



ELABORACIÓN DE ÁBACOS DE DISEÑO PARA VIGAS EN HORMIGÓN ARMADO BASADOS EN CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL

JOAN SALOMON GALVIS APARICIO

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO - MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA
2012**

**ELABORACIÓN DE ÁBACOS DE DISEÑO PARA VIGAS EN HORMIGÓN
ARMADO BASADOS EN CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL**

JOAN SALOMON GALVIS APARICIO

**TRABAJO DE GRADO
Modalidad de investigación para optar al título de
Ingeniero Civil**

**Director de proyecto:
André Teófilo Beck
Ingeniero mecánico, Ph.D.**

**Codirector de proyecto:
OSCAR JAVIER BEGAMBRE CARRILLO
Ingeniero civil, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2011

DEDICATORIA

A dios por guiarme y cuidarme durante toda mi carrera, lo que me permitió cumplir con esta meta. A mis papas, Salomon Galvis y Samara Aparicio por enseñarme y aconsejarme en todo momento que lo necesite, además de los ánimos que me dieron cuando todo parecía no estar donde debería, de ahí que me dieran el mejor consejo de la vida: “No importa cuántas veces caigamos, sino las veces que nos podamos levantar”.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a dios porque nunca importo en qué situación estuviese, él siempre me acompaño y nunca me desamparo.

A mi orientador en Colombia, el profesor Oscar Javier Begambre, por sus consejos dados durante mi carrera y durante la elaboración de este trabajo.

A mi orientador en Brasil, el profesor André Teófilo Beck, por haberme orientado y ayudado en mi estadía en Brasil.

Al doctor Caio Gorla Nogueira, por la guía que me dio en el uso de su programa.

Agradezco a mis papas Salomon Galvis y Samara Aparicio, por enseñarme, instruirme y ayudarme siempre durante toda mi vida. Todo lo que soy, se lo debo a ellos.

A mis hermanos mayores Alex, Lilian, por sus palabras de ánimo cuando más lo necesitaba.

A mis tías Adherís y Virginia, por extenderme la mano siempre que lo necesite y aun cuando no.

A mi novia Yuly, por su comprensión y animo durante toda mi carrera

A mis abuelos que siempre me han apoyado, en especial a mi abuela Nubia, quien desde el cielo estuvo a mi lado siempre.

A mis amigos del pregrado, Mario, Eliza, Nicolás, Zaira, Caro, por sus voces de ánimo y por las interminables horas de trabajo y ñoñería.

A mi mejor amigo, siempre incondicional Jefferson, cuya voz de hermano siempre estuvo ahí en los momentos más difíciles.

A los profesores de pregrado de la escuela de ingeniería civil y del departamento de estructuras de la USP, por su dedicación y enseñanza durante mi formación como ingeniero.

CONTENIDO

Pág.

1. INTRODUCCIÓN	18
2. MARCO TEÓRICO	22
2.1. COMPORTAMIENTO MECÁNICO A FLEXIÓN DE VIGAS EN HORMIGON ARMADO.....	22
2.1.1. Generalidades.....	22
2.1.2. Propiedades Mecánicas del Concreto Reforzado	22
2.1.3. Modelo Mecánico para una Viga en Concreto Armado Sometida a Flexión 29	
2.2. CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL	34
2.2.1. Incertezas en Estructuras.....	34
2.2.2. Riesgo	36
2.2.3. Variables Aleatorias (VA)	38
2.2.4. Estados Límites.....	42
2.2.5. Probabilidad de Falla.....	44
2.2.6. Índice de Confiabilidad	47
2.3. DISEÑO ÓPTIMO BASADA EN CONFIABILIDAD (RBDO – Reliability-Based Design Optimization)	48
2.3.1. Análisis de Confiabilidad en el Diseño de un Elemento Estructural. ..	48
2.3.2. Formulación RBDO para un Elemento Estructural.	50

2.3.3. Formulación RBDO-SF (Reliability-Based Design Optimization – Safety Factor).....	51
3. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA PARA EL RBDO – SF	53
3.1. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE CONFIABILIDAD.....	53
3.1.1. VARIABLES ALEATORIAS – PARÁMETROS Y DISTRIBUCIONES. 53	
3.1.2. ECUACIÓN DE ESTADO LÍMITE ÚLTIMO.....	57
3.2. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	59
3.2.1. FUNCIÓN OBJETIVO – COSTO.....	61
3.2.2. RESTRICCIONES PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN	61
4. DISEÑO POR RESISTENCIA ÚLTIMA Y LÍMITES DE DISEÑO PARA FLEXIÓN – ACI 318 CAPITULO 10.....	63
5. CONSTANTES DE DISEÑO Y COSTO DE MATERIALES.	68
5.1. CONSTANTES DE DISEÑO	68
5.1.1. Ancho (B) y Recubrimiento	68
5.1.2. Costos de los Materiales (C)	68
6. RESULTADOS.....	69
6.1. RESUMEN DISTRIBUCIONES Y PARÁMETROS PARA LAS VA.	69
6.2. FORMULACIONES Y EJEMPLO DE APLICACIÓN.	69
6.2.1. Ejemplo	70
7. CONCLUSIONES	83
8. OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES.....	85
BIBLIOGRAFÍA.....	87
ANEXOS.....	90

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Curvas esfuerzo – deformación unitaria a la compresión	24
Figura 2. Curvas típicas esfuerzo – deformación unitaria para barras de refuerzo	28
Figura 3. Estado I – Esfuerzos elásticos y sección no fisurada.....	30
Figura 4. Estado II – Esfuerzos elásticos y sección fisurada	32
Figura 5. Estado III – Esfuerzos resistencia ultima	34
Figura 6. Matriz de riesgo	38
Figura 7. Funciones de distribución de Probabilidades de variables aleatorias	40
Figura 8. Ecuacion de estado limite y dominos	44
Figura 9. Interpretacion geometrica de probabilidad de falla	46
Figura 10. Interpretación geométrica del índice de confiabilidad y punto de diseño.	48
Figura 11. Tipos de falla en una sección de concreto armado.....	65
Figura 12. Deformación en el acero mínima – cuantía máxima.....	66
Figura 13. Ejemplo viga continua.....	70
Figura 14. Momentos debidos a la carga muerta.....	71

Figura 15. Momentos debidos a la carga viva.....71

Figura 16. Abaco relacion de carga 0.3..73

Figura 17. Abaco relacion de carga 0.5.75

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Rangos aproximados de resistencia a la tensión	26
Tabla 2. Gravedad del evento.	37
Tabla 3. Probabilidad de ocurrencia del evento.....	37
Tabla 4. Tipos de estado limite.....	43
Tabla 5. Índice de confiabilidad objetivos β para estados limites últimos.....	50
Tabla 6. Resumen distribuciones y parámetros para las VA	69
Tabla 7. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{Tk} = 10000$ kN.cm	77
Tabla 8. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{Tk} = 10000$ kN.cm	77
Tabla 9. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{Tk} = 12500$ kN.cm	78
Tabla 10. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{Tk} = 12500$ kN.cm	78
Tabla 11. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{Tk} = 3130$ kN.cm	79
Tabla 12. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{Tk} = 3130$ kN.cm	79
Tabla 13. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 10000$ kN.cm	80
Tabla 14. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 12500$ kN.cm	80
Tabla 15. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 3.130$ kN.cm	80

Tabla 16. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{Tk} = 10.000 \text{ kN.cm}$ 81

Tabla 17. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{Tk} = 12.500 \text{ kN.cm}$ 81

Tabla 18. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{Tk} = 3.130 \text{ kN.cm}$ 81

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A – Modelo de optimización determinista del costo.	90
ANEXO B – Diagrama de flujo para el modelo RBDO para elementos.	93
ANEXO C – Diagrama de flujo para el modelo RBDO – SF para elementos. ...	94

NOMENCLATURA

ACI:	American Concrete Institute.
As:	Área de Acero.
B:	Ancho de la viga.
C.O.V.:	Coeficiente de variación.
d:	Altura efectiva de la viga.
DF:	Dominio de falla.
DS:	Dominio de supervivencia.
$E(X)$:	Valor esperado de una variable aleatoria.
Es:	Modulo de Elasticidad del acero.
Ec:	Modulo de Elasticidad del concreto.
f_c :	Esfuerzos de compresión en el concreto VA.
f_{ck} :	Resistencia característica o nominal del concreto a compresión.
f_{cd} :	Resistencia de diseño del concreto a compresión.
f'_{ct} :	Resistencia a la tensión en el concreto indirecta.
f_{ct} :	Esfuerzos a tensión en el concreto.
f_r :	Modulo de rotura.
f_s :	Esfuerzos a tensión en el acero VA.
f'_t :	Resistencia a la tensión en el concreto directa.
$f(d)$:	Función de las variables de diseño.
$f_X(x)$:	Función de densidad de probabilidades.
f_{yk} :	Resistencia característica o nominal del acero a tensión.
f_{yd} :	Resistencia de diseño del acero a tensión.
$F_X(x)$:	Función de distribución acumulada de probabilidades.
FORM:	First Order Reliability Method.
FOSM:	First Order Second Moment.
$g(X, d)$:	Ecuación de estado limite, función de VA y de variables de diseño.
H:	Altura de la viga.
JCCS:	Joint Committee on Structural Safety.
M_{CR} :	Momento crítico de rotura.
M_D :	Momento debido a la carga muerta VA.
M_{Dd} :	Momento debido a la carga muerta de diseño.
M_{DK} :	Momento característico o nominal debido a la carga muerta.
M_L :	Momento debido a la carga viva VA.
M_{Ld} :	Momento debido a la carga viva de diseño.
M_{Lk} :	Momento característico o nominal debido a la carga viva.
$P[X \leq x]$:	Probabilidad acumulada que X sea menor que la realización x .
RBDO:	Reliability-Based Design Optimization.
$R(t)$:	Resistencia dependiente del tiempo.
$S(t)$:	Solicitaciones dependientes del tiempo.

SF:	Safety Factor.
SORM:	Second Order Reliability Method.
$Var(X)$:	Varianza.
VA:	Variable Aleatoria.
X :	Representación de una variable aleatoria.
x :	Realización de una Variable Aleatoria.
y^* :	Punto del proyecto.
Ω :	Espacio muestral.
μ :	Media.
σ :	Desviación estándar.
λ :	Factor parcial.
β :	Índice de confiabilidad.
β_0 :	Índice de confiabilidad objetivo.
β_1 :	Factor que depende de la resistencia del concreto.
β_x :	Factor que relaciona la posición de la línea neutra.
κ :	Factor que relaciona el costo de construcción + costo de falla, sobre el costo de construcción.
ε_s :	Deformación unitaria del acero a tensión.
ε_c :	Deformación unitaria del concreto a compresión.
ρ :	Cuantía de acero por área de concreto $A_s/B*d$.
n :	Relación entre el E_s y E_c .
ψ_D :	Relación de carga entre M_{Dk} y M_{Lk} .
ψ_L :	Relación de carga entre M_{Lk} y $M_{Dk} + M_{Lk}$.

Las letras en negrita, para X , x representan un conjunto de variables aleatorias y realizaciones respectivamente.

RESUMEN

TITULO: ELABORACIÓN DE ÁBACOS DE DISEÑO PARA VIGAS EN HORMIGÓN ARMADO BASADOS EN CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL*

AUTOR: JOAN SALOMON GALVIS APARICIO**

PALABRAS CLAVES: Confiabilidad, Seguridad Estructural, Optimización, Coeficientes de Seguridad, RBDO, Ábacos, Estados Límites.

DESCRIPCIÓN:

La elaboración de ábacos por medio de optimización basada en confiabilidad mediante el empleo de coeficientes de seguridad parciales (RBDO – SF), fue desarrollada para la sección transversal con mayor momento de una viga de concreto reforzado, en el programa de Nogueira (2010) en el lenguaje de programación COMPAQ Visual FORTRAN versión 6.6 de Microsoft. Los ábacos se establecieron con el fin de ser una herramienta de diseño.

La optimización fue realizada con base al costo de la sección transversal por metro lineal (\$/m), para la cual, las dos variables de diseño a optimizar fueron el área de acero y la altura efectiva. La optimización se efectuó teniendo en cuenta las restricciones impuestas por el código ACI – 318. Para el análisis de confiabilidad, las variables aleatorias que se establecieron fueron la resistencia del concreto, resistencia del acero, el momento debido a la carga muerta y a la carga viva. Los parámetros estadísticos y las funciones de distribución de probabilidades para las resistencias fueron obtenidas de Nowak (2003), y para las solicitaciones de Ellingwood et al (1996).

Estos ábacos de diseño proporcionan una configuración más económica que la obtenida por medio de los coeficientes de seguridad establecida por el código ACI – 318, para un índice de confiabilidad similar. Esta elaboración de los ábacos sirve como una metodología ya que estos dependen del precio de los materiales, de las resistencias y de los momentos, aunque la diferencia con respecto al código ACI – 318 no varía.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ingenierías Físico mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: André Teófilo Beck ingeniero mecánico, Ph.D. Co-director: Oscar Javier Begambre Carrillo ingeniero civil, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: ELABORATION OF DESIGN ABACUSES FOR REINFORCED CONCRETE BEAMS BASED IN STRUCTURAL RELIABILITY*

AUTHOR: JOAN SALOMON GALVIS APARICIO**

KEY WORDS: Reliability, Structural Safety, Optimization, Safety Factors, RBDO, Abacuses, Limit States.

DESCRIPTION:

The elaboration of design abacuses through of reliability – based design optimization by means of employs the partial safety factors (RBDO – SF), was development to the cross section with highest bending moment of a reinforced concrete beam, on the program of Nogueira (2010), in the Microsoft programming software Compaq Visual FORTRAN version 6.6. These abacuses were established like a design tool.

The optimization was made based on the cost of the cross section per linear meter (\$/m), for which, the two design variables for optimization were the reinforced steel area (A_s) and the effective depth (d). The optimization was made for the restrictions imposed by the code ACI – 318. For the reliability analysis, the random variables were the concrete strength, steel strength, and the bending moment due to the dead load and live load. The statistics parameters and the probabilities distributions for the concrete and steel strengths were obtained from Nowak (2003), and for the bending moments were adopted from Ellingwood et al. (1996).

These design abacuses provide a cheaper configuration than the obtained from the code ACI 318, for a similar reliability index. This elaboration of design's abacuses will serve like a methodology, since these depend of the material prices, strengths and the other configurations, although, the different with the code ACI 318 is the same.

* Work Degree

** Faculty of Physical – Mechanical. Civil Engineering School. Director: André Teófilo Beck, mechanical engineer, Ph.D. Co-Director: Oscar Javier Begambre Carrillo, civil engineer, Ph.D.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño y construcción de obras civiles, siempre se han de tomar decisiones que enmarquen la seguridad de un proyecto. Estas decisiones son tomadas en base a experiencias, normas de construcción y de diseño, que permiten ejecutar estas obras basados en unos coeficientes de seguridad, aunque el diseñador y constructor no tengan una estimativa de cuan segura es o cual es el riesgo que esta falle.

El trabajo de un ingeniero es siempre tomar decisiones que busquen una solución a un problema determinado, la cual permita aparte de cumplir con los requisitos básicos de una estructura, que son, los requisitos de servicio, seguridad y robustez, obtener un menor costo, pero también sabiendo y/o controlando el nivel de riesgo que representa para el público o usuario que desee utilizarlo.

Para que el diseñador y/o proyectista pueda realizar este análisis de una forma cuantitativa, se ha desarrollado desde el siglo pasado, un tipo de análisis que recibe el nombre de confiabilidad estructural, el cual, en base a requerimientos o ecuaciones de estado limite, permite calcular la probabilidad de falla de un elemento o sistema específico, conforme a un valor llamado índice de confiabilidad, que es usualmente denotado con la letra griega β . Las ecuaciones de estado límite $g(\mathbf{X})$, son desigualdades que representan los posibles modos de falla que puede tener un elemento o sistema estructural, en función de un vector de variables aleatorias \mathbf{X} , que para este caso son los valores de las resistencias del concreto y acero, también son variables aleatorias para este problema las acciones o cargas muertas y vivas, además de unas variables discretas o parámetros de diseño. En el problema fundamental de confiabilidad esta ecuación es escrita de la siguiente forma: $g(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \mathbf{R} - \mathbf{S}$, donde \mathbf{R} representa la resistencia y \mathbf{S} la sollicitación. Cuando estas ecuaciones presentan un resultado

negativo para ciertos valores de las variables aleatorias X , se dice que estos resultados corresponden al dominio de falla del elemento o sistema. Caso contrario sería si esta tuviese un valor positivo, en tal situación, estos resultados corresponden al dominio o región de seguridad. En la confiabilidad estructural se centra la atención en todos los puntos o valores de las variables aleatorias que lleven a un dominio de falla.

La probabilidad de falla se calcula en función del dominio de falla y en una distribución conjunta de probabilidades, la cual depende de las estadísticas y distribuciones de las variables aleatorias. Estas son transformadas por diferentes métodos (FOSM, FORM, SORM), que se encargan de convertir las variables aleatorias X con cualquier distribución a unas variables aleatorias Y con distribución normal estándar. Una vez las variables son transformadas, se evalúa la probabilidad de falla, o si el problema resulta muy complejo, la evaluación también puede ser realizada mediante uso de Simulación Montecarlo. Estos métodos de transformación se hacen con el fin de construir la función conjunta de probabilidades $f_X(x)$, y el dominio de la integración pues en la práctica no se tienen observaciones que permitan directamente determinarla.

En el mejor conocimiento del autor, no se han reportado trabajos en la literatura que traten de la construcción de ábacos de diseño basados en confiabilidad. De ahí que este trabajo represente un aporte científico que permitirá a un diseñador obtener la altura y área de acero óptima de una viga, teniendo en cuenta un índice de confiabilidad para una relación de carga, asociado también con unas determinadas resistencias.

Es el objetivo de este trabajo crear estos ábacos de diseño basados en confiabilidad aplicando el método RBDO – SF (Reliability-Based Design

Optimization – Safety Factor) para facilitar y ahorrar tiempo de cálculo en el diseño de vigas de hormigón armado teniendo en cuenta su probabilidad de falla.

Para llegar al cumplimiento de este objetivo, se presentan los siguientes objetivos específicos:

- Encontrar los parámetros estadísticos pertinentes de las variables aleatorias para el problema de confiabilidad como lo son la media, coeficiente de variación, y posible covarianza entre las mismas, además de las distribuciones de cada una de ellas.
- Determinar las configuraciones relevantes (combinaciones de los parámetros del problema) que afecten la confiabilidad de una viga de hormigón armado.
- Construir los ábacos de diseño con las diferentes configuraciones establecidas para el problema.

Con el desarrollo de este trabajo se busca incentivar el estudio y la investigación para otros casos de diseño, promoviendo de esta forma el conocimiento en confiabilidad estructural para la implementación de estos ábacos en el diseño de estructural en nuestro país.

El presente trabajo está compuesto por ocho capítulos. En los dos primeros capítulos se presentan la introducción y los conceptos básicos sobre el comportamiento mecánico de una viga sometida a flexión, así como lo concerniente al tema de confiabilidad estructural y optimización mediante el uso de la misma, siendo esta teoría pertinente para el desarrollo de estos ábacos de diseño. En el siguiente capítulo se construye el problema para el RBDO – SF, generando en este las variables aleatorias con sus respectivos parámetros y distribuciones, las ecuaciones del estado límite, así como la función objetivo para la optimización y sus respectivas restricciones. En el siguiente capítulo se

establecen los requisitos definidos por el código ACI 318. En el capítulo quinto se constituyen las constantes para el problema que son el ancho y costo de los materiales que son eje fundamental del análisis de la confiabilidad. Todos estos datos son ingresados y usados en el programa desarrollado por el estudiante de pos doctorado Nogueira (2010), apto para este tipo de problemas. En el sexto capítulo son presentados las formulaciones y los respectivos resultados de las diferentes configuraciones realizadas en este trabajo. En el capítulo séptimo se presentan las conclusiones y para finalizar en el último capítulo, las recomendaciones y observaciones que sean pertinentes. Además de la respectiva bibliografía usada y anexos.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. COMPORTAMIENTO MECÁNICO A FLEXIÓN DE VIGAS EN HORMIGON ARMADO

2.1.1. Generalidades

El hormigón es un material que tiene un comportamiento y manejo característico que lo hace muy fácil de usar en las construcciones civiles, además que, para la construcción de elementos estructurales no requiere de mano de obra calificada en comparación a las estructuras metálicas. Los atractivos que tiene este material, es su resistencia a la compresión, al fuego y su capacidad de tomar cualquier forma que se le imponga por medio de formaletas. Su resistencia a la compresión es alta, lo que lo hace apropiado para elementos sometidos principalmente a compresión. Pero también tiene una debilidad que puede hacer que su uso sea antieconómico en una estructura, si se usa para ese fin, y es, su baja resistencia a la tensión. Para contrarrestar esta falencia, se usan barras de acero, que se disponen en las zonas donde la sección va a estar sometida a tracción, combinando así las ventajas de cada uno. Al material que resulta de esta combinación entre el concreto y el acero, se le conoce como hormigón o *concreto reforzado* (Nilson, 2001).

2.1.2. Propiedades Mecánicas del Concreto Reforzado

Fundamentos para el Comportamiento del Concreto Reforzado

Para poder realizar un análisis de una sección en concreto armado, la mecánica estructural ha establecido las siguientes premisas que permiten con buen grado de precisión analizar el comportamiento mecánico de ambos materiales como un conjunto, basándose en varias investigaciones experimentales (Nilson, 2001):

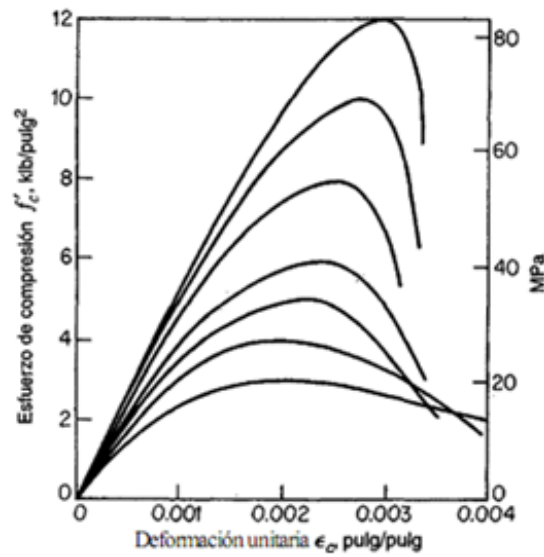
- Las fuerzas internas, tales como momentos flectores, fuerzas de corte y esfuerzos normales y cortantes en una sección cualquiera de un elemento, están en equilibrio con los efectos de las cargas externas en esta sección.
- La deformación unitaria en una barra de refuerzo embebida (a tensión o a compresión) es la misma que la del concreto circundante.
- Las secciones transversales planas antes de la aplicación de la carga siguen siendo planas para el elemento cargado.
- Debido a que la resistencia a la tensión del concreto es tan sólo una pequeña fracción de su resistencia a la compresión, el concreto en aquella parte del elemento sometido a tensión estará usualmente fisurado. Debido a esto, se supone en general que el concreto no es capaz de resistir ningún esfuerzo de tensión.
- La teoría se basa en las relaciones esfuerzo-deformación reales y en las propiedades de resistencia de los dos materiales constituyentes o en alguna simplificación razonable relacionada.

Resistencia a la Compresión del Concreto

La resistencia a la compresión del concreto es la propiedad mecánica quizás más importante o que incide en su utilización en las obras civiles. Esta se obtiene mediante ensayos de probetas cilíndricas a los 28 días de edad y con una velocidad de carga especificada, este ensayo debe realizarse cumpliendo con lo estipulado en el numeral 5.6.3 del código ACI 318. Como las condiciones de los laboratorios son usualmente diferentes a las condiciones de obra el ACI 318 en su numeral 5.3 establece que las resistencias medidas, para una mezcla de concreto, deben exceder las especificadas a los 28 días (McCormac, 2002).

La **Figura 1** muestra un conjunto típico de curvas de esfuerzo – deformación para un concreto de densidad normal y de 28 días, obtenidas a partir de ensayos de compresión uniaxial realizado con velocidades de carga normal y modelada.

Figura 1. Curvas esfuerzo – deformación unitaria a la compresión



Fuente: (Nilson, 2001)

La **Figura 1** muestra algunas tendencias que a continuación resaltaremos (Nilson, 2001; McCormac, 2002):

- Las curvas son aproximadamente rectas mientras la carga crece de cero a un valor entre 1/3 y 1/2 de la resistencia última del concreto. Más allá del intervalo anteriormente mencionado, el comportamiento del concreto no es lineal.
- Cabe notar que los concretos sin importar su resistencia, alcanzan su resistencia última bajo deformaciones unitarias de aproximadamente entre 0.002 y 0.003.

- El concreto no posee una resistencia a la fluencia definida, más bien, las curvas se comportan suavemente hasta sus puntos de ruptura bajo deformaciones unitarias entre 0.003 y 0.004. En el numeral 10.2.3 del código ACI se establece que la máxima deformación utilizable en la fibra extrema sometida a compresión del concreto se supone igual a 0.003.
- También por estas graficas se puede observar que los concretos de baja resistencia son menos frágiles que los de alta resistencia, o sea, mostrarán mayores deformaciones unitarias antes de romperse.

Resistencia a la Tensión del Concreto

A pesar de que el concreto posee una gran resistencia a la compresión, una de sus falencias es, la resistencia a la tensión. La razón principal para esta baja resistencia, se debe a que el concreto contiene un gran número de grietas muy finas, que en el caso de la compresión no se ve afectado por que esta hace que las pequeñas grietas se unan, aunque no acontece lo mismo a tensión, la cual provoca que se separen más. Debido a esto, y a pesar que se desprecia en diseño por resistencia ultima, esta es una importante propiedad que afecta el tamaño y la extensión de las grietas que se presentan (McCormac, 2002).

El valor de la resistencia a tensión es muy difícil de medir mediante una prueba directa bajo cargas axiales debido al problema de agarre en los especímenes de prueba que da lugar a concentraciones de esfuerzos y debido también a la dificultad de alinear las cargas. Por lo tanto, se han desarrollado dos pruebas de cierta forma indirectas para medir la resistencia a tensión del concreto. Estas son la prueba del módulo de ruptura y la prueba radial del cilindro (McCormac, 2002). La resistencia a la tensión determinada con cualquiera de estos dos ensayos no presenta una correlación con la resistencia a la compresión f_{ck} , pero si con su raíz cuadrada y con el tipo de agregados que o constituyen. En la **Tabla 1.**, se

resumen rangos de valores típicos para la resistencias determinadas a partir de ensayos de tensión indirecta y a partir del módulo de rotura.

Tabla 1. Rangos aproximados de resistencia a la tensión

	Concreto de peso normal (lb/pulg ²)	Concreto de peso liviano (lb/pulg ²)
Resistencia a la tensión directa $f't$	3 a 5 \overline{fck}	2 a 3 \overline{fck}
Resistencia a la tensión indirecta $f'ct$	6 a 8 \overline{fck}	4 a 6 \overline{fck}
Módulo de rotura f_r	8 a 12 \overline{fck}	6 a 8 \overline{fck}

Fuente: (Nilson, 2001).

Sumada a esta tendencia, el código ACI en su numeral 9.5.2.3 establece el siguiente valor para el módulo de rotura en el análisis del momento crítico (M_{CR}) de agrietamiento. Este valor es $7.5\gamma \overline{fck}$ (fck en psi) o $0.62\gamma \overline{fck}$ (fck en MPa) para un concreto de peso normal, donde γ es un factor de modificación que tiene en cuenta las propiedades reducidas del concreto liviano.

Propiedades del Acero de Refuerzo

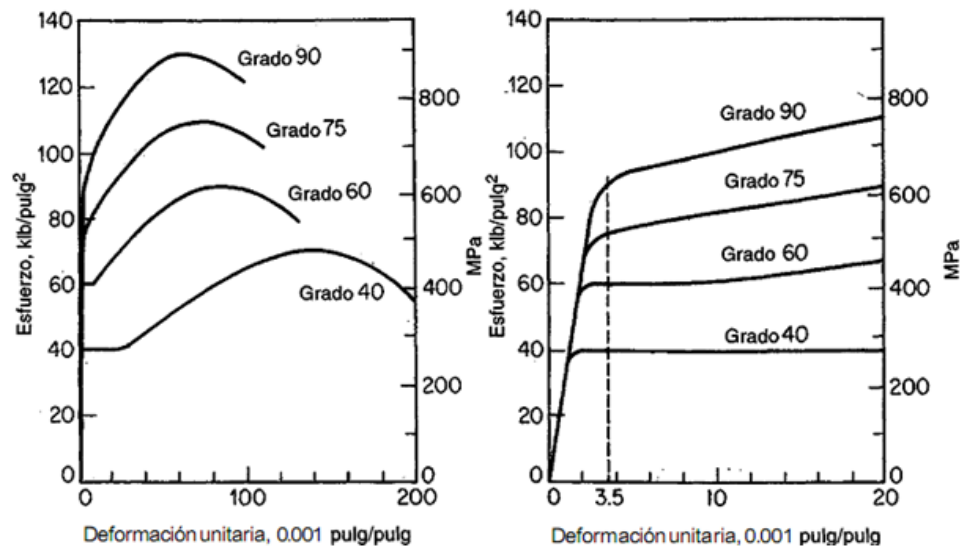
El acero es quizá el mejor material que un ingeniero puede usar mecánicamente hablando, ya que este proporciona una alta resistencia, adicionando poco peso a la estructura. Entre sus propiedades mecánicas esta que posee una resistencia a la fluencia de más o menos quince veces la resistencia a la compresión del concreto estructural común y más de 100 veces su resistencia a la tensión (Nilson, 2001). El inconveniente que presenta este material es su costo, que es más elevado, tanto en el material, como en la mano de obra que se debe disponer.

Debido a la notoria diferencia entre las resistencias a la tensión que poseen ambos materiales, y que en comparación con la resistencia a la compresión no es mucha, se puede aprovechar mejor la combinación de estos dos materiales en donde la resistencia a compresión de un elemento sea proporcionada por el concreto y la resistencia a tensión por el acero. De esta manera, en vigas de concreto reforzado, el concreto resiste la fuerza de compresión, las barras de acero de refuerzo longitudinal colocadas cerca a la cara de tensión resisten las fuerzas de tensión y unas barras de acero adicionales resisten los esfuerzos de tensión inclinados causados por las fuerzas cortantes en las vigas, además de esto, en algunas ocasiones, se puede disponer de barras de acero para resistir fuerzas de compresión con el fin de reducir la sección transversal del elemento a compresión, como es el caso de las columnas. Otras características adicionales que llevan a un comportamiento en conjunto satisfactorio entre el concreto y acero son las siguientes (Nilson, 2001):

- Los coeficientes de expansión térmica entre los dos materiales, están suficientemente cerca para no producir agrietamiento y otros efectos no deseables debidos a las deformaciones térmicas diferenciales.
- En tanto que la resistencia a la corrosión del acero descubierto es pobre, el concreto que rodea el acero de refuerzo le provee una excelente protección.
- La resistencia al fuego del acero desprotegido se ve empeorada por su alta conductividad térmica y por el hecho de que su resistencia disminuya considerablemente a altas temperaturas. Por el contrario, la conductividad térmica del concreto es relativamente baja. De esta manera, los daños producidos por una exposición prolongada al fuego, si es que se presentan, están generalmente limitados a la superficie exterior del concreto y una moderada cantidad de recubrimiento de concreto proporciona suficiente aislamiento térmico al refuerzo embebido.

El tipo más común de acero de refuerzo viene en forma de barras circulares corrugadas. Estos realces en las barras aumentan la resistencia al deslizamiento entre el acero y concreto, provocando un mejor comportamiento conjunto entre los dos materiales. En el numeral 3.5.3 del código ACI 318 se establecen los requisitos mínimos para su uso, referenciando las disposiciones de la *American Society for Testing and Materials (ASTM)*. Este se define por medio del grado, que es la resistencia mínima a la fluencia que este tiene, por ejemplo, un acero de grado 40 tiene una resistencia mínima a la fluencia de 40.000 ksi. En la **Figura 2.**, se presentan las curvas típicas de los aceros de refuerzo.

Figura 2. Curvas típicas esfuerzo – deformación unitaria para barras de refuerzo



Fuente: (Nilson, 2001)

Así como para las barras corrugadas, existen demás disposiciones en el código ACI 318 y en las respectivas normas ASTM para los demás tipos de refuerzo como lo es para el caso de refuerzos revestidos, liso, refuerzo de preesfuerzo, etc., que permiten y/o ayudan a que estos materiales sean usados de la forma correcta.

2.1.3. Modelo Mecánico para una Viga en Concreto Armado Sometida a Flexión

Como se describió anteriormente, el concreto tiene una deficiencia en resistir tensión, por lo tanto, una viga hecha con solo ese material, tendría problemas en resistir los esfuerzos de tensión provocados por la flexión, y la esta fallaría mucho antes de que las fibras a compresión alcancen su límite de resistencia, por lo tanto el material no se le estaría dando el aprovechamiento adecuado. Para esto se disponen de barras de acero en la zona de la sección de la viga donde existan esfuerzos de tensión debidas a la flexión, aunque en algunas ocasiones se disponen en las zonas de compresión con el fin de proporcionar mayor resistencia.

El comportamiento mecánico de una viga de concreto armado depende del comportamiento elástico e inelástico de los materiales, que a su vez, depende de la magnitud de las cargas a las cuales están sometidos. Así, cuando la carga en dicha viga se incrementa de modo gradual desde cero hasta la magnitud que producirá su falla, claramente pueden distinguirse diferentes estados en su comportamiento (Nilson, 2001).

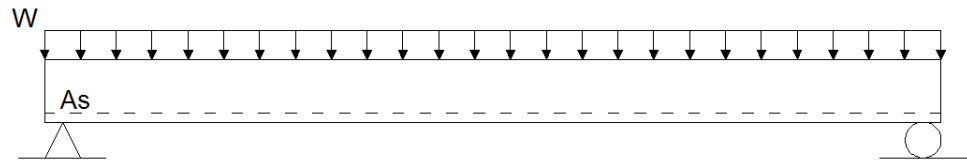
Estados del Concreto a Flexión

- Estado I – Esfuerzos Elásticos y Sección no Fisurada

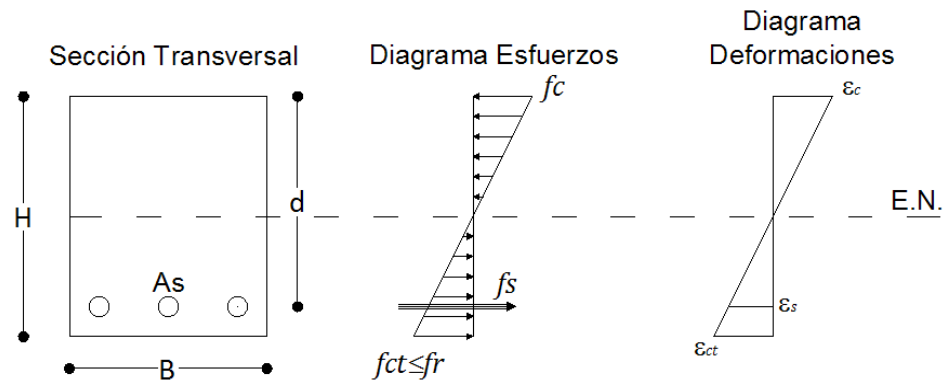
Bajo la acción de cargas pequeñas en una viga, y mientras el esfuerzo de tensión en el concreto se mantenga por debajo del módulo de rotura f_r , de manera que no se desarrollen grietas (**Figura 3. (a)**), la distribución de deformaciones y esfuerzos (**Figura 3. (b)**), son casi iguales a los de una viga elástica y homogénea (Nilson, 2001). La diferencia con una viga homogénea es que esta está compuesta por dos materiales (acero y concreto), por ello se debe hacer una transformación de la sección por una que sea equivalente y de solo

concreto (**Figura 3. (c)**), con el fin de calcular las propiedades de la sección como lo son el eje neutro, momento de inercia, etc.

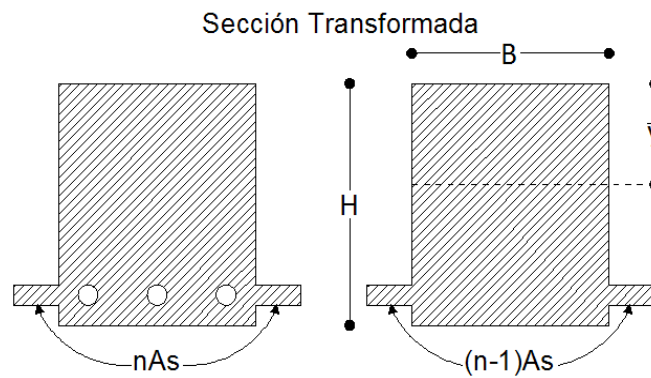
Figura 3. Estado I – Esfuerzos elásticos y sección no fisurada



(a)



(b)



(c)

Fuente: (El autor)

La razón de estudio de este estado se debe a que cuando los esfuerzos a tensión en el concreto alcanzan el módulo de rotura f_r , este empieza a fisurarse. El valor del módulo de rotura corresponde a $0.62\gamma \overline{f_{ck}}$. Así, con las propiedades de la sección transformada y el módulo de rotura se calcula el momento para el cual el concreto se agrietaría bajo cargas de servicio, el cual es:

$$M_{CR} = f_r * I_g / (H - y) \quad (\text{Ec. 2.1})$$

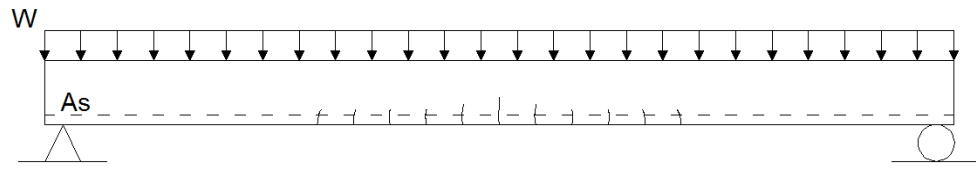
- Estado II – Esfuerzos Elásticos y Sección Fisurada

Al incrementarse la carga después de que los esfuerzos a tensión en las fibras del concreto alcanzaron el módulo de rotura, la viga empieza a fisurarse en la parte inferior de la misma (**Figura 4. (a)**), y debido a esto, las grietas se extienden rápidamente hacia el eje neutro, el cual empieza a desplazarse hacia arriba (**Figura 4. (b)**) (McCormac, 2002). Estas grietas solo se presentaran en los puntos del diagrama de momentos donde el valor del momento exceda el M_{CR} que se calculó para el estado anterior.

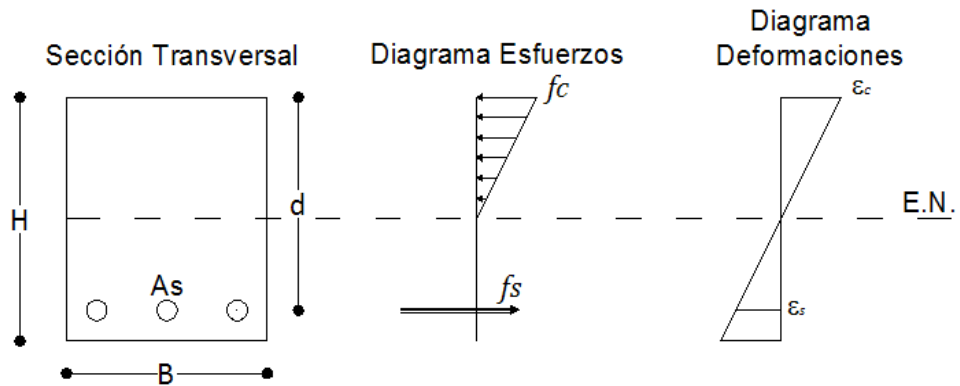
Siempre y cuando los esfuerzos de compresión en el concreto f_c no superen $0.5*f_{ck}$ y el esfuerzo en el acero a tensión no supere o alcance el punto de fluencia f_y , los esfuerzos se pueden calcular con las deformaciones unitarias, ya que estas todavía se encuentran en el rango elástico de cada material. Para esto y al igual que en el caso anterior, se usa la sección transformada, solo que se debe tener en cuenta que el concreto esta agrietado en tensión (**Figura 4. (c)**).

La razón de estudio de este estado se debe a que esta situación que se obtiene generalmente en estructuras bajo cargas y condiciones de servicio, las cuales desarrollan momentos considerablemente mayores que el momento de agrietamiento, generando esfuerzos generalmente inferiores al límite puesto al concreto anteriormente mencionado.

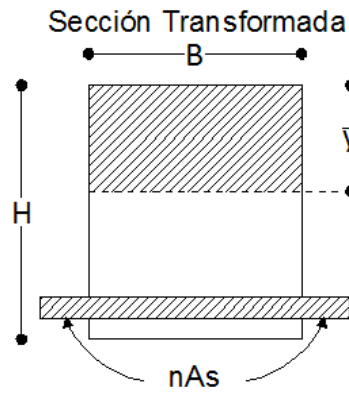
Figura 4. Estado II – Esfuerzos elásticos y sección fisurada



(a)



(b)



(c)

Fuente:(El autor)

- Estado III – Resistencia a la Ultima

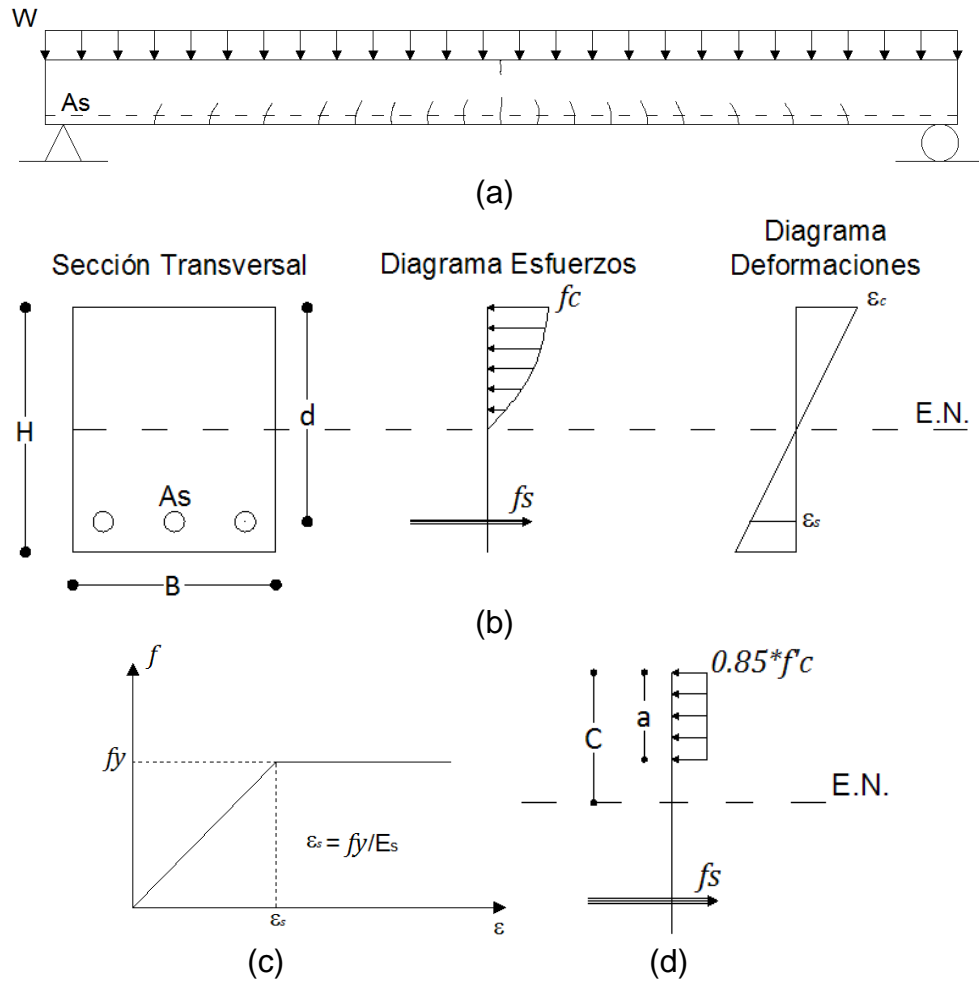
Quando se incrementa la carga que genera que los esfuerzos en el concreto sean de un valor mayor a $0.5 \cdot f_{ck}$; los esfuerzos ya no varían linealmente con respecto al eje neutro (**Tabla 5. (b)**). En este punto la viga se encuentra fisurada

no solo en las fibras sometidas a tensión donde se presenta el momento máximo, sino también en puntos cerca a los apoyos donde para los estados anteriores no estaban fisuradas (**Tabla 5. (a)**).

El límite de este estado y base del diseño se alcanza cuando el esfuerzo en el acero alcanza el punto de fluencia y se supone que el esfuerzo en el acero después de este punto no cambia, en otras palabras, la resistencia de diseño para el acero es f_yk (**Tabla 5. (c)**). Asimismo, debe ocurrir antes o simultáneamente cuando el concreto alcance su límite, el cual es mencionado en la sección 2.1.2 del presente capítulo, donde ocurre falla por aplastamiento cuando este se deforma entre 0.003 a 0.004, pero que forma conservadora se adopta el valor de 0.003 (**Tabla 5. (b)**).

Al suponerse que el valor máximo de deformación que puede alcanzar el concreto antes de la falla por aplastamiento sea 0.003, y con la realización de varios ensayos bajo diferentes consideraciones de carga y de forma, se pudo determinar o validar la distribución de esfuerzos bajo diseño por resistencia última, que tomó como referencia los modelos de Whitney, Jensen, y otros (Mattock, Kriz, & Hognestad, 1961). En el código ACI 318 se establece que, con los resultados de los ensayos anteriormente mencionados y cumpliendo los dos criterios que se mencionaron para el acero y concreto, se supone que el diagrama de compresión curvo equivale a uno rectangular con un esfuerzo medio de $0.85 * f_{ck}$. Además se supone que el diagrama rectangular de altura "a" (**Tabla 5. (d)**) tiene el mismo centro de gravedad y la misma magnitud total que el diagrama curvo (**Tabla 5. (b)**).

Figura 5. Estado III – Esfuerzos resistencia ultima



Fuente:(El autor)

2.2. CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL

2.2.1. Incertezas en Estructuras

Existen numerosos métodos cuantitativos que permiten modelar, analizar y evaluar una estructura antes de ser construida. A pesar de que algunos de estos métodos se han vuelto más sofisticados, trayendo consigo, un análisis y modelamiento matemático avanzado, simulaciones computacionales y técnicas de

optimización, estos son idealizados bajo asunciones o condiciones, que pueden o no reflejar de cerca la realidad (Ang & Tang, 1975). Esto se debe a que existen incertezas en la información que se recopila, pudiendo estar incompleta para un cálculo real de las respuestas y consecuencias que traen consigo ante las decisiones que se tomen, en las diferentes etapas de una estructura.

Estas incertezas se pueden dividir en tres ramas, las cuales son, las incertezas intrínsecas (o aleatorias), las epistémicas y el error humano. Las intrínsecas son aquellas que se refieren a las incertezas que son inherentes a una estructura, en las cuales se destacan los procesos naturales, que afectan una estructura, como es el caso de las cargas, condiciones ambientales, resistencia de los materiales, etc., a su vez esta se divide en dos, las cuales son (Beck, 2011):

- Incertidumbre física
- Incertidumbre de predicción

Por otro lado las incertezas epistémicas son las que a través de recolección de datos y/o más información, pueden ser reducidas o eliminadas. Esta al igual que la intrínseca se divide en tres (Beck, 2011):

- Incertidumbre estadística
- Incertidumbre de decisión
- Incertidumbre del modelo
- Incertidumbre fenomenológica

Por último está el error humano, que es una importante incerteza en estructuras, ya que esta puede estar presente en el diseño, construcción, el uso, etc., de estas. Esta incerteza puede ser considerada por resultados empíricos que muestran que está relacionada a dos efectos, que en la práctica es modelado como una interacción entre ellos (Melchers, 2002):

- Los errores humanos
- La intervención humana

A pesar que estos se pueden adoptar de forma cuantitativa en un problema, es sabido que la motivación y el entrenamiento pueden reducir este tipo de error (Beck, 2011)

2.2.2. Riesgo

El riesgo se puede definir como la probabilidad de que un determinado nivel de daño ocurra durante un periodo específico o asociado a una actividad. Además, cuantitativamente se puede calcular como el producto de la probabilidad de falla u ocurrencia de un evento por las consecuencias que este conlleva (Beck, 2011).

$$R E = P E * C[E] \quad (\text{Ec. 2.2})$$

En los problemas de ingeniería, estas consecuencias son representadas por el costo que estas fallas generan para una estructura o sistema, debido a que después de haber calculado los respectivos costos iniciales y de operación de estos, es necesario prever el posible costo asociado a que este falle. En muchos de los casos, es fácil cuantificar las consecuencias que trae consigo la falla, como ejemplo están, el costo de reparación o remplazo de miembros dañados, el costo de remover una estructura colapsada, reconstruirla, en otros casos puede ser complicado, como lo es el costo de compensación por lesiones o muertes de empleados o de usuarios en general, penalizaciones por daño ecológico, etc. (Beck & Gómez, 2011).

Matriz de Riesgo

La matriz de riesgo tiene la finalidad de catalogar el nivel de riesgo mediante un análisis cualitativo del mismo, separándolo en tres clases de riesgo según la

combinación de la clasificación de la gravedad (**Tabla 2.**) y la probabilidad de ocurrencia de un evento (**Tabla 3.**), como se indica en la figura 2.6. (Beck, 2011).

Tabla 2. Gravedad del evento.

GRAVEDAD DEL EVENTO	IMPACTO
Evento menor	En pequeñas áreas de lugar del evento, con consecuencias mayores a la falta de acciones correctivas. <ul style="list-style-type: none"> • Lesiones serias o muertes en la planta o fuera de ella.
Evento serio	<ul style="list-style-type: none"> • Daños materiales en un valor de \$5 millones en la planta o \$10 millones fuera de ella.
Evento grave	Cinco veces mayor que el evento serio.

Fuente:(El autor)

Tabla 3. Probabilidad de ocurrencia del evento.

PROBABILIDAD DE OCURRENCIA ($f=fallas/año$)	DESCRIPCIÓN DE LA FALLA
Baja ($f < 10^{-4}$)	Falla o serie de fallas con una probabilidad muy pequeña de ocurrencia dentro de la vida de la estructura.
Moderada ($10^{-4} < f < 10^{-2}$)	Falla o serie de fallas con pequeña probabilidad de ocurrencia dentro de la vida de la estructura.
Alta ($f > 10^{-2}$)	Se puede esperar que al menos una falla ocurra durante la vida de la estructura.

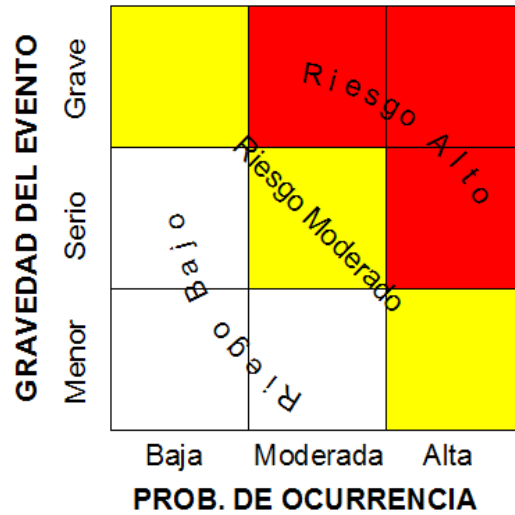
Fuente:(El autor)

La clasificación resultante proporcionada por la clasificación de la gravedad y probabilidad de ocurrencia del evento, es dada en tres franjas (**Figura 6.**):

- Riesgo Alto (franja roja): en esta franja el riesgo es inaceptable y debe ser eliminado o mitigado.
- Riesgo Moderado (franja amarilla): en esta franja el riesgo debe ser controlado y en lo posible eliminado.

- Riesgo Bajo (franja blanca): los riesgos en esta franja son aceptable y continuaran así hasta que el nivel de riesgo tolerable sea reducido.

Figura 6. Matriz de riesgo



Fuente: (adaptada de (Beck, 2011)).

2.2.3. Variables Aleatorias (VA)

Beck (2011) define una variable aleatoria real $X(\omega)$ como una función real que atribuye a cada punto de una muestra ω de un espacio muestral Ω un valor real x , tal que el conjunto $\{X \leq x\}$ es un evento para cualquier número real x . Esto quiere decir, que para cierto experimento con espacio muestral Ω formado por un conjunto de puntos ω ; una variable aleatoria $X(\omega)$ es obtenida atribuyéndole un número x a cada punto ω , además, el evento mencionado significa que la variable aleatoria X asume cualquier valor menor o igual a x , y su ocurrencia solo puede ser determinada en términos de probabilidades. En este trabajo, como se puede observar en la definición anterior, las variables aleatorias serán denotadas con letras mayúsculas y sus imágenes o realizaciones con letras minúsculas.

El dominio de una variable aleatoria X es el espacio muestral Ω , así, dependiendo de la procedencia del espacio muestral Ω , una variable aleatoria puede ser discreta o continua. Para una variable aleatoria discreta el dominio es formado por un número finito o infinito contable de valores posibles, y para una variable aleatoria continua el dominio es formado por un número infinito de valores posibles.

Distribución de Probabilidad de una Variable Aleatoria

Desde que el valor de una variable aleatoria represente un evento $\{X \leq x\}$, la ocurrencia de este solo puede asumir un valor numérico con una asociada medida de probabilidad. La regla que describe la medida de la probabilidad asociada con todos los posibles valores de una variable aleatoria o evento $\{X \leq x\}$ es con una *distribución de probabilidad*.

De esta forma, si X es una variable aleatoria, la distribución de probabilidad puede ser siempre descrita por su función de *distribución acumulada de probabilidades* (FDA), la cual es:

$$F_X(x) \equiv P(X \leq x) \quad (\text{Ec. 2.3})$$

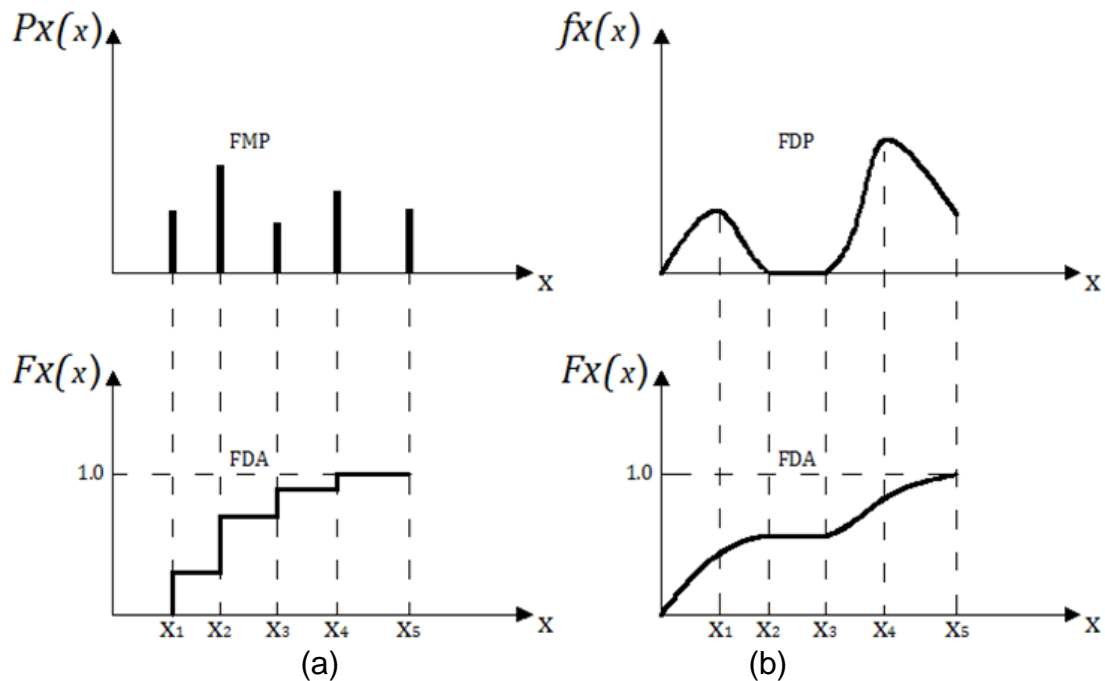
Para cualquier x en el intervalo $(-\infty \leq x \leq +\infty)$.

Por su lado, la derivada de la función acumulada de probabilidades en relación a x da como resultado la función de *densidad de probabilidades*, la cual es:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

Es notable que la función de distribución acumulada de probabilidades pueda no ser diferenciable en todo x , por esto, se establece una distinción para cuando son variables aleatorias discretas, continuas. Para el caso de variables aleatorias continuas, $F_X(x)$ es una función continua en x aunque no diferenciable en algunos puntos, debe ser contable (**Figura 7. (b)**). En el caso de las variables aleatorias discretas, $F_X(x)$ es discontinua y su función de distribución de probabilidades $f_X(x)$ o también llamada $p_X(x)$, función de *masa de probabilidades* (FMP), puede ser descrita por medio de pulsos (**Figura 7. (a)**).

Figura 7. Funciones de distribución de Probabilidades de variables aleatorias



Fuente:(El autor)

Más detalles sobre los tipos de distribuciones con sus respectivos FDA y FDP pueden ser consultados en Ang & Tang (1975), Nowak & Collins (2000), Jay L. DeVore (2005) y Beck (2011).

Media y Varianza de una Variable Aleatoria

A pesar que la forma de la función de distribución, con sus parámetros asociados describen las características probabilísticas de una variable aleatoria, generalmente esta no se conoce. Para estos casos, existen ciertos parámetros que ayudan a describir matemáticamente las propiedades de una variable aleatoria. Estos parámetros son:

- Media (μ) o Valor Esperado ($E(X)$): Es el valor correspondiente con el centro de gravedad de la función de densidad $f_X(x)$, y es calculada así:

$$\text{Para una VA continua: } E X = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x) dx \quad (\text{Ec. 2.5})$$

$$\text{Para una VA discreta:..... } E X = \sum xi * p_X(xi) \quad (\text{Ec. 2.6})$$

- Varianza ($\text{Var } X$): Al lado de la media, el siguiente parámetro por importancia es la varianza, la cual es la medida de la dispersión de los demás valores con respecto a la media. Este es calculado así:

$$\text{Para una VA continua: } \text{Var } X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 * f_X(x) dx \quad (\text{Ec. 2.7})$$

$$\text{Para una VA discreta:.... } \text{Var } X = \sum (xi - \mu)^2 * p_X(xi) \quad (\text{Ec. 2.8})$$

- Desviación Estándar (σ_X): Este valor es dado por la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var } X} \quad (\text{Ec. 2.9})$$

- Coeficiente de Variación (C.O.V. X): Es una medida que relaciona como es la dispersión de los valores con respecto al valor de la media, por tanto este valor es:

$$C.O.V._X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

- Factor Parcial (λ bias factor): Es el valor que relaciona el valor medio de la variable aleatoria, con el valor característico de la misma, este valor es calculado así:

$$\lambda_X = \frac{\mu_X}{x} \quad (\text{Ec. 2.11})$$

2.2.4. Estados Límites

Un estado limite es una frontera entre un estado deseable y uno no deseable, la cual es establecida con base a los requerimientos que una estructura posea. En la **Tabla 4.**, se pueden apreciar los estados límites típicos para estructuras.

Beck (2011) destaca tres requisitos básicos que debe cumplir una estructura, durante su vida proyectada. El primero de estos es el requisito de servicio, el cual se establece para mantener el funcionamiento adecuado de la estructura. El segundo es el requisito de seguridad, el cual establece que la estructura no entre en colapso ante cargas repetitivas y esporádicas. El último de estos, es el requisito de robustez, el cual establece que la estructura no sea deteriorada por eventos accidentales de forma desproporcional a la gravedad del evento. Por otro lado, y una vez garantizando el cumplimiento de estos requisitos básicos, una estructura debe también tener en cuenta dos requisitos que le propician al constructor y usuario un bienestar no estructural, los cuales son el requisito económico y el social, respectivamente. Por su lado el código ACI 318, en el capítulo 9, establece los dos estados límites que debe cumplir una estructura para cumplir con sus requisitos básicos, los cuales son, el estado de resistencia última (o estado límite

último) y el estado límite de funcionamiento (o estado límite de servicio). Los cuales tienen las mismas características que los mostrados en la **Tabla 4**.

Cada estado límite es representado cuantitativamente por una ecuación escrita en función a las variables del proyecto, como lo son, las acciones que son impuesta (cargas, esfuerzos, momentos, etc.), las propiedades de los materiales y las dimensiones geométricas de una estructura, las cuales son tomadas como variables aleatorias o determinista, dependiendo de su relevancia en el comportamiento de una estructura. Así, la ecuación sería:

$$g(X) = g(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = 0 \quad (\text{Ec. 2.12})$$

Tabla 4. Tipos de estado limite

TIPO DE ESTADO LIMITE	DESCRIPCIÓN DE LA FALLA	EJEMPLOS
Ultimo (seguro)	Colapso de toda o parte de la estructura.	Deslizamiento, ruptura, colapso progresivo, rotulas plásticas, inestabilidad, corrosión, fatiga, deterioro, fuego, etc.
Daño		Ruptura prematura, deformación o deformación inelástica.
Servicio	Interrupción del uso normal	Deflexiones excesivas, vibraciones, daño local, etc.

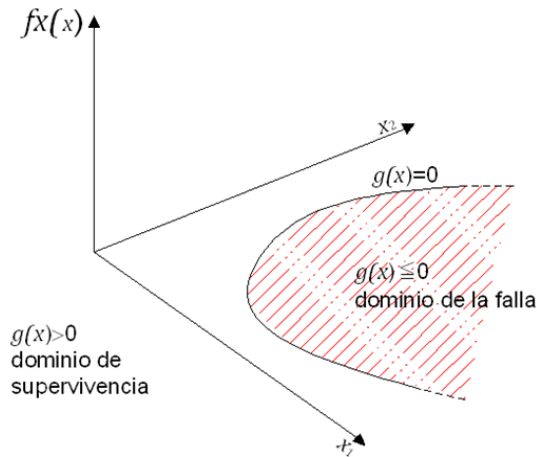
Fuente:(adaptada de (Melchers, 2002)).

Como se mencionó anteriormente, esta ecuación separa los dos estados que se pueden presentar en todo proyecto (falla o no falla). Esta distinción se hace por medio de los casos en que la ecuación da como resultado un valor negativo (falla), o positivo (no falla o deseable). A partir de esto, se establecen el dominio de la falla y de supervivencia, donde el dominio de la falla son todos aquellos puntos del espacio muestral de las variables aleatorias que llevan a la falla de la estructura, y el dominio de supervivencia son los que no (**Figura 8**). De esta forma

$$D_f = \mathbf{x} \ g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{Ec. 2.13})$$

$$D_S = \mathbf{x} \ g(\mathbf{x}) > 0 \quad (\text{Ec. 2.14})$$

Figura 8. Ecuacion de estado limite y dominos



Fuente:(El autor)

2.2.5. Probabilidad de Falla

La probabilidad de falla se puede definir como, la posibilidad de que un sistema falle, no atendiendo las especificaciones del proyecto (Beck, 2011) o violando los estados límites para los cuales fue proyectada. Para evaluar este, se establece el evento $g(\mathbf{X}) \leq 0$, para el cual se calcula su probabilidad. Esta es medida mediante la ecuación 2.4, en forma de integral, definida para el dominio de la falla, así:

$$P \ g(\mathbf{X}) \leq 0 = \int_{D_f} f_X(\mathbf{x}) \quad (\text{Ec. 2.15})$$

En la confiabilidad estructural se define como un problema fundamental, al estado limite que solo considera el efecto de las cargas S resistido por la resistencia R , para los cuales cada uno es descrito por si función de densidad de probabilidad $f_S()$ y $f_R()$ respectivamente. Para este estado límite, también se define un dominio de la falla, en el cual están todos los puntos de estas variables aleatorias para los cuales esta ecuación tiene un valor menos a cero. De esta forma, para el problema fundamental la ecuación de estado límite y la probabilidad de falla serian:

$$g_{R,S} = R - S = 0 \quad (\text{Ec. 2.16})$$

$$P \{R - S\} \leq 0 = \int_{D_f} f_{R,S}(r, s) \quad (\text{Ec. 2.17})$$

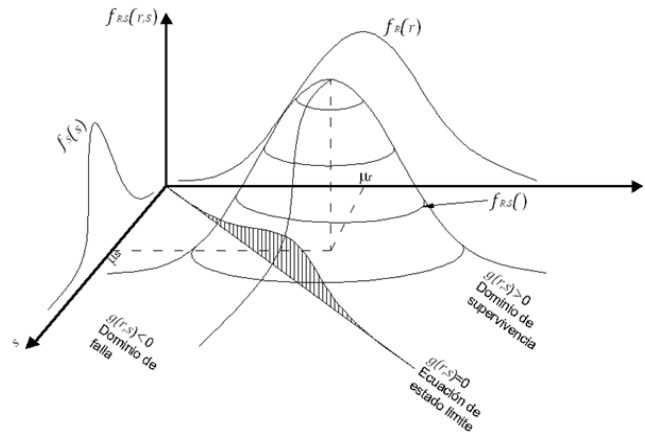
Cuando estas variables son estadísticamente independientes, o sea $f_{R,S}(r, s) = f_R(r) * f_S(s)$, la probabilidad de falla también puede ser tomada como lo muestra la ecuación 2.18, y una explicación gráfica que ayuda a visualizar lo que es probabilidad de falla es la **Figura 9.**, donde la probabilidad de falla es la intersección entre ambas funciones marginales de distribución de probabilidades (**Figura 9.(b)**) y desde otra perspectiva es el volumen bajo la función $f_x(x)$ (**Figura 9. (a)**).

$$P \{R - S\} \leq 0 = \int_{D_f} f_R(r) * f_S(s) dr ds \quad (\text{Ec. 2.18})$$

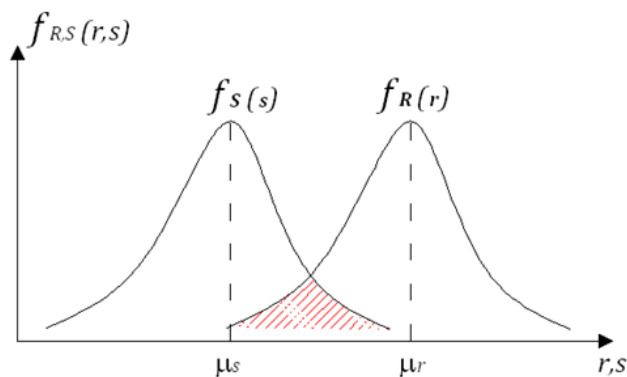
De esta figura también se puede explicar la existencia de los coeficientes de seguridad que lo que buscan es que el área achurada en la **Figura 9.**, sea más pequeña alejando las medias de cada variable. La aplicación conjunta de los factores de carga de resistencia y los factores de mayoración de cargas está dirigida a obtener en forma aproximada, probabilidades de bajas resistencias de

orden de 1/100 y probabilidades de sobre cargas de 1/1.000. Esto resulta en una probabilidad de falla estructural del orden de 1/100.000 (Nilson, 2001)

Figura 9. Interpretacion geometrica de probabilidad de falla



(a)



(b)

Fuente:(El autor)

A pesar de lo establecido en la ecuación 2.17, en la práctica no se tienen observaciones que permitan determinar directamente la función conjunta de densidades $f_X(\mathbf{x})$, como tampoco su dominio de falla y por ende su probabilidad

(Ec. 2.15). Es por esto que existen los métodos de transformación (**FOSM, FORM, SORM**), que transforman una variable aleatoria X con cualquier distribución a una variable aleatoria Y con distribución normal estándar, ayudando así a construir la función conjunta de densidades con base en la información estadística existente de cada variable aleatoria, para después calcular la probabilidad de falla, por otro lado y cuando el problema es demasiado complejo, en donde los métodos antes descritos no cumplan a cabalidad con lo requerido para calcular la probabilidad de falla, la simulación Montecarlo es usada para el cálculo de esta probabilidad una vez han sido transformadas todas las variables aleatorias. Estos métodos pueden ser consultados en Nowak & Collins (2000), Melchers (2002), Madsen (2006) y Beck (2011).

2.2.6. Índice de Confiabilidad

Según Hasofer and Lind (1974) el índice de confiabilidad puede ser definido en términos geométricos como la distancia más corta del origen de las variables transformadas Y , a la superficie de falla (**Figura 10.**). Este índice es de extrema importancia porque es el valor que permite calcular la probabilidad de falla para cada estado límite, y es denotado en la literatura con la letra griega β .

También para un problema de confiabilidad, es importante definir el punto del proyecto \mathbf{y}^* (**Figura 10.**), el cual es el punto sobre el dominio de la falla con mayor probabilidad de ocurrencia y se encuentra sobre la ecuación de estado límite para el cual corresponde la mínima distancia al origen del espacio normal estándar \mathbf{Y} . De forma general, para un problema n-dimensional el índice de confiabilidad y el punto de proyecto se encuentra usando la siguiente formulación de optimización:

Buscar el punto: \mathbf{y}^*

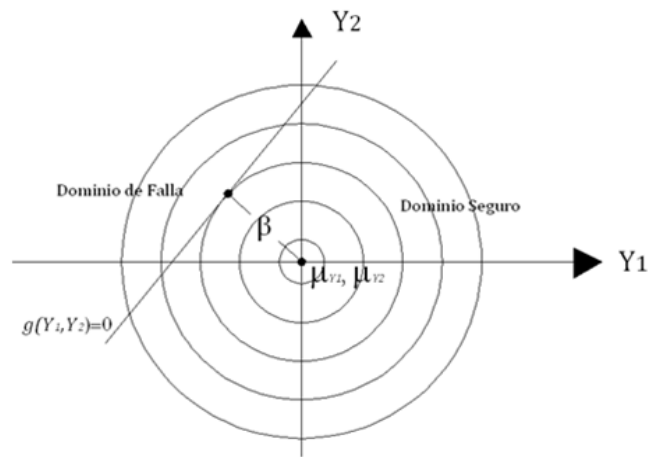
Que minimiza: $d = \mathbf{y} = \sqrt{\mathbf{y}^T * \mathbf{y}}$

$$\text{Sujeto a: } g(\mathbf{y})=0 \quad (\text{Ec. 2.19})$$

Donde “d” es la distancia entre un punto \mathbf{y} cualquiera al origen del espacio normal estándar, por lo tanto una vez minimizado la distancia se calcula el índice de confiabilidad que sería:

$$\beta = \mathbf{y}^* = \overline{\mathbf{y}^{*T} * \mathbf{y}^*} \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Figura 10. Interpretación geométrica del índice de confiabilidad y punto de diseño.



Fuente:(El autor)

2.3. DISEÑO ÓPTIMO BASADA EN CONFIABILIDAD (RBDO – Reliability-Based Design Optimization)

2.3.1. Análisis de Confiabilidad en el Diseño de un Elemento Estructural.

De forma general un problema de confiabilidad estructural se puede dividir en dos tipos, los cuales dependen de la variación o no de sus variables en el tiempo (para el problema fundamental, Ec. 2.16., $\mathbf{S}(t)$ y $\mathbf{R}(t)$). De esta forma, para problemas representados por procesos estocásticos, se dice que el problema de

confiabilidad es dependiente del tiempo. Por otro lado, cuando el problema solo envuelve variables aleatorias, se dice que es independiente del tiempo.

En el caso de las cargas, estas se pueden dividir en dos grupos. El primero corresponde a los fenómenos naturales (viento, sismo, nieve, etc.) y el segundo a los impuestos por el hombre (cargas muertas y vivas), ambas, en la mayoría de los casos son inciertas y estocásticas en naturaleza, por lo tanto, pueden variar en la posición y en el tiempo. Es por estos dos casos, que modelar los procesos de cargas puede resultar un poco difícil. En consecuencia, se busca tener modelos apropiados, que permitan un análisis menos elaborado, puesto que las cargas son usualmente el factor de mayor incerteza en un análisis de confiabilidad. Y es más fácil buscar una mayor colección de datos y un modelo para las cargas que refinar las técnicas para cálculo de la confiabilidad. El procedimiento para construir un modelo probabilístico de una carga en particular es el siguiente (Melchers, 2002):

1. Identificación y definición de las variables aleatorias, las cuales pueden ser usadas para representar las incertezas en la descripción de la carga.
2. Selección de las distribuciones de probabilidad apropiada para cada variable aleatoria.
3. Selección de los parámetros de las distribuciones usando datos experimentales.

En el caso de la resistencia de los materiales y haciendo un paralelo con las cargas, la construcción del modelo probabilístico depende de las propiedades estadísticas de los materiales, propiedades estadísticas para las dimensiones y reglas para la combinación de varios materiales. Partiendo de esto, se ha asumido y por medio de ensayos, que la resistencia del concreto posee una distribución normal (American Concrete Institute (ACI 214R-02), 2002; Nowak A. S. & Szerszen M. M., 2003; Ellingwood, B.; Galambos, T. V.; MacGregor, J. G. & Cornell, C. A., 1980).

2.3.2. Formulación RBDO para un Elemento Estructural.

En la optimización estructural determinística la función objetivo es usualmente el volumen o el peso de la estructura y las restricciones son tomadas de los requerimientos en los códigos, para esfuerzos, desplazamientos, deformaciones, etc. En el caso de la optimización estructural basada en confiabilidad, el costo esperado de la estructura es la función objetivo y las restricciones son requerimientos de confiabilidad conectados con los posibles modos de falla de la estructura. Uno de los requerimientos de confiabilidad es el índice de confiabilidad objetivo (β_o), el cual toma en cuenta los requisitos de seguridad de una estructura en general, de forma tal que los niveles de riesgo sean aceptables. En JCSS (2001) se proponen valores para índices de confiabilidad objetivos (**Tabla 5.**) basados en la consecuencias de la falla, de manera similar con lo establecido en la **Figura 6.**, que se mide mediante un factor (κ) que relaciona el costo total (costo de construcción + costo de falla) entre el costo de construcción, para los estados límites últimos.

Tabla 5. Índice de confiabilidad objetivos β para estados límites últimos

Costo relativo de la medida de seguridad	Consecuencias de la falla (κ)					
	Menor		Moderado		Alto	
	$\kappa < 2$		$2 < \kappa < 5$		$5 < \kappa < 10$	
	β	P_f	β	P_f	β	P_f
Alto	3.1	10^{-3}	3.3	$5 \cdot 10^{-4}$	3.7	10^{-4}
Normal	3.7	10^{-4}	4.2	10^{-5}	4.4	$5 \cdot 10^{-5}$
Bajo	4.2	10^{-5}	4.4	$5 \cdot 10^{-6}$	4.7	10^{-6}

Fuente: (JCSS, 2001)

Con esto, la formulación RBDO para un elemento quedaría de la siguiente forma:

$$\min C(\mathbf{z}),$$

$$\text{sujeto a: } \beta_i^e \mathbf{z} \geq \beta_i^{ea} \mathbf{z}, \quad i = 1:m$$

$$z_i^l \mathbf{z} \leq z_i \mathbf{z} \leq z_i^M \mathbf{z}, \quad i = 1:m \quad (\text{Ec. 2.21})$$

Donde $C(\mathbf{z})$ es la función (costo) a ser optimizada, mediante el modelo presentado en el Anexo A, $\beta_i \mathbf{z}$ es el índice de confiabilidad para el modo de falla i calculado según la 2.19., β_i^a es el límite del índice de confiabilidad que se adopta dependiendo del problema (**Tabla 5.**), y en la última línea se encuentran las restricciones para las variables de diseño. El diagrama de flujo para el modelo RBDO se encuentra en el Anexo B.

2.3.3. Formulación RBDO-SF (Reliability-Based Design Optimization – Safety Factor).

Como se observó, la formulación RBDO requiere de análisis probabilísticos cuyo costo computacional, medido en la forma de tiempo necesario para realizar el proceso de optimización es alto. Por tal razón Wu et al. (2001) apud Qu (2004) desarrollaron un método basado en factores de seguridad que sustituye las restricciones de confiabilidad del RBDO clásico por unas restricciones equivalentes aproximadas deterministas.

Estos factores parciales de seguridad son obtenidas a partir del punto del proyecto \mathbf{y}^* , y remplazan a las variables aleatorias por valores basados en esos factores en la optimización de diseño. Para la primera iteración que se realiza, los factores parciales de seguridad son los establecidos por la norma, y una vez haya pasado la primera iteración, estos son calibrados en cada paso por medio de los cosenos directores calculados en la búsqueda del punto del proyecto \mathbf{y}^* , que a su vez es función del índice de confiabilidad objetivo, después de la calibración son

retomados en la optimización de diseño. Para mayor claridad en el Anexo C se encuentra el diagrama de flujo para esta formulación, además puede ser consultado en Qu (2004), Nowak (2000) y Nogueira (2010).

3. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA PARA EL RBDO – SF

3.1. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE CONFIABILIDAD

Existen dos tipos de variables en un problema de confiabilidad, estas son: las variables de diseño y las variables aleatorias. Las primeras son las variables que en el problema van a ser optimizadas, mientras que las segundas son las utilizadas para el análisis de confiabilidad. Para el problema que se plantea en este trabajo, el cual es, la optimización de la altura efectiva y el área de acero de la sección transversal de una viga de concreto armado, se plantean como variables aleatorias las resistencias del concreto a compresión y del acero a tracción, así como de los momentos inducidos por las cargas muertas y vivas.

3.1.1. VARIABLES ALEATORIAS – PARÁMETROS Y DISTRIBUCIONES.

Modelo Estadístico de la Resistencia del Concreto y del Acero

Las propiedades más importantes que posee el concreto reforzado en una viga, como se mencionó anteriormente son su resistencia a la compresión del concreto f_c y la resistencia a la tensión del acero f_s . Diversos autores, entre ellos Ellingwood et al. (1980) y Nowak (2003), encontraron que las funciones de distribución acumuladas de probabilidad obedecían a una distribución normal después de dibujarlas en un papel de probabilidad. En el trabajo de (Nowak & Collins (2000) se puede observar cómo se usa este papel).

Una vez establecida la distribución a la cual corresponden las dos propiedades estructurales mencionadas, se necesita encontrar los parámetros estadísticos de estas, la media de la resistencia (μ) y la desviación estándar (σ), para el análisis de confiabilidad, los cuales se obtienen a partir de: el factor parcial λ (bias factor) y el coeficiente de variación *C.O.V.*, para ambos materiales estos valores son

tomados de las tablas de los datos suministrados por Nowak (2003). Para la resistencia del concreto a compresión f_c , se establecen los siguientes valores, basados en esos datos:

$$\lambda = -0.000006 fck^3 + 0.000967 fck^2 - 0.0537 fck + 2.14 \quad (\text{Ec. 3.1})$$

$$C.O.V. = 0.10 \text{ o } 10\% \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Cabe mencionar que la ecuación del factor parcial (Ec. 3.1) se obtuvo de las tablas publicadas por Nowak (2003) ya que se presentaron discrepancias al momento de usar aquella propuesta por ese autor. Para la resistencia a tensión del acero f_y , se encuentran los datos para un acero Grado 420 MPa, para los cuales se establecen los siguientes valores:

$$\lambda = 1.145 \quad (\text{Ec. 3.3})$$

$$C.O.V. = 0.05 \text{ ó } 5\% \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\mu_{fc}}{fck} \text{ ó } \frac{\mu_{fs}}{fsk}$$

$$C.O.V. = \frac{\sigma_{fc}}{\mu_{fc}} \text{ ó } \frac{\sigma_{fs}}{\mu_{fs}}$$

μ_{fc} y μ_{fs} : Resistencia media.

fck y fsk : Resistencia característica o nominal.

σ_{fc} y σ_{fs} : Desviación estándar de la resistencia.

Modelos Estadísticos para las Cargas Muertas

La carga muerta es el resultado de la acción que ejerce el peso de los elementos tanto estructurales como no estructurales. Ellingwood (1980), Nowak (2000), JCSS (2001), Melchers (2002), entre otros, asumen en base a investigaciones que la carga muerta obedece a una distribución de probabilidad normal o es muy cerca a esta.

Por su lado, para establecer los parámetros estadísticos para esta distribución (μ_{M_D} y σ_{M_D}), es necesario al igual que para las resistencias establecer los valores para el factor parcial λ (bias factor) y el coeficiente de variación *C.O.V.* Dichos valores fueron establecidos en este trabajo en base a recomendaciones en las bibliografías antes mencionadas, y en especial la de Ellingwood (1980), que propone los siguientes valores para estos dos parámetros, debido a que los diseñadores usualmente subestiman la carga muerta total.

$$\lambda = 1.05 \quad (\text{Ec. 3.5})$$

$$C.O.V. = 0.10 \text{ ó } 10\% \quad (\text{Ec. 3.6})$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\mu_{M_D}}{M_D}$$

$$C.O.V. = \frac{\sigma_{M_D}}{\mu_{M_D}}$$

μ_{M_D} : Valor medio de la carga muerta.

M_{Dk} : Valor característico o nominal de la carga muerta.

σ_{M_D} : Desviación estándar de la carga muerta.

Debido al hecho que la carga muerta no varía en el tiempo, los parámetros antes mencionados al igual que la distribución de probabilidades son usados para establecer la carga muerta en el tiempo de la vida de la estructura, la cual es de 50 años.

Modelos Estadísticos para las Cargas Vivas

La carga viva es el resultado de la acción del peso de las personas y sus posesiones, las cuales dependen del uso que se le dé al predio que se desea construir. La carga viva total que debe ser soportada por una estructura se puede dividir en dos. Primero, una carga que tiene en cuenta la ocupación o uso que se le destine a la edificación y permanece relativamente constante en el tiempo. La segunda componente tiene en cuenta el peso de las personas y sus pertenencias en un evento inusual, un ejemplo es el caso de una emergencia, donde la cantidad de personas por metro cuadrado puede aumentar. Sin embargo, y para propósitos de diseño es necesario considerar la combinación de estas dos cargas durante la vida de diseño de una estructura que es de 50 años, debido a cambios en la ocupación o uso que pueden aumentar o disminuir la carga (Ellingwood, B.; Galambos, T. V.; MacGregor, J. G. & Cornell, C. A., 1980; Nowak A. S. & Collins K. R. , 2000).

Ellingwood (1980) establece que la carga viva máxima combinada por las componentes antes mencionadas puede ser modelada por medio de una distribución de extremos tipo I (Gumbel – Máximos) para el rango de valores de probabilidad considerados en estudios de confiabilidad. Esta distribución tiene como parámetros estadísticos el máximo valor característico o moda de la distribución (u_n) y un parámetro de forma (β), que son calculados con base a la media (μ), desviación estándar (σ) y una constante (γ).

En la literatura se usa al igual que para las variables aleatorias anteriores los valores del factor parcial λ (bias factor) y el coeficiente de variación V , el cual depende del área de la carga y para este trabajo son establecidos en base a Ellingwood (1980), de esta forma:

$$\lambda = 1.00 \quad (\text{Ec. 3.7})$$

$$C.O.V. = 0.25 \text{ ó } 25\% \quad (\text{Ec. 3.8})$$

Donde:

$$\lambda = \frac{\mu_{M_L}}{M_{Lk}}$$

$$C.O.V. = \frac{\sigma_{M_L}}{\mu_{M_L}}$$

μ_{M_L} : Valor medio del momento debido a la carga viva.

M_{Lk} : Valor característico o nominal del momento debido a la carga viva.

σ_{M_L} : Desviación estándar del momento debido a la carga viva

Los anteriores valores son establecidos para el periodo de diseño que es de 50 años y cabe mencionar que aunque uno de los parámetros para definir el coeficiente de variación varía con el área, pero al final cuando se calcula con el resto la diferencia es insignificante y puede ser ignorada (Ellingwood, B.; Galambos, T. V.; MacGregor, J. G. & Cornell, C. A., 1980).

3.1.2. ECUACIÓN DE ESTADO LÍMITE ÚLTIMO

La ecuación de estado límite para el problema que se plantea se obtendrá mediante uno de los fundamentos establecidos en la sección 2.1.2., para el cual el

momento interno debe ser igual al momento externo, por lo tanto, la ecuación de estado límite quedaría:

$$g X, d = M_{xR,d} - M_{xS,d} \quad (\text{Ec. 3.9})$$

En donde M_R es el momento resistente para la sección, el cual tiene como variables aleatorias la resistencia del concreto a compresión (f_c) y la resistencia a tensión del acero (f_s), y como variables de diseño el área de acero (A_s) y la altura efectiva (d). De la **Figura 12.**, y haciendo sumatorias de momentos en el eje neutro, el momento resistente quedaría:

$$M_{xR,d} = 0.85 f_c \beta_1 B \beta_x^2 d^2 \left(1 - \frac{\beta_1}{2} \right) + A_s f_s d (1 - \beta_x) \quad (\text{Ec. 3.10})$$

Donde:

f_c : Resistencia del concreto a compresión.

f_s : Resistencia del acero a tensión.

β_1 : Factor que relaciona la distancia “a” del esfuerzo rectangular con la distancia “C” del diagrama de esfuerzos parabólico en el concreto (ver Cap. 4)

B: Ancho de la sección (**Figura 12.**)

β_x : Factor que relaciona la distancia del eje neutro “C” con la distancia “d” del eje del área de acero, medidas desde la fibra superior (**Figura 12.**).

d: Distancia medida desde la fibra superior hasta el eje del área de aceros.

Por su lado, el M_S es el momento externo el cual tiene como variables aleatorias, el momento producido por las cargas muertas (M_D) y el momento producido por las cargas vivas (M_L), así:

$$M_{x_s,d} = M_D + M_L \quad (\text{Ec. 3.11})$$

$$M_D = \psi_D M_S \quad (\text{Ec. 3.12})$$

$$M_L = \psi_L M_S \quad (\text{Ec. 3.13})$$

Donde:

M_D : Momento debido a las cargas muertas.

M_L : Momento debido a las cargas vivas.

ψ_D : Factor que relaciona el momento producido por la carga muerta con respecto al momento total.

ψ_L : Factor que relaciona el momento producido por la carga viva con respecto al momento total.

Los parámetros estadísticos para los momentos son establecidos con base a los encontrados en la literatura para las cargas muertas y cargas vivas, debido a que los momentos son función de las cargas.

3.2. CONSTRUCCIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

La construcción de los ábacos de diseño se realizara mediante la optimización del costo de la sección transversal por metro (\$/m). Como se mencionó

anteriormente, las dos variables a ser optimizadas son el área de acero a tracción (A_s) y la altura útil (d) de la viga de concreto optimizadas para diferentes momentos solicitantes especificados (M_{sk}), bases (B), resistencias del concreto (f_{ck}) y del acero (f_{yk}), betas objetivo (β_o), además de los límites de diseño establecidos por la ACI para el diseño a flexión, los cuales se presentaran en el siguiente capítulo.

El problema de optimización es formulado en base a los requerimientos del programa propuesto por Nogueira (2010) el cual fue desarrollado en el lenguaje de programación Compaq Visual FORTRAN versión 6.6 de Microsoft. Una rutina de la biblioteca matemática IMSL para Fortran llamada DNCONF fue utilizada como optimizador, cuyo algoritmo fue desarrollado por Schittkowski (1986) y utiliza el Método de Programación Secuencial Cuadrática – SQP (Sequential Quadratic Programming). De esta forma el método problema de optimización es definido como:

$$\min f(d)$$

$$\text{sujeto a: } g_i d = 0 ; i = 1:n$$

$$g_i d \geq 0 ; i = 1:m$$

$$d_{inf} \leq d \leq d_{sup} \quad (\text{Ec. 3.14})$$

Donde:

$f(d)$: Función objetivo.

$g_i d$: Funciones de restricción.

d_{inf}, d_{sup} : Límites para las variables de diseño.

3.2.1. FUNCIÓN OBJETIVO – COSTO

La función objetivo que se establece para el problema de optimización RBDO – SF es el costo inicial total de diseño de una sección transversal de concreto reforzado por metro lineal (\$/m). Esta es establecida para la sección en la cual se presenta el momento de sollicitación mayor. De esta forma la función del costo quedaría:

$$f(x, d) = B H C_C + A_s \rho_s C_S + B + 2 H C_F \quad (\text{Ec. 3.15})$$

Donde:

C_C : Costo de concreto por m^3 (\$/m³)

ρ_s : Densidad del acero (7850 kg/m³)

C_S : Costo del acero por m^3 (\$/kg)

C_F : Costo de la formaleta por m^2 (\$/m²)

3.2.2. RESTRICCIONES PARA EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

El problema de optimización que se plantea en este trabajo tiene como fin disminuir el costo inicial total de una sección de concreto armado, basado en las restricciones para las funciones que tienen en cuenta las variables de diseño, y las restricciones debidas a la norma ACI 318 para las variables de diseño. Estas restricciones son:

$$M_{Rd} - M_{Sd} = 0$$

$$\beta_x - \beta_{xinf} \geq 0$$

$$\beta_{xsup} - \beta_x \geq 0$$

$$\rho - \rho_{inf} \geq 0$$

$$\rho_{sup} - \rho \geq 0 \quad (\text{Ec. 3.16})$$

M_{Rd}, M_{Sd} : Momento flector resistente y solicitante de diseño.

$\beta_{xinf}, \beta_{xsup}$: Límites para el β_x de acuerdo a las disposiciones del código ACI 318 (Cap. 4).

ρ_{inf}, ρ_{sup} : Límites para la cuantía de refuerzo según las disposiciones del código ACI 318 (Cap. 4)

Los momentos de diseño, son los momentos resultantes de la multiplicación de las VA por los coeficientes parciales de seguridad calibrados ($f_{cd}, f_{yd}, M_{Dd}, M_{Ld}$), o en el caso de la primera iteración, son los establecidos por la norma. En este punto, es necesario aclarar que para este trabajo se trabajó la resistencia del acero y del concreto como dos VA, no de forma conjunta como es utilizada en el código ACI.

Todas estas las condiciones y requerimientos presentados en este capítulo fueron aplicados en el programa hecho por Nogueira (2010) el cual fue desarrollado en el lenguaje de programación Compaq Visual FORTRAN versión 6.6 de Microsoft. Este código se encuentra en el Anexo D del presente trabajo.

4. DISEÑO POR RESISTENCIA ÚLTIMA Y LÍMITES DE DISEÑO PARA FLEXIÓN – ACI 318 CAPITULO 10

En el diseño por resistencia última, el código ACI 318 considera, como se mencionó anteriormente, que el diagrama curvo de esfuerzos a compresión en el concreto se puede remplazar por uno rectangular que tiene la forma mostrada en la **Figura 5** (d). En la sección C.10.2 del código se mencionan las suposiciones que son necesarias para el análisis de la resistencia de una sección, tomando como base la distribución de esfuerzos antes mencionada, las deformaciones en el concreto y acero, y demás criterios que son necesarios de aplicar. Estas hipótesis se encuentran desde el literal C.10.2.2 hasta el C.10.2.7, donde se establecen las siguientes disposiciones:

- Las deformaciones unitarias en el acero de refuerzo y en el concreto se suponen que son directamente proporcionales a la distancia desde el eje neutro, excepto para las vigas de gran altura. Esto se debe a lo mencionado por el numeral 2.1.2. del presente capítulo, donde los ensayos realizados mostraron este comportamiento.
- Se establece que la deformación unitaria utilizable en la fibra extrema a compresión del concreto es igual a 0.003. Este resultado, es conservador al obtenido mediante ensayos donde los valores están entre 0.003 y 0.004 como se mencionó en la sección 2.1.2.
- Cuando el esfuerzo en el acero sea menor que f_yk , debe tomarse como el producto de la deformación unitaria ϵ_s por el módulo de elasticidad del acero E_s (puede tomarse como 200 GPa). Para deformaciones mayores a esta el esfuerzo en el acero toma un valor independiente de la deformación, el cual es f_yk .
- La resistencia a la tensión no se toma en cuenta en el diseño a flexión.

- Para la distribución de esfuerzos rectangulares anteriormente mencionada se establecen los siguientes requisitos:
 - El esfuerzo en el concreto es uniformemente distribuido con un valor de $0.85 \cdot f_c$ hasta una distancia “a” desde la fibra extrema a compresión (**Figura 5. (d)**), donde $a = \beta_1 C$.
 - El valor de β_1 depende de la resistencia del concreto, como se estableció en las pruebas realizadas. Donde para una resistencia entre 17 MPa y 28 MPa, $\beta_1 = 0.85$. Para valores mayores de resistencia pero menores que 56 MPa, este disminuye de forma lineal a razón de 0.05 por cada 7 MPa. De esta forma se tiene que:

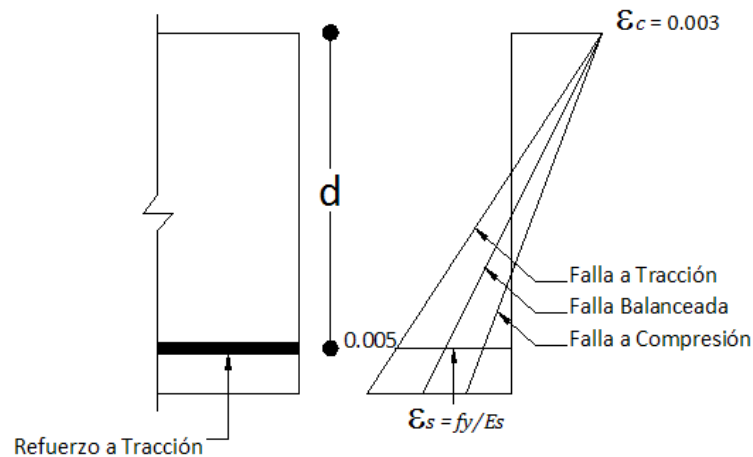
$$\beta_1 = \begin{cases} \text{Para } 17 \leq f_{ck} \leq 28 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85 \\ \text{Para } 28 < f_{ck} \leq 56 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.85 - 0.05 * (f_{ck} - 28)/7 \\ \text{Para } f_{ck} > 56 \text{ MPa} \rightarrow \beta_1 = 0.65 \end{cases}$$

Con estas suposiciones, se da paso al cálculo del momento resistente el cual debe contrarrestar el momento al cual está siendo sometida la viga, aunque para esto el ACI 318 tiene unos principios y requisitos generales que son consignados en la sección C.10.3, cuya función principal es buscar que ante la acción de las cargas últimas en una viga esta posea una falla dúctil y no explosiva, lo cual se logra mediante el control de las deformaciones en el concreto y el acero, para lo cual se establece lo siguiente:

- Existe una falla balanceada o condición balanceada de deformaciones cuando la deformación unitaria máxima en la fibra a compresión en el concreto alcanza el valor de 0.003 al mismo tiempo que el acero entra en fluencia alcanzando el valor de deformación f_{yk}/E_s (**Figura 11.**).

- Una falla a compresión o sección controlada por compresión existe cuando la deformación unitaria en tracción en el acero es menor o igual f_yk/E_s , en el momento que el concreto en compresión alcanza su límite de deformación unitaria 0.003 (**Figura 11.**).
- Una falla por tensión o una sección controlada por tensión existe cuando la deformación unitaria del acero en tensión es igual o mayor a 0.005, justo cuando el concreto en compresión alcanza su límite de deformación unitaria 0.003 (**Figura 11.**).

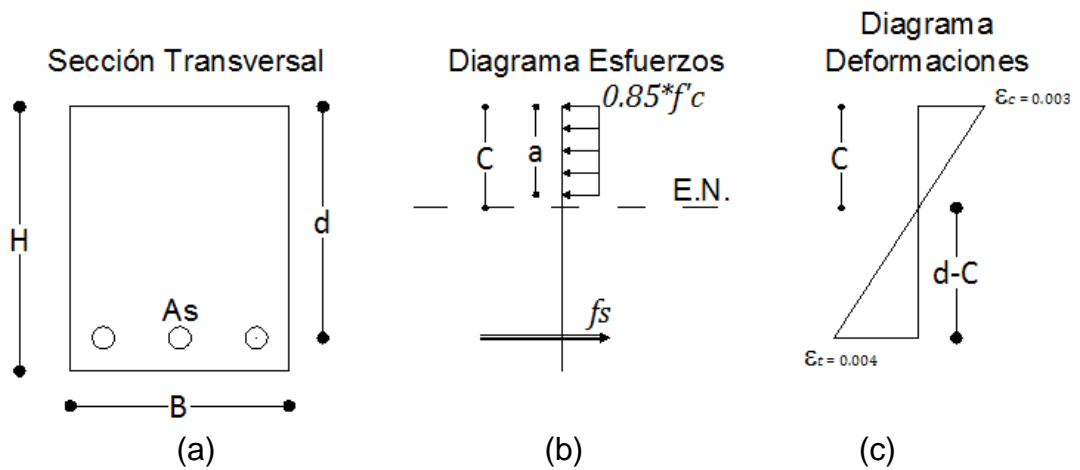
Figura 11. Tipos de falla en una sección de concreto armado.



Fuente:(El autor)

Adicional a lo mencionado anteriormente se establece que para el cálculo de la resistencia nominal, la deformación en el acero ϵ_t no debe ser menor a 0.004, lo cual se dispone a fin de remplazar la anterior limitante que era medida por medio de la cuantía balanceada, la cual para efectos de diseño no debía ser mayor que $0.75 \cdot \rho_b$. Aunque para efectos de cálculo, tiene un valor más conservador y semejante, así la cuantía máxima permitida se calcula de la siguiente forma:

Figura 12. Deformación en el acero mínima – cuantía máxima.



Fuente:(El autor)

Dada la relación proporcional entre las deformaciones (**Figura 12.** (c)), se tiene que:

$$\frac{c}{\varepsilon_c} = \frac{d-c}{\varepsilon_t} \dots\dots\dots (Ec.4.1)$$

$$\therefore \beta_x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_t}; \text{ donde } \beta_x = \frac{c}{d} \quad (Ec. 4.2)$$

Y reemplazando para $\varepsilon_t=0.004$ (C.10.3.5.) y $\varepsilon_c=0.003$, se tiene el límite superior para β_x :

$$\therefore \beta_{x\text{sup}} = 0.4285 \quad (Ec. 4.3)$$

Haciendo sumatoria en la horizontal y con las dimensiones de la sección (**Figura 12.** (a) y (b)) se tiene:

$$F_H = 0$$

$$0.85 * f_c d * B * a = f_y d * A_s; \text{ donde } a = \beta_1 * C$$

$$\therefore \rho_{MAX} = \frac{As}{B*d} = \frac{0.85*\beta_1*\beta_x*fc_d}{fy_d} \quad (\text{Ec. 4.4})$$

Así,

$$\rho_{MAX} = 0.364 * \frac{\beta_1*fc_d}{fy_d} \quad (\text{Ec. 4.5})$$

En otro caso, en el cual la sección no sea lo suficientemente apta para resistir las acciones a las cuales está sometida, el código ACI 318 permite el uso de acero de refuerzo a compresión, aparte del de tracción. Por otro lado y en caso de que las dimensiones de la sección, proporcionen un área de concreto a compresión lo suficientemente grande que el área de acero sea poca, el código establece la siguiente ecuación para el cálculo de un área mínima o cuantía mínima, la cual es:

$$\rho_{MIN} = \frac{As}{B*d} = \frac{0.25 \overline{fck}}{fy_k} \quad (\text{Ec. 4.6})$$

Pero no menor que:

$$\rho_{MIN} = \frac{As}{B*d} = \frac{1.4}{fy_k} \quad (\text{Ec. 4.7})$$

Este valor generalmente es usado para concretos que tengan una resistencia menor que 31 MPa, ya que después de esta resistencia la expresión anterior es menor. Por su lado el límite inferior para β_x se toma para una deformación en el acero de 0.005, debido a que en los comentarios (R10.3.3.) de la misma norma se dice que este valor proporciona un comportamiento dúctil en la mayoría de diseños. Por lo tanto el límite inferior para β_x quedaría:

$$\beta_{xinf} = \frac{0.003}{0.003+0.005} = 0.375 \quad (\text{Ec. 4.8})$$

5. CONSTANTES DE DISEÑO Y COSTO DE MATERIALES.

5.1. CONSTANTES DE DISEÑO

5.1.1. Ancho (B) y Recubrimiento

Para la construcción de los ábacos de diseño se asume que el ancho B de la sección transversal presenta un valor constante predeterminado, en el problema de optimización. Lo anterior implica que este parámetro es uno de los valores de entrada necesarios para la obtención de las variables de diseño óptimas (d y A_s), sin embargo, se toman diferentes valores para las formulaciones propuestas. Para el problema de optimización estudiado se establecieron valores para el ancho entre 10 cm y 60 cm.

Por su lado el recubrimiento que se usa para la formulación de estos ábacos es de 4 cm, según la sección C.7.7.1. (c), del código ACI 318 para vigas y viguetas no preesforzadas.

5.1.2. Costos de los Materiales (C)

Los costos establecidos en este trabajo fueron obtenidos de la revista CONSTRUDDATA edición 163 del tercer trimestre del 2012. Los precios para las tres resistencias características o nominales del concreto, acero y para la formaleta son:

- Concreto Corriente grava común 21MPa (3000 psi) (m^3) \$280.348,00
- Concreto Corriente grava común 28 MPa (4000 psi) (m^3) \$310.764,00
- Concreto Corriente grava común 35 MPa (5000 psi) (m^3) \$362.337,00
- Acero figurado 6000 psi (kg) \$2.296,00
- Formaleta Pizano 15mm (m^2) \$25.639,00

6. RESULTADOS

6.1. RESUMEN DISTRIBUCIONES Y PARÁMETROS PARA LAS VA.

Para la elaboración de los ábacos, se utilizaron tres resistencias características para el concreto (f_{ck}), una para las barras de acero (f_{yk}), además se estableció una variación para el momento total nominal o característico debido a ambas cargas de 1000 kN.cm a 13000 kN.cm, variando la relación $\frac{M_{Dk}}{M_{Dk} + M_{Lk}}$ de 0.3 hasta 0.7 debido a que en los casos reales esta relación se encuentra entre estos valores (Nowak, 2003). Junto a esto, los parámetros y distribuciones para estas cuatro VA que se adoptaron fueron:

Tabla 6. Resumen distribuciones y parámetros para las VA

Variable Aleatoria	Factor Parcial λ	Coefficiente de Variación	Tipo de Distribución
Resistencia Concreto	Ec. 3.1	0.10	Normal
Resistencia del Acero	1.145	0.05	Normal
Carga Muerta	1.05	0.10	Normal
Carga Viva	1.00	0.25	Gumbel Tipo I

Fuente:(El autor)

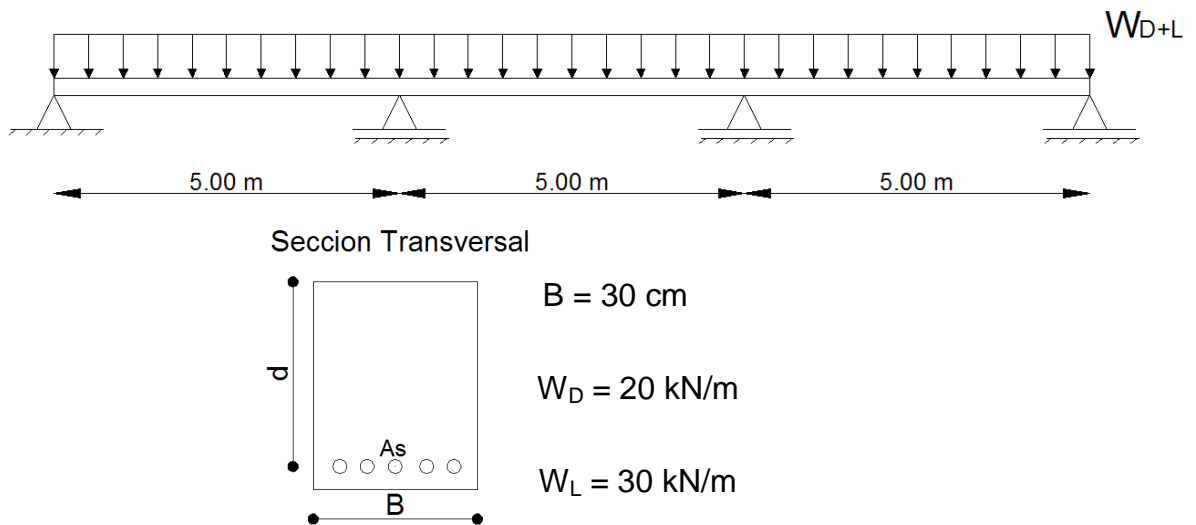
6.2. FORMULACIONES Y EJEMPLO DE APLICACIÓN.

El ejemplo y formulaciones aquí presentadas, se tomaron con el fin de mostrar algunos de los resultados obtenidos, así como su uso. Con el fin de hacer un paralelo con el código ACI 318, se adoptó un valor de confiabilidad objetivo de 3.5, ya que este es el valor recomendado por Nowak (2003) al momento de realizar la calibración de la misma. Los demás resultados y graficas obtenidos en este trabajo se encontraran en los Anexos E y F.

6.2.1. Ejemplo

La viga presentada en la **Figura 13** es hecha para una resistencia característica del concreto de 21 MPa y para un refuerzo de acero de 420 MPa. Esta es sometida a una carga distribuida muerta de 20 kN/m y a una carga distribuida viva de 30 kN/m. Calcular el área de acero (A_s) y la altura efectiva (d) por medio de los ábacos de diseño. Una vez calculada la altura efectiva, calcular por medio de la Ec. 6.1 el área de acero, basada en los factores establecidos por la ACI 318 para resistencia ultima.

Figura 13. Ejemplo viga continua.



Fuente:(El autor)

$$\rho = \frac{1}{m} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m \cdot k}{\phi \cdot f_{yk}}} \right] \quad . \text{(Ec. 6.1)}$$

Donde,

$$m = \frac{f_{yk}}{0.85 \cdot f_{ck}}$$

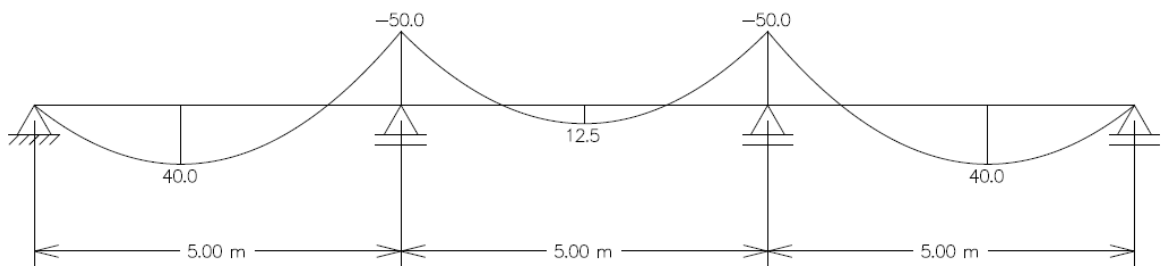
70

$$k = \frac{Mu}{B * d^2}$$

$$\phi = 0.9$$

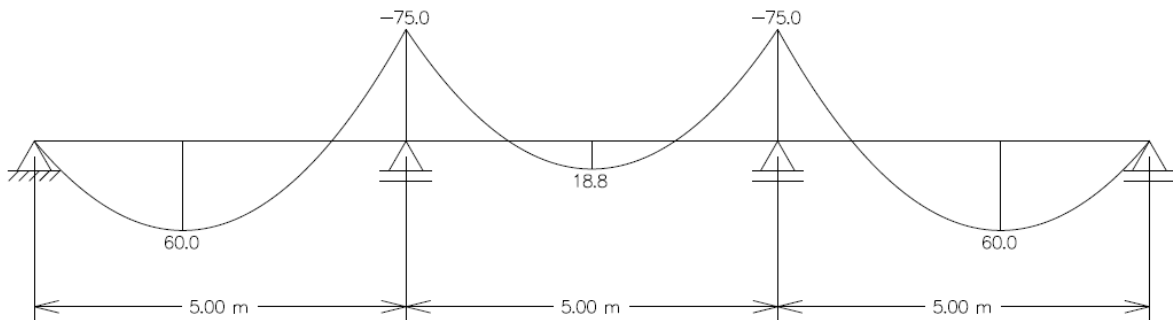
El primer paso para la solución de este ejemplo por medio de los ábacos es calcular los momentos producidos por ambas cargas sin necesidad de aplicar los factores de resistencia última dados por la ACI. La solución para este ejemplo se obtuvo del software Ftool desarrollado en la Pontificia Universidad Católica (PUC) de Rio de Janeiro, versión educacional 2.12. El resultado fue el siguiente:

Figura 14. Momentos debidos a la carga muerta.



Fuente:(El autor)

Figura 15. Momentos debidos a la carga viva.



Fuente:(El autor)

Las unidades de los momentos mostradas en las Figuras 14 y 15 son kN.m, para el uso de los ábacos es necesario pasarlas a kN.cm, y esto se logra multiplicando estas por 100. La relación de carga $\frac{D}{D+L}$ es 0.4, por lo tanto es necesario realizar una interpolación lineal entre el ábaco de relación de carga de 0.3 (**Figura 16**) y de 0.5 (**Figura 17**). Además debido a la simetría se seleccionan solo tres momentos totales que son 10.000 kN.cm, 12.500 kN.cm y 3.130 kN.cm.

Abaco Relación de Carga 0.3 (**Figura 16**)

- Para $M_{Tk} = 10.000$ kN.cm

$$A_s = 16.18 \text{ cm}^2$$

$$d = 32.44 \text{ cm}$$

- Para $M_{Tk} = 12.500$ kN.cm

$$A_s = 18.15 \text{ cm}^2$$

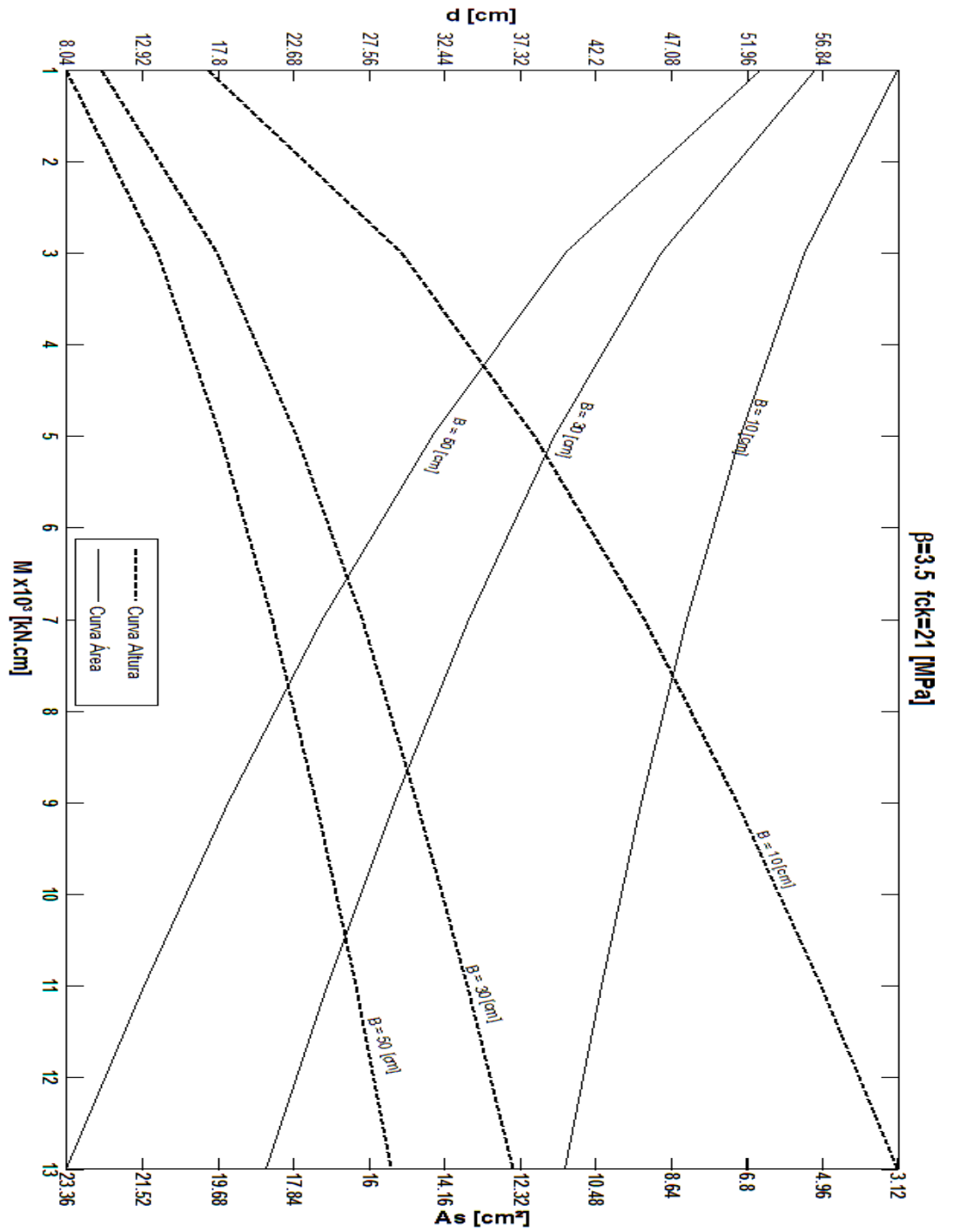
$$d = 36.07 \text{ cm}$$

- Para $M_{Tk} = 3.130$ kN.cm

$$A_s = 9.09 \text{ cm}^2$$

$$d = 17.8 \text{ cm}$$

Figura 16. Abaco relacion de carga 0.3.



Fuente:(El autor)

Abaco Relación de Carga 0.5 (Figura 17)

- Para $M_{Tk} = 10.000 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 15.01 \text{ cm}^2$$

$$d = 30.24 \text{ cm}$$

- Para $M_{Tk} = 12.500 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 16.87 \text{ cm}^2$$

$$d = 33.63 \text{ cm}$$

- Para $M_{Tk} = 3.130 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 8.45 \text{ cm}^2$$

$$d = 16.59 \text{ cm}$$

Interpolación para la relación de carga 0.4

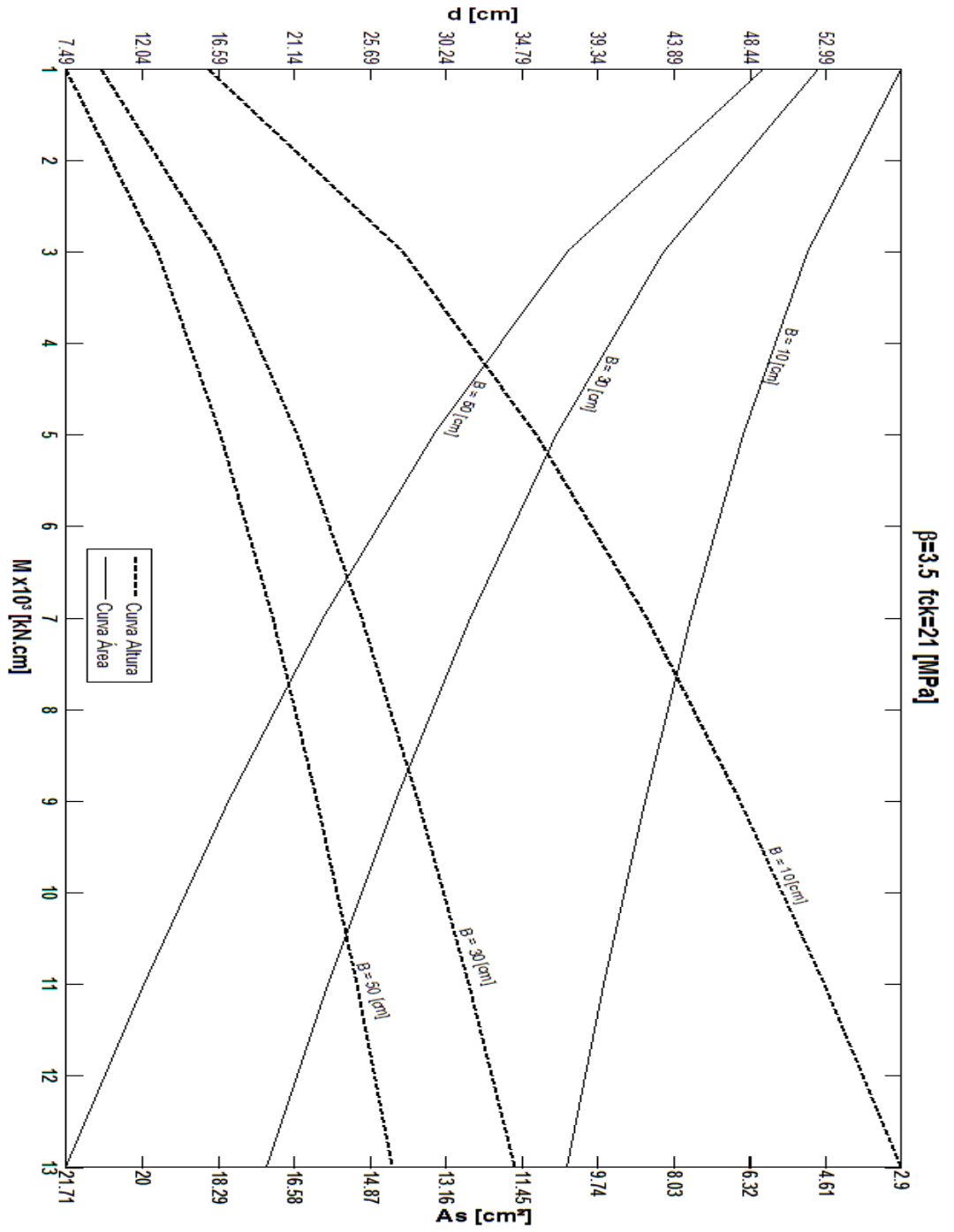
Los valores a continuación son las cantidades de diseño para el problema planteado en este ejemplo, el cual corresponde al valor medio entre las relaciones de 0.3 y 0.5

- Para $M_{Tk} = 10.000 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 15.6 \text{ cm}^2$$

$$d = 31.34 \text{ cm}$$

Figura 17. Abaco relacion de carga 0.5.



Fuente:(El autor)

Para $M_{Tk} = 12.500 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 17.51 \text{ cm}^2$$

$$d = 34.85 \text{ cm}$$

- Para $M_{Tk} = 3.130 \text{ kN.cm}$

$$A_s = 8.77 \text{ cm}^2$$

$$d = 17.2 \text{ cm}$$

Diseño de la sección por medio del código ACI 318

Con lo que respecta al diseño por medio del código ACI 318 la Ec. 6.1 provee una cuantía de acero necesaria para resistir un momento último (M_u), el cual es el resultado de multiplicar el momento debido a la carga muerta por 1.2 y el momento debido a la carga viva por 1.6. Basándose en las alturas efectivas dadas por los ábacos se procede a hallar el área de acero requerida. Una vez hecho esto se hace una comparación entre el costo de la sección por metro (\$/m) entre ambos resultados.

- Resultados para los diferentes momentos.

Al usar la altura efectiva obtenida por los ábacos en la Ec. 6.1, se obtuvo una cuantía la cual sobre pasaba la máxima permitida por el ACI. Esto se debe a que, la restricción para la cuantía máxima que se usó para el programa fue calculada por medio de la Ec. 4.5, que difiere de la del ACI en que los valores de las resistencias son los valores de diseño y no los de resistencia característica, lo cual se debe a que el ACI considera la resistencia en conjunto como una VA, mientras que en este trabajo se consideraron de forma separada. Para encontrar una

respuesta con el fin de comparar se procedió a buscar una altura efectiva que cumpliera con la cuantía máxima permitida por el ACI, de esta forma los resultados obtenidos para los diferentes momentos fueron:

Tabla 7. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{Tk} = 10000$ kN.cm

Datos de Entrada	
	$fck = 21$ MPa
	$fyk = 420$ MPa
Relación Carga D/D+L=	0,4
	$M_{Tk} = 10000$ kN.cm
	$M_{Dk} = 4000$ kN.cm
	$M_{Lk} = 6000$ kN.cm
	$M_U = 14400$ kN.cm

Fuente:(El autor)

Tabla 8. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{Tk} = 10000$ kN.cm

Calculo de la Cuantía	
B =	30 cm
d =	31,68 cm
$\beta_1 =$	0,85
m =	23,53
k =	0,478267524
$\rho =$	0,0155
$\rho_{max} =$	0,0155
$\rho_{min} =$	0,0033
As =	14,70 cm ²

Fuente:(El autor)

Tabla 9. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{TK} = 12500$ kN.cm

Datos de Entrada	
$fck =$	21 MPa
$fyk =$	420 MPa
Relación Carga D/D+L=	0,4
$M_{TK} =$	12500 kN.cm
$M_{Dk} =$	5000 kN.cm
$M_{Lk} =$	7500 kN.cm
$M_U =$	18000 kN.cm

Fuente:(El autor)

Tabla 10. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{TK} = 12500$ kN.cm

Calculo de la Cuantía	
B =	30 cm
d =	35,42 cm
$\beta_1 =$	0,85
$m =$	23,53
$k =$	0,478249073
$\rho =$	0,0155
$\rho_{max} =$	0,0155
$\rho_{min} =$	0,0033
As =	16,43 cm ²

Fuente:(El autor)

Con los resultados obtenidos de la **Tabla 7** a la **Tabla 12** se procedió a calcular el costo de la sección por metro, para el resultado obtenido por el ACI, así como por medio de los ábacos, ya que los resultados obtenidos son semejantes, los resultados en cuanto al costo total son muy semejantes, aunque los del ACI son

un poco menores. Este resumen del costo se encuentra de la **Tabla 13** a la **Tabla 15**.

Tabla 11. Tabla datos de entrada solución ACI 318 $M_{TK} = 3130$ kN.cm

Datos de Entrada	
	$f_{ck} = 21$ MPa
	$f_{yk} = 420$ MPa
Relación Carga D/D+L=	0,4
	$M_{TK} = 3130$ kN.cm
	$M_{Dk} = 1252$ kN.cm
	$M_{Lk} = 1878$ kN.cm
	$M_U = 4507$ kN.cm

Fuente:(El autor)

Tabla 12. Tabla cálculo de la cuantía solución ACI 318 $M_{TK} = 3130$ kN.cm

Calculo de la Cuantía	
B =	30 cm
d =	17,72 cm
$\beta_1 =$	0,85
m =	23,53
k =	0,478329139
$\rho =$	0,0155
$\rho_{max} =$	0,0155
$\rho_{min} =$	0,0033
As =	8,22 cm ²

Fuente:(El autor)

Tabla 13. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 10000$ kN.cm

Costo de la Sección ACI 318			Costo de la Sección Abaco		
$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³	$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³
$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg	$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg
$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²	$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²
$C_T =$	\$ 77.075,44	/m	$C_T =$	\$ 78.237,48	/m

Fuente:(El autor)

Tabla 14. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 12500$ kN.cm

Costo de la Sección ACI 318			Costo de la Sección Abaco		
$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³	$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³
$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg	$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg
$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²	$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²
$C_T =$	\$ 85.265,10	/m	$C_T =$	\$ 86.431,92	/m

Fuente:(El autor)

Tabla 15. Tabla costo de la sección por metro $M_{Tk} = 3.130$ kN.cm

Costo de la Sección ACI 318			Costo de la Sección Abaco		
$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³	$C_C =$	\$ 280.348,00	/m ³
$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg	$C_S =$	\$ 2.296,00	/kg
$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²	$C_M =$	\$ 25.639,13	/m ²
$C_T =$	\$ 46.509,38	/m	$C_T =$	\$ 47.488,24	/m

Fuente:(El autor)

Como se puede observar de la **Tabla 13** a la **Tabla 15** ambos costos son muy parecidos entre ambas respuestas pero sin tener conocimiento del índice de confiabilidad resultante que se obtiene no es apropiado llegar a una conclusión. Para poder concluir con este ejemplo se procedió a calcular la probabilidad de falla y el índice de confiabilidad respectivo que se obtiene por medio de las dimensiones, propiedades estadísticas y las funciones de distribución de probabilidad para las resistencias y sollicitaciones propuestas para la creación de

los ábacos, para ambos resultados en el mismo programa desarrollado por Nogueira (2010). De esta forma, la ecuación de estado límite, probabilidad de falla e índice de confiabilidad para cada uno de los momentos es:

$$G = A_s * f_s * d - \frac{A_s * f_s}{2 * 0.85 * f_c * B} - M_D - M_L \quad (\text{Ec. 6.2})$$

Tabla 16. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{TK} = 10.000$ kN.cm

	Probabilidad de Falla P_f	Índice de Confiabilidad β
ACI 318	4.08×10^{-4}	3.347
Ábacos	2.31×10^{-4}	3.501

Fuente:(El autor)

Tabla 17. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{TK} = 12.500$ kN.cm

	Probabilidad de Falla P_f	Índice de Confiabilidad β
ACI 318	4.10×10^{-4}	3.346
Ábacos	2.44×10^{-4}	3.49

Fuente:(El autor)

Tabla 18. Probabilidad de falla y índice de confiabilidad $M_{TK} = 3.130$ kN.cm

	Probabilidad de Falla P_f	Índice de Confiabilidad β
ACI 318	4.16×10^{-4}	3.341
Ábacos	3.17×10^{-4}	3.417

Fuente:(El autor)

Ya con los cálculos obtenidos y mostrados de la **Tabla 16** a la **Tabla 18** se puede concluir este ejemplo. Con el último cálculo realizado para las probabilidades de falla e índices de confiabilidad se puede decir que los resultados en este ejemplo garantizan que los índices de confiabilidad obtenidos de los

ábacos por medio de interpolación son los índices que se establecieron como objetivo, en este caso es de 3.5. Con respecto a la norma si bien el costo total de la sección dio un poco menor, este resultado no se puede comparar con el obtenido por medio de los ábacos, ya que el índice de confiabilidad es menor, razón por la cual el costo también da menor. Se puede concluir que por medio de los ábacos es más fácil garantizar una probabilidad de falla y por tanto un índice de confiabilidad específico que el recomendado por Nowak (2003) para los factores de seguridad que se usan en el código ACI 318. Lo cual le da al diseñador una mayor noción de cuan segura es una viga proyectada.

7. CONCLUSIONES

Como resultado de este trabajo se puede resumir que:

- Se construyeron los ábacos para los costos de los materiales de Colombia que permiten cumplir con los requerimientos establecidos por el ACI.
- El conocimiento más a fondo de las distribuciones y propiedades estadísticas de las variables de un problema, le permite a un diseñador proyectar una estructura conociendo las limitaciones que se pueden tener, las cuales son representadas por una probabilidad de falla, calculada por medio de un análisis de confiabilidad.
- El uso del programa realizado por Nogueira (2010) permite realizar un sin número de ábacos de diseño para las diferentes situaciones que se planteen en cuanto a las resistencias que se quieran trabajar, confiabilidades recomendadas por las normas, así como cualquier carga que se quiera adoptar, siempre y cuando el autor conozca las propiedades estadísticas de las variables.
- El costo de los materiales es de gran importancia en el uso del RDBO–SF, ya que dependiendo de estos el algoritmo busca aumentar o disminuir el uso de un material con respecto al otro en su búsqueda del óptimo.
- El diseño realizado por medio de los coeficientes de resistencia última del código ACI 318 permite obtener un índice de confiabilidad muy cercano a la

recomendada por Nowak (2003) al momento de hacer la calibración de los mismos, el cual para diseño a flexión es de 3.5.

- Los ábacos realizados en este trabajo empleando el método RBDO–SF y utilizados por medio de un ejemplo garantizan un índice de confiabilidad deseado por medio de interpolación lineal entre ábacos o en el mismo. Además también suministra la configuración óptima con el fin de obtener ese índice.

8. OBSERVACIONES Y RECOMENDACIONES

- Es importante recalcar que los resultados obtenidos en este trabajo están fuertemente relacionados con el costo de los materiales, lo cual varía de zona a zona donde son realizados. Se puede trabajar con factores de relación de carga donde para el concreto fuese 1 y en el caso de acero algún valor multiplicado por el peso específico (7850 kg/m³) para tener todo en unidades adimensionales, en una franja de valores por ejemplo entre 50 – 150 veces el precio del concreto.
- En el caso de la formaleta, la contribución al costo total de la sección se puede eliminar o cambiar, ya que el uso de formaletas metálicas es más frecuente y en el mercado tienen un costo de alquiler mensual, el cual no depende de la geometría de la sección, aunque este no afecta de la misma forma que los precios del concreto y acero.
- Con los datos encontrados en este trabajo, es posible realizar otro tipo de ábacos donde se pueda mostrar el costo de la sección con el fin de buscar cual configuración de resistencias y dimensiones da como resultado un menor costo para un momento determinado.
- Este trabajo también sirve de guía para realizar diferentes tipos de combinaciones de cargas específicas, donde se incluyan el viento, sismo, y demás cargas que pueden intervenir en las solicitaciones a una viga. El

trabajo de Nowak (2003) se muestra los límites de la relación $D/D+L$ para diferentes tipos de solicitaciones.

- El programa de Nogueira (2003) puede ser aplicado para la creación de ábacos de diseño para vigas de diferentes materiales así como para múltiples ecuaciones de estado límite. Un ejemplo sería vigas metálicas donde el resultado sea el perfil comercial óptimo.

BIBLIOGRAFÍA

American Concrete Institute (ACI 318S-08). (2008). *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural*.

American Concrete Institute (ACI 214R-02). (2002). *Evaluation of Strength Test Results of Concrete*.

Ang, Alfredo H-S & Tang, Wilson H. (1975). *Probability Concepts in Engineering Planning and Design* (Vols. Vol. I - Basic Principles). John Wiley & Sons.

Beck AT, José de Santana Gomez W. (2011). A Comparison of Deterministic, Reliability-Based and Risk-Based Structural Optimization Under Uncertainty. *Probabilistic Engineering Mechanics* .

Beck, A. T. (2011). *Curso de Confiabilidade Estrutural*. São Carlos, EESC-USP.

CONSTRUDATA (163 ed.). (2012). Bucaramanga.

DeVore, J. L. (2005). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencia* (Sexta ed.). Thomson.

Ellingwood, B.; Galambos, T. V.; MacGregor, J. G. & Cornell, C. A. (1980). Development of a Probability Based Load Criterion for American Standard A58. *NBS Special Report 577* , 222.

JCSS. (2001). Probabilistic Model Code. *Joint Committee on structural Safety, 12th Draft* .

Maden H.O., Krenk S., Lind N.C. (2006). *Methods of Structural Safety*. Dover Publication, INC.

Marcelo Azevedo Costa, M. C. (2009). Uso do Método de Otimização BFGS para a Estimação dos Parâmetros dos Modelos Lineares Generalizados.

Mattock, A. H., Kriz, L. B., & Hognestad, E. (1961). Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design. *ACI Journal* , Vol. 57.

McCormac, J. C. (2002). *Diseño de Concreto Reforzado* (Cuarta Edición ed.). Alfaomega.

Melchers, R. E. (2002). *Structural Reliability Analysis and Prediction* (Second ed.). John Wiley & Sons.

Nilson, A. (2001). *Diseño de Estructuras en Concreto* (Duodécima ed.). Mc Graw Hill.

Nogueira, C. G. (2010). *Desenvolvimento de Modelos Mecânicos, de Confiabilidade e de Otimização para Aplicação em Estruturas de Concreto Armado. Tese de Doutorado.*

Nowak A. S. & Collins K. R. . (2000). *Reliability of Structures*. McGraw Hill.

Nowak A. S. & Szarszen M. M. (2003). Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 2 - Reliability Analysis and Resistance Factors. *ACI Structural Journal* , 383 - 391.

Nowak A. S. & Szerszen M. M. (2003). Calibration of Design Code for Buildings (ACI 318): Part 1 - Statistical Model For Resistance. *ACI Structural Journal* , 377 - 382.

Pu Y., Das P. K. & Faulkne D. (1997). A Strategy for Reliability-Based Optimization. *Engineering Structures* , 276 - 282.

Qu, X.; Haftka, R.T. (2004). Reliability-Based Design Optimization Using Probabilistic Sufficiency Factor. *Struct Multidisc Optim* 27 , 314-325.

Wen Y. K. (1993). Reliability-Based Design Under Multiple Loads. *Structural Safety* , 3-19.

ANEXOS

ANEXO A – Modelo de optimización determinista del costo.

Método de Optimización Tipo SQP

El problema de optimización de este trabajo fue formulado en base a los conceptos tratados en el capítulo 3 en el lenguaje de programación Compaq Visual FORTRAN 6.6 de Microsoft y resueltos por el algoritmo DNCONF, que pertenece a la biblioteca matemática IMSL del mismo FORTRAN. Shittkowski (1986) apud Nogueira (2010) desarrollo ese algoritmo que utiliza un Método de Programación Secuencial Cuadrática – SQP (Sequential Quadratic Programming). De esta forma, el problema de optimización queda definido como:

$$\min_{d \in \mathbb{R}^n} f(d)$$

$$\text{Restringido a: } g_i d = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, ne$$

$$g_i d \geq 0, \text{ para } i = ne + 1, \dots, m$$

$$d_{inf} \leq d \leq d_{sup}$$

Donde:

$f(d)$: Función objetivo.

$g_i d$: Funciones de restricción.

d_{inf}, d_{sup} : Limites para las variables de diseño.

Todas las anteriores funciones de las variables de diseño son continuas y diferenciables. Para usar el recurso del software antes mencionado, deben ser como datos de entrada, la función objetivos, así como las restricciones de desigualdad y los límites de las variables de diseño que van a ser optimizadas. La rutina DNCONF no requiere la entrada de las derivadas parciales de la función objetivo y de las restricciones, que son fundamentales en el uso del método de programación secuencia cuadrática (SQP). Estas derivadas son calculadas por diferencias finitas automáticamente por el programa.

El método de programación secuencial cuadrática, en la rutina, se basa en la formulación y solución iterativa de subproblemas usando una aproximación cuadrática para el lagrangiano, linearizandose las restricciones en el punto considerado. Así, de forma resumida, el problema de optimización puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$\min_{j \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} j^T B_k j + \nabla f(d_k)^T j$$

Restringido a: $\nabla g_i(d_k)^T + g_i(d_k) = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, ne$

$$\nabla g_i(d_k)^T + g_i(d_k) \geq 0, \text{ para } i = ne + 1, \dots, m$$

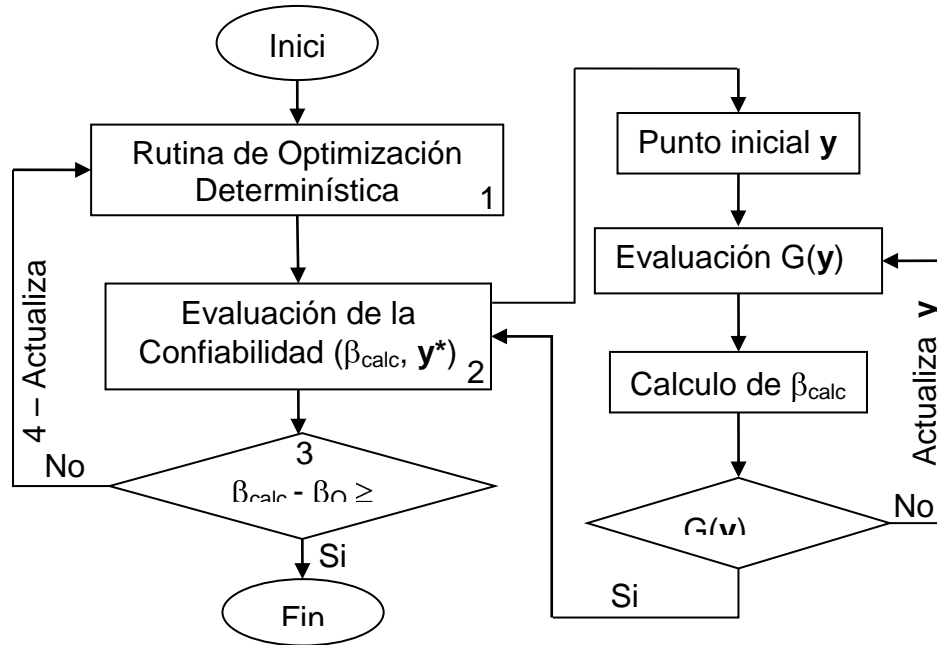
$$d_{inf} - d_k \leq j \leq d_{sup} - d_k$$

Siendo que: B_k es una aproximación positiva definida para la matriz Hessiana; k corresponde a la iteración actual. Además es interesante destacar que en ese subproblema, la variable de optimización d para a ser la dirección de búsqueda j . Una vez encontrado un valor para la dirección de búsqueda, esta es usada para encontrar un nuevo punto de d , o sea:

$$d_{k+1} = d_k + \lambda d_k, \text{ con } \lambda \in (0,1]$$

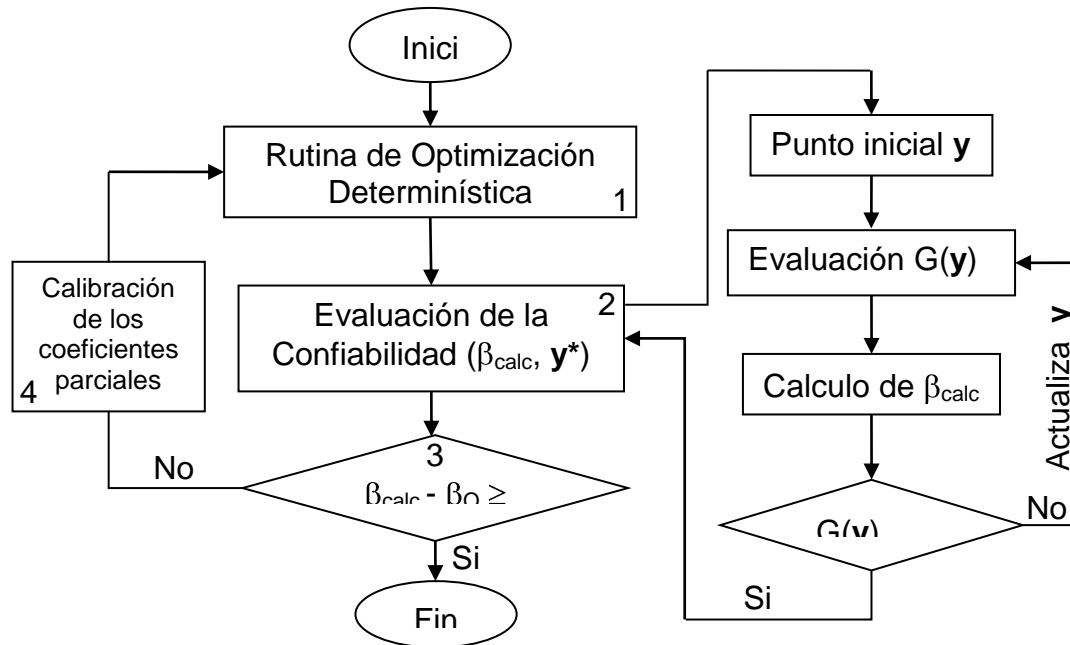
A la medida que el algoritmo se aproxima al mínimo de la función, la dirección de búsqueda j va recibiendo un valor cada vez menor, hasta una tolerancia preestablecida. Cuando el punto mínimo no es alcanzado, se actualiza B_k a partir del algoritmo BFGS, el cual realiza una optimización no lineal a partir de una variación del método de Newton, este método asume que la función puede ser localmente aproximada como una función cuadrática y busca de esa forma el punto de estacionario o de derivada nula (Azevedo Costa et. al, 2009).

ANEXO B – Diagrama de flujo para el modelo RBDO para elementos.



- 1) La rutina de optimización determinística es realizada mediante el método establecido en el Anexo A, bajo las consideraciones del capítulo 3, sección 3.2. Al final de la rutina se obtiene la configuración óptima de la sección analizada.
- 2) En este segundo paso, es evaluada la confiabilidad para la configuración óptima, basados en la ecuación de estado límite establecida en el capítulo 3, sección 3.1.2. En ese proceso es calculado el índice de confiabilidad para el cual la ecuación de estado límite es cero, así como el punto del proyecto.
- 3) El criterio de parada del RBDO es que el índice de confiabilidad calculado sea igual o un cierto valor mayor (depende de la tolerancia) del índice de confiabilidad objetivo β_0 , si no cumplierse con este criterio, el algoritmo continua en el paso 4.
- 4) Al no cumplirse el criterio de parada del RBDO, las variables aleatorias son actualizadas basadas en el punto del proyecto hasta encontrar una configuración que satisfaga todos los criterios.

ANEXO C – Diagrama de flujo para el modelo RBDO – SF para elementos.



- 1) La rutina de optimización determinística posee las mismas consideraciones y restricciones para el caso del problema clásico de RBDO, la diferencia radica en que los coeficientes de parciales de seguridad van cambiando en cada iteración, de no cumplir con el índice de confiabilidad objetivo, así, el proceso inicia con los coeficientes establecidos por la norma, pero al continuar el algoritmo estos van variando de valor por medio de una calibración.
- 2) En este segundo paso, es evaluada la confiabilidad para la configuración óptima, basados en la ecuación de estado límite establecida en el capítulo 3, sección 3.1.2. En ese proceso es calculado el índice de confiabilidad para el cual la ecuación de estado límite es cero, así como el punto del proyecto.
- 3) El criterio de parada del RBDO es que el índice de confiabilidad calculado sea igual o un cierto valor mayor (depende de la tolerancia) del índice de confiabilidad objetivo β_0 , si no cumpliera con este criterio, el algoritmo continúa en el paso 4.

- 4) La calibración de los coeficientes parciales es realizada conforme lo visto en la sección 2.3.3, los cuales son calibrados en función de los índices de confiabilidad objetivos de cada modo de falla, con sus respectivos puntos de proyecto y^* , ya que estos reflejan la sensibilidad de cada variable en el proceso. De esta forma, las variables más influyentes reciben una mayor calibración, haciendo que el proceso de calibración sea más sensible a esa variable.