

# ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN UN TOKAMAK ESFÉRICO

JESÚS EDUARDO LÓPEZ DURÁN



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA

2021

# ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN UN TOKAMAK ESFÉRICO

JESÚS EDUARDO LÓPEZ DURÁN

Proyecto de investigación para optar al título de  
Magíster en Física

Director:

Eduardo Alberto Orozco Ospino  
PhD Física  
Universidad Industrial de Santander  
Escuela de Física

Codirector:

Alexei Yu. Chirkov  
DSc Física del Plasma  
Universidad Técnica Estatal Bauman de Moscú  
Departamento de Física Térmica

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2021

*A mis padres,  
Luz Yanneth y Pedro Jesús.  
A mi hermano Jhon y a mis profesores,  
Annie J. Delgado, Ana Dolores Araque,  
Francelina Hoyos y José Domingo Jaimes.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a todas y cada una de las personas que han participado en esta etapa académica y me han brindado su apoyo, confianza y amistad. Sus aportes han impactado en mi crecimiento académico, profesional y personal.

Especialmente agradezco a mis Directores: Eduardo Alberto Orozco y Alexei Yu. Chircov por sus valiosas sugerencias, comentarios y la confianza depositada durante la realización de este trabajo.

# ÍNDICE GENERAL

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>11</b>
<b>1. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO</b>	<b>13</b>
1.1 PRINCIPIOS DE LA FUSIÓN NUCLEAR . . . . .	13
1.2 CONFINAMIENTO MAGNÉTICO . . . . .	14
1.2.1 Equilibrio . . . . .	14
1.2.2 Configuraciones toroidales . . . . .	15
1.3 TOKAMAK ESFÉRICO . . . . .	16
<b>2. MODELO MHD</b>	<b>17</b>
2.1 PLASMA COMO UN FLUIDO . . . . .	17
2.1.1 Ecuación de movimiento . . . . .	17
2.1.2 Ecuación de energía . . . . .	17
2.1.3 Ecuación de inducción magnética . . . . .	18
2.1.4 Ecuación de continuidad . . . . .	18
2.2 MHD IDEAL . . . . .	18
2.3 ESTABILIDAD . . . . .	21
<b>3. MODELO DE SIMULACIÓN</b>	<b>23</b>
3.1 MODELO FÍSICO . . . . .	23
3.2 GEOMETRÍA Y CONDICIONES DE FRONTERA . . . . .	24
3.3 ESQUEMA NUMÉRICO Y DIAGNOSTICO DE CÓDIGO . . . . .	25
3.3.1 Criterio de Courant . . . . .	26
3.3.2 Tubo de choque: Brio-Wu . . . . .	26
3.3.3 Propagación de una onda expansiva . . . . .	30
<b>4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	<b>32</b>
4.1 EQUILIBRIO MHD: CONDICIONES INICIALES . . . . .	32
4.2 CORRIMIENTO DE SHAFRANOV . . . . .	36
4.3 DINÁMICA Y ESTABILIDAD . . . . .	38
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>51</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>54</b>

# LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Sección eficaz promedio medida en barns ( $1b = 10^{-28}m^2$ ) en función de la energía del centro de masa. D: deuterio, T: Tritio y He <sup>3</sup> : helio-3. . . . .	13
Figura 2	a) Esquema principal de un reactor <i>Tokamak</i> . b) Sección poloidal de una columna de plasma toroidal: radio mayor $R_o$ , el radio menor $a$ , la triangularidad $\delta$ y la elipticidad $\kappa$ . . . . .	15
Figura 3	Esquema geométrico del sistema a simular. La sección rectangular definida por $r_{min} < r < r_{max}$ y $z_{min} < z < z_{max}$ acotan un plano poloidal a la región de interés. En el interior del plano se representa un esquema típico de las líneas de campo magnético (líneas verdes) y las superficies de presión constante (en colores rojo, gris y azul) . . . . .	24
Figura 4	En azul se presenta la solución numérica obtenida empleando el código desarrollado en el instante $t = 0,2$ y en púrpura la solución exacta al problema de Riemann en el mismo instante. . . . .	28
Figura 5	Evolución del perfil de densidad y de divergencia máxima del campo magnético durante las simulaciones con diferentes parámetros de viscosidad: $5e - 4$ rojo, $7,5e - 4$ verde y $1e - 3$ azul . . . . .	29
Figura 6	Evolución de la presión de la onda expansiva vista sobre el plano ecuatorial (plano $xy$ , $z = 0$ ) y desde el plano poloidal $rz$ . . . . .	30
Figura 7	Evolución de la divergencia de campo magnético durante la simulación de la onda expansiva. . . . .	31
Figura 8	Equilibrio de la columna de plasma: (a) mapa de contornos del flujo poloidal $\psi$ sobre el plano poloidal. (b) perfil de presión medida en kPa: el contorno punteado representa la frontera. . . . .	33
Figura 9	a) Perfil de presión $c_8$ sobre el plano poloidal empleando la función polinómica de segundo orden y b) presión a lo largo del eje radial ( $z = 0$ ) para $c_1$ y $c_8$ evidenciando variación de $p$ . . . . .	35
Figura 10	Comportamiento de las componentes de campo magnético a lo largo del eje radial a la izquierda, y a la derecha comportamiento de la divergencia del campo magnético en el equilibrio. . . . .	36
Figura 11	Corrimiento de Shafranov: a) Las superficies de contorno de $\psi$ muestran un mayor corrimiento para la configuración con triangularidad negativa. b) Flujo poloidal normalizado a lo largo del eje radial: en azul, plasma con $\delta > 0$ , en rojo $\delta < 0$ . En ambos casos la curva de $B_\phi$ se superponen. . . . .	37

---

Figura 12	Comportamiento del a) radio mayor en función del flujo poloidal normalizado manteniendo $\beta_N = 2,7\%$ fijo y b) del corrimiento del eje respecto al parámetro $\beta_N$ para diferentes configuraciones. . . . .	37
Figura 13	Sistema coordinado para representación de las perturbaciones en series de Fourier: ángulo toroidal $\phi$ en naranja, ángulo poloidal $\theta$ en verde y en negro la superficie de flujo poloidal $\psi_N$ constante. . . . .	39
Figura 14	Variación de la presión respecto al equilibrio en diferentes instantes: en la gráfica superior se presenta la evolución sobre el plano poloidal y en la gráfica inferior sobre el plano ecuatorial $z = 0$ . . . . .	40
Figura 15	Razón de crecimiento de la energía magnética durante toda la simulación. . . . .	41
Figura 16	Evolución del perfil de presión bajo la dinámica no lineal desde una vista a) tridimensional, de toda la geometría toroidal de las superficies de presión constante y b) desde un plano poloidal $\phi : cte$ . . . . .	42
Figura 17	Estructura poloidal para el número toroidal $n = 5$ : a) mapa de color de la perturbación en $p$ y b) amplitud de la perturbación para diferentes números poloidales $m$ en función del flujo $\psi_N$ . . . . .	43
Figura 18	Variación energética asociada a cada onda presente en el sistema así como la respectiva variación en los modos impulsados por presión $\delta w_4$ y por corriente $\delta w_5$ según teoría MHD linealizada. $\delta w_1$ , $\delta w_2$ y $\delta w_3$ las variaciones asociadas a la propagación de las ondas de Alfvén, magneto acústicas y acústicas respectivamente. . . . .	43
Figura 19	Mapa de color de la perturbación magnética sobre cada componente y su respectiva divergencia sobre un plano poloidal arbitrario en los últimos instantes de la simulación: $\sim 75\tau_A$ . . . . .	44
Figura 20	Evolución a) energética de cada modo toroidal y b) de la variación $\delta w$ de las ondas presentes en el plasma y modos impulsados tanto por presión como corriente a lo largo de la simulación para $c_2$ . . . . .	45
Figura 21	Perfiles de presión asociados a la configuración $c_2$ para: a) la variación de presión $p_1$ respecto al equilibrio $p_o$ (izquierda) y presión neta $p = p_o + p_1$ (derecha) sobre un plano poloidal, b) perturbación sobre el plano ecuatorial $z = 0$ en el instante $t = 80\tau_A$ y c) la vista 3D de la columna de plasma con superficies de presión constante al inicio y final de la simulación. . . . .	45
Figura 22	Comportamiento de la energía magnética para los primeros 13 modos toroidales en cada una de las nueve configuraciones descritas en la tabla 5. . . . .	46
Figura 23	Perfiles de presión y su respectiva perturbación sobre el plano poloidal para cada una de las configuraciones presentadas en la tabla 5 en el instante que cada simulación finaliza su ejecución. . . . .	47

---

Figura 24	Observaciones experimentales: A la izquierda, captura de la cámara de visibilidad rápida en el dispositivo MAST, para el pulso #24763 y a la derecha la imagen de la cámara de visibilidad rápida en MAST, para el pulso #18619 durante un accidente de ELM; pulso de configuración similar al pulso #24763. Imagen tomada del trabajo realizado por S J P Pamela y colaboradores [1]. . . . .	48
Figura 25	Perfil de presión 3D. Superficies de presión constante en los instantes inicial y final de la simulación para: $c_6$ en a) $t = 0$ , b) $t = 26\mu s$ y $c_7$ en c) $t = 0$ , d) $t = 20\mu s$ . . . . .	49
Figura 26	Representación esquemática de la discretización: Los círculos representan el valor de la función en cada uno de los puntos de malla $x_i$ separados uno del otro una distancia $h$ . Estas mallas en las que la distancia entre puntos es fija se conocen como equidistantes o mallas homogéneas. . . . .	61

# LISTA DE TABLAS

Tabla 1	Algunas reacciones de fusión nuclear. En la reacción $D + D$ hay un 50 % de probabilidad que produzca $He^3$ más un neutrón o igualmente se puede obtener $T + p$ . . . . .	14
Tabla 2	Condiciones para la validez del modelo MHD: $\tau_i$ y $\tau_H$ representan el tiempo entre colisiones iónicas y el tiempo hidrodinámico respectivamente, $\lambda_c$ camino libre medio, $\Omega_e$ la frecuencia ciclotrónica electrónica, $\omega_p$ la frecuencia plásmica, $R_m$ el número de Reynolds magnético. Por último $\beta$ es la razón entre presión cinética y magnética. . . . .	20
Tabla 3	Valores típicos de los parámetros de validación del modelo MHD en plasmas confinados magnéticamente. . . . .	20
Tabla 4	Comportamiento del error $L^1$ y $L^1_{order}$ para la variable $\rho$ en el instante $t = 0,2$ . . . . .	28
Tabla 5	Parámetros físicos y geométricos que caracterizan cada una de las diferentes configuraciones de equilibrio obtenidas a través de la solución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov. . . . .	34
Tabla 6	Variación energética según principio de energía: $\delta w_1$ variación asociada a las ondas de Alfvén, $\delta w_2$ a la onda magneto-acústica, $\delta w_3$ a la onda acústica, $\delta w_4$ a modos impulsados por presión, y $\delta w_5$ a modos impulsados por corriente o modos <i>kink</i> . El tiempo representa aproximadamente el inicio del intervalo de transición entre la dinámica en el régimen lineal al no lineal. . . . .	49
Tabla 7	Detalles de la sección rectangular que define la región de simulación sobre el plano poloidal, ver fig.3, y los respectivos pasos de malla sobre las coordenadas $r$ y $z$ . $R_o$ es representa el parámetro de normalización para las longitudes en cada una de las simulaciones. . . . .	63

---

---

## ÍNDICE DE ANEXOS

---

---

ANEXO A.	DISCRETIZACIÓN ESPACIAL . . . . .	60
ANEXO B.	INTEGRADOR TEMPORAL . . . . .	62

---

---

## RESUMEN

---

---

**TÍTULO:** ESTUDIO NUMÉRICO DE LAS INESTABILIDADES MAGNETOHIDRODINÁMICAS EN UN TOKAMAK ESFÉRICO.\*

**AUTOR:** Jesús E López, Eduardo A Orozco<sup>†</sup>, Alexei Yu. Chirkov<sup>‡</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Plasma, Confinamiento toroidal, Tokamak, Magnetohidrodinámica, Equilibrio MHD.

**DESCRIPCIÓN:** Los dispositivos toroidales basados en confinamiento magnético para propiciar las reacciones de fusión en un reactor termonuclear prometen ser la solución al problema energético mundial. Sin embargo, uno de los retos actuales consiste en mejorar las condiciones de estabilidad de la columna de plasma en el régimen de alto confinamiento, donde surgen un gran número de inestabilidades. Ejemplo de ello lo constituyen los modos de borde exterior que, al ser inestabilidades que se ubican en la periferia del plasma, promueven la fuga y al rápido enfriamiento del plasma.

Estudios de nuevos escenarios que eviten o mitiguen estos fenómenos requieren que se establezcan límites de estabilidad basados en factores geométricos y de valores apropiados de campo. En este trabajo se presentan los resultados del estudio numérico de la dinámica 3D de 9 columnas de plasma confinadas magnéticamente por tokamak esféricos aplicando la teoría MHD. Las condiciones de equilibrio en el instante inicial se establecen a través de la solución numérica a la ecuación de Grad-Shafranov; las cuales al someterse a perturbaciones muestran regiones de la columna en las que el plasma exhibe mayor inestabilidad dependiendo del perfil de presión empleado. También se analizó el equilibrio y la dinámica del plasma respecto a factores como la corriente del plasma y aspectos geométricos del D-shape como la triangularidad, encontrando que el corrimiento de Shafranov aumenta conforme la triangularidad disminuye, además, la configuración con triangularidad negativa ( $\delta < 0$ ) reduce la formación de estructuras filamentadas propias de las inestabilidades de borde.

---

\*Trabajo de Investigación.

<sup>†</sup>Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director, Ph.D. Física.

<sup>‡</sup>Departamento de Física Térmica, Universidad Técnica Estatal de Bauman de Moscú. Codirector, DSc.

---

---

# ABSTRACT

---

---

**TITLE:** NUMERICAL STUDY OF MAGNETOHIDRODYNAMIC INSTABILITIES IN A SPHERICAL TOKAMAK<sup>\*</sup>

**AUTHOR:** Jesús E López, Eduardo A Orozco<sup>†</sup>, Alexei Yu. Chirkov<sup>‡</sup>

**KEYWORDS:** Plasma, toroidal confinement, Tokamak, Magnetohydrodynamics, MHD equilibrium.

**DESCRIPTION:** Toroidal devices based on magnetic confinement to promote fusion reactions in a thermonuclear reactor promise to be the solution to the world's energy problem. However, one of the current challenges is to improve the stability conditions of the plasma column in the high confinement regime, where many instabilities arise. An example of this is the Edge Localized modes, which are located on the periphery of the plasma and promote leakage and rapid plasma cooling.

Studies of new scenarios to avoid or mitigate these phenomena require that stability limits be established based on geometric factors and appropriate field values. In this work, the results of the numerical study of the 3D dynamics of magnetically confined plasma columns in spherical tokamaks, based on the MHD theory are presented. The equilibrium conditions at the initial instant were obtained from the numerical solution to the Grad-Shafranov equation. Said columns were subjected to perturbations, showing regions where the plasma exhibits greater instability according to the pressure profile used. The influence of the plasma current and geometric aspects of the D-shape such as triangularity, on the equilibrium state and the dynamics of the plasma, were also analyzed. It was found that the Shafranov shift increases as the triangularity decrease. In addition, the configuration with negative triangularity ( $\delta < 0$ ) reduces the formation of filamented structures typical of edge instabilities.

---

<sup>\*</sup> Research Work.

<sup>†</sup> Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Advisor, Ph.D. Física.

<sup>‡</sup> Thermal Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU). Co-Advisor, DSc.

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

La primera observación experimental de fusión nuclear fue realizada por Oliphant en el laboratorio Cavendish (Cambridge) en el año 1932 [2], pero fue en la década de los 50 que se pensó en la fusión como una fuente de energía, y su desarrollo continúa aún en nuestros días. El desarrollo lento de esta tecnología se debe principalmente a la dificultad de confinar el combustible, que consiste principalmente en núcleos ligeros de hidrógeno, el tiempo suficiente para que el sistema sea óptimo, es decir, que la energía suministrada para que las reacciones se den sea menor que la energía recolectada en las reacciones de fusión [3]. La idea de un reactor nuclear basado en la fusión de núcleos atómicos ligeros trae consigo una fuente “inagotable” de energía y es particularmente caracterizada por no producir residuos radiactivos [4]. El ejemplo más claro de un reactor de fusión lo constituyen las estrellas; las cuales liberan gran cantidad de energía a partir de la fusión de átomos de hidrógeno, produciendo helio y luego en elementos más pesados. Es así como la propia naturaleza nos advierte de la posibilidad de obtener una fuente de energía por este medio; sin embargo, el confinamiento del plasma no es un problema presente en las estrellas, debido a que su propio campo gravitacional evita el escape de la materia.

El estudio de la fusión termonuclear basa sus principios en el entendimiento de la física del plasma, cuya descripción dinámica es tanto fascinante como compleja, ya que acarrea una gran cantidad de fenómenos que involucran propagación de ondas, donde las oscilaciones de temperatura, presión, campos eléctricos y magnéticos pueden crecer, dando lugar a un gran número de inestabilidades [5]. Es así que desde hace unas décadas se han estudiado diversos mecanismos de confinamiento [6]. Estos estudios se han desarrollado tanto a nivel experimental como a nivel teórico y basados también en técnicas de simulación computacional. En el año 1958 VD Shafranov presenta su trabajo sobre el equilibrio magnetohidrodinámico que para sistemas toroidales axialmente simétricos conduce a la hoy conocida ecuación de Grad-Shafranov, siendo uno de los puntos de partida en el estudio de plasmas confinados en dispositivos tipo tokamak [7].

Los primeros estudios basados en el modelo magnetohidrodinámico aplicados a dispositivos tokamak arrojaron un límite de estabilidad asociado al parámetro beta ( $\beta$ ) conocido como el criterio de Troyon y depende de la corriente neta del plasma, el radio menor y del campo  $\mathbf{B}$  [8–10]. Gran parte de las investigaciones actuales están enfocadas en desarrollar modos de alto confinamiento libre de inestabilidades o mecanismos que puedan suprimir sus efectos. Para realizar esta tarea es indispensable encontrar y definir

---

regiones de estabilidad así como comprender ampliamente la formación y dinámica de inestabilidades a través del estudio de la dinámica misma del plasma.

La física de plasmas en dispositivos de confinamiento como el tokamak no está completamente entendida, representando un gran reto. Las inestabilidades en el borde exterior de un dispositivo toroidal que generan erupciones de plasma no son la excepción; estas erupciones se producen cuando sobre la sección poloidal el plasma presenta una estructura filamentada en el régimen de alto confinamiento, fenómeno conocido como Edge Localized Modes (ELMs) y se ha observado en dispositivos como el MAST-Mega Ampere Spherical Torus [11, 12]. Desde un punto de vista computacional, códigos como JOREK, BOUT++ entre otros trabajos, abordan el estudio de estos fenómenos desde el modelo reducido de la magnetohidrodinámica y proyectos como XTOR y NIMROD simulan el plasma desde los modelos MHD visco-resistivos, los cuales tienen en común la implementación de técnicas numéricas basadas en elementos finitos en dos dimensiones junto la expansión toroidal Fourier [13–16]. Algunos de estos códigos se encuentran con licencia de código abierto para su libre uso, sin embargo, sus manuales tienden a ser tediosos, dificultando su manipulación y ejecución. Motivados por estos trabajos y especialmente por las simulaciones realizadas por Riaz Khan, este trabajo se enfoca en fijar las bases para el desarrollo de un código que trabaje sobre el modelo MHD visco-resistivo implementando técnicas computacionales sencillas, ampliamente empleadas en el grupo de investigación de Física y tecnología del plasma y corrosión, FITEK, adscrito a la escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander. Las ventajas de la elaboración de códigos propios permite fortalecer las bases conceptuales de los modelos del plasma así como tener mayor control sobre la simulación y en este caso en particular, fijar las bases para el estudio de la dinámica 3D de sistemas de confinamiento magnético.

En este trabajo de investigación se presentan los resultados de las simulaciones numéricas de la dinámica de la columna de plasma confinada magnéticamente por un tokamak esférico, logrando identificar comportamientos propios del sistema bajo diferentes perfiles de presión, corriente en el plasma y de factores geométricos como la triangularidad. El documento presenta en el primer capítulo los principios básicos de la fusión nuclear y cómo a partir de esta idea surgen las nociones principales de un reactor de fusión, introduciendo el concepto de tokamak y el principio del confinamiento magnético. En el segundo capítulo se presenta la descripción del modelo magnetohidrodinámico ya que en estos dispositivos el plasma se puede modelar como un fluido conductor, y a su vez se discuten los rangos de validez del modelo. En el capítulo 3 se detalla el modelo físico, es decir, el conjunto de ecuaciones empleadas en las simulaciones y se especifican detalles del esquema y técnicas numéricas así como la descripción geométrica del esquema físico. En este mismo capítulo se valida el código desarrollado junto las condiciones de frontera que se implementan en las simulaciones. Finalmente, en el capítulo 4 se presentan los resultados del equilibrio de las columnas toroidales del plasma y su respuesta a pequeñas perturbaciones, describiendo así la dinámica y evolución energética de cada sistema, donde se evidencia el desarrollo de inestabilidades tanto en el borde o límite exterior del plasma como en el centro de la columna de acuerdo a las principales características de los perfiles de equilibrio.

---

---

# 1. CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

---

---

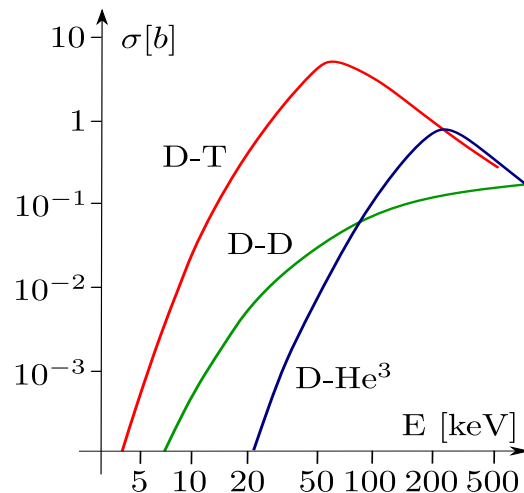
## 1.1 PRINCIPIOS DE LA FUSIÓN NUCLEAR

La fusión nuclear se conoce como el proceso en el que dos núcleos atómicos logran vencer la barrera de repulsión electrostática para formar un nuevo núcleo más pesado. Dicha repulsión, de naturaleza coulombiana, puede superarse a través de colisiones si la velocidad relativa entre los núcleos es alta, por lo que se requiere transferir al sistema una gran cantidad de energía, generalmente del orden de decenas de keV [17]. Como puede apreciarse en la Figura 1, la probabilidad de colisión depende fuertemente de la energía suministrada y del tipo de reacción. La forma más óptima de realizar este proceso es calentar los reactivos lo suficiente hasta que la fusión se consiga, por tal motivo este proceso es denominado *fusión termonuclear*.

Una vez sucede la colisión se libera gran cantidad de energía si la suma de masa de los núcleos atómicos antes de la reacción es mayor que la masa de los nuevos núcleos; esta diferencia es conocida como defecto de masa « $\Delta m$ » y de acuerdo con la teoría de la relatividad,  $\Delta mc^2$  es la energía liberada en la reacción. En la Tabla 1 se presentan algunas reacciones de fusión, donde se hace evidente que la reacción D-T no sólo presenta mayor ganancia energética (ver Figura 1), también sucede a temperaturas más bajas [5].

Para construir un reactor de fusión como fuente de energía, se debe confinar un gas de reactivos adecuados el tiempo suficiente, a temperatura y densidades necesarias, de modo que los procesos de fusión liberen más energía que la suministrada para el calentamiento. El concepto anterior se conoce como el criterio de Lawson:  $n\tau_c \geq f(T)$ , donde  $n$  es la densidad del combustible,  $\tau_c$  el tiempo de confinamiento

**Figura 1:** Sección eficaz promedio medida en barns ( $1b = 10^{-28}m^2$ ) en función de la energía del centro de masa. D: deuterio, T: Tritio y  $He^3$ : helio-3.



y  $f(T) \sim T^2$  una función de la temperatura [18].

Para la reacción D-T, el criterio de Lawson se aproxima a  $n\tau_c \geq 2 \times 10^{11} [\text{m}^{-3}\text{s}]$  [19], de modo que todo esfuerzo en el desarrollo un dispositivo de fusión termonuclear debe considerar este criterio, exigiendo que el combustible a una cierta densidad y temperatura ha de mantenerse confinado al menos un tiempo  $\tau_c$  para que el proceso sea eficiente.

**Tabla 1:** Algunas reacciones de fusión nuclear. En la reacción D + D hay un 50 % de probabilidad que produzca  $\text{He}^3$  más un neutrón o igualmente se puede obtener T + p.

Reacción	Reacción
<b>1</b> D + T $\rightarrow$ $\text{He}^4$ (3.52 MeV) + n (14.06MeV)	<b>4</b> D + $\text{He}^3 \rightarrow \text{He}^4$ (3.67MeV) + p (14.67MeV)
<b>2</b> D + D $\rightarrow$ $\text{He}^3$ (0.82MeV) + n (2.45 MeV) 50 %	<b>5</b> $\text{Li}^6 + \text{n} \rightarrow \text{T} + \text{He}^4 + 4.8\text{MeV}$
<b>3</b> D + D $\rightarrow$ T (1.01 MeV) + p (3.03MeV) 50 %	<b>6</b> $\text{Li}^7 + \text{n} (2.5 \text{ MeV}) \rightarrow \text{T} + \text{He}^4 + \text{n}$

## 1.2 CONFINAMIENTO MAGNÉTICO

A altas temperaturas los átomos se ionizan formando un gas cuasineutral que exhibe comportamientos colectivos. Un estado de la materia conocido como *plasma* [20].

La necesidad de mantener el gas confinado a tan altas temperaturas imposibilita la idea de usar una cavidad de paredes sólidas para contenerlo, ya que la interacción con el material ocasiona un rápido enfriamiento del plasma y a su vez deterioro del las paredes que lo contienen. En la práctica se han desarrollado dos mecanismos de confinamiento: *i)* el inercial y *ii)* el magnético [21, 22].

Dado que la dinámica de las partículas ionizadas está determinada por la fuerza de Lorentz, la idea del confinamiento magnético se basa en encontrar configuraciones de campo magnético que confine y mantenga alejado al plasma de las paredes de la cavidad. Es indispensable que dicha configuración establezca un estado de equilibrio al sistema, ofrezca un alto régimen de estabilidad y permita sostener el calentamiento por el tiempo requerido, de tal forma que las pérdidas por transporte no sea muy grandes [23, 24].

### 1.2.1 Equilibrio

La topología de las líneas de campo magnético rigen la dinámica de las partículas ionizadas que conforman el plasma, de este modo, es sencillo comprender que una configuración magnética en equilibrio se alcanza cuando la fuerza de Lorentz compensa la fuerza ejercida por la presión del plasma:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

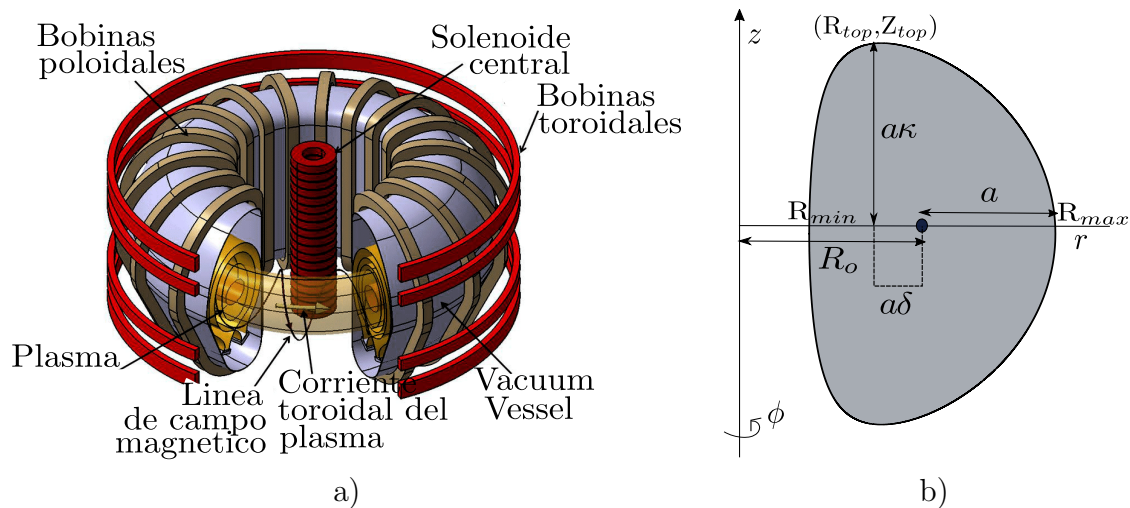
donde la densidad de corriente y campo magnético están relacionadas a través de la ley de Ampère:  $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ . Estas dos ecuaciones junto a la ley de Gauss para el campo magnético  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  constituyen las expresiones que definen el equilibrio en el modelo

MHD<sup>\*</sup> bajo la suposición de equilibrio estático ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ) y estacionario ( $\partial_t = 0$ ) [25]. De la Ec.(1) se puede demostrar que las líneas de campo magnético y las líneas de corriente reposan sobre las superficies de presión constante, donde el ángulo entre los campos  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{J}$  es arbitrario.

## 1.2.2 Configuraciones toroidales

Los primeros dispositivos de fusión basados en confinamiento magnético como los *z*-pinch empleaban cavidades cilíndricas, sin embargo, la pérdida de plasma a través de sus tapas era inevitable [26]. Actualmente la mayoría de dispositivos poseen una topología toroidal. Las superficies confinantes en estos reactores son esencialmente generados por la superposición de un campo magnético toroidal muy intenso y otro poloidal de menor intensidad. Dos configuraciones de este tipo son la base del confinamiento toroidal: *i*) las configuraciones helicoidales o *Stellarator's* [27] y *ii*) las configuraciones con simetría axial como los RFP (Reversed Field Pinch) [28, 29], *Spheromak* [30] y los dispositivos tipo *Tokamak* [19].

**Figura 2:** a) Esquema principal de un reactor *Tokamak*. b) Sección poloidal de una columna de plasma toroidal: radio mayor  $R_o$ , el radio menor  $a$ , la triangularidad  $\delta$  y la elipticidad  $\kappa$



En sistemas axialmente simétricos, las superficies magnéticas se anidan en torno a una línea de campo completamente circunferencial, denominada eje magnético. La última superficie de campo cerrada es típicamente llamada separatriz y define la forma del plasma [6]. En un *Tokamak*, la proyección de la separatriz sobre el plano poloidal suele tener una forma ovalada, y se conoce como “*D-saphe*”. La Figura 2 presenta un dispositivo tipo *Tokamak*<sup>†</sup> y exhibe los parámetros geométricos de la columna de plasma.

$$R_o = \frac{R_{max} + R_{min}}{2} \quad (2)$$

<sup>\*</sup> El modelo MHD se describe en la sección 2.

<sup>†</sup>a) Tomada y adaptada de [31]

$$a = \frac{R_{max} - R_{min}}{2} \quad (3)$$

$$\delta = \frac{R_o - R_{top}}{a} \quad (4)$$

$$\kappa = \frac{Z_{top}}{a} \quad (5)$$

donde el radio mayor  $R_o$ , el radio menor  $a$ , la triangularidad  $\delta$  y la elipticidad  $\kappa$  definen completamente el  $D$ -shape. Un valor negativo de la triangularidad ( $\delta < 0$ ) representa una plasma con  $D$ -shape inverso.

Actualmente, el proyecto ITER<sup>‡</sup> - «International Thermonuclear Experimental Reactor» por sus siglas en inglés, un proyecto altamente ambicioso, cuenta con la participación de países como EEUU, Rusia, China y la UE; con el que se pretende mostrar la viabilidad comercial de una planta de fusión termonuclear. Este reactor está diseñado bajo el concepto de un *Tokamak* convencional de razón de aspecto ( $A = R_o/a$ )  $\sim 6$  y se encuentra en su fase de construcción en Cadarache (Francia) [32].

Gran parte de las investigaciones actuales, orientadas a la fusión termonuclear, se centran en el desarrollo de nuevo conocimiento que pueda fortalecer y mejorar los resultados de dicho proyecto [33–35].

### 1.3 TOKAMAK ESFÉRICO

Los dispositivos basados en el concepto de un *Tokamak* convencional, es decir, cuyo radio mayor es por lo menos 4 veces más grande que el radio menor, requieren de una gran infraestructura e inversión económica, por lo que la idea de reducir el tamaño a estos dispositivos resulta muy atractiva. Bajo esta idea nace el concepto de tokamak esférico en la década de los 80, cuya razón de aspecto es considerablemente menor respecto a los tokamak convencionales, generalmente  $A < \sim 2$ .

Estudios realizados por B. Carreras y T. Hender evidenciaron una mejoría en la estabilidad del plasma a medida que la razón de aspecto disminuía, logrando reducir notablemente la presencia de inestabilidades [36, 37], por lo que la construcción y estudio de estos dispositivos incrementó.

A pesar de las ventajas en la estabilidad, los STs (Spherical Tokamaks, por sus siglas en inglés) presentan una presión global menor respecto a reactores tokamak de mayor razón de aspecto [38].

Una amplia variedad de dispositivos desarrollados bajo este concepto (STs) son la base de experimentos que permiten establecer relaciones de transporte y estabilidad, fundamentales en el estudio y comprensión de la física del plasma y a su vez tomada como idea para el estudio y desarrollo de fuentes de neutrones de alta energía [39–42].

---

<sup>‡</sup>ITER, palabra del latín y significa: *el camino*.

---

---

## 2. MODELO MHD

---

---

### 2.1 PLASMA COMO UN FLUIDO

Típicamente el estudio teórico del plasma se basa en uno de dos puntos de vista de acuerdo a la validez del modelo respecto a parámetros constituyentes del sistema: *i)* el estudio microscópico que consta de un análisis estadístico y cinético de sus variables físicas y *ii)* el análisis macroscópico basado en principios térmicos e hidrodinámicos, en el que se considera el plasma como un fluido conductor.

La magnetohidrodinámica o MHD se encarga de describir las componentes del plasma como un único fluido conductor bajo la suposición fundamental de que los campos y el fluido fluctúan al mismo tiempo y a las mismas escalas de longitud, así, de forma natural surgen las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas a las ecuaciones de Maxwell [19].

#### 2.1.1 Ecuación de movimiento

El movimiento del fluido está descrito a través del balance de fuerzas al que se encuentra sometido. En este sentido la evolución del campo de velocidades está dada por el efecto de la fuerza de Lorentz  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , la fuerza asociada al gradiente de presión cinética  $\nabla p$  y fuerzas viscosas  $\mathbf{F}_{\text{vis}}$ :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}_{\text{vis}} \quad (6)$$

donde  $\rho$  representa la densidad de masa. A pesar de que el fluido es eléctricamente neutro, la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  es resultado del movimiento relativo entre iones y electrones.

#### 2.1.2 Ecuación de energía

En el modelo MHD se establece el balance energético como sigue:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{q}_{\text{conv}} + \mathbf{s} - \mathbf{q}_{\text{vis}}) - Q_{c,r} \quad (7)$$

---

donde  $\varepsilon = \rho \left( \frac{u^2}{2} + \epsilon \right) + \frac{B^2}{2\mu_o}$  representa la densidad total de energía,  $\epsilon$  la energía interna,  $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_o}$  el flujo de energía electromagnética o vector de Poynting,  $\mathbf{q}_{\text{conv}} = \left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + \epsilon \right) + p \right] \mathbf{u}$  el flujo convectivo de energía,  $\mathbf{q}_{\text{vis}}$  la disipación viscosa y finalmente  $Q_{c,r}$  las disipaciones por transferencia de calor y radiación. Para cerrar el sistema es indispensable incluir una ecuación de estado que relaciona a la energía interna  $\epsilon$ ,  $\rho$  y  $p$ .

### 2.1.3 Ecuación de inducción magnética

Como es bien sabido, el campo magnético evoluciona según la ley de inducción de Faraday que al combinarse con la ley de Amperè y la relación constitutiva de campos (ley de Ohm:  $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}$ ) adopta la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_o} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (8)$$

aquí  $\eta$  representa la resistividad eléctrica y la expresión  $\frac{\eta}{\mu_o} \nabla^2 \mathbf{B}$  es el término de difusión magnética.

### 2.1.4 Ecuación de continuidad

Para finalizar, la evolución para la densidad de masa obedece a la ecuación de continuidad:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (9)$$

## 2.2 MHD IDEAL

MHD ideal suele describir el comportamiento macroscópico en una amplia gama de plasmas, y el confinamiento de plasmas de fusión es un claro ejemplo de esto [25, 38]. Bajo este modelo, el plasma se aproxima como un fluido conductor sin pérdidas por efectos resistivos ni viscosos. Al no presentar efectos de disipación, las ecuaciones anteriores adoptan una estructura conservativa como se muestra en la Ec.(10) y conducen a propiedades interesantes como la conservación de flujo magnético.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \varepsilon \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = -\nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbb{I} \left( p + \frac{B^2}{2\mu_o} \right) - \mathbf{B} \mathbf{B} \\ \left( \varepsilon + p + \frac{B^2}{2\mu_o} \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \\ \mathbf{u} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde  $\mathbb{I}$  es la matriz identidad.

La ecuación de estado que cierra el sistema de ecuaciones es similar a la de los gases ideales:  $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$ , donde  $\gamma$  es la constante adiabática; sin embargo, un plasma MHD no es un gas ideal en el que se desprecian las colisiones entre partículas, por el contrario, en este caso están presentes las colisiones que relajan al sistema a una función de distribución Maxwelliana (Equilibrio termodinámico local- LTE) que es lo que conduce a la anterior ecuación de estado y así, tanto el gas ideal como el plasma MHD obedecen a la misma ecuación de estado. Por otra parte, vale la pena aclarar que bajo la condición de altas colisiones no parece apropiado considerar el plasma sin efectos resistivos(sin colisiones), pero como se vio en la Ec.(8), despreciar los efectos resistivos implica despreciar la difusión magnética durante los tiempos característicos de duración del fenómeno de interés.

Partiendo del método de las características es posible identificar las ondas que se propagan en el plasma; más específicamente, sus velocidades  $\lambda_i$  [43].

Así, a lo largo del eje  $x$  se encuentran 8 velocidades, donde los subíndices enumeran cada una de ellas:

$$\lambda_{1,8}^x = v_x \pm c_f, \quad \lambda_{2,7}^x = v_x \pm c_a, \quad \lambda_{3,6}^x = v_x \pm c_s, \quad \lambda_{4,5}^x = v_x \quad (11)$$

siendo  $c_f$  y  $c_s$  las velocidades rápida y lenta de la onda magnetoacústica, respectivamente

$$c_f = \left[ \frac{1}{2} \left( a^2 + \frac{B^2}{\mu_o \rho} + \sqrt{\left( a^2 + \frac{B^2}{\mu_o \rho} \right)^2 - 4a^2 c_a^2} \right) \right]^{1/2} \quad (12)$$

$$c_s = \left[ \frac{1}{2} \left( a^2 + \frac{B^2}{\mu_o \rho} - \sqrt{\left( a^2 + \frac{B^2}{\mu_o \rho} \right)^2 - 4a^2 c_a^2} \right) \right]^{1/2} \quad (13)$$

donde  $a = \sqrt{\gamma p / \rho}$  es la velocidad del sonido y  $c_a$  la velocidad de Alfvén:

$$c_a = \sqrt{\frac{B_x^2}{\mu_o \rho}} \quad (14)$$

Resultados similares se encuentran sobre cada uno de los demás ejes.

La Tabla 2 muestra de forma resumida las condiciones a tener presente para la aplicabilidad del modelo MHD [19].

**Tabla 2:** Condiciones para la validez del modelo MHD:  $\tau_i$  y  $\tau_H$  representan el tiempo entre colisiones iónicas y el tiempo hidrodinámico respectivamente,  $\lambda_c$  camino libre medio,  $\Omega_e$  la frecuencia ciclotrónica electrónica,  $\omega_p$  la frecuencia plásmica,  $R_m$  el número de Reynolds magnético. Por último  $\beta$  es la razón entre presión cinética y magnética.

Aproximación	Expresión
Alta colisionabilidad:	$\tau_i \ll (m_e/m_i)^{1/2}\tau_H$ ; $\lambda_c \ll L_H$
No relativista:	$\omega/k \sim L_H/\tau_H \sim u \ll c$
Cuasineutralidad:	$\omega \Omega_e /\omega_p^2 \ll 1$
Radio de Larmor despreciable:	$r_{Li}/L_H \ll \beta^{1/2}$
Sin difusión magnética:	$R_m \gg 1 : (r_{Li}/L_H)^2 \ll \beta(m_i/m_e)^{1/2}(\tau_i/\tau_H)$

La última condición que se presenta en la Tabla 2, la ausencia de difusión magnética, es necesaria para la validez del modelo MHD ideal. Experimentos realizados en dispositivos de fusión y así como experimentos proyectados permiten identificar que la temperatura media en dichos plasmas de fusión es del orden de 3keV a concentraciones alrededor de  $10^{20}\text{m}^{-3}$ . El campo magnético alcanzado es de 5T y el parámetro  $\beta \sim 0,05 = 5\%$ . En la Tabla 3 se presentan los valores estimados de los parámetros que rigen el rango de validez del modelo MHD.

**Tabla 3:** Valores típicos de los parámetros de validación del modelo MHD en plasmas confinados magnéticamente.

Parámetro	Valor
Tiempo entre colisión iónica:	$\tau_i$ $2,6 \times 10^{-3}$ s
Tiempo MHD característico:	$\tau_H$ $2,0 \times 10^{-6}$ s
Camino libre medio entre colisión:	$\lambda_c$ $1,4 \times 10^3$ m
Longitud MHD característica:	$L_H$ 1,0 m
Frecuencia MHD característica:	$\omega \sim 1/\tau_H$ $5,0 \times 10^5$ s <sup>-1</sup>
Numero de onda MHD característico:	$k \sim 1/L_H$ $1,0$ m <sup>-1</sup>
Frecuencia ciclotrónica electrónica:	$\Omega_e$ $8,9 \times 10^{11}$ s <sup>-1</sup>
Frecuencia plásmica:	$\Omega_p$ $5,7 \times 10^{11}$ s <sup>-1</sup>
Radio de Larmor iónico:	$r_{Li}$ $2,2 \times 10^{-3}$ m

Es posible estimar que el tiempo de difusión de las líneas de campo magnético es del orden de unas centenas de segundos, mientras que la escala de tiempo hidrodinámico es de tan sólo unos microsegundos; garantizando en estos escenarios la aplicabilidad del modelo en el régimen ideal con  $R_m \sim 6 \times 10^8 \gg 1$ . De igual forma las condiciones de cuasineutralidad, bajas velocidades y radio de Larmor despreciable son bien satisfechas.

Una observación de interés surge al notar que la condición de alta colisionabilidad no se cumple y está lejos de ello, ya que las longitudes características del sistema son del orden de metros y el camino libre medio entre colisiones es del orden de kilómetros; de este modo, la condición de plasma regido por altas colisiones propio del modelo MHD excluye completamente los plasmas de fusión.

Lo anterior contradice completamente toda la evidencia experimental en la que se demuestra que el modelo MHD (ideal) provee una amplia y precisa descripción del comportamiento del plasma en un nivel macroscópico [25]. Tal y como se presenta en [19], la aproximación del plasma como un fluido aún bajo esta circunstancia puede ser sostenible, aunque se requiere un nuevo examen del modelo, particularmente de la ecuación de energía pues el campo magnético, al actuar como un agente de localización es capaz de compensar una parte del efecto de la baja colisionabilidad. Algunas de las sutilezas del modelo se resuelven al estudiar la estabilidad desde modelos más precisos pero más complejos [19, 25]. En gran medida, el modelo MHD provee una buena descripción macroscópica de la dinámica del plasma de fusión.

### 2.3 ESTABILIDAD

De forma general, es posible definir la estabilidad de un sistema si al introducir una perturbación esta no se amplifica; de otro modo el equilibrio es denominado inestable.

Cabe resaltar que en configuraciones toroidales, como los dispositivos Tokamak, el equilibrio suele estar definido a través de la ecuación de Grad-Shafranov, ver Ec.(15), la cual se deduce de la Ec.(1) bajo la consideración de simetría axial en coordenadas cilíndricas [7, 44]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_o r^2 \frac{dP_e(\psi)}{d\psi} - g \frac{dg(\psi)}{d\psi} \quad (15)$$

siendo  $\psi = rA_\varphi$  el flujo magnético poloidal, donde  $A_\varphi$  es la componente toroidal del potencial vectorial magnético,  $p(\psi)$  la presión cinética y  $g(\psi)$  una función relacionada con la corriente poloidal del plasma como funciones explícitas de  $\psi$  [7, 25, 45, 46].

La parte izquierda de la ecuación puede expresarse en términos del operador elíptico toroidal:  $\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  y la parte derecha representa la densidad de corriente toroidal del sistema, así, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\Delta^* \psi = \mu_o r J_\phi(r, \psi) \quad (16)$$

De acuerdo con el modelo de descripción del plasma, las inestabilidades pueden clasificarse en *microinestabilidades* y en *macroinestabilidades*. Las primeras surgen a pequeñas escalas, usualmente por asimetrías en la función de distribución de velocidades, así como por efectos del giro de las partículas cargadas. Por su parte, las macroinestabilidades son efectos perceptibles a escalas comparables con el tamaño del sistema, además de ser lo suficientemente intensas como para colapsar el equilibrio [25, 47]. La magnetohidrodinámica se encarga de describir los modos macroscópicos, los cuales pueden distinguirse en tres grandes grupos:

- 
1. *Modos impulsados por presión:* En este grupo los gradientes de presión, junto con una configuración de campo magnético no adecuada, impulsan a que una pequeña perturbación pueda intercambiar dos tubos de flujo.
  2. *Modos impulsados por corriente:* Cuando sobre una distribución no uniforme de corriente surgen perturbaciones, estas pueden destruir las superficies magnéticas. Si se generan deformaciones en la forma del *D-shape*, estos modos pueden clasificarse como modos externos.
  3. *Modos externos:* Estos modos surgen de la interacción del plasma con la frontera o región exterior, generando deformaciones en la separatriz.

Empleando el principio de energía puede explicarse el surgimiento de las inestabilidades al analizar la variación o cambio de energía potencial del fluido  $\delta W$  a través del vector de perturbación  $\xi$ :

$$\delta W = \frac{1}{2} \int_{plasma} \left[ \frac{|\mathbf{B}_{1,\perp}|^2}{\mu_o} + \frac{B_o^2}{\mu_o} |\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa|^2 + \gamma p_o |\nabla \cdot \xi|^2 - 2(\xi_{\perp} \cdot \nabla p_o)(\kappa \cdot \xi_{\perp}^*) - J_{\parallel}(\xi_{\perp}^* \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{B}_{1,\perp} \right] dV \quad (17)$$

El subíndice 0 representa el valor de la variable en el estado de equilibrio y el subíndice 1 representa la perturbación asociada a la variable. Por su parte los subíndices  $\parallel$  y  $\perp$  se asocian a las componentes paralelas y perpendicular respecto al campo magnético en el equilibrio  $\mathbf{B}_o$ . Finalmente,  $\kappa = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ , es el vector de curvatura magnética donde  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  es el campo magnético normalizado.

Si  $\delta W < 0$ , el plasma es globalmente inestable. Puesto que los tres primeros términos son siempre positivos, estos se asocian con mecanismos de estabilización del sistema; los cuales representan la energía potencial asociada con la propagación de la onda de Alfvén, la onda magneto-acústica y la onda acústica, respectivamente. Los dos últimos términos pueden desestabilizar el plasma, y se conocen como inestabilidades impulsadas por presión e impulsadas por corriente, respectivamente. En el primer caso, el gradiente de presión es la fuente de energía libre a los que se le asocian los *modos ballooning* y los *modos de intercambio*. El último término se asocia a los llamadas *modos kink* [19,48,49].

---



---

## 3. MODELO DE SIMULACIÓN

---



---

### 3.1 MODELO FÍSICO

El estudio de los procesos que ocurren en un plasma suelen ser abordados por diversos modelos a diferentes niveles de aproximación, dependiendo esencialmente del fenómeno a analizar [44, 50, 51]. Se mencionó en el capítulo 2 que el modelo MHD es el más adecuado cuando se desea estudiar las macro-inestabilidades. En este trabajo de investigación, se realizaron simulaciones basadas en la solución del sistema de ecuaciones visco-resistivas de la magnetohidrodinámica, Ecs.(18-24); en donde se considera al plasma como un único fluido, viscoso y conductor. Dichas ecuaciones fueron presentadas en la sección 2.1, y pueden escribirse como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (18)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \left[ \nabla^2(\mathbf{u}) + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (19)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = -\gamma p \nabla \cdot (\mathbf{u}) - (\gamma - 1)(\eta J^2 + \Phi) \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (21)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (23)$$

$$\Phi = 2\nu \left( e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right) \quad (24)$$

donde los parámetros  $\eta$  y  $\nu$  representan la resistividad y la viscosidad del plasma, respectivamente, los cuales se consideran uniformes y constantes en toda región del plasma. La constante de compresibilidad adiabática  $\gamma$  toma el valor de  $5/3$ ,  $e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  es el tensor de esfuerzos y  $\Phi$  el término de calentamiento viscoso.

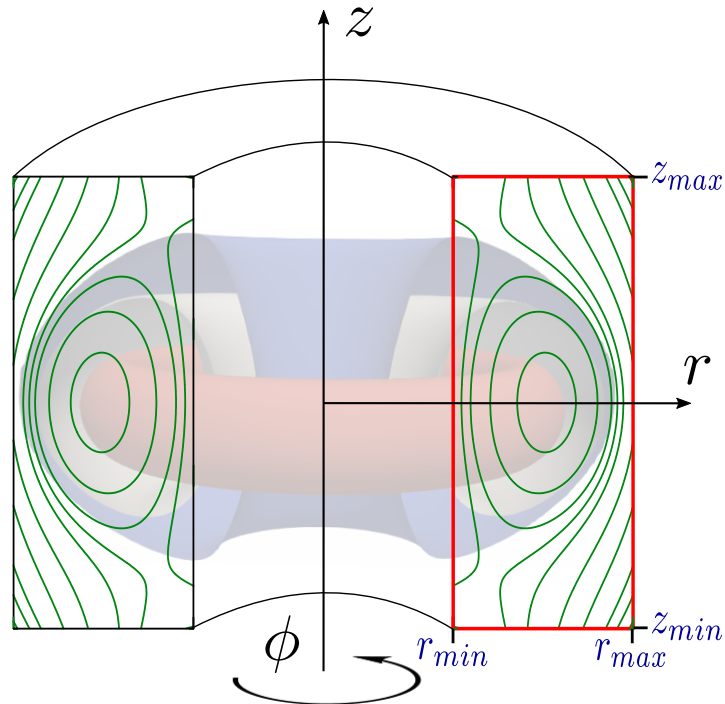
Para la solución numérica del sistema de ecuaciones (18-24), se normalizaron todas las variables y operadores respecto a valores característicos del sistema físico considerado,

con el fin de evitar errores por redondeo. Específicamente, todas las longitudes se normalizaron respecto al radio mayor  $R_o$ ; el campo magnético respecto a la intensidad del campo sobre el eje magnético  $B_o$ ; el tiempo respecto al periodo de Alfvén  $\tau_A = R_o/v_A$ , donde  $v_A = B_o/\sqrt{\mu_o\rho_o}$  es la velocidad de Alfvén,  $\mu_o$  la permeabilidad magnética en el vacío y  $\rho_o$  la densidad de masa. Finalmente  $P_o = B_o^2/\mu_o$ ,  $E_o = v_AB_o$  y  $J_o = B_o/\mu_oR_o$  son los parámetros de normalización para la presión, campo eléctrico y la densidad de corriente, respectivamente.

### 3.2 GEOMETRÍA Y CONDICIONES DE FRONTERA

La forma toroidal del plasma permite que las simulaciones sean desarrolladas de forma natural usando el sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \phi, z)$ ; donde la coordenada radial coincide con el eje del radio mayor del toroide, la coordenada angular  $\phi$  con el ángulo toroidal y el eje  $z$  representa la distancia vertical del sistema desde el eje radial, tal como se muestra en la Figura 3; resaltando que el plano poloidal  $rz$  es acotado por una sección rectangular (línea roja) que contiene completamente al plasma. Vale la pena mencionar que el sistema cilíndrico no es el único sistema coordinado apropiado para estudiar este sistema físico, pero sí es el más sencillo de implementar [52, 53].

**Figura 3:** Esquema geométrico del sistema a simular. La sección rectangular definida por  $r_{min} < r < r_{max}$  y  $z_{min} < z < z_{max}$  acotan un plano poloidal a la región de interés. En el interior del plano se representa un esquema típico de las líneas de campo magnético (líneas verdes) y las superficies de presión constante (en colores rojo, gris y azul) .



---

La sección rectangular que acota el plano poloidal se selecciona cuidadosamente, de modo que sea suficientemente representativa, tal como se presenta en la Figura 3, incluyendo líneas de campo magnético tanto abiertas como cerradas.

En el sistema, la frontera más interna está definida por:  $r = r_{min}$ , la externa se ubica en  $r = r_{max}$  y las fronteras superior e inferior en  $z = z_{max}$  y  $z = z_{min}$ , respectivamente. En la práctica, los dispositivos no poseen este tipo de frontera rectangular. De hecho es más compleja, hecha de metal, y cumple un papel muy importante sobre el comportamiento del plasma [54–56]. Si se ignoran los efectos complejos como recombinación, emisión secundaria de electrones y demás, lo más apropiado es considerar las fronteras como paredes perfectamente conductoras, donde la componente tangencial del campo eléctrico debe anularse, al igual que la componente normal de la velocidad. Adicional a estas condiciones que surgen al considerar las paredes conductoras, el termino viscoso permite simplificar la dinámica en las paredes al considerarlas no deslizantes, forzando a que todas las componentes del vector velocidad se anulen en la frontera:  $\mathbf{u}|_{wall} = \mathbf{0}$ . La simplificación geométrica de la frontera usada en el presente trabajo es motivada tanto por la reducción del esfuerzo computacional como por la conveniencia en la implementación numérica de las condiciones de fronteras; por supuesto, sin comprometer la física relevante del sistema bajo estudio. Finalmente, se emplean condiciones de frontera periódica sobre el eje toroidal, en dirección  $\phi$ ; lo cual surge de forma natural debido a la ausencia de fronteras materiales a lo largo de dicho eje.

### 3.3 ESQUEMA NUMÉRICO Y DIAGNOSTICO DE CÓDIGO

Para abordar numéricamente un problema es necesario discretizar el espacio físico sobre el cual se realiza el estudio, es así que en este trabajo construimos un mallado homogéneo a lo largo de las tres variables que lo define,  $(r, \phi, z)$ . La malla queda completamente definida por el número de puntos que se selecciona y el tamaño del intervalo sobre cada eje:  $(Npr, Np\phi, Npz) \longrightarrow (r_{max} - r_{min}, 2\pi, z_{max} - z_{min})$ .

El sistema de ecuaciones (18-24) se aborda numéricamente empleando el esquema de diferencias finitas y algoritmos de Runge-Kutta(RK). El método de diferencias finitas consiste en aproximar la derivada de una función empleando las variaciones de la misma en cada nodo o punto de malla y por su parte, los algoritmos RK se emplean ampliamente en la solución de ecuaciones diferenciales. Tomando como base el trabajo de R Khan [48, 49], las derivadas espaciales se tratan numéricamente con el método de diferencias finitas de cuarto orden y la evolución temporal se trabaja con un algoritmo RK de igual orden para mantener la consistencia en los métodos. Los detalles de la implementación y esquema de los métodos se especifican en la sección de anexos.

Con el objetivo de estudiar la dinámica del plasma sin efectos resistivos, en todas las simulaciones la resistividad adopta el valor nulo,  $\eta = 0$ , y en este orden de ideas, la viscosidad  $\nu$  juega un papel relevante a nivel numérico y no físico propiamente, encargándose de suavizar las funciones, evitando altas variaciones y con ello altos errores numéricos en el cálculo de las derivadas al emplear el esquema de diferencias finitas.

---

### 3.3.1 Criterio de Courant

Numéricamente los esquemas explícitos suelen tener un coste computacional bajo, sin embargo, es necesario un paso de malla pequeño que garantice la convergencia y estabilidad del método; especialmente en sistemas que evolucionan en el tiempo [57, 58]. El número de Courant, también conocido como el número de Courant-Friedrichs-Lewy ( $C_{CFL}$ ) se entiende como la razón entre la velocidad de propagación de la onda ( $\lambda$ ) y la “velocidad numerica” definida como  $\Delta x/\Delta t$ , el cual está restringido a ciertos intervalos de acuerdo a la ecuación diferencial a resolver, garantizando la estabilidad del esquema [44, 59]. En este trabajo el paso temporal se escoge siguiendo dicho criterio:

$$\Delta t = C_{CFL} \times \min \left( \frac{\Delta r}{|\lambda_{i,j,k}^r|}, \frac{r_i \Delta \phi}{|\lambda_{i,j,k}^\phi|}, \frac{\Delta z}{|\lambda_{i,j,k}^z|} \right) \quad (25)$$

donde  $\Delta r$ ,  $\Delta \phi$  y  $\Delta z$  representan el paso de malla sobre cada coordenada y  $\lambda_{i,j,k}^l$  la velocidad de la onda más rápida que viaja sobre la dirección “ $l$ ” en el sistema (ver sec 2.2), calculada en cada punto de malla  $(i, j, k)$  y en cada iteración temporal, dando como resultado que el paso de malla  $\Delta t$  no sea constante durante toda la simulación, es adaptable. En todas nuestras simulaciones consideramos  $C_{CFL} = 0,4$  teniendo presente algunas referencias [43, 60].

### 3.3.2 Tubo de choque: Brio-Wu

Con la solución numérica de este problema se examina la capacidad del código para resolver cambios bruscos sobre la presión, densidad, velocidad y campo magnético. El tubo de choque de Brio-Wu es un problema de Riemann y radica en investigar la dinámica de dos fluidos con propiedades diferentes, los cuales están inicialmente separados por una interfaz ubicada en “ $x = 0$ ” bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$(\rho, u_x, u_y, u_z, p, B_x, B_y, B_z) = \begin{cases} (1.000, 0, 0, 0, 1.0, 0.75, +1, 0) & \text{si } x < 0 \\ (0.125, 0, 0, 0, 0.1, 0.75, -1, 0) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (26)$$

Las condiciones iniciales están dadas por una función escalón que establece una alta variación entre las condiciones de los fluidos. Dicha variación no puede ser resuelta por el método de diferencias finitas sin antes suavizar la interfaz con un ancho que conecte ambas regiones. Para tal fin las condiciones iniciales son conectadas en una región de transición dada por la función tangente hiperbólica

$$A(x) = \left( \frac{A_R + A_L}{2} \right) + \left( \frac{A_R - A_L}{2} \right) \tanh \left( \frac{x}{w} \right) \quad (27)$$

donde  $A$  representa la variable física,  $w = 0,01$  define el espesor de la región de transición y los subíndices  $L$  y  $R$  representan la región izquierda y derecha del tubo respectivamente.

Debido a que el tubo de choque de Brio-Wu es un problema con solución analítica en el marco de la magnetohidrodinámica ideal y con el ánimo de validar el código empleado en estas simulaciones, el factor de viscosidad se ajusta al valor nulo,  $\nu = 0$ . En este orden de ideas, al considerar  $\nu = \eta = 0$  ubica el sistema de ecuaciones (18-24) en el régimen MHD ideal, por lo que es necesario introducir en las ecuaciones (18-20) un término de viscosidad artificial que permita la viabilidad del esquema de diferencias finitas [61]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mu_{VA} \nabla^2 \rho \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} [-\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}] - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu_{VA} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (29)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma p \nabla \cdot (\mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mu_{VA} \nabla^2 p \quad (30)$$

donde  $\mu_{VA}$  representa la viscosidad artificial y su valor depende directamente del esquema numérico empleado, de este modo, al considerar la influencia de la viscosidad artificial sobre la estabilidad numérica se parte de la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu_{VA} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (31)$$

La ecuación de difusión (ec.31) al ser discretizada en el tiempo con un esquema de diferencias finitas de primer orden (paso adelante) y en el espacio sobre un esquema de diferencias finitas centradas de cuarto orden toma la forma de la siguiente expresión,

$$\frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t} = \frac{\mu_{VA}}{\Delta x^2} \left[ -\frac{1}{12} f_{j-2}^n + \frac{4}{3} f_{j-1}^n + \frac{5}{2} f_j^n + \frac{4}{3} f_{j+1}^n - \frac{1}{12} f_{j+2}^n \right] \quad (32)$$

en la que  $f_j^n$  representa la solución numérica en el  $j$  -ésimo punto de malla en el  $n$  -ésimo paso de tiempo. Asumiendo que la solución es de comportamiento ondulatorio de amplitud  $a$  y número de onda  $\kappa$ , es decir,

$$f_j^n = a^n \exp^{i\kappa(j\Delta x)} \quad (33)$$

y sustituyendo la Ec.(33) en la Ec.(32), a demás, teniendo presente que la estabilidad se alcanza manteniendo el factor de amplificación menor a la unidad:  $|f_j^{n+1}/f_j^n| \leq 1$ , la condición de estabilidad que restringe los valores de la viscosidad artificial está dada por la siguiente expresión:

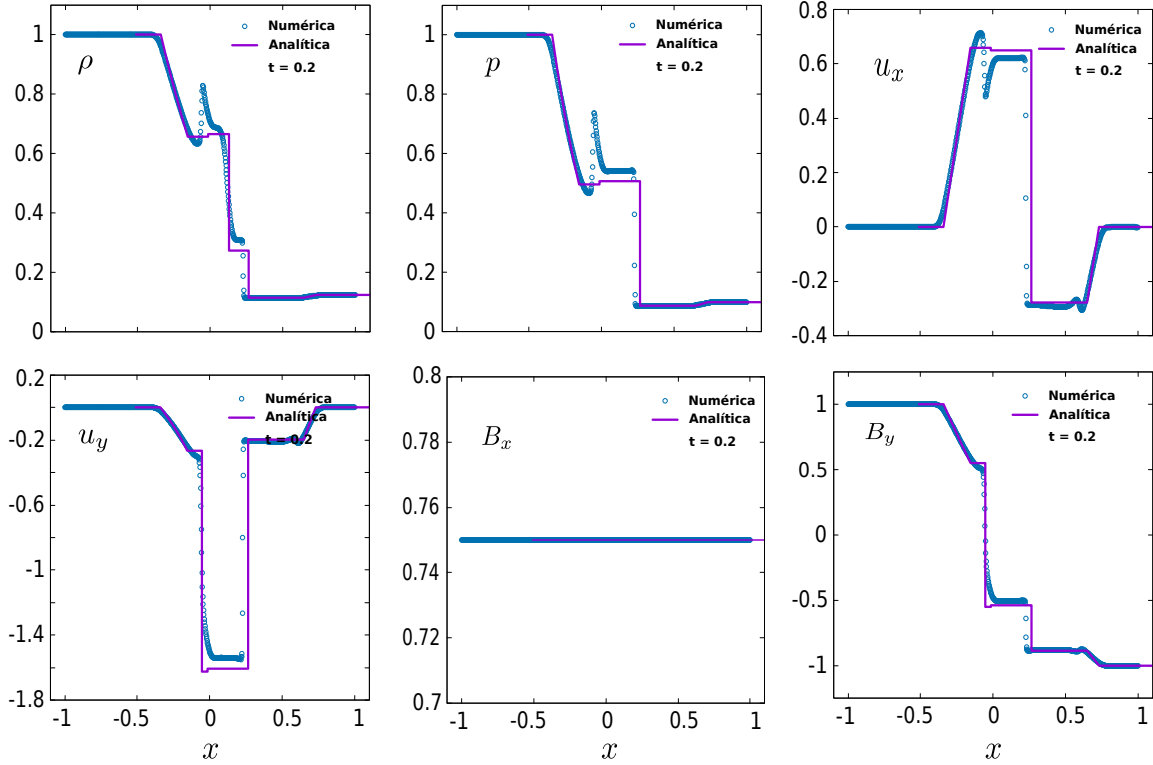
$$\mu_{VA} \leq \frac{3}{8} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (34)$$

Finalmente, el resultado anterior es generalizable a un mallado tridimensional cuya condición de estabilidad es establecida como sigue:

$$\mu_{VA} \leq \frac{3}{8} \frac{1}{\Delta t (1/(\Delta x)^2 + 1/(\Delta y)^2 + 1/(\Delta z)^2)} \quad (35)$$

La simulación se ejecuta sobre una malla 1D definida a lo largo del eje  $x$  en el intervalo  $[-1, +1]$  con 801 puntos manteniendo libre los extremos del tubo, es decir, no se someten a ninguna condición de contorno. la Figura 4 presenta el estado del sistema en el instante  $t = 0,2$ .

**Figura 4:** En azul se presenta la solución numérica obtenida empleando el código desarrollado en el instante  $t = 0,2$  y en púrpura la solución exacta al problema de Riemann en el mismo instante.



Apoyados en la Figura 4, son evidentes algunas discrepancias entre la solución numérica y el resultado exacto al problema de Riemann; sin embargo se puede evidenciar también que el código desarrollado captura bastante bien los comportamientos más relevantes de la dinámica del choque, perdiendo precisión en los detalles finos donde la variación de las funciones es alta. Estos resultados son coherentes debido a la naturaleza del esquema numérico empleado y concuerda con trabajos similares [43, 60, 62]. El comportamiento de la norma del error  $L_N^1$  y su respectivo orden se presenta en la Tabla 4 [63].

**Tabla 4:** Comportamiento del error  $L^1$  y  $L_{order}^1$  para la variable  $\rho$  en el instante  $t = 0,2$

N	$L_N^1$	$L_{order}^1$
201	$3.4059 \times 10^{-2}$	-
401	$2.4004 \times 10^{-2}$	0.5047
801	$1.6948 \times 10^{-2}$	0.5022
1601	$1.3155 \times 10^{-2}$	0.3654

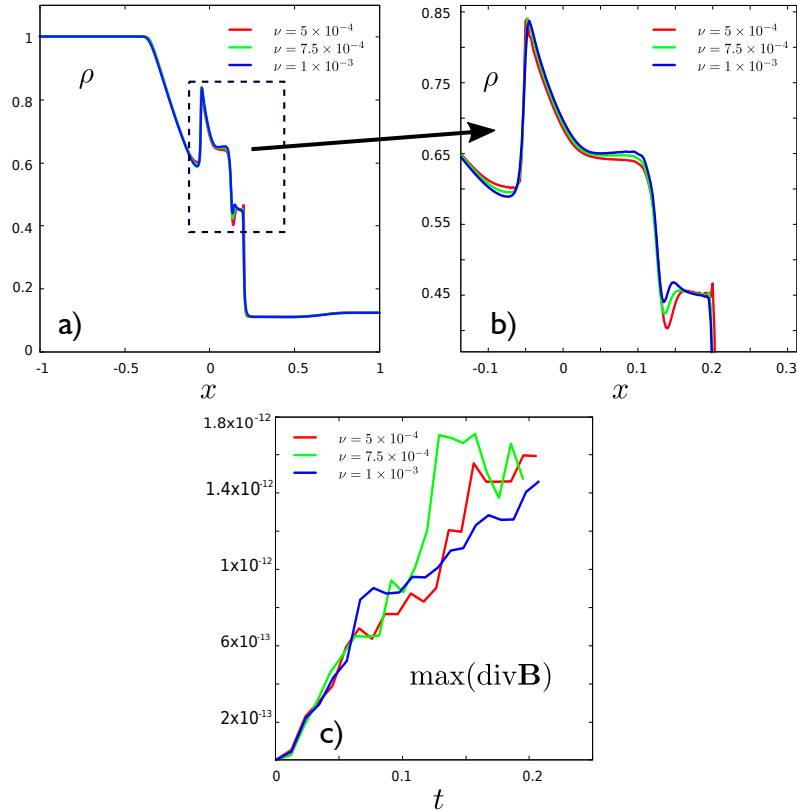
donde  $N$  representa el número de puntos y el error con su respectiva norma están definidos por la siguiente expresión:

$$L_N^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\rho_i^{exact} - \rho_i^{numeric}| \quad (36)$$

$$L_{order}^1 = \log_2 \left( \frac{L_N^1}{L_{2N}^1} \right) \quad (37)$$

Por otra parte, la Figura 5 presenta el efecto de la viscosidad  $\nu$  sobre la dinámica del sistema anulando la viscosidad artificial  $\mu_{VA}$ . Se puede notar que la variación leve de la viscosidad induce a pequeños cambios de una configuración sobre la otra en lo que se conoce como la onda de contacto, tal como se presenta en el recuadro de ampliación. Finalmente, la evolución de la divergencia del campo magnético durante toda la simulación para los diferentes valores de  $\nu$  se presenta en la Figura 5.c; en la que es posible identificar que este valor se preserva bastante bien, manteniéndose en las cercanías del cero. Vale la pena mencionar que estas simulaciones no acoplan la divergencia del campo magnético al sistema de ecuaciones como una ligadura, por lo que no se ha empleado ninguna técnica que preserve su valor. Es posible concluir que en este problema, el código desarrollado presenta un buen comportamiento, tendiendo a la convergencia (lenta) con el incremento del número de puntos a demás de estabilidad.

**Figura 5:** Evolución del perfil de densidad y de divergencia máxima del campo magnético durante las simulaciones con diferentes parámetros de viscosidad:  $5e - 4$  rojo,  $7,5e - 4$  verde y  $1e - 3$  azul .



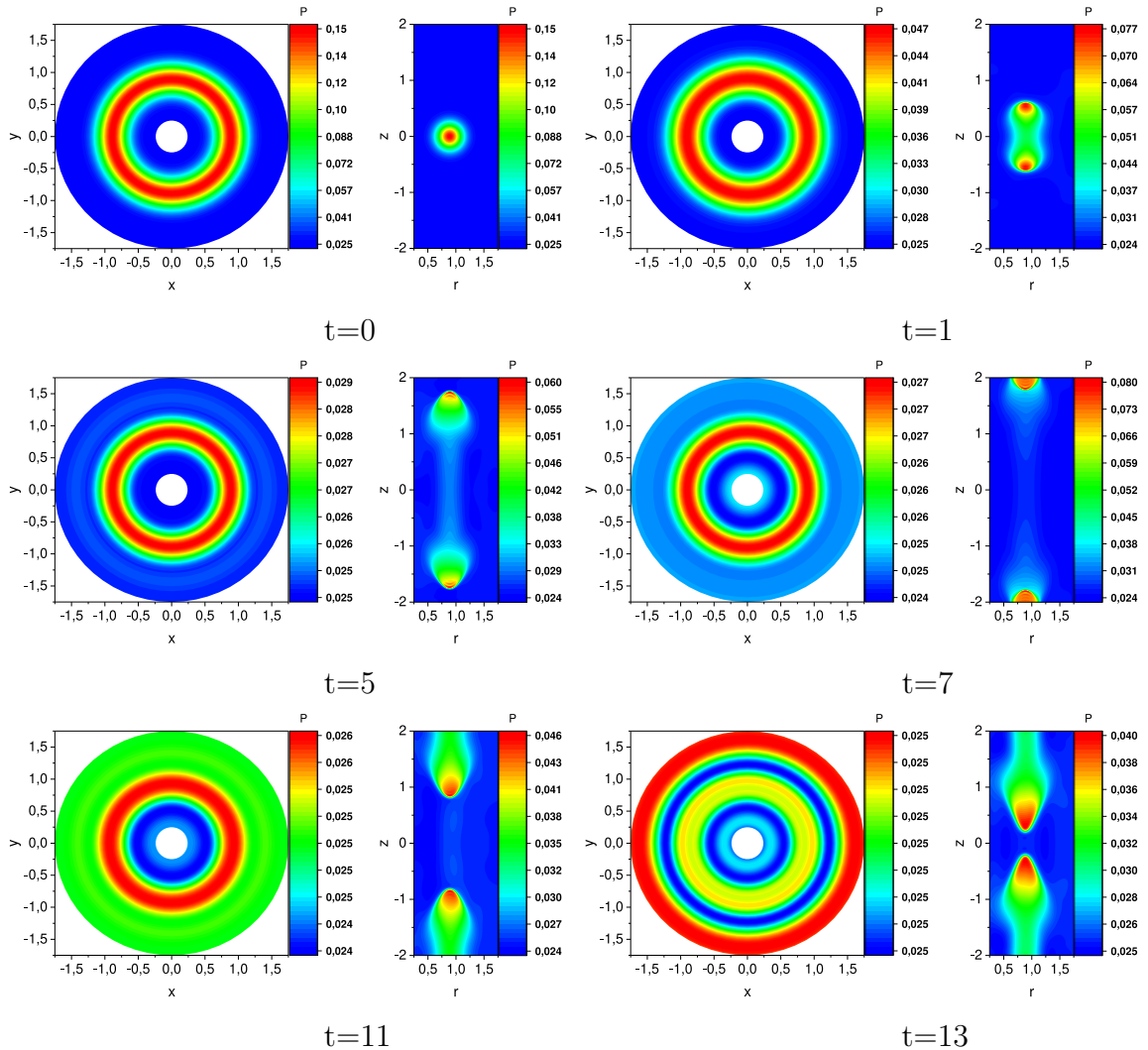
### 3.3.3 Propagación de una onda expansiva

Para validar la implementación de la condición de frontera no deslizante y periódica ya mencionadas, se estudia la propagación de una onda expansiva en la región delimitada por el toroide rectangular definido por  $[0.25 : 1.75] \times [0.0 : 2\pi] \times [-2.0 : +2.0]$  a lo largo de  $r$ ,  $\phi$  y  $z$  respectivamente. El estado de las variables en el instante  $t = 0$  se presenta en la Ec.(38) en unidades del sistema internacional.

$$(\rho, u_r, u_\phi, u_z, p, B_r, B_\phi, B_z) = (6.7 \times 10^{-8}, 0.0, 0.0, 0.0, f, 0.0, 0.0, 0.5) \quad (38)$$

$$f := f(r, z) = 5 \times 10^3 + 25 \times 10^3 \exp \left[ -\frac{500}{27} * ((r - 0.89)^2 + z^2) \right] \quad (39)$$

**Figura 6:** Evolución de la presión de la onda expansiva vista sobre el plano ecuatorial (plano  $xy$ ,  $z = 0$ ) y desde el plano poloidal  $rz$ .

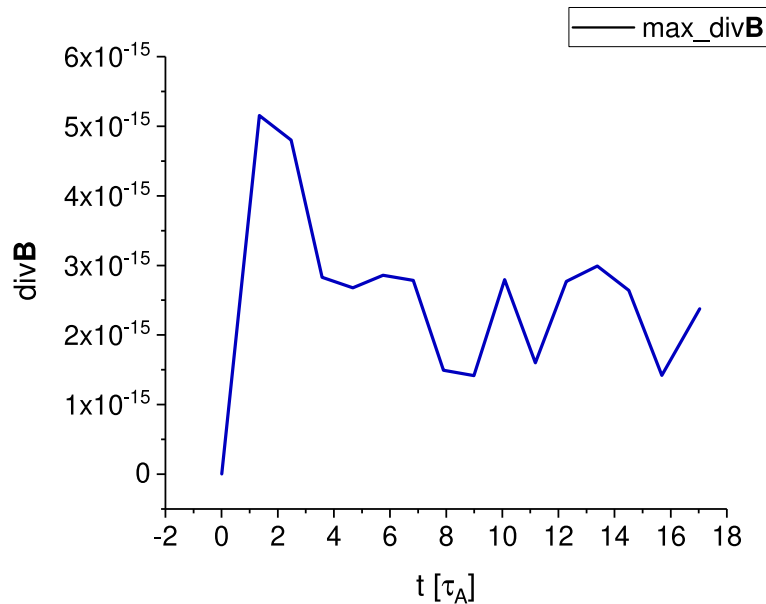


La solución numérica a este problema tridimensional sobre coordenadas cilíndricas permite evidenciar la reflexión de la onda debido a la rigidez de la pared que delimita el toroide, ver Figura 6, donde la presión muestra la expansión o propagación de la onda predominantemente a lo largo de  $z$ , esto debido a la presencia del campo magnético sobre dicho eje. Una vez la onda entra en contacto con los extremos superior e inferior esta se refleja, y nuevamente la propagación es predominante a lo largo de  $z$  pero en sentido opuesto, siendo así consistente con la condición de frontera de un conductor perfecto en aproximación de pared rígida y no deslizante ( $\mathbf{u}|_{wall} = \mathbf{0}$ ).

Con el fin de garantizar la condición periódica sobre el eje toroidal se introducen 4 puntos de malla auxiliares (“*puntos fantasma*”), dos en cada extremo de la malla toroidal, de modo que cualquier variable física “ $A$ ” evaluada en dichos puntos debe satisfacer las condiciones:  $A(j = -1) = A(np\phi - 2)$ ,  $A(j = -2) = A(np\phi - 3)$ ,  $A(j = np\phi) = A(1)$ ,  $A(j = np\phi + 1) = A(2)$ . Note que el índice  $j$  se ha reservado para definir el índice sobre  $\phi$  y que los índices negativos son los nodos fantasma así como los índices  $j = np\phi$  y  $np\phi + 1$  [43]. Esta técnica es muy conocida y ampliamente empleada y no sólo garantiza la periodicidad en las funciones, también en sus derivadas. En el caso de emplear diferencias finitas centradas de orden superior es necesario aumentar la cantidad de nodos fantasmas. Es de resaltar que las gráficas sobre el plano ecuatorial en la Figura 6, valida la implementación de la condición de frontera periódica, pues la perturbación en  $t = 0$  axialmente simétrica preserva dicha simetría a lo largo del tiempo. De no satisfacerse correctamente la condición de frontera una perturbación (numérica) debería aparecer en  $\phi = 0$  rompiendo la simetría sobre el eje toroidal.

Finalmente, la Figura 7 presenta la evolución de la divergencia del campo magnético, manteniendo un error cercano al valor nulo, esto sin la implementación de una técnica de acople sobre el sistema, Ecs.(18-24).

**Figura 7:** Evolución de la divergencia de campo magnético durante la simulación de la onda expansiva.



---

---

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

---

---

Las simulaciones tridimensionales realizadas sobre el toroide rectangular se ejecutan sobre una malla rectangular homogénea a lo largo de cada eje como ya se detalló en la sección 3.3. En todas las simulaciones realizadas se empleó la misma cantidad de nodos o puntos de malla ( $N_{pi}$ ), así: se emplearon 151 puntos para discretizar la coordenada radial, 261 puntos sobre la coordenada  $z$ , y 61 puntos discretizan el eje toroidal o coordenada angular  $\phi$  más los 4 puntos fantasma previamente mencionados. Detalles de la región de simulación así como del mallado se presenta en el anexo.

### 4.1 EQUILIBRIO MHD: CONDICIONES INICIALES

El plasma como fluido es modelado por la teoría MHD descrita en las secciones previas; sin embargo, para estudiar la dinámica del plasma es imprescindible partir de unas condiciones iniciales, tal como se presentó en las simulaciones que validan el código. En este trabajo se desea estudiar la estabilidad global de la columna de plasma confinada por dispositivos tipo tokamak. Dicha estabilidad se estudia sobre una configuración de equilibrio del sistema, la cual está completamente definida por la ecuación de Grad-Shafranov, Ec.(15), así, el estado inicial ( $t = 0$ ) de las variables se obtiene a partir de la solución de esta ecuación que posee la misma estructura a la ecuación de Hicks para la dinámica de fluidos y puede entenderse como una ecuación de tipo Poisson: un operador de segundo orden en el miembro izquierdo y términos fuente en el miembro derecho, en la que la solución del flujo poloidal  $\psi$  permite reconstruir el campo magnético y por ende la densidad de corriente. Es de resaltar que el flujo poloidal en esta ecuación trabaja como variable dependiente sobre la cual actúa el operador elíptico toroidal ( $\Delta^*$ ) y a su vez juega el papel como variable independiente en la parte derecha con las funciones  $p(\psi)$  y  $g(\psi)$ , lo cual imposibilita la obtención de una solución analítica en la mayoría de los casos, haciendo indispensable el uso de técnicas numéricas [7, 44, 64–66];

Tomando como base solvers de tipo Poisson, se desarrolló un código que encuentra las condiciones de equilibrio al resolver numéricamente la ecuación de Grad-Shafranov, en la que las funciones  $g(\psi)$  y de presión se toman como funciones polinomiales [44, 65].

$$p(\psi) = P_a \hat{P}(\psi_N); \quad \hat{P}(\psi_N) = [1 - (1 - \psi_N)^2]^2 + 0,2 \quad (40)$$

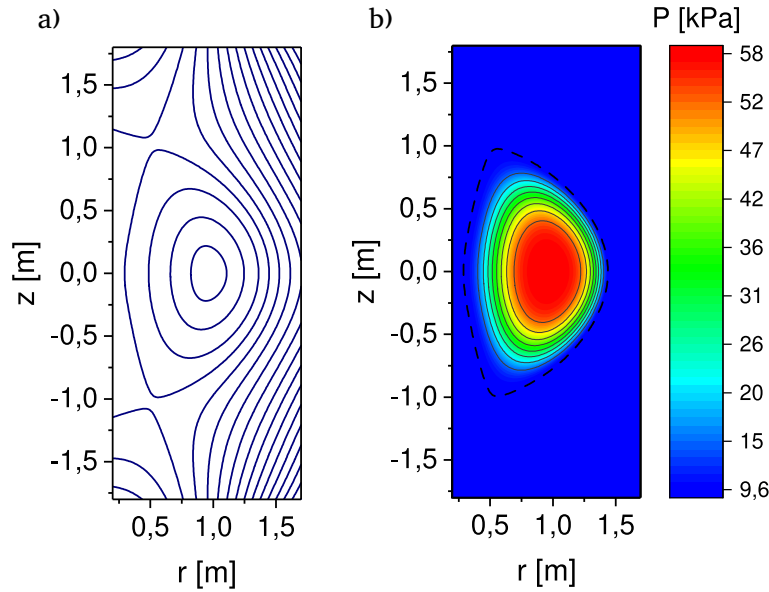
$$g^2(\psi) = g\phi^2 [1 + \alpha_g \hat{g}(\psi_N)]; \quad \hat{g}(\psi_N) = \psi_N^2 \quad (41)$$

El flujo poloidal normalizado  $\psi_N$  se define únicamente en la región que contiene el plasma

$$\psi_N = \frac{\psi_l - \psi}{\psi_l - \psi_a} \quad (42)$$

donde  $\psi_l$  es el valor del flujo magnético sobre el borde, límite o frontera de la columna de plasma y  $\psi_a$  el flujo poloidal en el eje magnético. En este sentido,  $\psi_N$  sólo puede tomar valores entre cero y la unidad:  $\psi_N = 0$  en la frontera y  $\psi_N = 1$  sobre el eje magnético. La constante  $g_o$  se calibra para satisfacer el valor de campo sobre el eje magnético:  $B_a \sim g_o/r_a$ , siendo  $r_a$  la posición radial del eje magnético. Por su parte  $\alpha_g$  es un parámetro auxiliar que ayuda a mantener la corriente en el plasma  $I_p$  fija en cada iteración del desarrollo numérico. Finalmente,  $P_a$  está relacionado con la presión en el eje magnético: por simple inspección la presión en la frontera del plasma adopta el valor de  $0.2P_a$  y en el eje magnético  $1.2P_a$ , en cuyo caso,  $P_a$  es una constante que representa aproximadamente el 83,3% de la presión sobre el eje magnético.

**Figura 8:** Equilibrio de la columna de plasma: (a) mapa de contornos del flujo poloidal  $\psi$  sobre el plano poloidal. (b) perfil de presión medida en kPa: el contorno punteado representa la frontera.



Empleando las técnicas numéricas mencionadas, junto con las condiciones de contorno adecuadas; de la ecuación de Grad-Shafranov se obtienen los perfiles de flujo magnético poloidal  $\psi$  junto al de presión  $p$ , presentados en la Figura 8. Como ya se mencionó, el flujo poloidal define por completo el equilibrio axialmente simétrico de la columna de plasma; de hecho, la componente poloidal del campo magnético  $\mathbf{B}_p = B_r\hat{\mathbf{r}} + B_z\hat{\mathbf{z}}$  es tangente a las curvas de nivel de  $\psi$ . En este orden de ideas, el plasma sólo puede ser confinado por las líneas de campo cerradas. En la Figura 8.a las líneas cerradas indican la región en la que el plasma se confina, y las líneas abiertas representan la región “vacía” o ausente de plasma. La última línea cerrada  $\psi_l$  define la frontera del plasma

conocida como separatriz y su forma geométrica es el D-shape ya mencionado. Los

**Tabla 5:** Parámetros físicos y geométricos que caracterizan cada una de las diferentes configuraciones de equilibrio obtenidas a través de la solución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov.

Config.	$R_o$ [m]	$a$ [m]	$\kappa$ [.]	$\delta$ [.]	$I_p$ [MA]	$B_T$ [T]	$\beta$ [%]	$\beta_N$ [%]
$c_1$	0,87	0,58	1,77	+0,62	1,3	0,56	15,5	2,21
$c_2$	0,89	0,58	2,08	-0,19	1,3	0,54	12,3	2,35
$c_3$	0,88	0,60	1,78	+0,61	1,3	0,57	12,1	1,26
$c_4$	0,86	0,59	1,92	+0,62	2,0	0,87	7,8	0,54
$c_5$	0,87	0,59	1,94	+0,63	2,0	0,78	15,7	1,07
$c_6$	4,07	2,17	2,17	+0,69	40,0	3,90	19,3	1,43
$c_7$	4,03	1,97	2,06	-0,49	40,0	5,13	14,0	0,95
$c_8$	0,90	0,63	1,70	+0,61	1,3	0,62	15,4	1,98
$c_9$	0,89	0,62	1,73	+0,61	1,3	0,65	8,1	1,03

parámetros que definen las 9 configuraciones de equilibrio obtenidas en este trabajo para analizar su dinámica se presentan en la Tabla 5; siendo la configuración  $c_1$  la asociada a las Figuras 8 y 10,  $B_T$  la magnitud del campo toroidal sobre el radio mayor del toroide,  $\beta$  (*beta global*) es la razón entre la presión cinética media del plasma y la presión magnética y  $\beta_N$  el parámetro beta normalizado definidas así:

$$\beta = \frac{2\mu_o \langle p \rangle}{B^2} \quad (43)$$

$$\beta_N = \frac{a\beta B_T}{I_p} \quad (44)$$

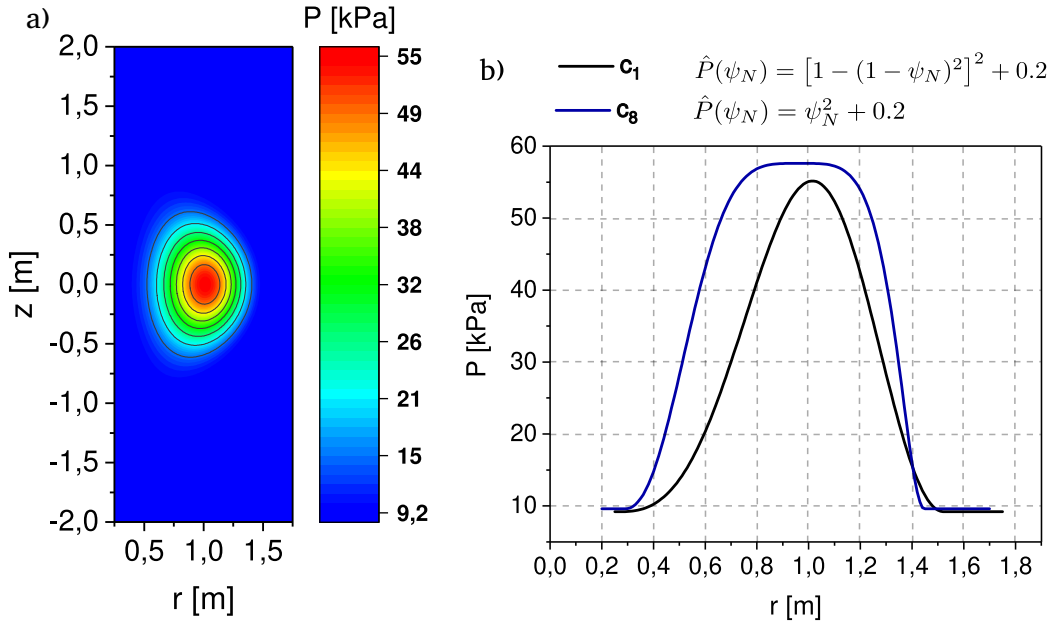
resaltando que  $\langle p \rangle$  representa el promedio global de la presión cinética de la columna de plasma y  $B^2 = B_T^2 + B_p^2$ . Los campos poloidal y toroidal característicos del sistema se definen respectivamente como  $B_p = I_p/2\pi a\sqrt{0,5(1 + \kappa^2)}$  y  $B_T = g_a/R_o$ . Típicamente  $\beta$  y  $\beta_N$  suelen ser expresados en términos de porcentajes, por lo que las expresiones Ec.(43) y Ec.(44) deben ser operadas por un factor de cien.

Como se puede observar en la Tabla 5, la razón de aspecto de estas configuraciones no supera el valor de 2.0, lo cual permite catalogar a estas como configuraciones de tipo tokamak esférico:  $A = R_o/a < 2$ . Las configuraciones  $c_6$  y  $c_7$  se aproximan al límite, de hecho  $c_7$  supera levemente la condición. Las configuraciones  $c_2$  y  $c_7$  tienen asociado un valor de triangularidad negativa  $\delta < 0$ , y representa las configuraciones inversas o el D-shape inverso a las configuraciones  $c_1$  y  $c_6$ , respectivamente, pues los demás parámetros físicos y geométricos difieren levemente uno del otro. Esto con el objetivo de comparar la dinámica entre configuraciones con triangularidad opuesta.

Entre las configuraciones presentadas,  $c_1$  tiene una alta similitud con las condiciones empleadas por Riaz Khan en su trabajo, el cual está enfocado en simulaciones afines

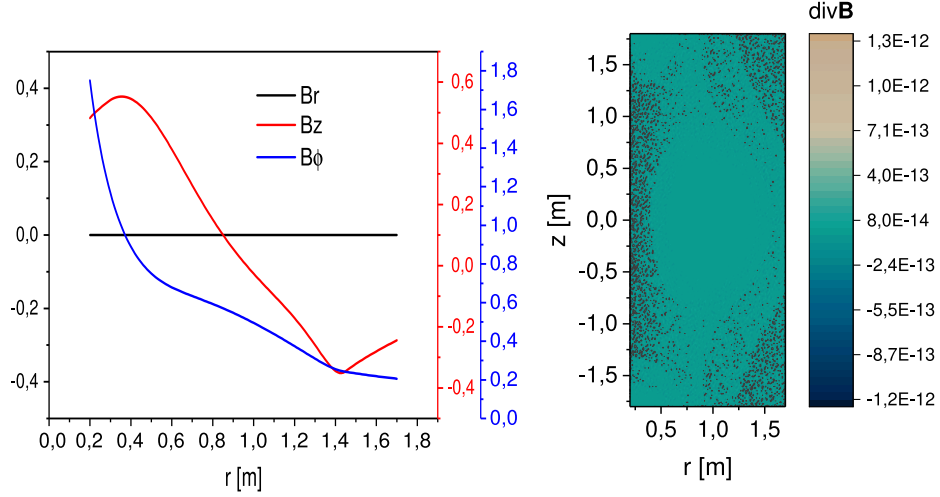
con experimentos en el dispositivo MAST [12], empleando un parámetro sobre el eje magnético  $\beta_a = 2\mu_o P_a / B_a^2 \sim 46\%$ ; por lo que  $c_1$  fue un referente o punto de partida en el desarrollo de esta tesis; puesto que podemos comparar, en cierto grado, los resultados aquí obtenidos. Ahora bien,  $c_3$  difiere de  $c_1$  principalmente por el parámetro  $P_a$  variando así los valores de  $\beta$  y  $\beta_N$  entre dichas configuraciones. La misma idea aplica para  $c_4$  y  $c_5$  sobre las cuales la corriente neta del plasma de 2MA busca recrear un escenario cercano a la nueva actualización del dispositivo MAST-U [67]. Las técnicas computacionales permiten explorar nuevos escenarios, tal como la triangularidad negativa en dispositivos ST la cual es muy difícil de implementar en la práctica. Hasta ahora, dispositivos como el DIII-D y el TVC han experimentado con estas configuraciones pero no entran en la categoría de tokamak esférico [68, 69]. Es así que apoyados en las bondades de la simulación computacional en  $c_6$  y  $c_7$  se exploran el comportamiento de plasmas con alta corriente (40MA) tanto en triangularidad positiva como negativa. Finalmente  $c_8$  y  $c_9$  tienen parámetros similares a  $c_1$  y  $c_3$  respectivamente, difiriendo en la distribución espacial del perfil de presión, pues en  $c_1$  y  $c_3$  así como en todas las demás configuraciones se trabaja con el perfil presentado en la expresión Ec.(40): un polinomio de cuarto orden cuya característica principal es suavizar la variación de  $p$  alrededor del eje magnético, pero en las dos últimas columnas se emplea un polinomio de segundo orden,  $\hat{P}(\psi_N) = \psi_N^2 + 0,2$ , para explorar las inestabilidades en el núcleo o centro del plasma. Las Figuras 8.b y 9 permiten visualizar esta idea.

**Figura 9:** a) Perfil de presión  $c_8$  sobre el plano poloidal empleando la función polinómica de segundo orden y b) presión a lo largo del eje radial ( $z = 0$ ) para  $c_1$  y  $c_8$  evidenciando variación de  $p$ .



Para finalizar esta sección, en la Figura 10 se presentan los perfiles de las componentes cilíndricas del campo magnético a lo largo del eje radial para  $c_1$  y el mapa con el comportamiento de la divergencia del campo magnético sobre el plano poloidal.

**Figura 10:** Comportamiento de las componentes de campo magnético a lo largo del eje radial a la izquierda, y a la derecha comportamiento de de la divergencia del campo magnético en el equilibrio.



Esto permite evidenciar el comportamiento esperado para las componentes de campo, en especial la componente toroidal  $\sim 1/r$ : en la que decae desde un valor cercano a los 2T en la región más interna pasando por los 0.5T cerca al eje magnético hasta un valor de 0,2 sobre la región externa. Además, es de resaltar que el comportamiento numérico de la divergencia es muy apropiado; es decir que la técnica numérica, así como el mallado, respetan esta condición con muy buena aproximación ( $\nabla \cdot \mathbf{B} \sim 10^{-12}$ , en unidades normalizadas).

## 4.2 CORRIMIENTO DE SHAFRANOV

El corrimiento de Shafranov se entiende como la separación que existe entre el eje magnético y el radio mayor de la columna de plasma, y juega un papel relevante a la de hora encontrar la triangularidad para la máxima elongación contra el modo RWM(resilitive wall mode)  $n=0$  [70, 71]. Con el ánimo de indagar sobre la dependencia de dicho corrimiento y antes de estudiar la dinámica de las configuraciones anteriores, se determinó el equilibrio usando un código que resuelve la ecuación de Grad-Shafranov basado en frontera fija, permitiendo tener control total sobre parámetros geométricos del D-shape [45].

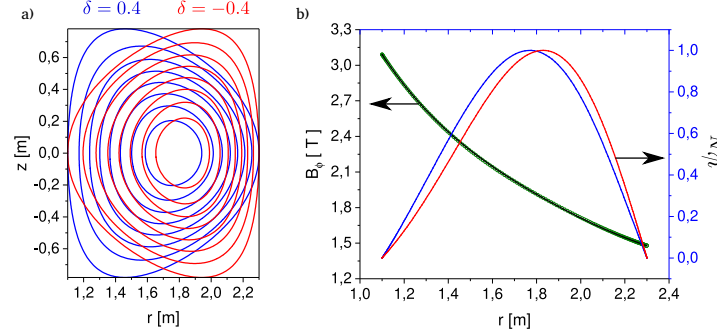
$$r = R_o + a \cos[\theta + \arcsin(\delta) \sin(\theta)] \quad (45)$$

$$z = \kappa a \sin(\theta); \quad (46)$$

Las ecuaciones (45) y (46) definen la frontera del plasma donde  $\theta \mapsto [0 : 2\pi]$  se conoce como el ángulo poloidal. Las simulaciones se ejecutan bajo condiciones similares al dispositivo DIII-D:  $R_o = 1.7$ ,  $a = 0.6$ ,  $\kappa = 1.3$ ,  $I_p = 0.9\text{MA}$  y  $B_a \sim 2.0\text{T}$ . En la Figura 11.a se muestra que para un plasma con triangularidad negativa se tiene un corrimiento de shafranov mucho más fuerte que un plasma con triangularidad positiva y es claro el

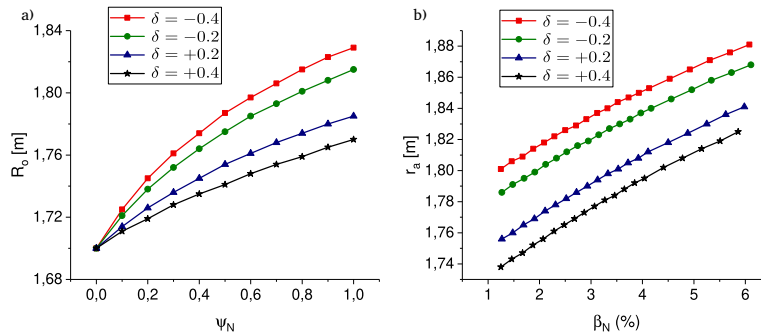
corrimiento para el flujo poloidal normalizado  $\psi_N$  en la Figura 11.b; donde se muestra que para ambas configuraciones el perfil de la componente toroidal de campo magnético a lo largo del eje radial no varía significativamente. En esta simulación la presión se ajustó de modo que en ambas situaciones el parámetro  $\beta_N \sim 2,7\%$  no variara.

**Figura 11:** Corrimiento de Shafranov: a) Las superficies de contorno de  $\psi$  muestran un mayor corrimiento para la configuración con triangularidad negativa. b) Flujo poloidal normalizado a lo largo del eje radial: en azul, plasma con  $\delta > 0$ , en rojo  $\delta < 0$ . En ambos casos la curva de  $B_\phi$  se superponen.



Así como el radio mayor es definido por la última línea cerrada de  $\psi$ , es posible establecer un “radio mayor” para cada curva de nivel en cada configuración, dando una mayor idea del corrimiento de Shafranov en función del flujo poloidal normalizado, tal y como se presenta la Figura 12.a donde se mantiene una vez más el valor fijo de  $\beta_N = 2.7\%$  para cada configuración. El comportamiento es muy claro: a menor valor de triangularidad mayor es el desplazamiento del eje magnético. La Figura 12.b refuerza esta idea, en la que claramente al aumentar la presión, mayor es el corrimiento y cada vez más marcada la tendencia conforme  $\delta$  decrece. Este fenómeno está relacionado con la fuerza ejercida por la presión del plasma, en la que al disminuir la triangularidad la superficie crece en la región más externa  $\sim r_{max}$  y a su vez, mayor volumen en dicha región sobre la que el plasma ha de confinarse.

**Figura 12:** Comportamiento del a) radio mayor en función del flujo poloidal normalizado manteniendo  $\beta_N = 2,7\%$  fijo y b) del corrimiento del eje respecto al parámetro  $\beta_N$  para diferentes configuraciones.



---

### 4.3 DINÁMICA Y ESTABILIDAD

Como ya se ha mencionado, en este trabajo, la dinámica del plasma se estudia a partir del modelo MHD a través de simulaciones tridimensionales sobre toda la geometría toroidal. Para ello se parte de las condiciones de equilibrio presentadas en la sección anterior, ver Tabla 5. El equilibrio se rompe en cada simulación al introducir una pequeña perturbación en las componentes de la velocidad de amplitud del orden de  $\sim 10^{-4}$  en unidades normalizadas. Recordando que el parámetro de normalización de la velocidad usado en este trabajo es la velocidad de Alfvén sobre el eje magnético,  $v_A$ , implica que la perturbación introducida corresponde a una diezmilésima parte de dicha velocidad característica, tal como se presenta en la expresión Ec.(47), donde  $r_o$  y  $z_o$  representa la posición del eje magnético que junto a las variables  $r$  y  $z$  se dan en unidades normalizadas.

$$\begin{aligned}
 u_r(r, z, \phi, t = 0) &= 1 \times 10^{-4} \exp \left[ -70 \left( [r - r_o]^2 + [z - z_o]^2 \right) \right] \sin(7\phi) \\
 u_\phi(r, z, \phi, t = 0) &= 1 \times 10^{-4} \exp \left[ -70 \left( [r - r_o]^2 + [z - z_o]^2 \right) \right] \cos(9\phi) \\
 u_z(r, z, \phi, t = 0) &= 1 \times 10^{-4} \exp \left[ -70 \left( [r - r_o]^2 + [z - z_o]^2 \right) \right] \sin(5\phi)
 \end{aligned} \tag{47}$$

Es de resaltar que la forma propia de la perturbaciones rompe a su vez la simetría inicial en los perfiles de equilibrio obtenidos de la ecuación de Grad-Shafranov presentados en la sección anterior debido a la dependencia con el eje toroidal (variable  $\phi$ ). Se resalta que la forma sinusoidal garantiza la periodicidad inicial de la perturbación, evitando inconvenientes sobre la condición de frontera periódica sobre dicho eje; adicionalmente los factores 7, 9 y 5 se escogieron intencionalmente diferentes con el objetivo de evitar la excitación de un modo toroidal específico. La perturbación sobre el plano poloidal ( $\phi = \text{cte}$ , plano  $rz$ ) tiene una forma gaussiana con el máximo sobre el eje toroidal de la columna de plasma con un decaimiento apropiado de modo que cerca del límite exterior o borde del plasma la perturbación sea completamente despreciable, pero el decaimiento no es tan rápido que no pueda ser descrito sobre el mallado poloidal, logrando así que las variaciones sean completamente capturadas por el método de las diferencias finitas.

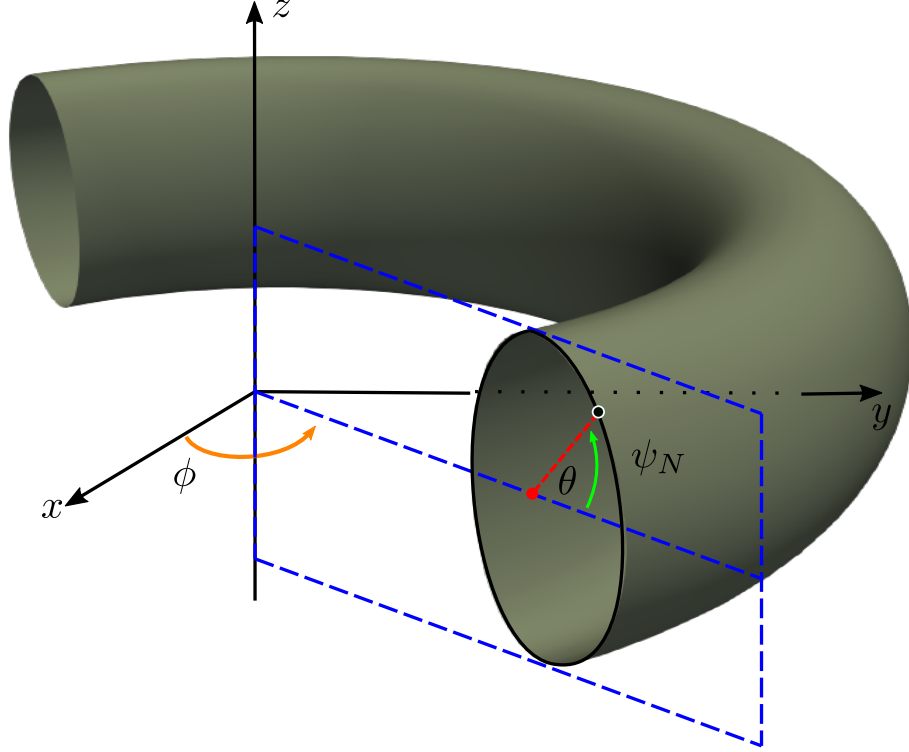
Por otra parte, es de resaltar que los perfiles de presión en el equilibrio, a excepción de los dos últimos,  $c_8$  y  $c_9$  junto con  $c_2$ , son “anchos” o aplanados alrededor del eje magnético y caen rápidamente cerca de la frontera del plasma; tal como se presentó en las Figuras 8b y 9b, donde este comportamiento permite el surgimiento y posible desestabilización de modos ballooning o modos impulsados por presión. En su trabajo, R Khan estableció que valores altos de viscosidad<sup>§</sup>,  $\nu \sim 10^{-3}$ , producen un amortiguamiento sobre modos toroidales altos  $n > 11$ ; por otra parte valores pequeños de viscosidad,  $\nu \sim 10^{-5}$ , no generan tal efecto, sin embargo la dinámica de estos modos no puede ser tratada adecuadamente basados en el esquema numérico seleccionado, pues sería necesaria una malla más robusta sobre el eje toroidal y esto aumenta drásticamente el tiempo de computo. Tomando estas observaciones como punto de partida, se ha

---

<sup>§</sup>unidades normalizadas

escogido  $\nu = 5 \times 10^{-4}$  como valor apropiado que permite estudiar sin ningún problema la dinámica del plasma para modos toroidales bajos e intermedios  $n \lesssim 9$  con un mallado razonable.

**Figura 13:** Sistema coordinado para representación de las perturbaciones en series de Fourier: ángulo toroidal  $\phi$  en naranja, ángulo poloidal  $\theta$  en verde y en negro la superficie de flujo poloidal  $\psi_N$  constante.



El análisis modal en estos sistemas parte del hecho que una función  $f$  periódica puede ser expresada en una nueva triada  $(\psi_N, \phi, \theta)$  y a su vez la función se puede expandir a través de una serie de Fourier sobre dos variables características del sistema: el eje toroidal  $\phi$  y el ángulo poloidal  $\theta$ , ver Figura 13. La variable  $\psi_N$  representa las superficies de flujo poloidal normalizada constante, como ya se presentó anteriormente.

$$f(\psi_N, \theta, \phi) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} [A_{m,n} \cos(m\theta + n\phi) + B_{m,n} \sin(m\theta + n\phi)] \quad (48)$$

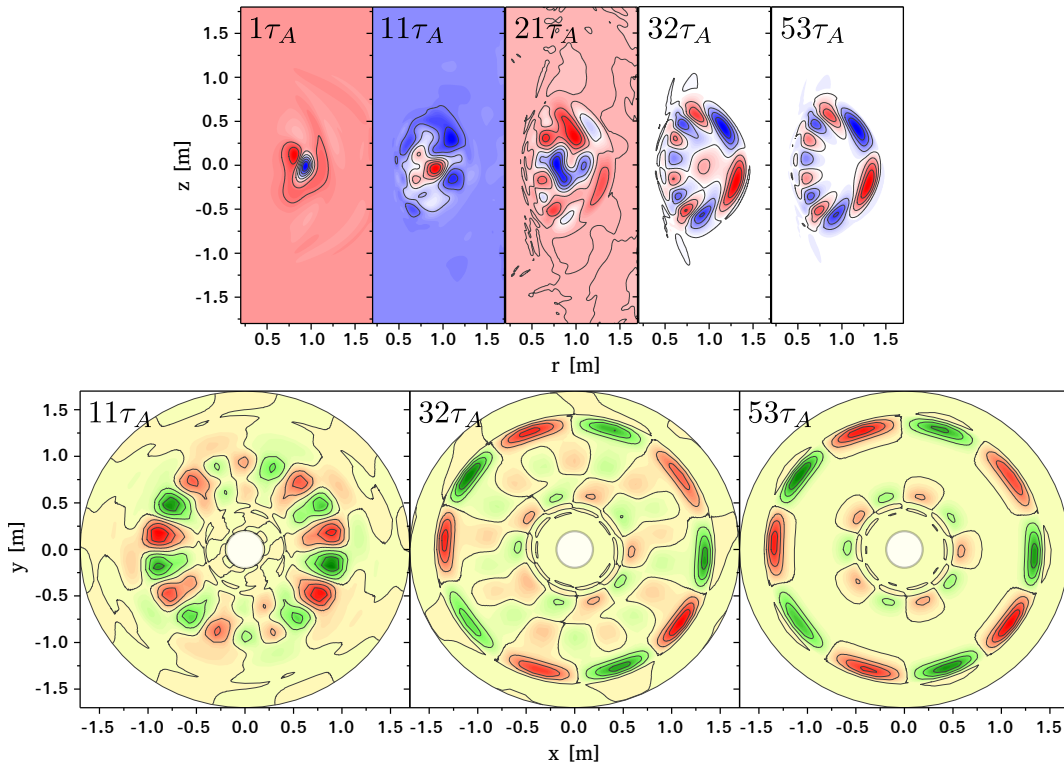
siendo  $m$  el modo asociado a  $\theta$  y  $n$  a la variable  $\phi$  o simplemente los números poloidal y toroidal, respectivamente.  $A_{m,n}$  y  $B_{m,n}$  son funciones del flujo poloidal normalizado, definidos como:

$$A_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi_N, \theta, \phi) \cos(m\theta + n\phi) d\theta d\phi \quad (49)$$

$$B_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi_N, \theta, \phi) \sin(m\theta + n\phi) d\theta d\phi \quad (50)$$

Antes de presentar los resultados de la evolución del sistema, vale la pena mencionar que la región de simulación comprende tanto la región que confina el plasma definida por las líneas cerradas de campo como la región “vacía”, líneas de campo abiertas, y esto supone un problema muy difícil de resolver, pues las ecuaciones MHD sólo aplican dentro de la región limitada por el D-shape y han de acoplarse en la frontera con las ecuaciones de Maxwell que gobiernan la evolución de los campos en el exterior. Para superar esta dificultad, desde el estado de equilibrio, la región exterior se considera como un plasma de baja presión, uniforme y del mismo valor que la presión en la frontera. Esta condición no rompe el equilibrio anterior, pues el equilibrio depende estrictamente de los gradientes de presión y lo que se ha considerado hasta el momento es agregar un valor uniforme de fondo que equivale a  $0.2P_a$ , explicando así el 0.2 en la expresión (40). Finalmente, dado que el equilibrio no depende de la densidad de masa  $\rho$ , se ha escogido por conveniencia el valor constante de  $6,7 \times 10^{-8} [\text{kg}/\text{m}^3]$  para cada punto de malla en el instante inicial  $t = 0$ , lo que equivale a una concentración de aproximadamente  $4 \times 10^{19}$  partículas por metro cúbico. El valor anterior de densidad se ha seleccionado como parámetro de normalización para la densidad por representar un valor típico en estos sistemas [19, 25].

**Figura 14:** Variación de la presión respecto al equilibrio en diferentes instantes: en la gráfica superior se presenta la evolución sobre el plano poloidal y en la gráfica inferior sobre el plano ecuatorial  $z = 0$ .



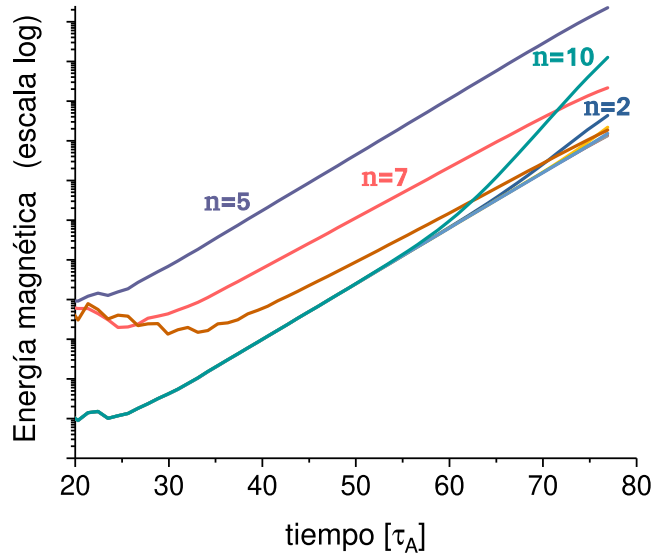
La perturbación que inicialmente se introduce sobre la velocidad rompe el equilibrio, afectando o perturbando las demás variables físicas en los instantes posteriores. La Figura 14 presenta la evolución de la inestabilidad sobre el perfil de presión en el

plano poloidal y el plano ecuatorial. En estas gráficas se puede apreciar que la perturbación, inicialmente localizada sobre el núcleo de la columna de plasma evoluciona hasta ubicarse en las cercanías de la frontera, a demás, dicha perturbación evoluciona hasta adquirir una estructura modal tanto en el plano poloidal como en el eje toroidal. Sobre este primer plano ( $rz$ ), la estructura modal de la perturbación empieza a mostrarse sobre los primeros 20 periodos de Alfvén y en  $t \sim 50\tau_A$  su estructura es completamente clara. En dicho lapso la dinámica del plasma es puramente lineal, pues la perturbación no afecta drásticamente la columna, tal y como se presenta en la Figura 16, es decir, las perturbaciones son pequeñas respecto a los valores del equilibrio.

Es de resaltar que en la Figura anterior, sobre el plano ecuatorial se puede apreciar por simple inspección que en los primeros instantes los números toroidales altos dominan la dinámica,  $n \sim 9$  o superiores, pero al avanzar la evolución los números toroidales que dominan la simulación en cercanías del régimen no lineal  $t \sim 50\tau_A$  están al rededor de  $n = 5$ , menor que en los primeros instantes, concluyendo que los valores de  $n$  relativamente altos son amortiguados como un efecto propio del valor de viscosidad seleccionado, tal como se esperaba.

La descomposición modal del campo magnético según la expresión (48) permite estudiar la evolución energética de cada número toroidal, donde la Figura 15 presenta la evolución en escala logarítmica de la energía magnética para los primeros 13 modos.

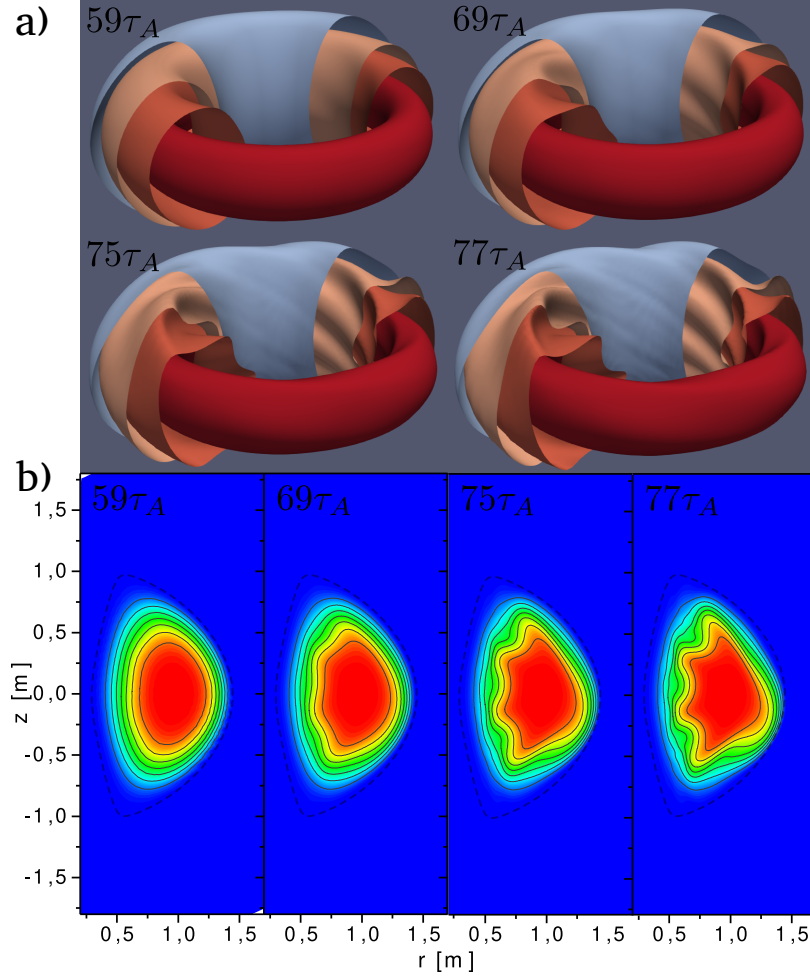
**Figura 15:** Razón de crecimiento de la energía magnética durante toda la simulación.



Se puede apreciar que el logaritmo de la energía magnética tiene un comportamiento lineal, esto indica que la tasa de crecimiento para cada modo toroidal  $\gamma_n$  es aproximadamente constante. Como ya se había previsto,  $n = 5$  es el modo toroidal dominante, seguido por  $n = 7$ , sin embargo al final de la simulación  $\gamma_{10}$  tiene un crecimiento hasta el punto de superar la contribución respecto al séptimo modo. En los últimos instantes  $n = 2$  tiende a distinguirse de los demás modos cuya contribución no es tan notoria.

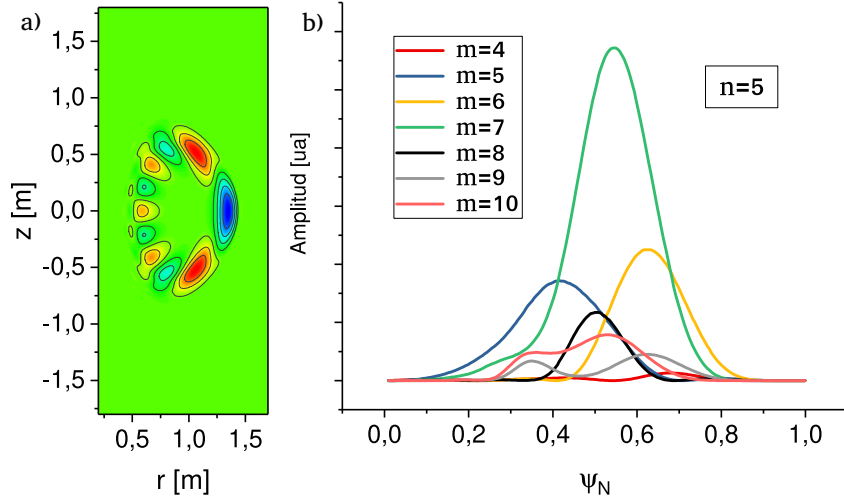
Desde el instante  $t \sim 53\tau_A$  en el que la perturbación se ubica en cercanías de la frontera es posible establecer que la dinámica del plasma entra en su fase no lineal, pues desde dicho instante las perturbaciones empiezan a crecer hasta el punto que el plasma llega a perder su forma o configuración inicial, como se puede apreciar en la Figura 16.

**Figura 16:** Evolución del perfil de presión bajo la dinámica no lineal desde una vista a) tridimensional, de toda la geometría toroidal de las superficies de presión constante y b) desde un plano poloidal  $\phi : cte$



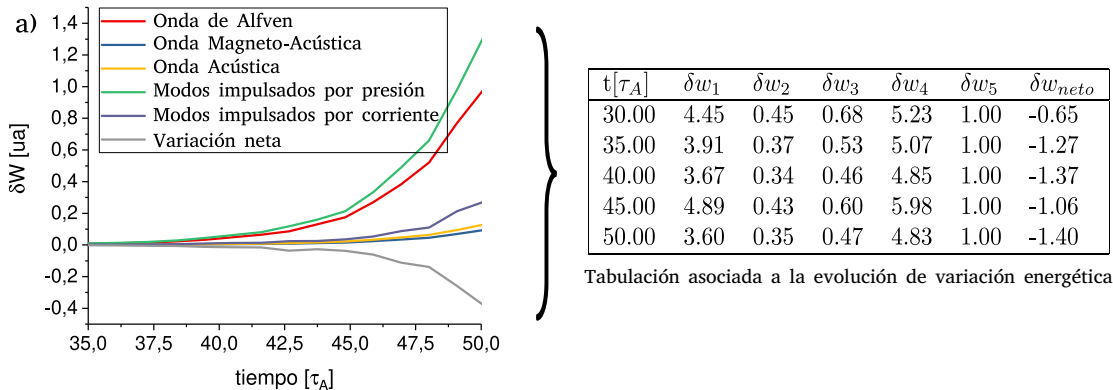
La estructura modal de la perturbación genera una desestabilización de la columna de plasma creando estructuras filamentadas cada vez más agudas. En la Figura 17 se aprecia la estructura modal de la perturbación en la presión para el instante  $t \sim 69\tau_a$  y número toroidal  $n = 5$ . A la derecha, la descomposición en los modos poloidales indica que el modo  $m = 7$  es dominante entre los modos intermedios y se encuentra centrado sobre  $\psi_N = 0,55$  aproximadamente, conocida también como la superficie resonante. Se puede concluir que en la fase lineal las perturbaciones evolucionan hasta ubicarse en regiones cerca de la frontera del plasma sobre las superficies resonantes en la que su crecimiento se amplifica hasta deformar y desestabilizar la condición inicial de equilibrio.

**Figura 17:** Estructura poloidal para el número toroidal  $n = 5$ : a) mapa de color de la perturbación en  $p$  y b) amplitud de la perturbación para diferentes números poloidales  $m$  en función del flujo  $\psi_N$ .



Con el ánimo de identificar la naturaleza de la inestabilidad se graficó la evolución de los 5 términos de la expresión Ec.(17) durante los primeros 50 periodos de Alfvén, ver Figura 18, pues la expresión es válida en el régimen lineal. Esto permite evidenciar que la dinámica es dominada principalmente por un modo estabilizador dado por la propagación de las ondas de Alfvén y un término desestabilizador: los modos impulsados por presión. Las ondas acústica y magneto-acústica no juegan un papel muy decisivo en la dinámica; los modos impulsados por corriente aportan un poco mas. La variación neta de la energía es negativa, y desde la teoría lineal de la magnetohidrodinámica indica que el efecto global de la perturbación es desestabilizar el plasma, lo que concuerda con las observaciones previas. Se puede concluir que la naturaleza de la inestabilidad es impulsada por los altos gradientes de presión. La tabulación adjunta a la gráfica presenta una cuantificación de estas ideas, donde las variaciones de energía se normalizan respecto a la variación de los modos impulsados por corriente.

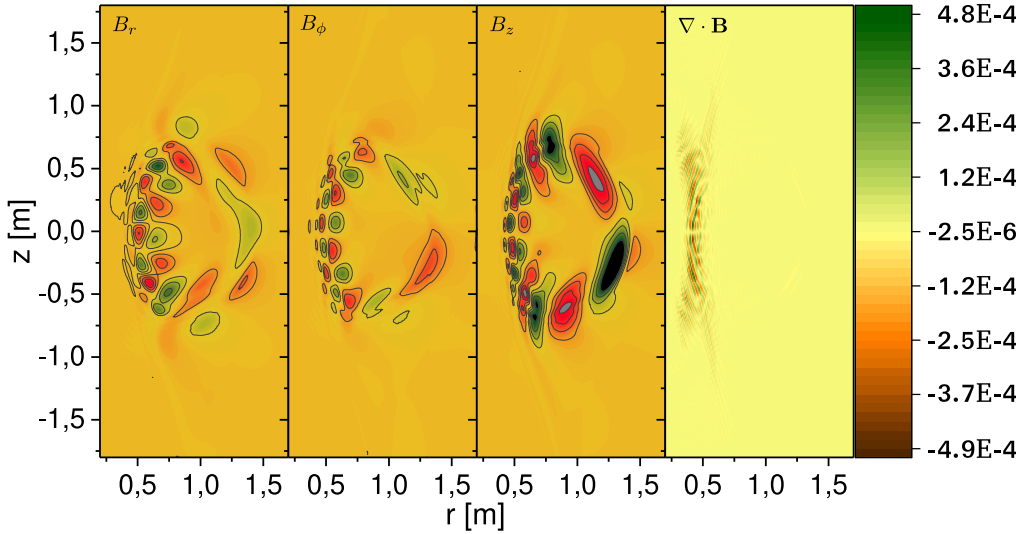
**Figura 18:** Variación energética asociada a cada onda presente en el sistema así como la respectiva variación en los modos impulsados por presión  $\delta w_4$  y por corriente  $\delta w_5$  según teoría MHD linealizada.  $\delta w_1$ ,  $\delta w_2$  y  $\delta w_3$  las variaciones asociadas a la propagación de las ondas de Alfvén, magneto acústicas y acústicas respectivamente.



Todas las simulaciones se detienen hasta que la divergencia alcanza un valor cercano al error asociado del esquema numérico empleado, esto es, las simulaciones se ejecutan mientras se cumpla que  $(\nabla \cdot \mathbf{B})_{max} < 10^{-3}$ .

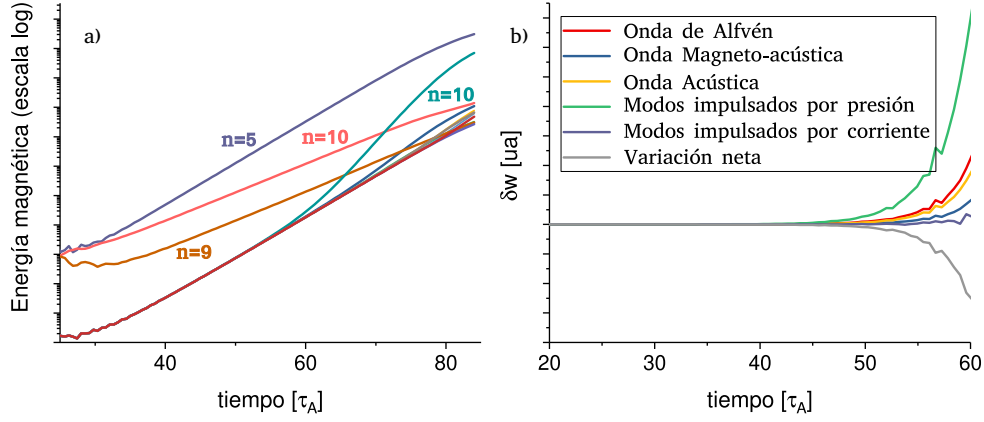
Dado que la divergencia del campo magnético en el equilibrio  $\mathbf{B}_0$  se satisface muy bien, (fig.10.b), los altos valores de este parámetro se asocian a la alta variación de la perturbación de las componentes del campo magnético  $\mathbf{B}_1$ , pues como se puede apreciar en la Figura 19, la estructura modal tiene altas variaciones cerca de la región más interna de la frontera. La restricción anterior se establece con el ánimo de evitar interpretaciones erróneas de la física del sistema, debido a errores numéricos que se asocian directamente al método empleado; pues como se ha mencionado, el esquema de diferencias finitas no puede resolver altas variaciones en las funciones. Para ello es necesario el refinamiento de la malla pero aumenta el coste computacional.

**Figura 19:** Mapa de color de la perturbación magnética sobre cada componente y su respectiva divergencia sobre un plano poloidal arbitrario en los últimos instantes de la simulación:  $\sim 75\tau_A$ .



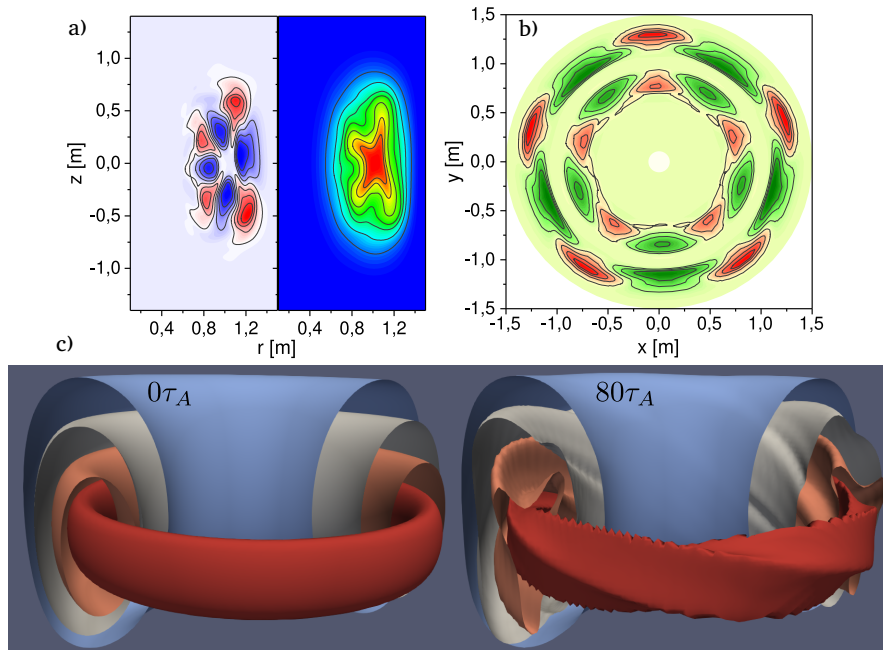
La dinámica del plasma sobre la configuración  $c_2$  con triangularidad baja, pero negativa indica un comportamiento similar a la dinámica de  $c_1$  (Ver Fig 15), donde la energía magnética es dominada por el número toroidal  $n = 5$  seguida por  $n = 7$ , y donde en el transcurso del tiempo el décimo modo entra en resonancia, creciendo hasta jugar un papel importante en la dinámica al final de la simulación. Estas propiedades se pueden evidenciar en la Figura 20, donde se puede apreciar también que la inestabilidad global del plasma se debe principalmente a la dinámica de los modos impulsados por presión, nuevamente, y donde la onda acústica toma un rol más decisivo al ser comparables con el aporte de las ondas de Alfvén. Este aporte significativo de la onda acústica se ha de asociar principalmente al perfil de presión empleado, pues en este caso la presión no es tan homogénea en el núcleo, tiene un perfil más “agudo” al emplearse un perfil cuadrático en la relación de  $p$  y  $\psi_N$  en el equilibrio; además en la Figura 21 se puede notar que la acomodación de las perturbaciones está más cerca al eje magnético y no tienden tanto a la frontera como el caso anterior.

**Figura 20:** Evolución a) energética de cada modo toroidal y b) de la variación  $\delta w$  de las ondas presentes en el plasma y modos impulsados tanto por presión como corriente a lo largo de la simulación para  $c_2$ .



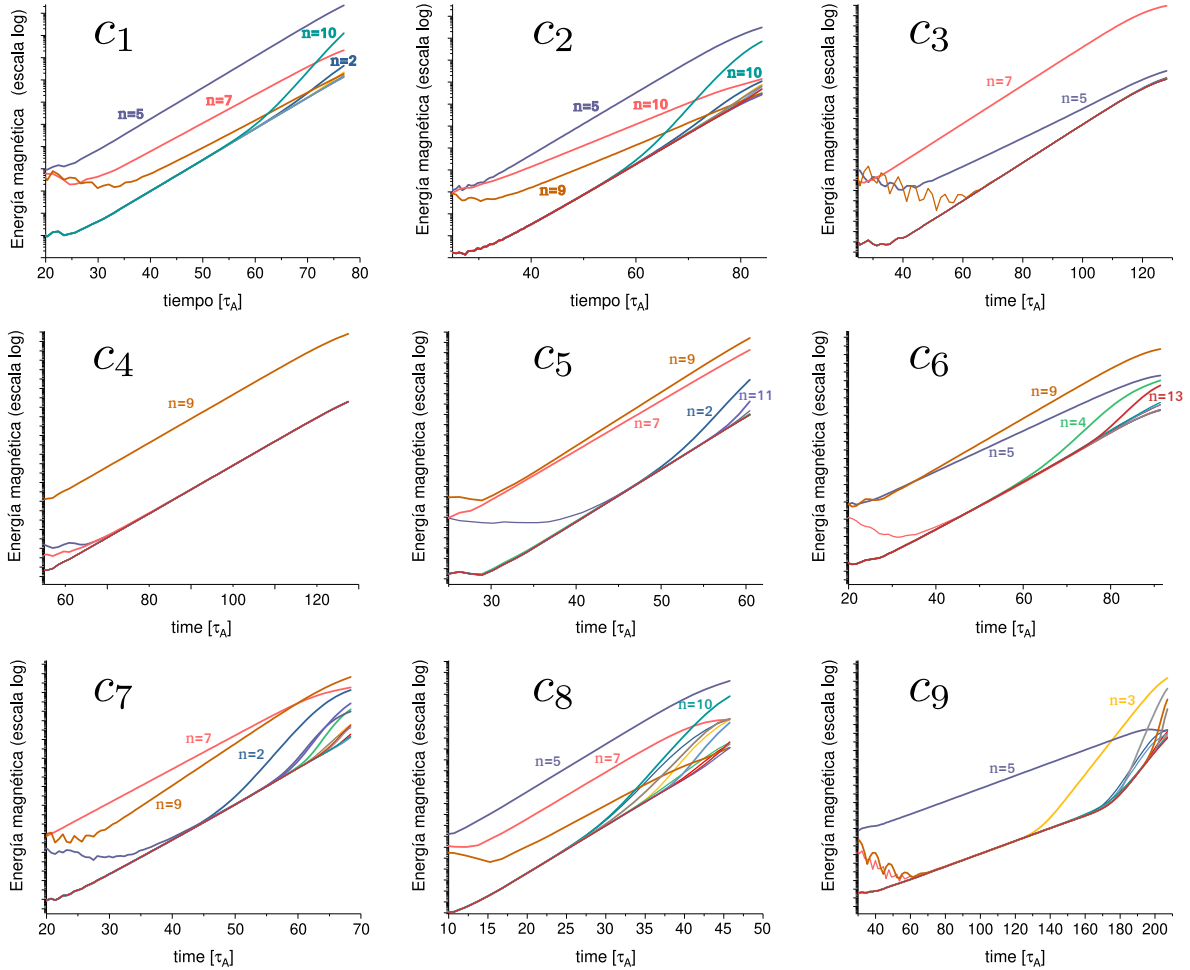
Respecto a los tiempos de evolución de las inestabilidades no hay variaciones significativas, pues en este caso, la dinámica no lineal inicia cerca de los  $60\tau_A$ , una diferencia de unos cuantos periodos respecto a la configuración  $c_1$ . Sin embargo una comparación entre las dos primeras configuraciones para establecer similitudes o diferencias entre D-shapes inversos no es muy apropiada dado la discrepancia en el perfil de presión y el mismo valor de triangularidad de  $c_2$  pues respecto a  $C_1$  no es el D-shape opuesto. El paralelo para la dinámica de D-shapes opuestos se explora con las configuraciones  $c_6$  y  $c_7$  mas adelante.

**Figura 21:** Perfiles de presión asociados a la configuración  $c_2$  para: a) la variación de presión  $p_1$  respecto al equilibrio  $p_o$  (izquierda) y presión neta  $p = p_o + p_1$  (derecha) sobre un plano poloidal, b) perturbación sobre el plano ecuatorial  $z = 0$  en el instante  $t = 80\tau_A$  y c) la vista 3D de la columna de plasma con superficies de presión constante al inicio y final de la simulación.



El comportamiento energético asociado al campo magnético de las demás configuraciones se presentan en la Figura 22, donde se puede apreciar la evolución de los primeros modos toroidales desde el instante en el que se detecta o inicia la formación y/o acomodación de la estructura modal de las perturbaciones. Es de resaltar que en las configuraciones  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_9$  en las que se empleó el mismo valor en el parámetro  $P_a = 25\text{kPa}$ , para mantener la presión global relativamente baja, la excitación modal se da principalmente para un único modo o número toroidal, así para  $c_3$  se excita el séptimo modo, para  $c_4$  con la mayor corriente en el plasma entre estas tres configuraciones el modo  $n = 9$  y para la configuración  $c_9$  predomina en la mayor parte de la simulación el quinto modo.

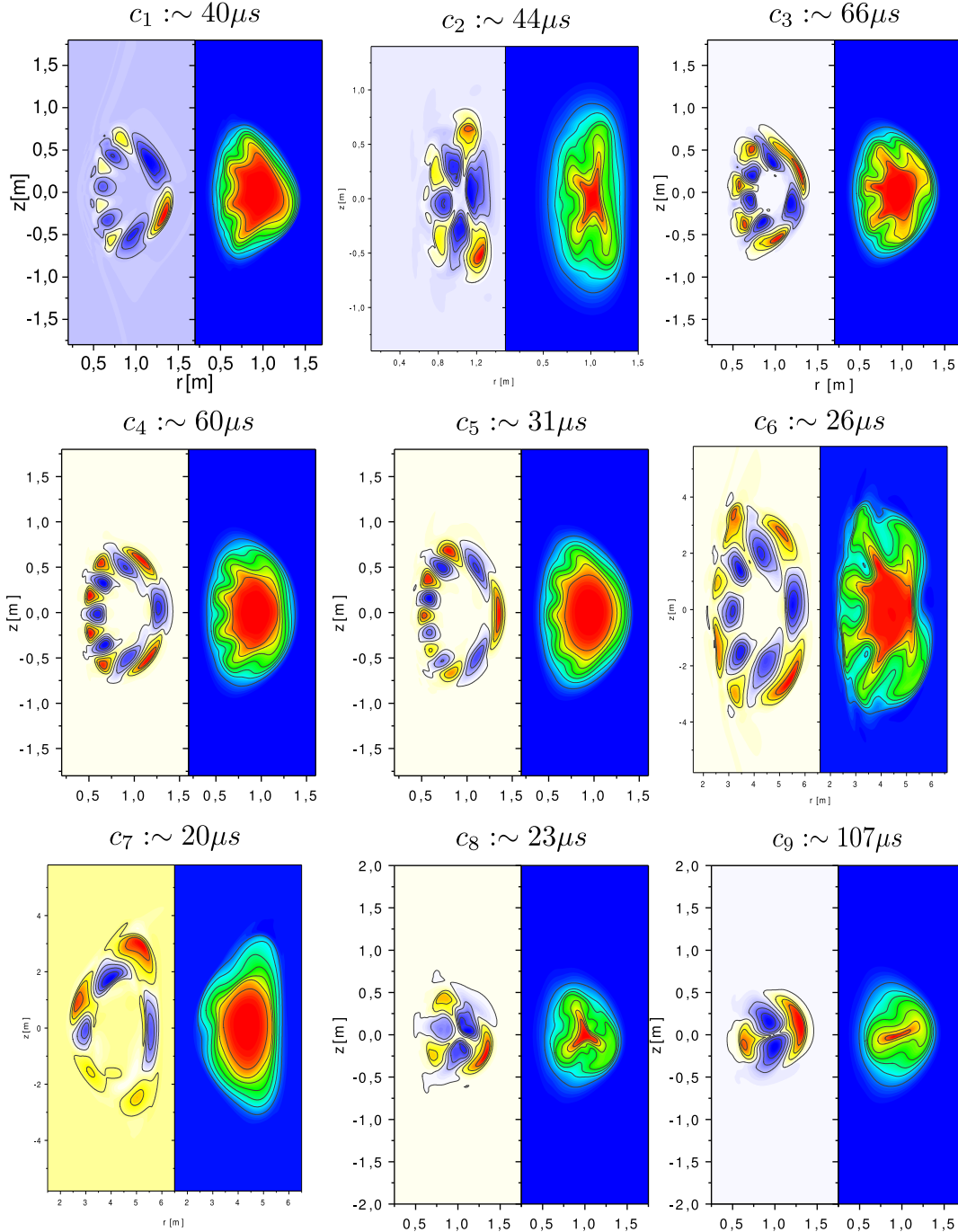
**Figura 22:** Comportamiento de la energía magnética para los primeros 13 modos toroidales en cada una de las nueve configuraciones descritas en la tabla 5.



Como se ha observado, el tiempo se ha medido en periodos de Alfvén cuyo valor aproximado de  $0,52\mu\text{s}$  se mantiene para todas las simulaciones, en los que se empleó  $R_o = 0,9\text{m}$ ,  $B_o = 0,5\text{T}$  y  $\rho_o = 6,7 \times 10^{-8}\text{kg/m}^3$ , excepto para las configuraciones  $c_6$  y  $c_7$ , pues las dimensiones y parámetros como la corriente de plasma y campo varían

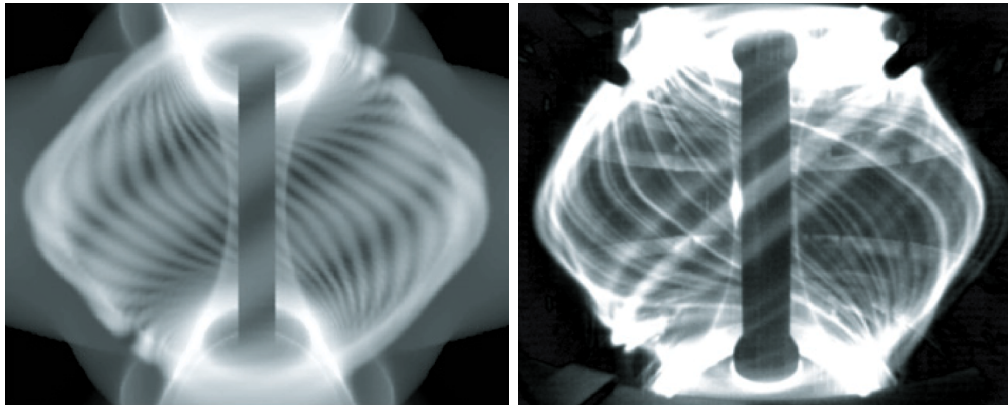
significativamente de las demás configuraciones, siendo necesario un escalamiento diferente:  $\tau_A = 0,29\mu s$ , donde  $R_o = 4,0m$  y  $B_o = 4T$ . Para evitar posibles ambigüedades, el tiempo se presenta en  $\mu s$ . En la Figura 23 se aprecian los perfiles de la variación de la perturbación respecto a la presión de equilibrio (estructura modal) y de la presión neta en los últimos instantes de cada simulación.

**Figura 23:** Perfiles de presión y su respectiva perturbación sobre el plano poloidal para cada una de las configuraciones presentadas en la tabla 5 en el instante que cada simulación finaliza su ejecución.



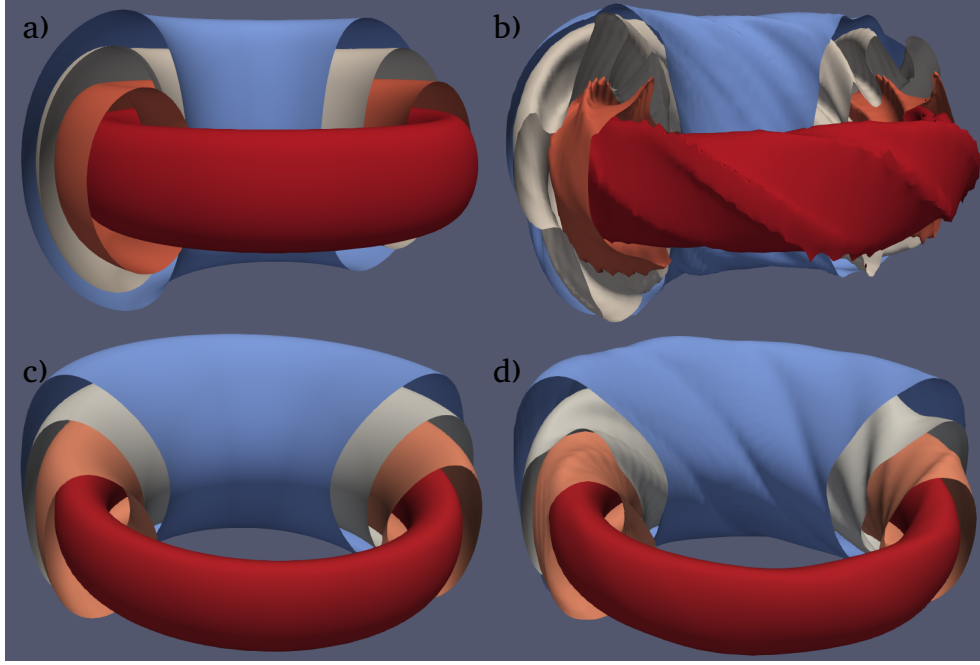
Es posible apreciar que en las configuraciones  $c_3$ ,  $c_8$  y  $c_9$  con perfiles de presión agudos en el núcleo, en los que se empleó la función cuadrática la dinámica, presenta dos características interesantes. Primero, los modos se ubican cerca del eje magnético y segundo, los modos poloidales que se logran excitar son bajos,  $m \sim 2 - 3$ ; así la dinámica y altas variaciones se dan cerca del eje, desestabilizando el núcleo de plasma. Por su parte, las demás configuraciones con perfiles de presión planos cerca del eje no promueven la desestabilización del núcleo, pues la perturbación tiende a ubicarse en las cercanías de la frontera hasta desestabilizar la columna en dicha región. Estas inestabilidades se conocen como inestabilidades de borde o “ELMs” (Edge Localized Modes); las cuales generan erupciones del plasma; pues como se puede apreciar en la Figura 24, en dichas configuraciones surge una estructura filamentada [1, 72–75]. Los modos que se acomodan sobre el borde se caracterizan por ser números de alto orden ( $> 13$ ) e intermedios. En estas simulaciones se aprecian números poloidales intermedios  $m = 5 - 9$ ; puesto que el valor de viscosidad seleccionado evita el desarrollo de números relativamente altos, mayores a 10.

**Figura 24:** Observaciones experimentales: A la izquierda, captura de la cámara de visibilidad rápida en el dispositivo MAST, para el pulso #24763 y a la derecha la imagen de la cámara de visibilidad rápida en MAST, para el pulso #18619 durante un accidente de ELM; pulso de configuración similar al pulso #24763. Imagen tomada del trabajo realizado por S J P Pamela y colaboradores [1].



Las configuraciones  $c_6$  y  $c_7$  se caracterizan por ser plasmas de alta corriente, con D-shapes opuestos y con alta elongación que rozan la razón de aspecto límite de tokamaks esféricos,  $A \sim 2$ . En estos dos casos, la evolución de la energía magnética no presentan mayores diferencias la una de la otra, pues en ambos casos se excitan modos toroidales intermedios y permiten el desarrollo de los demás modos a lo largo de la simulación, en especial sobre la fase final. Sin embargo, la estructura poloidal parece sugerir que sobre la columna con triangularidad positiva se ubican números poloidales más grandes, promoviendo así a una mayor variación sobre el plano poloidal que conduce a la formación de filamentos alargados. por el contrario, sobre la columna con triangularidad negativa no se logra apreciar una estructura filamentosa marcada. En dicho caso las fluctuaciones son suaves y extendidas, ver Figura 25, sugiriendo que esta configuración suprime en cierta medida el surgimiento de modos de borde exterior, tal como lo reportan experimentos recientes sobre el dispositivo DIII-D [68].

**Figura 25:** Perfil de presión 3D. Superficies de presión constante en los instantes inicial y final de la simulación para:  $c_6$  en a)  $t = 0$ , b)  $t = 26\mu s$  y  $c_7$  en c)  $t = 0$ , d)  $t = 20\mu s$



Durante las simulaciones se pueden distinguir dos fases: 1) la fase lineal, asociada con el desarrollo de la estructura modal de las perturbaciones sin ocasionar una deformación al equilibrio inicial y 2) la fase no lineal, en la que se evidencia el crecimiento de la perturbación hasta desestabilizar el estado inicial de equilibrio. Como ya se mencionó, durante la dinámica lineal se puede aplicar el principio de energía para detallar las variaciones de energía asociada a diferentes modos y/o propagación de ondas. La tabla 6 presenta dicha variación para cada configuración en instantes previos al inicio de la fase no lineal.

**Tabla 6:** Variación energética según principio de energía:  $\delta w_1$  variación asociada a las ondas de Alfvén,  $\delta w_2$  a la onda magneto-acústica,  $\delta w_3$  a la onda acústica,  $\delta w_4$  a modos impulsados por presión, y  $\delta w_5$  a modos impulsados por corriente o modos *kink*. El tiempo representa aproximadamente el inicio del intervalo de transición entre la dinámica en el régimen lineal al no lineal.

config.	tiempo( $\mu s$ )	$\delta w_1$	$\delta w_2$	$\delta w_3$	$\delta w_4$	$\delta w_5$	$\delta w_{neto}$
$c_1$	28.85	4.64	0.41	0.57	5.82	1.00	-01.21
$c_2$	29.17	9.61	3.35	7.35	30.82	1.00	-11.51
$c_3$	43.66	3.81	1.42	7.09	19.75	-1.00	-06.44
$c_4$	50.99	2.48	0.81	4.26	9.36	1.00	-02.82
$c_5$	25.29	2.78	1.38	4.84	12.75	1.00	-04.75
$c_6$	16.33	3.51	0.61	1.50	6.84	1.00	-02.21
$c_7$	13.15	1.43	0.83	3.99	7.15	1.00	-01.90
$c_8$	12.71	2.17	0.74	1.56	6.13	1.00	-02.68
$c_9$	87.79	42.99	4.94	21.49	103.29	-1.00	-32.87

---

Todas las variaciones se miden, o normalizan, respecto a la variación  $\delta w_5$  asociada a los modos kink. Se puede notar que en todos los casos la inestabilidad es impulsada por la presión y en todos los escenarios el plasma es globalmente inestable,  $\delta w_{neto} < 0$ . Por otra parte, se resalta el hecho que en las configuraciones  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  y  $c_7$  la contribución a la estabilización de la onda de Alfvén se ve superada por la onda acústica, cuyas configuraciones se caracterizan por poseer un valor de  $\beta_N$  menor o muy cercano a 1.. Finalmente, el valor negativo de variación en los modos kink,  $(-1,00)$ , indica que dichos modos impulsados por corriente no están desestabilizando el plasma; por el contrario, ayudan a estabilizarlo, tal como se vio en la sección 2.3, sin embargo, su aporte no es significativo para evitar el colapso del sistema. Este fenómeno se aprecia en las configuraciones  $c_3$  y  $c_9$ , las cuales se caracterizan por poseer un valor bajo de presión sobre el eje magnético:  $\sim 30\text{kPa}$  respecto a  $\sim 60\text{kPa}$  en los demás casos<sup>¶</sup>.

---

<sup>¶</sup>Excepto en  $c_6$  y  $c_7$

---

---

## CONCLUSIONES

---

---

En este trabajo se elaboraron códigos computacionales MHD para estudiar plasmas confinados magnéticamente en dispositivos tipo Tokamak. Dichos códigos se programaron en lenguaje C/C++ teniendo como base el trabajo realizado por Riaz Khan, al empelar técnicas numéricas sencillas, como lo es el quema de diferencias finitas y algoritmos Runge-Kuta. Estos códigos se dividen en dos grupos: (i) Descripción del estado de equilibrio de la columna de plasma y (ii) Descripción de la dinámica no lineal, global y tridimensional de la columna de plasma.

Se desarrolló un código que permite establecer las condiciones de equilibrio de la columna de plasma a partir de la solución numérica de la ecuación de Grad-Shafranov, sobre una malla rectangular homogénea definida en el plano poloidal  $rz$ . Este código exhibe un buen comportamiento al recrear perfiles de campo magnético con comportamientos y valores similares a los obtenidos en los dispositivos experimentales, esto bajo la consideración de frontera del plasma libre, es decir, el “*D-shape*” del plasma no se fija, este se ajusta de acuerdo a las condiciones de frontera, permitiendo determinar la topología de las líneas de campo magnético no sólo sobre la columna del plasma, también en la región exterior. El código desarrollado permite el ajuste de la corriente en el plasma y de parámetros como la presión en el eje magnético, observando que la condición de divergencia de campo magnético es aproximadamente nula, del orden de  $10^{-12}$ , respecto a los valores de campo magnético considerados en el sistema, del orden de la unidad, garantizando así, la consistencia física de las condiciones de equilibrio en las configuraciones estudiadas.

Partiendo de un código computacional desarrollado en trabajos previos, y modulado para esta investigación, también se resolvió la ecuación de Grad-Shafranov bajo la condición de frontera fija. Dicho código permite definir el “*D-shape*” a través de expresiones analíticas sobre el plano poloidal, logrando tener mayor control en los parámetros geométricos del plasma; tales como la triangularidad, elongación, radio mayor y menor. Sin embargo, en este código es imposible determinar el campo magnético en la región exterior de la columna. Con dicho código se estudió la dependencia de la posición del eje magnético en función del parámetro  $\beta_N$  del plasma, logrando identificar que el eje magnético tiende a desplazarse a lo largo del eje radial conforme aumenta el valor de  $\beta_N$ ; además, su corrimiento es mayor para plasmas con menor triangularidad. Este fenómeno conocido como corrimiento de Shafranov se puede entender como el fruto de

---

la acomodación del plasma contenido por la fuerza magnética, pues en la región más externa la columna aumenta el área superficial.

El estudio de la dinámica no lineal del plasma se realizó a partir de un código computacional que resuelve las ecuaciones MHD visco-resistivas, el cual fue desarrollado en esquemas de diferencias finitas y algoritmos de Runge-Kuta. Dicho código se validó con una prueba numérica estándar en 1D: el tubo de choque de Brio-Wu, junto con una segunda prueba en 3D sobre una geometría toroidal: la propagación de una onda expansiva para verificar la incorporación de las condiciones de frontera. En ambos casos, las simulaciones reproducen comportamientos esperados, es decir, según las soluciones analíticas y comportamientos típicos en las variables físicas que describen el plasma. En cuanto al estudio de la dinámica en dispositivos de confinamiento magnético tipo tokamak esférico, las simulaciones numéricas muestran que las perturbaciones introducidas crecen continuamente hasta adoptar una estructura modal tanto en el plano poloidal, plano  $rz$ , como en la coordenada toroidal  $\phi$ . Se encontró que, en la fase lineal de la dinámica del plasma, la perturbación adopta una estructura modal y se acomoda sobre una superficie resonante  $\psi_N = cte$ . En esta fase se excitan números toroidales y poloidales intermedios, dando paso a la propagación de las ondas de Alfvén, acústicas y magneto-acústicas, encargadas de estabilizar el plasma, y a su vez modos que, impulsados tanto por presión como corriente, lo desestabilizan.

Todas las simulaciones realizadas muestran que los modos impulsados por presión son la principal fuente de inestabilidad en el sistema y dichos modos tienden a ubicarse cerca del eje magnético si el perfil de presión es agudo en las cercanías de dicha región, desestabilizando así el núcleo del plasma. Las inestabilidades cerca de la frontera surgen cuando el perfil de presión de plasma es uniforme o aplanado cerca del eje magnético, pues la perturbación se ubica en las cercanías del borde exterior y crecen continuamente. Este fenómeno conduce al surgimiento de estructuras filamentadas que conllevan al colapso del sistema en los llamados modos de borde o ELMs; los cuales surgen con el inicio de la fase no lineal, aproximadamente en  $t \sim 55\tau_A$  ( $\sim 25\mu s$  en el presente caso) para  $c_1$ ; resultado que coincide con las simulaciones realizadas por R Khan y a su vez con observaciones experimentales.

Finalmente, las simulaciones muestran que sobre una configuración con triangularidad negativa los filamentos no se desarrollan de la misma forma que en los “*D-shapes*” convencionales; revelando así que estas configuraciones tienden en cierta medida a “controlar” o suprimir los modos de borde o de frontera, como lo sugieren recientes observaciones experimentales llevadas a cabo en el dispositivo DIII-D.

Es importante mencionar que el código desarrollado permite estudiar la formación de la estructura filamentada en la columna de plasma, más no su evolución, debido a las altas variaciones espaciales de la estructura modal en el plano poloidal: en las cercanías de  $r = R - a$ . Tales variaciones no pueden ser capturadas por el esquema de diferencias finitas, lo que genera que la divergencia de  $\mathbf{B}$  aumente considerablemente. Por tal motivo y con el ánimo de evitar resultados no físicos, las simulaciones se truncan cuando el valor de dicha divergencia coincide con el orden de error del método numérico. Esto

---

impone una limitante al código, pues para superar estos inconvenientes es necesario refinar la malla, lo cual implica un mayor coste computacional y, consecuentemente, mayor tiempo de ejecución de las simulaciones.

---

---

## REFERENCIAS

---

---

- [1] SJP Pamela, GTA Huijsmans, A Kirk, IT Chapman, JR Harrison, R Scannell, AJ Thornton, M Becoulet, F Orain, MAST Team, et al. Resistive mhd simulation of edge-localized-modes for double-null discharges in the mast device. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 55(9):095001, 2013.
- [2] John Hendry. *Cambridge physics in the thirties*. United Kingdom: Adam Hilger Ltd, 1984.
- [3] Edward Teller. *Fusion Part A: Magnetic Confinement*. Elsevier, 2012.
- [4] Alfredo Pironti and Michael Walker. Fusion, tokamaks, and plasma control: an introduction and tutorial. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(5):30–43, 2005.
- [5] Kenro Miyamoto. *Fundamentals of plasma physics and controlled fusion*. Iwanami Book Service Center, 1997.
- [6] Peter C Stangeby et al. *The plasma boundary of magnetic fusion devices*, volume 224. Institute of Physics Publishing Bristol, 2000.
- [7] VD Shafranov. On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Soviet Phys. JETP*, 6, 1958.
- [8] RS Myong and PL Roe. On godunov-type schemes for magnetohydrodynamics: 1. a model system. *Journal of Computational Physics*, 147(2):545–567, 1998.
- [9] AD Turnbull, MA Secrétan, F Troyon, S Semenzato, and R Gruber.  $\beta$  limits in h-mode-like discharges. *Journal of Computational Physics*, 66(2):391–410, 1986.
- [10] AD Turnbull and Francis Troyon. Toroidal effects on current driven modes in tokamaks. *Nuclear fusion*, 29(11):1887, 1989.
- [11] Howard Wilson. Edge localized modes in tokamaks. *Fusion Science and Technology*, 57(2T):174–182, 2010.
- [12] A Kirk, HR Wilson, GF Counsell, R Akers, E Arends, SC Cowley, J Dowling, B Lloyd, M Price, M Walsh, et al. Spatial and temporal structure of edge-localized modes. *Physical review letters*, 92(24):245002, 2004.

- 
- [13] XQ Xu, BD Dudson, PB Snyder, MV Umansky, HR Wilson, and T Casper. Non-linear elm simulations based on a nonideal peeling–ballooning model using the bout++ code. *Nuclear Fusion*, 51(10):103040, 2011.
- [14] Matthias Hoelzl, GTA Huijsmans, SJP Pamela, Marina Becoulet, Eric Nardon, Francisco Javier Artola, Boniface Nkonga, CV Atanasiu, Vinodh Bandaru, Ashish Bhole, et al. The jorek non-linear extended mhd code and applications to large-scale instabilities and their control in magnetically confined fusion plasmas. *Nuclear Fusion*, 61(6):065001, 2021.
- [15] Hinrich Lütjens and Jean-Francois Luciani. The xtor code for nonlinear 3d simulations of mhd instabilities in tokamak plasmas. *Journal of Computational Physics*, 227(14):6944–6966, 2008.
- [16] C.R. Sovinec, A.H. Glasser, T.A. Gianakon, D.C. Barnes, R.A. Nebel, S.E. Kruger, S.J. Plimpton, A. Tarditi, M.S. Chu, and the NIMROD Team. Nonlinear magnetohydrodynamics with high-order finite elements. *J. Comp. Phys.*, 195:355, 2004.
- [17] Archie A Harms, Donald R Kingdon, KF Schoepf, and George H Miley. *Principles of fusion energy: an introduction to fusion energy for students of science and engineering*. World Scientific Publishing Company, 2000.
- [18] Robert G Mills. Lawson criteria. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 18(4):205–207, 1971.
- [19] TJ Boyd, TJM Boyd, and JJ Sanderson. *The physics of plasmas*. Cambridge University Press, 2003.
- [20] Richard Fitzpatrick. *Plasma physics: an introduction*. Crc Press, 2014.
- [21] S Nakai and H Takabe. Principles of inertial confinement fusion-physics of implosion and the concept of inertial fusion energy. *Reports on progress in physics*, 59(9):1071, 1996.
- [22] Weston M Stacey. *Fusion: An introduction to the physics and technology of magnetic confinement fusion*. John Wiley & Sons, 2010.
- [23] MW Binderbauer and N Rostoker. Turbulent transport in magnetic confinement: how to avoid it. *Journal of plasma physics*, 56(3):451–465, 1996.
- [24] Andreas Dinklage, Thomas Klinger, Gerrit Marx, and Lutz Schweikhard. *Plasma physics: confinement, transport and collective effects*, volume 670. Springer Science & Business Media, 2005.
- [25] Jeffrey P Freidberg. *Ideal magnetohydrodynamics*. Plenum Press, New York, NY, 1987.
- [26] MG Haines. A review of the dense z-pinch. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(9):093001, 2011.

- 
- [27] Lyman Spitzer Jr. The stellarator concept. *The Physics of Fluids*, 1(4):253–264, 1958.
- [28] HAB Bodin and AA Newton. Reversed-field-pinch research. *Nuclear fusion*, 20(10):1255, 1980.
- [29] HAB Bodin. The reversed field pinch. *Nuclear Fusion*, 30(9):1717, 1990.
- [30] Thomas R Jarboe. Review of spheromak research. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 36(6):945, 1994.
- [31] Tomas Markovic. Measurement of magnetic fields on golem tokamak. *Diploma. Prague: Czech Technical University in Prague*, 2012.
- [32] Norbert Holtkamp et al. An overview of the iter project. *Fusion Engineering and Design*, 82(5-14):427–434, 2007.
- [33] James L Luxon. A design retrospective of the diii-d tokamak. *Nuclear Fusion*, 42(5):614, 2002.
- [34] A Sykes, RJ Akers, LC Appel, ER Arends, PG Carolan, NJ Conway, GF Counsell, G Cunningham, A Dnestrovskij, Yu N Dnestrovskij, et al. First results from mast. *Nuclear Fusion*, 41(10):1423, 2001.
- [35] Stefano Coda, J Ahn, R Albanese, S Alberti, E Alessi, S Allan, H Anand, G Anastassiou, Y Andrèbe, C Angioni, et al. Overview of the tcv tokamak program: scientific progress and facility upgrades. *Nuclear Fusion*, 57(10):102011, 2017.
- [36] PH Diamond, PL Similon, TC Hender, and BA Carreras. Kinetic theory of resistive ballooning modes. *The Physics of fluids*, 28(4):1116–1125, 1985.
- [37] RJ Hastie, TC Hender, BA Carreras, LA Charlton, and JA Holmes. Stability of ideal and resistive internal kink modes in toroidal geometry. *The Physics of fluids*, 30(6):1756–1766, 1987.
- [38] Jeffrey P Freidberg. *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge university press, 2008.
- [39] TC Hender, BA Carreras, WA Cooper, JA Holmes, PH Diamond, and PL Similon. The effects of compressibility of the resistive ballooning mode. *The Physics of fluids*, 27(6):1439–1448, 1984.
- [40] Ryosuke Sakai, Takaaki Fujita, and Atsushi Okamoto. Economy of tokamak neutron source for transmutation of transuranics. *Plasma and Fusion Research*, 14:1405040–1405040, 2019.
- [41] ET Cheng, YK Martin Peng, Ralph Cerbone, Paul Fogarty, John D Galambos, EA Mogahed, Brad Nelson, Massoud Simnad, Igor Sviatoslavsky, and Mark Tillack. Study of a spherical tokamak based volumetric neutron source. *Fusion Engineering and Design*, 38(3):219–255, 1998.

- 
- [42] TC Hender, GM Voss, and NP Taylor. Spherical tokamak volume neutron source. *Fusion engineering and design*, 45(3):265–279, 1999.
- [43] Eleuterio F Toro and Riemann Solvers. Numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction, 1999.
- [44] Stephen Jardin. *Computational methods in plasma physics*. CRC Press, 2010.
- [45] JE López, EA Orozco, and VD Dougar-Zhabon. Fixed boundary grad-shafranov solver using finite difference method in nonhomogeneous meshgrid. *Journal of Physics: Conference Series*, 1159(1):012017, 2019.
- [46] YR Lin-Liu and RD Stambaugh. Optimum equilibria for high performance, steady state tokamaks. *Nuclear fusion*, 44(4):548, 2004.
- [47] JE Menard, SC Jardin, SM Kaye, CE Kessel, and J Manickam. Ideal mhd stability limits of low aspect ratio tokamak plasmas. *Nuclear Fusion*, 37(5):595, 1997.
- [48] KHAN Riaz et al. *Simulation study on nonlinear dynamics of ballooning modes in a spherical tokamak*. PhD thesis, Department of Fusion Science, School of Physical Sciences The Graduate University for Advanced Studies, JAPAN, 2006 (School Year).
- [49] Naoki Mizuguchi, Riaz Khan, and Takaya Hayashi. Nonlinear simulation of edge-localized mode in spherical tokamak. *IEEJ Transactions on Fundamentals and Materials*, 125(11):934–937, 2005.
- [50] Johan P Goedbloed, Rony Keppens, and Stefaan Poedts. *Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge University Press, 2010.
- [51] Charles K Birdsall and A Bruce Langdon. *Plasma physics via computer simulation*. CRC press, 2004.
- [52] Allen H Boozer. Establishment of magnetic coordinates for a given magnetic field. Technical report, Princeton Univ., NJ (USA). Plasma Physics Lab., 1981.
- [53] William D D’haeseleer, William NG Hitchon, James D Callen, and J Leon Shohet. *Flux coordinates and magnetic field structure: a guide to a fundamental tool of plasma theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [54] L Wang, HY Guo, F Ding, YW Yu, QP Yuan, GS Xu, HQ Wang, L Zhang, R Ding, JC Xu, et al. Advances in plasma–wall interaction control for h-mode operation over 100 s with iter-like tungsten divertor on east. *Nuclear Fusion*, 59(8):086036, 2019.
- [55] Ulrich Samm. Plasma-wall interaction. *Fusion Science and Technology*, 49(2T):234–239, 2006.

- 
- [56] A Kirschner, V Philipps, J Winter, and U Kögler. Simulation of the plasma-wall interaction in a tokamak with the monte carlo code ero-textor. *Nuclear Fusion*, 40(5):989, 2000.
- [57] A Salvia. Método de las diferencias finitas en el dominio del tiempo (fdtd). *Métodos Numéricos para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales*, 2002.
- [58] Richard Courant, Kurt Friedrichs, and Hans Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234, 1967.
- [59] Joel H Ferziger, Milovan Perić, and Robert L Street. *Computational methods for fluid dynamics*, volume 3. Springer, 2002.
- [60] TC Tsai, H-S Yu, M-S Hsieh, SH Lai, and Y-H Yang. Implicit predictor–corrector central finite difference scheme for the equations of magnetohydrodynamic simulations. *Computer Physics Communications*, 196:1–12, 2015.
- [61] Tomoharu Hatori, Atsushi M Ito, Masanori Nunami, Hideyuki Usui, and Hideaki Miura. Level-by-level artificial viscosity and visualization for mhd simulation with adaptive mesh refinement. *Journal of Computational Physics*, 319:231–241, 2016.
- [62] Moysey Brio and Cheng Chin Wu. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of computational physics*, 75(2):400–422, 1988.
- [63] Guillermo Gonzalez Villegas Anamaria Navarro Noguera, Fbio Duvan Lora Cclavijo. *Propagación de ondas magnetohidrodinámicas en la atmósfera solar*. Recursos electrónicos, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física, 2020.
- [64] William Mitchinson Hicks. Ii. researches in vortex motion.—part iii. on spiral or gyrostatic vortex aggregates. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, .(192):33–99, 1899.
- [65] Young Mu Jeon. Development of a free-boundary tokamak equilibrium solver for advanced study of tokamak equilibria. *Journal of the Korean Physical Society*, 67(5):843–853, 2015.
- [66] Youjun Hu. Notes on tokamak equilibrium. *Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences*, 2015.
- [67] D Stork, H Meyer, RJ Akers, RJ Buttery, I Chapman, NJ Conway, S Cowley, G Cunningham, SR Davis, and AR Field. The upgrade to the mega amp spherical tokamak. Technical report, MAST Upgrade Team, 2010.
- [68] Max E Austin, A Marinoni, ML Walker, MW Brookman, JS DeGrassie, AW Hyatt, GR McKee, CC Petty, TL Rhodes, SP Smith, et al. Achievement of reactor-relevant performance in negative triangularity shape in the diiii-d tokamak. *Physical Review Letters*, 122(11):115001, 2019.

- 
- [69] Y Camenen, A Pochelon, R Behn, A Bottino, A Bortolon, S Coda, A Karpushov, O Sauter, G Zhuang, et al. Impact of plasma triangularity and collisionality on electron heat transport in tcv l-mode plasmas. *Nuclear fusion*, 47(7):510, 2007.
- [70] Jeffrey Freidberg Junhyuk Song, Hyojong Lee and Jungpyo Lee. Impact of the negative triangularity plasma shape on the n=0 resistive wall mode and vertical displacement event of tokamak. In *28th IAEA Fusion Energy Conference (FEC 2020)*, 2020.
- [71] Jungpyo Lee, Jeffrey Freidberg, Antoine Cerfon, and Martin Greenwald. An analytic scaling relation for the maximum tokamak elongation against n= 0 mhd resistive wall modes. *Nuclear Fusion*, 57(6):066051, 2017.
- [72] A Kirk, HR Wilson, R Akers, NJ Conway, GF Counsell, SC Cowley, J Dowling, B Dudson, A Field, F Lott, et al. Structure of elms in mast and the implications for energy deposition. *Plasma physics and controlled fusion*, 47(2):315, 2005.
- [73] JW Connor. Edge-localized modes-physics and theory. *Plasma physics and controlled fusion*, 40(5):531, 1998.
- [74] Hartmut Zohm. Edge localized modes (elms). *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 38(2):105, 1996.
- [75] BD Dudson, N Ben Ayed, A Kirk, HR Wilson, G Counsell, X Xu, M Umansky, PB Snyder, B LLoyd, et al. Experiments and simulation of edge turbulence and filaments in mast. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50(12):124012, 2008.

# ANEXOS

---

---

# DISCRETIZACIÓN ECUACIONES MHD

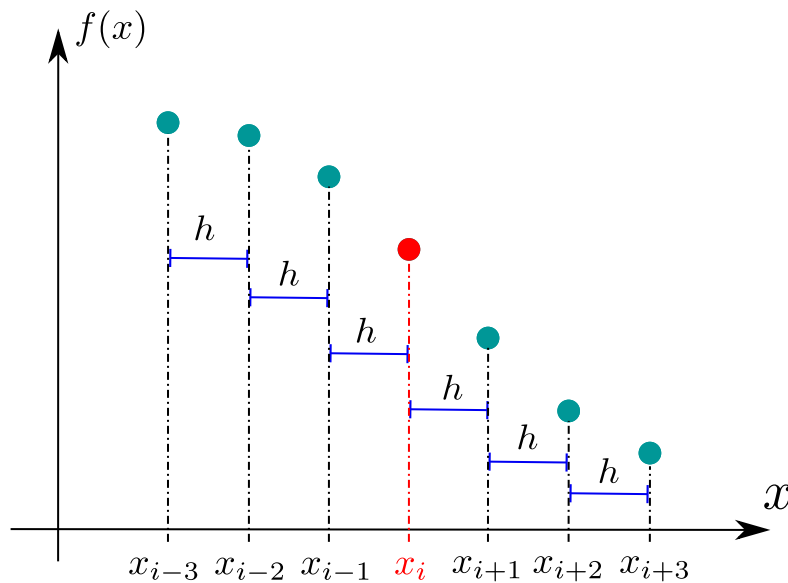
---

---

## A. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

Las diferencias finitas es un esquema numérico que se sustenta en la idea de aproximar las derivadas de una función en el espacio discreto a través de la evaluación de la función sobre los puntos de malla que típicamente, pero no necesariamente, son equidistantes, es decir, distan un paso finito  $h$  uno del otro. La figura 26 presenta la discretización para funciones de una variable, es decir, problemas unidimensionales.

**Figura 26:** Representación esquemática de la discretización: Los círculos representan el valor de la función en cada uno de los puntos de malla  $x_i$  separados uno del otro una distancia  $h$ . Estas mallas en las que la distancia entre puntos es fija se conocen como equidistantes o mallas homogéneas.



El método de diferencias finitas es uno de los métodos más conocidos en la solución numérica de ecuaciones diferenciales, pues es un método que posee varios niveles de aproximación y es de fácil implementación y su deducción puede presentarse formalmente a través de la expansión de la función  $f(x)$  en una serie de Taylor alrededor de un punto central  $x_i$ . Este esquema, aunque simple y ampliamente empleado tiene sus

limitantes, siendo las discontinuidades o altas variaciones en la función la más delicada. Para reducir el error debido a dichas variaciones altas se suelen emplear mallas muy finas, es decir, una gran cantidad de puntos, pero esto incrementa el coste computacional y en algunos casos aumentar el número de puntos no es suficiente o viable.

En este trabajo las derivadas espaciales son aproximadas bajo el esquema de diferencias finitas centradas de cuarto orden, así, la siguiente expresión define la aproximación para derivadas de primer orden:

$$\partial_x f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{12h_x} [-f(i+2) + 8f(i+1) - 8f(i-1) + f(i-2)] \quad (51)$$

donde  $i$  representa el índice de malla en la coordenada arbitraria  $x_i$  y  $h_x$  el paso de la malla homogénea, en este caso particular sobre el eje  $x$ . El error asociado en esta aproximación es del orden  $\epsilon \sim (h_x)^4$ . Es de resaltar que para el cálculo de la derivada según ec.(51) se requiere la información de la función en los 4 puntos más cercanos, dos hacia adelante ( $i+1$ ), ( $i+2$ ) y dos hacia atrás ( $i-1$ ) y ( $i-2$ ). Dicho esto, este nivel de aproximación no es aplicable a los puntos sobre la frontera, ni al punto siguiente, por lo tanto es adecuado aplicar para dichos puntos una aproximación de segundo orden. Sobre los puntos siguiente a la frontera se puede aplicar un esquema centrado:

$$\partial_x f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{2h_x} [f(i+1) - f(i-1)] \quad (52)$$

y para los puntos sobre la frontera computacional se aplica esquemas no centrados: de paso adelante (ec.53) para la frontera o límite inferior y paso atrás (ec.54) sobre la frontera o límite superior del intervalo de simulación:

$$\partial_x f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} \left[ -\frac{3}{2}f(i) + 2f(i+1) - \frac{1}{2}f(i+2) \right] \quad (53)$$

$$\partial_x f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} \left[ +\frac{3}{2}f(i) - 2f(i-1) + \frac{1}{2}f(i-2) \right] \quad (54)$$

Ahora, para la segunda derivada se tiene (i) diferencia finita centrada de cuarto orden:

$$\partial_{xx} f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{12h_x} [-f(i-2) + 16f(i-1) - 30f(i) + 16f(i+1) - f(i+2)] \quad (55)$$

(ii) diferencia finita centrada de segundo orden:

$$\partial_{xx} f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} [f(i-1) - 2f(i) + f(i+1)] \quad (56)$$

(iii) diferencia finita de segundo orden paso adelante:

$$\partial_{xx} f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} [2f(i) - 5f(i+1) + 4f(i+2) - f(i+3)] \quad (57)$$

y (iv) diferencia finita de segundo orden paso hacia atrás:

$$\partial_{xx} f|_{x=x_i} \approx \frac{1}{h_x} [-f(i) + 4f(i-1) - 5f(i-2) + 2f(i-3)] \quad (58)$$

En la tabla 7 se presentan los parámetros que definen la malla empelada en cada simulación.

**Tabla 7:** Detalles de la sección rectangular que define la región de simulación sobre el plano poloidal, ver fig.3, y los respectivos pasos de malla sobre las coordenadas  $r$  y  $z$ .  $R_o$  es representa el parámetro de normalización para las longitudes en cada una de las simulaciones.

config.	$r_{min}$ (m)	$r_{max}$ (m)	$h_r$ (m)	$z_{min}$ (m)	$z_{max}$ (m)	$h_z$ (m)	$R_o$ (m)
$c_1$	0.20	1.70	0.010	-1.80	1.80	0.014	0.90
$c_2$	0.10	1.50	0.009	-1.40	1.40	0.011	0.90
$c_3$	0.20	1.70	0.010	-1.80	1.80	0.014	0.90
$c_4$	0.20	1.60	0.009	-1.80	1.80	0.014	0.90
$c_5$	0.20	1.60	0.009	-1.80	1.80	0.014	0.90
$c_6$	1.60	6.60	0.026	-5.80	5.80	0.045	4.00
$c_7$	1.50	6.50	0.026	-5.80	5.80	0.045	4.00
$c_8$	0.25	1.75	0.010	-2.00	2.00	0.015	0.90
$c_9$	0.25	1.75	0.010	-2.00	2.00	0.015	0.90

## B. INTEGRADOR TEMPORAL

La evolución temporal queda determinada a través del método de Runge-Kutta de cuarto orden para mantener la consistencia con las derivadas espaciales. Este es un método que consiste en 4 pasos o niveles para determinar  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3$ ,  $\mathbf{k}_4$ . Si denotamos las variables de evolución  $(\rho, \mathbf{u}, p, \mathbf{B})$  por el vector  $\mathbf{Q}$ , y la parte derecha de cada ecuación por el vector  $\mathbf{R}$ , la evolución queda determinada por:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n)\Delta t \quad (59)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + 0,5\mathbf{k}_1)\Delta t \quad (60)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + 0,5\mathbf{k}_2)\Delta t \quad (61)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n + \mathbf{k}_3)\Delta t \quad (62)$$

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (63)$$

donde  $n$  presenta el índice temporal sobre el cual se está evaluando las variables y  $\Delta t$  el paso de temporal empleado en la simulación que como ya se presentó, obedece al criterio de Courant-Friedrichs-Levy, ver sección 3.3.