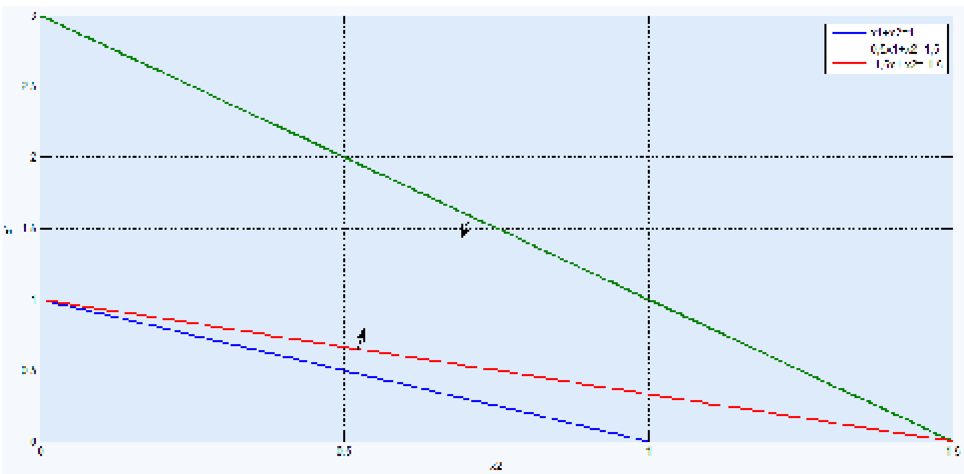
En segunda instancia se lleva a cabo el mismo procedimiento para el punto mínimo x_* y se obtiene:

$$x_1(\delta) = x_1$$

$$\overline{x_2} = \left|\frac{1,5-1}{1,5}\right| \times 100 = 33,33\%$$

El valor de x_1 se mantiene pero el valor de x_2 se ve afectado en un 33,33%. En este caso, al cambiar un valor en el conjunto x, la región factible también experimenta una alteración. Para entender mejor el impacto de la perturbación sobre la región factible véase a continuación la figura 5.

Figura5: Comparación problema original y perturbado



Fuente: Autores

En la gráfica se evidencia cómo afecta la perturbación al problema original viéndose reflejada en la región factible. El conjunto de puntos pertenecientes a la región factible en el problema original no se encuentran dentro de la región factible del problema perturbado.

4.3.1 Método Simplex. A continuación se desarrolla simbólicamente el problema 3 utilizando el método Simplex, con el fin de determinar las alteraciones de la solución óptima y de las variables de decisión en función de δ.

Recuérdese que el problema original está dado por:

$$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min \tag{4.13}$$

Sujeto a:

$x_1 + x_2 \leq 1$

$-x_1 - x_2 \leq -1$ Multiplicamos esta ecuación por (-1) $\rightarrow x_1 + x_2 \geq 1$

Planteándolo por SIMPLEX

El ejercicio propuesto se resolverá por medio del método simplex y como primer paso la función objetivo debe ser de maximización:

$$\max f(x) = -x_1 + x_2 - Mw_1 \tag{4.19}$$

Sujeta a restricciones que deben ser igualdades gracias a las variables de holgura, x_3 (para las menores o iguales), de excedencia y/o las variables artificiales, s_1 y w_1 (para mayores o iguales); de la siguiente forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{4.20}$$

$$x_1 + x_2 - s_1 + w_1 = 1 \tag{4.21}$$

Las variables de decisión no pueden ser negativas, por lo tanto se plantea una nueva restricción:

$$x_1, x_2, x_3, s_1, w_1 \geq 0$$

Se elabora una tabla inicial para resolver el problema con el fin de encontrar una solución óptima factible.

Tabla 7: Inicial de simplex problema 3

TABLA INICIAL								
C_j			-1	1	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0		1	1	1	1	0	0	1
$-M$	w_1	1	1	1	0	-1	1	1
Z_j		$-M$	$-M$	$-M$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$-1+M$	$1+M$	0	0	0	

Fuente: Autores

Sale: x_3; **Entra:** x_2

Como la solución aún no es factible porque no todos los valores del último renglón son ceros o negativos, se debe buscar una mejor solución; para esto, sale una variable básica x_3 y entra una no básica x_2.

La variable que entra se toma de aquella que tenga el mayor valor $C_j - Z_j$ y la variable que sale es la que tuvo el menor valor en b_j / a_{ij}.

Tabla 8: Primera Iteración simplex problema 3

PRIMERA ITERACIÓN								
C_j			-1	1	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
1	x_2	1	1	1	1	0	0	
$-M$	w_1	0	0	0	-1	-1	1	
Z_j		1	1	1	$1+M$	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			-2	0	$-(1+M)$	$-M$	0	

Fuente: Autores

Con esta iteración se llega a la solución óptima.

- ✓ Solución Óptima:

$x_1 = 0;\ x_2 = 1;\ x_3 = 0;\ s_1 = 0\ ;\ w_1 = 0$

$f(x_*) = -1$

Resultados	Utilizando el método simplex para resolver el problema original se pudo demostrar que el valor mínimo que puede tomar la función objetivo es -1 y el conjunto solución óptimo es (0,1).

Ahora, se efectúa el mismo procedimiento para el problema perturbado, recordando que el problema perturbado se denota así:

$f(x) = x_1 - x_2 \rightarrow \min$

Sujeto a:

$x_1 - \delta x_1 + x_2 \leq 1 + \delta$

$-x_1 - \delta x_1 - x_2 \leq -1 - \delta$ Multiplicamos esta ecuación por (-1) $x_1 + \delta x_1 + x_2 \geq 1 + \delta$

Es necesario tener en cuenta que el método Simplex no permite que ninguno de los elementos del vector de recursos b_j sea negativo, es por ello que la segunda restricción se multiplica por -1.

- ✓ Planteando el Modelo:

La función objetivo debe ser de maximización

$\max f(x) = -x_1 + x_2 - Mw_1$

Las restricciones deben ser igualdades.

Sujeto a:

$$(1-\delta)x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \delta$$
$$(1+\delta)x_1 + x_2 - s_1 + w_1 = 1 + \delta$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, w_1 \geq 0$$

Se crea la tabla inicial del Simplex con base a la función objetivo y las restricciones del problema para empezar las iteraciones.

Tabla 9: Inicial de simplex problema 3 perturbado

TABLA INICIAL								
C_j			-1	1	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	$1+\delta$	$1-\delta$	1	1	0	0	$1+\delta$
$-M$	w_1	$1+\delta$	$1+\delta$	1	0	-1	1	$1+\delta$
Z_j		$-M(1+\delta)$	$-M(1+\delta)$	$-M$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$-1+M(1+\delta)$	$1+M$	0	$-M$	0	

Fuente: autores

La tabla inicial es el punto de partida de las iteraciones, en ella se muestran las variables que deben hacer parte de la base y aquellas que deben abandonar la base, en este caso:

Sale: w_1; **Entra:** x_2

Se efectúa una nueva iteración con el fin de encontrar la solución óptima.

Tabla 10: Primera iteración simplex problema 3 perturbado

PRIMERA ITERACIÓN								
C_j			-1	1	0	0	-M	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	0	-2δ	0	1	1	-1	0
1	x_2	$1+\delta$	$1+\delta$	1	0	-1	1	$-1-\delta$
Z_j		$1+\delta$	$1+\delta$	1	0	-1	1	
$C_j - Z_j$			$-2-\delta$	0	0	1	$-M-1$	

Fuente: Autores

Sale: x_3; **Entra:** s_1

La función todavía se puede mejorar, por tanto se efectúa una segunda iteración.

Tabla 11: Segunda iteración simplex problema 3 perturbado

SEGUNDA ITERACIÓN								
C_j			-1	1	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	s_1	0	-2δ	0	1	1	-1	
1	x_2	$1+\delta$	$1-\delta$	1	1	0	0	
Z_j		$1+\delta$	$1-\delta$	1	1	0	0	
$C_j - Z_j$			$-2+\delta$	0	-1	0	$-M$	

Fuente: Autores

- ✓ Solución Óptima:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1 + \delta$; $x_3 = 0$; $s_1 = 0$; $w_1 = 0$

$f(x)_* = -1 - \delta$

<u>Resultados</u>	En el problema aproximado se agregaron perturbaciones (δ) a sus restricciones, al plantearse el método simplex se obtuvo el punto mínimo: $f(x)_* = -1 - \delta$. Esto es, al aumentar el valor de δ, el punto mínimo se hace más pequeño. La variable x_1 no se ve afectada por la perturbación, no obstante, la variable x_2 se comporta de la misma manera que la función objetivo.

4.4 PROBLEMA 4

A continuación, con un nuevo ejemplo se aplica el Método de Regularización de Tikhonov, con el propósito de ilustrar su construcción y desarrollo.

El problema original es el siguiente:

$$f(x) = x_1 \to \min \tag{4.17}$$

$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \le 1; -x_1 - x_2 \le -1\}$$

Matriz de los coeficientes de la función objetivo: $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matriz de las restricciones: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Matriz de los recursos disponibles: $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

El problema original se procede a resolver por el método Simplex

Tabla 12: Inicial- Problema 4

TABLA INICIAL									
C_j			-1	0	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	1	1	1	1	0	0	1
$-M$	w_1	1	1	1	0	-1	1	1
Z_j		$-M$	$-M$	$-M$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$-1+M$	M	0	$-M$	0	

Fuente: Autores

Sale: x_3; **Entra:** x_2

Se realiza una primera iteración con el fin de encontrar la solución óptima, es decir (cuando todos los datos del último renglón $C_j - Z_j$ sean ceros o negativos)

Tabla 13: Primera Iteración simplex problema 4

PRIMERA ITERACIÓN								
C_j			-1	1	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_2	1	1	1	1	0	0	
$-M$	w_1	0	0	0	-1	-1	1	
Z_j		0	0	0	M	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			-1	0	$-M$	$-M$	0	

Fuente: Autores

Con esta iteración se llega a la solución óptima, por lo tanto:

- ✓ Solución Óptima:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $s_1 = 0$; $w_1 = 0$

$f_* = 0$

Ahora se supone que no se cuenta con los datos exactos, en su lugar se tienen datos aproximados, entonces se obtiene un nuevo problema:

$$f(x) = x_1 \to \min$$

$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \leq 1; -x_1 - \delta_1 x_1 - x_2 - \delta_1 x_2 \leq -1 + \delta_2\}$$

Matriz de los coeficientes de la función objetivo: $C(\delta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matriz de las restricciones: $A(\delta)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-\delta_1 & -1-\delta_1 \end{pmatrix}$

Matriz de los recursos disponibles: $b(\delta)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\delta_2 \end{pmatrix}$

El paso a seguir es encontrar la solución óptima para el problema perturbado, el cual se realiza utilizando de nuevo el método simplex:

Tabla 14: inicial problema 4 perturbado

TABLA INICIAL									
C_j			-1	0	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	1	1	1	1	0	0	1
$-M$	w_1	$1-\delta_2$	$1+\delta_1$	$1+\delta_1$	0	-1	1	$1-\delta_2 / 1+\delta_1$
Z_j		$-M(1-\delta_2)$	$-M(1+\delta_1)$	$-M(1+\delta_1)$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$-1+M(1+\delta_1)$	$M(1+\delta_1)$	0	0	0	

Fuente: Autores

Sale: w_1; **Entra:** x_2

La solución aún no es factible porque no todos los valores del último renglón son ceros o negativos, se debe buscar una mejor solución; para esto se realiza una primera iteración:

Tabla 15: Primera Iteración simplex problema 4 perturbado

PRIMERA ITERACIÓN									
C_j			-1	0	0	0	$-M$	
C_j	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	$\frac{\delta_2}{1+\delta_1}$	$\frac{-\delta_1}{1+\delta_1}$	0	$\frac{1}{1+\delta_1}$	$\frac{1}{1+\delta_1}$	$\frac{-1}{1+\delta_1}$	
0	x_2	$1-\delta_2$	$1+\delta_1$	$1+\delta_1$	0	-1	1	
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$C_j - Z_j$			-1	0	0	0	$-M$	

Fuente: Autores

En este caso fue suficiente una sola iteración para alcanzar la solución óptima:

- ✓ Solución Óptima:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1-\delta_2$; $x_3 = \frac{\delta_2}{1+\delta_1}$; $s_1 = 0$; $w_1 = 0$

$f_* = 0$

Se procede a aplicar el método de Tikhonov al problema perturbado, por ello se debe recordar los conceptos de la función de Tikhonov expuestos en la sección anterior. La función se denota así:

$$t\delta(x) = x_1 + \alpha(x_1 + x_2)$$

$$w(\delta) = \{x \geq 0 : (A(\delta) - \delta_1 I_2 I_2^T)x \leq b(\delta) + \theta I_2\}$$

Resolviendo cada término para obtener las nuevas restricciones:

- $\delta_1 I_2 I_2^T = \delta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \delta_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \end{bmatrix}$

- $(A(\delta) - \delta_1 I_2 I_2^T)x = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-\delta_1 & -1-\delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \right\} x = \begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \end{bmatrix} x$

- $\theta I_2 = \theta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix}$

- $b(\delta) + \theta I_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \end{bmatrix}$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\delta_1)x_1 + & (1-\delta_1)x_2 \\ (-1-2\delta_1)x_1 + & (-1-2\delta_1)x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \end{bmatrix}$$

Las nuevas restricciones son:

$$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 \le 1+\theta \tag{4.18}$$

$$(-1-2\delta_1)x_1 + (-1-2\delta_1)x_2 \le -1+\delta_2+\theta \tag{4.19}$$

El conjunto de ecuaciones se resuelve asignando valores para cada uno de los parámetros, estos valores se encuentran entre [0,1] y fueron seleccionados aleatoriamente.

- $\delta_1 = 0{,}03$
- $\delta_2 = 0{,}01$
- $\theta = 0{,}05$
- $\alpha = 0{,}07$

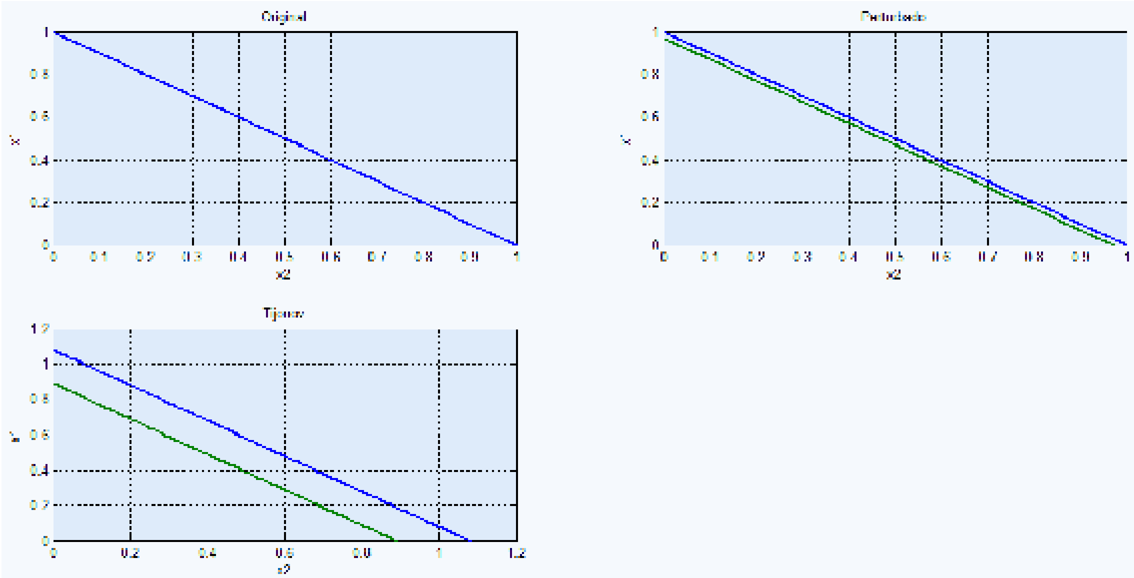
Las nuevas restricciones obtenidas a partir de las perturbaciones son:

$$0.97x_1 + 0.97x_2 \leq 1{,}05$$
$$-1{,}06x_1 - 1{,}06x_2 \leq -0{,}94$$

La figura 6 muestra el comportamiento del problema al perturbarlo y al utilizar el método de Tikhonov. Las rectas de las gráficas corresponden a las restricciones de cada uno de los problemas relacionados.

Para el problema original la región factible corresponde al conjunto de puntos sobre la recta. Sin embargo, para el problema perturbado y el de Tikhonov, la región factible es la zona ubicada dentro de las dos rectas originadas por las restricciones. Este método genera una ampliación en la región factible.

Figura 6: Problemas original, perturbado y Tikhonov



Fuente: Autores

4.4.1 Método de Regularización de Tikhonov. Ahora se procede a solucionar el nuevo problema generado por el Método de Tikhonov utilizando las iteraciones del Simplex. El problema está dado de la siguiente manera:

$$MinT\,\delta(x) = x_1 + \alpha(x_1 + x_2) = (1+\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

Sujeto a:

$$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 \le 1+\theta$$
$$(1+2\delta_1)x_1 + (1+2\delta_1)x_2 \ge 1-\delta_2-\theta$$

El código del Simplex está diseñado para la maximización, por lo tanto, se convierte el problema en un problema de maximización:

Max $T\delta(x) = -(1+\alpha)x_1 - \alpha x_2 - Mw_1$ (4.20)

Las restricciones deben ser igualdades, esto se hace añadiendo variables de holgura a las menores o iguales; y variables de excedencia y artificiales a las restricciones mayores o iguales.

Sujeto a:

$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 + x_3 = 1 + \theta$

$(1 + 2\delta)_1 x_1 + (1 + 2\delta_1)x_2 - s_1 + w_1 = 1 - \delta_2 - \theta$

Condición de no negatividad.

$x_1, x_2, x_3, s_1, w_1 \geq 0$

Se elabora una tabla inicial (tabla 16) y una primera tabla de iteración (tabla 17) con el fin de llegar a la solución óptima, es decir, que la función objetivo encuentre un valor donde no siga mejorando. Esto se ve en las tablas del simplex al lograr que el renglón de $C_j - Z_j$ sean negativos o ceros.

La solución óptima es:

$$x_1 = 0\ ;\ \ x_2 = \frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}\ ;\ \ s_1 = 0\ ;\ \ w_1 = 0\ ;\ \ x_3 = \frac{2\theta+\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2-\delta_1\theta}{1+2\delta_1}\ ;$$

$$T_\delta(x)_* = (1+\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

$$T\alpha(x)_* = \alpha\left(\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}\right) \tag{4.21}$$

Tabla 16: Inicial Simplex-Tikhonov

TABLA INICIAL								
Cj			$-(1+\alpha)$	$-\alpha$	0	0	$-M$	
Cj	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	$1+\theta$	$1-\delta_1$	$1-\delta_1$	1	0	0	$1+\theta \big/ 1-\delta_1$
$-M$	w_1	$1-\delta_2-\theta$	$1+2\delta_1$	$1+2\delta_1$	0	-1	1	$1-\delta_2-\theta \big/ 1+2\delta_1$
Z_j		$-M(1-\delta_2-\theta)$	$-M(1+2\delta_1)$	$-M(1+2\delta_1)$	0	M	$-M$	
$C_j - Z_j$			$-(1+\alpha)+M(1+2\delta_1)$	$-\alpha+M(1+2\delta_1)$	0	$-M$	0	

Fuente: Autores

Tabla 17: Primera iteración Simplex-Tijonov

PRIMERA ITERACIÓN								
Cj			$-(1+\alpha)$	$-\alpha$	0	0	$-M$	
Cj	**Solución**	b_j	x_1	x_2	x_3	s_1	w_1	b_j / a_{ij}
0	x_3	$\frac{2\theta+\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2-\delta_1\theta}{1+2\delta_1}$	$\frac{-2\delta_1+2\delta_1^2}{1+2\delta_1}$	0	$\frac{1}{1+2\delta_1}$	$\frac{1-\delta_1}{1+2\delta_1}$	$\frac{-1+\delta_1}{1+2\delta_1}$	
$-\alpha$	x_2	$\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}$	1	1	0	$\frac{-1}{1+2\delta_1}$	$\frac{1}{1+2\delta_1}$	
Z_j		$-\alpha\left(\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}\right)$	$-\alpha$	$-\alpha$	0	$-\alpha\left(\frac{-1}{1+2\delta_1}\right)$	$-\alpha\left(\frac{1}{1+2\delta_1}\right)$	
$C_j - Z_j$			-1	0	0	$\frac{-\alpha}{1+2\delta_1}$	$-M+\frac{\alpha}{1+2\delta_1}$	

Fuente: Autores

Análisis de Sensibilidad de Tikhonov

Se realiza un análisis de sensibilidad para el método de Tikhonov, usando Matlab variando la solución óptima con diferentes valores y analizar el comportamiento de cada parámetro después de cada variación:

$$T\alpha(x)_* = \alpha\left(\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}\right).$$

- Al variar los valores de α

Tabla 18: Variación de α método Tikhonov

α	δ_1	δ_2	θ	**Fval**	x_1, x_2
0.01	0.03	0.01	0.05	0.0089	(0;0.8868)
0.05	0.03	0.01	0.05	0.0443	(0;0.8868)
0.07	0.03	0.01	0.05	0.0621	(0;0.8868)
0.1	0.03	0.01	0.05	0.0887	(0;0.8868)
0.5	0.03	0.01	0.05	0.4434	(0;0.8868)
0.7	0.03	0.01	0.05	0.6208	(0;0.8868)
0.9	0.03	0.01	0.05	0.7981	(0;0.8868)
1	0.03	0.01	0.05	0.8868	(0;0.8868)

Fuente: Autores

Al variar el valor de α entre cero y 1, se puede ver que a medida que éste va incrementando, el valor de la función objetivo tiende a 1, es decir, se aleja de la solución del problema original. Por otro lado, el valor de las x se mantiene constante para todos los valores de α estudiados.

- Al variar el valor de θ:

Tabla 19: Variación de θ método Tikhonov

α	δ_1	δ_2	θ	**Fval**	x_1, x_2
0.7	0.03	0.01	**0.01**	0.0647	(0;0.9245)
0.7	0.03	0.01	**0.05**	0.0621	(0;0.8868)
0.7	0.03	0.01	**0.07**	0.0608	(0;0.8679)
0.7	0.03	0.01	**0.1**	0.0588	(0;0.8396)
0.7	0.03	0.01	**0.5**	0.0324	(0;0.4623)
0.7	0.03	0.01	**0.7**	0.0192	(0;0.2736)
0.7	0.03	0.01	**0.9**	0.0059	(0;0.0849)
0.7	0.03	0.01	**1**	$9.3303x10^{-12}$	(0.0003;0.1293)

Fuente: Autores

Al hacer variaciones en los valores de θ, los valores de la función objetivo se acercan a cero a medida que θ tiende a 1. Es decir, que a medida que θ se haga más pequeño, el valor mínimo de la función se ve más afectado. Sin embargo, cuando θ se hace mayor que 0,9, el comportamiento cambia y el valor de la función objetivo se hace muy cercano al valor del problema original.

En cuanto a los valores de x, tienen un comportamiento inverso, a medida que θ aumenta, el valor de x_2 se aleja de su valor original.

- Al variar el valor de δ_1

Tabla 20: Variación de δ_1 método Tikhonov

α	δ_1	δ_2	θ	**Fval**	x_1, x_2
0.7	**0.01**	0.01	0.05	0.0645	(0;0.9216)
0.7	**0.05**	0.01	0.05	0.0598	(0;0.8545)
0.7	**0.07**	0.01	0.05	0.0577	(0;0.8246)
.7	**0.1**	0.01	0.05	0.0548	(0;0.7833)

Continuación tabla 20

0.7	**0.5**	0.01	0.05	0.0329	(0;0.4700)
0.7	**0.7**	0.01	0.05	0.0274	(0;0.3357)
0.7	**0.9**	0.01	0.05	0.0235	(0;0.3133)
0.7	**1**	0.01	0.05	0.0219	(0;0.3917)

Fuente: Autores

En el caso de δ_1, a medida que se aumenta su valor, el valor mínimo de la función objetivo disminuye, es decir, que se acerca al f_* del problema original.

- Al variar el valor de δ_2

Tabla 21: Variación de δ_2 método Tikhonov

α	δ_1	δ_2	θ	**Fval**	x_1, x_2
0.7	0.03	**0.01**	0.05	0.0621	(0;0.8868)
0.7	0.03	**0.05**	0.05	0.0594	(0;0.8491)
0.7	0.03	**0.07**	0.05	0.0581	(0;0.8302)
0.7	0.03	**0.1**	0.05	0.0561	(0;0.8019)
0.7	0.03	**0.5**	0.05	0.0297	(0;0.4245)
0.7	0.03	**0.7**	0.05	0.0165	(0;0.2358)
0.7	0.03	**0.9**	0.05	0.0033	(0;0.0472)
0.7	0.03	**1**	0.05	$8.925\text{x}10^{-14}$	(0.0013;0.1079)

Fuente: Autores

El comportamiento de este parámetro es similar al anterior, a medida que aumenta su valor, la función objetivo disminuye. Al alcanzar un valor de 1, la función objetivo se acerca al valor del problema original.

4.4.2 Método de Regularización del Defecto. A continuación se da solución al problema que se ha tratado haciendo uso del método de regularización del defecto.

Problema Original:

$$f(x) = x_1 \to \min$$
$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \le 1; -x_1 - x_2 \le -1\}$$

Para el Problema Perturbado:

$$f(x) = x_1 \to \min$$
$$x \in X = \{(x_1, x_2) \in E^2 : x_1 + x_2 \le 1; -x_1 - \delta_1 x_1 - x_2 - \delta_1 x_2 \le -1 + \delta_2\}$$

Aplicando el método del defecto para el problema perturbado se propone:

$$Min T_{2\delta}(x) = \Omega(x) + \alpha |x|_1 = (1+\alpha)|x|_1$$

Sujeto a:

$$x \in G(\delta) = \{x \in E^n : x \ge 0, (D(\delta) - \delta_1 I_3 I_2^T)x \le d(\delta) + \theta I_3\}$$

Aplicando el Teorema del método del defecto discutido en el capitulo anterior, se tiene que:

$$D(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) \\ c(\delta) \end{bmatrix}; \; d(\delta) = \begin{bmatrix} b(\delta) \\ f_*(\delta) \end{bmatrix}$$

Donde:

$$A(\delta)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-\delta_1 & -1-\delta_1 \end{bmatrix}; \quad c(\delta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b(\delta)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+\delta_2 \end{bmatrix}$$

Remplazando en $D(\delta)$ y $d(\delta)$; se tiene:

$$D(\delta)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-\delta_1 & -1-\delta_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad d(\delta)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+\delta_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

- $$\delta_1 I_3 I_2^T = \delta_1\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \delta_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \end{bmatrix}$$

- $$(D(\delta)-\delta_1 I_2 I_2^T)x = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1-\delta_1 & -1-\delta_1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \\ \delta_1 & \delta_1 \end{bmatrix}\right\}x = \begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \\ 1-\delta_1 & -\delta_1 \end{bmatrix}x$$

- $$\theta I_3 = \theta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

- $$d(\delta)+\theta I_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+\delta_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

Resolviendo $(D(\delta)-\delta_1 I_3 I_2^T)x \le d(\delta)+\theta I_3$, se obtiene el conjunto de restricciones:

$$\begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \\ 1-\delta_1 & -\delta_1 \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-\delta_1 & 1-\delta_1 \\ -1-2\delta_1 & -1-2\delta_1 \\ 1-\delta_1 & -\delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-\delta_1)x_1 & (1-\delta_1)x_2 \\ (-1-2\delta_1)x_1 & (-1-2\delta_1)x_2 \\ (1-\delta_1)x_1 & (-\delta_1)x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 1+\theta \\ -1+\delta_2+\theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

Ecuaciones:

$$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 \le 1+\theta \tag{4.22}$$

$$(-1-2\delta_1)x_1 + (-1-2\delta_1)x_2 \le -1+\delta_2+\theta \tag{4.23}$$

$$(1-\delta_1)x_1 + (-\delta_1)x_2 \le \theta \tag{4.24}$$

Teniendo las ecuaciones de las restricciones se procede a plantear por el método Simplex:

$$Min T_{2\delta}(x) = \Omega(x) + \alpha|x|_1 = (1+\alpha)|x|_1 = (1+\alpha)(x_1+x_2) = (1+\alpha)x_1 + (1+\alpha)x_2 \tag{4.25}$$

Sujeto a:

$$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 \le 1+\theta$$

$$(1+2\delta_1)x_1 + (1+2\delta_1)x_2 \ge 1-\delta_2-\theta$$

$$(1-\delta_1)x_1 - \delta_1 x_2 \le \theta$$

Como se explicó anteriormente, para el Simplex el problema debe ser de maximización por lo tanto, el problema final es el siguiente:

$$MaxT_{2\delta}(x) = -(1+\alpha)x_1 - (1+\alpha)x_2 - Mw_1$$

Sujeto a:

$$(1-\delta_1)x_1 + (1-\delta_1)x_2 + x_3 = 1+\theta$$

$$(1+2\delta_1)x_1 + (1+2\delta_1)x_2 - s_1 + w_1 = 1-\delta_2 - \theta$$

$$(1-\delta_1)x_1 - \delta_1 x_2 + x_4 = \theta$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, w_1 \geq 0$$

Se elabora la tabla inicial (Tabla 22) para resolver el problema por el método simplex, al no encontrar en ésta la solución óptima se realiza una primera iteración (Tabla 23) con la cual se obtiene la siguiente solución:

Tabla 22: Inicial Simplex-Defecto

TABLA INICIAL									
Cj			$-(1+\alpha)$	$-(1+\alpha)$	0	0	0	$-M$	
Cj	**Solución**	**Bj**	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	w_1	**bj/aij**
0	x_3	$1+\theta$	$1-\delta_1$	$1-\delta_1$	1	0	0	0	$1+\theta / 1-\delta_1$
$-M$	w_1	$1-\delta_2-\theta$	$1+2\delta_1$	$1+2\delta_1$	0	0	-1	1	$1-\delta_2-\theta / 1+2\delta_1$
0	x_4	θ	$1-\delta_1$	$-\delta_1$	0	1	0	0	$\theta / -\delta_1$
Zj		$-M(1-\delta_2-\theta)$	$-M(1+2\delta_1)$	$-M(1+2\delta_1)$	0	0	M	$-M$	
Cj – Zj			$-(1+\alpha)+M(1+2\delta_1)$	$-(1+\alpha)+M(1+2\delta_1)$	0	0	$-M$	0	

Fuente: Autores

Sale: $W_{1;}$ Entra: X_2

Tabla 23: Primera Iteración Simplex-Defecto

PRIMERA ITERACIÓN									
Cj			$-(1+\alpha)$	$-(1+\alpha)$	0	0	0	$-M$	
Cj	**Solución**	**Bj**	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	w_1	**bj/aij**
0	x_3	$\frac{2\theta+\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2-\delta_1\theta}{1+2\delta_1}$	$\frac{-2\delta_1+2\delta_1^2}{1+2\delta_1}$	0	$\frac{1}{1+2\delta_1}$	0	$\frac{1-\delta_1}{1+2\delta_1}$	$\frac{-(1+\delta_1)}{1+2\delta_1}$	
$-(1+\alpha)$	x_2	$\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}$	1	1	0	0	$\frac{-1}{1+2\delta_1}$	$\frac{1}{1+2\delta_1}$	
0	x_4	$\frac{\delta_1(1-\delta_2-\theta)+\theta}{1+2\delta_1}$	$\frac{1+2\delta_1^2}{1+2\delta_1}$	0	0	$\frac{1}{1+2\delta_1}$	$\frac{-\delta_1}{1+2\delta_1}$	$\frac{\delta_1}{1+2\delta_1}$	
Zj		$\frac{-(1+\alpha)(1-\delta_2-\theta)}{1+2\delta_1}$	$-(1+\alpha)$	$-(1+\alpha)$	0	0	$\frac{1+\alpha}{1+2\delta_1}$	$\frac{-(1+\alpha)}{1+2\delta_1}$	
Cj – Zj			0	0	0	0	$-\frac{1+\alpha}{1+2\delta_1}$	$-M+\frac{1+\alpha}{1+2\delta_1}$	

Fuente: Autores

La solución óptima para el problema es:

$$x_1 = 0 \,; \quad x_2 = \frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1} \,; \quad x_3 = \frac{2\theta+\delta_1+\delta_2-\delta_1\delta_2-\delta_1\theta}{1+2\delta_1} \,; \quad x_4 = \frac{\delta_1(1-\delta_2-\theta)+\theta}{1+2\delta_1} \,;$$

$$s_1 = 0 \,; \quad w_1 = 0$$

$$T_{2\delta}(x)_* = (1+\alpha)x_1 + (1+\alpha)x_2 = (1+\alpha)\left(\frac{1-\delta_2-\theta}{1+2\delta_1}\right)$$

4.5 PROBLEMA PRÁCTICO

Seguidamente, se presentará una aplicación real desarrollada mediante el uso de la caja de herramientas de optimización de MATLAB con el fin de ilustrar plos amplios usos de los modelos de programación lineal y la utilización de este software para resolverlos.

PROBLEMA

El Instituto Colombiano de Bienestar Familiar ICBF produce un complemento alimenticio llamado Bienestarina, con el objeto de subsanar el déficit de la disponibilidad de proteínas y calorías y, en general, el problema nutricional de las comunidades de escasos recursos económicos.

La Bienestarina es un alimento basado en mezclas vegetales y que contiene nutrientes y calorías necesarias, según previo estudio, para llenar deficiencias alimenticias. Estos nutrientes y calorías que en adelante se llamarán APORTES, se encuentran en diferentes materias primas de origen agrícola como *la soya, el arroz, etc. y otras materiales industriales como harina de maíz, harina de trigo, leche en polvo, etc.*

El problema consiste en encontrar una formulación para una mezcla vegetal que sea óptima, de acuerdo con los costos de las materias primas.

A continuación se muestran los datos de costos de la materia prima, los aportes de nutrientes y calorías de éstas y sus respectivos requerimientos:

Tabla 24: Costo de Materia prima

MATERIA PRIMA	COSTO (1$/TONELADA)
1	15176,17
2	17827,24
3	20861,87
4	39561,27
5	12600,00
6	35509,12
7	41400,00
8	988000,00
9	441000,00
10	1612400,00
11	420000,00
12	2541000,00
13	242000,00

Fuente: I.C.B.F. Subdirección de Nutrición

Tabla 25: Aportes de Nutrientes y Calorías en 100 gramos de materia prima

APORTE	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13
1	348,72	343,98	313,14	366,18	364,43	0	0	0	0	0	0	0	0
2	8	12	52,50	36	8	0	0	0	0	0	0	0	0
3	20,77	85,65	220,98	1,125	18	20,41	0	0	0	0	0	0	0
4	318,46	283,30	656,07	965,62	208	22,79	0	0	0	0	0	0	0
5	3,11	4,65	8,63	0,56	2,6	0	20,41	0	0	0	0	0	0
6	0,375	0,56	0,58	0,35	0,1	0	0	0	0	100000	0	0	0
7	0,162	0,285	0,235	2,235	0,37	0	0	0	0	0	0	100000	0
8	2,62	3,57	1,57	1,28	2,00	0	0	0	0	0	100000	0	0
9	625	0	0	35	0	0	0	2500000	0	0	0	0	0
10	0	0	0	5,83	0	0	0	0	100000	0	0	0	0
11	10	12	9,5	3,5	10	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1,5	1,25	2,5	1,5	0,75	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1,5	0,75	3	0	0,75	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1,5	0,1	5,5	7,5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
15	77,5	73	27	51,5	79,5	0	0	0	0	0	0	0	0
16	12,24	24,48	429,45	327,6	14,32	0	0	0	0	0	0	0	100000

Fuente: I.C.B.F. Subdirección de Nutrición

Tabla 26: Requerimientos de nutrientes y calorías en 100 gramos de Bienestarina

APORTE	MÍNIMO	MÁXIMO	RANGO
1	300,84	352,28	51,44
2	25,1	28,19	3,09
3	809,21	849,25	40,04
4	896,08	1070,87	174,79
5	14,602	16,651	2,049
6	1,191	1,469	0,278
7	824	934	0,11
8	7,602	9,321	1,719
9	3341,91	3446,59	104,68
10	31,59	31,69	0,1
11	8,25	10,61	2,36
12	1,33	2,25	0,92
13	1,41	2,27	0,86
14	2,75	3,71	0,96
15	50,3	58,47	8,17
16	442,75	533,2	90,45

Fuente: I.C.B.F. Subdirección de Nutrición

Debido a que se están manejando datos por cada 100 gramos, convertimos la tabla de costos (tabla 1) a ($/100 gramos):

Tabla 27: Costo de materia prima (gramos)

MATERIA PRIMA	COSTO (1$/100 gramos)
1	1.5176
2	1.7827
3	2.0861
4	3.9561

Continuación tabla 27

5	1.26
6	3.5509
7	4.14
8	98.8
9	44.1
10	161.24
11	42
12	254.1
13	24.2

Fuente: Autores

4.5.1 Formulación del problema original. Basado en los datos de las tablas 1, 2 y 3, se formula el modelo de optimización del problema de la mezcla vegetal, entonces se tiene:

$$MinZ = 1.5176x_1 + 1.7827x_2 + 2.0861x_3 + 3.9561x_4 + 1.26x_5 + 3.5509x_6 + 4.14x_7 + 98.8x_8 + 44.1x_9 + 161.24x_{10} + 42x_{11} + 254.1x_{12} + 24.2x_{13}$$

Sujeto a:

Aporte 1: $348.72x_1 + 343.98x_2 + 313.14x_3 + 388.18x_4 + 364.43x_5 \leq 352.28$

$348.72x_1 + 343.98x_2 + 313.14x_3 + 388.18x_4 + 364.43x_5 \geq 300.84$

Aporte 2: $8x_1 + 12x_2 + 52.5x_3 + 36x_4 + 8x_5 \leq 28.19$

$8x_1 + 12x_2 + 52.5x_3 + 36x_4 + 8x_5 \geq 25.1$

Aporte 3: $20.77x_1 + 86.65x_2 + 220.98x_3 + 1125x_4 + 18x_5 + 20410x_6 \leq 849.25$

$20.77x_1 + 86.65x_2 + 220.98x_3 + 1125x_4 + 18x_5 + 20410x_6 \geq 809.21$

Aporte 4: $318.46x_1 + 283.30x_2 + 656.07x_3 + 965.62x_4 + 208x_5 + 22790x_6 \leq 1070.87$

$318.46x_1 + 283.30x_2 + 656.07x_3 + 965.62x_4 + 208x_5 + 22790x_6 \geq 896.08$

Aporte 5: $3.11x_1 + 4.65x_2 + 8.63x_3 + 0.56x_4 + 2.6x_5 + 20410x_7 \leq 16.651$

$3.11x_1 + 4.65x_2 + 8.63x_3 + 0.56x_4 + 2.6x_5 + 20410x_7 \geq 14.602$

Aporte 6: $0.375x_1 + 0.56x_2 + 0.58x_3 + 0.35x_4 + 0.1x_5 + 100000x_{10} \leq 1.469$

$0.375x_1 + 0.56x_2 + 0.58x_3 + 0.35x_4 + 0.1x_5 + 100000x_{10} \geq 1.191$

Aporte 7: $0.162x_1 + 0.285x_2 + 0.235x_3 + 2235x_4 + 0.37x_5 + 100000x_{12} \leq 934$

$0.162x_1 + 0.285x_2 + 0.235x_3 + 2235x_4 + 0.37x_5 + 100000x_{12} \geq 824$

Aporte 8: $2.62x_1 + 3.57x_2 + 1.57x_3 + 1.28x_4 + 2x_5 + 100000x_{11} \leq 9.321$

$2.62x_1 + 3.57x_2 + 1.57x_3 + 1.28x_4 + 2x_5 + 100000x_{11} \geq 7.602$

Aporte 9: $625x_1 + 3.5x_4 + 2500000x_8 \leq 3446.59$

$625x_1 + 3.5x_4 + 2500000x_8 \geq 3341.91$

Aporte 10: $5.83x_4 + 100000x_9 \leq 31.69$

$5.83x_4 + 100000x_9 \geq 31.59$

Aporte 11: $10x_1 + 12x_2 + 9.5x_3 + 3.5x_4 + 10x_5 \leq 10.61$

$10x_1 + 12x_2 + 9.5x_3 + 3.5x_4 + 10x_5 \geq 8.25$

Aporte 12: $1.5x_1 + 1.25x_2 + 2.5x_3 + 1.5x_4 + 0.75x_5 \leq 2.25$

$1.5x_1 + 1.25x_2 + 2.5x_3 + 1.5x_4 + 0.75x_5 \geq 1.33$

Aporte 13: $1.5x_1 + 0.75x_2 + 3x_3 + 0.75x_5 \leq 2.27$

$1.5x_1 + 0.75x_2 + 3x_3 + 0.75x_5 \geq 1.41$

Aporte 14: $1.5x_1 + 0.1x_2 + 5.5x_3 + 7.5x_4 + x_5 \leq 3.71$

$1.5x_1 + 0.1x_2 + 5.5x_3 + 7.5x_4 + x_5 \geq 2.75$

Aporte 15: $77.5x_1 + 73x_2 + 27x_3 + 51.5x_4 + 79.5x_5 \leq 58.47$

$$77.5x_1 + 73x_2 + 27x_3 + 51.5x_4 + 79.5x_5 \geq 50.3$$

Aporte 16: $1224x_1 + 24.48x_2 + 429.45x_3 + 327.6x_4 + 14.32x_5 + 100000x_{13} \leq 53320$

$$1224x_1 + 24.48x_2 + 429.45x_3 + 327.6x_4 + 14.32x_5 + 100000x_{13} \geq 44275$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_i \geq 0$$

4.5.2 Optimización en Matlab. El software que se utilizó para resolver este problema es MATLAB, el cual tiene una caja de herramientas de optimización denominada Toolbox. Entre sus muchas aplicaciones se encuentra la optimización para problemas de programación lineal.

Se utilizó Linprog, como la función para resolver el problema práctico que se viene desarrollando.

LINPROG

El propósito de esta función es resolver problemas de programación lineal, la ecuación encuentra el mínimo de un problema especificado por:

$$\min f^T x$$

Tal que $Ax \leq b$

$$A_{eq}x = b_{eq}$$

$$lb \leq x \leq ub$$

Donde: f, x, b, b_{eq}, lb, ub son vectores y A, A_{eq} son Matrices.

- ✓ **Construcción**

- f : vector de la función objetivo.

  $f = [1.5176; \quad 1.7827 \quad ...]$

- A= Matriz de los coeficientes de las restricciones.

$A = [348.72 \quad 343.98 \quad 313.14 \quad 366.18 \quad 364.43 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0; \quad -348.72 \quad ... \quad]$

- b= vector de recursos disponibles.

  $b = [352.28; -300.84...]$

- A_{eq} : Matriz de los coeficientes de las restricciones de igualdad

  $A_{eq} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$;

- b_{eq} :Vector de recursos de las restricciones de igualdad.

  $b_{eq} = 1$;

- lb=Límite inferior sobre la variable x_i .

  lb=zeros(número de variables de decisión,1);

  lb=zeros(13,1);

[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)

DESCRIPCIÓN

[x,fval,exitflag]= linprog(...): Retorna los siguientes valores como resultado del problema:

X : Valores correspondientes a cada una de las variables de decisión, es decir, $X = (x_1, x_2, ..x_i)$

$fval$:Corresponde al valor óptimo de la función objetivo

Exitflag: Es un código numérico que indica el motivo por el cual se detienen las iteraciones. A continuación se muestra en la tabla los significados de este código numérico:

Tabla 28: Interpretación Exitflag de Matlab

EXITFLAG	SIGNIFICADO
1	La función converge a una solución x
0	Número de iteraciones excedidas
-2	No se encontró un punto factible
-3	El problema es infinito
-4	El valor NaN fue encontrado durante la ejecución del algoritmo.
-5	Problemas Primales y Duales infactibles

Fuente: Math Works Inc, Optimization Toolbox User's Guide

4.5.3 Análisis de Resultados A continuación se presenta los resultados obtenidos al correr el código anterior en MATLAB. (Anexo 7)

- ✓ **Solución Óptima**

La mezcla vegetal óptima de acuerdo con los costos de las materias primas tiene la siguiente composición:

Tabla 29: Mezcla vegetal óptima

MATERIA PRIMA	%
X_1	31.19
X_2	15.35
X_3	27.57
X_4	22.81
X_6	2.31
X_7	0.05
X_8	0.13
X_9	0.03

X_{11}	0.01
X_{12}	0.31
X_{13}	0.24
TOTAL	100

Fuente: Autores

- ✓ **Costo de Producción**

El costo total de las materias primas utilizadas en la mezcla vegetal óptima, está dado de la siguiente manera:

Tabla 30: Costo total Materias Primas

MATERIA PRIMA	X_J	COSTO(C_J)	X_JC_J
X_1	0.3119	1.5176	0.47333944
X_2	0.1535	1.7827	0.27364445
X_3	0.2757	2.0861	0.57513777
X_4	0.2281	3.9561	0.90238641
X_6	0.0231	3.5509	0.08202579
X_7	0.0005	4.14	0.00207
X_8	0.0013	98.8	0.12844
X_9	0.0003	44.1	0.01323
X_{11}	0.0001	42	0.0042
X_{12}	0.0031	254.1	0.78771
X_{13}	0.0024	24.2	0.05808
		TOTAL	3.3

Fuente: Autores

El costo mínimo de las materias primas para la mezcla es: Z_{min}=$3.30/100gramos

La formulación de una mezcla óptima para la producción de la Bienestarina consta de las siguientes materias primas:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13};$$

Cuyo costo mínimo de producción es $3.30/100 gramos.

4.5.4 Formulación del problema perturbado Suponiendo que no se cuenta con la totalidad de los datos de entrada exactos y en su lugar se tienen datos aproximados, el problema resultante es el siguiente:

$$MinZ = 1.5176x_1 + \delta_1 x_1 + 1.7827x_2 + 2.0861x_3 - \delta_2 x_3 + 3.9561x_4 + 1.26x_5 + 3.5509x_6 + \delta_1 x_6 + 4.14x_7 + \delta_3 x_7 + 98.8x_8 + 44.1x_9 + 161.24x_{10} + 42x_{11} + 254.1x_{12} + \delta_2 x_{12} + 24.2x_{13}$$

Sujeto a:

Aporte 1:

$$3.4872x_1 + 3.4398x_2 + 3.1314x_3 - \delta_1 x_3 + 3.8818x_4 + 3.6443x_5 \leq 352.28 + \delta_3$$
$$3.4872x_1 + 3.4398x_2 + 3.1314x_3 - \delta_1 x_3 + 3.8818x_4 + 3.6443x_5 \geq 300.84$$

Aporte 2:

$$8x_1 + \delta_1 + 12x_2 + 52.5x_3 + 36x_4 + \delta_2 x_4 + 8x_5 \leq 28.19$$
$$8x_1 + \delta_1 + 12x_2 + 52.5x_3 + 36x_4 + \delta_2 x_4 + 8x_5 \geq 25.1$$

Aporte 3:

$$20.77x_1 + 86.65x_2 + \delta_2 x_2 + 220.98x_3 + 1125x_4 - \delta_3 x_4 + 18x_5 + 20410x_6 + \delta_3 x_6 \leq 849.25 + \delta_1$$
$$20.77x_1 + 86.65x_2 + \delta_2 x_2 + 220.98x_3 + 1125x_4 - \delta_3 x_4 + 18x_5 + 20410x_6 + \delta_3 x_6 \geq 809.21 + \delta_1$$

Aporte 4:

$$318.46x_1 + \delta_3 x_1 + 283.30x_2 - \delta_1 x_2 + 656.07x_3 + 965.62x_4 + 208x_5 + 22790x_6$$
$$+ \delta_3 x_6 \leq 1070.87 + \delta_1$$
$$318.46x_1 + \delta_3 x_1 + 283.30x_2 - \delta_1 x_2 + 656.07x_3 + 965.62x_4 + 208x_5 + 22790x_6$$
$$+ \delta_3 x_6 \geq 896.08 - \delta_1$$

Aporte 5:

$$3.11x_1 + 4.65x_2 + 8.63x_3 + 0.56x_4 + 2.6x_5 + 20410x_7 \leq 16.651$$
$$3.11x_1 + 4.65x_2 + 8.63x_3 + 0.56x_4 + 2.6x_5 + 20410x_7 \geq 14.602$$

Aporte 6:

$$0.375x_1 - \delta_1 x_1 + 0.56x_2 + 0.58x_3 + \delta_1 x_3 + 0.35x_4 + 0.1x_5 + 100000x_{10} \leq 1.469 - \delta_2$$
$$0.375x_1 - \delta_1 x_1 + 0.56x_2 + 0.58x_3 + \delta_1 x_3 + 0.35x_4 + 0.1x_5 + 100000x_{10} \geq 1.191 + \delta_1$$

Aporte 7:

$$0.162x_1 + 0.285x_2 + 0.235x_3 + 2235x_4 + 0.37x_5 + \delta_3 x_5 + 100000x_{12} \leq 934 + \delta_3$$
$$0.162x_1 + 0.285x_2 + 0.235x_3 + 2235x_4 + 0.37x_5 + \delta_3 x_5 + 100000x_{12} \geq 824$$

Aporte 8:

$$2.62x_1 + 3.57x_2 + 1.57x_3 + 1.28x_4 + 2x_5 + 100000x_{11} \leq 9.321$$
$$2.62x_1 + 3.57x_2 + 1.57x_3 + 1.28x_4 + 2x_5 + 100000x_{11} \geq 7.602$$

Aporte 9:

$$625x_1 + 3.5x_4 + 2500000x_8 \leq 3446.59$$

$$625x_1 + 3.5x_4 + 2500000x_8 \geq 3341.91$$

Aporte 10:

$$5.83x_4 - \delta_1 x_4 + 100000x_9 - \delta_3 x_9 \leq 31.69$$

$$5.83x_4 - \delta_1 x_4 + 100000x_9 - \delta_3 x_9 \geq 31.59 + \delta_1$$

Aporte 11:

$$10x_1 + 12x_2 + 9.5x_3 + 3.5x_4 + 10x_5 \leq 10.61$$

$$10x_1 + 12x_2 + 9.5x_3 + 3.5x_4 + 10x_5 \geq 8.25$$

Aporte 12:

$$1.5x_1 + 1.25x_2 + 2.5x_3 + 1.5x_4 + 0.75x_5 \leq 2.25$$

$$1.5x_1 + 1.25x_2 + 2.5x_3 + 1.5x_4 + 0.75x_5 \geq 1.33$$

Aporte 13:

$$1.5x_1 + \delta_2 x_1 + 0.75x_2 + 3x_3 + 0.75x_5 + \delta_1 x_5 \leq 2.27$$
$$1.5x_1 + \delta_2 x_1 + 0.75x_2 + 3x_3 + 0.75x_5 + \delta_1 x_5 \geq 1.41$$

Aporte 14:

$$1.5x_1 + \delta_2 x_1 + 0.1x_2 - \delta_1 x_2 + 5.5x_3 + 7.5x_4 + x_5 + \delta_1 x_5 \leq 3.71 - \delta_1$$
$$1.5x_1 + \delta_2 x_1 + 0.1x_2 - \delta_1 x_2 + 5.5x_3 + 7.5x_4 + x_5 + \delta_1 x_5 \geq 2.75$$

Aporte 15:

$$77.5x_1 + 73x_2 + 27x_3 + 51.5x_4 + 79.5x_5 \leq 58.47$$
$$77.5x_1 + 73x_2 + 27x_3 + 51.5x_4 + 79.5x_5 \geq 50.3$$

Aporte 16:

$$12.24x_1 + 24.48x_2 + 429.45x_3 + \delta_3 x_3 + 327.6x_4 + 14.32x_5 - \delta_1 x_5 + 100000x_{13} \leq 53320$$
$$12.24x_1 + 24.48x_2 + 429.45x_3 + \delta_3 x_3 + 327.6x_4 + 14.32x_5 - \delta_1 x_5 + 100000x_{13} \geq 44275 + \delta_1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$

$$x_i \geq 0$$

Para dar solución al problema se tomaron valores aleatoriamente para los diferentes δ los cuales varían así: $0 \leq \delta_i < 1$. El procedimiento llevado a cabo es el mismo que se utilizó en el problema original, pero en este caso se decidió analizar el comportamiento de cada una de las δ variando una a la vez con el fin de determinar qué tanto afecta cada δ a la función objetivo.

En primer lugar, se cambió el valor de δ_1 dejando los otros fijos y con un valor de cero. Para generar estos datos, se realizó su ingreso respectivo al código de Matlab.(Véase código en anexo 8)

Tabla 31: Comportamiento valor óptimo al variar δ_1

δ_1	δ_2	δ_3	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0	0	3,3233	1	0,70111034
0.02	0	0	3,3395	1	1,1828118
0.03	0	0	3,3547	1	1,63054819
0.04	0	0	3,3691	1	2,05099285
0.05	0	0	3,6804	-2	10,3358331
0.06	0	0	3,6889	-2	10,5424381
0.07	0	0	3,6962	-2	10,7191169
0.08	0	0	3,7034	-2	10,8926932
0.09	0	0	3,7104	-2	11,0608021
0.10	0	0	3,7175	-2	11,2306658

Fuente: Autores

Como se muestra en la tabla, al perturbar el problema con δ_1, el valor óptimo de la función objetivo se ve afectado. A medida que aumenta δ_1, el valor óptimo mejora, no obstante, se aleja del problema original. Es importante ver que para este caso, el valor máximo de δ_1 con el que se puede perturbar el problema es 0.04, cualquier número mayor a éste hará que el programa suspenda las iteraciones al no encontrar una solución óptima.

El impacto que ocasiona este parámetro sobre la función objetivo no es muy grande, se puede observar que el mayor impacto que genera cuando está dentro de los rangos permitidos es del 2,05% de diferencia con respecto al problema original.

El mismo análisis se llevó a cabo para δ_2. En la tabla que se muestra a continuación se encuentran los valores correspondientes al óptimo de la función objetivo y al Exitflag. Se puede ver que δ_2 tienen un rango de valores mayor al caso anterior, esto es, el máximo valor que se le puede dar a δ_2 es de 0.25 para que el problema tenga una solución factible. Contrario a δ_1, en este caso, a medida que aumenta el valor de δ_2, la función objetivo va en decrecimiento es decir, que el problema original ofrece una solución con mayores beneficios que el problema perturbado.

Tabla 32: Comportamiento valor óptimo al variar δ_2

δ_1	δ_2	δ_3	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0	0.01	0	3,2849	1	0,45967914
0	0.05	0	3,2433	1	1,74821941
0	0.1	0	3,2211	1	2,44947378
0	0.15	0	3,1997	1	3,13466888
0	0.2	0	3,1809	1	3,74422333
0	0.25	0	3,1660	1	4,23246999
0	0.3	0	3,3376	-2	1,12655801
0	0.35	0	3,4633	-2	4,71515607
0	0.4	0	3,5183	-2	6,20470113
0	0.45	0	3,1903	-2	3,4385481

Fuente: Autores

A continuación se muestran los resultados obtenidos al variar los valores de δ_3. En este caso en particular, se puede observar la manera en que la función objetivo crece a medida que el valor del parámetro aumenta. Otro aspecto importante para resaltar es que al contrario de los dos casos anteriores, δ_3 puede tomar cualquier valor entre 0 y 1, y el problema continúa ofreciendo una solución óptima. Las diferencias que presentan son muy bajas con un porcentaje máximo de diferencia 0,674% con respecto al problema original, es decir, que éste parámetro no afecta considerablemente el problema.

Tabla 33: Comportamiento valor óptimo al variar δ_3

δ_1	δ_2	δ_3	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0	0	0.1	3,3079	1	0,23882221
0	0	0.2	3,3096	1	0,29006526
0	0	0.3	3,3113	1	0,3412557
0	0	0.4	3,3129	1	0,38938694
0	0	0.5	3,3145	1	0,43747172
0	0	0.6	3,3162	1	0,48851095
0	0	0.7	3,3177	1	0,53350212
0	0	0.8	3,3193	1	0,5814479
0	0	0.9	3,3209	1	0,62934747
0	0	1	3,3224	1	0,67421141

Fuente: Autores

4.5.4.1 Formulación Problema Perturbado mediante Tikhonov. En este apartado se resolverá el problema por medio de la función de Tikhonov, entonces en lugar de trabajar con el problema perturbado, se definirá uno nuevo que sea más parecido al original.

Recordando la función objetivo definida para la función de Tikhonov, tenemos:

$$MinT_{\delta}(x) = f_{\delta}(x) + \alpha |x|_1$$

Entonces, el nuevo problema de optimización planteado es:

$$MinT_{\delta}(x) = 1.5176x_1 + \delta_1 x_1 + 1.7827x_2 + 2.0861x_3 - \delta_2 x_3 + 3.9561x_4 + 1.26x_5 + 3.5509x_6 + \delta_1 x_6 + 4.14x_7 + \delta_3 x_7 + 98.8x_8 + 44.1x_9 + 161.24x_{10} + 42x_{11} + 254.1x_{12} + \delta_2 x_{12} + 24.2x_{13} + \alpha(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

Sujeto a

$$\{x \in E^n : x \geq 0, A(\delta)x - \delta_1 I_m I_n^T x \leq b(\delta) + \theta I_m\}$$

Para obtener las restricciones se generó en Matlab un código con lenguaje simbólico con el fin de plantear las ecuaciones de esos nuevos aportes. A continuación se muestran algunas de las restricciones. Para ver la matriz de restricciones completa dirigirse al anexo (9)

Aporte 1:

$$(348.72-\delta_1)x_1+(343.98-\delta_1)x_2+(313.14-2\delta_1)x_3+(388.18-\delta_1)x_4+(364.43-\delta_1)x_5-\delta_1 x_6$$
$$-\delta_1 x_7-\delta_1 x_8-\delta_1 x_9-\delta_1 x_{10}-\delta_1 x_{11}-\delta_1 x_{12}-\delta_1 x_{13}\leq 352..28+\delta_3$$

$$(348.72-\delta_1)x_1+(343.98-\delta_1)x_2+(313.14-2\delta_1)x_3+(388.18-\delta_1)x_4+(364.43-\delta_1)x_5-\delta_1 x_6$$
$$-\delta_1 x_7-\delta_1 x_8-\delta_1 x_9-\delta_1 x_{10}-\delta_1 x_{11}-\delta_1 x_{12}-\delta_1 x_{13}\geq 300.84-\theta$$

De la misma manera como se hizo para el problema perturbado, se tomaron valores aleatoriamente para los diferentes δ los cuales varían así: $0\leq\delta_i<1$. Los datos fueron ingresados en un nuevo código de Matlab (anexo 9) para encontrar el valor óptimo del problema.

- ✓ **Análisis de Tikhonov**

Para dar solución al problema, se tomaron valores aleatorios para los diferentes δ los cuales varían así: $0\leq\delta_i<1$. El objetivo es analizar el comportamiento de cada de una de las perturbaciones y los parámetros variándolos uno a la vez y determinar qué tanto afecta cada variación de δ_i,θ,α a la función objetivo.

En primer lugar, se cambió el valor de δ_1 dejando los otros fijos y con un valor de 0.01. Para generar estos datos, se realizó su ingreso respectivo al código de Matlab.

- Al variar el valor de δ_1

Tabla 34: Comportamiento valor óptimo al variar δ_1 Método Tikhonov

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	3,2589	1	1,26116
0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	3,2141	1	2,6726
0.2	0.01	0.01	0.01	0.01	3,1335	1	5,31355
0.3	0.01	0.01	0.01	0.01	3,0114	1	9,58358
0.4	0.01	0.01	0.01	0.01	2,9018	1	13,7225
0.5	0.01	0.01	0.01	0.01	2,7978	1	17,9498
0.6	0.01	0.01	0.01	0.01	2,7669	1	19,267
0.7	0.01	0.01	0.01	0.01	2,7657	1	19,3188
0.8	0.01	0.01	0.01	0.01	2,7647	1	19,362
0.9	0.01	0.01	0.01	0.01	2,7639	1	19,3965

Fuente: Autores

La tabla muestra que cualquier valor que se tome del parámetro δ_1 ofrece una solución óptima; sin embargo, al aumentar el su valor se genera un impacto mayor sobre el valor óptimo f_*.

- Al variar el valor de δ_2

Tabla 35: Comportamiento valor óptimo al variar δ_2 Método Tikhonov

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	3,26	1	1,26116
0.01	0.1	0.01	0.01	0.01	3,2290	1	2,19882
0.01	0.2	0.01	0.01	0.01	3,1877	1	3,52292
0.01	0.3	0.01	0.01	0.01	3,1586	1	4,47667
0.01	0.4	0.01	0.01	0.01	3,5715	-2	7,60185
0.01	0.5	0.01	0.01	0.01	3,4800	-2	5,17241
0.01	0.6	0.01	0.01	0.01	3,2379	-2	1,91791
0.01	0.7	0.01	0.01	0.01	37243	-2	99,9911
0.01	0.8	0.01	0.01	0.01	3,2060	-2	2,932
0.01	0.9	0.01	0.01	0.01	3,7190	-2	11,2665

Fuente: Autores

En la tabla se puede observar que puedo perturbar el problema con un valor de δ_2 menor a 0.4 para que exista una solución óptima, de lo contrario el programa no encontrará una solución factible para el ejercicio. Dentro del rango de valores posibles $0.01 \leq \delta_1 \leq 0.3$, la función objetivo disminuye a medida que se aumenta el valor del parámetro. La diferencia relativa máxima que alcanza el problema es de 4,476% lo que quiere decir que el impacto que genera este parámetro sobre el problema no es muy grande.

- Al variar el valor de δ_3

Tabla 36: Comportamiento valor óptimo al variar δ_3 Método Tikhonov

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	3,2589	1	1,26116
0.01	0.01	0.1	0.01	0.01	3,2689	1	0,95139
0.01	0.01	0.2	0.01	0.01	3,2690	1	0,9483
0.01	0.01	0.3	0.01	0.01	3,2690	1	0,9483
0.01	0.01	0.4	0.01	0.01	3,2691	1	0,94521
0.01	0.01	0.5	0.01	0.01	3,2691	1	0,94521
0.01	0.01	0.6	0.01	0.01	3,2692	1	0,94213
0.01	0.01	0.7	0.01	0.01	3,2692	1	0,94213
0.01	0.01	0.8	0.01	0.01	3,2693	1	0,93904
0.01	0.01	0.9	0.01	0.01	3,2694	1	0,93595

A medida que aumentó el valor de δ_3, la función objetivo se va acercando más a la original, además δ_3 puede tomar cualquier valor entre 0 y 1, y el problema sigue ofreciendo una solución óptima. Cabe resaltar que los valores mínimos están muy cercanos al valor mínimo para el problema original y la diferencia relativa máxima es de 1,261% lo que significa que el impacto generado por este parámetro sobre el problema es minúsculo.

- Al variar el valor de θ:

Tabla 37: Comportamiento valor óptimo al variar θ Método Tikhonov

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	3,2589	1	1,26116
0.01	0.01	0.01	0.1	0.01	3,1696	1	4,11408
0.01	0.01	0.01	0.2	0.01	3,0593	1	7,86781
0.01	0.01	0.01	0.3	0.01	2,9490	1	11,9023
0.01	0.01	0.01	0.4	0.01	2,8448	1	16,0011
0.01	0.01	0.01	0.5	0.01	2,7832	1	18,5686
0.01	0.01	0.01	0.6	0.01	2,7258	1	21,0654
0.01	0.01	0.01	0.7	0.01	2,6955	1	22,4263
0.01	0.01	0.01	0.8	0.01	2,6730	1	23,4568
0.01	0.01	0.01	0.9	0.01	2,6505	1	24,5048

Fuente: Autores

Al igual que en el caso anterior, este parámetro puede tomar cualquier valor entre [0,1] para que exista un punto mínimo, pero el impacto que genera sobre el problema es relevante a medida que aumenta su valor, es decir, la función objetivo se ve afectada considerablemente.

- Al variar los valores de α :

Tabla 38: Comportamiento valor óptimo al variar α Método Tikhonov

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	**Fval**	**Exitflag**	$\overline{f_*}$
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	3,2589	1	1,26116
0.01	0.01	0.01	0.01	0.1	3,3489	1	1,46018
0.01	0.01	0.01	0.01	0.2	3,4489	1	4,31732
0.01	0.01	0.01	0.01	0.3	3,5489	1	7,01344

Continuación Tabla 38

0.01	0.01	0.01	0.01	0.4	3,6489	1	9,56179
0.01	0.01	0.01	0.01	0.5	3,7489	1	11,9742
0.01	0.01	0.01	0.01	0.6	3,8489	1	14,2612
0.01	0.01	0.01	0.01	0.7	3,9489	1	16,4324
0.01	0.01	0.01	0.01	0.8	4,0489	1	18,4964
0.01	0.01	0.01	0.01	0.9	4,1489	1	20,4608

Fuente: Autores

Este parámetro afecta directamente el valor de la función objetivo, por ello, a medida que aumenta el valor óptimo de la función objetivo también experimenta un incremento.

4.5.4.2 Formulación Problema Perturbado mediante el método del Defecto. Ahora se analizará el impacto que tiene el método de regularización del Defecto en el problema práctico que se viene tratando.

Es necesario recordar cómo está dada la formulación de la función objetivo y las restricciones para este método:

$$T_{2\delta}(x) = \Omega(x) + \alpha|x|_1 = (1+\alpha)|x|_1 \to \min$$

$$x \in G(\delta) = \{x \in \mathrm{E}^n : x \geq 0, (D(\delta) - \delta_1 I_m I_n^T)x \leq d(\delta) + \theta I_m\}$$

El nuevo problema de optimización queda de la siguiente manera:

$$MinT_{2\delta}(x) = \sum_{i=1}^{13}(1+\alpha)x_i = (1+\alpha)x_1 + (1+\alpha)x_2 + (1+\alpha)x_3 + (1+\alpha)x_4 ... (1+\alpha)x_{13}$$

Sujeto a

$$\left\{x \in E^{n} : x \geq 0, D(\delta)x - \delta_1 I_m I_n^T x \leq d(\delta) + \theta I_m\right\}$$

Las restricciones, al igual que para el método de Tikhonov fueron generadas desde Matlab, así quedan algunas de éstas:

Aporte 1:

$$(348.72-\delta_1)x_1+(343.98-\delta_1)x_2+(313.14-2\delta_1)x_3+(388.18-\delta_1)x_4+(364.43-\delta_1)x_5-\delta_1 x_6$$
$$-\delta_1 x_7-\delta_1 x_8-\delta_1 x_9-\delta_1 x_{10}-\delta_1 x_{11}-\delta_1 x_{12}-\delta_1 x_{13}\leq 352..28+\delta_3$$

$$(348.72-\delta_1)x_1+(343.98-\delta_1)x_2+(313.14-2\delta_1)x_3+(388.18-\delta_1)x_4+(364.43-\delta_1)x_5-\delta_1 x_6$$
$$-\delta_1 x_7-\delta_1 x_8-\delta_1 x_9-\delta_1 x_{10}-\delta_1 x_{11}-\delta_1 x_{12}-\delta_1 x_{13}\geq 300.84-\theta$$

Luego de tener el problema planteado, se procede a solucionar éste en Matlab. A continuación se muestran las tablas de resultados obtenidos mediante la variación de los valores de los diferentes parámetros.

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la función objetivo al variar el parámetro δ_1. Para este caso se puede ver que el valor de la función objetivo se mantiene constante ante cualquier variación que se haga a δ_1, además no existe un valor máximo de δ_1 que haga que la función objetivo no tenga un valor óptimo.

Tabla 39: Comportamiento valor óptimo al variar δ_1 método del defecto

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	***Fval***	***Exitflag***
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.1	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.2	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.3	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1

Continuación tabla 39

0.4	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.5	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.6	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.7	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.8	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.9	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1

Fuente: Autores

Ahora se muestra la variación de δ_2, el valor de la función objetivo presenta una pendiente positiva cuando δ_2 se encuentra entre 0.2 y 0.3, sin embargo su variación no es muy significativa. Por otro lado, se puede observar que cuando δ_2 alcanza el valor de 0.4, el problema no tiene una solución factible como lo indica el *Exitflag.*

Tabla 40: Comportamiento valor óptimo al variar δ_2 método del defecto

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	***Fval***	***Exitflag***
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.1	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.2	0.01	0.01	0.01	1.0101	1
0.01	0.3	0.01	0.01	0.01	1.0102	1
0.01	0.4	0.01	0.01	0.01	1.0205	-2
0.01	0.5	0.01	0.01	0.01	1.0319	-2
0.01	0.6	0.01	0.01	0.01	1.0438	-2
0.01	0.7	0.01	0.01	0.01	1.0548	-2
0.01	0.8	0.01	0.01	0.01	1.0662	-2
0.01	0.9	0.01	0.01	0.01	1.0103	-2

Fuente: Autores

Los dos casos siguientes tienen un comportamiento similar al primero, ante cualquier variación de los parámetros δ_3 y θ, el valor óptimo para la función objetivo se mantiene estable, es decir, el problema no presenta un impacto ante este tipo de perturbaciones. Es importante aclarar, que el valor que toma el conjunto de x_* si presenta cambios, lo que quiere decir que ante las diferentes combinaciones de las variables de decisión, el valor óptimo no mejora.

Tabla 41: Comportamiento valor óptimo al variar δ_3 método del defecto

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	***Fval***	***Exitflag***
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.1	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.2	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.3	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.4	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.5	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.6	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.7	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.8	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.9	0.01	0.01	1.0100	1

Fuente: Autores

Tabla 42: Comportamiento valor óptimo al variar θ método del defecto

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	***Fval***	***Exitflag***
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.1	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.2	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.3	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.4	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.5	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.6	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.7	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.8	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.9	0.01	1.0100	1

Fuente: Autores

Finalmente, se muestra el impacto que tiene el parámetro α en la función objetivo. A diferencia de los otros parámetros, α es el único que no afecta el conjunto x_*, ya que únicamente está presente en la formulación de la nueva función objetivo. Es natural que para este caso al aumentar el valor de α, la función objetivo presente un cambio favorable.

Tabla 43: Comportamiento valor óptimo al variar α método del defecto

δ_1	δ_2	δ_3	θ	α	***Fval***	***Exitflag***
0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	1.0100	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.1	1.1000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.2	1.2000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.3	1.3000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.4	1.4000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.5	1.5000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.6	1.6000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.7	1.7000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.8	1.8000	1
0.01	0.01	0.01	0.01	0.9	1.9000	1

Fuente: Autores

5. CONCLUSIONES

Después del trabajo investigativo anteriormente presentado se puede advertir, en primer lugar que el eje principal estuvo centrado en el análisis de dos métodos de regularización, usados como herramienta para resolver problemas mal puestos, que consiste en grosso modo en la construcción de una nueva función y en la aparición de una nueva región factible, con el fin de convertir este problema mal puesto en uno bien puesto.

En segundo lugar, se planteó que el objetivo de un modelo de programación lineal consiste en reproducir la realidad de la forma más cercana posible tratando de entender cómo se comporta el mundo real y obteniendo respuestas que pueden esperarse de determinadas acciones. No obstante, se observó que muchos problemas de Programación Lineal se ven frecuentemente afectados por variaciones presentadas en los datos de entrada, lo cual puede generar errores en la toma de decisiones.

En tercer lugar y luego de los análisis realizados, también se advirtió que en problemas complejos, es decir, donde haya grandes cantidades de restricciones y/o variables de decisión es difícil encontrar las posibles fuentes de error al resolverlos, en estos casos, los métodos de regularización son una herramienta eficiente para solucionarlos a partir de problemas aproximados a las condiciones reales ya que permiten encontrar soluciones no muy lejanas a las verdaderas.

Por otro lado, al realizar los experimentos numéricos se pudieron observar las diferencias que se presentan entre los problemas originales y los generados a partir de las perturbaciones y analizar qué tanto se alejan sus respectivas soluciones. En general, con la aplicación del método de Tikhonov y del Defecto se observó que éstos permiten que los rangos de los parámetros se amplíen y el problema siga teniendo una solución óptima.

Finalmente, cabe resaltar que aunque el presente trabajo tuvo énfasis en el desarrollo de dos métodos de regularización aplicados a problemas de programación lineal, se sugiere su profundización para problemas de tipo no lineal, debido a que gran cantidad de problemas presentados en las empresas se encuentran dentro de esta clasificación.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, Tom. ***Cálculo, Vol 2.***Reverté Colombiana S.A, 1989. Colombia.

ARMITANO, Orlando; EDELMAN, Jorge; GARCIA Ubaldo. ***Programación no Lineal.*** Ed. Limusa S.A. México. 1985.

FLETCHER R. ***Optimization.*** Academic Press, London and New York, 1969.

FIACCO and McCORMICK. ***Non Linear Programming***. John Wiley & sons, Inc., New York, 1968.

FERRADA, Pedro M. ***Optimización con Aplicaciones a la Ingeniería Química***. U.I.S. Bucaramanga, 1994.

GASS, Saul. ***Programación Lineal Métodos y Aplicaciones.*** Compañía Editorial Continental, México, 1966.

HAMDY, A. Taha. ***Investigación de operaciones. Una introducción***. Alfaomega, New York, 1989.

HIMMELBLAU, David. ***Applied Non Linear Programming***. McGraw-Hill, The university of Austin, Texas.

LUENBERGER, David. ***Programación Lineal y no Lineal.*** John Wiley & Sons, New York. 1997.

MAYORGA, Bernardo. ***Libro de Lectura de Cálculo***. U.I.S., Bucaramanga, 1996.

VARGAS MORALES, Germán. ***Modelos Lineales en Investigación de Operaciones.*** Fondo de publicaciones, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 1990.

www.revistaenlinea.com

ANEXOS

ANEXO A: CÓDIGOS PROBLEMA 1 ORIGINAL Y PERTURBADO

- **Original**

```
%Solución del ejemplo 1 para el problema original
f=[-1]; %Función Objetivo
A=[-1;1]; %Restricciones
b=[0;1]; %Vector de Recursos
lb=zeros(2,1); %Limite inferior de la variable de decisión
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb) %Solución
```

- **Perturbado**

```
n=input('Ingrese cantidad de deltas: ');
for i=1:n % Alimentar el programa con los valores de Delta
    fprintf('ingrese el valor de delta %g\n',i);
    delta(1,i)=input('dato: ');
end
cont=0; % Contador para validad cada uno de los valores de Delta.
for x=1:n;
    if delta(x)>0 && delta(x)<1
     cont=cont+1;
    end
end
if cont==n
    f=[-1+delta(2)];% planteamiento de las funciones y solución
    A=[1+delta(1);-1];
    b=[1+delta(3);0];
    lb=0;
    [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
else
    disp('los valores de delta están fuera de los rangos especificados')
end
```

ANEXO B: CÓDIGOS PROBLEMA 2 ORIGINAL Y PERTURBADO

- **Original**

```
%Solución del ejemplo 2 para el problema original.
f=[-1;-1];
A=[1 1];
b=[1];
lb=zeros(1,1);
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
```

- **PERTURBADO**

```
% Solución del ejemplo 2 para el problema perturbado:
delta=input('ingrese valor de delta \n')
if delta>1 %Validación del valor de delta
    disp('El valor de delta debe ser menor a 1')
else if delta<0
        disp('El valor de delta debe ser mayor a 0')
    else
        f=[-1;-1];
        A=[1+delta 1-delta;-1 0;0 -1];
        b=[1+delta;-1000;-1000];
       % lb=[-inf;-inf]
        [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],[])
    end
end
```

ANEX C: CÓDIGOS PROBLEMA 3 ORIGINAL Y PERTURBADO

- **Original**

```
%Solución del ejemplo 3 para el problema original
f=[1;-1];
A=[1 1;-1 -1];
b=[1;-1];
lb=zeros(2,1);
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
```

- **Perturbado**

```
%Solución del ejemplo 3 para el problema perturbado
delta=input('ingrese valor de delta \n')
if delta>1
    disp('El valor de delta debe ser menor a 1')
else if delta<0
        disp('El valor de delta debe ser mayor a 0')
    else
        f=[1;-1];
        A=[1-delta 1;-1-delta -1];
        b=[1+delta;-1-delta];
        lb=zeros(2,1);
        [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
    end
end
```

ANEXO D: CÓDIGOS PROBLEMA 4 ORIGINAL Y PERTURBADO

- **Original**

```
%Solución del Ejemplo 4 para el problema original
f=[1;0];
A=[1 1;-1 -1];
b=[1;-1];
lb=zeros(2,1);
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
```

- **Perturbado**

```
%Solución del ejemplo 4 para el problema perturbado
disp('El valor de delta debe estar entre 0 y 1')
delta=input('ingrese valor de delta \n');
if delta>1
    disp('El valor de delta debe ser menor a 1')
else if delta<0
        disp('El valor de delta debe ser mayor a 0')
    else
        f=[1;0];
        A=[1 1;(-1-delta) (-1-delta)];
        b=[1;-1];
        lb=zeros(2,1);
        [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,[],[],lb)
    end
end
```

ANEXO E: CODIGO PROBLEMA 4 MÉTODO TIKHONOV

```
%Solución del ejemplo 4 aplicando el método de Tijonov
alfa=input('ingrese valor de alfa: \n');
if alfa>1 %Validación del valor de alfa
    disp('el valor de alfa debe ser menor a 1')
else if alfa<0
    disp('el valor de alfa debe ser mayor a 0')
    else
        delta1=input('ingrese valor de delta1 \n');
        if delta1>1 %Validación del valor de delta 1
            disp('El valor de delta1 debe ser menor a 1')
        else if delta1<0
                disp('El valor de delta1 debe ser mayor a 0')
            else
                delta2=input('ingrese valor de delta 2: \n');
                if delta2>1 %Validación del valor de delta 2
                    disp('el valor de delta2 debe ser menor a 1')
                else if delta2<0
                        disp('el valor de delta2 debe ser mayor a 0')
                    else
                        theta=input('ingrese valor de theta: \n');
                        if theta>1 %Validación del valor de theta
                            disp('el valor de theta debe ser menor a 1')
                        else if theta<0
                            else
                                t=[(1+alfa);alfa] %Función Objetivo
                                A=[(1-delta1) (1-delta1);(-1-2*delta1) (-1-2*delta1)];
                                b=[1+theta;-1+delta2+theta];
                                lb=zeros(2,1);
                                [x,tval,exitflag]=linprog(t,A,b,[],[],lb)
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
```

ANEXO F: PROBLEMA 4 METODO DEFECTO

```
%Solución del ejemplo 4 aplicando el método del Defecto
alfa=input('ingrese valor de alfa: \n');
if alfa>1
    disp('el valor de alfa debe ser menor a 1')
else if alfa<0
    disp('el valor de alfa debe ser mayor a 0')
    else
        delta1=input('ingrese valor de delta1 \n');
        if delta1>1
            disp('El valor de delta1 debe ser menor a 1')
        else if delta1<0
                disp('El valor de delta1 debe ser mayor a 0')
            else
                delta2=input('ingrese valor de delta 2: \n');
                if delta2>1
                    disp('el valor de delta2 debe ser menor a 1')
                else if delta2<0
                        disp('el valor de delta2 debe ser mayor a 0')
                    else
                        theta=input('ingrese valor de theta: \n');
                        if theta>1
                            disp('el valor de theta debe ser menor a 1')
                        else if theta<0
                            else
                                t=[(1+alfa);(1+alfa)]
                                A=[(1-delta1) (1-delta1);(-1-2*delta1) (-1-2*delta1)];
                                b=[1+theta;-1+delta2+theta];
                                lb=zeros(2,1);
                                [x,tval,exitflag]=linprog(t,A,b,[],[],lb)
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
```

ANEXO G: CÓDIGO PROBLEMA PRÁCTICO ORIGINAL

```
f=[1.5176;1.7827;2.0861;3.9561;1.26;3.5509;4.14;98.8;44.1;161.24;42;254.1
;24.2];
A=[348.72 343.98 313.14 366.18 364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;-348.72 -343.98 -
313.14 -366.18 -364.43 0 0 0 0 0 0 0 0
   8 12 52.5 36 8 0 0 0 0 0 0 0 0;-8 -12 -52.5 -36 -8 0 0 0 0 0 0 0 0;
   20.77 86.65 220.98 1125 18 20410 0 0 0 0 0 0 0;-20.77 -86.65 -220.98 -
1125 -18 -20410 0 0 0 0 0 0 0;
   318.46 283.3 656.07 965.62 208 22790 0 0 0 0 0 0 0;-318.46 -283.3 -
656.07 -965.62 -208 -22790 0 0 0 0 0 0 0;
   3.11 4.65 8.63 0.56 2.6 0 20410 0 0 0 0 0 0;-3.11 -4.65 -8.63 -0.56 -
2.6 0 -20410 0 0 0 0 0 0;
   0.375 0.56 0.58 0.35 0.1 0 0 0 0 100000 0 0 0;-0.375 -0.56 -0.58 -0.35
-0.1 0 0 0 0 -100000 0 0 0;
   0.162 0.285 0.235 2235 0.37 0 0 0 0 0 0 100000 0;-0.162 -0.285 -0.235
-2235 -0.37 0 0 0 0 0 0 -100000 0;
   2.62 3.57 1.57 1.28 2 0 0 0 0 0 100000 0 0;-2.62 -3.57 -1.57 -1.28 -2
0 0 0 0 0 -100000 0 0;
   625 0 0 35 0 0 0 2500000 0 0 0 0 0;-625 0 0 -35 0 0 0 -2500000 0 0 0 0
0;
   0 0 0 5.83 0 0 0 0 100000 0 0 0 0;0 0 0 -5.83 0 0 0 0 -100000 0 0 0 0;
   10 12 9.5 3.5 10 0 0 0 0 0 0 0 0;-10 -12 -9.5 -3.5 -10 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 1.25 2.5 1.5 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -1.25 -2.5 -1.5 -0.75 0 0 0
0 0 0 0 0;
   1.5 0.75 3 0 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -0.75 -3 0 -0.75 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 0.1 5.5 7.5 1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -0.1 -5.5 -7.5 -1 0 0 0 0 0 0 0
0;
   77.5 73 27 51.5 79.5 0 0 0 0 0 0 0 0;-77.5 -73 -27 -51.5 -79.5 0 0 0 0
0 0 0 0;
   12.24 24.48 429.45 327.6 14.32 0 0 0 0 0 0 0 100000;-12.24 -24.48 -
429.45 -327.6 -14.32 0 0 0 0 0 0 0 -100000];
b=[352.28;-300.84;28.19;-25.1;849.25;-809.21;1070.87;-896.08;16.651;-
14.602;1.469;-1.191;934;-824;9.321;-7.602;3446.59;-3341.91;31.69;-31.59;
   10.61;-8.25;2.25;-1.33;2.27;-1.41;3.71;-2.75;58.47;-50.3;533.20;-
442.75];
Aeq=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
beq=1;
lb=zeros(13,1);
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
```

```
f=[1.5176;1.7827;2.0861;3.9561;1.26;3.5509;4.14;98.8;44.1;161.24;42;254.1
;24.2];
A=[348.72 343.98 313.14 366.18 364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;-348.72 -343.98 -
313.14 -366.18 -364.43 0 0 0 0 0 0 0 0
   8 12 52.5 36 8 0 0 0 0 0 0 0 0;-8 -12 -52.5 -36 -8 0 0 0 0 0 0 0 0;
   20.77 86.65 220.98 1125 18 20410 0 0 0 0 0 0 0;-20.77 -86.65 -220.98 -
1125 -18 -20410 0 0 0 0 0 0 0;
   318.46 283.3 656.07 965.62 208 22790 0 0 0 0 0 0 0;-318.46 -283.3 -
656.07 -965.62 -208 -22790 0 0 0 0 0 0 0;
   3.11 4.65 8.63 0.56 2.6 0 20410 0 0 0 0 0 0;-3.11 -4.65 -8.63 -0.56 -
2.6 0 -20410 0 0 0 0 0 0;
   0.375 0.56 0.58 0.35 0.1 0 0 0 0 100000 0 0 0;-0.375 -0.56 -0.58 -0.35
-0.1 0 0 0 0 -100000 0 0 0;
   0.162 0.285 0.235 2235 0.37 0 0 0 0 0 0 100000 0;-0.162 -0.285 -0.235
-2235 -0.37 0 0 0 0 0 0 -100000 0;
   2.62 3.57 1.57 1.28 2 0 0 0 0 0 100000 0 0;-2.62 -3.57 -1.57 -1.28 -2
0 0 0 0 0 -100000 0 0;
   625 0 0 35 0 0 0 2500000 0 0 0 0 0;-625 0 0 -35 0 0 0 -2500000 0 0 0 0
0;
   0 0 0 5.83 0 0 0 0 100000 0 0 0 0;0 0 0 -5.83 0 0 0 0 -100000 0 0 0 0;
   10 12 9.5 3.5 10 0 0 0 0 0 0 0 0;-10 -12 -9.5 -3.5 -10 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 1.25 2.5 1.5 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -1.25 -2.5 -1.5 -0.75 0 0 0
0 0 0 0 0;
   1.5 0.75 3 0 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -0.75 -3 0 -0.75 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 0.1 5.5 7.5 1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -0.1 -5.5 -7.5 -1 0 0 0 0 0 0 0
0;
   77.5 73 27 51.5 79.5 0 0 0 0 0 0 0 0;-77.5 -73 -27 -51.5 -79.5 0 0 0 0
0 0 0 0;
   12.24 24.48 429.45 327.6 14.32 0 0 0 0 0 0 0 100000;-12.24 -24.48 -
429.45 -327.6 -14.32 0 0 0 0 0 0 0 -100000];
b=[352.28;-300.84;28.19;-25.1;849.25;-809.21;1070.87;-896.08;16.651;-
14.602;1.469;-1.191;934;-824;9.321;-7.602;3446.59;-3341.91;31.69;-31.59;
   10.61;-8.25;2.25;-1.33;2.27;-1.41;3.71;-2.75;58.47;-50.3;533.20;-
442.75];
Aeq=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
beq=1;
lb=zeros(13,1);
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
```

ANEXO H: CÓDIGO PROBLEMA PRÁCTICO PERTURBADO

```
%solución problema perturbado
for i=1:3 % Alimentar el programa con los valores de Delta
    fprintf('ingrese el valor de delta %g\n',i);
    delta(1,i)=input('dato: ');
end
cont=0; % Contador para validad cada uno de los valores de Delta.
for x=1:3;
    if delta(x)>=0 && delta(x)<1
     cont=cont+1;
    end
end
if cont==3
    f=[1.5176+delta(1);1.7827;2.0861-
delta(2);3.9561;1.26;3.5509+delta(1);4.14+delta(3);98.8;44.1;161.24;42;25
4.1+delta(2);24.2];
    A=[348.72 343.98 313.14-delta(1) 366.18 364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;-
348.72 -343.98 -313.14+delta(1) -366.18 -364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;
   8+delta(1) 12 52.5 36+delta(2) 8 0 0 0 0 0 0 0 0;-8-delta(1) -12 -52.5
-36-delta(2) -8 0 0 0 0 0 0 0 0;
   20.77 86.65+delta(2) 220.98 1125-delta(3) 18 20410+delta(3) 0 0 0 0 0
0 0;-20.77-delta(2) -86.65 -220.98 -1125+delta(3) -18 -20410-delta(3) 0 0
0 0 0 0 0;
   318.46+delta(3) 283.3-delta(1) 656.07 965.62 208 22790+delta(3) 0 0 0
0 0 0 0;-318.46-delta(3) -283.3+delta(1) -656.07 -965.62 -208 -22790-
delta(3) 0 0 0 0 0 0 0;
   3.11 4.65 8.63 0.56 2.6 0 20410 0 0 0 0 0 0;-3.11 -4.65 -8.63 -0.56 -
2.6 0 -20410 0 0 0 0 0 0;
   0.375-delta(1) 0.56 0.58+delta(1) 0.35 0.1 0 0 0 0 100000 0 0 0;-
0.375+delta(1) -0.56 -0.58-delta(1) -0.35 -0.1 0 0 0 0 -100000 0 0 0;
   0.162 0.285 0.235 2235 0.37+delta(3) 0 0 0 0 0 0 100000 0;-0.162 -
0.285 -0.235 -2235 -0.37-delta(3) 0 0 0 0 0 0 -100000 0;
   2.62 3.57 1.57 1.28 2 0 0 0 0 0 100000 0 0;-2.62 -3.57 -1.57 -1.28 -2
0 0 0 0 0 -100000 0 0;
   625 0 0 35 0 0 0 2500000 0 0 0 0 0;-625 0 0 -35 0 0 0 -2500000 0 0 0 0
0;
   0 0 0 5.83-delta(1) 0 0 0 0 100000-delta(3) 0 0 0 0;0 0 0 -
5.83+delta(1) 0 0 0 0 -100000+delta(3) 0 0 0 0;
   10 12 9.5 3.5 10 0 0 0 0 0 0 0 0;-10 -12 -9.5 -3.5 -10 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 1.25 2.5 1.5 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -1.25 -2.5 -1.5 -0.75 0 0 0
0 0 0 0 0;
   1.5+delta(2) 0.75 3 0 0.75+delta(1) 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-delta(2) -
0.75 -3 0 -0.75-delta(1) 0 0 0 0 0 0 0 0;
   1.5+delta(2) 0.1-delta(1) 5.5 7.5 1+delta(1) 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-
delta(2) -0.1+delta(1) -5.5 -7.5 -1-delta(1) 0 0 0 0 0 0 0 0;
   77.5 73 27 51.5 79.5 0 0 0 0 0 0 0 0;-77.5 -73 -27 -51.5 -79.5 0 0 0 0
0 0 0 0;
```

```
   12.24 24.48 429.45+delta(3) 327.6 14.32-delta(1) 0 0 0 0 0 0 0 
100000;-12.24 -24.48 -429.45-delta(3) -327.6 -14.32+delta(1) 0 0 0 0 0 0 
0 -100000];
    b=[352.28+delta(3);-300.84;28.19;-25.1;849.25+delta(1);-809.21-
delta(1);1070.87+delta(1);-896.08+delta(1);16.651;-14.602;1.469-
delta(2);-1.191-delta(1);934+delta(3);-824;9.321;-7.602;3446.59;-
3341.91;31.69;-31.59-delta(1);
   10.61;-8.25;2.25;-1.33;2.27;-1.41;3.71-delta(1);-2.75;58.47;-
50.3;533.20;-442.75-delta(1)];
    Aeq=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
    beq=1;
    lb=zeros(13,1);
    [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
else
    disp('los valores de delta están fuera de los rangos especificados')
end
```

ANEXO I: CÓDIGOS PROBLEMA PRÁCTICO METODO TIKHONOV

- **Código para generar las matrices simbólicas**

```
%Código que genera las nuevas matrices para tijonov
syms d1 d2 d3 t a
y=ones(32,13);
z=[y*d1];
F=[1.5176+d1;1.7827;2.0861-
d2;3.9561;1.26;3.5509+d1;4.14+d3;98.8;44.1;161.24;42;254.1+d2;24.2];
l=a*ones(13,1);
f=F+l;
r=[348.72 343.98 313.14-d1 366.18 364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;-348.72 -343.98 
-313.14+d1 -366.18 -364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;
   8+d1 12 52.5 36+d2 8 0 0 0 0 0 0 0 0;-8-d1 -12 -52.5 -36-d2 -8 0 0 0 0 
0 0 0 0;
   20.77 86.65+d2 220.98 1125-d3 18 20410+d3 0 0 0 0 0 0 0;-20.77-d2 -
86.65 -220.98 -1125+d3 -18 -20410-d3 0 0 0 0 0 0 0;
   318.46+d3 283.3-d1 656.07 965.62 208 22790+d3 0 0 0 0 0 0 0;-318.46-d3 
-283.3+d1 -656.07 -965.62 -208 -22790-d3 0 0 0 0 0 0 0;
   3.11 4.65 8.63 0.56 2.6 0 20410 0 0 0 0 0 0;-3.11 -4.65 -8.63 -0.56 -
2.6 0 -20410 0 0 0 0 0 0;
   0.375-d1 0.56 0.58+d1 0.35 0.1 0 0 0 0 100000 0 0 0;-0.375+d1 -0.56 -
0.58-d1 -0.35 -0.1 0 0 0 0 -100000 0 0 0;
   0.162 0.285 0.235 2235 0.37+d3 0 0 0 0 0 0 100000 0;-0.162 -0.285 -
0.235 -2235 -0.37-d3 0 0 0 0 0 0 -100000 0;
   2.62 3.57 1.57 1.28 2 0 0 0 0 0 100000 0 0;-2.62 -3.57 -1.57 -1.28 -2 
0 0 0 0 0 -100000 0 0;
   625 0 0 35 0 0 0 2500000 0 0 0 0 0;-625 0 0 -35 0 0 0 -2500000 0 0 0 0 
0;
```

```
   0 0 0 5.83-d1 0 0 0 0 100000-d3 0 0 0 0;0 0 0 -5.83+d1 0 0 0 0 -
100000+d3 0 0 0 0;
   10 12 9.5 3.5 10 0 0 0 0 0 0 0 0;-10 -12 -9.5 -3.5 -10 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 1.25 2.5 1.5 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -1.25 -2.5 -1.5 -0.75 0 0 0
0 0 0 0 0;
   1.5+d2 0.75 3 0 0.75+d1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-d2 -0.75 -3 0 -0.75-d1 0
0 0 0 0 0 0 0;
   1.5+d2 0.1-d1 5.5 7.5 1+d1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-d2 -0.1+d1 -5.5 -7.5 -
1-d1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   77.5 73 27 51.5 79.5 0 0 0 0 0 0 0 0;-77.5 -73 -27 -51.5 -79.5 0 0 0 0
0 0 0 0;
   12.24 24.48 429.45+d3 327.6 14.32-d1 0 0 0 0 0 0 0 100000;-12.24 -
24.48 -429.45-d3 -327.6 -14.32+d1 0 0 0 0 0 0 0 -100000];
 B=[352.28+d3;-300.84;28.19;-25.1;849.25+d1;-809.21-d1;1070.87+d1;-
896.08+d1;16.651;-14.602;1.469-d2;-1.191-d1;934+d3;-824;9.321;-
7.602;3446.59;-3341.91;31.69;-31.59-d1;
   10.61;-8.25;2.25;-1.33;2.27;-1.41;3.71-d1;-2.75;58.47;-50.3;533.20;-
442.75-d1];
A=r-z;
I=ones(32,1);
s=I*t;
b=B+s
```

- **Solución con Método de Tikhonov**

```
%código con las restricciones correctas Tijonov
d2=0.01
d1=0.01;
d3=0.01;
t=0.01;
a=0.01;
f=[a+d1+1897/1250;a+17827/10000;a-
d2+20861/10000;a+39561/10000;a+63/50;a+d1+35509/10000;a+d3+207/50;a+494/5
;a+441/10;a+4031/25;a+42;a+d2+2541/10;a+121/5];
A=[8718/25-d1 17199/50-d1 15657/50-2*d1 18309/50-d1 36443/100-d1 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
   -d1-8718/25 -d1-17199/50 -15657/50 -d1-18309/50 -d1-36443/100 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    8 12-d1 105/2-d1 d2-d1+36 8-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
   -2*d1-8 -d1-12 -d1-105/2 -d1-d2-36 -d1-8 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    2077/100-d1 d2-d1+1733/20 11049/50-d1 1125-d3-d1 18-d1 d3-d1+20410 -
d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d2-2077/100 -d1-1733/20 -d1-11049/50 d3-d1-1125,-d1-18,-d1-d3-
20410,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1;
    d3-d1+15923/50 2833/10-2*d1 65607/100-d1 48281/50-d1 208-d1 d3-
d1+22790 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d3-15923/50 -2833/10 -d1-65607/100 -d1-48281/50 -d1-208 -d1-d3-
22790 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
```

```
    311/100-d1 93/20-d1 863/100-d1 14/25-d1 13/5-d1 -d1 20410-d1 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-311/100,-d1-93/20,-d1-863/100,-d1-14/25,-d1-13/5,-d1,-d1-20410,-
d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1;
    3/8-2*d1,14/25-d1,29/50,7/20-d1,1/10-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,100000-d1,-
d1,-d1,-d1;
    -3/8,-d1-14/25,-2*d1-29/50 -d1-7/20 -d1-1/10 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1-
100000 -d1 -d1 -d1;
    81/500-d1 57/200-d1 47/200-d1 2235-d1 d3-d1+37/100 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 100000-d1 -d1;
    -d1-81/500 -d1-57/200 -d1-47/200 -d1-2235 -d1-d3-37/100 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1-100000 -d1;
    131/50-d1 357/100-d1 157/100-d1 32/25-d1 2-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1
100000-d1 -d1 -d1;
    -d1-131/50 -d1-357/100 -d1-157/100 -d1-32/25 -d1-2 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1-100000 -d1 -d1;
    625-d1 -d1 -d1 35-d1 -d1 -d1 -d1 2500000-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-625 -d1 -d1 -d1-35 -d1 -d1 -d1 -d1-2500000 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1 -d1 -d1 583/100-2*d1 -d1 -d1 -d1 -d1 100000-d3-d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1 -d1 -d1 -583/100 -d1 -d1 -d1 -d1 d3-d1-100000 -d1 -d1 -d1 -d1;
    10-d1 12-d1 19/2-d1 7/2-d1 10-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-10 -d1-12 -d1-19/2 -d1-7/2 -d1-10 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    3/2-d1 5/4-d1 5/2-d1 3/2-d1 3/4-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-3/2 -d1-5/4 -d1-5/2 -d1-3/2 -d1-3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    d2-d1+3/2   3/4-d1 3-d1 -d1 3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d2-3/2 -d1-3/4 -d1-3 -d1 -2*d1-3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    d2-d1+3/2 1/10-2*d1 11/2-d1 15/2-d1 1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1-d2-3/2 -1/10 -d1-11/2 -d1-15/2 -2*d1-1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1;
    155/2-d1 73-d1 27-d1 103/2-d1  159/2-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1-155/2 -d1-73 -d1-27 -d1-103/2  -d1-159/2 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1
-d1 -d1;
    306/25-d1 612/25-d1 d3-d1+8589/20 1638/5-d1 358/25-2*d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1 100000-d1;
    -d1-306/25 -d1-612/25 -d1-d3-8589/20 -d1-1638/5 -358/25 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1, -d1-100000];
b=[d3+t+8807/25;t-7521/25;t+2819/100;t-251/10;d1+t+3397/4;t-d1-
80921/100;d1+t+1070.87;d1+t-22402/25;t+16651/1000;t-7301/500;
    t-d2+1469/1000;t-d1-1191/1000;d3+t+934;t-824;t+9321/1000;t-
3801/500;t+3446.59;t-3441.91;t+3169/100;t-d1-3159/100;t+1061/100;
    t-33/4;t+9/4;t-133/100;t+227/100;t-141/100;t-d1+371/100;t-
11/4;t+5847/100;t-503/10;t+2666/5;t-d1-1771/4];
 Aeq=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
 beq=1;
 lb=zeros(13,1);
 [x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
 fval
 exitflag
```

ANEXO J: CÓDIGOS PROBLEMA PRÁCTICO METODO DEFECTO

- **Código para generar las matrices simbólicas**

```
%Código que genera las nuevas matrices para Defecto
syms d1 d2 d3 t a
y=ones(33,13);
z=[y*d1];
l=1+a;
f=ones(1,13)*l
r=[348.72 343.98 313.14-d1 366.18 364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;-348.72 -343.98
-313.14+d1 -366.18 -364.43 0 0 0 0 0 0 0 0;
   8+d1 12 52.5 36+d2 8 0 0 0 0 0 0 0 0;-8-d1 -12 -52.5 -36-d2 -8 0 0 0 0
0 0 0 0;
   20.77 86.65+d2 220.98 1125-d3 18 20410+d3 0 0 0 0 0 0 0;-20.77-d2 -
86.65 -220.98 -1125+d3 -18 -20410-d3 0 0 0 0 0 0 0;
   318.46+d3 283.3-d1 656.07 965.62 208 22790+d3 0 0 0 0 0 0 0;-318.46-d3
-283.3+d1 -656.07 -965.62 -208 -22790-d3 0 0 0 0 0 0 0;
   3.11 4.65 8.63 0.56 2.6 0 20410 0 0 0 0 0 0;-3.11 -4.65 -8.63 -0.56 -
2.6 0 -20410 0 0 0 0 0 0;
   0.375-d1 0.56 0.58+d1 0.35 0.1 0 0 0 0 100000 0 0 0;-0.375+d1 -0.56 -
0.58-d1 -0.35 -0.1 0 0 0 0 -100000 0 0 0;
   0.162 0.285 0.235 2235 0.37+d3 0 0 0 0 0 0 100000 0;-0.162 -0.285 -
0.235 -2235 -0.37-d3 0 0 0 0 0 0 -100000 0;
   2.62 3.57 1.57 1.28 2 0 0 0 0 0 100000 0 0;-2.62 -3.57 -1.57 -1.28 -2
0 0 0 0 0 -100000 0 0;
   625 0 0 35 0 0 0 2500000 0 0 0 0 0;-625 0 0 -35 0 0 0 -2500000 0 0 0 0
0;
   0 0 0 5.83-d1 0 0 0 0 100000-d3 0 0 0 0;0 0 0 -5.83+d1 0 0 0 0 -
100000+d3 0 0 0 0;
   10 12 9.5 3.5 10 0 0 0 0 0 0 0 0;-10 -12 -9.5 -3.5 -10 0 0 0 0 0 0 0
0;
   1.5 1.25 2.5 1.5 0.75 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5 -1.25 -2.5 -1.5 -0.75 0 0 0
0 0 0 0 0;
   1.5+d2 0.75 3 0 0.75+d1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-d2 -0.75 -3 0 -0.75-d1 0
0 0 0 0 0 0 0;
   1.5+d2 0.1-d1 5.5 7.5 1+d1 0 0 0 0 0 0 0 0;-1.5-d2 -0.1+d1 -5.5 -7.5 -
1-d1 0 0 0 0 0 0 0 0;
   77.5 73 27 51.5 79.5 0 0 0 0 0 0 0 0;-77.5 -73 -27 -51.5 -79.5 0 0 0 0
0 0 0 0;
   12.24 24.48 429.45+d3 327.6 14.32-d1 0 0 0 0 0 0 0 100000;-12.24 -
24.48 -429.45-d3 -327.6 -14.32+d1 0 0 0 0 0 0 0 -100000
   1.5176+d1 1.7827 2.0861-d2 3.9561 1.26 3.5509+d1 4.14+d3 98.8 44.1
161.24 42  54.1+d2 24.2];
 B=[352.28+d3;-300.84;28.19;-25.1;849.25+d1;-809.21-d1;1070.87+d1;-
896.08+d1;16.651;-14.602;1.469-d2;-1.191-d1;934+d3;-824;9.321;-
7.602;3446.59;-3341.91;31.69;-31.59-d1;
   10.61;-8.25;2.25;-1.33;2.27;-1.41;3.71-d1;-2.75;58.47;-50.3;533.20;-
442.75-d1;3.30];
```

```
A=r-z;
I=ones(32,1);
s=I*t;
b=B+s;
```

- **Código para resolver problema método del defecto**

```
% Código para resolver por método del defecto
d1=input('ingrese valor de delta 1 ') % ingreso de los parámetros
d2=input('ingrese valor de delta 2 ')
d3=input('ingrese valor de delta 3 ')
t=input('ingrese valor de delta tetha ')
a=input('ingrese valor de delta alfa ')
f=[a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1;a+1]; %Función
Objetivo del defecto
A=[8718/25-d1 17199/50-d1 15657/50-2*d1 18309/50-d1 36443/100-d1 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
   -d1-8718/25 -d1-17199/50 -15657/50 -d1-18309/50 -d1-36443/100 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    8 12-d1 105/2-d1 d2-d1+36 8-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
   -2*d1-8 -d1-12 -d1-105/2 -d1-d2-36 -d1-8 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    2077/100-d1 d2-d1+1733/20 11049/50-d1 1125-d3-d1 18-d1 d3-d1+20410 -
d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d2-2077/100 -d1-1733/20 -d1-11049/50 d3-d1-1125,-d1-18,-d1-d3-
20410,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1;
    d3-d1+15923/50 2833/10-2*d1 65607/100-d1 48281/50-d1 208-d1 d3-
d1+22790 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d3-15923/50 -2833/10 -d1-65607/100 -d1-48281/50 -d1-208 -d1-d3-
22790 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    311/100-d1 93/20-d1 863/100-d1 14/25-d1 13/5-d1 -d1 20410-d1 -d1 -d1
-d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-311/100,-d1-93/20,-d1-863/100,-d1-14/25,-d1-13/5,-d1,-d1-20410,-
d1,-d1,-d1,-d1,-d1,-d1;
    3/8-2*d1,14/25-d1,29/50,7/20-d1,1/10-d1,-d1,-d1,-d1,-d1,100000-d1,-
d1,-d1,-d1;
    -3/8,-d1-14/25,-2*d1-29/50 -d1-7/20 -d1-1/10 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1-
100000 -d1 -d1 -d1;
    81/500-d1 57/200-d1 47/200-d1 2235-d1 d3-d1+37/100 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 100000-d1 -d1;
    -d1-81/500 -d1-57/200 -d1-47/200 -d1-2235 -d1-d3-37/100 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1-100000 -d1;
    131/50-d1 357/100-d1 157/100-d1 32/25-d1 2-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1
100000-d1 -d1 -d1;
    -d1-131/50 -d1-357/100 -d1-157/100 -d1-32/25 -d1-2 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1-100000 -d1 -d1;
    625-d1 -d1 -d1 35-d1 -d1 -d1 -d1 2500000-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-625 -d1 -d1 -d1-35 -d1 -d1 -d1 -d1-2500000 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1 -d1 -d1 583/100-2*d1 -d1 -d1 -d1 -d1 100000-d3-d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1 -d1 -d1 -583/100 -d1 -d1 -d1 -d1 d3-d1-100000 -d1 -d1 -d1 -d1;
    10-d1 12-d1 19/2-d1 7/2-d1 10-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
```

```
    -d1-10 -d1-12 -d1-19/2 -d1-7/2 -d1-10 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    3/2-d1 5/4-d1 5/2-d1 3/2-d1 3/4-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-3/2 -d1-5/4 -d1-5/2 -d1-3/2 -d1-3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    d2-d1+3/2   3/4-d1 3-d1 -d1 3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1;
    -d1-d2-3/2 -d1-3/4 -d1-3 -d1 -2*d1-3/4 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    d2-d1+3/2 1/10-2*d1 11/2-d1 15/2-d1 1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1-d2-3/2 -1/10 -d1-11/2 -d1-15/2 -2*d1-1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1;
    155/2-d1 73-d1 27-d1 103/2-d1  159/2-d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -
d1;
    -d1-155/2 -d1-73 -d1-27 -d1-103/2  -d1-159/2 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1 -d1
-d1 -d1;
    306/25-d1 612/25-d1 d3-d1+8589/20 1638/5-d1 358/25-2*d1 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1 100000-d1;
    -d1-306/25 -d1-612/25 -d1-d3-8589/20 -d1-1638/5 -358/25 -d1 -d1 -d1 -
d1 -d1 -d1 -d1, -d1-100000;
    1.5176+d1 1.7827 2.0861-d2 3.9561 1.26 3.5509+d1 4.14+d3 98.8 44.1
161.24 42  54.1+d2 24.2];
b=[d3+t+8807/25;t-7521/25;t+2819/100;t-251/10;d1+t+3397/4;t-d1-
80921/100;d1+t+1070.87;d1+t-22402/25;t+16651/1000;t-7301/500;
    t-d2+1469/1000;t-d1-1191/1000;d3+t+934;t-824;t+9321/1000;t-
3801/500;t+3446.59;t-3441.91;t+3169/100;t-d1-3159/100;t+1061/100;
    t-33/4;t+9/4;t-133/100;t+227/100;t-141/100;t-d1+371/100;t-
11/4;t+5847/100;t-503/10;t+2666/5;t-d1-1771/4;3.3041];
Aeq=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
beq=1;
[x,fval,exitflag]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb)
```