

Análisis teórico y numérico de EDP con difusión cruzada describiendo dinámicas poblacionales  
en fluidos

Carlos Mateo Beltrán Larrotta

Trabajo de Grado para optar al título de Magíster en Matemática Aplicada

Director

Diego Armando Rueda Gómez

Doctor en Matemáticas

Codirector

Élder Jesús Villamizar Roa

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2022

### **Dedicatoria**

Dedicado a Luis Ignacio Beltrán Zapata, mi maestro de vida; Amanda del Pilar Larrotta, la dueña de mi corazón; a Johanna Gabriela Niño Rojas, la dueña de mi vida.

### **Agradecimientos**

Agradezco a Dios por prestarme entendimiento, paciencia, salud y vida para cumplir con este trabajo.

A mi familia y en especial a mis padres, Amanda del Pilar Larrotta Jaimes y Luis Ignacio Beltrán Zapata, quienes han sido parte fundamental y funcional del motor de mi vida.

A mi novia, Jhoanna Gabriela Niño Rojas, por apoyarme y estar a mi lado en todo este proceso.

A mis directores Diego Armando Rueda Gómez y Élder Jesús Villamizar Roa, por abrirme las puertas sin miramientos en este trabajo, por la dedicación, disposición, apoyo, paciencia y entrega a lo largo de este proceso. Sus aportes, conocimientos, observaciones y sugerencias permitieron el desarrollo del presente trabajo. Fue un honor haber trabajado con personas con tanta sencillez, bondad, humildad y calidad humana.

A mis evaluadores Jhean Eleison Perez Lopez y María Ángeles Rodriguez Bellido, por la disposición y su participación de este trabajo.

A los profesores Rafael Fernando Isaacs Giraldo, Tulia Esther Rivera Flórez, Julio Cesar

Carrillo y Gilberto Arenas Díaz por prestarme el gran voto de confianza y su apoyo.

A mis amigos Sergio Andrés Jimenez Jerez, Johan Camilo Cancino Rey, Cristian Humberto Sanchez Brito, Luis Augusto Martinez y Jairo Andrés Gomez Florez por su compañía y apoyo emocional en este proceso.

A todos los Colombianos que pagan sus impuestos, que gracias a ellos, me fue posible acceder a una educación superior.

**Tabla de Contenido**

<b>Introducción</b>	<b>9</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>15</b>
<b>2. Análisis teórico</b>	<b>23</b>
2.1. Definición de solución débil y solución fuerte	25
2.2. Existencia de soluciones débiles del sistema (4)-(5)	26
2.2.1. Soluciones aproximadas	26
2.2.2. Estimativas uniformes	34
2.2.3. Paso al límite	42
2.3. Regularidad de las soluciones débiles	48
<b>3. Análisis numérico</b>	<b>62</b>
3.1. Formulación débil equivalente	63
3.2. Esquema numérico	65
3.2.1. Operadores de interpolación	66
3.2.2. Definición del esquema numérico	69
3.3. Buena postura y estimaciones uniformes	70
3.4. Estimaciones de error en normas débiles	76

3.5. Verificación de la hipótesis inductiva (108)	94
<b>4. Simulaciones numéricas</b>	<b>96</b>
4.1. Experimento 1. Dinámicas poblacionales en fluidos con difusión cruzada	96
4.2. Experimento 2. Exploración numérica	105
4.3. Experimento 3. Tasas de convergencia	106
<b>5. Conclusiones</b>	<b>110</b>
<b>6. Trabajos futuros</b>	<b>112</b>
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>113</b>

## Resumen

**Título:** Análisis teórico y numérico de EDP con difusión cruzada describiendo dinámicas poblacionales en fluidos \*

**Autor:** Carlos Mateo Beltrán Larrotta \*\*

**Palabras Clave:** Competición interespecies, quimioatracción con consumo, sistema de Navier-Stokes, soluciones débiles y fuertes, elementos finitos, estimaciones de error óptimas.

**Descripción:** Este trabajo está dedicado al análisis teórico y numérico de un modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes considerando dos especies de organismos con una dinámica competitiva descrita por términos de competencia del tipo Lotka-Volterra en un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Primero, estudiamos la existencia de soluciones débiles globales y establecemos un criterio de regularidad que proporciona condiciones suficientes para asegurar la regularidad fuerte de las soluciones débiles. Luego, proponemos un esquema numérico basado en el método de elementos finitos en el que usamos una técnica tipo *splitting* obtenida introduciendo una variable auxiliar dada por el gradiente de la concentración química y aplicando una estrategia inductiva, para tratar los términos de quimioatracción en las ecuaciones de las dos especies de organismos y probar estimaciones de error óptimas. Para este esquema, estudiamos el buen planteamiento y obtuvimos algunas estimaciones uniformes para las variables discretas requeridas en el análisis de convergencia. Finalmente, presentamos algunas simulaciones numéricas orientadas en comprobar el buen comportamiento de nuestro esquema, así como para comprobar numéricamente las estimaciones de error óptimas probadas en nuestro análisis teórico.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas. Codirector: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas.

### Abstract

**Title:** Theoretical and numerical analysis of PDE with cross diffusion describing population dynamics in fluids \*

**Author:** Carlos Mateo Beltrán Larrotta \*\*

**Keywords:** Interspecies competition, chemoattraction-consumption, Navier-Stokes system, weak and strong solutions, finite elements, optimal error estimates.

**Description:** This work is devoted to the theoretical and numerical analysis of a two-species chemotaxis-Navier-Stokes system with Lotka-Volterra competitive kinetics in a bounded domain of  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . First, we study the existence of global weak solutions and establish a regularity criterion which provides sufficient conditions to ensure the strong regularity of the weak solutions. After, we propose a finite element numerical scheme in which we use a splitting technique obtained by introducing an auxiliary variable given by the gradient of the chemical concentration and applying an inductive strategy, in order to deal with the chemoattraction terms in the two-species equations and prove optimal error estimates. For this scheme, we study the well-posedness and derive some uniform estimates for the discrete variables required in the convergence analysis. Finally, we present some numerical simulations oriented to verify the good behavior of our scheme, as well as to check numerically the optimal error estimates proved in our theoretical analysis.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas. Codirector: Élder Jesús Villamizar Roa, Doctor en Matemáticas.

### Introducción

Se denomina *quimiotaxis* al proceso biológico que describe el movimiento de un determinado grupo (o grupos) de organismos en respuesta a un estímulo químico presente en su ambiente. Cuando los organismos dirigen sus movimientos hacia regiones con altas concentraciones de la señal química, el fenómeno es denominado *quimioatracción*; mientras que, si el movimiento se da hacia los lugares donde hay bajas concentraciones del químico, se denomina *quimiorepulsión*. Un ejemplo típico de quimiotaxis es la ameba *Dictyostelium*, que es una especie de ameba que vive en el suelo y que pertenece al filo *Mycetozoa*. Estos son organismos unicelulares que, cuando se están quedando sin bacterias (su principal fuente de alimento), comienzan un proceso complejo de señalización mediante el cual segregan un químico que atrae a otras amebas, llegando a formar una estructura multicelular (Francesco et al., 2010). Este tipo de fenómenos, que juegan un papel destacado en una amplia gama de aplicaciones biológicas, son modelados, en su forma más simple, por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales, conocido en la literatura como el modelo de Keller-Segel:

$$\begin{cases} \partial_t n = D_n \Delta n - \nabla \cdot (\chi n \nabla c), \\ \partial_t c = D_c \Delta c + \alpha n - \beta c, \end{cases} \quad (1)$$

donde  $c$  y  $n$  denotan la concentración de la señal química y la densidad de células, respectivamente. La función  $\alpha n - \beta c$  modela la producción-consumo del químico, mientras que el término de difusión cruzada  $\nabla \cdot (\chi n \nabla c)$  modela el transporte de las células hacia altas concentraciones de la

señal (si  $\chi > 0$ ), y hacia bajas concentraciones (si  $\chi < 0$ ).

El modelo (1) ha sido modificado en las ultimas décadas con el objetivo de describir otros fenómenos físicos y biológicos. Una extensión del modelo (1) consiste en considerar competición interespecies y quimiotaxis (ver por ejemplo, (Tello and Wrzosek, 2018) en el contexto de quimiorepulsión y (Jin and Xiang, 2019) en quimioatracción). Aquí se considera, además de la quimiotaxis, términos de competición de tipo Lotka-Volterra (Lotka, 1925; Volterra, 1926), los cuales modelan la interacción de dos especies de organismos que se dispersan al azar en una determinada región que ocupan conjuntamente, donde compiten por sobrevivir. Lo anterior, puede ser modelado a través del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{cases} \partial_t n = D_n \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \mu_1 n (1 - n - a_1 w), \\ \partial_t w = D_w \Delta w - \chi_2 \nabla \cdot (w \nabla c) + \mu_2 w (1 - a_2 n - w), \\ \partial_t c = D_c \Delta c + g(n, w, c), \end{cases} \quad (2)$$

donde  $n \geq 0$  y  $w \geq 0$  denotan las densidades de las especies competidoras, y  $c \geq 0$  representa la densidad de la señal química. Los términos adicionales  $\mu_1 n (1 - n - a_1 w)$  y  $\mu_2 w (1 - a_2 n - w)$  representan las relaciones interespecíficas e intraespecíficas de los organismos de la primera especie y de la segunda especie respectivamente, donde  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  representan las tasas de crecimiento poblacional y  $a_1, a_2 \geq 0$  la fuerza de la competencia; mientras que la expresión  $g(n, w, c)$  representa la producción o consumo de la sustancia química por parte de las especies.

Finalmente, en la naturaleza, las células y los organismos pueden vivir y desarrollarse en un fluido viscoso incompresible y las sustancias químicas son transportadas por el fluido. Este tipo de interacción puede modelarse mediante un acoplamiento del sistema (2) (o el sistema (1) o modelos relacionados) con las ecuaciones de Navier-Stokes; las cuales modelan la dinámica de un fluido viscoso e incompresible, y están dadas por el siguiente sistema de EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + k(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - D_{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} + \nabla \pi = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

En el sistema (3), las incógnitas son el campo de velocidades  $\mathbf{u}$  y la presión  $\pi$ , del fluido, mientras que  $\mathbf{f}$  denota el campo de fuerzas externas a las cuales está sometido el fluido. El término  $k(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  recibe el nombre de término de transporte, mientras que  $D_{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$  es el término de difusión, siendo  $D_{\mathbf{u}}$  la viscosidad cinemática del fluido.

En esta tesis se consideró el siguiente sistema parabólico de EDP que acopla el modelo de quimiotaxis-Lotka-Volterra (2) con las ecuaciones de Navier-Stokes (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n + \mathbf{u} \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c) + \mu_1 n (1 - n - a_1 w), \\ \partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla w = D_w \Delta w - \chi_2 \nabla \cdot (w \nabla c) + \mu_2 w (1 - a_2 n - w), \\ \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D_c \Delta c - (\alpha n + \beta w) c, \\ \partial_t \mathbf{u} + k(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = D_u \Delta \mathbf{u} + \nabla \pi + (\gamma n + \lambda w) \nabla \phi, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

en  $\Omega \times (0, T)$ , siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) un dominio acotado y  $T > 0$ . En este modelo, la sustancia química es consumida por ambas especies con tasas de consumo  $\alpha, \beta \geq 0$ ; además ambas especies de organismos y la sustancia química son transportadas por un fluido incompresible (representado por los términos de transporte  $\mathbf{u} \cdot \nabla n, \mathbf{u} \cdot \nabla w, \mathbf{u} \cdot \nabla c$ ) cuya dinámica es modelada por las ecuaciones de Navier-Stokes bajo la influencia de la fuerza de flotación descrita por el término  $(\gamma n + \lambda w) \nabla \phi$ .

El sistema (4) se completa con los siguientes datos iniciales y condiciones de frontera:

$$\left\{ \begin{array}{l} [n(x, 0), w(x, 0), c(x, 0), \mathbf{u}(x, 0)] = [n_0(x), w_0(x), c_0(x), \mathbf{u}_0(x)], \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial n(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu} = \frac{\partial c(x, t)}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{u}(x, t) = 0, \quad x \in \partial \Omega, \quad t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (5)$$

donde  $\nu$  denota el vector normal exterior unitario a la frontera de  $\Omega$ , la cual se denota por  $\partial \Omega$ .

El sistema (4)-(5) fue propuesto por Hirata et al. en (Hirata et al., 2017) como una generalización del modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes. El primer modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes fue propuesto en (Tuval et al., 2005) describiendo las interacciones entre una población celular y una señal química con un entorno líquido. De hecho, en (Dombrowski et al. (2004); Tyson et al.

(1999); Winkler (2012)) se observó que cuando las bacterias de la especie *Bacillus subtilis* se suspenden en agua, algunos patrones espaciales pueden emerger espontáneamente para distribuciones inicialmente homogéneas.

En este trabajo se estudia la existencia global de soluciones débiles para (4)-(5). La noción de solución débil que consideramos aquí generaliza de alguna manera la que se presenta en trabajos previos como el desarrollado por Zheng y Willie en (Zheng and Willie, 2020). Así mismo, en relación con la existencia de soluciones débiles, vale la pena señalar que la unicidad de las soluciones débiles en 3D es un problema abierto; en consecuencia, motivados por los resultados en (Guillén-González et al., 2020a; López-Ríos and Villamizar-Roa, 2021), el segundo objetivo de este trabajo es establecer un criterio de regularidad para obtener soluciones fuertes globales en el tiempo.

Por otra parte, hasta donde sabemos, para el modelo (4)-(5) en el cual la difusión por la quimiotaxis, los términos de competencia del tipo Lotka-Volterra y la interacción de un fluido son combinados, no hay trabajos que traten el análisis numérico. Por esta razón, el tercer objetivo de este trabajo de grado es desarrollar el análisis numérico del modelo (4)-(5). Vale la pena señalar que los mecanismos de difusión cruzada que gobiernan los fenómenos quimiotácticos y la dinámica no lineal causada por su acoplamiento con la interacción entre especies competidoras y el fluido, hicieron que el modelo (4)-(5) fuese numéricamente desafiante. Aquí, proponemos un esquema numérico de elementos finitos en el que, para tratar con los términos de quimioatracción en

las ecuaciones de las dos especies y los otros términos no lineales provenientes de la competencia entre especies y el consumo de la señal química, usamos una técnica de tipo *splitting* obtenida al introducir una variable auxiliar dada por  $\mathbf{s} = \nabla c$  y aplicamos una estrategia inductiva. Esta idea nos permite probar estimaciones de error óptimas.

El documento está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo, se introducen algunas notaciones básicas, resultados preliminares y necesarios para el desarrollo de este trabajo. En el segundo capítulo, se establecen los resultados principales correspondientes al problema continuo. Específicamente, se prueba la existencia de soluciones débiles del sistema (4)-(5) y un criterio de regularidad bajo el cual, las soluciones débiles de (4)-(5) son también soluciones fuertes. En el tercer capítulo, se define una formulación variacional equivalente a (4)-(5), a partir de la cual se construye la aproximación numérica usando el método de elementos finitos. Se demuestra que este esquema numérico está bien puesto y se prueban algunas estimaciones uniformes para cualquier solución discreta, las cuales son necesarias en el análisis de convergencia del esquema numérico. En el capítulo 4, se muestran algunas simulaciones numéricas realizadas, que evidencian resultados consistentes con los obtenidos en el análisis teórico. Finalmente, se enuncian las principales conclusiones obtenidas de este trabajo y se proponen algunos trabajos futuros.

## 1. Preliminares

Iniciamos recordando algunas notaciones básicas y resultados preliminares que serán usados a lo largo de este trabajo. A partir de ahora, se considera  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$  con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^{2,1}$ . La razón de asumir esta regularidad para la frontera se sustenta en los resultados de regularidad parabólicos y elípticos que son usados con frecuencia en este trabajo. Así mismo, se usarán los espacios de Lebesgue y Sobolev,  $L^p(\Omega)$  y  $W^{k,p}(\Omega)$ , con sus respectivas normas  $\|\cdot\|_{L^p}$  y  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ . En particular, denotaremos  $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$ . También,  $W_0^{1,p}(\Omega)$  denotará los elementos de  $W^{1,p}(\Omega)$  con traza cero sobre  $\partial\Omega$ . El producto interno en  $L^2(\Omega)$  será representado por  $(\cdot, \cdot)$ . Además, se considera el espacio  $L_\sigma^2(\Omega)^d$  definido por la clausura de  $\{\mathbf{u} \in C_0^\infty(\Omega)^d, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$  en  $L^2(\Omega)$  y los siguientes espacios funcionales

$$V := \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d : \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega\}, \quad H_s^1(\Omega) := \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \int_\Omega p = 0 \right\},$$

donde  $\mathbf{v}$  denota el vector unitario normal apuntando hacia afuera de  $\partial\Omega$ . Se usará la siguiente norma equivalente en  $H_s^1(\Omega)$  la cual ha sido introducida en (Amrouche and Seloula, 2013, Corollary 3.5):

$$\|\mathbf{s}\|_{H^1}^2 = \|\mathbf{s}\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } \mathbf{s}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{s}\|_{L^2}^2, \quad \forall \mathbf{s} \in H_s^1(\Omega), \quad (6)$$

y las bien conocidas desigualdades de Poincaré e inmersión de Sobolev:

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C_P \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad (7)$$

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^2}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \quad (8)$$

para constantes  $C_P, C > 0$ , que dependen de  $\Omega$ , pero son independientes de  $\mathbf{v}$  y  $u$ , respectivamente.

Además, se consideran las desigualdades clásicas de interpolación

$$\|u\|_{L^3} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{L^6}^{1/2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (d = 3), \quad (9)$$

$$\|u\|_{L^4} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/4} \|u\|_{H^1}^{3/4}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (d = 3), \quad (10)$$

$$\|u\|_{L^5} \leq C \|u\|_{L^2}^{1/10} \|u\|_{H^1}^{9/10}, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad (d = 3). \quad (11)$$

También se considera el operador de Stokes  $A := -P\Delta$ , cuyo dominio es  $D(A) = V \cap H^2(\Omega)^d$ , donde  $P : L^2(\Omega)^d \rightarrow L_G^2(\Omega)^d$  es el proyector de Leray. A lo largo de este trabajo, se considera el intervalo de tiempo fijo pero arbitrario  $(0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ . Para un espacio de Banach  $Y$ , denotamos por  $L^p(Y) := L^p(0, T; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , al espacio de Bochner de funciones integrables definidas en el intervalo  $[0, T]$  con valores en  $Y$ , dotado de la norma usual  $\|\cdot\|_{L^p(Y)}$ . También se define el espacio  $C(Y) := C([0, T]; Y)$  de funciones continuas de  $[0, T]$  en  $Y$ , cuya norma es  $\|\cdot\|_{C(Y)}$ . Así mismo, denotamos el producto entre  $Y$  y su espacio dual  $Y'$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y'}$  o simplemente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si no hay ambigüedades. Por simplicidad denotaremos de la misma forma los espacios de funciones de valor escalar y valor vectorial. También, la letra  $C$  denotará diferentes constantes positivas (independientes de los parámetros discretos) la cual podrá cambiar entre línea y línea o incluso en la misma línea.

Con el objetivo de analizar propiedades de existencia y regularidad de las soluciones del modelo (4)-(5), se usará el siguiente resultado de regularidad parabólica presentado en (Feireisl and Novotný, 2009, Teorema 10.22).

**Teorema 1.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $C^2$ ,  $1 < p, q < \infty$ . Suponga que  $f \in L^p(L^q)$ ,  $u_0 \in Z_{p,q} = \{L^q(\Omega); \mathcal{D}(\Delta_{\mathcal{N}})\}_{1-1/p,p}$ ,  $\mathcal{D}(\Delta_{\mathcal{N}}) = \{w \in W^{2,q}(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ , donde  $\{;\cdot\}_{\cdot,\cdot}$  denota el espacio de interpolación real. Entonces, el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

*admite una única solución  $u$  tal que  $u \in C(Z_{p,q}) \cap L^p(W^{2,q})$ ,  $\partial_t u \in L^p(L^q)$ . Mas aún, existe una constante positiva  $C := C(p, q, \Omega, T)$  tal que*

$$\|u(t)\|_{C(Z_{p,q})} + \|\partial_t u\|_{L^p(L^q)} + \|\Delta u\|_{L^p(L^q)} \leq C(\|f\|_{L^p(L^q)} + \|u_0\|_{Z_{p,q}}).$$

Si  $p = q$ , se tiene que

$$Z_{p,p} = \widehat{W}^{2-2/p,p} = \begin{cases} W^{2-2/p,p}(\Omega), & \text{si } p < 3, \\ \left\{ u \in W^{2-2/p,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}, & \text{si } p > 3. \end{cases}$$

Además, denotaremos por  $\mathcal{X}_p$  el espacio

$$\mathcal{X}_p = \{u \in C(Z_{p,p}) \cap L^p(W^{2,p}) : \partial_t u \in L^p(L^p)\}.$$

Ahora, se presentan algunos resultados relativos a inmersiones entre espacios de Lebesgue, Sobolev y Bochner, los cuales serán de utilidad a lo largo de este trabajo, especialmente en el análisis teórico del modelo bajo estudio (ver, por ejemplo, (Lions and Magenes, 1968, p.49)).

**Lema 1.2.** Sean  $p, q, p_1, p_2, q_1, q_2 \geq 1$  tales que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \quad \text{con } \theta \in [0, 1].$$

Entonces,  $L^{p_1}(L^{q_1}) \cap L^{p_2}(L^{q_2}) \hookrightarrow L^p(L^q)$ .

**Lema 1.3.** Sean  $r, s > 0$  y  $1 < p < 2$ ; entonces la siguiente inmersión entre espacios de Sobolev se tiene

$$W^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega), \quad \text{con } s = d \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + r. \quad (12)$$

**Lema 1.4.** Sean  $p, p_1, p_2 \geq 1$  y  $s_1, s_2 \geq 0$  tales que

$$s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } \theta \in [0, 1].$$

Entonces,  $L^{p_1}(H^{s_1}) \cap L^{p_2}(H^{s_2}) \hookrightarrow L^p(H^s)$ .

**Lema 1.5.** Sean  $p, q, p_1, p_2, q_1 \geq 1$  tales que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \theta \left( \frac{1}{p_1} - \frac{r}{d} \right), \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } r > 0 \text{ y } \theta \in [0, 1].$$

Entonces,  $L^\infty(L^{q_1}) \cap L^{p_2}(W^{r,p_1}) \hookrightarrow L^p(L^q)$ .

*Nota.* Obsérvese que para  $q_1 = 6, p_1 = p_2 = 2$  y  $r = 2$  se tiene que  $L^\infty(L^6) \cap L^2(W^{2,2}) \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$

de donde se concluye que  $\mathcal{X}_2 \hookrightarrow L^\infty(L^6) \cap L^2(W^{2,2}) \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$ .

**Lema 1.6.** (Feireisl and Novotný (2009)) Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un dominio acotado. Entonces se satisface la siguiente desigualdad de interpolación:

$$\|v\|_{W^{\alpha,r}(\Omega)} \leq \|v\|_{W^{\beta,p}(\Omega)}^\lambda \|v\|_{W^{\gamma,q}(\Omega)}^{1-\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

para  $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1, 1 < p, q, r < \infty, \alpha = \lambda\beta + (1-\lambda)\gamma, \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}$ .

Por otra parte, para el diseño del esquema de aproximación y su posterior análisis numérico, se usarán las siguientes definiciones y resultados:

**Definición 1.7.** ((Brenner, 2007, p.79) Triangulación): Sea  $\Omega$  un poliedro de  $\mathbb{R}^d$ . Una triangulación de  $\bar{\Omega}$  es un conjunto  $\mathcal{T}_h$  de triángulos (en 2D) o tetraedros (en 3D),  $(K_i)_{i=1}^N$ , los cuales satisfacen:

- $K_i \subset \bar{\Omega}$  y  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N K_i$ .
- La intersección de  $K_i$  y  $K_j$  (dos triángulos o tetraedros) distintos es:
  - En 2D: vacía, un vértice en común, o un lado en común.
  - En 3D: vacía, un vértice en común, una arista en común o una cara en común.

**Definición 1.8.** ((Brenner, 2007, p.107) Triangulación cuasiuniforme): Una familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  de  $\Omega$  es llamada cuasiuniforme, si existen constantes positivas  $C_1, C_2$ , tales que para cada  $K \in \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ :

$$C_1 h \leq \rho(K) \quad \text{y} \quad \text{diam}(K) \leq C_2 h,$$

donde  $\rho(K)$  es el diámetro del mayor círculo inscrito en  $K$  y  $diam(K)$  es el diámetro del menor círculo que contiene a  $K$ .

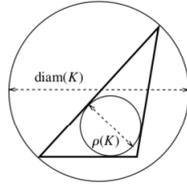


Figura 1.  $diam(K)$  y  $\rho(K)$  para un triángulo  $K$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.9.** ((Brenner, 2007, p.108) mallado regular): Una familia de triangulaciones  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  de  $\Omega$  es llamada regular o no degenerada, si existe  $\hat{\alpha} > 0$ , tal que para todo  $K \in \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ :

$$\rho(K) > \hat{\alpha} diam(K),$$

donde  $\rho(K)$  y  $diam(K)$  son como en la Definición 1.8.

En la discretización espacial para el desarrollo del correspondiente análisis numérico, será necesario considerar una familia de triangulaciones regulares y cuasiuniformes de  $\Omega$ . Por un lado, se requerirá que el mallado sea regular para asegurar la obtención de estimaciones para los operadores de interpolación que serán definidos en el Capítulo 3; mientras que la condición de ser cuasiuniforme, es requerida para el uso del siguiente resultado que establece una desigualdad inversa general, la cual será usada en algunos casos particulares.

**Teorema 1.10.** ((Brenner, 2007, p.111) Desigualdad inversa) Sea  $K$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  una familia de triangulaciones cuasiuniformes y  $P$  un subespacio finito dimensional de  $W^{l,p}(K) \cap W^{m,q}(K)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  y  $0 \leq m \leq l$ . Entonces, existe una constante positiva

*C tal que, para todo  $v \in P$ , se tiene*

$$\|v\|_{W^{l,p}} \leq Ch^{m-l+d/p-d/q} \|v\|_{W^{m,q}}. \quad (13)$$

Una de las dificultades que surge al lidiar con los términos de transporte en el análisis numérico, es que a nivel discreto las formas trilineales asociadas no preservan la misma propiedad de alternancia que en el problema continuo (puesto que es bien conocido que la condición de divergencia nula no se puede imponer en el espacio de elementos finitos para el campo de velocidades

**u**). Por esta razón, necesitamos introducir las siguientes formas trilineales:

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right) - \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \right) \right], \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in H^1(\Omega), \quad (14)$$

$$A(\mathbf{v}, w_1, w_2) = \frac{1}{2} \left[ \left( (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_1, w_2 \right) - \left( (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_2, w_1 \right) \right], \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), w_1, w_2 \in H^1(\Omega), \quad (15)$$

las cuales satisfacen las siguientes propiedades

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \right), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in H^1(\Omega), \quad (16)$$

$$A(\mathbf{v}_1, w_1, w_2) = \left( (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) w_1, w_2 \right), \quad \forall \mathbf{v}_1 \in V, w_1, w_2 \in H^1(\Omega), \quad (17)$$

$$B(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H^1(\Omega), \quad (18)$$

$$A(\mathbf{v}, w, w) = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \mathbf{v} \in H^1(\Omega). \quad (19)$$

Estas formas trilineales serán importantes para aproximar los términos de transporte en las ecuaciones de los organismos, la sustancia química y el campo de velocidades.

Para finalizar esta sección, se presenta el siguiente lema que será de gran utilidad en la obtención de estimaciones uniformes de las variables discretas y el correspondiente análisis de convergencia.

**Lema 1.11.** ((Heywood and Rannacher, 1990, p. 369)) *Asuma que  $\Delta t > 0$  y  $B, b^k, d^k, g^k, h^k \geq 0$  satisfacen*

$$d^{m+1} + \Delta t \sum_{k=0}^m b^{k+1} \leq \Delta t \sum_{k=0}^m g^k d^k + \Delta t \sum_{k=0}^m h^k + B, \quad \forall m \geq 0.$$

*Entonces*

$$d^{m+1} + \Delta t \sum_{k=0}^m b^{k+1} \leq \exp \left( \Delta t \sum_{k=0}^m g^k \right) \left( \Delta t \sum_{k=0}^m h^k + B \right), \quad \forall m \geq 0.$$

En lo que sigue de este trabajo y por simplificar la escritura, consideramos  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ; sin embargo, los resultados pueden ser reescritos para dominios bidimensionales, inclusive con simplificaciones desde el punto de vista técnico.

## 2. Análisis teórico

Desde el punto de vista teórico, el sistema (4)-(5) ha sido estudiado para dominios bidimensionales y tridimensionales. El trabajo realizado por Hirata et al. en (Hirata et al., 2017) estudió la existencia global, la acotación uniforme y la estabilidad de las soluciones en dominios bidimensionales, mientras que en el trabajo realizado por Cao et al. en (Cao et al., 2018) se estudió el caso tridimensional con  $k = 0$ , esto es, se consideró el sistema de Stokes en lugar del modelo de Navier-Stokes. En (Jin and Xiang, 2019) se analizó la convergencia con tasas explícitas para soluciones globales clásicas acotadas en dominios  $d$ -dimensionales ( $d = 2, 3$ ) para diferentes elecciones de los parámetros  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ). La existencia global de soluciones débiles en el caso tridimensional (con  $k \neq 0$ ) fue estudiada en (Zheng and Willie, 2020); más exactamente se probó que para datos iniciales que satisfacen

$$0 < n_0, w_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad 0 < c_0 \in W^{1,q}(\Omega), \quad \mathbf{u}_0 \in D(A^\theta), \quad \phi \in C^{1+\eta}(\bar{\Omega}),$$

para algunos  $q > 3$ ,  $\theta \in (\frac{3}{4}, 1)$  y  $\eta \in (0, 1)$ , existe  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  solución débil global en la clase

$$n, w \in L^2_{loc}([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap L^{4/3}_{loc}([0, \infty); W^{1,4/3}(\Omega)), \quad c \in L^2_{loc}([0, \infty); H^1(\Omega)), \quad \mathbf{u} \in L^2_{loc}([0, \infty); V),$$

que satisface (4)-(5) en el sentido variacional. Además, existen  $T > 0$  y  $\gamma \in (0, 1)$  tales que la solución débil satisface que  $[n, w, c, \mathbf{u}] \in C^{2+\frac{\gamma}{2}}([T, \infty); C^{2+\gamma}(\bar{\Omega}))^6$ . La prueba se sigue de las ideas de los trabajos (Winkler, 2016; Lankeit, 2016). De hecho, la solución débil se obtiene como el límite de

soluciones débiles de problemas adecuadamente regularizados, donde propiedades de compacidad apropiadas se obtienen sobre la base de algunas estimaciones *a priori*. La existencia de la solución clásica de los problemas regularizados se obtiene aplicando teoría de semigrupos para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones locales débiles, y luego, se extienden tales soluciones usando estimaciones *a priori*.

En este capítulo se estudia la existencia global de soluciones débiles para (4)-(5), así como propiedades de regularidad. La noción de solución débil presentada en este trabajo es más débil que la presentada en (Zheng and Willie, 2020) en el sentido de que nuestra definición establece que la ecuación de la sustancia quimioatrayente se satisface para casi todo punto en  $\Omega \times (0, T)$ , y la clase de los datos iniciales, además de la  $\phi$ , es mayor que la presentada en (Zheng and Willie, 2020). Para probar la existencia de solución débil, consideramos una familia de soluciones fuertes de un problema regularizado adecuado, que difiere de lo considerado en (Zheng and Willie, 2020). De hecho, presentamos un desacoplamiento a través de un problema auxiliar elíptico que permite ganar regularidad para la ecuación de la sustancia química, así como obtener una desigualdad de energía después de tomar funciones *test* y combinar convenientemente las ecuaciones de las densidades y la concentración. Así mismo, en relación con la existencia de soluciones débiles, vale la pena señalar que la unicidad de las soluciones débiles en dominios tridimensionales es un problema abierto; en consecuencia, motivados por los resultados en (Guillén-González et al., 2020a; López-Ríos and Villamizar-Roa, 2021), el segundo objetivo de este capítulo es establecer un criterio de regularidad para obtener soluciones fuertes globales en el tiempo.

### 2.1. Definición de solución débil y solución fuerte

**Definición 2.1.** (Solución débil de (4)-(5)) Sean  $0 < T < \infty$ ,  $\nabla\phi \in L^\infty(\Omega)$ ,  $n_0, w_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $c_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $q > 3$ ,  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)$  y  $n_0, w_0, c_0 \geq 0$  en  $\Omega$ . Diremos que una cuádrupla  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  es una solución débil de (4)-(5) si

$$\begin{aligned} n, w &\in L^2(L^2) \cap L^{5/4}(W^{1,5/4}), \quad \partial_t n, \partial_t w \in L^1((W^{1,5})'), \\ c &\in L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2), \quad \partial_t c \in L^{5/3}(L^{5/3}), \\ \mathbf{u} &\in L^\infty(L^2) \cap L^2(V), \quad \partial_t \mathbf{u} \in L^{5/3}((W^{1,5/2})'), \end{aligned}$$

se satisface la ecuación (4)<sub>3</sub> c.t.p  $(x, t)$  en  $\Omega \times (0, T)$ , y se verifica

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t n, \varphi_1 \rangle + \int_0^T \int_\Omega [D_n \nabla n - n\mathbf{u} - \chi_1 n \nabla c] \cdot \nabla \varphi_1 &= \mu_1 \int_0^T \int_\Omega n(1 - n - a_1 w) \varphi_1, \\ \int_0^T \langle \partial_t w, \varphi_2 \rangle + \int_0^T \int_\Omega [D_w \nabla w - w\mathbf{u} - \chi_2 w \nabla c] \cdot \nabla \varphi_2 &= \mu_2 \int_0^T \int_\Omega w(1 - a_2 n - w) \varphi_2, \\ \int_0^T \langle \partial_t \mathbf{u}, \psi \rangle + \int_0^T \int_\Omega [D_{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{u} - k\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}] \cdot \nabla \psi &= \int_0^T \int_\Omega (\gamma n + \lambda w) \nabla \phi \cdot \psi, \end{aligned}$$

para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty(W^{1,5})$  y  $\psi \in L^{5/2}(W^{1,5/2})$ .

**Definición 2.2.** (Solución fuerte de (4)-(5)) Sean  $\nabla\phi \in L^\infty(\Omega)$ ,  $[n_0, w_0, c_0, \mathbf{u}_0] \in \widehat{W}^{3/2,4} \times \widehat{W}^{3/2,4} \times \widehat{W}^{3/2,4} \times V$  y  $n_0, w_0, c_0 \geq 0$  en  $\Omega$ . Diremos que una cuádrupla  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  es una solución fuerte de (4)-(5) con

$$[n, w, c, \mathbf{u}] \in \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_4 \times \mathcal{X}_2,$$

si satisface (5) y se cumple (4) c.t.p  $(x,t)$  de  $\Omega \times (0, T)$ .

## 2.2. Existencia de soluciones débiles del sistema (4)-(5)

El objetivo de esta sección es probar la existencia de soluciones débiles del sistema (4)-(5), que es el contenido del siguiente teorema.

**Teorema 2.3.** *(Existencia de soluciones débiles de (4)-(5)) Existe al menos una solución débil del sistema (4)-(5), en el sentido de la Definición 2.1.*

Con este objetivo en mente, se presentará una familia de problemas regularizados cuyas soluciones aproximan a las del modelo (4)-(5), se obtendrán algunas estimativas uniformes para las variables consideradas y se realizará un proceso de paso al límite en estos problemas regularizados. Por simplicidad en los cálculos, en esta sección se considerarán el parámetro  $k$  y los coeficientes de autodifusión  $D_{\mathbf{u}}$ ,  $D_n$ ,  $D_w$  y  $D_c$  iguales a 1.

**2.2.1. Soluciones aproximadas.** Dado  $\varepsilon > 0$ , consideramos el siguiente sistema regularizado dependiente del parámetro  $\varepsilon$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t n_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon = \Delta n_\varepsilon - \chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{n_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon n_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \right) + \mu_1 n_\varepsilon^+ (1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t w_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon = \Delta w_\varepsilon - \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{w_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon w_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \right) + \mu_2 w_\varepsilon^+ (1 - a_2 n_\varepsilon - w_\varepsilon) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t s_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon = \Delta s_\varepsilon - \alpha s_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon^+) - \beta s_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon^+) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon + (Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon = \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + \nabla \pi_\varepsilon + (\gamma n_\varepsilon + \lambda w_\varepsilon) \nabla \phi \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\
\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\
[n_\varepsilon(0), w_\varepsilon(0), s_\varepsilon(0), \mathbf{u}_\varepsilon(0)] = [n_{0,\varepsilon}, w_{0,\varepsilon}, s_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_{0,\varepsilon}] \quad \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial n_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial s_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{u}_\varepsilon(x,t) = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega \times (0, T),
\end{array} \right. \quad (20)$$

donde  $c_\varepsilon$  es la única solución del problema elíptico

$$\left\{ \begin{array}{l}
c_\varepsilon - \varepsilon \Delta c_\varepsilon = s_\varepsilon \quad \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial c_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \partial \Omega,
\end{array} \right. \quad (21)$$

y  $Y_\varepsilon = (1 + \varepsilon A)^{-1}$  es la aproximación de Yosida (Sohr, 2001). En (20), denotamos por  $a_\varepsilon^+ = \max\{a_\varepsilon, 0\} \geq 0$ , y los datos iniciales  $n_{0,\varepsilon}, c_{0,\varepsilon}, s_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_{0,\varepsilon}$  satisfacen

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{0,\varepsilon} \in W^{4/5,5/3}(\Omega), n_{0,\varepsilon} > 0, n_{0,\varepsilon} \rightarrow n_0 \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \\ w_{0,\varepsilon} \in W^{4/5,5/3}(\Omega), w_{0,\varepsilon} > 0, w_{0,\varepsilon} \rightarrow w_0 \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \\ s_{0,\varepsilon} \geq 0, s_{0,\varepsilon} = c_{0,\varepsilon} - \varepsilon \Delta c_{0,\varepsilon} \in W^{1,q}(\Omega), q > 3, \\ c_{0,\varepsilon} \geq 0, c_{0,\varepsilon} \rightarrow c_0 \text{ en } H^1(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \\ s_{0,\varepsilon} \rightarrow c_0 \text{ en } W^{1,q}(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}_{0,\varepsilon} \in V, \mathbf{u}_{0,\varepsilon} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ en } L^2(\Omega), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{array} \right. \quad (22)$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.4.** *Para cada  $\varepsilon > 0$ , existen únicas funciones no negativas  $n_\varepsilon \in \mathcal{X}_{5/3}$ ,  $w_\varepsilon \in \mathcal{X}_{5/3}$ ,  $s_\varepsilon \in \mathcal{X}_{5/3}$ ,  $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{X}_2$ , las cuales, junto a  $\pi_\varepsilon \in L^2(H^1)$  resuelven el sistema (20) puntualmente para  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ .*

*Demostración.* Para esta demostración usaremos el teorema de punto fijo de Leray-Schauder. Consideramos el espacio de Banach  $X = L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$  y  $\Gamma : X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X$  definido por  $\Gamma([\bar{n}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon]) = [n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$ , siendo  $n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon$  las primeras tres componentes de la solución  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \pi_\varepsilon]$  del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\partial_t n_\varepsilon - \Delta n_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{n}_\varepsilon - \chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{n}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right) + \mu_1 \bar{n}_\varepsilon^+ (1 - \bar{n}_\varepsilon - a_1 \bar{w}_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon - \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{w}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right) + \mu_2 \bar{w}_\varepsilon^+ (1 - a_2 \bar{n}_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t s_\varepsilon - \Delta s_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{s}_\varepsilon - \alpha \bar{s}_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^+) - \beta \bar{s}_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^+) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\
\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon - \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + (Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla \pi_\varepsilon = (\gamma \bar{n}_\varepsilon + \lambda \bar{w}_\varepsilon) \nabla \phi \text{ en } \Omega \times (0, T), \\
\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \\
[n_\varepsilon(0), w_\varepsilon(0), s_\varepsilon(0), \mathbf{u}_\varepsilon(0)] = [n_{0,\varepsilon}, w_{0,\varepsilon}, s_{0,\varepsilon}, \mathbf{u}_{0,\varepsilon}] \text{ en } \Omega, \\
\frac{\partial n_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial w_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = \frac{\partial s_\varepsilon(x,t)}{\partial \nu} = 0, \quad \mathbf{u}_\varepsilon(x,t) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0, T),
\end{array} \right. \quad (23)$$

de donde  $\bar{c}_\varepsilon$  es la única solución de (21) relacionada con  $\bar{s}_\varepsilon$ .

Primero probaremos que  $\Gamma$  está bien definido. Si  $[\bar{n}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon] \in X \times X \times X$ , de (Sohr, 2001, Capítulo V, Sección 2.3), existe una única solución  $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{X}_2 \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$  de (23)<sub>4</sub>-(23)<sub>5</sub> con dato inicial  $\mathbf{u}_{0,\varepsilon}$ . Además, dado que  $\bar{s}_\varepsilon \in X$  y recordando que  $\partial\Omega \in C^{1,1}$ , aplicando la regularidad elíptica al problema (21) (ver, (Grisvard, 1985, Teorema 2.4.2.7, Teorema 2.5.1.1)), existe una única solución  $\bar{c}_\varepsilon \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^3)$ . Entonces  $\nabla \bar{c}_\varepsilon \in L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$ . Como  $\nabla \bar{n}_\varepsilon^+, \nabla \bar{w}_\varepsilon^+ \in L^2(L^2)$  tenemos que

$$\chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{n}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right), \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{w}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right) \in L^{5/3}(L^{5/3}).$$

Además, ya que  $\mathbf{u}_\varepsilon \in L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$  se tiene que  $\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{n}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{s}_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon^+, \bar{n}_\varepsilon^+ \bar{n}_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon^+ \bar{w}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon^+, \bar{w}_\varepsilon^+ \bar{w}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon^+ \bar{n}_\varepsilon \in L^{5/3}(L^{5/3})$ . Por lo tanto, la parte derecha de (23)<sub>1</sub>, (23)<sub>2</sub> y (23)<sub>3</sub>

pertenece a  $L^{5/3}(L^{5/3})$  y así, del Teorema 1.1, existe una única solución  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon] \in \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3}$  de (23)<sub>1</sub>-(23)<sub>3</sub>, tal que

$$\|n_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_{5/3}} \leq C(\|n_{0,\varepsilon}\|_{W^{4/5,5/3}}, \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{n}_\varepsilon\|_X, \|\bar{w}_\varepsilon\|_X, \|\bar{s}_\varepsilon\|_X), \quad (24)$$

$$\|w_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_{5/3}} \leq C(\|w_{0,\varepsilon}\|_{W^{4/5,5/3}}, \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{n}_\varepsilon\|_X, \|\bar{w}_\varepsilon\|_X, \|\bar{s}_\varepsilon\|_X), \quad (25)$$

$$\|s_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_{5/3}} \leq C(\|c_{0,\varepsilon} - \varepsilon \Delta c_{0,\varepsilon}\|_{W^{4/5,5/3}}, \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{\mathcal{X}_2}, \|\bar{n}_\varepsilon\|_X, \|\bar{w}_\varepsilon\|_X, \|\bar{s}_\varepsilon\|_X). \quad (26)$$

Como  $\mathcal{X}_{5/3} \hookrightarrow L^2(H^{3/2}) \cap L^\infty(L^2) \hookrightarrow X$ , concluimos que  $\Gamma$  está bien definido.

Ahora probaremos que  $\Gamma : X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X$  es **compacto**. Obsérvese que  $\mathcal{X}_{5/3} \hookrightarrow L^\infty(H^{1/2}) \cap L^{5/3}(H^{17/10})$ . Entonces, por el Lema 6 en (Guillén-González et al., 2020a),  $\mathcal{X}_{5/3} \hookrightarrow L^2(H^{3/2}) \cap L^\infty(H^{1/2})$  y  $H^{3/2} \xrightarrow{c} H^1 \hookrightarrow L^{5/3}$ ,  $H^{1/2} \xrightarrow{c} L^2 \hookrightarrow L^{5/3}$ , denotando a la inmersión compacta como  $\xrightarrow{c}$ . Así, usando los teoremas de compacidad de Aubin-Lions y Simon (Lions and Magenes, 1968; Simon, 1987), la inmersión de  $\{u \in L^2(H^{3/2}) \cap L^\infty(H^{1/2}) : \partial_t u \in L^{5/3}(L^{5/3})\}$  en  $X$  es compacta.

Seguimos probando que **los puntos fijos de  $\bar{\alpha}\Gamma$ ,  $\bar{\alpha} \in [0, 1]$  están acotados en  $X \times X \times X$** . Si  $\bar{\alpha} = 0$  el resultado es inmediato; por lo tanto, consideramos  $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ . Si  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$  es un punto fijo de  $\bar{\alpha}\Gamma$ , entonces  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon] = \bar{\alpha}\Gamma[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$ , de donde  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$  satisface que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_\varepsilon - \Delta n_\varepsilon = -\bar{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon - \bar{\alpha} \chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{n_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon n_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \right) + \bar{\alpha} \mu_1 n_\varepsilon^+ (1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon = -\bar{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon - \bar{\alpha} \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{w_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon w_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \right) + \bar{\alpha} \mu_2 w_\varepsilon^+ (1 - a_2 n_\varepsilon - w_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t s_\varepsilon - \Delta s_\varepsilon = -\bar{\alpha} \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - \bar{\alpha} \alpha s_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon^+) - \bar{\alpha} \beta s_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon^+) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon - \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + (Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla \pi_\varepsilon = (\gamma n_\varepsilon + \lambda w_\varepsilon) \nabla \phi \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T). \end{array} \right. \quad (27)$$

Primero probaremos que  $n_\varepsilon \geq 0$ . Sea  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \pi_\varepsilon]$  solución de (27). Como se describió antes, la parte derecha de  $(27)_1$  pertenece a  $L^{5/3}(L^{5/3})$ . Además,  $n_\varepsilon \in X \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3}) \hookrightarrow L^{5/2}(L^{5/2})$ . Entonces, multiplicando  $(27)_1$  por  $n_\varepsilon^- = \min\{n_\varepsilon, 0\} \leq 0$ , usando el hecho de que la condición  $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0$  implica que  $\int_\Omega (\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon^-) n_\varepsilon^- = 0$ , se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|n_\varepsilon^-\|_{L^2}^2 + \|\nabla n_\varepsilon^-\|_{L^2}^2 = \bar{\alpha} \chi_1 \left( \frac{n_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon n_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon, \nabla n_\varepsilon^- \right) + \bar{\alpha} \mu_1 (n_\varepsilon^+ (1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon), n_\varepsilon^-) = 0,$$

de donde se concluye que  $n_\varepsilon^- = 0$  y entonces  $n_\varepsilon \geq 0$  para c.t.p en  $\Omega \times (0, T)$ . De forma análoga, usando las funciones test  $w_\varepsilon^-$  y  $s_\varepsilon^-$  en  $(27)_2$  y  $(27)_3$  respectivamente, tenemos que  $w_\varepsilon \geq 0$  y  $s_\varepsilon \geq 0$  para c.t.p en  $\Omega \times (0, T)$ .

Ahora probaremos que  $s_\varepsilon$  está acotado en  $X$ . Para esto, tomaremos como función test  $s_\varepsilon$  en  $(27)_3$ , integrando en  $\Omega$  y usando  $\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ , se tiene que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|s_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla s_\varepsilon\|_{L^2}^2 = -\bar{\alpha} \left( \alpha s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon) + \beta s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon), s_\varepsilon \right) \leq 0. \quad (28)$$

Así, integrando en tiempo en (28) se tiene que  $\|s_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} + \|s_\varepsilon\|_{L^2(H^1)} \leq C$ . Ahora acotaremos a  $n_\varepsilon$  en  $X$ . Tomando como función test  $n_\varepsilon$  en (27)<sub>1</sub> e integrando en  $\Omega$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^2}^2 &= \bar{\alpha} \chi_1 \left( \frac{n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} \nabla c_\varepsilon, \nabla n_\varepsilon \right) + \bar{\alpha} (\mu_1 n_\varepsilon (1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon), n_\varepsilon) \\ &\leq \bar{\alpha} \chi_1 \|n_\varepsilon\|_{L^4} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^4} \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^2} + \bar{\alpha} \mu_1 \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \bar{\alpha} \chi_1 (\|n_\varepsilon\|_{L^2}^{1/4} \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^2}^{3/4} + \|n_\varepsilon\|_{L^2}) \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^4} \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^2} + \bar{\alpha} \mu_1 \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla n_\varepsilon\|_{L^2}^2 + C \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2 \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^4}^8 + C \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2 \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^4}^2 + \bar{\alpha} \mu_1 \|n_\varepsilon\|_{L^2}^2. \quad (29) \end{aligned}$$

Como  $c_\varepsilon$  es solución de (21) y  $s_\varepsilon \in X$ , entonces  $c_\varepsilon \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^3)$  (Grisvard, 1985, Teorema 2.4.2.7, Teorema 2.5.1.1), y  $\|c_\varepsilon\|_{L^\infty(H^2) \cap L^2(H^3)} \leq C(\varepsilon) \|s_\varepsilon\|_X$ . En particular,

$$\|\nabla c_\varepsilon\|_{L^\infty(L^4)} \leq C(\varepsilon) \|s_\varepsilon\|_X \leq C(\varepsilon).$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Gronwall en (29) tenemos  $\|n_\varepsilon\|_X \leq C(\varepsilon)$ . De forma similar, concluimos que  $\|w_\varepsilon\|_X \leq C(\varepsilon)$ .

Finalmente, probamos que  $\Gamma : X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X$  es **continuo**. Sea  $[\bar{n}_\varepsilon^m, \bar{w}_\varepsilon^m, \bar{s}_\varepsilon^m]_{m \in \mathbb{N}} \subset X \times X \times X$  tal que  $[\bar{n}_\varepsilon^m, \bar{w}_\varepsilon^m, \bar{s}_\varepsilon^m] \rightarrow [\bar{n}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon]$  en  $X \times X \times X$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . En particular  $[\bar{n}_\varepsilon^m, \bar{w}_\varepsilon^m, \bar{s}_\varepsilon^m]_{m \in \mathbb{N}}$  está acotado en  $X \times X \times X$ , y de (24)-(26),  $[n_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m, s_\varepsilon^m] = \Gamma[\bar{n}_\varepsilon^m, \bar{w}_\varepsilon^m, \bar{s}_\varepsilon^m]$  está acotado en  $\mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3}$ . Entonces existe una subsucesión, que denotaremos por  $[n_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m, s_\varepsilon^m]_{m \in \mathbb{N}}$ , y  $[\hat{n}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon, \hat{s}_\varepsilon] \in \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3}$  tal que

$$[n_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m, s_\varepsilon^m] \rightarrow [\hat{n}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon, \hat{s}_\varepsilon], \text{ débilmente en } \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3} \times \mathcal{X}_{5/3} \text{ y fuertemente en } X \times X \times X. \quad (30)$$

La igualdad  $[n_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m, s_\varepsilon^m] = \Gamma[\bar{n}_\varepsilon^m, \bar{w}_\varepsilon^m, \bar{s}_\varepsilon^m]$  establece que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_\varepsilon^m - \Delta n_\varepsilon^m = -\mathbf{u}_\varepsilon^m \cdot \nabla \bar{n}_\varepsilon^m - \chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{n}_\varepsilon^{m+}}{1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^{m+}} \nabla \bar{c}_\varepsilon^m \right) + \mu_1 \bar{n}_\varepsilon^{m+} (1 - \bar{n}_\varepsilon^m - a_1 \bar{w}_\varepsilon^m) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t w_\varepsilon^m - \Delta \bar{w}_\varepsilon^m = -\mathbf{u}_\varepsilon^m \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon^m - \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{w}_\varepsilon^{m+}}{1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^{m+}} \nabla \bar{c}_\varepsilon^m \right) + \mu_2 \bar{w}_\varepsilon^{m+} (1 - a_2 \bar{n}_\varepsilon^m - \bar{w}_\varepsilon^m) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t s_\varepsilon^m - \Delta \bar{s}_\varepsilon^m = -\mathbf{u}_\varepsilon^m \cdot \nabla \bar{s}_\varepsilon^m - \alpha (\bar{s}_\varepsilon^{m+}) \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^{m+}) - \beta (\bar{s}_\varepsilon^{m+}) \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^{m+}) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon^m - \Delta \mathbf{u}_\varepsilon^m + (Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon^m \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon^m - \nabla \pi_\varepsilon^m = (\gamma \bar{n}_\varepsilon^m + \lambda \bar{w}_\varepsilon^m) \nabla \phi \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon^m = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \end{array} \right. \quad (31)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{c}_\varepsilon^m - \varepsilon \Delta \bar{c}_\varepsilon^m = \bar{s}_\varepsilon^m \text{ en } \Omega, \\ \frac{\partial \bar{c}_\varepsilon^m(x, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0 \text{ sobre } \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (32)$$

Tomando como función test  $\mathbf{u}_\varepsilon^m \in \mathcal{X}_2$  en (31)<sub>4</sub> y usando propiedades de la aproximación de Yosida (Sohr, 2001, Capítulo 5), obtenemos

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^m\|_{\mathcal{X}_2} \leq C(\varepsilon). \quad (33)$$

Nuevamente, como  $c_\varepsilon^m \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^3)$  y usando las estimativas para  $n_\varepsilon^m, w_\varepsilon^m, s_\varepsilon^m$  en  $\mathcal{X}_{5/3}$  y  $\mathbf{u}_\varepsilon^m$  en  $\mathcal{X}_2$ , podemos hacer el paso al límite en (31), obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \hat{n}_\varepsilon - \Delta \hat{n}_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{n}_\varepsilon - \chi_1 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{n}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right) + \mu_1 \bar{n}_\varepsilon^+ (1 - \bar{n}_\varepsilon - a_1 \bar{w}_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \hat{w}_\varepsilon - \Delta \hat{w}_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{w}_\varepsilon - \chi_2 \nabla \cdot \left( \frac{\bar{w}_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^+} \nabla \bar{c}_\varepsilon \right) + \mu_2 \bar{w}_\varepsilon^+ (1 - a_2 \bar{n}_\varepsilon - \bar{w}_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \hat{s}_\varepsilon - \Delta \hat{s}_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \bar{s}_\varepsilon - \alpha \bar{s}_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{n}_\varepsilon^+) - \beta \bar{s}_\varepsilon^+ \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \bar{w}_\varepsilon^+) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon - \Delta \mathbf{u}_\varepsilon + (Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \mathbf{u}_\varepsilon - \nabla \pi_\varepsilon = (\gamma \bar{n}_\varepsilon + \lambda \bar{w}_\varepsilon) \nabla \phi \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T), \end{array} \right.$$

en donde  $\bar{c}_\varepsilon$  es la única solución de (21) con  $\bar{s}_\varepsilon$ . Esto es,  $[\hat{n}_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon, \hat{s}_\varepsilon] = \Gamma[\bar{n}_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon, \bar{s}_\varepsilon]$ , lo cual implica la continuidad de  $\Gamma$ . Concluimos entonces que  $\Gamma$  satisface las hipótesis del teorema de punto fijo de Leray-Schauder. Así,  $\Gamma$  tiene un punto fijo  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$ , esto es,  $\Gamma[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon] = [n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon]$ , brindando una solución a (20).

□

**2.2.2. Estimativas uniformes.** En esta sección se establecerán estimaciones apropiadas, independientes de  $\varepsilon$ , las cuales permitirán hacer el paso al límite en (20)-(21), cuando  $\varepsilon$  tiende a cero.

**Lema 2.5.** *Sea  $[n_\varepsilon, w_\varepsilon, s_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \pi_\varepsilon]$ ,  $n_\varepsilon \geq 0, w_\varepsilon \geq 0, s_\varepsilon \geq 0$ , una solución fuerte de (20). Entonces,*

*$s_\varepsilon \in \mathcal{X}_{5/3}$  que satisface*

$$\begin{cases} \partial_t s_\varepsilon - \Delta s_\varepsilon = -\mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - \alpha s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon) - \beta s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon) \text{ en } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \\ s_\varepsilon(0) = s_{0,\varepsilon} \in W^{1,q}(\Omega), \quad q > 3, \end{cases} \quad (34)$$

verifica que

$$0 \leq s_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \leq C. \quad (35)$$

*Demostración.* En la Proposición 2.4 se mostró que  $s_\varepsilon \geq 0$ . La afirmación  $s_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \leq C$  se obtiene del principio de comparación parabólica (Lankeit, 2016, Lema 2.3).  $\square$

Note que, integrando (20)<sub>1</sub> en  $\Omega$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n_\varepsilon = \alpha \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon (1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon) \leq \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon, \quad (36)$$

entonces, aplicando la desigualdad de Gronwall se tiene que

$$\int_{\Omega} n_\varepsilon(t) \leq C,$$

para todo  $t \in (0, T)$ , esto es,  $n_\varepsilon \in L^\infty(L^1)$ . También, integrando en tiempo la igualdad en (36) se sigue que  $n_\varepsilon \in L^2(L^2)$ .

Ahora, observe que  $s \mapsto ks - \mu s^2$ ,  $s \in [0, \infty)$  y  $s \mapsto (ks - \frac{\mu}{2}s^2) \ln s$ ,  $s \in (0, \infty)$  están acotados superiormente por alguna constante  $C$ ; usando estas estimativas y tomando las funciones test  $\ln n_\varepsilon$  y  $\ln w_\varepsilon$  en (20)<sub>1</sub> y (20)<sub>2</sub> respectivamente, integrando sobre  $\Omega$ , teniendo en cuenta que  $n_\varepsilon^+ = n_\varepsilon$  y

$w_\varepsilon^\dagger = w_\varepsilon$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n_\varepsilon \ln n_\varepsilon &= - \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + \chi_1 \int_{\Omega} \frac{\nabla n_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} + \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon \ln n_\varepsilon \\
&\quad - \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon^2 \ln n_\varepsilon - a_1 \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon \ln n_\varepsilon + \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon \\
&\quad - \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon^2 - a_1 \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon - \int_{\Omega} u_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon \ln n_\varepsilon \\
&\leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + \chi_1 \int_{\Omega} \frac{\nabla n_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} - \frac{\mu_1}{2} \int_{\Omega} n_\varepsilon^2 \ln n_\varepsilon \\
&\quad - a_1 \mu_1 \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon \ln n_\varepsilon + C,
\end{aligned} \tag{37}$$

y de forma análoga tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_\varepsilon \ln w_\varepsilon &\leq - \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\varepsilon|^2}{w_\varepsilon} + \chi_1 \int_{\Omega} \frac{\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon} - \frac{\mu_2}{2} \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \ln w_\varepsilon \\
&\quad - a_2 \mu_2 \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon \ln w_\varepsilon + C.
\end{aligned} \tag{38}$$

Ahora, estimaremos el término  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon}$ , para  $\varepsilon > 0$  en  $(0, T)$ . Usando (20)<sub>3</sub>, y el Lema 2.8 en

(Lankeit, 2016) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} &= -2 \int_{\Omega} \frac{|\Delta s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + 2 \int_{\Omega} \frac{\Delta s_\varepsilon}{s_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon + 2\alpha \int_{\Omega} \Delta s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon) + 2\beta \int_{\Omega} \Delta s_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon) \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} \Delta s_\varepsilon - \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - \alpha \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon) \\
&\quad - \beta \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon) \\
&\leq -2 \int_{\Omega} \frac{|\Delta s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + 2 \int_{\Omega} \frac{\Delta s_\varepsilon}{s_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - 2\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla s_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} - 2\beta \int_{\Omega} \frac{\nabla s_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon} \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} \Delta s_\varepsilon - \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Reemplazando  $s_\varepsilon$  de (21)<sub>1</sub>, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} &\leq -2 \int_{\Omega} \frac{|\Delta s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + 2 \int_{\Omega} \frac{\Delta s_\varepsilon}{s_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - 2\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla c_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} - 2\beta \int_{\Omega} \frac{\nabla c_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon} \\ &\quad + 2\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} + 2\beta\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla w_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon} + \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} \Delta s_\varepsilon \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon. \end{aligned} \quad (39)$$

Usando el Lema 2.7 (vi) en Lankeit (2016), existe  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  tal que para  $\varepsilon > 0$ :

$$-2 \int_{\Omega} \frac{|\Delta s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} \Delta s_\varepsilon \leq -k_1 \int_{\Omega} s_\varepsilon |D^2 \ln s_\varepsilon|^2 - k_1 \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^4}{s_\varepsilon^3} + k_2 \int_{\Omega} s_\varepsilon. \quad (40)$$

Además, de la prueba del Lema 2.8 en Lankeit (2016), existe  $k_3 > 0$  tal que para  $\varepsilon > 0$ :

$$2 \int_{\Omega} \frac{\Delta s_\varepsilon}{s_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon - \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon^2} u_\varepsilon \cdot \nabla s_\varepsilon \leq \frac{k_1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^4}{s_\varepsilon^3} + k_3 \int_{\Omega} s_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2. \quad (41)$$

Entonces, de (39)-(41), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + k_1 \int_{\Omega} s_\varepsilon |D^2 \ln s_\varepsilon|^2 + \frac{k_1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^4}{s_\varepsilon^3} &\leq -2\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla c_\varepsilon \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} + k_2 \int_{\Omega} s_\varepsilon \\ &\quad + 2\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} + Ck_3 \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 - 2\beta \int_{\Omega} \frac{\nabla c_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon} + 2\beta\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla w_\varepsilon}{1 + \varepsilon w_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (42)$$

en donde hemos usado la estimativa uniforme para  $s_\varepsilon$  probada en el Lema 2.5. Obsérvese que

$$2\alpha\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} = 2\alpha\varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_\varepsilon) \cdot \nabla n_\varepsilon}{n_\varepsilon^{1/2}} \frac{(\varepsilon n_\varepsilon)^{1/2}}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} \leq \delta_1 \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + C_{\delta_1} \varepsilon \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla(\Delta c_\varepsilon)|^2 \quad (43)$$

y

$$2\beta\varepsilon \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_{\varepsilon}) \cdot \nabla w_{\varepsilon}}{1 + \varepsilon w_{\varepsilon}} = 2\beta\varepsilon^{1/2} \int_{\Omega} \frac{\nabla(\Delta c_{\varepsilon}) \cdot \nabla w_{\varepsilon}}{w_{\varepsilon}^{1/2}} \frac{(\varepsilon w_{\varepsilon})^{1/2}}{1 + \varepsilon w_{\varepsilon}} \leq \delta_2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_{\varepsilon}|^2}{w_{\varepsilon}} + C_{\delta_2} \varepsilon \beta^2 \int_{\Omega} |\nabla(\Delta c_{\varepsilon})|^2. \quad (44)$$

De (21) se satisface que  $\varepsilon \nabla(\Delta c_{\varepsilon}) = \nabla c_{\varepsilon} - \nabla s_{\varepsilon}$ . Entonces, reemplazando (43) y (44) en (42), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_{\varepsilon}|^2}{s_{\varepsilon}} + k_1 \int_{\Omega} s_{\varepsilon} |D^2 \ln s_{\varepsilon}|^2 + \frac{k_1}{2} \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_{\varepsilon}|^4}{s_{\varepsilon}^3} \leq & -2\alpha \int_{\Omega} \frac{\nabla c_{\varepsilon} \cdot \nabla n_{\varepsilon}}{1 + \varepsilon n_{\varepsilon}} - 2\beta \int_{\Omega} \frac{\nabla c_{\varepsilon} \cdot \nabla w_{\varepsilon}}{1 + \varepsilon w_{\varepsilon}} \\ & + \delta_1 \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_{\varepsilon}|^2}{n_{\varepsilon}} + \delta_2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_{\varepsilon}|^2}{w_{\varepsilon}} + k_2 \int_{\Omega} s_{\varepsilon} + Ck_3 \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla c_{\varepsilon}|^2 + 2 \int_{\Omega} |\nabla s_{\varepsilon}|^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Por otra parte, multiplicando (20)<sub>4</sub> por  $\mathbf{u}_{\varepsilon}$ , e integrando en  $\Omega$ , tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_{\varepsilon}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \mathbf{u}_{\varepsilon}\|_{L^2}^2 = ((\gamma m_{\varepsilon} + \lambda w_{\varepsilon}) \nabla \phi, \mathbf{u}_{\varepsilon}).$$

Además, por la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg se tiene que

$$\begin{aligned}
(\gamma n_\varepsilon \nabla \phi, \mathbf{u}_\varepsilon) + (\lambda w_\varepsilon \nabla \phi, \mathbf{u}_\varepsilon) &\leq \gamma C \|n_\varepsilon\|_{L^{6/5}} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^6} + \lambda C \|w_\varepsilon\|_{L^{6/5}} \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^6} \\
&\leq \gamma C \|n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^{12/5}}^2 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2} + \lambda C \|w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^{12/5}}^2 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\leq \delta_3 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \gamma^2 C_{\delta_3} \|n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^{12/5}}^4 + \lambda^2 C_{\delta_3} \|w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^{12/5}}^4 \\
&\leq \delta_3 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \gamma^2 C_{\delta_3} (\|n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{3/2} \|\nabla n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{1/2} + \|n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^2)^2 \\
&\quad + \lambda^2 C_{\delta_3} (\|w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{3/2} \|\nabla w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{1/2} + \|w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^2)^2 \\
&\leq \delta_3 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \gamma^2 C_{\delta_3} \|n_\varepsilon\|_{L^1} (\|n_\varepsilon\|_{L^1}^2 \|\nabla n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{1/2} + 1)^2 \\
&\quad + \lambda^2 C_{\delta_3} \|w_\varepsilon\|_{L^1} (\|w_\varepsilon\|_{L^1}^2 \|\nabla w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2}^{1/2} + 1)^2 \\
&\leq \delta_3 \|\nabla \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \gamma^2 C_{\delta_3} (\|\nabla n_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2} + 1) + \lambda^2 C_{\delta_3} (\|\nabla w_\varepsilon^{1/2}\|_{L^2} + 1).
\end{aligned}$$

Así, se concluye que existen  $\delta_3, C > 0$  tales que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + (1 - \delta_3) \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 \leq C_{\delta_3} \left( \gamma^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} + \lambda^2 \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\varepsilon|^2}{w_\varepsilon} \right) + C, \quad \text{en } (0, T). \quad (46)$$

Entonces, multiplicando (37) y (38) por constantes adecuadas para cancelar términos con (45),

multiplicando (46) por una constante si es necesario, y usando el Lema 2.5 se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} n_\varepsilon \ln n_\varepsilon + \int_{\Omega} w_\varepsilon \ln w_\varepsilon + C \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} + C \int_{\Omega} |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 \right] &+ C \int_{\Omega} \frac{|\nabla n_\varepsilon|^2}{n_\varepsilon} \\
&+ C \int_{\Omega} \frac{|\nabla w_\varepsilon|^2}{w_\varepsilon} + C \int_{\Omega} s_\varepsilon |D^2 \ln s_\varepsilon|^2 + C \int_{\Omega} \frac{|\nabla s_\varepsilon|^4}{s_\varepsilon^3} + C \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}_\varepsilon|^2 \\
&+ C \int_{\Omega} n_\varepsilon^2 \ln n_\varepsilon + C \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon \ln n_\varepsilon + C \int_{\Omega} w_\varepsilon^2 \ln w_\varepsilon + C \int_{\Omega} n_\varepsilon w_\varepsilon \ln w_\varepsilon \\
&\leq C \int_{\Omega} s_\varepsilon + \int_{\Omega} |\nabla c_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} |\nabla s_\varepsilon|^2 + C \leq \int_{\Omega} |\nabla c_\varepsilon|^2 + \int_{\Omega} |\nabla s_\varepsilon|^2 + C. \quad (47)
\end{aligned}$$

Multiplicando (21) por  $c_\varepsilon$  y  $-\Delta c_\varepsilon$  se tiene

$$\frac{1}{2} \|c_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|s_\varepsilon\|_{L^2}^2, \quad (48)$$

y

$$\frac{1}{2} \|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\Delta c_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla s_\varepsilon\|_{L^2}^2. \quad (49)$$

Recordando que  $\|\nabla s_\varepsilon\|_{L^2(L^2)} \leq C$  uniformemente en  $\varepsilon$ , de (49) tenemos que  $\|\nabla c_\varepsilon\|_{L^2(L^2)} \leq C$  uniformemente en  $\varepsilon$ . Además,  $\sqrt{\varepsilon}\Delta c_\varepsilon$  está acotado en  $L^2(L^2)$  uniformemente en  $\varepsilon$ . Entonces, integrando en tiempo (47), en particular tenemos que

$$\left\| s_\varepsilon^{-1/2} \nabla s_\varepsilon \right\|_{L^\infty(L^2)} \leq C,$$

y como  $\int_\Omega |\nabla s_\varepsilon|^2 = \int_\Omega \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon} s_\varepsilon$  y  $s_\varepsilon$  es uniformemente acotada (Lema 2.5), se obtiene

$$\|\nabla s_\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} \leq C, \quad (50)$$

uniformemente en  $\varepsilon$ . También, de (47), Lema 2.5 y de la identidad  $\Delta s_\varepsilon = s_\varepsilon \Delta(\ln s_\varepsilon) + \frac{|\nabla s_\varepsilon|^2}{s_\varepsilon}$ , tenemos que

$$\|\Delta s_\varepsilon\|_{L^2(L^2)} \leq C, \quad (51)$$

uniformemente en  $\varepsilon$ . Además, de (48)–(50) se obtiene que

$$\{c_\varepsilon\} \text{ es acotada en } L^\infty(H^1), \{\sqrt{\varepsilon}\Delta c_\varepsilon\} \text{ es acotada en } L^\infty(L^2).$$

Aplicando el operador  $\Delta$  en (21), y tomando como función test  $\Delta c_\varepsilon$  en la ecuación resultante, se

tiene que

$$\frac{1}{2}\|\Delta c_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\nabla\Delta c_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\Delta s_\varepsilon\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto, por (51) se cumple que  $c_\varepsilon$  está acotada en  $L^2(H^2)$ , y  $\{\sqrt{\varepsilon}\Delta c_\varepsilon\}$  está acotada en  $L^2(H^1)$ .

Así se concluye que

$$\begin{cases} \{c_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(L^{10}), \\ \{\sqrt{\varepsilon}\Delta c_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1). \end{cases} \quad (52)$$

Como  $2\nabla\sqrt{n_\varepsilon} = \frac{\nabla n_\varepsilon}{\sqrt{n_\varepsilon}}$ , por (47),  $\nabla\sqrt{n_\varepsilon} \in L^2(L^2)$ . También  $\sqrt{n_\varepsilon} \in L^2(H^1) \hookrightarrow L^2(L^6)$ . Dado que  $n_\varepsilon \in L^\infty(L^1)$ , entonces  $\sqrt{n_\varepsilon} \in L^\infty(L^2)$ . Así,

$$\begin{cases} \{\sqrt{n_\varepsilon}\} \text{ está acotada en } L^\infty(L^2) \cap L^2(L^6) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3}), \\ \{\nabla\sqrt{n_\varepsilon}\} \text{ está acotada en } L^2(L^2). \end{cases} \quad (53)$$

Como  $\nabla n_\varepsilon = 2\sqrt{n_\varepsilon}\nabla\sqrt{n_\varepsilon}$ , de (53) se tiene que

$$\{n_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{5/4}(W^{1,5/4}). \quad (54)$$

Además, de (53)<sub>1</sub> se deduce que

$$\{n_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{5/3}(L^{5/3}). \quad (55)$$

De forma análoga,

$$\{w_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{5/4}(W^{1,5/4}) \cap L^{5/3}(L^{5/3}). \quad (56)$$

Por otra parte, de (47) tenemos que

$$\{\mathbf{u}_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^\infty(L^2) \cap L^2(V) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3}), \quad (57)$$

y de (50) y (51) se concluye que

$$\{s_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(L^{10}). \quad (58)$$

**2.2.3. Paso al límite.** Observe que de (21) y (52)<sub>2</sub> se tiene que

$$s_\varepsilon - c_\varepsilon = -\varepsilon \Delta c_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ en } L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1). \quad (59)$$

Además, de (52)<sub>1</sub> y (53)–(59), existen funciones límite  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  tales que para alguna subsucesión de  $\{[n_\varepsilon, w_\varepsilon, c_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, s_\varepsilon]\}_{\varepsilon > 0}$ , denotada de la misma forma, se satisfacen las siguientes convergencias, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\varepsilon \rightharpoonup n \text{ débilmente en } L^{5/3}(L^{5/3}) \cap L^{5/4}(W^{1,5/4}) \cap L^\infty(L^1) \cap L^2(L^2), \\ w_\varepsilon \rightharpoonup w \text{ débilmente en } L^{5/3}(L^{5/3}) \cap L^{5/4}(W^{1,5/4}) \cap L^\infty(L^1) \cap L^2(L^2), \\ c_\varepsilon \rightharpoonup c \text{ débilmente en } L^2(H^2) \text{ y débil* en } L^\infty(H^1), \\ \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ débilmente en } L^2(V) \text{ y débil* en } L^\infty(L^2), \\ s_\varepsilon \rightharpoonup c \text{ débilmente en } L^2(H^1) \text{ y débil* en } L^\infty(L^2). \end{array} \right. \quad (60)$$

De (52)<sub>1</sub>,  $\{\nabla c_\varepsilon\}$  está acotada en  $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3})$ . Entonces, de (55) se tiene que

$$\left\{ \frac{n_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon n_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \right\} \text{ está acotada en } L^{5/4}(L^{5/4}), \quad (61)$$

lo que implica que el termino  $\chi_1 \int_0^T \int_\Omega \frac{n_\varepsilon^+}{1 + \varepsilon n_\varepsilon^+} \nabla c_\varepsilon \cdot \nabla \varphi$  está acotado para cada  $\varphi \in L^5(W^{1,5})$ . De igual manera, de (55) y (57) se tiene que

$$\{n_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{5/4}(L^{5/4}). \quad (62)$$

y

$$\{n_\varepsilon^+(1 - n_\varepsilon - a_1 w_\varepsilon)\} \text{ está acotada en } L^1(L^1). \quad (63)$$

Por lo tanto, de la ecuación para  $n_\varepsilon$  en (20) obtenemos que

$$\{\partial_t n_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^1((W^{1,5})'). \quad (64)$$

De forma análoga, demostramos que

$$\{\partial_t w_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^1((W^{1,5})'). \quad (65)$$

Por otra parte, de (57) y Lema 2.5 se obtiene que

$$\{s_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{10/3}(L^{10/3}), \quad (66)$$

lo cual implica que  $\int_0^T \int_\Omega s_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi$  está acotado para  $\varphi \in L^{10/7}(W^{1,10/7})$ . Además, del Lema 2.5 se deduce

$$\left\{ s_\varepsilon^+ \frac{\ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon^+)}{\varepsilon} \right\} \text{ está acotada en } L^2(L^2), \quad (67)$$

$$\left\{ s_\varepsilon^+ \frac{\ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon^+)}{\varepsilon} \right\} \text{ está acotada en } L^2(L^2). \quad (68)$$

Por lo tanto, de la ecuación para  $s_\varepsilon$  en (20) se obtiene que

$$\{\partial_t s_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{10/3}((W^{1,10/7})'). \quad (69)$$

Ahora, para  $\psi \in L^{5/2}(W^{1,5/2})$ , de (55), (57), obtenemos

$$(u_\varepsilon \otimes u_\varepsilon, \nabla \psi) \leq \|u_\varepsilon^2\|_{L^{5/3}} \|\nabla \psi\|_{L^{5/2}}, \quad (70)$$

$$(\gamma n_\varepsilon \nabla \Phi, \psi) \leq \gamma \|\nabla \Phi\|_\infty \|n_\varepsilon\|_{L^{5/3}} \|\psi\|_{L^{5/2}}, \quad (71)$$

$$(\delta w_\varepsilon \nabla \Phi, \psi) \leq \delta \|\nabla \Phi\|_\infty \|w_\varepsilon\|_{L^{5/3}} \|\psi\|_{L^{5/2}}. \quad (72)$$

Por lo tanto, de la ecuación para  $u_\varepsilon$  en (20) se obtiene que

$$\{\partial_t u_\varepsilon\} \text{ está acotada en } L^{5/3}((W^{1,5/2})'). \quad (73)$$

Así, se tienen las siguientes estimativas temporales

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t n \quad \text{débilmente en } L^1((W^{1,5})'), \\ \partial_t w_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t w \quad \text{débilmente en } L^1((W^{1,5})'), \\ \partial_t s_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t c \quad \text{débilmente en } L^{10/3}((W^{1,10/7})'), \\ \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup \partial_t \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^{5/3}((W^{1,5/2})'). \end{array} \right. \quad (74)$$

De (53), (54), (57), (58), (74), teniendo en cuenta que  $W^{1,5/4} \xrightarrow{c} L^2 \hookrightarrow (W^{1,5})'$ ,  $H^2 \xrightarrow{c} H^1 \hookrightarrow$

$L^{5/3}$  y  $H^1 \xrightarrow{c} L^2 \hookrightarrow L^{5/3}$ , y usando el Lema de Aubin-Lions y el teorema de compacidad de Simon,

tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} n_\varepsilon \rightarrow n \quad \text{fuertemente en } L^{5/4}(L^2), \\ w_\varepsilon \rightarrow w \quad \text{fuertemente en } L^{5/4}(L^2), \\ s_\varepsilon \rightarrow c \quad \text{fuertemente en } L^2(H^1) \cap C([0, T]; L^2), \\ \mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{fuertemente en } L^2(L^2). \end{array} \right. \quad (75)$$

En particular, ya que  $n_\varepsilon$  está acotada en  $L^{5/3}(L^{5/3})$ , usando (55) y la desigualdad de interpolación

$$\|n_\varepsilon\|_{L^p(L^p)} \leq \|n_\varepsilon\|_{L^{5/4}(L^{5/4})}^{1-\theta} \|n_\varepsilon\|_{L^{5/3}(L^{5/3})}^\theta, \quad \theta = 4 - (5/p) \in (0, 1),$$

(lo que implica que  $\frac{5}{4} < p < \frac{5}{3}$ ), se tiene que  $\{n_\varepsilon\}$  es relativamente compacta en  $L^p(L^p)$ . Por (52)<sub>1</sub>,

$\{\nabla c_\varepsilon\}$  está acotada en  $L^{10/3}(L^{10/3})$ , que, junto con (55) implican que

$$\frac{n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} \nabla c_\varepsilon \rightharpoonup \zeta \quad \text{débilmente en } L^{10/9}(L^{10/9}), \quad (76)$$

para algún  $\zeta \in L^{10/9}(L^{10/9})$ . Por (60)<sub>3</sub> se tiene que  $\nabla c_\varepsilon \rightharpoonup \nabla c$  débilmente en  $L^{10/3}(L^{10/3})$ . También

de (75)<sub>1</sub>,  $\{n_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  es relativamente compacta en  $L^{5/4}(L^{5/4})$ . Entonces, podemos concluir, de (76),

que  $\zeta = n \nabla c$ . Esto es,

$$\frac{n_\varepsilon}{1 + \varepsilon n_\varepsilon} \nabla c_\varepsilon \rightharpoonup n \nabla c \quad \text{débilmente en } L^{10/9}(L^{10/9}). \quad (77)$$

De forma similar, de (60)<sub>4</sub>, observando que  $\{n_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon\}$  está acotada en  $L^{10/9}(L^{10/9})$ , y usando que

$\{n_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  es relativamente compacta en  $L^p(L^p)$  para todo  $p < 5/3$ , se tiene que

$$n_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \rightharpoonup n \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^{10/9}(L^{10/9}). \quad (78)$$

Por otra parte, haciendo uso del teorema de Dunford-Pettis (ver detalles en (Lankeit, 2016, Proposición 2.1)), tenemos que

$$n_\varepsilon^2 \rightarrow n^2 \quad \text{en } L^1(L^1) \text{ y } n_\varepsilon w_\varepsilon \rightarrow n w \quad \text{en } L^1(L^1). \quad (79)$$

Por lo tanto, tomando el límite en el problema regularizado (20)<sub>1</sub>, cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de (60)<sub>1</sub>, (77)-(79), el límite  $n$  satisface la formulación débil para la ecuación de la variable  $n$  en la Definición 2.1; de forma análoga se concluye para  $w$ . Por otra parte, de (60), usando que  $\{\mathbf{u}_\varepsilon s_\varepsilon\}$  está acotada en  $L^{10/3}(L^{10/3})$  y (75)<sub>3</sub> se tiene

$$\mathbf{u}_\varepsilon s_\varepsilon \rightharpoonup c \mathbf{u} \quad \text{débilmente en } L^{5/3}(L^{5/3}). \quad (80)$$

Ahora, como  $\frac{\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq n_\varepsilon$  y  $\frac{\ln(1+\varepsilon w_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq w_\varepsilon$ , por (55) y (58) tenemos que

$$\left\{ s_\varepsilon \frac{\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}, \left\{ s_\varepsilon \frac{\ln(1+\varepsilon w_\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} \quad \text{están acotadas en } L^{10/7}(L^{10/7}). \quad (81)$$

Por (55) y del teorema de convergencia dominada se tiene que

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon)}{\varepsilon} - n \right\|_{L^{5/3}(L^{5/3})} \\ & \leq \left\| \frac{\ln(1+\varepsilon n_\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\ln(1+\varepsilon n)}{\varepsilon} \right\|_{L^{5/3}(L^{5/3})} + \left\| \frac{\ln(1+\varepsilon n)}{\varepsilon} - n \right\|_{L^{5/3}(L^{5/3})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Entonces, de la convergencia débil en (60)<sub>3</sub>, la convergencia fuerte mostrada anteriormente y (81),

se tiene

$$s_\varepsilon \frac{\ln(1 + \varepsilon n_\varepsilon)}{\varepsilon} \rightharpoonup cn \quad \text{débilmente en } L^{10/7}(L^{10/7}). \quad (82)$$

Análogamente, tenemos que

$$s_\varepsilon \frac{\ln(1 + \varepsilon w_\varepsilon)}{\varepsilon} \rightharpoonup cw \quad \text{débilmente en } L^{10/7}(L^{10/7}). \quad (83)$$

Por lo tanto, de (74), (75), (80), y (82)-(83) tenemos que

$$\int_0^T \langle \partial_t c, \varphi \rangle + \int_0^T \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla \varphi - \int_0^T \int_\Omega c \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi - \alpha \int_0^T \int_\Omega cn \varphi - \beta \int_0^T \int_\Omega cw \varphi = 0, \quad (84)$$

para todo  $\varphi \in L^{10/3}(W^{1,10/3})$ . Note que (84) es la formulación débil para la ecuación de la variable  $c$  en (4). Así, integrando por partes en (84) y usando que  $n, w \in L^{5/3}(L^{5/3})$ ,  $c \in L^2(H^2) \cap L^\infty(H^1)$  y  $\mathbf{u} \in L^2(H^1) \cap L^\infty(L^2)$ , tenemos que

$$\partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \Delta c - \alpha cn - \beta cw, \quad \text{en } L^{10/7}(L^{10/7}). \quad (85)$$

Finalmente, para hacer el paso al límite en la ecuación de  $\mathbf{u}_\varepsilon$ , recordamos que  $\{Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon\}$  es uniformemente acotada en  $L^2(L^6)$ , y

$$Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = Y_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon \otimes (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) + Y_\varepsilon (\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}) \otimes \mathbf{u}_\varepsilon + (Y_\varepsilon - I) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

La no negatividad de las variables  $n, w$  y  $c$ , se sigue de la no negatividad de las soluciones regularizadas. Así, se concluye la prueba del Teorema 2.3.

### 2.3. Regularidad de las soluciones débiles

En esta sección probaremos que, añadiendo la hipótesis  $[n, w, \mathbf{u}] \in L^{20/7}(L^{20/7}) \times L^{20/7}(L^{20/7}) \times L^8(L^4)$ , las soluciones débiles de (4)-(5) son soluciones fuertes en el sentido de la Definición 2.2.

Esto se establece en el siguiente teorema:

**Teorema 2.6.** (*Criterio de regularidad*) Sea  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  una solución débil de (4)-(5). Si  $[n_0, w_0, c_0, \mathbf{u}_0] \in \widehat{W}^{3/2,4} \times \widehat{W}^{3/2,4} \times \widehat{W}^{3/2,4} \times V$  y

$$[n, w, \mathbf{u}] \in L^{20/7}(L^{20/7}) \times L^{20/7}(L^{20/7}) \times L^8(L^4), \quad (86)$$

entonces  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  es una solución fuerte de (4)-(5) en el sentido de la Definición 2.2.

*Demostración.* La idea de esta demostración se sigue de (Guillén-González et al., 2020a). Del Teorema 2.3, existe por lo menos una solución débil  $[n, w, c, \mathbf{u}]$  del sistema (4)-(5) en el sentido de la Definición 2.1. La regularidad se concluye luego de varios pasos.

*Paso 1:*  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_2$ .

Como  $\mathbf{u} \in L^8(L^4)$ , de (Casas, 1998, Teorema 4.2.1), se tiene que  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_2 \leftrightarrow L^{10}(L^{10})$ . La última inmersión es consecuencia del Lema 1.5, tomando  $q_1 = 6$ ,  $p_1 = p_2 = 2$  y  $r = 2$ . Además,

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{X}_2} \leq C(\|\mathbf{u}_0\|_V + \|\phi\|_{L^\infty} \|n\|_{L^2(L^2)} + \|\phi\|_{L^\infty} \|w\|_{L^2(L^2)} + \|\mathbf{u}\|_{L^8(L^4)}). \quad (87)$$

*Paso 2:*  $c \in \mathcal{X}_{20/7}$ .

Para los siguientes pasos, asumimos que  $n \in L^{20/7}(L^{20/7})$  y  $w \in L^{20/7}(L^{20/7})$ ; del paso anterior tenemos que  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_2 \leftrightarrow L^{10}(L^{10})$ . Además, de la regularidad débil tenemos que  $c \in \mathcal{X}_2 \leftrightarrow L^{10}(L^{10})$ .

i)  $c \in \mathcal{X}_{20/9}$ .

De las regularidades correspondientes a  $c, n, w$ , tenemos que  $cn \in L^{20/9}(L^{20/9})$  y  $cw \in L^{20/9}(L^{20/9})$ .

Además, como  $c \in \mathcal{X}_2$ , tenemos que  $\nabla c \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3})$ , usando el Lema 1.5 con  $q_1 = p_1 = p_2 = 2, r = 1$ . Por lo tanto  $\mathbf{u} \cdot \nabla c \in L^{5/2}(L^{5/2})$ . En conclusión, de (4)<sub>3</sub>,  $c_t - \Delta c \in L^{20/9}(L^{20/9})$ , así del Teorema 1.1,  $c \in \mathcal{X}_{20/9}$ .

ii)  $c \in L^{20}(L^{20})$ .

Como  $c \in \mathcal{X}_{20/9}$ , se tiene que  $c \in L^\infty(W^{11/10, 20/9}) \cap L^{20/9}(W^{2, 20/9}) \hookrightarrow L^\infty(L^{12}) \cap L^{20/9}(W^{2, 20/9})$ .

Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 12, p_1 = p_2 = 20/9, r = 2$ , se obtiene  $c \in L^{20}(L^{20})$ .

iii)  $c \in \mathcal{X}_{5/2}$ .

Con la regularidad extra obtenida para  $c$ , se tiene que  $cn, cw \in L^{5/2}(L^{5/2})$ . Así, del Teorema 1.1, se tiene que  $c \in \mathcal{X}_{5/2}$ .

iv)  $c \in L^\infty(L^\infty)$  y  $\nabla c \in L^5(L^5)$ .

Como  $c \in \mathcal{X}_{5/2}$ , se tiene que  $c \in L^\infty(W^{6/5, 5/2}) \cap L^{5/2}(W^{2, 5/2})$ . Ahora, por la inmersión de Sobolev  $W^{6/5, 5/2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ , para todo  $1 \leq q < \infty$ , se sigue que  $c \in L^\infty(L^q)$  para todo  $1 \leq q < \infty$ ; en particular,  $c \in L^\infty(L^{260/9})$  y entonces,  $nc, wc \in L^{20/7}(L^{13/5})$ . Como  $c \in \mathcal{X}_{5/2}$  se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(W^{1/5, 5/2}) \cap L^{5/2}(W^{1, 5/2}) \hookrightarrow L^\infty(L^3) \cap L^{5/2}(W^{1, 5/2})$ . Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 3, p_1 = p_2 = 5/2, r = 1$ , se obtiene que  $\nabla c \in L^5(L^5)$  y  $\mathbf{u} \cdot \nabla c \in L^{10/3}(L^{10/3})$ . En conclusión, de (4)<sub>3</sub>,  $c_t - \Delta c \in L^{13/5}(L^{13/5})$ , así del Teorema 1.1 se tiene que  $c \in L^{13/5}(W^{2, 13/5}) \cap L^\infty(W^{16/13, 13/5}) \hookrightarrow L^\infty(L^\infty)$ .

v)  $c \in \mathcal{X}_{20/7}$ .

Con la regularidad extra obtenida para  $c$  y  $\nabla c$ , tenemos que  $cn, cw \in L^{20/7}(L^{20/7})$  y  $\mathbf{u} \cdot \nabla c \in L^{10/3}(L^{10/3})$ . Como  $\frac{20}{7} < \frac{10}{3}$ , por el Teorema 1.1,  $c \in \mathcal{X}_{20/7}$ .

*Paso 3:*  $\nabla c \in L^{20/3}(L^{20/3})$  y  $\Delta c \in L^{20/7}(L^{20/7})$ .

Ya que  $c \in \mathcal{X}_{20/7}$ , se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(W^{3/10,20/7}) \cap L^{20/7}(W^{1,20/7}) \hookrightarrow L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(W^{1,20/7})$ .

Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 4$ ,  $p_1 = p_2 = 20/7$  y  $r = 1$ , obtenemos que  $\nabla c \in L^{20/3}(L^{20/3})$ . El hecho de que  $\Delta c \in L^{20/7}(L^{20/7})$  se sigue de la definición de  $\mathcal{X}_{20/7}$ .

Nótese que no podemos seguir aumentando la regularidad de  $c$  pues  $cn$  y  $cw$  no se pueden llevar mas allá de  $L^{20/7}(L^{20/7})$ . Por esta razón, ahora trabajaremos para mejorar la regularidad de  $n, w$ , y volveremos luego sobre la regularidad de  $c$ .

*Paso 4:*  $n \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$ .

Primero, del *Paso 3* se tiene la siguiente regularidad para  $\nabla c$ :

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(W^{1,20/7}) \hookrightarrow L^{20/3}(L^{20/3}). \quad (88)$$

Empezaremos con la regularidad débil junto con la hipótesis extra en la regularidad para  $n$ ; esto es,  $n \in L^{20/7}(L^{20/7}) \cap L^{5/4}(W^{1,5/4})$ .

i)  $n \in \mathcal{X}_{20/19}$ .

Como  $n, w, \Delta c \in L^{20/7}(L^{20/7})$ , se tiene que  $n\Delta c, n^2, nw \in L^{10/7}(L^{10/7})$ . Además,  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$

y  $\nabla n \in L^{5/4}(L^{5/4})$  implican que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{10/9}(L^{10/9})$ . Finalmente,  $\nabla c \in L^{20/3}(L^{20/3})$  y  $\nabla n \in L^{5/4}(L^{5/4})$  implican que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{20/19}(L^{20/19})$ . Como  $\frac{20}{19} < \frac{10}{9} < \frac{10}{7} < \frac{20}{7}$ , de (4)<sub>1</sub>,  $n_t - \Delta n \in L^{20/19}(L^{20/19})$ , y del Teorema 1.1 se tiene que  $n \in \mathcal{X}_{20/19}$ .

ii)  $\nabla n \in L^{200/171}(L^{25/17})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{20/19}$ , se tiene que  $n \in L^\infty(W^{1/10,20/19}) \cap L^{20/19}(W^{2,20/19})$ . Entonces, denotando por  $D^{1/10}n$  la derivada 1/10 de  $n$  tenemos que

$$D^{1/10}n \in L^\infty(L^{20/19}) \cap L^{20/19}(W^{19/10,20/19}) \hookrightarrow L^\infty(L^{20/19}) \cap L^{20/19}(W^{1,20/13}).$$

Entonces, del Lema 1.6 con  $\alpha = 9/10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 20/13$ ,  $q = 20/19$ , tenemos que  $\lambda = 9/10$ ,  $r = 25/17$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{1/10}n\|_{W^{9/10,25/17}}^s \leq \|D^{1/10}n\|_{W^{1,20/13}}^{s\lambda} \|D^{1/10}n\|_{L^{20/19}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{1/10}n \in L^{20/19}$  en tiempo, se tiene que  $s\lambda = 20/19$ , lo cual implica que  $s = 200/171$  y así  $n \in L^{200/171}(W^{1,25/17})$ . Finalmente,

$$\nabla n \in L^{200/171}(L^{25/17}). \quad (89)$$

iii)  $n \in \mathcal{X}_{10/9}$ .

De (88) se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(L^{60})$ . Además, por el Lema 1.2 con  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 4$ ,  $p_2 = 20/7$ ,  $q_2 = 60$  y  $p = 10$  se obtiene

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{10}(L^{60/11}).$$

Por lo tanto, de (89),  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{200/171}(L^{100/93}) \cap L^{200/191}(L^{300/259})$ . Finalmente, del Lema 1.2 con  $(p_1, q_1) = (200/171, 100/93)$ ,  $(p_2, q_2) = (200/191, 300/259)$  se tiene que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{10/9}(L^{10/9})$ . Entonces, por el Teorema 1.1,  $n \in \mathcal{X}_{10/9}$ .

iv)  $\nabla n \in L^{25/18}(L^{150/103})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{10/9}$ , se tiene que  $n \in L^\infty(W^{1/5, 10/9}) \cap L^{10/9}(W^{2, 10/9})$ . Entonces,

$$D^{1/5}n \in L^\infty(L^{10/9}) \cap L^{10/9}(W^{9/5, 10/9}) \hookrightarrow L^\infty(L^{10/9}) \cap L^{10/9}(W^{1, 30/19}).$$

Así, del Lema 1.6 con  $\alpha = 4/5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = q = 10/9$ , se tiene que  $\lambda = 4/5$ ,  $r = 150/103$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{1/5}n\|_{W^{4/5, 150/103}}^s \leq \|D^{1/5}n\|_{W^{1, 30/19}}^{s\lambda} \|D^{1/5}n\|_{L^{10/9}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{1/5}n \in L^{10/9}$  en tiempo, se obtiene que  $s\lambda = 10/9$ , lo cual implica que  $s = 25/18$  y entonces  $n \in L^{25/18}(W^{1, 150/103})$ . Finalmente,

$$\nabla n \in L^{25/18}(L^{150/103}). \quad (90)$$

v)  $n \in \mathcal{X}_{20/17}$ .

De (88) se sabe que  $\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(L^{60})$ . Además, por el Lema 1.2 con  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 4$ ,  $p_2 = 20/7$ ,  $q_2 = 60$  y  $p = 5$  obtenemos

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^5(L^{60/7}).$$

Por lo tanto, de (90),  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{25/18}(L^{300/281}) \cap L^{25/23}(L^{300/241})$ . Finalmente, por el Lema 1.2 con  $(p_1, q_1) = (25/18, 300/281)$  y  $(p_2, q_2) = (25/23, 300/241)$  se tiene que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{20/17}(L^{20/17})$ . De (90) también se tiene que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{50/41}(L^{150/118}) \hookrightarrow L^{20/17}(L^{20/17})$  y así  $n\Delta c, n^2, nw \in L^{10/7}(L^{10/7}) \hookrightarrow L^{20/17}(L^{20/17})$ . Del Teorema 1.1, se concluye que  $n \in \mathcal{X}_{20/17}$ .

vi)  $\nabla n \in L^{200/119}(L^{150/103})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{20/17}$ , se tiene  $n \in L^\infty(W^{3/10, 20/17}) \cap L^{20/17}(W^{2, 20/17})$ . Entonces,

$$D^{3/10}n \in L^\infty(L^{20/17}) \cap L^{20/17}(W^{17/10, 20/17}) \hookrightarrow L^\infty(L^{20/17}) \cap L^{20/17}(W^{1, 60/37}).$$

Así, del Lema 1.6 con  $\alpha = 7/10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 60/37$ ,  $q = 20/17$ , se tiene que  $\lambda = 7/10$ ,  $r = 150/103$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{3/10}n\|_{W^{7/10, 150/103}}^s \leq \|D^{3/10}n\|_{W^{1, 60/37}}^{s\lambda} \|D^{3/10}n\|_{L^{20/17}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{3/10}n \in L^{20/17}$  en tiempo, tenemos que  $s\lambda = 20/17$ , lo cual implica que  $s = 200/119$  y entonces  $n \in L^{200/119}(W^{1, 150/103})$ . Finalmente,

$$\nabla n \in L^{200/119}(L^{150/103}). \quad (91)$$

vii)  $n \in \mathcal{X}_{5/4}$ .

De (88) sabemos que  $\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(L^{60})$ . Además, por el Lema 1.2 con  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 4$ ,  $p_2 = 20/7$ ,  $q_2 = 60$  y  $p = 4$  obtenemos

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^4(L^{12}).$$

Por lo tanto, de (91),  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{200/119}(L^{300/281}) \cap L^{200/169}(L^{300/231})$ . Finalmente, del Lema 1.2 con  $(p_1, q_1) = (200/119, 300/281)$ ,  $(p_2, q_2) = (200/169, 300/231)$  tenemos que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{5/4}(L^{5/4})$ . De manera similar, de (91), se tiene que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{5/4}(L^{5/4})$ . Por lo tanto, del Teorema 1.1 concluimos que  $n \in \mathcal{X}_{5/4}$ .

viii)  $\nabla n \in L^{25/12}(L^{25/17})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{5/4}$ , tenemos que  $n \in L^\infty(W^{2/5, 5/4}) \cap L^{5/4}(W^{2, 5/4})$ . Entonces,

$$D^{2/5}n \in L^\infty(L^{5/4}) \cap L^{5/4}(W^{8/5, 5/4}) \hookrightarrow L^\infty(L^{5/4}) \cap L^{5/4}(W^{1, 5/3}).$$

Así, del Lema 1.6 con  $\alpha = 3/5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 5/3$ ,  $q = 5/4$ , tenemos que  $\lambda = 3/5$ ,  $r = 25/17$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{2/5}n\|_{W^{3/5, 25/17}}^s \leq \|D^{2/5}n\|_{W^{1, 5/3}}^{s\lambda} \|D^{2/5}n\|_{L^{5/4}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{2/5}n \in L^{5/4}$  en tiempo, tenemos que  $s\lambda = 5/4$ , lo que implica  $s = 25/12$  y entonces  $n \in L^{25/12}(W^{1, 25/17})$ . Finalmente,

$$\nabla n \in L^{25/12}(L^{25/17}). \quad (92)$$

ix)  $n \in \mathcal{X}_{4/3}$ .

De (88) se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(L^{60})$ . Además, del Lema 1.2 con  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 4$ ,  $p_2 = 20/7$ ,  $q_2 = 60$  y  $p = 3$  se obtiene

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^3(L^{36}).$$

Por lo tanto, de (92),  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{25/12}(L^{100/93}) \cap L^{75/61}(L^{900/637})$ . Finalmente, del Lema 1.2 con  $(p_1, q_1) = (25/12, 100/93)$ ,  $(p_2, q_2) = (75/61, 900/637)$  se tiene que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{4/3}(L^{4/3})$ . De manera similar, de (92) y  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_2$ , tenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{4/3}(L^{4/3})$ . Usando el Teorema 1.1 concluimos que  $n \in \mathcal{X}_{4/3}$ .

x)  $\nabla n \in L^{8/3}(L^{3/2})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{4/3}$ , tenemos que  $n \in L^\infty(W^{1/2,4/3}) \cap L^{4/3}(W^{2,4/3})$ . Entonces,

$$D^{1/2}n \in L^\infty(L^{4/3}) \cap L^{4/3}(W^{3/2,4/3}) \hookrightarrow L^\infty(L^{4/3}) \cap L^{4/3}(W^{1,12/7}).$$

Así, del Lema 1.6 con  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 12/7$ ,  $q = 4/3$ , tenemos que  $\lambda = 1/2$ ,  $r = 3/2$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{1/2}n\|_{W^{1/2,3/2}}^s \leq \|D^{1/2}n\|_{W^{1,12/7}}^{s\lambda} \|D^{1/2}n\|_{L^{4/3}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{1/2}n \in L^{4/3}$  en tiempo, tenemos que  $s\lambda = 4/3$ , lo que implica que  $s = 8/3$  y entonces  $n \in L^{8/3}(W^{1,3/2})$ . Finalmente

$$\nabla n \in L^{8/3}(L^{3/2}). \quad (93)$$

xi)  $n \in \mathcal{X}_{10/7}$ .

De (88) se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^{20/7}(L^{60})$ . Además, del Lema 1.2 con  $p_1 = \infty$ ,  $q_1 = 4$ ,  $p_2 = 20/7$ ,  $q_2 = 60$  y  $p = 3$ , nuevamente

$$\nabla c \in L^\infty(L^4) \cap L^3(L^{36}).$$

Por lo tanto, de (93),  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{8/3}(L^{12/11}) \cap L^{24/17}(L^{36/25})$ . Finalmente, del Lema 1.2 con  $(p_1, q_1) = (8/3, 12/11)$ ,  $(p_2, q_2) = (24/17, 36/25)$ , se tiene que  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^{10/7}(L^{10/7})$ . De manera similar, por (93) y  $\mathbf{u} \in \mathcal{X}_2$ , se tiene que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{10/7}(L^{10/7})$ . Del Teorema 1.1 concluimos que  $n \in \mathcal{X}_{10/7}$ .

xii)  $\nabla n \in L^2(L^2)$  y  $n \in L^\infty(L^2) \cap L^{10/3}(L^{10/3})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{10/7}$ , tenemos que  $n \in L^\infty(W^{3/5, 10/7}) \cap L^{10/7}(W^{2, 10/7})$ . Entonces,

$$D^{3/5}n \in L^\infty(L^{10/7}) \cap L^{10/7}(W^{7/5, 10/7}) \hookrightarrow L^\infty(L^{10/7}) \cap L^{10/7}(W^{1, 30/17}).$$

Así, del Lema 1.6 con  $\alpha = 2/5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $p = 30/17$ ,  $q = 10/7$ , tenemos que  $\lambda = 2/5$ ,  $r = 150/97$  y para  $s > 0$ ,

$$\|D^{3/5}n\|_{W^{2/5, 150/97}}^s \leq \|D^{3/5}n\|_{W^{1, 30/17}}^{s\lambda} \|D^{3/5}n\|_{L^{10/7}}^{s(1-\lambda)}.$$

Como  $D^{3/5}n \in L^{10/7}$  en tiempo, tenemos que  $s\lambda = 10/7$ , lo cual implica  $s = 25/7$  y entonces  $n \in L^{25/7}(W^{1, 150/97})$ . Ahora, por la inmersión de Sobolev  $\nabla n \in L^{10/7}(W^{1, 10/7}) \hookrightarrow L^{10/7}(L^{30/11})$  tenemos que  $\nabla n \in L^{25/7}(L^{150/97}) \cap L^{10/7}(L^{30/11})$ . Entonces del Lema 1.2 con  $p_1 = 25/7$ ,  $q_1 = 150/97$ ,  $p_2 = 10/7$ ,  $q_2 = 30/11$  y  $p = 2$ ,

$$\nabla n \in L^2(L^2). \tag{94}$$

Finalmente, por inmersiones de Sobolev tenemos que  $n \in L^\infty(W^{3/5, 10/7}) \cap L^{10/7}(W^{2, 10/7}) \hookrightarrow L^\infty(L^2) \cap L^{10/7}(L^{30}) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3})$ .

xiii)  $n \in \mathcal{X}_{20/13}$ .

Como tenemos que  $\nabla c \in L^{20/3}(L^{20/3})$ ,  $\Delta c \in L^{20/7}(L^{20/7})$  y  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10}) \hookrightarrow L^{20/3}(L^{20/3})$ , de la regularidad de  $n$  en el anterior ítem tenemos que

$$\mathbf{u} \cdot \nabla n, \nabla c \cdot \nabla n, n \Delta c, n, n^2, n w \in L^{20/13}(L^{20/13}).$$

Concluimos del Teorema 1.1 que  $n \in \mathcal{X}_{20/13}$ .

xiv)  $n \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{20/13}$ , se tiene que  $n \in L^\infty(W^{7/10,20/13}) \cap L^{20/13}(W^{2,20/13})$ . Entonces, por (12) tenemos que

$$n \in L^\infty(W^{7/10,20/13}) \cap L^{20/13}(W^{2,20/13}) \hookrightarrow L^\infty(H^{1/4}) \cap L^{20/13}(H^{31/20}).$$

Así, del Lema 1.4 con  $(p_1, s_1) = (\infty, 1/4)$ ,  $(p_2, s_2) = (20/13, 31/20)$ , se tiene que  $n \in L^2(H^{65/52}) \hookrightarrow L^2(H^1)$ . Del Paso 4-xii), se tenía que  $n \in L^\infty(L^2)$ .

*Paso 5:*  $w \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$ .

Esta afirmación se prueba de forma análoga al paso anterior.

Volvemos a mejorar la regularidad de  $c$ .

*Paso 6:*  $c \in \mathcal{X}_{10/3}$ .

Como  $n, w \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3})$ ,  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$ ,  $c \in L^\infty(L^\infty)$  y  $\nabla c \in L^{20/3}(L^{20/3})$ , entonces  $cn, cw \in L^{10/3}(L^{10/3})$ ,  $\mathbf{u} \cdot \nabla c \in L^4(L^4)$ , y concluimos del Teorema 1.1 que  $c \in \mathcal{X}_{10/3}$ .

*Paso 7:*  $\nabla c \in L^{10}(L^{10})$  y  $\Delta c \in L^{10/3}(L^{10/3})$ .

Como  $c \in \mathcal{X}_{10/3}$ , se tiene que  $\nabla c \in L^\infty(W^{2/5, 10/3}) \cap L^{10/3}(W^{1, 10/3}) \hookrightarrow L^\infty(L^6) \cap L^{10/3}(W^{1, 10/3})$ .

Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 6$ ,  $p_1 = p_2 = 10/3$ ,  $r = 1$ , obtenemos que  $\nabla c \in L^{10}(L^{10})$ . El hecho de que  $\Delta c \in L^{10/3}(L^{10/3})$  es inmediato de la definición de  $\mathcal{X}_{10/3}$ .

*Paso 8:*  $n \in \mathcal{X}_{5/3}$ .

De la regularidades de  $n$  en el *Paso 4*,  $w$  en el *Paso 5* y  $c$  en el *Paso 7*, y como  $c \in L^\infty(L^\infty)$ ,  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$  obtenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n$ ,  $n\Delta c$ ,  $\nabla c \cdot \nabla n$ ,  $n^2$ ,  $nw \in L^{5/3}(L^{5/3})$ . Por lo tanto, del Teorema 1.1,  $n \in \mathcal{X}_{5/3}$ .

*Paso 9:*  $n \in L^5(L^5)$  y  $\nabla n \in L^{20/9}(L^{20/9})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{5/3}$ , tenemos que  $n \in L^\infty(W^{4/5, 5/3}) \cap L^{5/3}(W^{2, 5/3}) \hookrightarrow L^\infty(L^3) \cap L^{5/3}(W^{2, 5/3})$ . Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 3$ ,  $p_1 = p_2 = 5/3$  y  $r = 2$ , obtenemos que  $n \in L^5(L^5)$ . Por otra parte, como  $n \in L^\infty(W^{4/5, 5/3}) \cap L^{5/3}(W^{2, 5/3})$ , de (12) tenemos que

$$n \in L^\infty(H^{1/2}) \cap L^{5/3}(H^{17/10}).$$

Entonces, por el Lema 1.4 con  $(p_1, s_1) = (\infty, 1/2)$  y  $(p_2, s_2) = (5/3, 17/10)$ , se tiene que  $n \in L^{20/9}(H^{7/5})$ . En particular,  $\nabla n \in L^{20/9}(H^{2/5}) \hookrightarrow L^{20/9}(L^{20/9})$ .

*Paso 10:*  $w \in \mathcal{X}_{5/3}$ ,  $w \in L^5(L^5)$  y  $\nabla w \in L^{20/9}(L^{20/9})$ .

Esta afirmación se prueba de forma análoga a los *Pasos 8* y *9*.

*Paso 11:*  $c \in \mathcal{X}_4$ .

Tenemos de los *Pasos 1* y *7* que  $\mathbf{u} \cdot \nabla c \in L^4(L^4)$ . Como  $c \in L^\infty(L^\infty)$ , y de los *Pasos 8* y *10*,  $n$ ,  $w \in L^5(L^5)$ , se tiene que  $cn$ ,  $cw \in L^5(L^5)$ . Así, del Teorema 1.1,  $c \in \mathcal{X}_4$ . Además, de (87),

$$\begin{aligned} \|c\|_{\mathcal{X}_4} &\leq C(\|-\mathbf{u} \cdot \nabla c - (n+w)c\|_{L^4(L^4)} + \|c_0\|_{\widehat{W}^{3/2,4}}) \\ &\leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^{10}(L^{10})} \|\nabla c\|_{L^{20/3}(L^{20/3})} + \|c\|_{L^\infty(L^\infty)} (\|n\|_{L^5(L^5)} + \|w\|_{L^5(L^5)}) + \|c_0\|_{\widehat{W}^{3/2,4}}) \\ &\leq C(\|n_0\|_{\widehat{W}^{3/2,4}}, \|w_0\|_{\widehat{W}^{3/2,4}}, \|c_0\|_{\widehat{W}^{3/2,4}}, \|\mathbf{u}_0\|_V, \|n\|_{L^2(L^2)}, \|w\|_{L^2(L^2)}, \|\mathbf{u}\|_{L^8(L^4)}). \end{aligned} \quad (95)$$

*Paso 12:*  $\nabla c \in L^{20}(L^{20})$  y  $\Delta c \in L^4(L^4)$ .

Como  $c \in \mathcal{X}_4$ , tenemos que  $\nabla c \in L^\infty(W^{1/2,4}) \cap L^4(W^{1,4}) \hookrightarrow L^\infty(L^{12}) \cap L^4(W^{1,4})$ . Así, del Lema 1.5 con  $q_1 = 12$ ,  $p_1 = p_2 = 4$  y  $r = 1$ , se tiene que  $\nabla c \in L^{20}(L^{20})$ . Por otra parte, el hecho de que  $\Delta c \in L^4(L^4)$  es inmediato de la definición de  $\mathcal{X}_4$ .

*Paso 13:*  $n \in \mathcal{X}_4$ .

i)  $n \in \mathcal{X}_{20/11}$ .

De las regularidades de  $n$  en el *Paso 9* y  $c$  en *Paso 12*, y como  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$ , se tiene que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{20/11}(L^{20/11})$ ,  $n\Delta c \in L^{20/9}(L^{20/9})$  y  $\nabla c \cdot \nabla n \in L^2(L^2)$ . Por lo tanto, del Teorema

$$1.1, n \in \mathcal{X}_{20/11}.$$

$$\text{ii) } \nabla n \in L^{5/2}(L^{5/2}).$$

Como  $n \in \mathcal{X}_{20/11}$ , se tiene que  $n \in L^\infty(W^{9/10,20/11}) \cap L^{20/11}(W^{2,20/11})$ . Entonces, por (12) tenemos que

$$n \in L^\infty(W^{9/10,20/11}) \cap L^{20/11}(W^{2,20/11}) \hookrightarrow L^\infty(H^{4/3}) \cap L^{20/11}(H^{20/37}).$$

Por lo tanto, del Lema 1.4 con  $(p_1, s_1) = (\infty, 4/3)$  y  $(p_2, s_2) = (20/11, 20/37)$ , tenemos que  $n \in L^{5/2}(H^{31/20})$ . En particular,  $\nabla n \in L^{5/2}(H^{11/20}) \hookrightarrow L^{5/2}(L^{60/19}) \hookrightarrow L^{5/2}(L^{5/2})$ .

$$\text{iii) } n \in \mathcal{X}_2.$$

Como  $\nabla n \in L^{5/2}(L^{5/2})$  y  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$ , tenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^2(L^2)$ . Entonces, por el ítem i) de este paso y del Teorema 1.1,  $n \in \mathcal{X}_2$ .

$$\text{iv) } n \in \mathcal{X}_{5/2}.$$

Tenemos que  $n \in \mathcal{X}_2 \hookrightarrow L^{10}(L^{10})$ . Además, usando el Lema 1.5 con  $q_1 = p_1 = p_2 = 2$  y  $r = 1$  se tiene que  $\nabla n \in \mathcal{X}_1 \hookrightarrow L^{10/3}(L^{10/3})$ . Por lo tanto, de la regularidad obtenida para  $c$  en el Paso 12 y usando que  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$ , obtenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{5/2}(L^{5/2})$  y  $\nabla n \cdot \nabla c, n\Delta c \in L^{20/7}(L^{20/7})$ . Como  $\frac{5}{2} < \frac{20}{7} < 5$ , tenemos que  $n \in \mathcal{X}_{5/2}$ .

$$\text{v) } \nabla n \in L^4(L^4).$$

Como  $n \in \mathcal{X}_{5/2}$ , tenemos que  $\nabla n \in L^\infty(W^{1/5,5/2}) \cap L^{5/2}(W^{1,5/2})$ . Entonces, de (12) tenemos que

$$n \in L^\infty(W^{1/5,5/2}) \cap L^{5/2}(W^{1,5/2}) \hookrightarrow L^\infty(H^{1/2}) \cap L^{5/2}(H^{13/10}).$$

Entonces, del Lema 1.4 con  $(p_1, s_1) = (\infty, 1/2)$  y  $(p_2, s_2) = (5/2, 13/10)$  tenemos que  $\nabla n \in L^4(H^1) \hookrightarrow L^4(L^4)$ .

vi)  $n \in \mathcal{X}_{20/7}$ .

Como  $\nabla n \in L^4(L^4)$  y  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$ , tenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^{20/7}(L^{20/7})$ . Entonces, del ítem iv) de este paso y el Teorema 1.1, se concluye que  $n \in \mathcal{X}_{20/7}$ .

vii)  $n \in L^\infty(L^\infty)$  y  $\nabla n \in L^{20/3}(L^{20/3})$ .

Como  $n \in \mathcal{X}_{20/7}$ , tenemos que  $n \in L^\infty(W^{13/10, 20/7}) \hookrightarrow L^\infty(L^\infty)$ . Además, del Lema 1.5 tenemos que

$$\nabla n \in L^\infty(W^{3/10, 20/7}) \cap L^{20/7}(W^{1, 20/7}) \hookrightarrow L^{20/3}(L^{20/3}).$$

viii)  $n \in \mathcal{X}_4$ .

De las regularidades correspondientes a  $w$ ,  $c$  y  $n$  en los pasos anteriores, y como  $\mathbf{u} \in L^{10}(L^{10})$  tenemos que  $\mathbf{u} \cdot \nabla n \in L^4(L^4)$ ,  $n\Delta c \in L^4(L^4)$  y  $\nabla n \cdot \nabla c, n^2, nw \in L^5(L^5)$ . Así, por el Teorema 1.1,  $n \in \mathcal{X}_4$ .

*Paso 14:*  $w \in \mathcal{X}_4$ .

Esta afirmación se prueba de forma análoga al paso anterior.

□

### 3. Análisis numérico

Desde el punto de vista numérico, existen diferentes trabajos enfocados en el fenómeno de quimiotaxis (ver por ejemplo, (Chertock et al., 2018; Guillén-González et al., 2019, 2020b, 2021, 2022; Guo et al., 2019; Gutiérrez-Santacreu and Rodríguez-Galván, 2021; M. Ibrahim, 2014; Saito, 2012) y las referencias en ellos) en donde se han propuesto algunos esquemas numéricos utilizando diferentes métodos, analizando propiedades de las soluciones discretas como su existencia, unicidad, positividad, convergencia, conservación de masa, estimaciones de error, entre otras. Una vez considerada la interacción con un fluido, hasta donde sabemos, la literatura relacionada con el sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes es escasa, ver por ejemplo (Chamoun et al., 2018; Duarte-Rodríguez et al., 2021). Para el modelo de Keller-Segel-Stokes bidimensional, en (Chamoun et al., 2018) se estudió la convergencia de un esquema numérico obtenido mediante la combinación de los métodos de volúmenes finitos y elementos finitos; mientras que, para un sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes tridimensional, la convergencia de un esquema de elementos finitos fue analizada en (Duarte-Rodríguez et al., 2021). Por otra parte, hasta donde sabemos, para el modelo (4)-(5) en el cual, la difusión por la quimiotaxis, los términos de competencia del tipo Lotka-Volterra y la interacción de un fluido son combinados, no hay trabajos que traten el análisis numérico. Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo de este capítulo es desarrollar el análisis numérico del modelo (4)-(5).

### 3.1. Formulación débil equivalente

Recordando que uno de los objetivos principales de este trabajo es abordar el análisis numérico del sistema (4)-(5), se observa una dificultad al lidiar con los términos fuertemente no lineales  $-\chi_1 \nabla \cdot (n \nabla c)$ ,  $-\chi_2 \nabla \cdot (w \nabla c)$  de segundo orden en las ecuaciones de densidad de las especies competidoras. De hecho, no está claro cómo realizar un análisis de órdenes óptimos de convergencia en un esquema de elementos finitos basado en la formulación variacional clásica. Así, para superar esta dificultad, se introduce una variable auxiliar dada por el gradiente de la sustancia quimioatrativa,  $\mathbf{s} = \nabla c$ , obteniendo el siguiente sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t n, \bar{n}) + D_n(\nabla n, \nabla \bar{n}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla n, \bar{n}) = \chi_1(n\mathbf{s}, \nabla \bar{n}) + \mu_1(n(1-n-a_1w), \bar{n}), \\ (\partial_t w, \bar{w}) + D_w(\nabla w, \nabla \bar{w}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla w, \bar{w}) = \chi_2(w\mathbf{s}, \nabla \bar{w}) + \mu_2(w(1-a_2n-w), \bar{w}), \\ (\partial_t \mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\text{rot}(\mathbf{s}), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) + D_c(\nabla \cdot \mathbf{s}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + (\alpha n + \beta w)c, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}), \\ (\partial_t c, \bar{c}) + D_c(\nabla c, \nabla \bar{c}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla c, \bar{c}) = -((\alpha n + \beta w)c, \bar{c}), \\ (\partial_t \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) + D_{\mathbf{u}}(\nabla \mathbf{u}, \nabla \bar{\mathbf{u}}) + k((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}) = (\boldsymbol{\pi}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + ((\gamma n + \lambda w) \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}), \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\pi}}) = 0, \end{array} \right. \quad (96)$$

para todo  $[\bar{n}, \bar{w}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{c}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}] \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_s^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ , donde la condición inicial considerada para la variable  $\mathbf{s}$  es  $\mathbf{s}(x, 0) = \mathbf{s}_0(x) = \nabla c_0(x)$ . La ecuación (96)<sub>3</sub> se obtiene aplicando el operador gradiente de la ecuación (4)<sub>3</sub>, multiplicando el resultado por la función *test*  $\bar{\mathbf{s}} \in H_s^1(\Omega)$ , integrando por partes y sumando el término  $(\text{rot}(\mathbf{s}), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}}))$  (usando que  $\text{rot}(\mathbf{s}) = 0$ ).

Entonces, se tiene el siguiente resultado.

**Lema 3.1.** *Sea  $\mathbf{s}_0 = \nabla c_0$ . Entonces  $[n, w, c, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  es una solución clásica de (4)-(5) si, y solo si,  $[n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  es una solución clásica de (96).*

*Demostración.* Si  $[n, w, c, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  es una solución clásica de (4)-(5), entonces definiendo  $\mathbf{s} = \nabla c$ , el procedimiento anterior para obtener (96) muestra que  $[n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  satisface (96). Ahora, supóngase que  $[n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  es una solución clásica de (96), integrando por partes la ecuación (96)<sub>4</sub> tenemos que

$$\partial_t c - D_c \Delta c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = -(\alpha n + \beta w)c \quad \text{c.t.p en } \Omega. \quad (97)$$

Aplicando el operador gradiente en ambas partes de la igualdad (97), tomando como función test  $\bar{\mathbf{s}} \in H_s^1(\Omega)$ , restando la ecuación resultante de (96)<sub>3</sub> y denotando  $\boldsymbol{\rho} = \nabla c - \mathbf{s}$  se tiene que

$$(\partial_t \boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{s}}) + D_c (\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + D_c (\text{rot}(\boldsymbol{\rho}), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) - (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{s}} \in H_s^1(\Omega),$$

de donde, tomando  $\bar{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\rho} \in H_s^1(\Omega)$  y usando (6) y (9), se concluye que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2}^2 + D_c \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2}^2 + D_c \|\text{rot}(\boldsymbol{\rho})\|_{L^2}^2 &= (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho}, \nabla \cdot \boldsymbol{\rho}) \leq \|\mathbf{u}\|_{L^6} \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^3} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2} \\ &\leq \frac{D_c}{4} \|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2}^2 + \frac{C}{D_c} \|\mathbf{u}\|_{L^6}^2 \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2} \|\boldsymbol{\rho}\|_{H^1} \\ &\leq \frac{D_c}{2} (\|\nabla \cdot \boldsymbol{\rho}\|_{L^2}^2 + \|\text{rot}(\boldsymbol{\rho})\|_{L^2}^2) + C \|\mathbf{u}\|_{L^6}^4 \|\boldsymbol{\rho}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Como  $\boldsymbol{\rho}(0) = 0$ , observamos que  $\boldsymbol{\rho} = 0$ , así  $\mathbf{s} = \nabla c$ . Para finalizar, se reemplaza  $\mathbf{s} = \nabla c$  en (96)<sub>1,2</sub> e integrando por partes una vez más, se concluye que  $[n, w, c, \mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$  es solución de (4)-

(5). □

### 3.2. Esquema numérico

En esta sección, se construye y se analiza un esquema numérico para aproximar las soluciones débiles del modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes con términos de competencia del tipo Lotka-Volterra (4) con condiciones iniciales y de frontera (5). Se propone un esquema numérico totalmente discreto, que está bien planteado, basado en el método de Elementos Finitos (EF). Se asume una partición uniforme de  $[0, T]$  con paso de tiempo  $\Delta t = T/N : (t_m = m\Delta t)_{m=0}^{m=N}$ .

Para la discretización espacial, se considera una familia de triangulaciones regulares y cuasiuniformes de  $\bar{\Omega}$ ,  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ , formadas por símlices  $K$  (triángulos 2D y tetraedos en 3D) con un ángulo recto, tales que  $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ , donde  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ , siendo  $h_K$  el diámetro de  $K$ .

Se consideran los siguientes espacios de elementos finitos para  $[n, w, c, \mathbf{s}]$ :

$$N_h = \{n \in C(\bar{\Omega}) : n|_K \in \mathbb{P}_{r_1} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega),$$

$$W_h = \{w \in C(\bar{\Omega}) : w|_K \in \mathbb{P}_{r_2} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega),$$

$$C_h = \{c \in C(\bar{\Omega}) : c|_K \in \mathbb{P}_{r_3} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega),$$

$$\Sigma_h = \{\mathbf{s} \in C(\bar{\Omega}) : \mathbf{s}|_K \in \mathbb{P}_{r_4} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H_s^1(\Omega),$$

con  $r_i \geq 1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), donde en general  $\mathbb{P}_r$  denota el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que  $r$ . Por otra parte, asumimos que los espacios para  $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}]$ , los cuales serán

denotados por  $[U_h, \Pi_h]$ , satisfacen la siguiente condición *inf-sup* discreta: *Existe  $\hat{\beta} > 0$  constante, independiente de  $h$ , tal que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in U_h \setminus \{0\}} \frac{-(g, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{U_h}} \geq \hat{\beta} \|g\|_{\Pi_h}, \quad \forall g \in \Pi_h. \quad (98)$$

Algunas opciones para la escogencia de los espacios  $[U_h, \Pi_h]$  son: la aproximación de Taylor-Hood  $[\mathbb{P}_r, \mathbb{P}_{r-1}]$  (para  $r \geq 2$ ) (Stenberg, 1990; Girault and Raviart, 1986), o  $[\mathbb{P}_1 - \text{burbuja}, \mathbb{P}_1]$  (para  $r = 1$ ) (Girault and Raviart, 1986).

**3.2.1. Operadores de interpolación.** Se considera el operador de Stokes  $(\mathbb{P}_{\mathbf{u}}, \mathbb{P}_{\pi})$ :

$H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \rightarrow U_h \times \Pi_h$  tal que  $[\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbb{P}_{\pi}\pi] \in U_h \times \Pi_h$  satisfice

$$\begin{cases} D_{\mathbf{u}}(\nabla(\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\mathbb{P}_{\pi}\pi - \pi, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0, & \forall \bar{\mathbf{u}} \in U_h, \\ (\nabla \cdot (\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} - \mathbf{u}), \bar{\pi}) = 0, & \forall \bar{\pi} \in \Pi_h, \end{cases} \quad (99)$$

el cual satisface las siguientes propiedades de aproximación y estabilidad presentadas en (Guillén-González and Redondo-Neble, 2013)

$$\|[\mathbf{u} - \mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \pi - \mathbb{P}_{\pi}\pi]\|_{H^1 \times L^2} + \frac{1}{h} \|\mathbf{u} - \mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\|_{L^2} \leq Kh^r \|[\mathbf{u}, \pi]\|_{H^{r+1} \times H^r}, \quad (100)$$

$$\|[\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}, \mathbb{P}_{\pi}\pi]\|_{W^{1,6} \times L^6} \leq C \|[\mathbf{u}, \pi]\|_{H^2 \times H^1}. \quad (101)$$

Además, se consideran los siguientes operadores de interpolación

$$\mathbb{P}_n : H^1(\Omega) \rightarrow N_h, \quad \mathbb{P}_w : H^1(\Omega) \rightarrow W_h, \quad \mathbb{P}_c : H^1(\Omega) \rightarrow C_h, \quad \mathbb{P}_s : H_s^1(\Omega) \rightarrow \Sigma_h,$$

tales que para todo  $n \in H^1(\Omega)$ ,  $w \in H^1(\Omega)$ ,  $c \in H^1(\Omega)$  y  $\mathbf{s} \in H^1_s(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}_n n \in N_h$ ,  $\mathbb{P}_w w \in W_h$ ,  $\mathbb{P}_c c \in C_h$

y  $\mathbb{P}_s \mathbf{s} \in \Sigma_h$  satisfacen

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla(\mathbb{P}_n n - n), \nabla \bar{n}) + (\mathbb{P}_n n - n, \bar{n}) = 0, \quad \forall \bar{n} \in N_h, \\ (\nabla(\mathbb{P}_w w - w), \nabla \bar{w}) + (\mathbb{P}_w w - w, \bar{w}) = 0, \quad \forall \bar{w} \in W_h, \\ (\nabla(\mathbb{P}_c c - c), \nabla \bar{c}) + (\mathbb{P}_c c - c, \bar{c}) = 0, \quad \forall \bar{c} \in C_h, \\ (\nabla \cdot (\mathbb{P}_s \mathbf{s} - \mathbf{s}), \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + (\text{rot}(\mathbb{P}_s \mathbf{s} - \mathbf{s}), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) + (\mathbb{P}_s \mathbf{s} - \mathbf{s}, \bar{\mathbf{s}}) = 0, \quad \forall \bar{\mathbf{s}} \in \Sigma_h. \end{array} \right. \quad (102)$$

No es difícil ver que los operadores de interpolación están bien definidos como consecuencia del Teorema de Lax-Milgram. En efecto, por ejemplo para el operador de interpolación  $\mathbb{P}_n$ , considerando la forma bilineal

$$\begin{aligned} a : N_h \times N_h &\rightarrow \mathbb{R} \\ [\omega, \bar{n}] &\rightarrow (\omega, \bar{n}) + (\nabla \omega, \nabla \bar{n}), \end{aligned} \quad (103)$$

se tiene que  $a(\cdot, \cdot)$  es continua y coerciva. Además, dado  $n \in H^1(\Omega)$ , el funcional  $f_n : N_h \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f_n(\bar{n}) = (n, \bar{n}) + (\nabla n, \nabla \bar{n})$  pertenece a  $(N_h)'$ . Por lo tanto, el Teorema de Lax-Milgram implica que existe un único elemento en  $N_h$ , denotado por  $\mathbb{P}_n n$ , tal que  $a(\mathbb{P}_n n, \bar{n}) = f_n(\bar{n})$ , para todo  $\bar{n} \in N_h$ .

Además, se cumplen los siguientes errores de interpolación (ver (Brenner, 2007)):

$$\left\{ \begin{array}{l} \|n - \mathbb{P}_n n\|_{L^2} + h \|n - \mathbb{P}_n n\|_{H^1} \leq Kh^{r_1+1} \|n\|_{H^{r_1+1}}, \quad \forall n \in H^{r_1+1}(\Omega), \\ \|w - \mathbb{P}_w w\|_{L^2} + h \|w - \mathbb{P}_w w\|_{H^1} \leq Kh^{r_2+1} \|w\|_{H^{r_2+1}}, \quad \forall w \in H^{r_2+1}(\Omega), \\ \|c - \mathbb{P}_c c\|_{L^2} + h \|c - \mathbb{P}_c c\|_{H^1} \leq Kh^{r_3+1} \|c\|_{H^{r_3+1}}, \quad \forall c \in H^{r_3+1}(\Omega), \\ \|\mathbf{s} - \mathbb{P}_s \mathbf{s}\|_{L^2} + h \|\mathbf{s} - \mathbb{P}_s \mathbf{s}\|_{H^1} \leq Ch^{r_4+1} \|\mathbf{s}\|_{H^{r_4+1}}, \quad \forall \mathbf{s} \in H^{r_4+1}(\Omega), \end{array} \right. \quad (104)$$

y las siguientes propiedades de estabilidad

$$\|[\mathbb{P}_n n, \mathbb{P}_w w, \mathbb{P}_c c, \mathbb{P}_s \mathbf{s}]\|_{H^1} \leq \|[n, w, c, \mathbf{s}]\|_{H^1}, \quad (105)$$

$$\|[\mathbb{P}_n n, \mathbb{P}_w w, \mathbb{P}_c c, \mathbb{P}_s \mathbf{s}]\|_{W^{1,6}} \leq C \|[n, w, c, \mathbf{s}]\|_{H^2}. \quad (106)$$

La desigualdad (105) se puede deducir de (102). Por ejemplo, tomando  $\bar{n} = \mathbb{P}_n n$  en (102)<sub>1</sub> se obtiene

$$(\nabla \mathbb{P}_n n, \nabla \mathbb{P}_n n) + (\mathbb{P}_n n, \mathbb{P}_n n) - (\nabla n, \nabla \mathbb{P}_n n) - (n, \mathbb{P}_n n) = 0.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\|\mathbb{P}_n n\|_{H^1}^2 \leq \|\nabla n\|_{L^2} \|\nabla \mathbb{P}_n n\|_{L^2} + \|n\|_{L^2} \|\mathbb{P}_n n\|_{L^2} = [\|n\|_{L^2}, \|\nabla n\|_{L^2}] \cdot [\|\mathbb{P}_n n\|_{L^2}, \|\nabla \mathbb{P}_n n\|_{L^2}]$$

por lo tanto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz concluimos que

$$\|\mathbb{P}_n n\|_{H^1} \leq \|n\|_{H^1}.$$

De forma análoga se deducen las desigualdades para las variables  $w, c$  y  $\mathbf{s}$ . La desigualdad (106),

por ejemplo para la variable  $n$ , se puede obtener de (104)<sub>1</sub>, usando la desigualdad inversa (13) y comparando  $\mathbb{P}_n$  con un interpolador de promedios de tipo Clement o Scott-Zhang (que son estables en  $W^{1,6}$ ) (Brenner, 2007; Süli and Mayers, 2003). Nuevamente, de forma análoga, se deducen las desigualdades para las variables  $w, c$  y  $\mathbf{s}$ .

**3.2.2. Definición del esquema numérico.** Teniendo en cuenta la formulación débil (96), se considera el siguiente esquema numérico de primer orden en el tiempo, lineal y desacoplado.

**Inicialización:** Sea  $[n_h^0, w_h^0, c_h^0, \mathbf{s}_h^0, \mathbf{u}_h^0] = [\mathbb{P}_n n_0, \mathbb{P}_w w_0, \mathbb{P}_c c_0, \mathbb{P}_s \mathbf{s}_0, \mathbb{P}_u \mathbf{u}_0] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h$ .

**Paso de tiempo  $m$ :** Dado el vector  $[n_h^{m-1}, w_h^{m-1}, c_h^{m-1}, \mathbf{s}_h^{m-1}, \mathbf{u}_h^{m-1}] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h$ , calcular  $[n_h^m, w_h^m, c_h^m, \mathbf{s}_h^m, \mathbf{u}_h^m, \boldsymbol{\pi}_h^m] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  tal que para cada  $[\bar{n}, \bar{w}, \bar{c}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\boldsymbol{\pi}}] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  se cumple:

$$\begin{aligned}
a) \quad & (\delta_t n_h^m, \bar{n}) + D_n(\nabla n_h^m, \nabla \bar{n}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, n_h^m, \bar{n}) \\
& = \chi_1(n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{n}) + \mu_1(n_h^m, \bar{n}) - \mu_1(n_h^m [n_h^{m-1}]_+, \bar{n}) - \mu_1 a_1(n_h^m [w_h^{m-1}]_+, \bar{n}), \\
b) \quad & (\delta_t w_h^m, \bar{w}) + D_w(\nabla w_h^m, \nabla \bar{w}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, w_h^m, \bar{w}) \\
& = \chi_2(w_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{w}) + \mu_2(w_h^m, \bar{w}) - \mu_2 a_2(w_h^m [n_h^{m-1}]_+, \bar{w}) - \mu_2(w_h^m [w_h^{m-1}]_+, \bar{w}), \\
c) \quad & (\delta_t \mathbf{s}_h^m, \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\nabla \cdot \mathbf{s}_h^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\text{rot}(\mathbf{s}_h^m), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) = (\mathbf{u}_h^m \cdot \mathbf{s}_h^{m-1} + (\alpha n_h^m + \beta w_h^m) c_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}), \\
d) \quad & (\delta_t c_h^m, \bar{c}) + D_c(\nabla c_h^m, \nabla \bar{c}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, c_h^m, \bar{c}) = -(\alpha c_h^m [n_h^m]_+, \bar{c}) - (\beta c_h^m [w_h^m]_+, \bar{c}), \quad (107) \\
e) \quad & (\delta_t \mathbf{u}_h^m, \bar{\mathbf{u}}) + kB(\mathbf{u}_h^{m-1}, \mathbf{u}_h^m, \bar{\mathbf{u}}) + D_u(\nabla \mathbf{u}_h^m, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - (\boldsymbol{\pi}_h^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = ((\gamma n_h^m + \lambda w_h^m) \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}), \\
f) \quad & (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^m, \bar{\boldsymbol{\pi}}) = 0,
\end{aligned}$$

donde, en general, se denota  $\delta_t a_h^m = \frac{a_h^m - a_h^{m-1}}{\Delta t}$  y  $[a_h^m]_+ = \max\{0, a_h^m\}$ , y las formas trilineales  $A$  y  $B$  han sido definidas en (14) y (15).

**Observación 3.2.** En el esquema (107), primero se computan  $n_h^m$  y  $w_h^m$  resolviendo (107)<sub>a</sub> y (107)<sub>b</sub> (sistemas lineales desacoplados). Posteriormente, teniendo  $n_h^m$  y  $w_h^m$ , se computan  $\mathbf{u}_h^m$ ,  $\boldsymbol{\pi}_h^m$ , y  $c_h^m$  resolviendo (107)<sub>e</sub>, (107)<sub>f</sub> y (107)<sub>d</sub> (sistemas lineales y desacoplados, salvo el acoplamiento usual en las ecuaciones de Navier-Stokes); y finalmente, conocidas  $n_h^m$ ,  $w_h^m$  y  $\mathbf{u}_h^m$ , se computa  $\mathbf{s}_h^m$  solución de (107)<sub>c</sub> (problema lineal). De esta manera, el esquema (107) es lineal y desacoplado.

### 3.3. Buena postura y estimaciones uniformes

En esta sección se demuestra que el esquema numérico propuesto está bien planteado y se obtienen algunas estimaciones uniformes (independientes de los parámetros discretos) para las soluciones de (107), las cuales serán utilizadas en el análisis de convergencia. Con este objetivo, se

formula la siguiente hipótesis inductiva: *Existe una constante  $K > 0$ , independiente de  $m$ , tal que*

$$\|[\mathbf{s}_h^{m-1}, c_h^{m-1}]\|_{L^{10/3}} \leq K, \quad \forall m \geq 1. \quad (108)$$

Después de llevado a cabo el análisis de convergencia, se verificará la validez de (108) siguiendo un procedimiento inductivo. Previamente, varios autores han considerado las hipótesis inductivas en el análisis de convergencia de esquemas numéricos asociados a EDP no lineales. De hecho, en (Zhang et al., 2016) los autores utilizan una hipótesis inductiva del tipo  $\|\sigma_h^n\|_{W^{1,\infty}} \leq K$  para tratar un esquema numérico asociado a un sistema tipo Keller-Segel en dominios bidimensionales; en (Duarte-Rodríguez et al., 2021), los autores asumen una hipótesis inductiva del tipo  $\|[\sigma_h^{n-1}, c_h^{n-1}]\|_{H^1} \leq K$  para llevar a cabo un análisis de convergencia de un sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes en dominios tridimensionales y  $\|\sigma_h^{n-1}\|_{H^1} \leq K$  en dominios bidimensionales, mientras que en (Niño-Celis et al., 2021), los autores asumen una hipótesis inductiva del tipo  $\|[\mathbf{u}_h^{n-1}, \sigma_h^{n-1}]\|_{H^1} \leq K$  para desarrollar un análisis de convergencia de un sistema de haptotaxis en dominios de dimensión menor o igual a tres.

**Teorema 3.3. (Buena postura)** *Existe una constante  $C > 0$  (independiente de los parámetros discretos) tal que si  $\Delta t < C$ , entonces existe una única  $[n_h^m, w_h^m, c_h^m, \mathbf{s}_h^m, \mathbf{u}_h^m, \boldsymbol{\pi}_h^m] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  solución del esquema (107).*

*Demostración.* En primer lugar, para demostrar que existe una solución única  $[n_h^m, w_h^m] \in N_h \times W_h$  de (107)<sub>(a),b)</sub>, basta probar la unicidad, dado que es un sistema lineal. Con este fin, suponga que

existen  $[n_{h,1}^m, w_{h,1}^m], [n_{h,2}^m, w_{h,2}^m] \in N_h \times W_h$  dos posibles soluciones de (107)<sub>a,b</sub>); entonces, denotando por  $[n_h^m, w_h^m] = [n_{h,1}^m - n_{h,2}^m, w_{h,1}^m - w_{h,2}^m]$ , tenemos que  $[n_h^m, w_h^m] \in N_h \times W_h$  satisface

$$\begin{aligned} (n_h^m, \bar{n}) + \Delta t D_n(\nabla n_h^m, \nabla \bar{n}) + \Delta t A(\mathbf{u}_h^{m-1}, n_h^m, \bar{n}) &= \chi_1 \Delta t (n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{n}) \\ &+ \mu_1 \Delta t (n_h^m, \bar{n}) - \mu_1 \Delta t (n_h^m [n_h^{m-1}]_+, \bar{n}) - \mu_1 \Delta t a_1(n_h^m [w_h^{m-1}]_+, \bar{n}), \quad \forall \bar{n} \in N_h, \end{aligned} \quad (109)$$

$$\begin{aligned} (w_h^m, \bar{w}) + \Delta t D_w(\nabla w_h^m, \nabla \bar{w}) + \Delta t A(\mathbf{u}_h^{m-1}, w_h^m, \bar{w}) &= \chi_2 \Delta t (w_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{w}) \\ &+ \mu_2 \Delta t (w_h^m, \bar{w}) - \mu_2 \Delta t a_2(w_h^m [n_h^{m-1}]_+, \bar{w}) - \mu_2 \Delta t (w_h^m [w_h^{m-1}]_+, \bar{w}), \quad \forall \bar{w} \in W_h. \end{aligned} \quad (110)$$

Tomando  $\bar{n} = n_h^m$  en (109) y  $\bar{w} = w_h^m$  en (110), usando (19) y que

$$(n_h^m [n_h^{m-1}]_+, n_h^m) = (|n_h^m|^2, [n_h^{m-1}]_+) \geq 0, (n_h^m [w_h^{m-1}]_+, n_h^m) = (|n_h^m|^2, [w_h^{m-1}]_+) \geq 0,$$

$$(w_h^m [w_h^{m-1}]_+, w_h^m) = (|w_h^m|^2, [w_h^{m-1}]_+) \geq 0, (w_h^m [n_h^{m-1}]_+, w_h^m) = (|w_h^m|^2, [n_h^{m-1}]_+) \geq 0,$$

(ya que  $[n_h^{m-1}]_+, [w_h^{m-1}]_+ \geq 0$ ), se deduce que

$$(1 - \mu_1 \Delta t) \|n_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 \leq \chi_1 \Delta t |(n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla n_h^m)|, \quad (111)$$

$$(1 - \mu_2 \Delta t) \|w_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_w \|\nabla w_h^m\|_{L^2}^2 \leq \chi_2 \Delta t |(w_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla w_h^m)|. \quad (112)$$

Ahora, usando la desigualdad de interpolación tridimensional (11), la hipótesis inductiva (108), y las desigualdades de Hölder y Young, se puede acotar la parte derecha de (111) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
(1 - \mu_1 \Delta t) \|n_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 &\leq \chi_1 \Delta t \|n_h^m\|_{L^5} \|s_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \|\nabla n_h^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{\Delta t D_n}{4} \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{C(\chi_1)^2 \Delta t}{D_n} \|n_h^m\|_{L^2}^{1/5} \|n_h^m\|_{H^1}^{9/5} \\
&\leq \frac{\Delta t D_n}{2} (\|n_h^m\|_{L^2}^2 + \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2) + C_1 \Delta t \|n_h^m\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\left[ \frac{1}{2} - \left( \mu_1 + \frac{D_n}{2} \right) \Delta t \right] \|n_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|n_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t D_n}{2} \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 \leq C_1 \Delta t \|n_h^m\|_{L^2}^2. \quad (113)$$

De forma análoga, se tiene la siguiente estimativa para  $w_h^m$

$$\left[ \frac{1}{2} - \left( \mu_2 + \frac{D_w}{2} \right) \Delta t \right] \|w_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|w_h^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t D_w}{2} \|\nabla w_h^m\|_{L^2}^2 \leq C_2 \Delta t \|w_h^m\|_{L^2}^2. \quad (114)$$

Entonces, si  $\Delta t \leq 1/E$  con  $E = 2 \max\{\mu_1 + \frac{D_n}{2} + C_1, \mu_2 + \frac{D_w}{2} + C_2\}$ , concluimos que  $n_h^m = w_h^m = 0$ , esto es,  $n_{h,1}^m = n_{h,2}^m$  y  $w_{h,1}^m = w_{h,2}^m$ . Conociendo la existencia y unicidad de  $[n_h^m, w_h^m] \in N_h \times W_h$ , se puede mostrar la existencia y unicidad de  $[c_h^m, s_h^m, \mathbf{u}_h^m, \pi_h^m] \in C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  solución de (107)<sub>c</sub>- (107)<sub>f</sub>) como sigue: asumiendo que existen  $[c_{h,1}^m, s_{h,1}^m, \mathbf{u}_{h,1}^m, \pi_{h,1}^m], [c_{h,2}^m, s_{h,2}^m, \mathbf{u}_{h,2}^m, \pi_{h,2}^m] \in C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  dos posibles soluciones; definimos  $c_h^m = c_{h,1}^m - c_{h,2}^m$ ,  $s_h^m = s_{h,1}^m - s_{h,2}^m$ ,  $\mathbf{u}_h^m = \mathbf{u}_{h,1}^m - \mathbf{u}_{h,2}^m$  y  $\pi_h^m = \pi_{h,1}^m - \pi_{h,2}^m$ , tenemos que  $[c_h^m, s_h^m, \mathbf{u}_h^m, \pi_h^m] \in C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$  satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{s}_h^m, \bar{\mathbf{s}}) + \Delta t D_c (\nabla \cdot \mathbf{s}_h^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + \Delta t D_c (\text{rot}(\mathbf{s}_h^m), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) = \Delta t (\mathbf{u}_h^m \cdot \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}), \\ (c_h^m, \bar{c}) + \Delta t D_c (\nabla c_h^m, \nabla \bar{c}) + \Delta t A(\mathbf{u}_h^{m-1}, c_h^m, \bar{c}) = -\Delta t \alpha (c_h^m [n_h^m]_+, \bar{c}) - \Delta t \beta (c_h^m [w_h^m]_+, \bar{c}), \\ (\mathbf{u}_h^m, \bar{\mathbf{u}}) + k \Delta t B(\mathbf{u}_h^{m-1}, \mathbf{u}_h^m, \bar{\mathbf{u}}) + \Delta t D_u (\nabla \mathbf{u}_h^m, \nabla \bar{\mathbf{u}}) - \Delta t (\pi_h^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) = 0, \\ (\bar{\pi}, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^m) = 0, \end{array} \right. \quad (115)$$

para todo  $[\bar{c}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\pi}] \in C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$ . Tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_h^m$  en (115)<sub>3</sub> y  $\bar{\pi} = \Delta t \pi_h^m$  en (115)<sub>4</sub> obtenemos

$$(\mathbf{u}_h^m, \mathbf{u}_h^m) + k \Delta t B(\mathbf{u}_h^{m-1}, \mathbf{u}_h^m, \mathbf{u}_h^m) + \Delta t D_u (\nabla \mathbf{u}_h^m, \nabla \mathbf{u}_h^m) - \Delta t (\pi_h^m, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^m) = 0, \quad (116)$$

$$(\Delta t \pi_h^m, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^m) = 0. \quad (117)$$

Sumando las ecuaciones (116) y (117) y usando (18) se tiene

$$\|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_n \|\nabla \mathbf{u}_h^m\|_{L^2}^2 = 0, \quad (118)$$

de donde se deduce que  $\mathbf{u}_h^m = 0$ ; y usando este resultado y la condición *inf-sup* discreta (98), obtenemos que  $\pi_h^m = 0$ . Por otra parte, usando que  $\mathbf{u}_h^m = 0$  en (115)<sub>1</sub>, y tomando  $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_h^m$ , se obtiene que

$$\|\mathbf{s}_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_c \|\nabla \cdot \mathbf{s}_h^m\|_{L^2}^2 + \Delta t D_c \|\text{rot}(\mathbf{s}_h^m)\|_{L^2}^2 = 0, \quad (119)$$

de lo cual se concluye que  $\mathbf{s}_h^m = 0$ . Finalmente, tomando  $\bar{c} = c_h^m$  en (115)<sub>2</sub>, usando (19) y teniendo en cuenta que  $(c_h^m [n_h^m]_+, c_h^m) = (|c_h^m|^2, [n_h^m]_+) \geq 0$  y  $(c_h^m [w_h^m]_+, c_h^m) = (|c_h^m|^2, [w_h^m]_+) \geq 0$  (pues  $[n_h^m]_+, [w_h^m]_+ \geq 0$ ), se concluye que  $c_h^m = 0$ . Por lo tanto, usando nuevamente el hecho de que (107)<sub>c</sub>-(107)<sub>f</sub> es un sistema algebraico lineal, se concluye la prueba.  $\square$

Ahora se presentan algunas estimaciones uniformes para las variables  $n_h^m$  y  $w_h^m$  necesarias para el análisis de convergencia del esquema numérico.

**Lema 3.4. (Estimativas uniformes para  $n_h^m$  y  $w_h^m$ )** *Asumiendo la hipótesis inductiva (108), existe una constante  $C > 0$  tal que si  $\Delta t C \leq \frac{1}{2}$ , entonces  $n_h^m$  y  $w_h^m$  están acotadas en  $l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)$ .*

*Demostración.* Se demostrará este resultado para  $n_h^m$ , y la prueba para  $w_h^m$  se sigue de forma análoga. Tomando  $\bar{n} = 2\Delta t n_h^m$  en (107)<sub>a</sub>), usando la igualdad  $(a - b, 2a) = |a|^2 - |b|^2 + |a - b|^2$  y la propiedad (19), tenemos que

$$\begin{aligned} \|n_h^m\|_{L^2}^2 - \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|n_h^m - n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\Delta t D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 &= 2\Delta t \chi_1(n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla n_h^m) \\ &+ 2\Delta t \mu_1 \|n_h^m\|_{L^2}^2 - 2\Delta t \mu_1 (n_h^m [n_h^{m-1}]_+, n_h^m) - 2a_1 \Delta t \mu_1 (n_h^m [w_h^{m-1}]_+, n_h^m), \end{aligned} \quad (120)$$

de lo cual, teniendo en cuenta que los términos  $([n_h^{m-1}]_+, |n_h^m|^2)$  y  $([w_h^{m-1}]_+, |n_h^m|^2)$  son no negativos, se tiene que

$$\|n_h^m\|_{L^2}^2 - \|n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|n_h^m - n_h^{m-1}\|_{L^2}^2 + 2\Delta t D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 \leq 2\Delta t \chi_1 |(n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla n_h^m)| + 2\Delta t \mu_1 \|n_h^m\|_{L^2}^2. \quad (121)$$

Usando las desigualdades de Hölder y Young, la desigualdad de interpolación tridimensional (11) y la hipótesis inductiva (108), obtenemos

$$2\Delta t \chi_1 |(n_h^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla n_h^m)| \leq C \Delta t \chi_1 \|n_h^m\|_{L^5} \|\mathbf{s}_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \|\nabla n_h^m\|_{L^2} \leq \Delta t D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 + C \Delta t \|n_h^m\|_{L^2}^2. \quad (122)$$

Entonces, usando (122) en (121), y sumando la expresión resultante desde  $m = 1$  hasta  $m = r$ , se

tiene que

$$\|n_h^r\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^r D_n \|\nabla n_h^m\|_{L^2}^2 \leq \|n_h^0\|_{L^2}^2 + C\Delta t \sum_{m=1}^{r-1} \|n_h^m\|_{L^2}^2 + C\Delta t \|n_h^r\|_{L^2}^2. \quad (123)$$

Por lo tanto, si  $\Delta t$  es lo suficientemente pequeño tal que  $\frac{1}{2} - C\Delta t \geq 0$ , aplicando el Lema 1.11 a (123) se concluye que

$$\|n_h^r\|_{L^2}^2 + \Delta t \sum_{m=1}^r D_n \|n_h^m\|_{H^1}^2 \leq C, \quad \forall m \geq 1,$$

donde la constante  $C > 0$  depende de los datos  $[\chi_1, \mu_1, n_0, T]$ , pero es independiente de  $[\Delta t, h]$  y  $r$ ; así concluimos que  $n_h^m$  está acotada en  $l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)$ .  $\square$

### 3.4. Estimaciones de error en normas débiles

En esta sección se obtienen estimaciones de error para cualquier  $[n_h^m, w_h^m, c_h^m, s_h^m, \mathbf{u}_h^m, \pi_h^m]$  solución del esquema numérico (107), con respecto a una solución suficientemente regular  $[n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \pi]$  de (96). Denotaremos por  $C$  a diferentes constantes positivas posiblemente dependientes de la solución del problema continuo  $[n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \pi]$ , pero independientes de los parámetros discretos y del paso de tiempo  $m$ .

Comenzamos estableciendo la siguiente notación para los errores en el tiempo  $t = t_m$ :  $e_n^m = n^m - n_h^m$ ,  $e_w^m = w^m - w_h^m$ ,  $e_c^m = c^m - c_h^m$ ,  $e_s^m = \mathbf{s}^m - \mathbf{s}_h^m$ ,  $e_{\mathbf{u}}^m = \mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m$  y  $e_\pi^m = \pi^m - \pi_h^m$ , donde, en general,  $a^m$  denota el valor de la variable  $a$  en el tiempo  $t_m$ . Tomando la diferencia entre el esquema (107) y (96) para  $t = t_m$ , se obtiene que  $[e_n^m, e_w^m, e_c^m, e_s^m, e_{\mathbf{u}}^m, e_\pi^m]$  satisface:

$$\begin{aligned}
& (\delta_t e_n^m, \bar{n}) + D_n(\nabla e_n^m, \nabla \bar{n}) + A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, n^m, \bar{n}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, e_n^m, \bar{n}) + A(e_{\mathbf{u}}^{m-1}, n^m, \bar{n}) = (\rho_n^m, \bar{n}) \\
& + \mu_1(e_n^m(1 - [n_h^{m-1}]_+ - a_1[w_h^{m-1}]_+) - n^m(n^m - n^{m-1} + a_1(w^m - w^{m-1}) + n^{m-1} - [n_h^{m-1}]_+), \bar{n}) \\
& - \mu_1 a_1(n^m(w^{m-1} - [w_h^{m-1}]_+), \bar{n}) + \chi_1(n^m(\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1} + e_s^{m-1}) + e_n^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{n}), \quad (124)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t e_w^m, \bar{w}) + D_w(\nabla e_w^m, \nabla \bar{w}) + A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, w^m, \bar{w}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, e_w^m, \bar{w}) + A(e_{\mathbf{u}}^{m-1}, w^m, \bar{w}) = (\rho_w^m, \bar{w}) \\
& + \mu_2(e_w^m(1 - a_2[n_h^{m-1}]_+ - [w_h^{m-1}]_+) - w^m(w^m - w^{m-1} + a_2(n^m - n^{m-1}) + w^{m-1} - [w_h^{m-1}]_+), \bar{w}) \\
& - \mu_2 a_2(w^m(n^{m-1} - [n_h^{m-1}]_+), \bar{w}) + \chi_2(w^m(\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1} + e_s^{m-1}) + e_w^m \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{w}), \quad (125)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t e_s^m, \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\nabla \cdot e_s^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\text{rot}(e_s^m), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) = (\rho_s^m, \bar{\mathbf{s}}) + ((\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}) \cdot \mathbf{u}^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) \\
& + (e_s^{m-1} \cdot \mathbf{u}^m + e_{\mathbf{u}}^m \cdot \mathbf{s}_h^{m-1} + (\alpha n^m + \beta w^m)(c^m - c^{m-1}) + (\alpha n^m + \beta w^m)e_c^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) \\
& + ((\alpha e_n^m + \beta e_w^m)c_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}), \quad (126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t e_c^m, \bar{c}) + D_c(\nabla e_c^m, \nabla \bar{c}) + A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, c^m, \bar{c}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, e_c^m, \bar{c}) + A(e_{\mathbf{u}}^{m-1}, c^m, \bar{c}) = (\rho_c^m, \bar{c}) \\
& - \alpha(c^m(n^m - [n_h^m]_+) + e_c^m[n_h^m]_+, \bar{c}) - \beta(c^m(w^m - [w_h^m]_+) + e_c^m[w_h^m]_+, \bar{c}), \quad (127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t e_{\mathbf{u}}^m, \bar{\mathbf{u}}) + D_{\mathbf{u}}(\nabla e_{\mathbf{u}}^m, \nabla \bar{\mathbf{u}}) = (\rho_{\mathbf{u}}^m, \bar{\mathbf{u}}) - kB(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \bar{\mathbf{u}}) - kB(e_{\mathbf{u}}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \bar{\mathbf{u}}) \\
& - kB(\mathbf{u}_h^{m-1}, e_{\mathbf{u}}^m, \bar{\mathbf{u}}) + (e_{\pi}^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + ((\gamma e_n^m + \lambda e_w^m) \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}), \quad (128)
\end{aligned}$$

$$(\nabla \cdot e_{\mathbf{u}}^m, \bar{\pi}) = 0, \quad (129)$$

para todo  $[\bar{n}, \bar{w}, \bar{c}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\pi}] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$ , donde  $\rho_n^m = \delta_t n^m - (\partial_t n)^m$  y así para el resto de las variables.

Con la ayuda de los operadores de interpolación  $\mathbb{P}_n, \mathbb{P}_w, \mathbb{P}_c, \mathbb{P}_s, \mathbb{P}_u$  y  $\mathbb{P}_\pi$  definidos en la Subsección 3.2.1, descomponemos los errores totales  $e_n^m, e_w^m, e_c^m, e_s^m, e_u^m$  y  $e_\pi^m$  como la suma de errores de interpolación y errores completamente discretos de la siguiente manera:

$$e_n^m = (n^m - \mathbb{P}_n n^m) + (\mathbb{P}_n n^m - n_h^m) = \theta_n^m + \xi_n^m, \quad (130)$$

$$e_w^m = (w^m - \mathbb{P}_w w^m) + (\mathbb{P}_w w^m - w_h^m) = \theta_w^m + \xi_w^m, \quad (131)$$

$$e_c^m = (c^m - \mathbb{P}_c c^m) + (\mathbb{P}_c c^m - c_h^m) = \theta_c^m + \xi_c^m, \quad (132)$$

$$e_s^m = (s^m - \mathbb{P}_s s^m) + (\mathbb{P}_s s^m - s_h^m) = \theta_s^m + \xi_s^m, \quad (133)$$

$$e_u^m = (u^m - \mathbb{P}_u u^m) + (\mathbb{P}_u u^m - u_h^m) = \theta_u^m + \xi_u^m, \quad (134)$$

$$e_\pi^m = (\pi^m - \mathbb{P}_\pi \pi^m) + (\mathbb{P}_\pi \pi^m - \pi_h^m) = \theta_\pi^m + \xi_\pi^m, \quad (135)$$

donde, en general,  $\theta_a^m$  y  $\xi_a^m$  denotan los errores de interpolación y discretos (para la variable  $a$ ), respectivamente. Entonces, teniendo en cuenta (124)-(129), (130)-(135) y la definición de los operadores de interpolación dada en el Subsección 3.2.1, se obtiene

$$\begin{aligned} & (\delta_t \xi_n^m, \bar{n}) + D_n(\nabla \xi_n^m, \nabla \bar{n}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_n^m, \bar{n}) = (\rho_n^m, \bar{n}) - (\delta_t \theta_n^m, \bar{n}) + D_n(\theta_n^m, \bar{n}) - A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_n^m, \bar{n}) \\ & - A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_u^{m-1} + \theta_u^{m-1}, n^m, \bar{n}) + \chi_1(n^m(s^m - s^{m-1} + \xi_s^{m-1} + \theta_s^{m-1}), \nabla \bar{n}) \\ & + \chi_1((\xi_n^m + \theta_n^m)s_h^{m-1}, \nabla \bar{n}) + \mu_1((\xi_n^m + \theta_n^m)(1 - [n_h^{m-1}]_+ - a_1[w_h^{m-1}]_+), \bar{n}) \\ & - \mu_1(n^m(n^m - n^{m-1} + n^{m-1} - [n_h^{m-1}]_+ + a_1(w^m - w^{m-1} + w^{m-1} - [w_h^{m-1}]_+)), \bar{n}), \quad (136) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \xi_w^m, \bar{w}) + D_w(\nabla \xi_w^m, \nabla \bar{w}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_w^m, \bar{w}) = (\rho_w^m, \bar{w}) - (\delta_t \theta_w^m, \bar{w}) + D_w(\theta_w^m, \bar{w}) - A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_w^m, \bar{w}) \\
& - A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_u^{m-1} + \theta_u^{m-1}, w^m, \bar{w}) + \chi_2(w^m(\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1} + \xi_s^{m-1} + \theta_s^{m-1}), \nabla \bar{w}) \\
& + \chi_2((\xi_w^m + \theta_w^m) \mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla \bar{w}) + \mu_2((\xi_w^m + \theta_w^m)(1 - a_2[n_h^{m-1}]_+ - [w_h^{m-1}]_+), \bar{w}) \\
& - \mu_2(w^m(w^m - w^{m-1} + w^{m-1} - [w_h^{m-1}]_+ + a_2(n^m - n^{m-1} + n^{m-1} - [n_h^{m-1}]_+)), \bar{w}), \quad (137)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \xi_c^m, \bar{c}) + D_c(\nabla \xi_c^m, \nabla \bar{c}) + A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_c^m, \bar{c}) = (\rho_c^m, \bar{c}) - (\delta_t \theta_c^m, \bar{c}) + D_c(\theta_c^m, \bar{c}) - A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_c^m, \bar{c}) \\
& - A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_u^{m-1} + \theta_u^{m-1}, c^m, \bar{c}) - ((\xi_c^m + \theta_c^m)(\alpha[n_h^m]_+ + \beta[w_h^m]_+), \bar{c}) \\
& - (c^m(\alpha n^m - \alpha[n_h^m]_+ + \beta w^m - \beta[w_h^m]_+), \bar{c}), \quad (138)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \xi_u^m, \bar{\mathbf{u}}) + D_u(\nabla \xi_u^m, \nabla \bar{\mathbf{u}}) = (\rho_u^m - \delta_t \theta_u^m, \bar{\mathbf{u}}) - kB(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \bar{\mathbf{u}}) - kB(\xi_u^{m-1} + \theta_u^{m-1}, \mathbf{u}^m, \bar{\mathbf{u}}) \\
& - kB(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_u^m + \theta_u^m, \bar{\mathbf{u}}) + (\xi_\pi^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + ((\gamma(\xi_n^m + \theta_n^m) + \lambda(\xi_w^m + \theta_w^m)) \nabla \phi, \bar{\mathbf{u}}), \quad (139)
\end{aligned}$$

$$(\bar{\pi}, \nabla \cdot \xi_u^m) = 0, \quad (140)$$

$$\begin{aligned}
& (\delta_t \xi_s^m, \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\nabla \cdot \xi_s^m, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\text{rot}(\xi_s^m), \text{rot}(\bar{\mathbf{s}})) = (\rho_s^m, \bar{\mathbf{s}}) - (\delta_t \theta_s^m, \bar{\mathbf{s}}) + D_c(\theta_s^m, \bar{\mathbf{s}}) \\
& + ((\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}) \cdot \mathbf{u}^m + (\xi_s^{m-1} + \theta_s^{m-1}) \cdot \mathbf{u}^m + (\xi_u^m + \theta_u^m) \cdot \mathbf{s}_h^{m-1} + (\alpha n^m + \beta w^m)(c^m - c^{m-1}), \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}) \\
& + ((\alpha n^m + \beta w^m)(\xi_c^{m-1} + \theta_c^{m-1}) + (\alpha(\xi_n^m + \theta_n^m) + \beta(\xi_w^m + \theta_w^m))c_h^{m-1}, \nabla \cdot \bar{\mathbf{s}}), \quad (141)
\end{aligned}$$

para todo  $[\bar{n}, \bar{w}, \bar{c}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\pi}] \in N_h \times W_h \times C_h \times \Sigma_h \times U_h \times \Pi_h$ .

### 1. Estimación de error para $n$

Tomando  $\bar{n} = \xi_n^m$  en (136) y usando (19) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta_t\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_n^m\|_{L^2}^2 + D_n\|\nabla\xi_n^m\|_{L^2}^2 &= (\rho_n^m, \xi_n^m) + (D_n\theta_n^m - \delta_t\theta_n^m, \xi_n^m) - A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_n^m, \xi_n^m) \\
&\quad - A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_{\mathbf{u}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{u}}^{m-1}, n^m, \xi_n^m) + \mu_1((\xi_n^m + \theta_n^m)(1 - [n_h^{m-1}]_+ - a_1[w_h^{m-1}]_+), \xi_n^m) \\
&\quad - \mu_1(n^m(n^m - n^{m-1} + n^{m-1} - [n_h^{m-1}]_+ + a_1(w^m - w^{m-1} + w^{m-1} - [w_h^{m-1}]_+)), \xi_n^m) \\
&\quad + \chi_1(n^m(\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1} + \xi_{\mathbf{s}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{s}}^{m-1}), \nabla\xi_n^m) + \chi_1((\xi_n^m + \theta_n^m)\mathbf{s}_h^{m-1}, \nabla\xi_n^m) = \sum_{k=1}^8 I_k. \quad (142)
\end{aligned}$$

Los términos del lado derecho de (142) se acotan de la siguiente manera: Primero, usando las desigualdades de Hölder y Young y (104)<sub>1</sub>, se tiene que

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &\leq (\|\xi_n^m\|_{L^2} + \|\nabla\xi_n^m\|_{L^2})\|\rho_n^m\|_{(H^1)'} + (\|\delta_t n^m(I - \mathbb{P}_n)\|_{L^2} + D_n\|\theta_n^m\|_{L^2})\|\xi_n^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{D_n}{10}\|\nabla\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C\left(1 + \frac{1}{D_n}\right)\|\rho_n^m\|_{(H^1)'}^2 + Ch^{2(r_1+1)}\left[\|\delta_t n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + D_n^2\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2\right] \\
&\leq \frac{D_n}{10}\|\nabla\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C\Delta t\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|\partial_{tt}n(t)\|_{(H^1)'}^2 dt \\
&\quad + Ch^{2(r_1+1)}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t_{m-1}}^{t_m}\|\partial_{tt}n(t)\|_{H^{r_1+1}}^2 dt + \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2\right]. \quad (143)
\end{aligned}$$

Por otra parte, de (15), las desigualdades de Hölder y Young, (8), (101), (104)<sub>1</sub> y (106) se obtiene

$$\begin{aligned}
I_3 &= A(\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \theta_n^m, \xi_n^m) - A(\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^{m-1}, \theta_n^m, \xi_n^m) \\
&\leq \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}\|\theta_n^m\|_{L^\infty\cap W^{1,3}}\|\xi_n^m\|_{H^1} + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty\cap W^{1,3}}\|\theta_n^m\|_{L^2}\|\xi_n^m\|_{H^1} \\
&\leq \frac{D_n}{10}\|\nabla\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r_1+1)}\|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2\times H^1}^2\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2. \quad (144)
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades de Hölder y Young, (8), (100) y (104)<sub>1,2,4</sub>, se sigue

$$\begin{aligned}
I_4 + I_6 + I_7 &\leq (\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}) \|n^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_n^m\|_{H^1} \\
&\quad + \mu_1 (\|n^m - n^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_n^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_n^{m-1}\|_{L^2}) \|n^m\|_{L^3} \|\xi_n^m\|_{H^1} \\
&\quad + \mu_1 a_1 (\|w^m - w^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_w^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_w^{m-1}\|_{L^2}) \|n^m\|_{L^3} \|\xi_n^m\|_{H^1} \\
&\quad + \chi_1 (\|s^m - s^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_s^{m-1}\|_{L^2}) \|n^m\|_{L^\infty} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{D_n}{10} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C \|[\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \xi_n^{m-1}, \xi_w^{m-1}, \xi_s^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C \|[\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, n^m - n^{m-1}, w^m - w^{m-1}, s^m - s^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C (h^{2(r+1)}) \|[\mathbf{u}^{m-1}, \pi^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^{m-1}\|_{H^{r_1+1}}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C (h^{2(r_2+1)}) \|w^{m-1}\|_{H^{r_2+1}}^2 + h^{2(r_4+1)} \|s^{m-1}\|_{H^{r_4+1}}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 \tag{145}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \mu_1 (\|\xi_n^m\|_{L^2} + \|\theta_n^m\|_{L^2}) \|\xi_n^m\|_{L^2} + \mu_1 (\|\xi_n^m\|_{L^2} + \|\theta_n^m\|_{L^2}) (\|n_h^{m-1}\|_{L^6} + a_1 \|w_h^{m-1}\|_{L^6}) \|\xi_n^m\|_{L^3} \\
&\leq \frac{D_n}{10} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C (1 + \|n_h^{m-1}\|_{L^6}^2 + \|w_h^{m-1}\|_{L^6}^2) (\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2). \tag{146}
\end{aligned}$$

Finalmente, de (8), (104)<sub>1</sub>, (106), la desigualdad de interpolación tridimensional (11) y la hipótesis inductiva (108), podemos limitar

$$\begin{aligned}
I_8 &= \chi_1 (\xi_n^m s_h^{m-1}, \nabla \xi_n^m) - \chi_1 (\theta_n^m \xi_s^{m-1}, \nabla \xi_n^m) + \chi_1 (\theta_n^m \mathbb{P}_s s^{m-1}, \nabla \xi_n^m) \\
&\leq \chi_1 (\|\xi_n^m\|_{L^2}^{1/10} \|\xi_n^m\|_{H^1}^{9/10} \|s_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} + \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2} \|\theta_n^m\|_{L^\infty} + \|\mathbb{P}_s s^{m-1}\|_{L^\infty} \|\theta_n^m\|_{L^2}) \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{D_n}{10} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + C \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + C \|n^m\|_{H^2}^2 \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2}^2 + C h^{2(r_1+1)} \|s^{m-1}\|_{H^2}^2 \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2. \tag{147}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (142)-(147), se concluye que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_n}{2} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 \leq Ch^{2(r_1+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t n(t)\|_{H^{r_1+1}}^2 dt + \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 \right] \\
& + C\Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_{tt} n(t)\|_{(H^1)}^2 dt + C\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& + C\|[\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \xi_n^{m-1}, \xi_w^{m-1}, \xi_{\mathbf{s}}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 + C(h^{2(r_2+1)} \|w^{m-1}\|_{H^{r_2+1}}^2 + h^{2(r_4+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^{r_4+1}}^2) \|n^m\|_{H^2}^2 \\
& + C\|[\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, n^m - n^{m-1}, w^m - w^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|n^m\|_{H^2}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^2}^2 \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 \\
& + C(h^{2(r+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^{m-1}\|_{H^{r_1+1}}^2) \|n^m\|_{H^2}^2 + C\|n^m\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{s}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + C(1 + \|n_h^{m-1}\|_{L^6}^2 + \|w_h^{m-1}\|_{L^6}^2) (\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2). \tag{148}
\end{aligned}$$

## 2. Estimación de error para $w$

Tomando  $\bar{w} = \xi_w^m$  en (137) y procediendo de forma análoga a la estimación de error para  $n$ ,

se tiene que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_w^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_w}{2} \|\nabla \xi_w^m\|_{L^2}^2 \leq Ch^{2(r_2+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t w(t)\|_{H^{r_2+1}}^2 dt + \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 \right] \\
& + C\Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_{tt} w(t)\|_{(H^1)}^2 dt + C\|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_2+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 \\
& + C\|[\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \xi_n^{m-1}, \xi_w^{m-1}, \xi_{\mathbf{s}}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|w^m\|_{H^2}^2 + C(h^{2(r_2+1)} \|w^{m-1}\|_{H^{r_2+1}}^2 + h^{2(r_4+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^{r_4+1}}^2) \|w^m\|_{H^2}^2 \\
& + C\|[\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, n^m - n^{m-1}, w^m - w^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|w^m\|_{H^2}^2 + Ch^{2(r_2+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^2}^2 \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 \\
& + C(h^{2(r+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^{m-1}\|_{H^{r_1+1}}^2) \|w^m\|_{H^2}^2 + C\|w^m\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{s}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + C(1 + \|n_h^{m-1}\|_{L^6}^2 + \|w_h^{m-1}\|_{L^6}^2) (\|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_2+1)} \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2). \tag{149}
\end{aligned}$$

## 3. Estimación de error para $c$

Considerando  $\bar{c} = \xi_c^m$  en (138) y usando (19), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_c^m\|_{L^2}^2 + D_c \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 &= (\rho_c^m - \delta_t \theta_c^m + D_c \theta_c^m, \xi_c^m) - A(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_c^m, \xi_c^m) \\ &\quad - A(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_{\mathbf{u}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{u}}^{m-1}, c^m, \xi_c^m) - ((\xi_c^m + \theta_c^m)(\alpha[n_h^m]_+ + \beta[w_h^m]_+), \xi_c^m) \\ &\quad - (c^m(\alpha n^m - \alpha[n_h^m]_+ + \beta w^m - \beta[w_h^m]_+), \xi_c^m) = \sum_{k=1}^5 L_k. \end{aligned} \quad (150)$$

Ahora, usando las desigualdades de Hölder y Young y (104)<sub>3</sub>, se sigue que

$$\begin{aligned} L_1 &\leq (\|\xi_c^m\|_{L^2} + \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}) \|\rho_c^m\|_{(H^1)'} + (I - \mathbb{P}_c) \delta_t c^m \|_{L^2} + D_c \|\theta_c^m\|_{L^2} \|\xi_c^m\|_{L^2} \\ &\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + C \left(1 + \frac{1}{D_c}\right) \|\rho_c^m\|_{(H^1)'}^2 + Ch^{2(r_3+1)} \left[ \|\delta_t c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 + D_c^2 \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 \right] \\ &\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + C \Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_{tt} c(t)\|_{(H^1)'}^2 dt \\ &\quad + Ch^{2(r_3+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t c(t)\|_{H^{r_3+1}}^2 dt + \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (151)$$

Así mismo, de la definición de la forma trilineal (15), las desigualdades de Hölder y Young, (8),

(100), (101), (104)<sub>1,2,3</sub> y (106) se tiene

$$\begin{aligned} L_2 &= A(\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \theta_c^m, \xi_c^m) - A(\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}, \theta_c^m, \xi_c^m) \\ &\leq \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2} \|\theta_c^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_c^m\|_{H^1} + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\theta_c^m\|_{L^2} \|\xi_c^m\|_{H^1} \\ &\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + C \|c^m\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_3+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 \end{aligned} \quad (152)$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^5 L_k &\leq (\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}) \|c^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_c^m\|_{H^1} \\
&\quad + (\|\xi_c^m\|_{L^2} + \|\theta_c^m\|_{L^2}) (\alpha \|n_h^m\|_{L^6} + \beta \|w_h^m\|_{L^6}) \|\xi_c^m\|_{L^3} \\
&\quad + (\alpha \|\xi_n^m\|_{L^2} + \alpha \|\theta_n^m\|_{L^2} + \beta \|\xi_w^m\|_{L^2} + \beta \|\theta_w^m\|_{L^2}) \|c^m\|_{L^3} \|\xi_c^m\|_{L^6} \\
&\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + C(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2) \|c^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \|c^m\|_{H^2}^2 + C(\|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2) (\|n_h^m\|_{L^6}^2 + \|w_h^m\|_{L^6}^2) \\
&\quad + C(\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_2+1)} \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2) \|c^m\|_{L^3}^2. \tag{153}
\end{aligned}$$

Así, de (150)-(153), se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \delta_t \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_c^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{2} \|\nabla \xi_c^m\|_{L^2}^2 &\leq C \Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t c(t)\|_{(H^1)}^2 dt + C \|c^m\|_{H^2}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r_3+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t c(t)\|_{H^{r_3+1}}^2 dt + \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 \right] + Ch^{2(r_3+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2 \\
&\quad + C(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2) \|c^m\|_{H^2}^2 + \|\xi_c^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C(\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_1+1)} \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_2+1)} \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2) \|c^m\|_{L^3}^2 \\
&\quad + C(\|\xi_c^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_3+1)} \|c^m\|_{H^{r_3+1}}^2) (\|n_h^m\|_{L^6}^2 + \|w_h^m\|_{L^6}^2). \tag{154}
\end{aligned}$$

#### 4. Estimación de error para $\mathbf{u}$

Tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \xi_{\mathbf{u}}^m$  en (139),  $\bar{\boldsymbol{\pi}} = \xi_{\boldsymbol{\pi}}^m$  en (140), usando (18) y sumando las expresiones resultantes, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + D_{\mathbf{u}} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 &= (\rho_{\mathbf{u}}^m - \delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\mathbf{u}}^m) - kB(\mathbf{u}_h^{m-1}, \theta_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\mathbf{u}}^m) \\ &- kB(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} + \xi_{\mathbf{u}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{u}}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \xi_{\mathbf{u}}^m) + ((\gamma(\xi_n^m + \theta_n^m) + \lambda(\xi_w^m + \theta_w^m)) \nabla \phi, \xi_{\mathbf{u}}^m) = \sum_{i=1}^4 S_i \end{aligned} \quad (155)$$

Los términos  $S_i$  son acotados de la siguiente manera: Primero, usando las desigualdades de Hölder y Young, la desigualdad de Poincaré (7) y la estimación de interpolación (100), se sigue que

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} \|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{(H^1)'}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} \|(I - \mathbb{P}_{\mathbf{u}}) \delta_t \mathbf{u}^m\|_{L^2} \\ &\leq \frac{D_{\mathbf{u}}}{6} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \frac{C}{D_{\mathbf{u}}} \|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{(H^1)'}^2 + \frac{Ch^{2(r+1)}}{D_{\mathbf{u}}} \|[\delta_t \mathbf{u}^m, \delta_t \pi^m]\|_{H^{r+1} \times H^r} \\ &\leq \frac{D_{\mathbf{u}}}{6} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + C\Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_{tt} \mathbf{u}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt + \frac{Ch^{2(r+1)}}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|[\partial_t \mathbf{u}, \partial_t \pi]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 dt \end{aligned} \quad (156)$$

Además, considerando la definición de la forma trilineal (14), las desigualdades de Hölder, Young y Poincaré, (8), (100)-(101) y (104)<sub>1,2</sub>, se tiene que

$$\begin{aligned} S_2 &= kB(\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \theta_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\mathbf{u}}^m) - kB(\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}, \theta_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\mathbf{u}}^m) \\ &\leq k(\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2} \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}) \\ &\leq \frac{D_{\mathbf{u}}}{6} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + C\|[\mathbf{u}^m, \pi^m]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + Ch^{2(r+1)} \|[\mathbf{u}^{m-1}, \pi^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2 \|[\mathbf{u}^m, \pi^m]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 \end{aligned} \quad (157)$$

y

$$\begin{aligned}
S_3 + S_4 &\leq k(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2} + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2})\|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} \\
&\quad + (\gamma\|\xi_n^m\|_{L^2} + \gamma\|\theta_n^m\|_{L^2} + \lambda\|\xi_w^m\|_{L^2} + \lambda\|\theta_w^m\|_{L^2})\|\nabla\phi\|_{L^3}\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} \\
&\leq \frac{D_{\mathbf{u}}}{6}\|\nabla\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + C(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)}\|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2)\|\mathbf{u}^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2\|\mathbf{u}^m\|_{H^2}^2 + C(\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2)\|\nabla\phi\|_{L^3}^2 \\
&\quad + C(h^{2(r_1+1)}\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + h^{2(r_2+1)}\|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2)\|\nabla\phi\|_{L^3}^2. \tag{158}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (155)-(158), se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta_t\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_{\mathbf{u}}}{2}\|\nabla\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 &\leq C\int_{t_{m-1}}^{t_m} \left( \Delta t\|\partial_{tt}\mathbf{u}(t)\|_{(H^1)'}^2 + \frac{h^{2(r+1)}}{\Delta t}\|[\partial_t\mathbf{u}, \partial_t\boldsymbol{\pi}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 \right) dt \\
&\quad + C\|[\mathbf{u}^m, \boldsymbol{\pi}^m]\|_{H^2 \times H^1}^2\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r+1)}\|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^2 \times H^1}^2\|[\mathbf{u}^m, \boldsymbol{\pi}^m]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 \\
&\quad + C(\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 + h^{2(r+1)}\|[\mathbf{u}^{m-1}, \boldsymbol{\pi}^{m-1}]\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^2}^2)\|\mathbf{u}^m\|_{H^2}^2 \\
&\quad + C(h^{2(r_1+1)}\|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + h^{2(r_2+1)}\|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2)\|\nabla\phi\|_{L^3}^2. \tag{159}
\end{aligned}$$

### 5. Estimación de error para $\mathbf{s}$

Considerando  $\bar{\mathbf{s}} = \xi_{\mathbf{s}}^m$  en (141), se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\delta_t\|\xi_{\mathbf{s}}^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2}\|\delta_t\xi_{\mathbf{s}}^m\|_{L^2}^2 + D_c\|\nabla \cdot \xi_{\mathbf{s}}^m\|_{L^2}^2 + D_c\|\text{rot}(\xi_{\mathbf{s}}^m)\|_{L^2}^2 &= (\rho_{\mathbf{s}}^m - \delta_t\theta_{\mathbf{s}}^m + D_c\theta_{\mathbf{s}}^m, \xi_{\mathbf{s}}^m) \\
&\quad + (\mathbf{u}^m \cdot (\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}) + (\xi_{\mathbf{s}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{s}}^{m-1}) \cdot \mathbf{u}^m + (\alpha n^m + \beta w^m)(c^m - c^{m-1}), \nabla \cdot \xi_{\mathbf{s}}^m) \\
&\quad + ((\xi_{\mathbf{u}}^m + \theta_{\mathbf{u}}^m) \cdot \mathbf{s}_h^{m-1} + (\alpha(\xi_n^m + \theta_n^m) + \beta(\xi_w^m + \theta_w^m))c_h^{m-1}, \nabla \cdot \xi_{\mathbf{s}}^m) \\
&\quad + ((\alpha n^m + \beta w^m)(\xi_c^{m-1} + \theta_c^{m-1}), \nabla \cdot \xi_{\mathbf{s}}^m) = \sum_{k=1}^4 R_k. \tag{160}
\end{aligned}$$

Entonces, usando las desigualdades de Hölder y Young, la norma equivalente en  $H_s^1(\Omega)$  descrita en (6), así como (8), (100)-(101) y (104)-(106), se controlan los términos del lado derecho en (160) como sigue

$$\begin{aligned}
R_1 &\leq (\|\xi_s^m\|_{L^2} + \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2} + \|\text{rot}(\xi_s^m)\|_{L^2}) \|\rho_s^m\|_{(H^1)'} + (\|(I - \mathbb{P}_s)\delta_t \mathbf{s}^m\|_{L^2} + D_c \|\theta_s^m\|_{L^2}) \|\xi_s^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{2} \|\xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{6} \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{2} \|\text{rot} \xi_s^m\|_{L^2}^2 + C \left(1 + \frac{1}{D_c}\right) \|\rho_s^m\|_{(H^1)'}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r_4+1)} \left[ \|\delta_t \mathbf{s}^m\|_{H^{r_4+1}}^2 + D_c^2 \|\mathbf{s}^m\|_{H^{r_4+1}}^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \|\xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{6} \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{2} \|\text{rot} \xi_s^m\|_{L^2}^2 + C \Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_{tt} \mathbf{s}(t)\|_{(H^1)'}^2 dt \\
&\quad + Ch^{2(r_4+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t \mathbf{s}(t)\|_{H^{r_4+1}}^2 dt + \|\mathbf{s}^m\|_{H^{r_4+1}}^2 \right], \tag{161}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 + R_4 &\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2}^2 + C(h^{2(r_4+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^{r_4+1}}^2 + h^{2(r_3+1)} \|c^{m-1}\|_{H^{r_3+1}}^2) \|[\mathbf{u}^m, n^m, w^m]\|_{L^\infty}^2 \\
&\quad + C(\|c^m - c^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}\|_{L^2}^2 + \|[\xi_s^{m-1}, \xi_c^{m-1}]\|_{L^2}^2) \|[\mathbf{u}^m, n^m, w^m]\|_{L^\infty}^2, \tag{162}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= (\mathbf{s}_h^{m-1} \cdot \xi_{\mathbf{u}}^m + \theta_{\mathbf{u}}^m \cdot (\mathbb{P}_s \mathbf{s}^{m-1} - \xi_s^{m-1}), \nabla \cdot \xi_s^m) + \alpha (c_h^{m-1} \xi_n^m + \theta_n^m (\mathbb{P}_c c^{m-1} - \xi_c^{m-1}), \nabla \cdot \xi_s^m) \\
&\quad + \beta (c_h^{m-1} \xi_w^m + \theta_w^m (\mathbb{P}_c c^{m-1} - \xi_c^{m-1}), \nabla \cdot \xi_s^m) \\
&\leq (\|\mathbf{s}_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^5} + \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty} \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2} + \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} \|\mathbb{P}_s \mathbf{s}^{m-1}\|_{L^\infty} + \alpha \|c_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \|\xi_n^m\|_{L^5} \\
&\quad + \beta \|c_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \|\xi_w^m\|_{L^5} + \alpha \|\theta_n^m\|_{L^\infty} \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2} + \alpha \|\theta_n^m\|_{L^2} \|\mathbb{P}_c c^{m-1}\|_{L^\infty} \\
&\quad + \beta \|\theta_w^m\|_{L^\infty} \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2} + \beta \|\theta_w^m\|_{L^2} \|\mathbb{P}_c c^{m-1}\|_{L^\infty}) \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2} \\
&\leq \frac{D_c}{6} \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_{\mathbf{u}}}{4} \|\nabla \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + C \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{u}^m\|_{H^2}^2 \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2}^2 + \frac{D_n}{4} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + C \|\xi_n^m\|_{L^2}^2 \\
&\quad + Ch^{2(r+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^2} \|\mathbf{u}^m, \boldsymbol{\pi}^m\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + Ch^{2(r_1+1)} \|c^{m-1}\|_{H^2}^2 \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + C \|n^m\|_{H^2}^2 \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C \|w^m\|_{H^2}^2 \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 + Ch^{2(r_2+1)} \|c^{m-1}\|_{H^2}^2 \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 + \frac{D_w}{4} \|\nabla \xi_w^m\|_{L^2}^2 + C \|\xi_w^m\|_{L^2}^2, \tag{163}
\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad de (163), se usó la desigualdad de interpolación tridimensional

(11) y la hipótesis inductiva (108). Por lo tanto, de (160)-(163), se concluye que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \delta_t \|\xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \|\delta_t \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{2} \|\nabla \cdot \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_c}{2} \|\text{rot}(\xi_s^m)\|_{L^2}^2 \leq C \|\xi_n^m, \xi_w^m\|_{L^2}^2 \\
& + C \Delta t \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t \mathbf{s}(t)\|_{(H^1)}^2 dt + C \|\xi_u^m, \xi_s^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_u}{4} \|\nabla \xi_u^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_n}{4} \|\nabla \xi_n^m\|_{L^2}^2 + \frac{D_w}{4} \|\nabla \xi_w^m\|_{L^2}^2 \\
& + C h^{2(r_4+1)} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t \mathbf{s}(t)\|_{H^{r_4+1}}^2 dt + \|\mathbf{s}^m\|_{H^{r_4+1}}^2 \right] + C h^{2(r_4+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^{r_4+1}}^2 \|\mathbf{u}^m, n^m, w^m\|_{L^\infty}^2 \\
& + C (h^{2(r_3+1)}) \|c^{m-1}\|_{H^{r_3+1}}^2 + \|[c^m - c^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}^m, n^m, w^m\|_{L^\infty}^2 \\
& + C \|\xi_s^{m-1}, \xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\mathbf{u}^m, n^m, w^m\|_{L^\infty}^2 + C h^{2(r+1)} \|\mathbf{s}^{m-1}\|_{H^2} \|\mathbf{u}^m, \pi^m\|_{H^{r+1} \times H^r}^2 + C \|\mathbf{u}^m\|_{H^2}^2 \|\xi_s^{m-1}\|_{L^2}^2 \\
& + C (h^{2(r_1+1)}) \|n^m\|_{H^{r_1+1}}^2 + h^{2(r_2+1)} \|w^m\|_{H^{r_2+1}}^2 \|c^{m-1}\|_{H^2}^2 + C (\|n^m\|_{H^2}^2 + \|w^m\|_{H^2}^2) \|\xi_c^{m-1}\|_{L^2}^2. \quad (164)
\end{aligned}$$

### 6. Estimación de los términos $\|[n^m - n^{m-1}, w^m - w^{m-1}, c^m - c^{m-1}, \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}]\|_{L^2}$

Observe que la siguiente estimación se tiene

$$\begin{aligned}
& \Delta t \sum_{m=1}^r \|[n^m - n^{m-1}, w^m - w^{m-1}, c^m - c^{m-1}, \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{s}^m - \mathbf{s}^{m-1}]\|_{L^2}^2 \\
& \leq C (\Delta t)^4 \|\partial_t n, \partial_t w, \partial_t c, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{s}\|_{L^2(L^2)}^2 + C (\Delta t)^2 \|\partial_t n, \partial_t w, \partial_t c, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \mathbf{s}\|_{L^2(L^2)}^2. \quad (165)
\end{aligned}$$

En efecto, note que

$$\|\rho_n^m\|_{L^2} = \|\delta_t n^m - (\partial_t n)^m\|_{L^2} = \left\| \frac{1}{\Delta t} (n^m - n^{m-1}) - (\partial_t n)^m \right\|_{L^2} \leq C (\Delta t)^{1/2} \left( \int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\partial_t n(t)\|_{L^2}^2 dt \right)^{1/2},$$

donde la última desigualdad se obtiene de manera análoga a (143) con la norma espacial  $L^2$  en

lugar de  $(H^1)'$ . Por tanto, se deduce que

$$\Delta t \sum_{m=1}^r \|n^m - n^{m-1}\|_{L^2}^2 \leq C(\Delta t)^4 \|\partial_{tt}n\|_{L^2(L^2)}^2 + C(\Delta t)^2 \|\partial_t n\|_{L^2(L^2)}^2.$$

De manera similar, se obtiene la estimación para  $w, c, \mathbf{u}$  y  $\mathbf{s}$  dada en (165).

Entonces, se puede demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.5.** *Asuma la hipótesis (108) y las siguientes regularidades para las soluciones del problema continuo:*

$$\left\{ \begin{array}{l} [n, w] \in (L^\infty(H^2) \cap L^2(H^{r_1+1})) \times (L^\infty(H^2) \cap L^2(H^{r_2+1})), \\ c \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^{r_3+1}), \\ \mathbf{s} \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^{r_4+1}), \\ \mathbf{u} \in L^\infty(H^2) \cap L^2(H^{r+1}), \\ [\partial_t n, \partial_t w, \partial_t c, \partial_t \mathbf{u}] \in L^2(H^{r_1+1}) \times L^2(H^{r_1+1}) \times L^2(H^{r_3+1}) \times L^2(H^{r_4+1}) \times L^2(H^{r+1}), \\ [\partial_{tt}n, \partial_{tt}w, \partial_{tt}c, \partial_{tt}\mathbf{u}] \in L^2(L^2) \times L^2(L^2) \times L^2(L^2) \times L^2(L^2) \times L^2(L^2). \end{array} \right. \quad (166)$$

Existe una constante  $C > 0$  (que depende de los datos del problema (96)) tal que si  $\Delta t C \leq \frac{1}{2}$ , las siguientes estimativas para los errores discretos se satisfacen

$$\|[\xi_n^m, \xi_w^m, \xi_c^m, \xi_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\mathbf{s}}^m]\|_{l^\infty(L^2) \cap l^2(H^1)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} \right), \quad (167)$$

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{l^\infty(H^1) \cap l^2(W^{1,6})} + \|\xi_{\pi}^m\|_{l^2(L^6)} \leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^r\} \right), \quad (168)$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $m, \Delta t$  y  $h$ .

*Demostración.* Primero probaremos (167). Sumando las desigualdades (148), (149), (154), (159) y (164), multiplicando la expresión resultante por  $\Delta t$ , sumando desde  $m = 1$  hasta  $m = r$ , usando (165) y Lema 3.4 (recordando que  $[\xi_n^0, \xi_w^0, \xi_c^0, \xi_u^0, \xi_s^0] = [0, 0, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$ ), se obtiene

$$\begin{aligned} & \|[\xi_n^r, \xi_w^r, \xi_c^r, \xi_u^r, \xi_s^r]\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{m=1}^r \|[\nabla \xi_n^m, \nabla \xi_w^m, \nabla \xi_c^m, \nabla \xi_u^m, \nabla \cdot \xi_s^m, \text{rot}(\xi_s^m)]\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_1((\Delta t)^2 + (\Delta t)^4) + C_2(h^{2(r_1+1)} + h^{2(r_2+1)} + h^{2(r_3+1)} + h^{2(r_4+1)} + h^{2(r+1)}) \\ & \quad + C_3 \Delta t \sum_{m=1}^{r-1} \|[\xi_n^m, \xi_w^m, \xi_c^m, \xi_u^m, \xi_s^m]\|_{L^2}^2 + C_4 \Delta t \|[\xi_n^r, \xi_w^r, \xi_c^r, \xi_s^r, \xi_u^r]\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (169)$$

Por lo tanto, si  $\Delta t$  es suficientemente pequeño tal que  $\frac{1}{2} - C_4 \Delta t > 0$ , aplicando el Lema 1.11 a (169), se concluye (167).

Ahora probaremos (168). Restando (140) en el tiempo  $t = t_{m-1}$  de (140) en el tiempo  $t = t_m$  y multiplicando la expresión resultante por  $1/\Delta t$ , se tiene que

$$(\bar{\pi}, \nabla \cdot \delta_t \xi_u^m) = 0, \quad \forall \bar{\pi} \in \Pi_h. \quad (170)$$

Entonces, tomando  $\bar{\mathbf{u}} = \delta_t \xi_u^m$  en (139),  $\bar{\pi} = \xi_\pi^m$  en (170) y sumando las expresiones resultantes, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{D_{\mathbf{u}}}{2} \delta_t \|\xi_u^m\|_{H^1}^2 + \frac{\Delta t D_{\mathbf{u}}}{2} \|\delta_t \xi_u^m\|_{H^1}^2 + \|\delta_t \xi_u^m\|_{L^2}^2 = (\rho_{\mathbf{u}}^m - \delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m, \delta_t \xi_u^m) \\ & \quad - kB(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \delta_t \xi_u^m) - kB(\xi_u^{m-1} + \theta_{\mathbf{u}}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \delta_t \xi_u^m) - kB(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_u^m + \theta_{\mathbf{u}}^m, \delta_t \xi_u^m) \\ & \quad + ((\gamma(\xi_n^m + \theta_n^m) + \lambda(\xi_w^m + \theta_w^m)) \nabla \phi, \delta_t \xi_u^m) := (f, \delta_t \xi_u^m) \leq \frac{1}{2} (\|\delta_t \xi_u^m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (171)$$

Ahora acotaremos  $\|f\|_{L^2}$ . Primero, note que, para todo  $\varphi \in L^2$ , se tiene

$$\begin{aligned} & |(\rho_{\mathbf{u}}^m - \delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m, \varphi) - kB(\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \varphi) + ((\gamma(\xi_n^m + \theta_n^m) + \lambda(\xi_w^m + \theta_w^m))\nabla\phi, \varphi)| \\ & \leq C\|\nabla\phi\|_{L^\infty}(\gamma\|\xi_n^m\|_{L^2} + \lambda\|\xi_w^m\|_{L^2} + \gamma\|\theta_n^m\|_{L^2} + \lambda\|\theta_w^m\|_{L^2})\|\varphi\|_{L^2} \\ & \quad + C(\|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} + \|\delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} + k\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}\|\nabla\mathbf{u}^m\|_{L^\infty})\|\varphi\|_{L^2}, \end{aligned} \quad (172)$$

$$|kB(\xi_{\mathbf{u}}^{m-1} + \theta_{\mathbf{u}}^{m-1}, \mathbf{u}^m, \varphi)| \leq kC(\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1} + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1})\|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}\|\varphi\|_{L^2} \quad (173)$$

y

$$\begin{aligned} & k|B(\mathbf{u}_h^{m-1}, \xi_{\mathbf{u}}^m + \theta_{\mathbf{u}}^m, \varphi)| = k|B(\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^{m-1}, \xi_{\mathbf{u}}^m + \theta_{\mathbf{u}}^m, \varphi) - B(\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}, \xi_{\mathbf{u}}^m + \theta_{\mathbf{u}}^m, \varphi)| \\ & \leq k(C\|\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}(\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1})\|\varphi\|_{L^2} + C\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}\|\varphi\|_{L^2} \\ & \quad + C\|\nabla\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^3}\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^6}\|\varphi\|_{L^2} + C\|\nabla\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{L^3}\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^6}\|\varphi\|_{L^2}) \\ & \leq k(C\|\mathbb{P}_{\mathbf{u}}\mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}(\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1})\|\varphi\|_{L^2} + C\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}\|\varphi\|_{L^2} \\ & \quad + C\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{W^{1,6}}^{1/2}\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^{1/2}\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}\|\varphi\|_{L^2} + C\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{W^{1,6}}^{1/2}\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^{1/2}\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}\|\varphi\|_{L^2}), \end{aligned} \quad (174)$$

donde, en (174), se usó la desigualdad de interpolación tridimensional (9). Entonces, de (172)-

(174) se deduce

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2} &= \sup\{|(f, \varphi)| : \varphi \in L^2(\Omega), \|\varphi\|_{L^2} \leq 1\} \\
&\leq C(\|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} + \|\delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2} + k\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2} \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^\infty} \\
&\quad + (\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1} + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}) \|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1} \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} \\
&\quad + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}} (\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}) + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{W^{1,6}}^{1/2} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^{1/2} \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1} \\
&\quad + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{W^{1,6}}^{1/2} \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^{1/2} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} + (\|\xi_n^m\|_{L^2} + \|\xi_w^m\|_{L^2} + \|\theta_n^m\|_{L^2} + \|\theta_w^m\|_{L^2}) \|\nabla \phi\|_{L^\infty}). \quad (175)
\end{aligned}$$

Por tanto de (171) y (175), se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{D_{\mathbf{u}}}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 \leq C(\|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \|\delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^\infty}^2 \\
&\quad + (\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2) \|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 \\
&\quad + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 (\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2) + \varepsilon_1 (\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{W^{1,6}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{W^{1,6}}^2) \\
&\quad + C \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 (\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^4 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2) \\
&\quad + C(\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_w^m\|_{L^2}^2) \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2. \quad (176)
\end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el Lema 11 de (Guillén-González and Redondo-Neble, 2013) en (139)-

(140), se tiene que

$$\|[\xi_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\pi}^m]\|_{W^{1,6} \times L^6}^2 \leq C(\|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2), \quad (177)$$

y entonces, sumando (176) con (177)  $\times \varepsilon_2$  (para  $0 < \varepsilon_2 < 1$ ), se concluye que

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{\mathbf{u}}}{2} \delta_t \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \varepsilon_2 \|[\xi_{\mathbf{u}}^m, \xi_{\pi}^m]\|_{W^{1,6} \times L^6}^2 \leq C(\varepsilon_2 \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 + \|\delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 \\
& + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^2}^2 \|\nabla \mathbf{u}^m\|_{L^\infty}^2 + (\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 + \|\theta_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2) \|\mathbf{u}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 \\
& + \|\mathbb{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^{m-1}\|_{L^\infty \cap W^{1,3}}^2 (\|\theta_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2) + \varepsilon_1 (\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{W^{1,6}}^2 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{W^{1,6}}^2) \\
& + C \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 (\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^4 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2) \\
& + C (\|\xi_n^m\|_{L^2}^2 + \|\xi_w^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_n^m\|_{L^2}^2 + \|\theta_w^m\|_{L^2}^2) \|\nabla \phi\|_{L^\infty}^2. \tag{178}
\end{aligned}$$

Consideramos  $\varepsilon_2$  suficientemente pequeño para absorber el término  $C\varepsilon_2 \|\delta_t \xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2$  en el lado derecho, y  $\varepsilon_1$  suficientemente pequeño con respecto a  $\varepsilon_2$ . Además, note que

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^4 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 \leq C. \tag{179}$$

En efecto, denotando  $h_{\text{máx}} := \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\}$ , de la estimativa (167) se tiene en particular que  $\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 \leq C(T) \left( \Delta t + \frac{1}{\Delta t} h_{\text{máx}}^2 \right)$ , lo cual implica que

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^4 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 \leq C(T) \left( \Delta t + \frac{1}{\Delta t} h_{\text{máx}}^2 \right)^2.$$

Por lo tanto, concluimos (179) bajo la condición

$$\frac{h_{\text{máx}}^4}{(\Delta t)^2} \leq C. \tag{180}$$

Por otra parte, de (167) también tenemos que  $\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2 \leq C(T) \left( (\Delta t)^2 + h_{\text{máx}}^2 \right)$  para cada  $m$ . Entonces, usando la desigualdad inversa  $\|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1} \leq h^{-1} \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}$  obtenemos

$$\|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^4 + \|\xi_{\mathbf{u}}^{m-1}\|_{H^1}^2 \|\xi_{\mathbf{u}}^m\|_{H^1}^2 \leq C(T) \frac{1}{h^4} \left( (\Delta t)^2 + h_{\text{máx}}^2 \right)^2.$$

Entonces, concluimos (179) bajo la condición

$$\frac{(\Delta t)^4}{h^4} \leq C. \quad (181)$$

Por lo tanto, si  $\Delta t$  y  $h$  son menores o iguales que 1, concluimos (179) porque para cualquier elección de  $[\Delta t, h]$ , ya sea (180) o (181) se satisface. Así, multiplicando (178) por  $\Delta t$ , sumando desde  $m = 1$  hasta  $m = s$ , acotando los términos  $\|\rho_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2$  y  $\|\delta_t \theta_{\mathbf{u}}^m\|_{L^2}^2$  como en (156), usando (100), (101), (104)<sub>1,2</sub>, (165), (167), (179) y usando dentro de la cuenta que  $\xi_{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{0}$ , concluimos (168).

□

Como consecuencia del Teorema 3.5, se obtiene el siguiente resultado.

**Corolario 3.6.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.5, se tienen las siguientes estimaciones para los errores totales:*

$$\begin{aligned} \|[e_n^m, e_w^m, e_c^m, e_{\mathbf{u}}^m, e_s^m]\|_{l^\infty(L^2)} &\leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^r\} \right), \\ \|[e_n^m, e_w^m, e_c^m, e_{\mathbf{u}}^m, e_s^m]\|_{l^2(H^1)} &\leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1}, h^{r_2}, h^{r_3}, h^{r_4}, h^r\} \right), \\ \|e_{\mathbf{u}}^m\|_{l^\infty(H^1)} &\leq C(T) \left( \Delta t + \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^r\} \right), \end{aligned}$$

donde la constante  $C(T) > 0$  es independiente de  $m, \Delta t$  y  $h$ .

### 3.5. Verificación de la hipótesis inductiva (108)

Para finalizar este capítulo, verificamos la validez de (108). La idea es obtener (108) usando (167) recursivamente. Primero, note que  $\|\mathbb{P}_c c^{m-1}\|_{L^{10/3}} \leq \|c\|_{L^\infty(L^{10/3})} := C_0$  para todo  $m \geq 1$ , de lo cual deducimos que  $\|c_h^0\|_{L^{10/3}} = \|\mathbb{P}_c c_0\|_{L^{10/3}} \leq C_0 \leq C_0 + 1 := K$ . Además,  $\|c_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \leq$

$\|\xi_c^{m-1}\|_{L^{10/3}} + \|\mathbb{P}_c c^{m-1}\|_{L^{10/3}}$ , y entonces, es suficiente para probar que  $\|\xi_c^{m-1}\|_{L^{10/3}} \leq 1$  para todo  $m \geq 2$ . Para esto, consideramos dos casos: Primero, si  $\frac{(\Delta t)^{1/2}}{h^{3/5}} \leq C$ , entonces, usando la desigualdad inversa  $\|\xi_c^m\|_{L^{10/3}} \leq h^{-3/5} \|\xi_c^m\|_{L^2}$ , recordando que  $h_{\max} := \max\{h^{r_1+1}, h^{r_2+1}, h^{r_3+1}, h^{r_4+1}, h^{r+1}\} = h^k$  (para algún  $k \geq 2$ ), y del cálculo de la norma  $l^\infty(L^2)$  en (167), se tiene que

$$\|\xi_c^1\|_{L^{10/3}} \leq \frac{1}{h^{3/5}} \|\xi_c^1\|_{L^2} \leq C(T, \|c_h^0\|_{L^{10/3}}) \frac{1}{h^{3/5}} (\Delta t + h_{\max}) \leq C(T, K)(C(\Delta t)^{1/2} + h^{k-3/5}). \quad (182)$$

En otro caso, si  $\frac{(\Delta t)^{1/2}}{h^{3/5}}$  no está acotado, entonces  $\frac{h_{\max}}{\Delta t} \leq \frac{h^{6/5}}{\Delta t} \leq C$ ; por tanto, del cálculo de la norma  $l^2(H^1)$  en (167), se obtiene

$$\|\xi_c^1\|_{L^{10/3}}^2 \leq C(T, \|c_h^0\|_{L^{10/3}}) \frac{1}{\Delta t} ((\Delta t)^2 + h_{\max}^2) \leq C(T, K)(\Delta t + Ch_{\max}). \quad (183)$$

En cualquier caso, asumiendo los parámetros  $\Delta t$  y  $h$  lo suficientemente pequeños (sin ninguna restricción adicional relacionando a los parámetros discretos  $[\Delta t, h]$ ), concluimos que  $\|\xi_c^1\|_{L^{10/3}} \leq 1$ , lo cual implica que  $\|c_h^1\|_{L^{10/3}} \leq K$ . De forma análoga, usando  $\|c_h^1\|_{L^{10/3}} \leq K$ , podemos obtener  $\|\xi_c^2\|_{L^{10/3}} \leq 1$ , y por lo tanto,  $\|c_h^2\|_{L^{10/3}} \leq K$ . Usando un argumento recursivo se concluye que  $\|c_h^{m-1}\|_{L^{10/3}} \leq K$ , para todo  $m \geq 1$ . Análogamente, se verifica la hipótesis inductiva sobre  $s_h^{m-1}$ .

#### 4. Simulaciones numéricas

En este capítulo, se presentan tres experimentos numéricos: el primero es usado para verificar que el esquema numérico (107) proporciona una buena aproximación de los fenómenos de quimiotaxis y competencia entre especies en fluidos; en el segundo se hace una exploración numérica con el objetivo de comprobar la influencia de los parámetros discretos  $\Delta t$  y  $h$  sobre el mínimo de las densidades discretas de los organismos  $n_h^m$  y  $w_h^m$ ; y el tercero se considera para verificar numéricamente las estimaciones de error probadas en el análisis teórico. Todas las simulaciones se realizaron utilizando el software Freefem++. Se consideraron los espacios de elementos finitos para las variables  $n, w, c, \mathbf{s}, \mathbf{u}$  y  $\pi$  generados por  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1 - burbuja, \mathbb{P}_1$ -continuo, respectivamente.

##### 4.1. Experimento 1. Dinámicas poblacionales en fluidos con difusión cruzada

El objetivo de este experimento es comparar la dinámica espacio-temporal de los organismos de ambas especies cuando se varían los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ , los cuales cuantifican la fuerza de la competición interespecies. Este experimento está motivado por los resultados presentados en (Jin and Xiang, 2019). Se ha considerado el dominio cúbico  $\Omega = [0, 1]^3$ , y las condiciones iniciales (ver Figura 2):

$$\begin{aligned}
n_0 &= \sum_{i=1}^3 \left( 120 \exp(-3(x+r_i)^2 - 12(y-0.5)^2 - 3(z+1)^2) \right), \\
w_0 &= \sum_{i=1}^3 \left( 8 \exp(-5(x+r_i)^2 - 10(y-0.5)^2 - 12(z-1)^2) \right), \\
c_0 &= \sum_{i=1}^3 \left( 180 \exp(-2(x-2.5)^2 - 1.5(y-\sigma_i)^2 - 2(z-\tau_i)^2) \right), \\
\mathbf{u}_0 &= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

donde  $r_1 = 0.2$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 1.2$ ,  $\sigma_1 = 1.5$ ,  $\sigma_2 = 1.8$ ,  $\sigma_3 = 2.5$ ,  $\tau_1 = 0.5$ ,  $\tau_2 = 0.8$  y  $\tau_3 = 1.5$ . Consideramos los parámetros  $\chi_1 = 12$ ,  $\chi_2 = 15$ ,  $D_n = 6$ ,  $D_w = 8$ ,  $D_c = 1$ ,  $D_{\mathbf{u}} = 1$ ,  $\mu_1 = 0.5$ ,  $\mu_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 6$ ,  $k = 1$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 1$  y  $\phi(x, y, z) = -9.8z$ . Además, las soluciones numéricas se calculan en espacio con una malla  $10 \times 10 \times 10$  y un paso de tiempo  $\Delta t = 0.001$ .

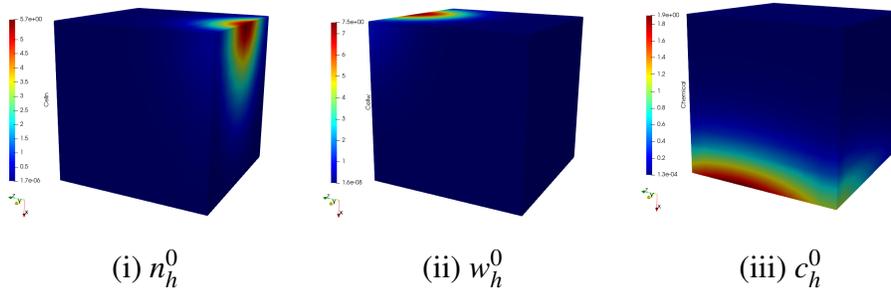


Figura 2. Condiciones iniciales en el Experimento 1.

Para el primer caso, consideramos  $a_1 = 0.25$  y  $a_2 = 0.3$ . La evolución del campo de velocidades se presenta en la Figura 3, mientras que la evolución de  $n_h^m$ ,  $w_h^m$  y  $c_h^m$  se puede observar en la Figura 4. Para los tiempos iniciales, se observa que ambas especies de organismos comienzan a dirigir su movimiento en la dirección de mayor concentración de la sustancia química y ambas

especies terminan aglomerándose en la parte baja del dominio, lo que ocurre porque los términos de difusión cruzada (o términos de quimiotaxis) son los dominantes. Sin embargo, a medida que avanza el tiempo, la sustancia química es consumida por las especies, lo que hace que la difusión cruzada pierda fuerza, y la auto-difusión de las especies comience a dominar, y por lo tanto comienzan a distribuirse homogéneamente sobre el dominio. Además, como ambos parámetros  $a_1$  y  $a_2$  son menores que 1, ninguna especie termina dominando a la otra, y por lo tanto ninguna especie tiende a la extinción. De hecho, en las Figuras 4 y 7 se puede observar que, para tiempos grandes, la densidad total de cada especie de organismos tiende a los estados constantes proporcionados en (Jin and Xiang, 2019). Finalmente, el movimiento de las especies provoca algunos cambios en el campo de velocidades y, para tiempos grandes,  $u_h^m$  tiende a 0, lo cual está de acuerdo con los resultados probados en (Jin and Xiang, 2019).

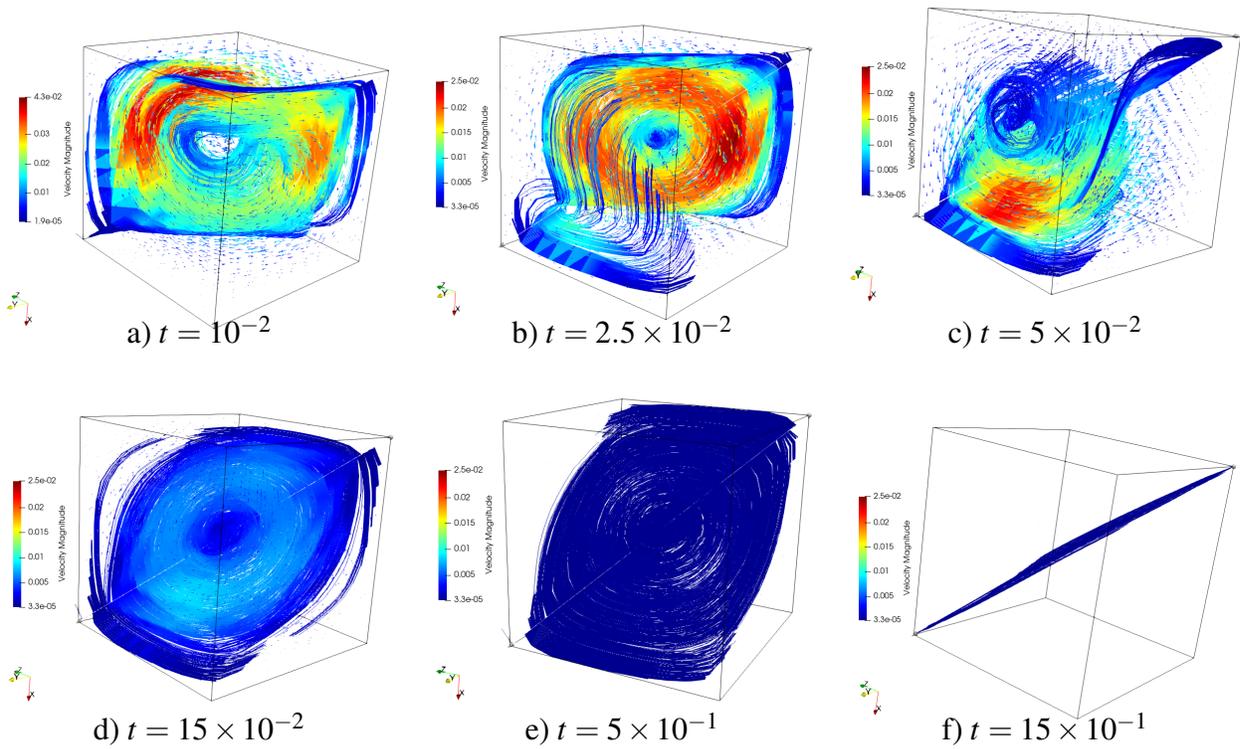


Figura 3. Evolución en tiempo del campo de velocidades  $\mathbf{u}_h^m$ , para  $a_1 = 0.25$  y  $a_2 = 0.3$ .

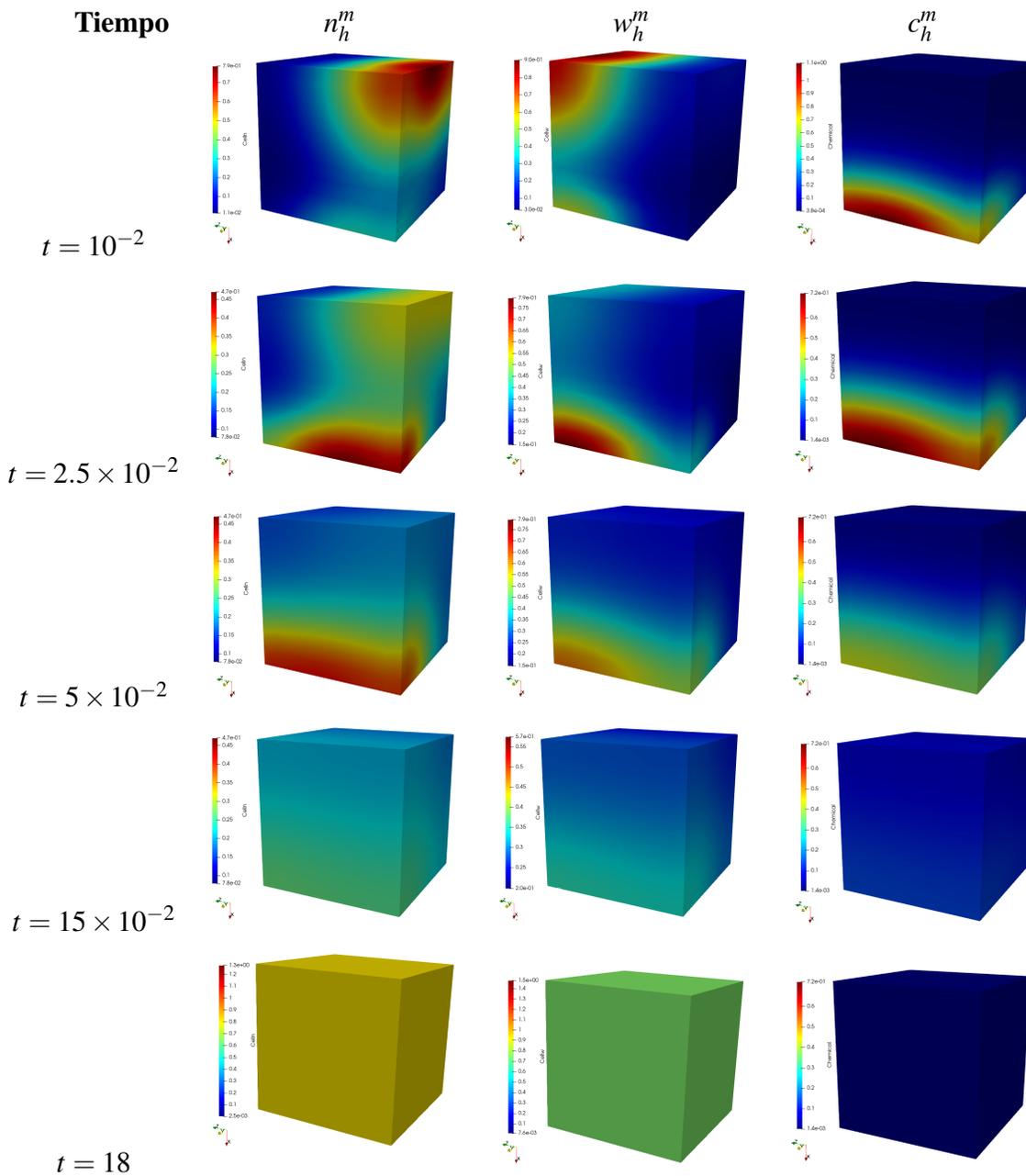


Figura 4. Evolución en tiempo de  $n_h^m$ ,  $w_h^m$  y  $c_h^m$ , para  $a_1 = 0.25$  y  $a_2 = 0.3$ .

Para el segundo caso, consideramos  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 0.3$ , y la evolución en tiempo para  $n_h^m$ ,  $w_h^m$ ,  $c_h^m$  y  $u_h^m$  se presenta en las Figuras 5 y 6. Observamos un comportamiento similar al caso

anterior, con la diferencia que, en este caso, el parámetro  $a_1 > 1$  y  $a_2 < 1$ , y por lo tanto la especie  $w$  domina a la especie  $n$ , y esta última termina extinguiéndose. De hecho, en las Figuras 6 y 8 se puede observar que, para tiempos grandes, la densidad total de la especie  $w$  tiende a 1, mientras que la densidad total de la especie  $n$  tiende a 0, lo cual está de acuerdo con los resultados probados en (Jin and Xiang, 2019).

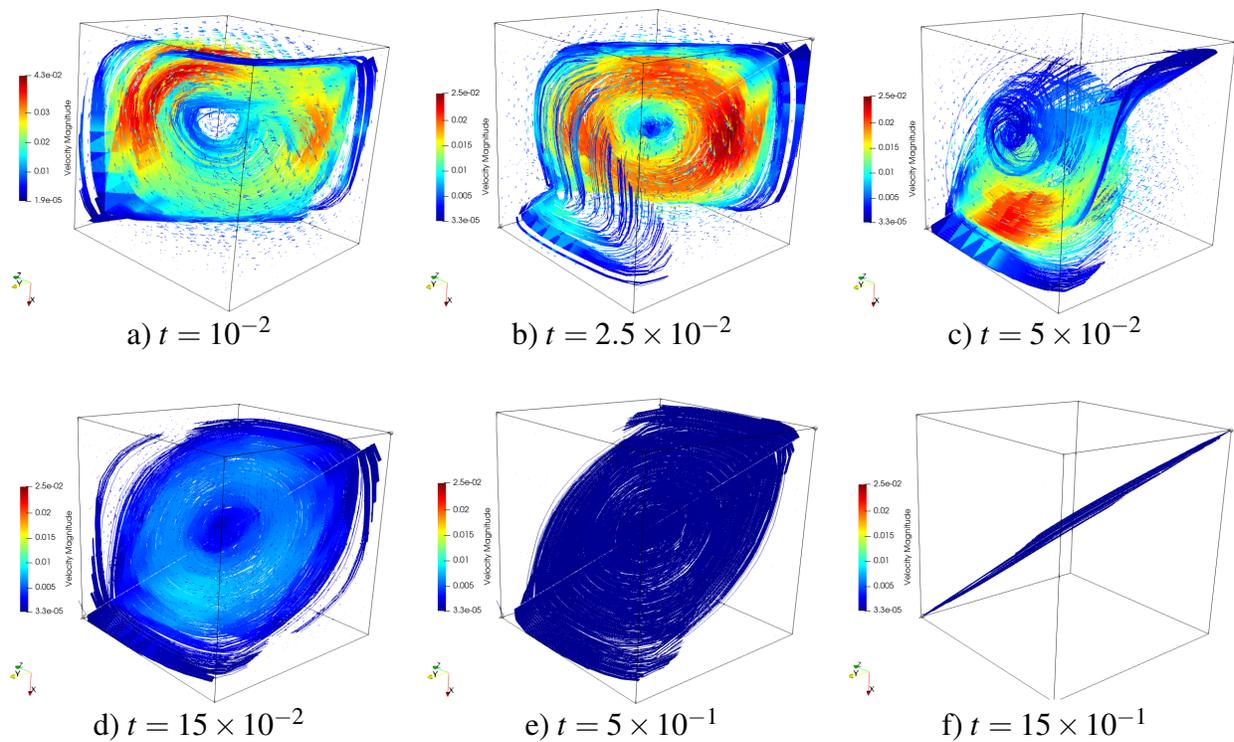


Figura 5. Evolución en tiempo del campo de velocidades  $\mathbf{u}_h^m$ , para  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 0.3$ .

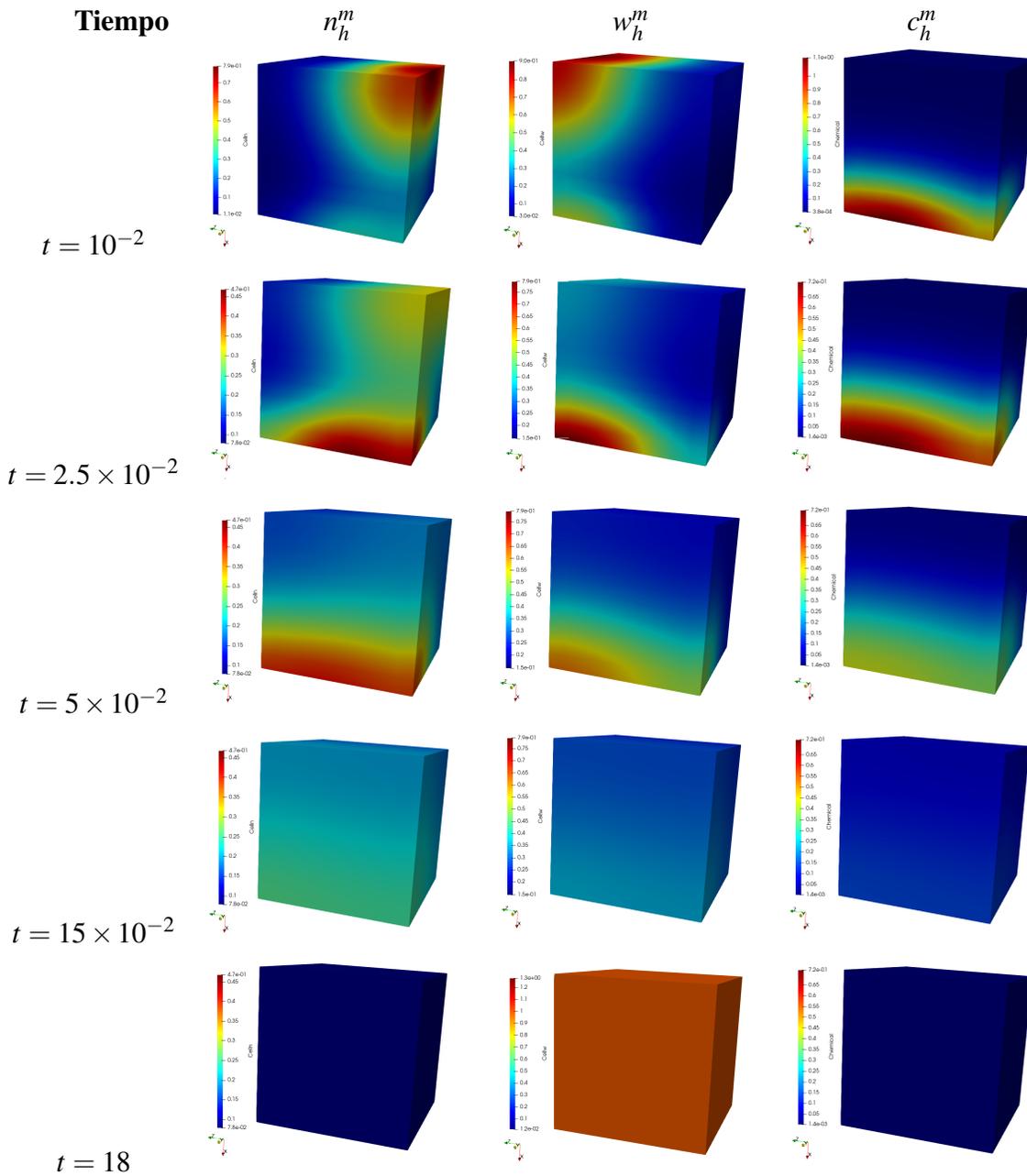


Figura 6. Evolución en tiempo de  $n_h^m$ ,  $w_h^m$  y  $c_h^m$ , para  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 0.3$ .

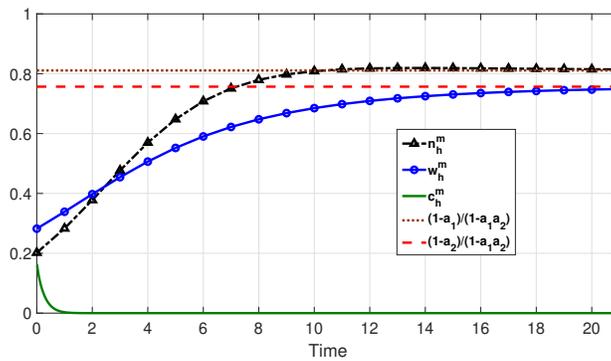


Figura 7. Evolución en tiempo de la densidad total de  $n$  y  $w$ , y de la concentración total de  $c$ , para  $a_1 = 0.25$ ,  $a_2 = 0.3$ .

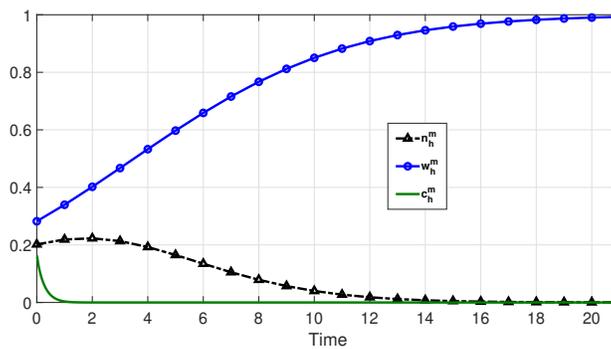


Figura 8. Evolución en tiempo de la densidad total de  $n$  y  $w$ , y de la concentración total de  $c$ , para  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 0.3$ .

Finalmente, consideramos  $a_1 = 0.25$  y  $a_2 = 2$ . En este caso, la dinámica de los organismos y de la sustancia química es muy similar a la descrita en el segundo caso, con la diferencia que la especie  $n$  domina a la especie  $w$ , la cual tiende a la extinción (ver Figuras 9 y 10). El comportamiento del campo de velocidades es similar al mostrado en el segundo caso.

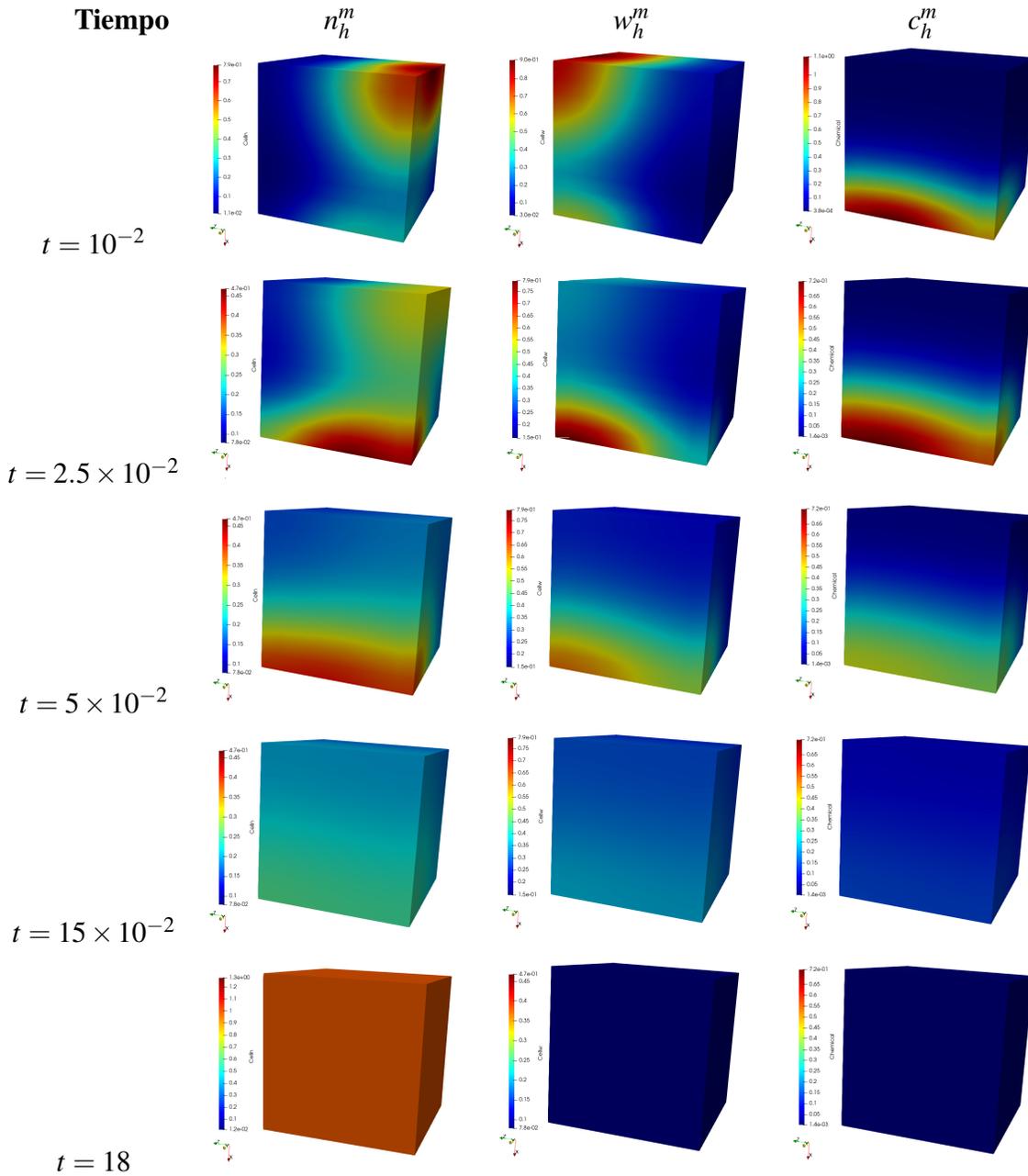


Figura 9. Evolución en tiempo de  $n_h^m$ ,  $w_h^m$  y  $c_h^m$ , para  $a_1 = 0.25$  y  $a_2 = 2$ .

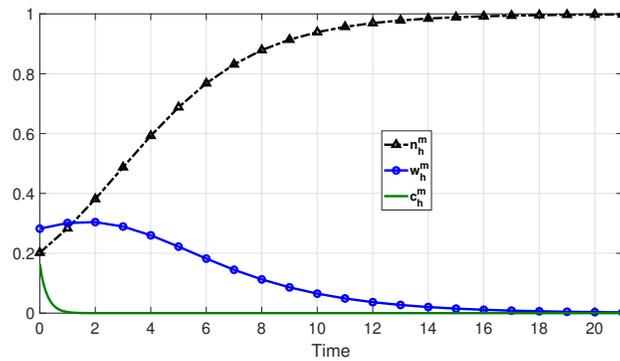


Figura 10. Evolución en tiempo de la densidad total de  $n$  y  $w$ , y de la concentración total de  $c$ , para  $a_1 = 0.25$ ,  $a_2 = 2$ .

#### 4.2. Experimento 2. Exploración numérica

El objetivo de este experimento es ver numéricamente cómo influye el tamaño de la malla  $h$  y el paso de tiempo  $\Delta t$  en los valores mínimos que toman las densidades de las especies  $n_h^m$  y  $w_h^m$ . Para este experimento se considera el dominio cúbico  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  y las mismas condiciones iniciales y valores de los parámetros del experimento 1; pero en este caso, consideramos  $a_1 = 0.25$ ,  $a_2 = 0.3$  y parámetros de quimiotaxis y de competición más exigentes:  $\chi_1 = 160$ ,  $\chi_2 = 102$ ,  $\mu_1 = 50$  y  $\mu_2 = 60$ .

Con el objetivo de ver la influencia del parámetro espacial  $h$  en el mínimo de las densidades de organismos, fijamos el paso de tiempo  $\Delta t = 0.0001$  y consideramos mallas cada vez más finas ( $h = 1/10$ ,  $h = 1/25$  y  $h = 1/38$ ). En este caso, observamos que  $n_h^m$  y  $w_h^m$  son negativas para algún  $\mathbf{x} \in \Omega$  en algunos tiempos  $t_n > 0$ , pero a medida que  $h \rightarrow 0$  estos valores se acercan más a 0 (ver Figura 11). Por otra parte, con el objetivo de ver la influencia del parámetro temporal  $\Delta t$  en el mínimo de las densidades de organismos, fijamos una cuadrícula de  $10 \times 10 \times 10$  en espacio

y consideramos pasos de tiempo decrecientes  $\Delta t = 0.0001$  y  $\Delta t = 0.00001$ . En este caso no está clara la influencia del paso de tiempo en la positividad de las variables discretas (ver Figura 12).

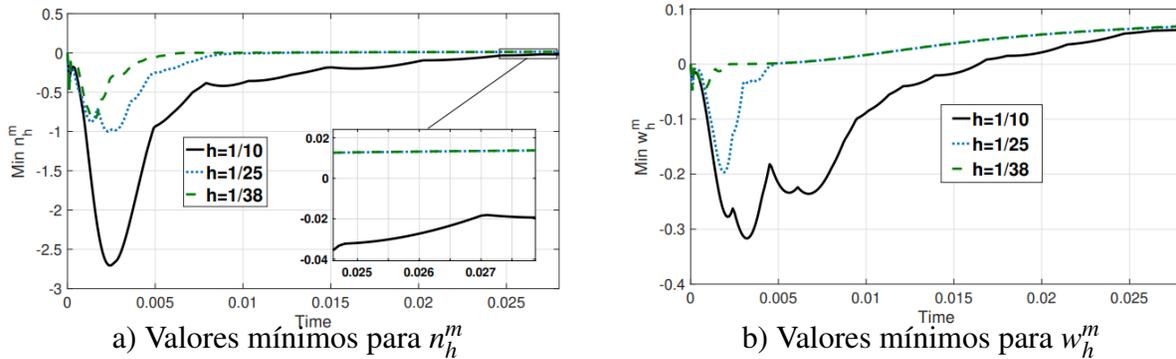


Figura 11. Evolución del mínimo de las densidades de organismos  $n_h^m$  y  $w_h^m$ , fijando  $\Delta t$  y variando  $h$

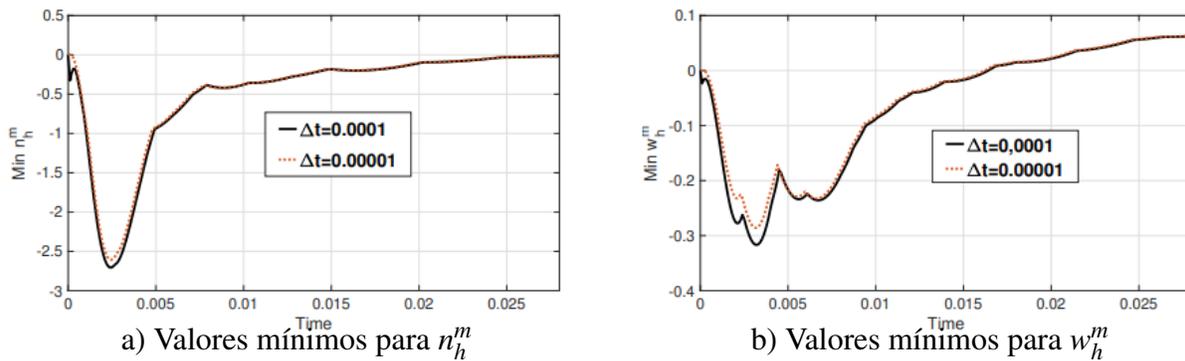


Figura 12. Evolución del mínimo de las densidades de organismos  $n_h^m$  y  $w_h^m$ , fijando  $h$  y variando  $\Delta t$

### 4.3. Experimento 3. Tasas de convergencia

Para este experimento se considera como dominio  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  y la siguiente solución exacta

$$n = e^{-t}(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi y) + 3), \quad w = e^{-t}(\cos(2\pi y) - \cos(2\pi x) + 6),$$

$$c = e^{-t}(\sin(2\pi y) + \cos(2\pi x) - 2\pi y + 9), \quad \sigma = \nabla c = 2\pi e^{-t}(-\sin(2\pi x), \cos(2\pi y) - 1),$$

$$\mathbf{u} = e^{-t}(\sin(2\pi y)(-\cos(2\pi x + \pi) - 1), \sin(2\pi x)(\cos(2\pi y + \pi) + 1)),$$

$$\pi = e^{-t}(\sin(2\pi y) + \cos(2\pi x)),$$

y todos los parámetros en (107) iguales a 1. Note que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  y  $\frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial v} = 0$  sobre  $\partial\Omega$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$  y  $\int_{\Omega} \pi = 0$ . Además, se utiliza una partición uniforme con  $k + 1$  nodos en cada dirección.

Los resultados numéricos de las tasas de convergencia en espacio se presentan en las Tablas 1-6 para  $\Delta t = 8.33 \times 10^{-5}$  con respecto al tiempo  $T = 1$ . Obtenemos tasas de convergencia óptimas en espacio para los errores totales  $e_n^m, e_w^m, e_c^m, e_{\mathbf{u}}^m$ , es decir, se obtiene la convergencia de segundo orden en norma  $l^\infty(L^2)$ , convergencia de primer orden en norma  $l^2(H^1)$  y convergencia de primer orden para  $e_{\mathbf{u}}^m$  en norma  $l^\infty(H^1)$ .

$k \times k$	$\ n(t_m) - n_h^m\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ n(t_m) - n_h^m\ _{l^2(H^1)}$	Orden
$10 \times 10$	$5.677008 \times 10^{-2}$	-	$7.642456 \times 10^{-1}$	-
$16 \times 16$	$2.227926 \times 10^{-2}$	1.9901	$4.715734 \times 10^{-1}$	1.0273
$22 \times 22$	$1.179489 \times 10^{-2}$	1.9971	$3.417503 \times 10^{-1}$	1.0111
$28 \times 28$	$7.277616 \times 10^{-3}$	2.0022	$2.681382 \times 10^{-1}$	1.0059
$34 \times 34$	$4.929015 \times 10^{-3}$	2.0070	$2.206667 \times 10^{-1}$	1.0036

Tabla 1  
Tasas de convergencia en espacio para  $n$ .

$k \times k$	$\ w(t_m) - w_h^m\ _{L^\infty(L^2)}$	Orden	$\ w(t_m) - w_h^m\ _{L^2(H^1)}$	Orden
$10 \times 10$	$6.639095 \times 10^{-2}$	-	$8.345002 \times 10^{-1}$	-
$16 \times 16$	$2.607234 \times 10^{-2}$	1.9887	$4.898759 \times 10^{-1}$	1.1334
$22 \times 22$	$1.379666 \times 10^{-2}$	1.9986	$3.489831 \times 10^{-1}$	1.0649
$28 \times 28$	$8.509213 \times 10^{-3}$	2.0040	$2.716992 \times 10^{-1}$	1.0380
$34 \times 34$	$5.761554 \times 10^{-3}$	2.0084	$2.226744 \times 10^{-1}$	1.0249

Tabla 2  
*Tasas de convergencia en espacio para  $w$ .*

$k \times k$	$\ c(t_m) - c_h^m\ _{L^\infty(L^2)}$	Order	$\ c(t_m) - c_h^m\ _{L^2(H^1)}$	Order
$10 \times 10$	$3.573118 \times 10^{-2}$	-	$7.429560 \times 10^{-1}$	-
$16 \times 16$	$1.403060 \times 10^{-2}$	1.9889	$4.666742 \times 10^{-1}$	0.9894
$22 \times 22$	$7.432849 \times 10^{-3}$	1.9951	$3.399509 \times 10^{-1}$	0.9949
$28 \times 28$	$4.591755 \times 10^{-3}$	1.9972	$2.672989 \times 10^{-1}$	0.9970
$34 \times 34$	$3.115226 \times 10^{-3}$	1.9982	$2.202143 \times 10^{-1}$	0.9980

Tabla 3  
*Tasas de convergencia en espacio para  $c$ .*

$k \times k$	$\ \mathbf{u}_1(t_m) - (\mathbf{u}_1)_h^m\ _{L^\infty(L^2)}$	Orden	$\ \mathbf{u}_1(t_m) - (\mathbf{u}_1)_h^m\ _{L^2(H^1)}$	Orden
$10 \times 10$	$5.462052 \times 10^{-2}$	-	$9.994213 \times 10^{-1}$	-
$16 \times 16$	$2.147830 \times 10^{-2}$	1.9859	$6.264182 \times 10^{-1}$	0.9939
$22 \times 22$	$1.135494 \times 10^{-2}$	2.0015	$4.556049 \times 10^{-1}$	0.9998
$28 \times 28$	$6.996890 \times 10^{-3}$	2.0077	$3.578633 \times 10^{-1}$	1.0013
$34 \times 34$	$4.733978 \times 10^{-3}$	2.0123	$2.946102 \times 10^{-1}$	1.0018

Tabla 4  
*Tasas de convergencia en espacio para  $\mathbf{u}_1$  en normas débiles.*

$k \times k$	$\ \mathbf{u}_2(t_m) - (\mathbf{u}_2)_h^m\ _{L^\infty(L^2)}$	Orden	$\ \mathbf{u}_2(t_m) - (\mathbf{u}_2)_h^m\ _{L^2(H^1)}$	Orden
$10 \times 10$	$5.455275 \times 10^{-2}$	-	$9.994666 \times 10^{-1}$	-
$16 \times 16$	$2.145280 \times 10^{-2}$	1.9858	$6.264266 \times 10^{-1}$	0.9940
$22 \times 22$	$1.134125 \times 10^{-2}$	2.0016	$4.556055 \times 10^{-1}$	0.9998
$28 \times 28$	$6.988373 \times 10^{-3}$	2.0078	$3.578626 \times 10^{-1}$	1.0013
$34 \times 34$	$4.728202 \times 10^{-3}$	2.0123	$2.946094 \times 10^{-1}$	1.0018

Tabla 5  
*Tasas de convergencia en espacio para  $\mathbf{u}_2$  en normas débiles.*

$k \times k$	$\ \mathbf{u}_1(t_m) - (\mathbf{u}_1)_h^m\ _{l^\infty(H^1)}$	Orden	$\ \mathbf{u}_2(t_m) - (\mathbf{u}_2)_h^m\ _{l^\infty(H^1)}$	Orden
$10 \times 10$	2.335301	-	2.335301	-
$16 \times 16$	1.480473	0.9697	1.480473	0.9697
$22 \times 22$	1.081356	0.9865	1.081356	0.9865
$28 \times 28$	$8.512129 \times 10^{-1}$	0.9923	$8.512129 \times 10^{-1}$	0.9923
$34 \times 34$	$7.016738 \times 10^{-1}$	0.9950	$7.016738 \times 10^{-1}$	0.9950

Tabla 6

*Tasas de convergencia en espacio para  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  en normas fuertes.*

Por otro lado, los resultados de las tasas de convergencia en tiempo se muestran en las Tablas 7-9 para  $h = 1/160$  (es decir,  $k = 160$  nodos en espacio en cada dirección), con respecto al tiempo final  $T = 5$ . Se obtiene la convergencia de primer orden en el tiempo para todas las variables en normas  $l^\infty(L^2)$  y  $l^2(H^1)$ , lo que concuerda con el análisis teórico realizado.

$\Delta t$	$\ w(t_m) - w_h^m\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ n(t_m) - n_h^m\ _{l^2(H^1)}$	Orden
$1.04 \times 10^{-1}$	$1.9737 \times 10^{-1}$	-	$3.3887 \times 10^{-1}$	-
$8.92 \times 10^{-2}$	$1.6237 \times 10^{-1}$	1.2660	$2.7748 \times 10^{-1}$	1.2965
$7.81 \times 10^{-2}$	$1.3762 \times 10^{-1}$	1.2385	$2.3649 \times 10^{-1}$	1.1972
$6.94 \times 10^{-2}$	$1.1925 \times 10^{-1}$	1.2168	$2.0741 \times 10^{-1}$	1.1137
$6.25 \times 10^{-2}$	$1.0509 \times 10^{-1}$	1.1991	$1.8573 \times 10^{-1}$	1.0479

Tabla 7

*Tasas de convergencia en tiempo para  $w$  y  $n$ .*

$\Delta t$	$\ \mathbf{u}_1(t_m) - (\mathbf{u}_1)_h^m\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden	$\ \mathbf{u}_2(t_m) - (\mathbf{u}_2)_h^m\ _{l^\infty(L^2)}$	Orden
$1.04 \times 10^{-1}$	$3.6109 \times 10^{-2}$	-	$3.6056 \times 10^{-2}$	-
$8.92 \times 10^{-2}$	$3.1504 \times 10^{-2}$	0.8850	$3.1441 \times 10^{-2}$	0.8886
$7.81 \times 10^{-2}$	$2.7871 \times 10^{-2}$	0.9175	$2.7801 \times 10^{-2}$	0.9214
$6.94 \times 10^{-2}$	$2.4934 \times 10^{-2}$	0.9455	$2.4859 \times 10^{-2}$	0.9495
$6.25 \times 10^{-2}$	$2.2511 \times 10^{-2}$	0.9703	$2.2434 \times 10^{-2}$	0.9743

Tabla 8

*Tasas de convergencia en tiempo para  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$ .*

$\Delta t$	$\ c(t_m) - c_h^m\ _{L^2(H^1)}$	Orden
$1.04 \times 10^{-1}$	$6.6504 \times 10^{-1}$	-
$8.92 \times 10^{-2}$	$5.7032 \times 10^{-1}$	0.9968
$7.81 \times 10^{-2}$	$4.9963 \times 10^{-1}$	0.9910
$6.94 \times 10^{-2}$	$4.4483 \times 10^{-1}$	0.9863
$6.25 \times 10^{-2}$	$4.0110 \times 10^{-1}$	0.9821

Tabla 9

*Tasas de convergencia en tiempo para  $c$ .*

## 5. Conclusiones

- Se realizó un estudio teórico y numérico de un modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes que considera dos especies de organismos con una dinámica competitiva descrita por términos de competencia del tipo Lotka-Volterra.
- Se probó la existencia de soluciones débiles para el modelo de interés. Además, se probó un criterio de regularidad para las soluciones débiles de este modelo, mostrando condiciones bajo las cuales una solución débil es fuerte.
- Se diseñó un esquema completamente discreto para la aproximación de las soluciones débiles del modelo bajo estudio, usando los métodos de diferencias finitas en tiempo y elementos finitos en espacio, considerando un sistema de EDP equivalente.
- Se probó el buen planteamiento del esquema numérico y algunas estimaciones uniformes para las variables discretas (independientes de los parámetros discretos). Así mismo, se realizó el correspondiente análisis de convergencia hacia soluciones regulares del problema continuo bajo estudio, probando estimaciones de error óptimas en tiempo y en espacio.

- Se presentaron los resultados de dos experimentos numéricos realizados para validar el buen comportamiento del esquema numérico estudiado. El primer experimento valida que el esquema proporciona una buena aproximación de los fenómenos de competición interespecies y quimiotaxis en un fluido viscoso incompresible; mientras que el segundo experimento, corrobora numéricamente las tasas de convergencia probadas teóricamente.

## 6. Trabajos futuros

Algunos trabajos futuros que podrían plantearse para dar continuidad a este trabajo de investigación son los siguientes:

- Diseñar esquemas numéricos en donde, para la discretización espacial, se use una combinación de los métodos de elementos finitos y volúmenes finitos; esto, con el fin de tener propiedades de positividad para las variables discretas asociadas al modelo bajo estudio, teniendo en cuenta su carácter biológico.
- Estudiar, tanto teórica como numéricamente, problemas de control óptimo con ecuaciones de estado dadas por el sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes con competición interespecies.
- Estudiar teórica y numéricamente modelos relacionados con el abordado en este trabajo; por ejemplo, considerando términos de consumo no lineales de la señal química.

### Referencias Bibliográficas

- Amrouche, C. and Seloula, N. E. H. (2013).  $l^p$ -theory for vector potentials and sobolev's inequalities for vector fields: application to the stokes equations with pressure boundary conditions. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 23(1):37–92.
- Brenner, S., S. R. (2007). *The mathematical theory of finite element methods Vol. 15*. Springer Science Business Media.
- Cao, X., Kurima, S., and Mizukami, M. (2018). Global existence and asymptotic behavior of classical solutions for a 3d two-species chemotaxis-stokes system with competitive kinetics. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(8):3138–3154.
- Casas, E. (1998). An optimal control problem governed by the evolution navier-stokes equations. *Optimal control of viscous flows, Frontiers in applied mathematics*.
- Chamoun, G., Saad, M., and Talhouk, R. (2018). Numerical analysis of a chemotaxis-swimming bacteria model on a general triangular mesh. *Appl. Numer. Math.*, 127:324–348.
- Chertock, A., Epshteyn, Y., Hu, H., and Kurganov, A. (2018). High-order positivity-preserving hybrid finite-volume-finite-difference methods for chemotaxis systems. *Adv. Comput. Math*, 44(1):327–350.
- Dombrowski, C., Cisneros, L., Chatkaew, S., Goldstein, R. E., and Kessler, J. O. (2004). Self-

concentration and large-scale coherence in bacterial dynamics. *Physical Review Letters*, 93:98–103.

Duarte-Rodríguez, A., Rodríguez-Bellido, M. A., Rueda-Gómez, D. A., and Villamizar-Roa, E. J. (2021). Numerical analysis for a chemotaxis-navier-stokes system. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 55:S417–S445.

Feireisl, E. and Novotný, A. (2009). Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. *Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Birkhäuser Verlag, Basel.

Francesco, M. D., Lorz, A., and Markowich., P. (2010). Chemotaxis-fluid coupled model for swimming bacteria with nonlinear diffusion: global existence and asymptotic behavior. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28(04):1437–1453.

Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Springer-Verlag.

Grisvard, P. (Boston, 1985). *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Advanced Publishing Programl.

Guillén-González, F., Mallea-Zepeda, E., and Rodríguez-Bellido, M. (2020a). A regularity criterion for a 3d chemo-repulsion system and its application to a bilinear optimal control problem. *SIAM J. Control Optim*, 58(3):1457–1490.

Guillén-González, F. and Redondo-Neble, M. V. (2013). Spatial error estimates for a finite ele-

- ment viscosity-splitting scheme for the navier-stokes equations. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 10(4):826–844.
- Guillén-González, F., Rodríguez-Bellido, M., and Rueda-Gómez, D. (2019). Unconditionally energy stable fully discrete schemes for a chemo-repulsion model. *Math. Comput.*, 88:2069–2099.
- Guillén-González, F., Rodríguez-Bellido, M., and Rueda-Gómez, D. (2020b). Study of a chemo-repulsion model with quadratic production. part ii: analysis of an unconditionally energy-stable fully discrete scheme. *Comput. Math. App.*, 80:636–652.
- Guillén-González, F., Rodríguez-Bellido, M., and Rueda-Gómez, D. (2021). A chemorepulsion model with superlinear production: analysis of the continuous problem and two approximately positive and energy-stable schemes. *Adv. Comput. Math* 47, 6(87):38.
- Guillén-González, F., Rodríguez-Bellido, M., and Rueda-Gómez, D. (2022). Comparison of two finite element schemes for a chemo-repulsion system with quadratic production. *Appl. Numer. Math*, 173:193–210.
- Guo, L., Li, X. H., and Yang, Y. (2019). Energy dissipative local discontinuous galerkin methods for keller-segel chemotaxis model. *J. Sci. Comput.*, 78(3):1387–1404.
- Gutiérrez-Santacreu, J. V. and Rodríguez-Galván, J. R. (2021). Analysis of a fully discrete approximation for the classical keller-segel model: lower and a priori bounds. *Comput. Math. Appl.*, 85:69–81.

- Heywood, J. and Rannacher, R. (1990). Finite element approximation of the nonstationary navier-stokes problem. iv. error analysis for second order time discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27:353–384.
- Hirata, M., Kurima, S., Mizukami, M., and Yokota, T. (2017). Boundedness and stabilization in a two-dimensional two-species chemotaxis-navier-stokes system with competitive kinetics. *J. Differential Equations*, 263:470–490.
- Jin, H.-Y. and Xiang, T. (2019). Convergence rates of solutions for a two-species chemotaxis-navier-stokes system with competitive kinetics. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 24(04):1919–1942.
- Lankeit, J. (2016). Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 26(6):2071–2109.
- Lions, J. and Magenes, E. (1968). Problèmes aux limites non homogènes et applications. *Travaux et recherches mathématiques*, 1(17).
- López-Ríos, J. and Villamizar-Roa, E. J. (2021). An optimal control problem related to a 3d-chemotaxis-navier-stokes model. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 27(58):37.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins Co.
- M. Ibrahim, M. S. (2014). On the efficacy of a control volume finite element method for the capture of patterns for a volume-filling chemotaxis model. *Comput. Math. Appl.*, 68(9):1032–1051.

- Niño-Celis, V., Rueda-Gómez, D. A., and Villamizar-Roa, É. J. (2021). Convergence and positivity of finite element methods for a haptotaxis model of tumoral invasion. *Computers & Mathematics with Applications*, 89:20–33.
- Saito, N. (2012). Error analysis of a conservative finite-element approximation for the keller-segel system of chemotaxis. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11:339–364.
- Simon, J. (1987). Compact sets in space  $L^p(0, t; b)$ . *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4(146):65–96.
- Sohr, H. (2001). *The Navier-Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach*. Birkhäuser, Basel.
- Stenberg, R. (1990). A technique for analysing finite element methods for viscous incompressible flow. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 11:935–948.
- Süli, E. and Mayers, D. F. (2003). *An introduction to numerical analysis*. Cambridge university press.
- Tello, J. I. and Wrzosek, D. (2018). Inter-species competition and chemorepulsion. *J. Math. Anal. Appl.*, 459(2):1233–1250.
- Tuval, I., Cisneros, L., Dombrowski, C., Wolgemuth, C. W., Kessler, J. O., and Goldstein, R. E. (2005). Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 102:2277–2282.

- Tyson, R., Lubkin, S., and Murray, J. (1999). Model and analysis of chemotactic bacterial patterns in a liquid medium. *J. Math. Biol.*, 38:359–375.
- Volterra, V. (1926). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Mem. R. Accad. Naz. Dei Lincei. Ser. VI.
- Winkler, M. (2012). Global large-data solutions in a chemotaxis–(navier–)stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. *Communications in Partial Differential Equations*, 37:319–351.
- Winkler, M. (2016). Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis-navier-stokes system. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 33(6):1329–1352.
- Zhang, J., Zhu, J., and Zhang, R. (2016). Characteristic splitting mixed finite element analysis of keller–segel chemotaxis models. *Applied Mathematics and Computation*, 278:33–44.
- Zheng, P. and Willie, R. (2020). Global weak solutions and eventual smoothness in a 3d two-competing-species chemotaxis-navier-stokes system with two consumed signals. *Math. Methods Appl. Sci.*, 43(6):3773–3785.