MAPAS CONCEPTUALES: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN LINEAL

MAYURY BURGOS DUARTE
JHOVANY ALEXANDER CAMACHO GUERRERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

MAPAS CONCEPTUALES: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN LINEAL

MAYURY BURGOS DUARTE
JHOVANY ALEXANDER CAMACHO GUERRERO

Trabajo de Grado para optar al título de
Licenciados en Matemáticas

Orientadora:
DIANA JARAMILLO QUICENO
Ph. D. en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

A Dios, nuestro amparo y fortaleza.

A nuestros padres: José y Amira, Higinio y Gladis,
quienes son la fuente de nuestra inspiración.

A César y a Marcela,
quienes nos han ofrecido
incondicionalmente
su apoyo y su amor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, quien es el guía de nuestras vidas.
A Jazmary, Lizeth, Kelly y José Luís, quienes con sus ganas de
aprender le dieron vida a esta investigación.
A Diana Jaramillo, nuestra orientadora de proyecto, por su
paciencia, dedicación y esmero en nuestra formación docente –nos
ayudó a darle un sentimiento más profundo a la educación.
Al profesor Juan de Dios Urbina, por su constante
apoyo y colaboración.
Al profesor Gabriel Yáñez, por sus enseñanzas impartidas
durante nuestra "vida universitaria"
A la profesora Sandra Evely,
por su lectura cuidadosa de esta investigación
y sus valiosas orientaciones.
A nuestra tutora, la profesora Gloria, por el apoyo
y confianza en nosotros.
A nuestros compañeros de estudio, Luz Dary, Miguel,
Yerly, Alirio, Carolina, Karina, Leidy, Michael,
Eduardo, Adrián, Claudia, Martha…
En fin, a todos nuestros compañeros de semestre:
nunca los olvidaremos.
A nuestros padres y hermanos, por brindarnos su apoyo y motivación.
A César y Marcela, por su amor y sus palabras de aliento.

RESUMEN

TÍTULO:

MAPAS CONCEPTUALES: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN LINEAL*

AUTORES:

BURGOS DUARTE, Mayury
CAMACHO GUERRERO, Jhovany Alexander **

PALABRAS CLAVE:
1. Pensamiento variacional 2. Negociación de significados 3. Metacognición
4. Aprendizaje Significativo

Esta investigación tiene como objetivo analizar el uso de los mapas conceptuales como estrategia metacognitiva en el aprendizaje de los conceptos de función y función lineal.

Los mapas conceptuales, tal como se conocen hoy en día, son considerados como una representación pictórica que exterioriza lo que su autor sabe, ayudándole, por lo tanto, a aprender y a organizar adecuadamente los conceptos en cuestión. Por tal razón, los mapas conceptuales buscan contribuir a un aprendizaje significativo de los estudiantes.

La pregunta orientadora de este trabajo fue: ¿Cómo los mapas conceptuales se convierten en una estrategia metacognitiva en el aprendizaje de conceptos como Función y Función Lineal?

La metodología utilizada en esta investigación fue el estudio de caso cualitativo. Para el análisis se hizo "el análisis de cuatro casos" donde conjugamos las voces de cuatro estudiantes, las voces de los autores que validan el marco teórico y la voz de los autores de esta experiencia.

Con la realización de los mapas conceptuales, el estudiante aporta algo de sí mismo a su aprendizaje, genera una constante reflexión acerca de los temas matemáticos abordados y organiza y clasifica cognitivamente los asuntos tratados.

---

* Trabajo de Grado
** Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Orientadora: Diana Jaramillo Quiceno, Ph, D. en Educación matemática.

SUMMARY

TITLE:

CONCEPTUAL MAPS: METACOGNITIVE STRATEGY IN THE LEARNING OF FUNCTION AND LINEAL FUNCTION*

AUTHORS:

BURGOS DUARTE, Mayury
CAMACHO GUERRERO, Jhovany Alexander **

WORDS KEY:
1. Thought variacional 2. Negotiation of meanings 3. Metacognición
4. Significant learning

This investigation has as objective to analyze the use of the conceptual maps as strategy metacognitive in the learning of the function and lineal function concepts.

The conceptual maps, just as they are known today in day, they are considered as a pictorial representation that reflect what their author knows, helping him, therefore, to learn and to organize the concepts appropriately in question. For such a reason, the conceptual maps look for to contribute to a significant learning of the students.

The question guider of this work was: How do the conceptual maps become a strategy metacognitive in the learning of concepts like Function and Lineal Function

The methodology used in this investigation was the study of qualitative case. For the analysis it was made "the analysis of four cases" where we conjugate the voices of four students, the voices of the authors that validate the theoretical mark and the voice of the authors of this experience.

With the realization of the conceptual maps, the student contributes something from itself to her learning, generates a constant reflection about the approached mathematical topics and organizes and classifies cognitively the treated matters.

* Work of Grade
** Ability of Sciences. Degree in Mathematics. Orientadora: Diana Jaramillo Quiceno, Ph, D. in mathematical Education.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

NUESTROS ANHELOS

Nuestro sistema educativo nos ha venido sumiendo, durante muchas décadas, tanto a docentes como a estudiantes, en un modelo de aprendizaje tradicional, lineal y memorístico. Esto ha conducido, en muchas ocasiones, a que el aprendizaje de las Matemáticas se torne poco significativo y atractivo.

Lo anterior ha hecho que, como futuros licenciados en matemáticas, nos estemos preguntando, ¿cómo hacer para que el aprendizaje de las matemáticas en nuestras aulas escolares se torne más participativo y cobre más interés entre los estudiantes?, ¿Cómo hacer para que sus contenidos cobren significado?, ¿cómo "desmitificar" la dificultad de su aprendizaje?

Hoy por hoy, es común ver en los jóvenes la falta de interés, la desmotivación, la insatisfacción al realizar actividades matemáticas lo que, generalmente, se ve reflejada en bajos rendimientos académicos y en la escasa apropiación de los conocimientos por parte del estudiante.

Por tal razón, consideramos que los esfuerzos del docente actual deben estar encaminados a poner en práctica diversas estrategias de enseñanza que promuevan en el estudiante estrategias de aprendizaje que respondan a las necesidades e inquietudes del contexto en el que está inmerso el estudiante.

Es así como nuestra primera motivación para realizar esta experiencia fue hacer algo diferente y no repetir las eternas clases de tiza y tablero a las que nos hemos sometido desde nuestra infancia.

En nuestra primera experiencia, vivida durante el Servicio Social Educativo y Trabajo de Grado I en el Instituto La Libertad, percibimos que las estrategias de aprendizaje empleadas por los estudiantes resultaban escasas en la búsqueda de un aprendizaje significativo que garantizara una mejor aprehensión del conocimiento como tal.

Notamos que generalmente los estudiantes, por diversas razones, no lograban organizar los conceptos de manera coherente y clara, como lo consideran Novak & Gowin (1988), quienes comentan que cuando se les pide a los estudiantes una explicación o justificación de un tema visto, son notorias las dudas y vacíos, por lo que se les dificulta recordarlo y aplicarlo posteriormente en diferentes contextos.

Fue así, como a partir de estas dificultades e inquietudes, surgió la pregunta que se convirtió en el eje central de esta experiencia: **¿Cómo los mapas conceptuales se convierten en una estrategia**[1] **metacognitiva en el aprendizaje de conceptos como Función y Función Lineal?** Cuestionamiento que nos llevó a trazar el siguiente objetivo: **Analizar el uso de los mapas conceptuales como una estrategia metacognitiva en el aprendizaje de Función y Función Lineal.**

Queremos resaltar que la estrategia específica de aprendizaje que fundamenta esta experiencia es el uso de los mapas conceptuales como alternativa de aprendizaje en las Matemáticas. Por tal razón, fue necesario empezar por enseñar a los estudiantes la técnica empleada en la construcción de los mapas, para luego, a través de ellos, posibilitar el aprendizaje de Función y Función Lineal.

---

[1] Para efecto de esta investigación, tomaremos la palabra estrategia para referirnos a los Mapas Conceptuales como herramienta mediadora en el proceso de aprendizaje.

La tarea de integración de los mapas conceptuales con el espacio de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas la hicimos a través de actividades que resultaran atractivas, aplicables y significativas para los estudiantes, dando importancia a la manera cómo ellos aprendían y construían significados matemáticos a través de los mapas conceptuales. Con ello buscábamos observar y analizar el aprendizaje de Función y Función Lineal.

En cuanto a la experiencia, esta se llevó a cabo con los estudiantes de los dos cursos de octavo grado del Instituto La Libertad, institución pública del Municipio de Bucaramanga. Sus actividades académicas se desarrollaban en dos jornadas: en la mañana, básica secundaria y la media vocacional; y, en la tarde, preescolar y básica primaria. La intensidad horaria semanal en el área de Matemáticas era de cinco sesiones de 55 minutos cada una.

Por otro lado, el grupo de estudiantes con el que realizamos la investigación constaba de 35 estudiantes -17 niñas y 18 niños, entre los 13 y 15 años de edad- provenientes de los estratos 1 y 2. Sin embargo, para efectos de esta investigación tuvimos en cuenta el análisis de las actividades realizadas por los siguientes cuatro estudiantes[2]:

[2] Los cuatro protagonistas de esta investigación, nos autorizaron para publicar sus nombres reales.

Lizeth Xiomara Rueda (13 años)

Responsable, introvertida y con mucho carisma. Se destacaba por su dedicación al estudio.

José Luís Remolina (13 años)

Trabajador y servicial, decía que desde primaria tenía afinidad por las matemáticas.

Jazmary Santos (13 años)

Extrovertida, dinámica, habladora y cuestionadota; le gustaba la lectura.

Kelly Castrillón (14 años)

Calmada, comprometida con su estudio, se notaba nerviosa y tímida para hablar en público.

Finalmente, los resultados de esta investigación los presentaremos en cinco capítulos; así:

En el primer capítulo, "¿Por qué mapas conceptuales?"**,** comentamos las razones por las cuales decidimos emplear los mapas conceptuales como estrategia de aprendizaje.

En el segundo capítulo, "Emprendiendo la investigación", ilustramos la metodología utilizada en el desarrollo de la investigación.

En el tercer capítulo, "Las actividades en el aula", presentamos cada una de las actividades que se desarrollaron con los estudiantes sin realizar un análisis de ellas. Aclaramos que en este capítulo aparecen los nombres de otros estudiantes que, sin ser protagonistas de la investigación, participaron de las clases y se tuvieron en cuenta para una mejor descripción de las actividades; por lo que se incluyen voces diferentes a las de los cuatro jóvenes ya mencionados. Debemos hacer la salvedad de que solo se usan los nombres propios de los estudiantes que intervinieron directamente en la investigación, los demás son nombres ficticios.

En el cuarto capítulo, "Los nominados y sus historias", analizamos los cuatro casos que titulamos así:

- José vs. Los Mapas Creativos.
- "Pero me da pena explicar el mapa"… (la voz de Kelly)
- "Me gustan los mapas con dibujos"… (la voz de Lizeth)
- "Con los mapas organizo mis ideas"… (la voz de Jazmary)

En estos casos, tratamos de evidenciar cuáles fueron los procesos metacognitivos desarrollados por los estudiantes, en el aprendizaje de Función y Función Lineal, usando como estrategia los mapas conceptuales.

Para finalizar, en el capítulo cinco, "Lo que podemos concluir", mostramos las conclusiones a las que llegamos una vez terminada esta investigación.

¿POR QUÉ MAPAS CONCEPTUALES?

"¿Cómo podemos ayudar a las personas
a reflexionar sobre sus vivencias y a construir
significados nuevos y más completos?"
Novak & Gowin (1988, p. 13).

Este epígrafe nos llevó a reflexionar sobre el papel que el docente debería asumir, ya no como un transmisor de conocimiento sino como un facilitador del aprendizaje, posibilitándole al estudiante desarrollar una capacidad reflexiva y crítica frente a su propio proceso de aprendizaje.

Para que el docente pueda ser ese facilitador, se hace necesario presentar alternativas que ayuden a desarrollar el aprendizaje autónomo de los estudiantes, como bien lo expresa Mateos (2001, p. 13) haciendo referencia al Diseño Curricular Base de España (MEC, 1989):[3]

> "Es absolutamente preciso hacerle consciente al alumno de los procesos que emplea en la elaboración de conocimientos, facilitándole por todos los medios la reflexión metacognitiva sobre las habilidades de conocimiento, los procesos cognitivos, el control y la planificación de la propia actuación y la de otros, la toma de decisiones y la comprobación de resultados".

Por lo tanto, una de nuestras primeras inquietudes fue cómo encontrar esa estrategia que permitiera enseñar temas matemáticos que a la vez facilitara el aprendizaje significativo del estudiante. Estrategia que, además, le

[3] El Ministerio de Educación y Ciencia de España establece un Diseño Curricular Base para la normatividad de la educación obligatoria en España, significado análogo al papel que desempeñan el Ministerio de Educación Nacional con los lineamientos curriculares en nuestro sistema educativo Colombiano.

ayudara al estudiante a asociar lo que ya sabe con los nuevos conocimientos y aplicarlos en su cotidianidad, posibilitando así su Metacognición. Como respuesta a estas inquietudes encontramos los Mapas Conceptuales (MC)[4] como una estrategia de aprendizaje. Ellos se constituyen en una herramienta cognitiva que permite a su autor, a partir de su construcción y re-construcción, una mejor aprehensión y comprensión de los conceptos que les dan origen.

Alrededor de los MC se tejen diferentes concepciones; nosotros adoptamos la postura dada por Jaramillo (2003a; p. 53) al referir que los MC son:

> "[…] una organización pictórica o una representación visual de un tema, producido por uno o varios individuos, el cual debe presentar un concepto central, otros subconceptos, **conexiones o palabras de enlace** entre estos conceptos, ejemplos y características sobre ese tema especifico. […] En resumen, un mapa conceptual puede entenderse como un retrato instantáneo de un individuo o de un grupo en un determinado momento sobre un asunto (Santos, 1997)".

De este modo, Jaramillo (2003a) da cabida a los dibujos en la representación visual del MC siempre y cuando este mantenga la concepción ya señalada. La intención de ese dibujo es la de convertirse en un buen aliado a la hora de recordar y contextualizar el conocimiento desde el entorno sociocultural propio en el que se desenvuelve el individuo.

Al respecto Novak & Gowin (1988, p. 44) afirman:"Con la elaboración de mapas conceptuales se aprovecha esta capacidad humana de reconocer pautas en las imágenes para facilitar el aprendizaje y el recuerdo".

De los antecedentes de los MC se sabe que se desarrollaron en 1972, dentro de un proyecto de investigación de la Universidad de Cornell de Estados

[4] De aquí en adelante usaremos esta convención para referirnos a ellos.

Unidos dirigido por Joseph D. Novak., D. Bob Gowin y su equipo, cuyo propósito era investigar por medio de MC el aprendizaje, la creación y la representación del conocimiento de conceptos básicos de ciencias en los estudiantes de educación básica primaria hasta media vocacional.

En su inicio, los MC se consideraban una estructura jerárquica, al respecto Novak & Gowin (1998) mencionaban que los conceptos más importantes e inclusivos deben situarse en la parte superior del mapa y los conceptos progresivamente más específicos y menos inclusivos, en la parte inferior.

Aunque se consideran un fundamento importante en los mapas conceptuales, debemos decir que no estamos de acuerdo con los autores cuando se refieren a la jerarquía tan estricta de los conceptos, ya que esto limita y condiciona a los estudiantes sin permitirles expresar libremente su organización mental del tema estudiado.

Paralelamente, los MC se convierten en la herramienta que exterioriza aspectos emocionales e intelectuales al momento de integrar pensamientos, sentimientos y acciones, cuando los individuos reflexionan sobre sus vivencias y construyen nuevos significados, según Jaramillo (2003a), ya que el aprendizaje va cambiando debido a la experiencia, frente al tema, que el individuo va desarrollando en torno al asunto en cuestión. De esta manera los pensamientos, sentimientos y la acción forman parte de cualquier experiencia educativa significativa, de acuerdo a Novak & Gowin (1988), así que los MC son pensados para ayudar a estudiantes y profesores en la construcción de dichas experiencias.

Pero el mayor rendimiento de los MC se da cuando los individuos que los elaboran desarrollan su metacognición ya que progresivamente empieza a reconocer cómo y qué tanto ha aprendido. Esto ocurre cuando se han desarrollado otros significados y otras relaciones que no habían sido consideradas previamente en la elaboración del mapa. La Metacognición según Santos (1997), citado por (Jaramillo, 2003b, p. 104):

> "Involucra el conocimiento del individuo sobre su propio conocimiento. Esto ocurre cuando el individuo tiene conciencia y sabe lo que de hecho ya aprendió y ya domina con seguridad y facilidad, y cuando el individuo también está conciente sobre lo que todavía no aprendió y sobre lo que siente dificultades. O sea, cuando el individuo está desarrollando su metacognición, él tiene conocimiento a nivel consciente de sus potencialidades y dificultades".

En cuanto a la relación docente-estudiante y el conocimiento, el mapa conceptual permite compartir o negociar significados entre los estudiantes y el docente, puesto que existen significados cognitivos ya establecidos sobre los cuales hay que dialogar, intercambiar, compartir, dar ejemplos, contra ejemplos y algunas veces, hasta llegar a un compromiso para que el significado de un conocimiento sea aprendido. Lo más importante de esta negociación de significados es el hecho de que los estudiantes tienen la posibilidad de aportar algo de sí mismo como lo expresa Jaramillo (2003b).

En este sentido, Ontoria (1997, p. 70) se cuestiona:

> "Pero, ¿En qué consiste la negociación de significados? Teniendo presente que nos referimos a *significados cognitivos*, este ejercicio requiere la consecución de un compromiso o acuerdo sobre la inclusión o no de un concepto, a través de un proceso de diálogo e intercambio, en el que los alumnos comparten su significado determinado [...] pone en marcha su capacidad participativa, en el terreno de sus propios conocimientos y les obliga a implicarse de manera activa en su propio aprendizaje".

Finalmente, en términos generales, los MC se pueden usar de diversas formas, entre otras:

- ♣ Estrategia de estudio para cualquier tema sin importar la rama del conocimiento en que se emplee.
- ♣ Elaboración de resúmenes.

- Para organizar ideas, planificar conferencias, exposiciones, proyectos de investigación, etc.
- Como estrategia de aprendizaje ya que facilita la posterior recordación de los temas y conceptos.
- Es un atractivo instrumento de evaluación tanto para docentes como para estudiantes.
- Puede servirle al docente como una herramienta en la planeación curricular.
- Fomenta la cooperación en el aula de clase (entre estudiantes, y entre estudiantes y docente).
- Para muchos estudiantes el momento de la realización del mapa es un momento para liberar las tensiones propias que genera el proceso académico.
- Al docente le sirve para evaluar el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, e incluso para detectar sus sentimientos y sensaciones del momento.

EMPRENDIENDO LA INVESTIGACIÓN

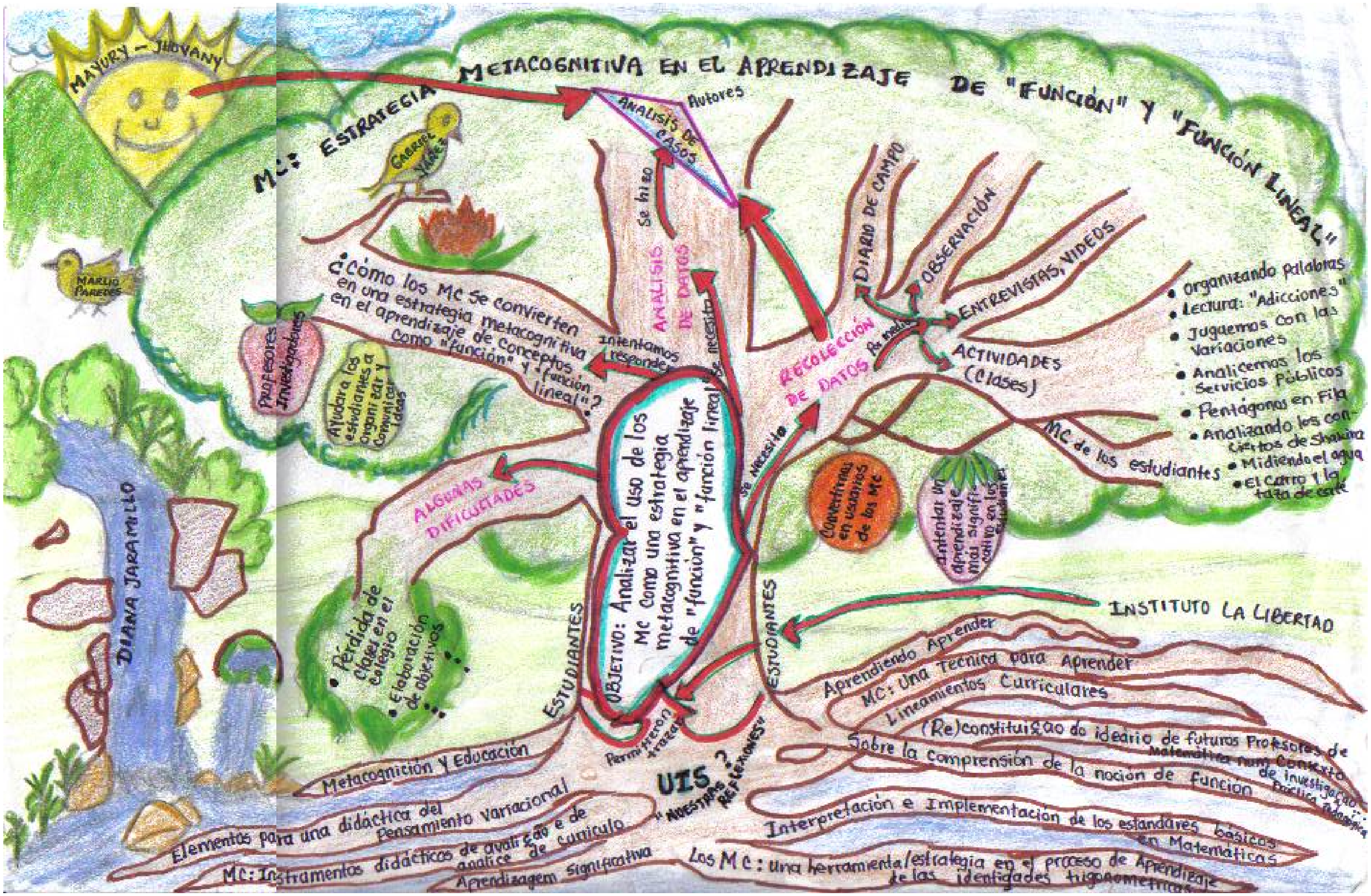
Esta investigación se enmarcó en un análisis de caso, desde una perspectiva de carácter cualitativo con un abordaje fenomenológico hermenéutico [5] mediante investigación en el aula. En el análisis de caso:

> "el investigador suele apuntar a adquirir la percepción más completa posible del objeto, considerándolo como una identidad holística, cuyos atributos podemos entender en su totalidad solamente en el momento en que examinamos todos simultáneamente, en otras palabras: el objeto como un todo", Coria (2001).

Por otro lado, para esta investigación nos apoyamos en autores como Camargo & Guzmán (2005), *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* del Ministerio de Educación Nacional (MEN), Posada et al (2005), Sierpinska (1992), entre otros, para concebir una guía sobre el eje temático a tratar: Función y Función Lineal. Allí se sugiere el tratamiento de las funciones desde una perspectiva dinámica que involucre los procesos de experimentación, reflexión, construcción de significados y formas de expresar la generalidad como resultado de los diferentes procesos de modelación matemática de diferentes tipos de situaciones.

A continuación mostramos un MC, en el que proyectamos nuestras expectativas frente al desarrollo de la investigación:

[5] Este abordaje consiste en la comprensión de los fenómenos en sus distintas manifestaciones; el investigador necesita comprender los fenómenos objeto de la investigación, donde la hermenéutica juega un papel importante. La metodología cualitativa de carácter fenomenológico se distingue por poseer grandes elementos críticos, se da especial interés en la conscientización de los individuos involucrados en la investigación. Además, existe una relación dialógica entre estudiante y docente. Gamboa (2002) citado por Jaramillo (2004).


MC: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE "FUNCIÓN" Y "FUNCIÓN LINEAL"
MAYURY – JHOVANY
ANALISIS DE CASOS
Autores
Se hizo
ANALISIS DE DATOS
DIARIO DE CAMPO
OBSERVACIÓN
ENTREVISTAS, VIDEOS
ACTIVIDADES (Clases)
RECOLECCIÓN DE DATOS
¿Cómo los MC se convierten en una estrategia metacognitiva en el aprendizaje de conceptos como "función" y "función lineal"?
Intentamos responder
Profesores Investigadores
ALGUNAS DIFICULTADES
OBJETIVO: Analizar el uso de los MC como una estrategia metacognitiva en el aprendizaje de "función" y "función lineal"
Se necesita
• organizando palabras
• Lectura: "Adicciones"
• Jugaemos con las variaciones
• Analicemos los Servicios Públicos
• Pentágonos en Fila
• Analizando los conciertos de Shakira
• Midiendo el agua
• El carro y la taza de café
MC de los estudiantes
Convertirnos en usuarios de los MC
INSTITUTO LA LIBERTAD
ESTUDIANTES
ESTUDIANTES
DIANA JARAMILLO
Pérdida de clases en el colegio
Elaboración de objetivos
UIS
"NUESTRAS REFLEXIONES"
Aprendiendo Aprender
MC: Una Tecnica para Aprender
Lineamientos Curriculares
(Re)constituição do ideário de futuros Professores de Matemática num Contexto de Investigação sobre Prática Pedagógica
Sobre la Comprensión de la noción de función
Interpretación e Implementación de los estandares básicos en Matemáticas
Los MC: una herramienta/estrategia en el proceso de Aprendizaje de las identidades trigonometricas
Metacognición y Educación
Elementos para una didáctica del Pensamiento variacional
MC: Instrumentos didácticos de avaliação e de analice de curriculo
Aprendizagem Significativa

Este mapa conceptual ilustra el rumbo de nuestra investigación, aborda la metodología de trabajo a emplear –recolección y análisis de datos– el contexto en el que se desarrollaría la investigación y los sujetos involucrados en la misma. Las raíces representan aquellos autores en los que nos apoyamos. En el tronco se muestra el objetivo de nuestra investigación; el agua representa a nuestra orientadora; las aves son la representación de los evaluadores del Proyecto, una de ellas se posa sobre la rama donde está simbolizada la pregunta. Los rayos del sol representan a quienes darían vida a este árbol: nosotros. Y, finalmente, los frutos representan nuestras expectativas y logros al desarrollar este Proyecto.

En cuanto a la temática a desarrollar, Función y Función Lineal, esta se abordó en el horario de las clases establecidas por la Institución. Por otro lado, las actividades que implementamos en el transcurso de la experiencia, fueron las siguientes:

- ♣ "Organizando palabras", "Adicciones Modernas" y elaboración de un MC sobre Factorización. El propósito de ellas era enseñar la técnica de la elaboración de los MC.
- ♣ Las actividades "Juguemos con las variaciones", "Analicemos los Servicios Públicos", "Pentágonos en Fila" e "Interpretando los Conciertos de Shakira". Estas se realizaron con el fin enseñar a los estudiantes la noción de Función desde contextos variacionales, tratando de que fueran actividades ilustrativas y familiares para ellos. "Midiendo el Agua" y "El carro y la taza de café" se enseñó con la intención de aproximarlos al concepto de Función Lineal.

Referente a la recolección de datos para la investigación fue relevante la realización del diario de campo ya que una vez realizadas las actividades en mención realizábamos el registro de clase y de los sucesos importantes que se daban en ella. Todo ello nos permitió determinar el momento más adecuado para proponer la elaboración de los MC en los que se debía expresar de manera individual o en grupo lo comprendido hasta ese punto. Fue así como, de manera cuidadosa, cada MC se convirtió en la herramienta fundamental para evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes de los conceptos de Función y Función Lineal.

Una vez elaborados los mapas nos dimos a la tarea de analizarlos para negociar significados con cada autor – o autores según fuera el caso – por medio de entrevistas[6]. Estas últimas fueron fundamentales para comprender lo que el estudiante intentaba expresar en su mapa y, además, nos permitió aclarar y complementar las dudas y dificultades observadas.

Una vez concluidas las actividades con los estudiantes iniciamos el análisis de los datos. Para este análisis revisamos una y otra vez los mapas, los apuntes de clase, las entrevistas, el diario de campo y los videos; después de observar, organizar y clasificar estos datos, optamos por analizar los casos de cuatro estudiantes.

Es importante aclarar que cada uno de los casos es diferente ya que, primero, eran cuatro estudiantes con personalidades y distintos ritmos de trabajo. Y segundo, sus percepciones y adaptaciones al trabajo con los MC fueron particulares ya que las construcciones conceptuales matemáticas que realizaron a través de ellos, alcanzaron distintos niveles de re-estructuración.

Para el análisis de cada uno de los casos, hicimos una triangulación teniendo en cuenta tres aspectos: puntos de vista planteados por los autores quienes le dan sustento teórico a la investigación; la información recolectada de los estudiantes; y, nuestras propias percepciones, opiniones y conclusiones.

[6] Estas entrevistas fueron registradas en videos.

LAS ACTIVIDADES EN EL AULA

"Todas las clases deberían ser para el profesor una investigación,
un descubrimiento, una forma Tranquila de investigar"
LYTLE, S; COCHRAN-SMITH, M. (1999).

Desde que empezamos esta experiencia educativa nos sentimos comprometidos con los estudiantes ya que el trabajo con los MC resultaría ser nuevo para el grupo. Aún más cuando se pretendía que elaboraran MC en matemáticas. Aparte de ese compromiso, se sumaban todas las responsabilidades y compromisos propios de la práctica docente – entrega de notas, las evaluaciones, el control de asistencia, la disciplina de la clase y los inconvenientes tan comunes e inesperados que se suelen presentar en cualquier aula de clase –.

Iniciamos la práctica docente realizando la Actividad I, **"Organizando Palabras"**, la cual surgió de Seminario: "Matemática y Sociedad", asignatura del pénsum de Licenciatura en Matemáticas dirigida por la profesora Diana Jaramillo en el momento que la cursamos, que consistió en entregar algunas palabras sueltas que se debían ordenar autónomamente por los estudiantes, conservando alguna relación coherente entre las palabras que validen los conceptos que encierran en sí mismas.

Así que quisimos realizar una experiencia similar y de esta manera decidimos entregar algunas palabras que incluían un tema matemático ya conocido por los estudiantes, elegimos las siguientes dieciséis palabras relacionadas con Triángulos: "triángulos", "suman 180º", "triángulo equilátero", "triángulo isósceles", "triángulo escaleno", "triángulo rectángulo", "agudo", "obtuso", "recto", ">90º", "<90º", "catetos, hipotenusa", "3 lados", "3 ángulos", "figura plana". Los estudiantes debían organizar libremente estas palabras de tal manera que entre una y otra –entre un concepto y otro– se guardara una relación que les permitiera estructurar un discurso por grupos. Posteriormente, debían exponer ante los demás justificando, en ese momento, la organización dada a las palabras.

Al momento de socializar el trabajo alcanzado por cada grupo – tres estudiantes por grupo – encontramos diversas organizaciones y diferentes argumentos para justificarlas. Esto generó polémica ya que las explicaciones dadas cambiaban entre un grupo y otro; al debatir estas ideas, se abrió el espacio para realizar la negociación de significados. Como ya se menciono, la negociación de significados es un espacio en el que estudiantes y docente debaten ideas, se discuten conceptos, se hacen aclaraciones y se corrigen posibles concepciones erradas de significados cognitivos ya establecidos.

Esta actividad, implementada el 21 y 22 de septiembre de 2006, tenía como fin evidenciar, entre los estudiantes, que hay diferentes formas de pensar y de organizar los conceptos, mostrando con ello que no existe una única forma de hacerlo. El individuo aprende de diferentes maneras y puede organizar el conocimiento de formas diversas, siempre y cuando haya coherencia y significado entre las relaciones que él establece.

Además, se buscaba explorar si existían conocimientos previos acerca de los MC ya que inicialmente no se les comentó nada al curso acerca de éstos, sin embargo en esta actividad algunos estudiantes reconocieron que se estaban elaborando MC.

> *"Esto es parecido a los mapas conceptuales que hacemos en biología con la profesora Nidia, solo falta hacerle flechitas y colocarle palabras"* (Estudiante 8º grado, 21 de septiembre de 2006).

Consecuentemente, procedimos a mencionarle al grupo lo que es un MC según la concepción de Jaramillo (2003a) expuesta con anterioridad (ver pág. 7). Además, valiéndonos de las respuestas dadas, que no eran del todo erradas, mencionamos algunos elementos de los mapas aprovechando el comentario anterior; aclaramos que las palabras que faltaban venían siendo los conectores o términos de enlace.

Tales palabras de de enlace son, según Jaramillo (2003a), las encargadas de mostrar las relaciones entre los conceptos que el autor del mapa considera necesarios y permiten establecer una continua “remodelación” entre los conceptos a medida que se avanza o se adquieren nuevos conocimientos de un tema. Además, estos conectores son los que permiten diferenciar lo que es un MC de otro esquema que no lo es.

También consideramos conveniente mostrar y explicar algunos ejemplos de MC que cumplieran con las características que estábamos proponiendo, para esto retomamos los ejemplos que propone Solano (2005), a continuación mostramos uno de ellos:

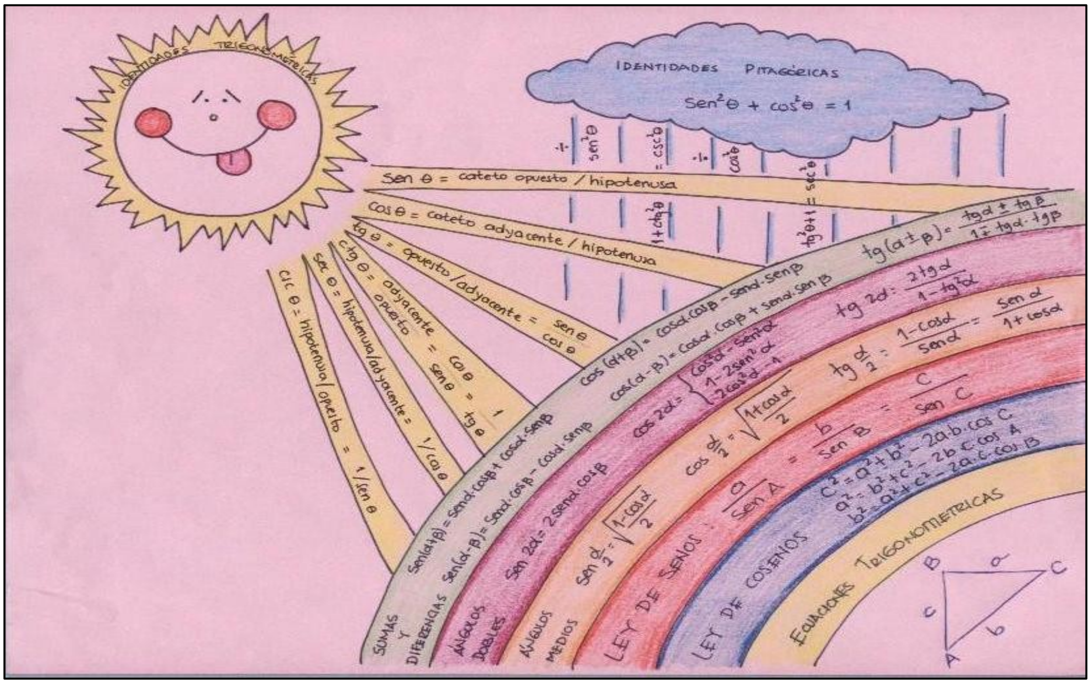


Figura 1. “El arco iris”, mapa conceptual sobre Identidades Trigonométricas, elaborado por Diana, estudiante de décimo grado.

Posteriormente, para seguir con el proceso de familiarización con el uso de los MC, en la próxima clase y sobre la misma organización ya realizada, les pedimos que hicieran otro MC, esta vez agregando y teniendo en cuenta el uso de los conectores.

Al escuchar las indicaciones muchos dijeron: “Eso tan fácil”. Pero cuando lo estaban haciendo – en algunos casos – no encontraban la palabra adecuada que les permitiera relacionar los conceptos. Luego, con las mismas palabras, les pedimos que elaboraran un nuevo MC que no fuera tan lineal como el anterior. En ese instante se escucharon voces que expresaron:

> *"¿Un mapa creativo*[7]*, como los que ustedes nos mostraron? ¿Podemos hacer los mismos dibujos?"* (Estudiante 8º grado, 22 de septiembre de 2006).

Aquí vimos la necesidad de dejarles en claro que el autor del mapa, al momento de elaborarlo, está liberando lo que piensa y lo que siente; por lo tanto, este resulta ser un "retrato instantáneo" de lo que se está pensando como bien lo menciona Santos (1997), citado por Jaramillo (2003b). De esta manera, el dibujo que escogieran o la forma como lo organizaran era muy personal.

Fue así como con satisfacción notamos que se concluyó esta primera actividad en la que la mayoría de estudiantes abordaron el trabajo con los MC de manera amena e interesada en su uso.

Para la Actividad II, **"Adicciones Modernas"**, decidimos buscar una lectura sencilla que llamara la atención de los estudiantes para que, en base en lo que comprendieran de ella, elaboraran un MC.
La lectura empleada para este taller fue "Adicciones Modernas" (ver Figura 2). Esta actividad se realizó el 3 de octubre de 2006.

Algunos de los estudiantes elaboraron sus mapas tomando apuntes textuales o pequeños apartes de la lectura. Aunque también encontramos algunos MC bien organizados, con un buen nivel de comprensión, en donde se extractaban las ideas principales, se notaban aportes y opiniones personales.

[7] Nombre dado por los estudiantes a los mapas conceptuales que no tienen la construcción convencional de rectángulos y elipses ni la jerarquía entre ellos implícita.

Adicciones modernas

¿Qué es una adicción?

Una adicción la determina el grado con el que "necesitamos" hacer algo y la frecuencia con la que buscamos hacerlo. También la sensación negativa que tenemos cuando no podemos hacerlo.

Tradicionalmente la palabra adicción se asocia con el alcohol, el cigarrillo u otro tipo de drogas; sin embargo, la adicción es una problemática que puede presentarse hacia un amplio número de "cosas" o incluso hacia una persona, razón por la que se habla de dependencia emocional o afectiva. La adicción o dependencia es un estado en el que la persona necesita de "algo" para el desarrollo de su vida; siente además que no tiene el control sobre esa necesidad, es decir, no logra dejar aquello hacia lo cual es adicto o dependiente. Las personas que tienen una adicción se sienten mal cuando no pueden acceder a aquello a lo que son dependientes; dedican gran parte de su tiempo a favorecer su adicción y organizan sus actividades en pro de la misma.

¿Cuáles son las adicciones modernas más comunes?

Adicción a los juegos de azar: Se caracteriza porque la persona busca jugar de forma recurrente y persistente, alterando el desarrollo de su vida personal, familiar, laboral, económica o académica. Quien es adicto a los juegos de azar, suele preocuparse en exceso por temas relacionados con éstos (deudas adquiridas, forma en la cual conseguirá el dinero para jugar, horarios y lugares para jugar, etc.) y apuesta cada vez mayores cantidades de dinero para conseguir el nivel de emoción que desea. Se irrita cuando debe interrumpir o detener el juego; lo utiliza como una forma de escape de problemas, situaciones y sensaciones desagradables que no quiere enfrentar y normalmente cuando pierde dinero busca recuperarlo volviendo a jugar. Estas personas suelen engañar a los miembros de su familia o a personas cercanas respecto a su adicción y en casos extremos cometen actos "desesperados" para conseguir el dinero y el tiempo para jugar.

Adicción a los juegos de video: En la actualidad la gran mayoría de jóvenes y adolescentes han crecido bajo la compañía de la televisión, el computador y los juegos de video. Ninguno de estos adelantos tecnológicos o de estas actividades es por sí mismo negativo, sin embargo, cuando se convierten en la única fuente de compañía y refuerzo para el adolescente, se inicia el camino para generar una dependencia o adicción a los mismos. Los videojuegos le entregan al adolescente una gratificación inmediata, le permiten convertirse en un sinnúmero de personajes que quisiera ser y le dejan vivir historias llenas de emoción. Todos estos factores favorecen que una persona que recibe poca gratificación social, que no tiene suficientes y adecuadas relaciones sociales, que tenga una imagen de sí mismo distorsionada o baja en donde se considera incapaz de realizar ciertas actividades de exigencia social o personal, encuentre en estos juegos la oportunidad perfecta para "vivir" lo que se le dificulta en su cotidianidad. La adicción a los videojuegos se caracteriza por la gran cantidad de tiempo empleada para jugar, el abandono total o parcial de actividades académicas, sociales o laborales, la incomodidad o irritabilidad ante la imposibilidad de jugar y la organización de las actividades diarias, incluso las más necesarias como dormir o comer, con el único objetivo de poder jugar.

Adicción a internet: La dependencia de internet se caracteriza por la gran cantidad de tiempo que la persona gasta en esta actividad, la disminución de las relaciones sociales con "contacto físico" que tiene, debido a que el internet permite relacionarse de forma virtual, el desarrollo de todo tipo de actividades por este medio (sociales, laborales, académicas, afectivas y sexuales), la necesidad de permanecer cada vez mayor tiempo "conectado" y la irritabilidad en caso de no poder hacerlo.

Figura 2. "¿Qué es una adicción?", artículo del diario informativo *Vanguardia Liberal* del Área Metropolitana de Bucaramanga.

Finalmente, buscando reafirmar la elaboración de los MC, como complemento a esta primera etapa, se les pidió a los estudiantes – de tarea – que hicieran un MC sobre Factorización.

Una vez concluida la etapa, en la que los estudiantes aprendieron a elaborar MC, consideramos conveniente abordar el tema de Función.

Sobre este tema notamos en los autores consultados su preocupación porque se enseñe funciones a través de contextos variacionales. Los Estándares Curriculares (2003) hacen referencia al pensamiento variacional y sistemas algebraicos como:

> "[…] componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática: la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Por ello, debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas. Así mismo, debe desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas"

En este mismo sentido, Sierpinska (1992) considera que una buena forma de motivar a los estudiantes en el inicio del estudio de funciones, es interesarlos en explorar la variación por medio de situaciones problemáticas relacionadas con fenómenos de cambio de la vida práctica, antes de enfrentarlos a la definición formal o a ejemplos y ejercicios de funciones elementales que cobran poco significado en ellos. Otro de los aspectos claves en el estudio de Función, son sus formas de representación, al respecto Sierpinska (1992, p. 56) considera:

> “Diferentes representaciones de funciones son usadas, de las cuales tablas, gráficas y fórmula analítica son las más conocidas y usadas, al menos en la escuela. La conciencia de las limitaciones de cada una de éstas representaciones y de cada hecho que estas representan y el concepto general mismo son ciertamente condiciones fundamentales de la comprensión de funciones”

Teniendo en cuenta tales reflexiones, aplicamos la Actividad III,”**Juguemos con las Variaciones”** (ver Figuras 3a y 3b), tomada y adecuada para nuestros estudiantes de Posada et al (2005). A través de esta actividad, realizada los días 5, 6 y 10 de octubre de 2006, se pretendía que los estudiantes analizaran situaciones prácticas que les permitiera observar, registrar y utilizar el lenguaje matemático como preámbulo a la cuantificación de la variación.

Además, algunos de los conceptos matemáticos a partir de los cuales queríamos inducir al estudiante al concepto de Función eran ya conocidos (perímetro, área y volumen) por el grupo, ya que en el Servicio Social y Trabajo de Grado I se habían abordado estas temáticas.

Queríamos aprovechar estos conceptos para el desarrollo de la actividad en mención, fundamentados en la siguiente reflexión que hace Ausubel (1983), citado por Novak & Gowin (1988, p. 60), al respecto:

> “Si tuviera que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, diría lo siguiente: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia”.

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD
Estudiantes: ____
____
Grado: ____________ Fecha: ________________

JUGUEMOS CON LAS VARIACIONES

OBJETIVO: Analizar situaciones que involucren cambio o variación.

PARA TENER EN CUENTA:
Formar grupos de tres estudiantes y siguiendo las instrucciones dadas, desarrollar de forma clara, en el cuaderno, la siguiente actividad para ser socializada al finalizar la clase.

Tomen los tres trozos de papel dados e intenten construir tres cajas sin tapa, recortando cuadrados de igual tamaño en sus esquinas pero de diferentes medidas para cada caja, doblando luego hacía arriba las pestañas que quedan; como se ve en la figura.

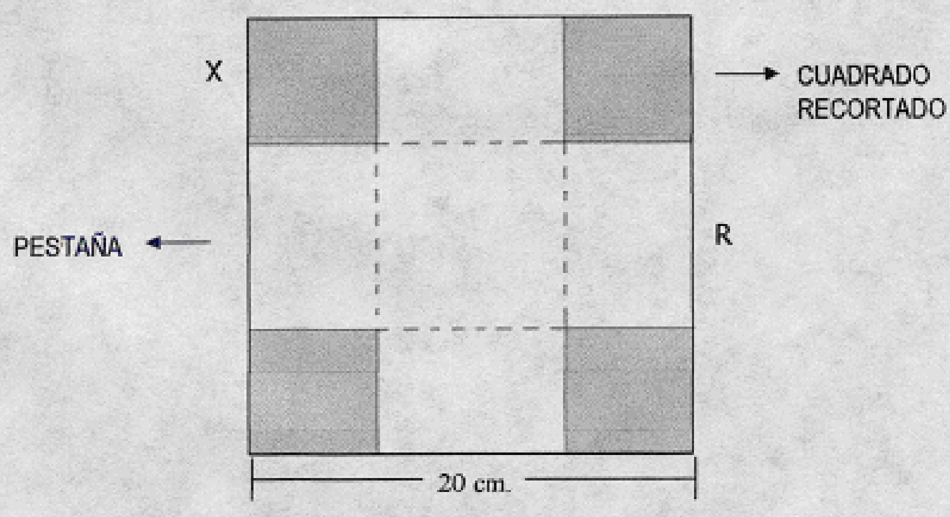


Figura 3.a. Instrucciones de la Actividad
"Juguemos con las Variaciones".

ACTIVIDAD 1

1) A medida que al trozo de papel se le recortan cuadrados más grandes:
a. ¿Qué creen que pasa con el perímetro de la figura resultante?
b. ¿Qué creen que sucede con el perímetro del cuadrado recortado al trozo de papel?
c. ¿Qué sucede con la longitud R de la figura?
d. ¿Qué sucederá con el perímetro de la pestaña?

2) Si se quiere recubrir la caja de papel:
a. ¿Creen que a medida que se recorten cuadrados más grandes, se necesitará más o menos papel para recubrirla?
b. ¿Habrá alguna caja para la cual se necesite menos papel para recubrirla?
c. ¿Para cuál caja necesitarán una cantidad igual a la mitad del trozo de papel dado?
d. ¿Para qué longitud X del cuadrado recortado será el volumen de la caja el más grande?

ACTIVIDAD 2

A medida que vayan respondiendo las preguntas anteriores, completen la siguiente tabla:

X	Perímetro de la figura resultante	Perímetro del cuadrado recortado	Longitud de R	Perímetro de la pestaña recortada	Área del cuadrado recortado	Área de la figura para construir la caja	Volumen de la caja

ACTIVIDAD 3

Representen en el plano cartesiano las siguientes gráficas:
a. Lado del cuadrado recortado con perímetro del cuadrado recortado.
b. Lado del cuadrado recortado con perímetro de la pestaña.
c. Lado del cuadrado recortado con área de la figura para construir la caja.
d. Lado del cuadrado recortado con volumen de la caja.

TAREA:

1. Intenten encontrar una expresión matemática que represente cada una de las columnas de la tabla de la actividad 2, en términos del cuadrado recortado (columna X).
2. Traer para la próxima clase el recibo del último pago de agua de su casa, esto para realizar una actividad exploratoria en el salón de clase.

Figura 3.b. Situaciones planteadas en la actividad “Juguemos con las Variaciones”.

Para el desarrollo de la actividad, entregamos a los estudiantes tres trozos de papel que medían 20 x 20 cm. para que construyeran cajas recortando cuadrados de igual tamaño en las esquinas, que les permitiera comparar y hacer conjeturas, como se indica en la guía.

Al desarrollar la Actividad 1, cuando contestaban a la pregunta "A medida que al trozo de papel se le recortan cuadrados más grandes, ¿Qué pasa con el perímetro de la figura?", observamos el asombro en algunos estudiantes ya que no podían creer que el perímetro de la figura resultante permanecía constante – este fue un término nuevo para el grupo ya que no estaba dentro de su léxico matemático ni coloquial – Pero Yamid razonó con mucha propiedad y expresó:

> *"No importa lo que le recortemos al cuadrado porque es como si lo volviéramos a pegar"* (Estudiante 8º grado, 6 de octubre de 2006).

Ante este razonamiento le pedimos al joven que aclarara su idea en el tablero para todos, y trazando un dibujo él reiteró:

> *"Lo que se le recorta en cada esquina, se le agrega en donde se realizó el corte con las tijeras"* (Estudiante 8º grado, 6 de octubre de 2006).

La siguiente gráfica ilustra la situación explicada por el estudiante:

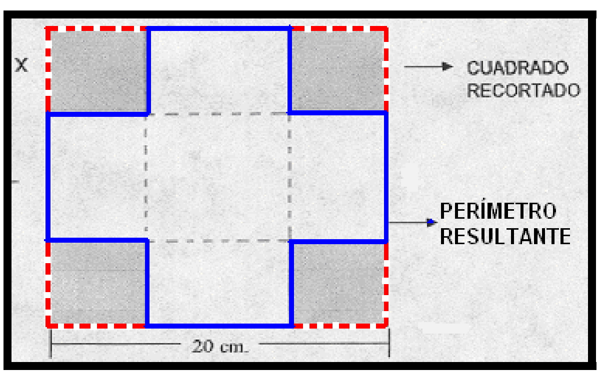


Figura 4. Representación del perímetro resultante.

Otra pregunta que generó discusión fue: si se quiere recubrir la caja de papel, "¿Para cuál caja necesitarán una cantidad igual a la mitad del trozo de papel dado?". Las siguientes Figuras (5 y 6) presentan algunas de las respuestas dadas.

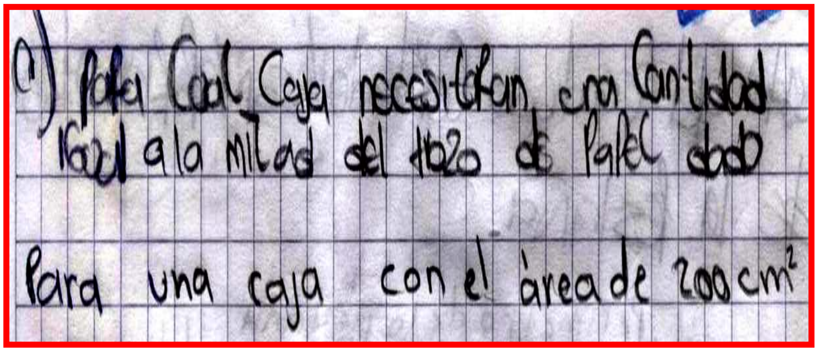


Figura 5. Respuesta dada por el grupo de Kelly.

El grupo de Kelly halló el área total del trozo de papel dado, que era de 400 cm^2. Luego, para ellos la respuesta más lógica fue la mitad que es 200 cm^2. sin detallar el valor del lado del cuadrado recortado "x" que se hacía necesario para la construcción de dicha caja.

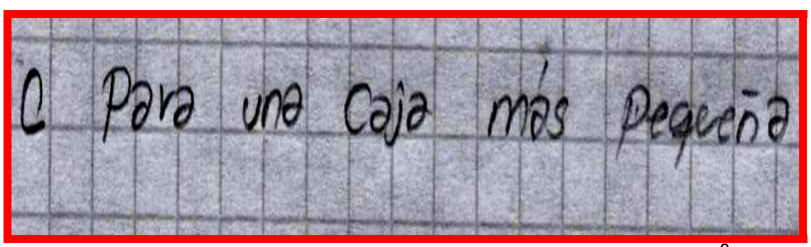


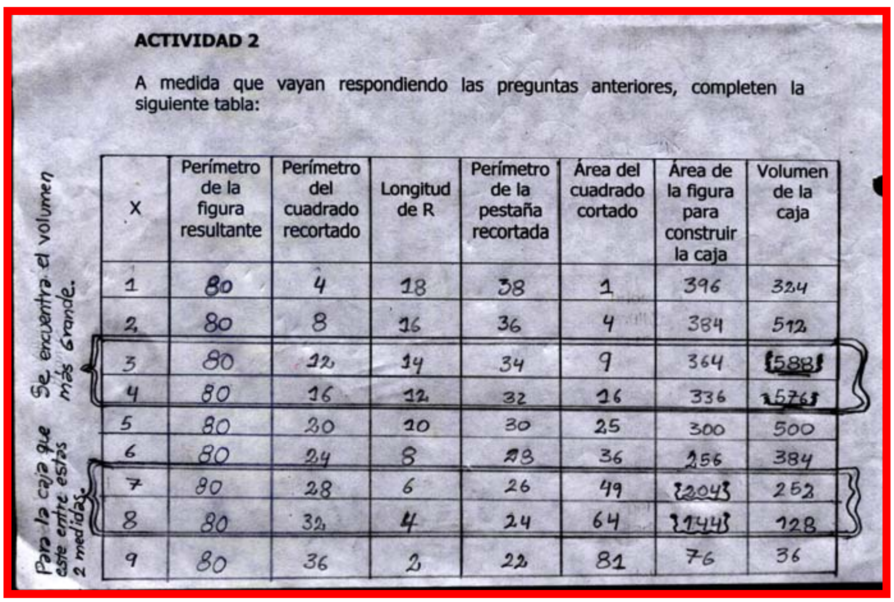
Figura 6. Respuesta dada por el grupo de Eliécer[8].

En el momento de la socialización, notamos que este grupo todavía no hallaba argumentos matemáticos necesarios para dar una respuesta acertada ya que se limitaron a decir que para una caja más pequeña, sin tener claridad en la pregunta planteada. Sin embargo, luego Eliécer tuvo más

[8] El lector recordará que los nombres que aparecen en este capitulo, son ficticios, a excepción de los cuatro protagonistas de la investigación.

claridad al enfrentar la pregunta cuando tomó varios valores de “x” para acercarse al área de la figura resultante que era de 200 cm^2.

Al observar la tabla que realizó Eliécer (ver Figura 7) en donde muestra la aproximación numérica que él realizó para hallar el valor de “x”, para el cual la caja necesita una cantidad igual a la mitad del trozo de papel, logró concluir: *“cuando el lado mide un poco más de 7 el área de la caja que se forma es aproximadamente de 200 cm^2 […] también se ve que el volumen más grande de la caja será entre 3 y 4“* (Diario de campo, 10 de octubre de 2006).



ACTIVIDAD 2

A medida que vayan respondiendo las preguntas anteriores, completen la siguiente tabla:

X	Perímetro de la figura resultante	Perímetro del cuadrado recortado	Longitud de R	Perímetro de la pestaña recortada	Área del cuadrado cortado	Área de la figura para construir la caja	Volumen de la caja
1	80	4	18	38	1	396	324
2	80	8	16	36	4	384	512
3	80	12	14	34	9	364	588
4	80	16	12	32	16	336	576
5	80	20	10	30	25	300	500
6	80	24	8	28	36	256	384
7	80	28	6	26	49	204	252
8	80	32	4	24	64	144	128
9	80	36	2	22	81	76	36

Se encuentra el volumen más Grande.

Para la caja que este entre estas 2 medidas.

Figura 7. Tabla elaborada por Eliécer.

Además, observamos como Eliécer, mediante la aproximación numérica, recurrió a las tablas como herramienta de trabajo al momento de darle solución al punto en mención. Esto corrobora que la organización de la variación, por medio de tablas, puede ser un inicio hacia el pensamiento variacional y al estudio de funciones por parte de los estudiantes (MEN, 1998).

Respecto a la Actividad 3 de la guía, con ella buscábamos que los estudiantes, posteriormente, utilizaran las tablas para llevarlas a la representación gráfica en cada situación planteada. Por otro lado, permitimos que al momento de graficar, los estudiantes escribieran el nombre de los ejes diferentes a “x” y “y” para determinar las variables que intervenían en las diversas situaciones. Con esto se pretendía que los estudiantes contextualizaran más las situaciones propuestas. En este sentido el MEN, (1998, p. 73) expresa:

> “Las tablas se pueden usar para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, aunque quede restringida al primer cuadrante. La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Más adelante se formaliza el sistema cartesiano con el aprendizaje de su sintaxis”.

Al momento de la realización de la actividad, notamos una dificultad incidente en la mayoría de los estudiantes. Ellos no manejaban adecuadamente las escalas numéricas por lo que en el eje “y” representaban los valores tal y como los tenían en la tabla, sin hacer una distribución adecuada de la escala, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

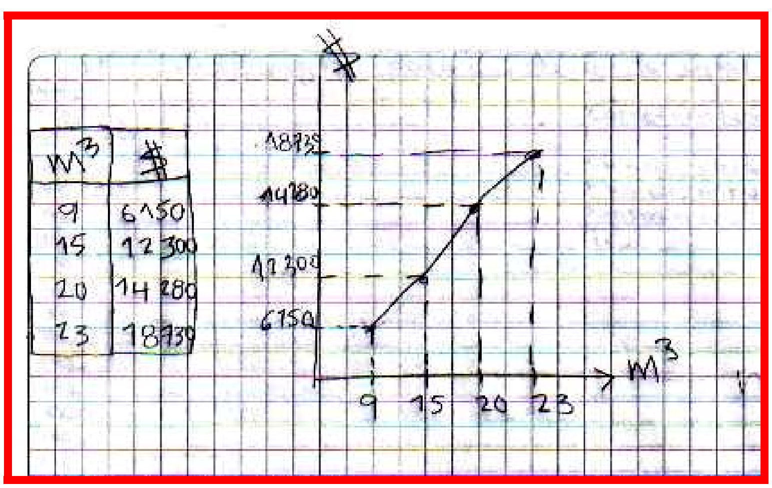


Figura 8. Tabla realizada por Tito.

Por otro lado, vale la pena destacar los aportes hechos por Yamid y Liseth al interpretar los gráficos correspondientes al volumen de la caja:

> *"El volumen será una curva que sube y baja, como una ene"* (Liseth, 10 de octubre de 2006).

> *"El volumen más grande es el punto donde se parte la gráfica"* (Yamid, 10 de octubre de 2006).

Al finalizar la Actividad, se les propuso de tarea hallar una expresión algebraica que representara los datos tabulados. Pero al momento de revisar el trabajo logrado, notamos que muchos hicieron poco trabajo algebraico ya que – según ellos – les parecía complejo. En este sentido Sierpinska (1992) afirma que el carecer de conciencia algebraica hace que la comprensión de función sea difícil ya que esta es una herramienta metodológica necesaria para el estudio de funciones.

Sin embargo, algunos estudiantes lograron realizar el razonamiento matemático necesario para lograr la tarea algebraica. A continuación presentamos algunos de sus aciertos y desaciertos (Figuras 9, 10 y 11):

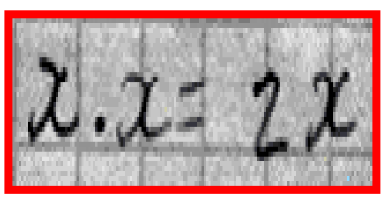


Figura 9. Fórmula que encontró Silvia del área del cuadrado recortado.

Al observar la anterior figura se puede ver que Silvia tenía dificultades al operar expresiones algebraicas ya que simplemente hizo un conteo de "equis".

En la siguiente figura se puede observar que Ana pensaba que para cada valor de la pestaña recortada ("x") debía encontrar una nueva fórmula.

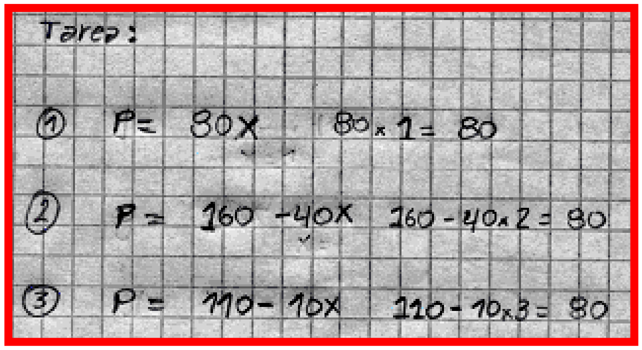


Figura 10. Trabajo algebraico de Ana para el perímetro resultante de la caja.

Finalmente, Susana mostró cómo se hallaba el volumen (Figura 11) pero al momento de hacer la escritura matemática correspondiente, no usó los paréntesis que le permitieran ordenar y distinguir las diferentes longitudes de las dimensiones envueltas en la geometría de la caja. La expresión correcta sería: $v = (20-2x)(20-2x)(x)$.

Figura 11. Expresión algebraica para determinar el volumen de la caja, Susana

Fue así que con esta actividad, además de guiar a los estudiantes en la comprensión de situaciones que implicaran la variación intuitivamente, trabajamos desde un contexto significativo las diferentes formas de representar una función (verbalmente, tablas, gráficas y fórmulas) dependiendo de la situación que la origina. Por ejemplo, la función lineal resultó de analizar el perímetro; la cuadrática, el área; y, la cúbica al analizar el volumen. A continuación se muestran las gráficas realizadas por Jazmary en las Figuras 12, 13 y 14:

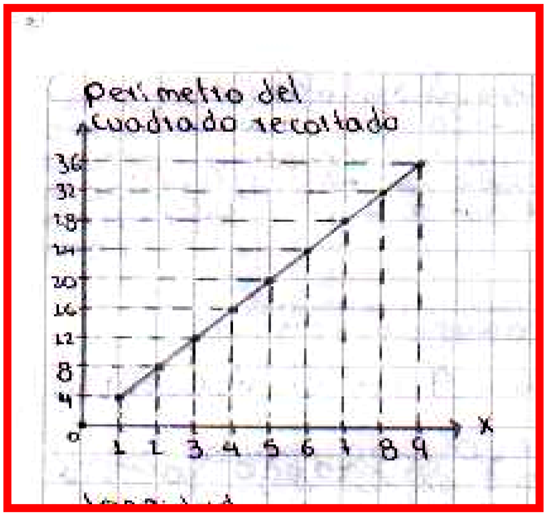


Figura 12. Gráfica de la longitud del lado recortado “x” contra el perímetro del cuadrado recortado.

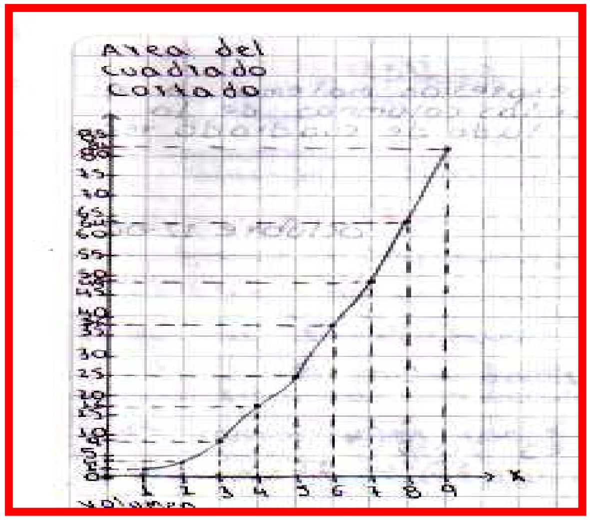


Figura 13. Gráfica longitud del lado recortado “x” contra el área del cuadrado recortado.

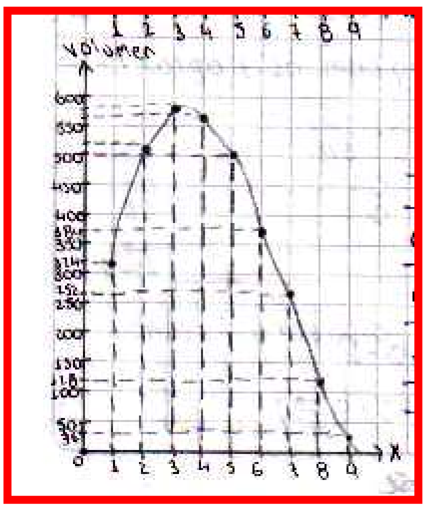


Figura 14. Gráfica de la longitud del lado recortado “x” contra el volumen de la caja.

Al igual que Jazmary, la mayoría de los estudiantes se basaron en los datos recogidos en la tabla para el trazo de las gráficas, lo que les permitió una diferenciación y análisis entre estos tres tipos de curvas asociándolos a un problema práctico. Una situación que se evidenció en la mayoría de los estudiantes fue que, al tomar los datos, acostumbraban a hacerlo siempre con números enteros positivos sin tener en cuenta valores decimales entre cero y uno, como se muestra en las gráficas.

En esta actividad “juguemos con las variaciones”, el trabajo realizado por los estudiantes reflejó, en algunos de ellos, además de lo ya descrito dificultades para graficar en el plano cartesiano y para usar una variable que permitiera deducir un perímetro o un área, a pesar de que recordaban bien dichos conceptos. Consideramos aquí que esto se debe a que los estudiantes ven las variables “letras” como cosas estáticas. Esta confusión puede darse, en general de la separación entre lo que los estudiantes ven en símbolos y el significado que ellos le asignan.

Finalmente, para esta actividad les planteamos a los estudiantes elaborar un MC de lo que habían comprendido sobre la variación según la actividad trabajada. Luego de analizar lo que ellos plasmaron en sus mapas, encontramos que algunos aún no tenían muy claros los conceptos. A continuación, presentamos algunos de ellos:

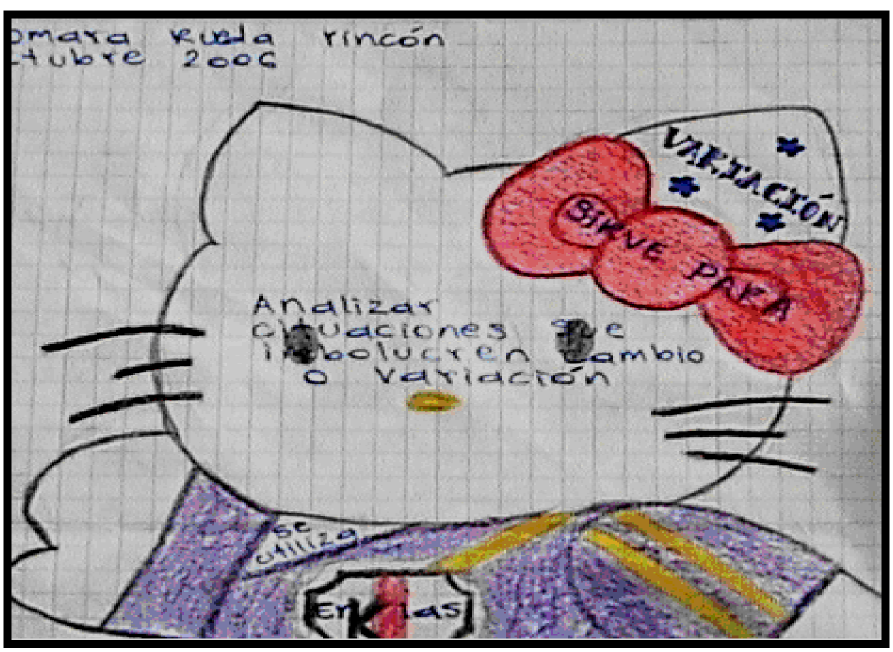


Figura 15. Primera versión del MC sobre variación, elaborado por Lizeth.

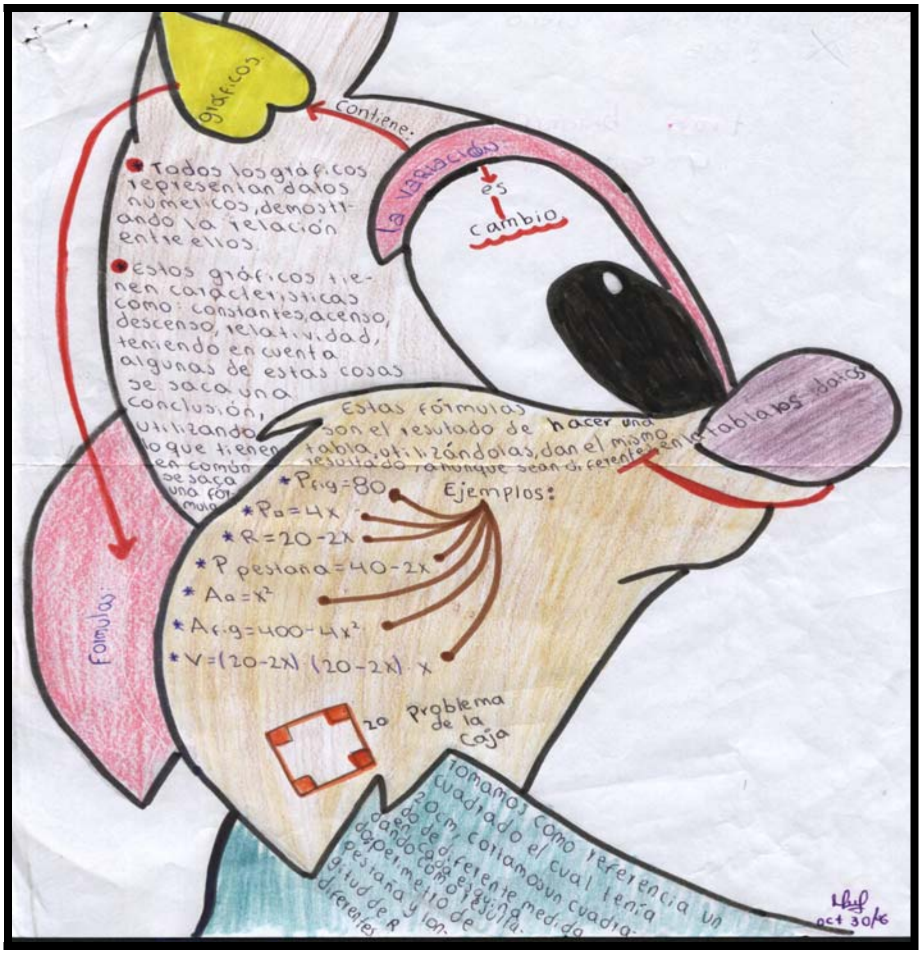


Figura 16. MC sobre variación, elaborado por Jazmary.

Fue en ese momento que apreciamos una de las bondades de los MC pues a través de ellos estábamos verificando lo que habían comprendido los estudiantes hasta el momento sobre el tema y que dificultades mostraban. La mayoría de los estudiantes logró asociar la variación con sus formas de representación. Gráficos, formulas, tablas y verbalmente mientras que en otros estudiantes se observo que les fue difícil construir su MC a partir de lo comprendido y con sus propias palabras y no sobre un concepto dictado por el profesor.

Continuamos implementando situaciones problema que les permitiera a los estudiantes la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales. Pero fundamentalmente, permitirles que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y, por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan Posada et al (2005).

La actividad que nos permitió seguir con nuestro objeto matemático de enseñanza fue la Actividad IV, **“Analicemos los Servicios Públicos”** (ver Figura 17) realizada el 11 y 12 de octubre de 2006, planteada precisamente por Posada et al (2005). Con esta esperábamos que los estudiantes se centraran más en la interpretación de las variaciones o cambios, tomando datos de situaciones reales propias de su contexto con el fin de que trataran de expresarlas por medio de tablas, gráficos y expresiones matemáticas.

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD
Estudiantes: ______________________________
____
Grado: __________ Fecha: ______________

ANALICEMOS LOS SERVICIOS PÚBLICOS

OBJETIVO: Analizar situaciones que involucren cambio o variación.

PARA TENER EN CUENTA:
En grupos de cinco estudiantes y con sus recibos del agua, seguir las instrucciones dadas y desarrollar en forma clara, en el cuaderno, la siguiente actividad que al final de clase, será socializada:

1. Tomen sus recibos del agua y comparándolos, respondan:

a) ¿Cuánto le tocó pagar a quien más agua gastó?
b) ¿Quién gastó menos agua? ¿Cuánto pagó?
c) Supongamos que hubo un hogar que no gastó agua, ¿cuánto le tocaría pagar?
d) ¿Cuál es el consumo promedio en metros cúbicos de agua en el grupo?
e) ¿Cuál es el costo promedio del consumo de agua en el grupo?

2. Completar la siguiente tabla:

Consumo en metros cúbicos					
Costo en pesos					

3. Construyan una gráfica en el plano cartesiano donde se muestre la relación entre el consumo de agua en metros cúbicos de sus hogares y el costo de dicho servicio.

4. Analizando un poco más los datos y la gráfica construida:

a) ¿Cuál sería una forma de calcular el costo para cualquier número de metros cúbicos consumidos?
b) ¿En cuánto se incrementa el costo de la factura por cada metro cúbico adicional de consumo?
c) Intenten encontrar una expresión matemática que represente los cambios vistos en la tabla del punto 2.

Figura 17. Actividad "Analicemos los Servicios Públicos".

Como material de trabajo los estudiantes debían traer un recibo de agua para comparar el nivel de agua (m^3) consumido en sus hogares con la cantidad que les correspondía pagar por el servicio prestado.

Además, para realizar esta comparación era necesario explicarles a los estudiantes cómo se debía hacer la lectura de un recibo. Es decir, encontrar la cantidad de agua consumida en términos de m^3, el valor de cada m^3, el valor a cancelar por el servicio, el subsidio que generalmente se realiza para los estratos 1 y 2; y, finalmente, saber descontar los intereses por mora y atrasos.

Al desarrollar la actividad, los estudiantes se fueron envolviendo en ella ya que querían saber por qué en sus hogares se pagaba tanto por este servicio. Fue así como empezaron a distinguir claramente la relación entre las magnitudes que intervenían en la situación que queríamos estudiar.

> *"Pero si uno gasta más agua, le toca pagar más"* (Sofía, estudiante 8º grado, 11 de octubre de 2006).

Sofía, sin darse cuenta de su razonamiento variacional, estaba expresando verbalmente la variación que había entre dos magnitudes directamente proporcionales. Esto corrobora lo afirmado por Camargo y Guzmán (2005) cuando afirman que una buena forma de acercarse al concepto de función es a través de actividades en donde el estudiante tenga la posibilidad de analizar qué magnitud cambia con respecto a otra y cómo varía.

En la siguiente sesión, 13 de octubre de 2006, tuvimos la oportunidad de interactuar con cada grupo de trabajo y notamos que la dificultad de expresar algebraicamente la situación continuaba. Esto nos llevó a concluir que a pesar de tener ideas intuitivas de variación, se presentan, en los estudiantes dificultades para conectar el pensamiento variacional con la parte algebraica, ya que son dos procesos distintos.

Aunque algunos estudiantes, al comparar entre ellos los recibos, se dieron cuenta que por cada m^3 de agua gastado de más, el costo del pago aumentaba exactamente el valor de cada m^3 consumido. Fue así como para algunos fue sencillo saber que ese cambio y otras condiciones debían estar expresadas en la fórmula. Veamos lo expresado por el siguiente estudiante al respecto:

> *"Todavía le falta algo a esas fórmulas, ¿no ven que a todos le hacen descuento por ser de estrato 2? Además hace falta tener en cuenta el cargo fijo"* (Miguel, estudiante de 8º grado, 13 de octubre de 2006).

Entre las cosas que no permitieron hallar la misma expresión algebraica, está el suceso de que no todos llevaron el recibo del mismo mes, ni todas las facturas provenían del mismo estrato, por tanto, habían facturas que no tenían el mismo cargo fijo, ni el mismo subsidio otorgado por el gobierno, según Miguel, razón por la cual no todos coincidían con la expresión matemática que hallaban, causando esto polémica entre ellos. A continuación presentamos los trabajos algebraicos hechos por dos estudiantes en las siguientes figuras (18 y 19):

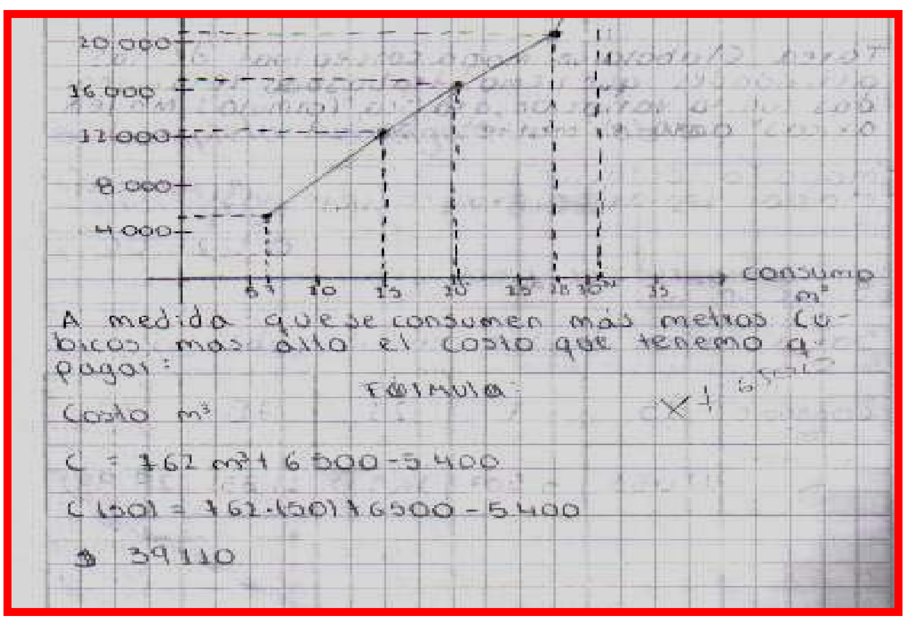


Figura 18. Solución planteada por Jazmary.

En la Figura podemos observar que Jazmary tuvo en cuenta para la elaboración de su modelo matemático los tres factores que inciden y modifican el valor del costo del servicio de agua: valor en pesos por cada metro cúbico consumido (762), el cargo básico del servicio ($6.500) y el subsidio ($5.400).

Satisfactoriamente, Jazmary logró, así, relacionar los tres factores a través de las operaciones básicas de la Aritmética para expresar que al momento de cancelar la factura se cobra cada metro cúbico consumido que vale 762 pesos, además de que hay que tener en cuenta el cargo fijo del servicio que se debe cancelar a la empresa. Pero, por las condiciones socio-económicas en las que está inmersa cada familia, tienen un descuento que es el subsidio que da la empresa del Acueducto Metropolitano de Bucaramanga.

Finalmente, después de su elaboración matemática, Jazmary comprobó su expresión algebraica para el caso en el que su familia había consumido 50 m^3 de agua.

Ahora veamos el trabajo de Susana en la siguiente figura, ella muestra su solución algebraica, acompañada de la representación verbal de la misma.

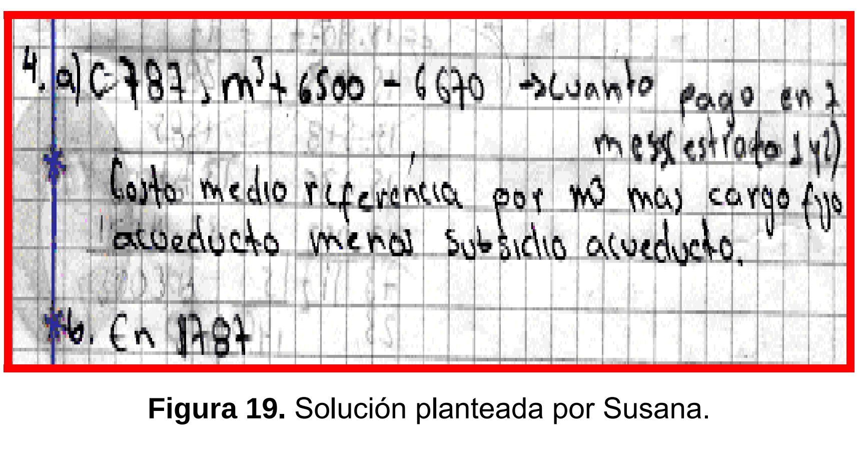


Figura 19. Solución planteada por Susana.

En esta actividad, como el lector puede ver, surgieron varias respuestas, respuestas que obligaron a los estudiantes a analizar qué estaba pasando o por qué los datos que tenían se comportaban de esa manera, permitiendo comparaciones y reflexiones entre ellos, ya que se trataba de un problema que representaba una situación real, no tan idealizada, en este sentido (Sierpinska, 1992, p. 34) expresa:

> "La presentación de las situaciones reales no necesariamente deben ser idealizadas, hasta el punto de volver la construcción del modelo en un simple ejercicio forzado con una respuesta única. La elección del modelo debería ser un asunto que se discute en la clase".

La actividad V que denominamos "**Pentágonos en Fila"** y que se muestra en la siguiente página (ver Figura 20), surgió del artículo de Babski (1996), *Álgebra es genial: reflexiones sobre una pedagogía innovadora en una región urbana*[9]. Esta actividad les permitiría a los estudiantes abordar la variación desde un contexto geométrico, con ella quisimos dar libertad a los estudiantes en la forma de abordar el problema. Esta actividad se desarrolló los días 24, 26 y 27 de octubre de 2006.

[9] Título original en inglés: *Algebra is cool: reflections on a changing pedagogy in an urban setting*.

Universidad Industrial de Santander

UIS

CONSTRUIMOS FUTURO

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD

Estudiantes: ____

____

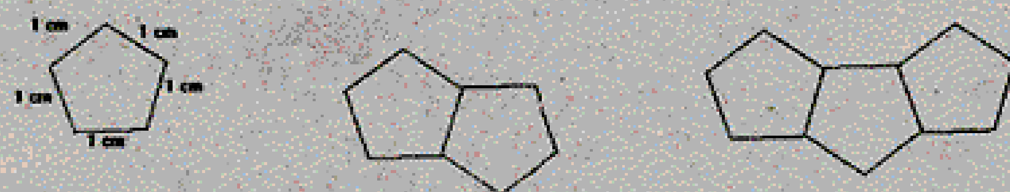
Grado: ____________ Fecha: ____________________

OBJETIVO: Interpretar situaciones que posibiliten la comprensión del concepto de función.

PENTÁGONOS EN FILA

PARA TENER EN CUENTA:

Formar grupos de tres estudiantes y siguiendo las instrucciones dadas, desarrollar de forma clara, en el cuaderno, la siguiente actividad:

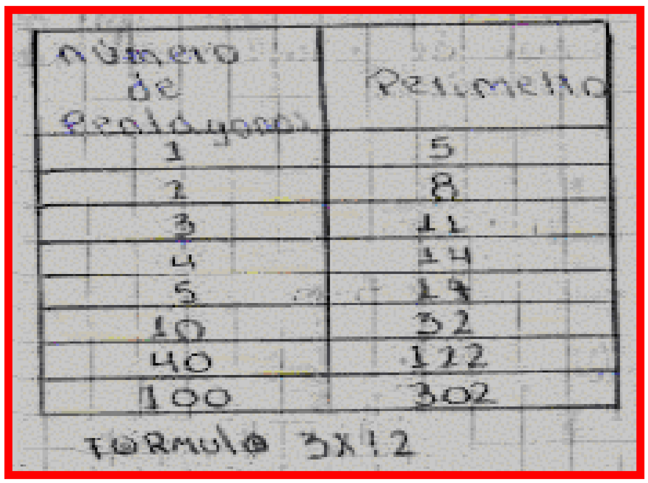


1. Encuentren el perímetro de cada uno de los pentágonos presentados en fila.
2. ¿Cuál sería el perímetro de los pentágonos en fila si fueran 4, 5, 10, 40, 100?
3. ¿Qué estrategia emplearon para hallar el perímetro de los pentágonos en fila cuando fueron 10, 40, 100?
4. ¿Cuáles son las dos magnitudes relacionadas en el problema propuesto? Expliquen cómo se relacionan.

Figura 20. Actividad "Pentágonos en Fila".

Para el desarrollo de esta Actividad, los estudiantes debieron observar las regularidades que sufría el perímetro a medida que aumentaba el número de pentágonos y a partir de ellas, diseñar estrategias que les permitieran encontrar el perímetro para cualquier cantidad de pentágonos agregados.

Los estudiantes intentaron abordar la situación utilizando diferentes estrategias. Por ejemplo, la mayoría de estudiantes recurrió a la tabulación de los datos que obtenían de la situación de manera correcta e hicieron una adecuación a los datos para hallar una expresión matemática que representará la situación, como se ilustra en la siguiente figura:



número de pentágonos	Perímetro
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17
10	32
40	122
100	302

FORMULA 3X+2

Figura 21. Solución planteada por la mayoría de los estudiantes.

Mientras el grupo trabajaba con tabulaciones, Yamid se exigió realizar un trabajo diferente al de sus compañeros pues manifestó que no se había conformado con la fórmula hallada por la mayoría y que, por lo tanto, él se había dado a la tarea de encontrar una de su autoría, como se puede observar en la figura22.

Respecto a este referente Mason y otros autores (1999), citador por Posada, et al (2005, p. 53), mencionan que: “prestar atención a las generalizaciones de otras personas es con frecuencia mucho menos interesante. Hacer nuestra propia álgebra es motivante porque es nuestra propia producción”.

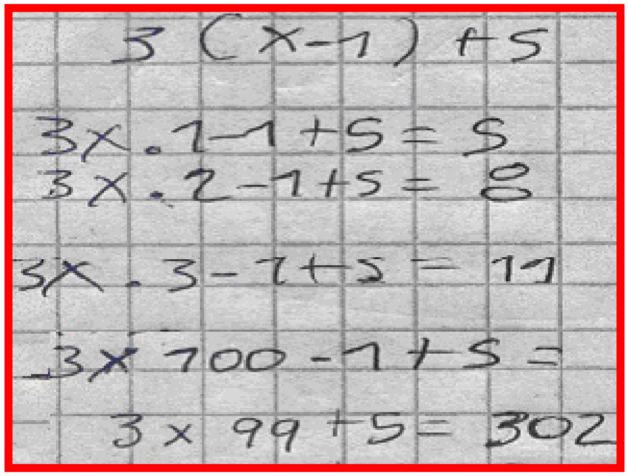


Figura 22. Proceso realizado por Yamid para hallar una expresión algebraica equivalente a 3x+2.

No obstante, aunque la expresión algebraica que construyó Yamid era correcta ya que es equivalente a 3x + 2, notamos poca claridad en la escritura de su expresión al momento de reemplazar valores, mostrando un escaso uso de los signos de agrupación.

Por otro lado, algunos estudiantes se sintieron confundidos porque no obtuvieron la fórmula que la mayoría había encontrado (3x + 2). Veamos el trabajo de Kevin en la siguiente figura:

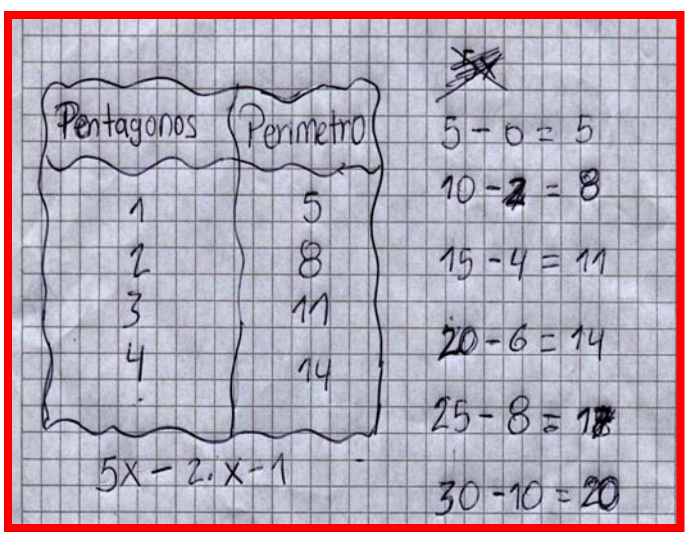


Figura 23. Análisis de Kevin al buscar la expresión matemática.

Aunque la fórmula hallada por Kevin "5x – 2.x – 1" a primera vista era errónea ante la situación planteada ya que es equivalente a (3x–1) y no a (3x+2); sin embargo al darnos su argumentación notamos que no había utilizado una adecuada escritura, puesto que le faltaron unos paréntesis para haber dado mas claridad a su expresión hallada. Es decir, su expresión –escrita correctamente– era 5x – 2(x – 1). Veamos su argumentación:

> *"5x porque cada pentágono agrega 5 lados al perímetro total y 2(x – 1) porque cada pentágono pegado va poniendo un lado en la mitad que no se cuenta y cada unión anula 2 lados por eso el 2"* (Kevin, estudiante de 8º grado, 26 de octubre de 2006).

En esta descripción del proceso hecha por Kevin creemos que hubo un avance significativo hacia el álgebra, ya que él logró entender el proceso de variación que estaba ocurriendo, darle significado y de esta forma generalizarlo a través de una expresión algebraica.

Por su parte, Eliécer abordó la solución al problema haciendo un proceso numérico. Esto fue lo que nos explicó:

> *"Al conocer el perímetro para cierto número de pentágonos puestos, y si quiero averiguarlo para cualquier número mayor, y como en la tabla observé que cada nuevo pentágono aumenta en tres lados el perímetro, entonces miraba cuantos pentágonos más agregaba para llegar al número que quería averiguar y multiplicaba esa cantidad por tres y le sumaba el ya conocido".*

Aunque Eliécer no logró hallar una expresión algebraica realizó un proceso mental válido ya que es importante prestar especial atención al hecho que después de calcular el perímetro para 40 pentágonos, lo hizo para 100 utilizando su manera recursiva, (ver en la siguiente página).

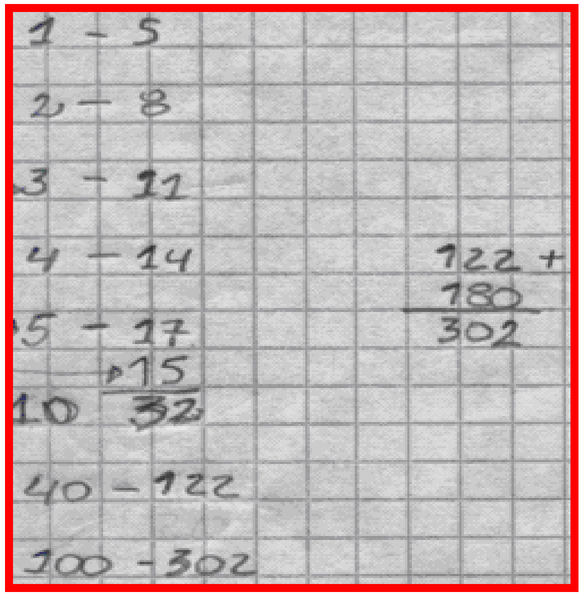


Figura 24. Solución planteada por Eliécer

Finalmente, algunos estudiantes expusieron sobre las diferentes estrategias aplicadas para resolver el problema. Esto fue muy significativo para los estudiantes ya que se ilustraron diversos análisis del mismo problema desde diferentes perspectivas.

Por otro lado, ante la dificultad observada en varios de los estudiantes del grupo para escribir correcta y coherentemente las expresiones algebraicas, nos vimos en la necesidad de realizar una breve sesión acerca del correcto uso de los signos de agrupación para, además, resaltar la importancia de la claridad en la escritura matemática.

Sin embargo, aparte del razonamiento que Kevin hizo de su expresión algebraica, nadie logró dar una justificación precisa para explicar de dónde salía la expresión (3x + 2) que habían adaptado a los datos. Por ejemplo, José Luís dijo: "Va aumentando de tres en tres y se le suma dos". Es decir, expresó verbalmente la fórmula que había planteado como solución al problema, mas no hizo un razonamiento o descripción del proceso de variación que en ella había implícita.

Entre los comentarios que originó la intervención de José Luís, nos llamó la atención este: "¡Pero si la fórmula se cumple profesores!". Con ello, notamos que los estudiantes creían que ahí terminaba el problema. Dadas estas circunstancias, les dimos espacio para que discutieran en sus respectivos grupos sobre el asunto.

De esta forma, varios lograron encontrar una explicación acertada y fue José Luís el encargado de exponerla a todos sus compañeros:

> *"Cada pentágono va aumentando en tres lados el perímetro y se le deben sumar los dos lados que siempre quedan en las esquinas"* (José Luís, estudiante 8º grado, 27 de octubre de 2006).

Posteriormente, discutimos con los estudiantes la noción de función, teniendo en cuenta las ideas intuitivas que hasta el momento ellos habían logrado adquirir por medio de las actividades enfatizando en la variación y los diferentes sistemas de representación que ya se habían trabajado: tabulación, graficación, verbalización y formalización algebraica.

En la discusión nos pareció conveniente abordar la noción de función como una transformación ya que, como bien lo afirma Sierpinska (1992, p. 34), "las funciones pueden aparecer como modelos de ciertas relaciones que ellos observan. Pero ellas también pueden aparecer como herramientas para representar un sistema en otro sistema (deberíamos hablar más bien de transformaciones)".

Además, mencionamos cómo se relacionaban las variables, cuál era la variable dependiente e independiente; al retomar la Actividad III, "Juguemos con las Variaciones", surgieron los conceptos de dominio y recorrido. Esta oportunidad resultó de la necesidad de los estudiantes de observar los posibles valores que podía tomar la longitud del lado "x" y con este cuadrado recortado poder construir una caja, de esta manera los estudiantes notaron que habían valores que no podían tomarse para la construcción de la caja teniendo en cuenta el tamaño del trozo de papel inicialmente dado. En este sentido adoptamos lo propuesto por Stewart (2002, p. 13).

> "Resulta útil concebir una función como una máquina. Si "x" está en el dominio de la función *f*, entonces "x" entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida *f(x)* de acuerdo con la regla de la función. De este modo, podemos concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el recorrido como el conjunto de todas las salidas posibles".

Consideramos que el hecho de hacer la analogía de función como una máquina, ayuda a que los estudiantes relacionen función con procesos de cambio. Pero también observamos que los estudiantes tienden a concebir la función como solamente la máquina olvidando aspectos importantes como dominio y recorrido.

Después de esta socialización, consideramos prudente pedirles a los estudiantes que realizaran un MC para que a través de este evidenciábamos – docentes y estudiantes – lo comprendido hasta el momento. Otra de sus finalidades era ponerlo en discusión para realizar, posteriormente, un MC grupal. A continuación mostramos, algunas de sus producciones (figuras 25 y 26):

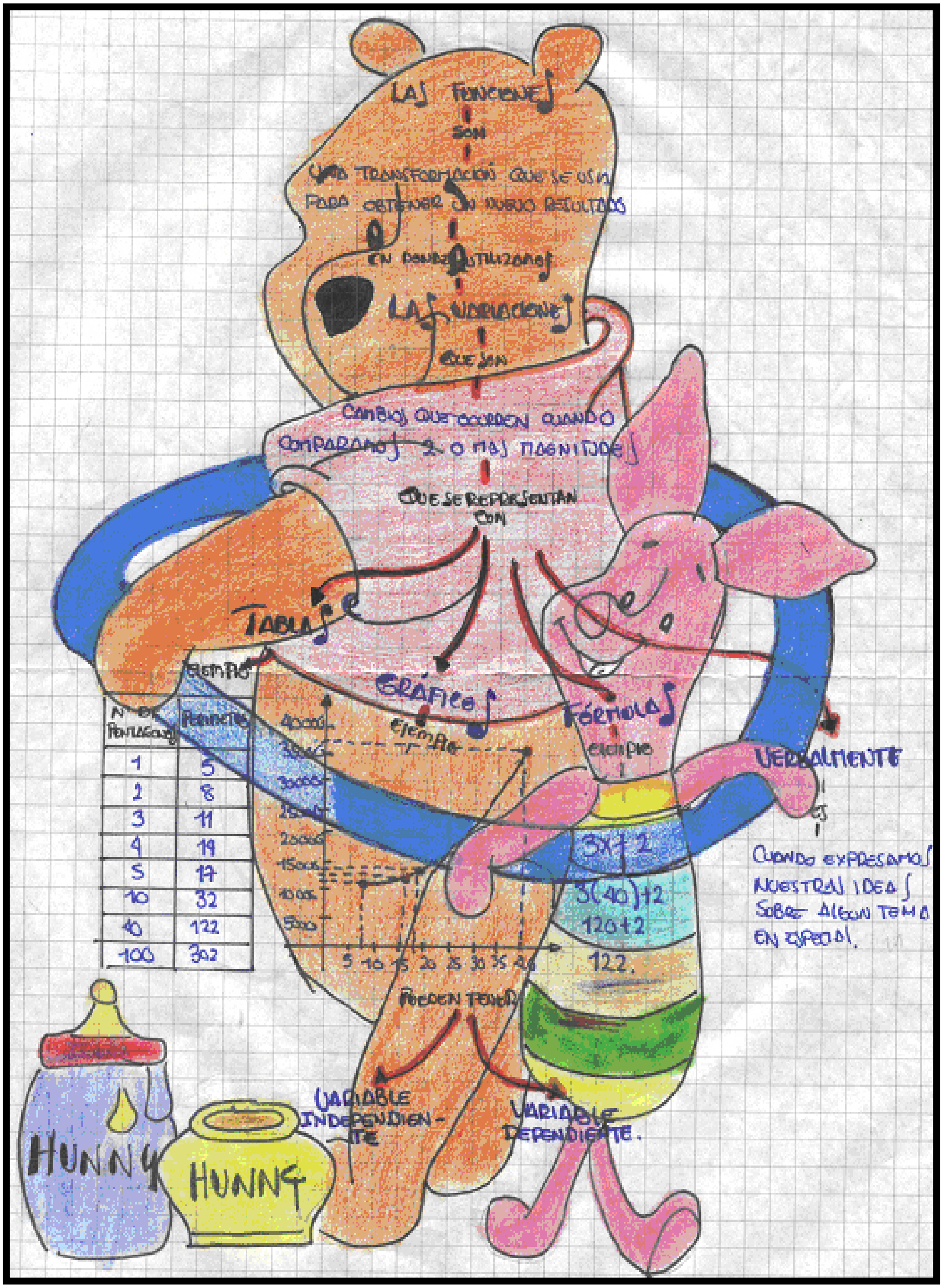


Figura 25. MC individual elaborado por Kelly.

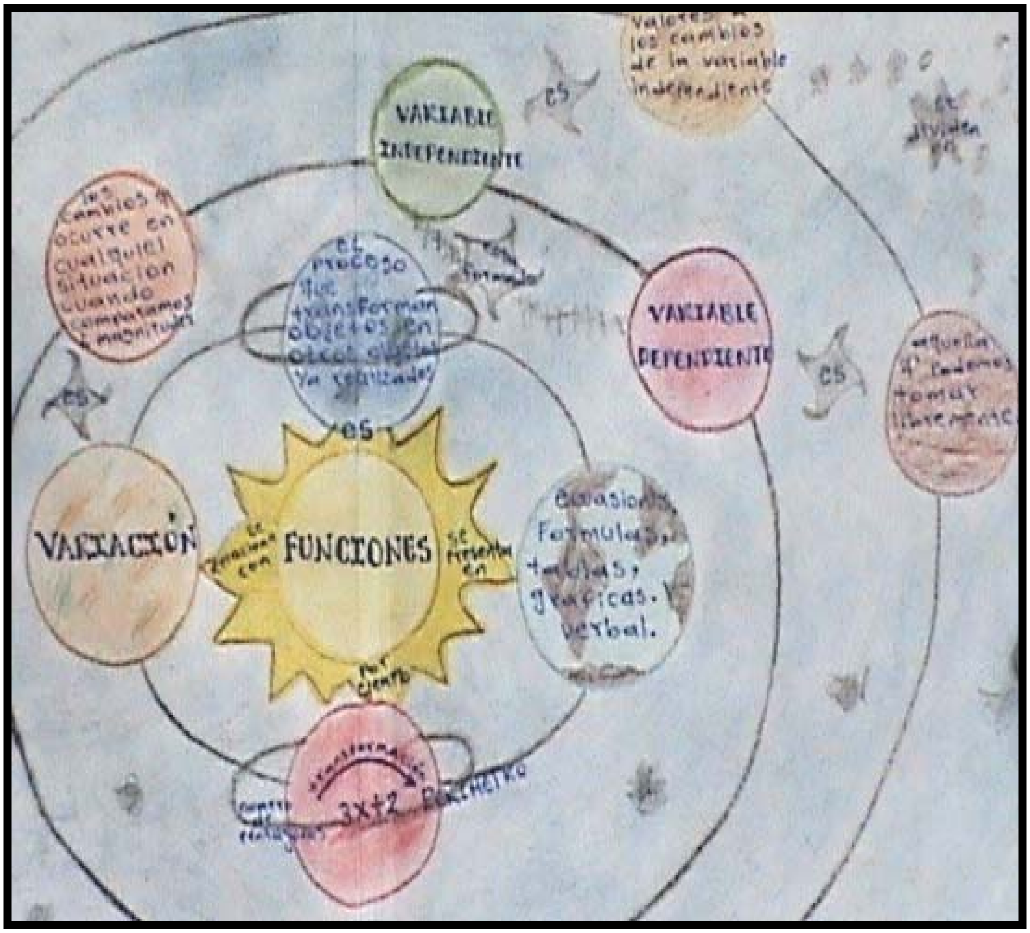


Figura 26. MC individual elaborado por Lizeth

Finalmente, se obtuvieron ocho mapas conceptuales grupales de los cuales se destacó el de Lizeth, como se ilustra en la figura 27 (en el capítulo III se analizará su contenido). Con su socialización, esperábamos fortalecer lo visto ya que, como afirma Ontoria (1997), al exponerlo ante sus compañeros se abría el espacio para negociar significados entre ellos.

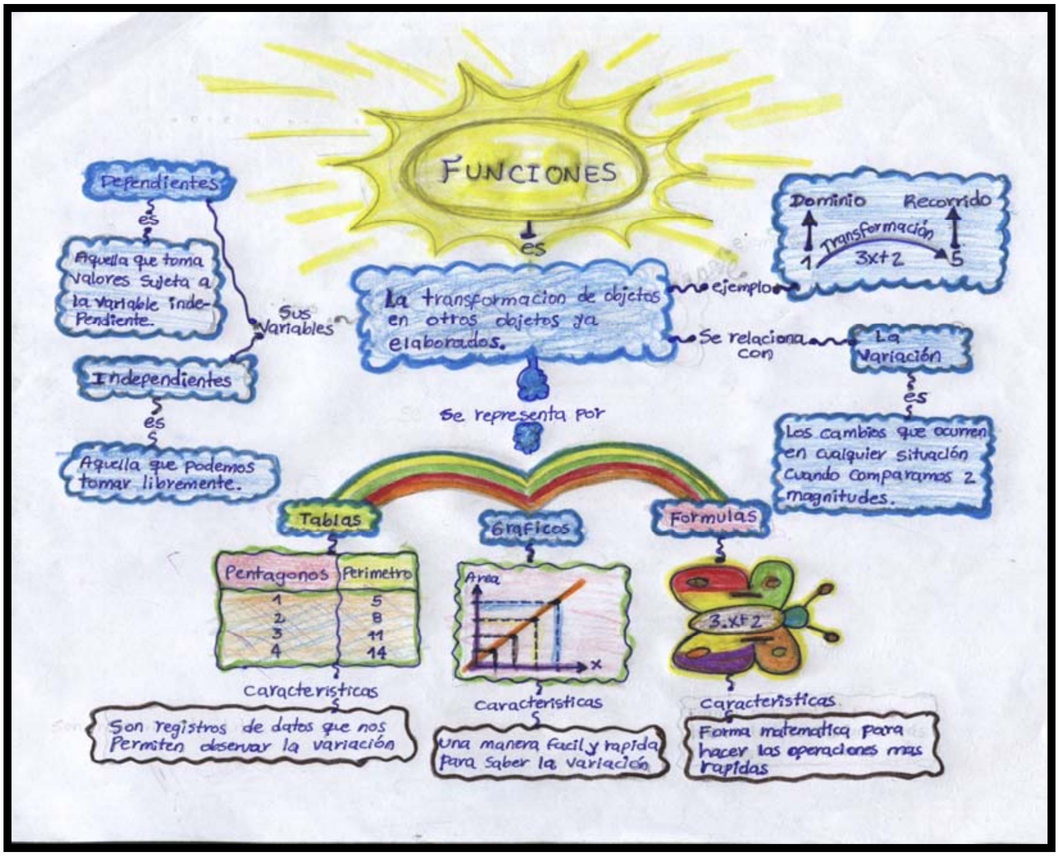


Figura 27. Mapa grupal elaborado por Lizeth, Jennifer y Eliécer.

Para explorar más a fondo el análisis e interpretación de gráficos, nos pareció una buena alternativa implementar una de las actividades contenidas en la propuesta didáctica de Camargo & Guzmán (2005). Fue así como nos animamos a adecuar la Actividad VI que llamamos **"Interpretando los Conciertos de Shakira**" (ver Figuras 28.a y 28.b); en donde los estudiantes debían establecer relaciones entre la parte verbal y la representación gráfica de una situación, analizando los cambios bruscos en los decibeles de sonido en intervalos de tiempo, en un concierto de Shakira.

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD

Estudiantes: ____

____

Grado: ____________ Fecha: ____________________

OBJETIVO: Analizar e interpretar situaciones gráficas como representación de una función.

INTERPRETANDO LOS CONCIERTOS DE SHAKIRA

PARA TENER EN CUENTA:

Formar grupos de tres estudiantes y siguiendo las instrucciones dadas, desarrollar de forma clara, en el cuaderno, la siguiente actividad:

Debido a una infección en los oídos, Mariana tiene dificultades auditivas. Su médico (otorrino) le advirtió que, para evitar daños mayores en su tímpano, ella debe evitar exponerse a cambios bruscos en los niveles del sonido que escucha. Por eso siempre lleva consigo unos tapones y debe ponérselos cuando crea que el cambio va a ser superior o igual a 40 decibeles (nivel del sonido), por cada 30 segundos.

Para ir a un concierto de Shakira, Mariana investigó los niveles de intensidad de sonido de algunas canciones. Encontró informes gráficos como el siguiente:

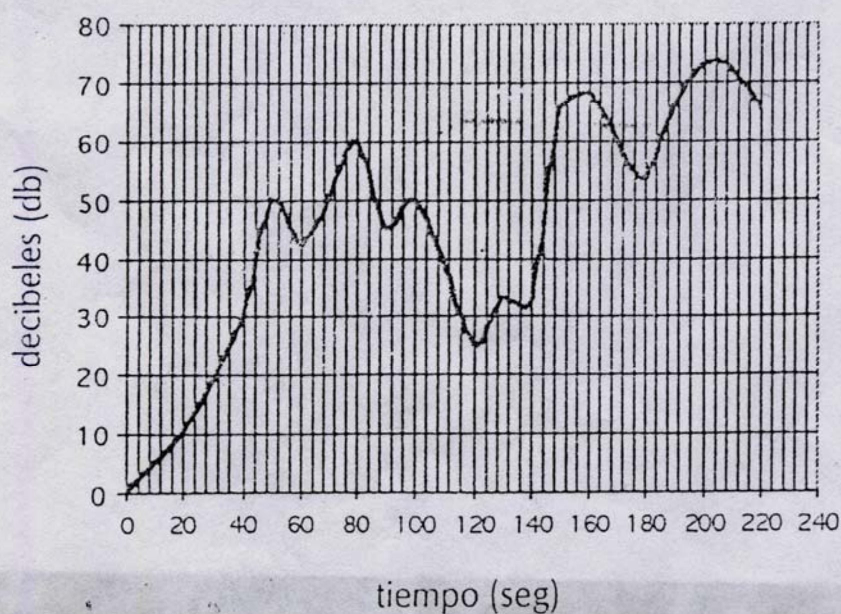


Figura 28.a Problema planteado en la Actividad

"Interpretando los conciertos de Shakira"

> Al estudiar la gráfica, su amigo Pedro concluye que no hay ningún problema con la canción, pues nunca el cambio superará los 40 decibeles. Decidan con su grupo si Pedro tiene la razón o no, y diseñen una estrategia para convencer a los demás grupos de su afirmación.

Figura 28.b Cuestionamiento planteado a los estudiantes para la actividad "Interpretando los conciertos de Shakira"

Además, buscábamos que los estudiantes, por medio de la lectura de gráficas, reconocieran que la variación no siempre es constante y que esto se puede observar gráficamente a través de curvas no lineales.

El ingrediente fundamental para esta Actividad fue la comprensión de lectura. En primera instancia, los estudiantes debían estar atentos para poder entender el enunciado que se planteaba y, si era necesario releerlo hasta comprender qué era lo que se debía analizar.

Pero al empezar la tarea de lectura, observamos que la mayoría de los estudiantes tenía dificultades en la comprensión de la misma y, por lo tanto, optaban por la opción más inmediata: "Pedro estaba mintiendo".

Esta proposición surgió porque en la gráfica anexa en la actividad, se observaba que los decibeles superaban los 40, o como ellos le llamaban "el valor 40". Con ello, los estudiantes evidenciaron que sólo identificaban una de las dos variables involucradas en la situación, los decibeles, ignorando el tiempo.

Por tal razón, los estudiantes se fijaron únicamente en los valores vistos, sin tener en cuenta la contextualización del enunciado. Esto nos llevó a intervenir en el trabajo que estaban realizando los estudiantes para inducirlos en la conexión que debían tener en cuenta para los objetos matemáticos que estaban construyendo en la situación planteada, a partir de la cual surgía tal construcción.

A continuación presentamos algunas de las soluciones que dieron nuestros estudiantes de la Actividad realizada el 31 de octubre y 1 de noviembre de 2006 (Figuras 29, 30 y 31):

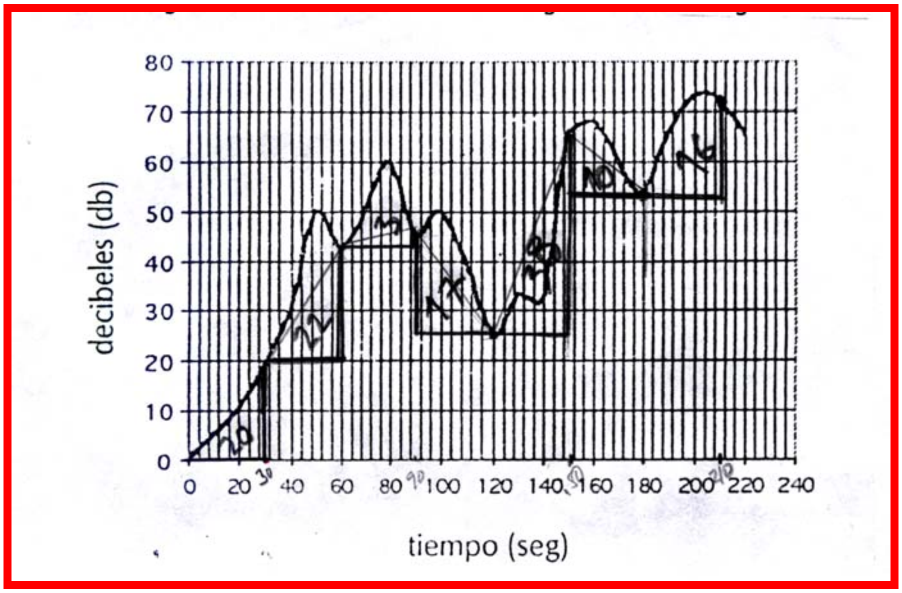


Figura 29. Solución planteada por el grupo de Brayan.

En este análisis gráfico, el grupo de Brayan formó triángulos rectángulos para cada intervalo de 30 segundos, esto para identificar la distancia que había entre el valor inicial y el final, haciendo la diferencia respecto a los cambios entre las magnitudes como lo anotaron en cada triángulo (ver figura anterior). Este análisis fue un poco más completo, salvo que únicamente tuvieron en cuenta los valores extremos de cada intervalo para hacer el análisis, sin tener en cuenta los cambios más bruscos que a veces ocurrían para valores no extremos de los intervalos. La construcción de triángulos rectángulos según lo manifestó el grupo de Brayan fue una forma gráfica de ayudarse, y el cambio en decibeles por cada intervalo lo daba la altura del triángulo.

> *“así que el intervalo donde se vio un cambio más grande fue en 120 a 150 segundos, pero solo fue 38 decibeles […] cuando los triángulos son más altos menos oportunidad tiene de ir al concierto, mientras que los triángulos son más pequeños hay más oportunidad”* (Brayan, estudiante 8º grado, 01 de noviembre de 2006).

El siguiente grupo, el de Miguel, realizó una tabla para intentar darle solución al problema. De cierto modo era similar a la solución planteada por el grupo de Brayan pero en sus razonamientos lograron percatarse que los cambios no eran constantes como había sucedido en casos anteriores.
Consecuentemente, la tabulación que realizaron (ver Figura 30) los condujo a interesarse en el “paso” de un sistema de representación a otro al intentar encontrar una fórmula que representara esta situación. Intento que según ellos no lograron alcanzar porque la variación no era constante:

> *“Pero si de 23 pasa a 4 y luego a 21, eso es todo raro y no lleva un orden, eso de mirar cuánto cambia no sirvió para hallar la fórmula”* (Miguel, estudiante 8º grado, 01 de noviembre de 2006).

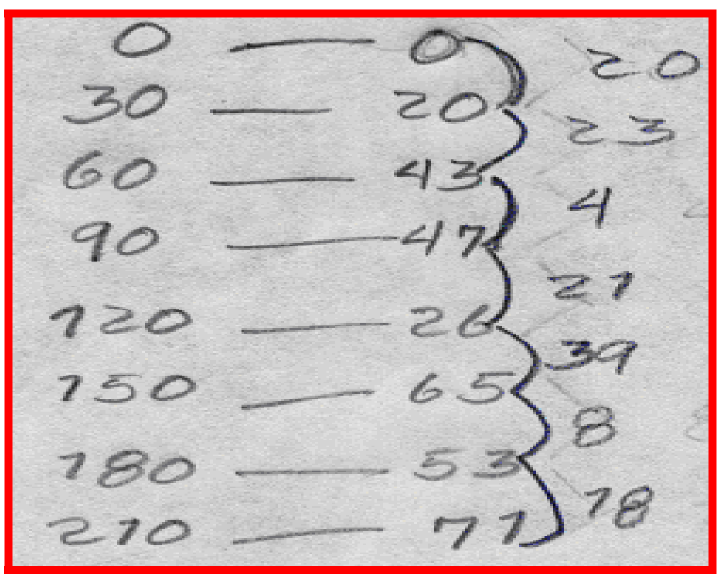


Figura 30. Solución dada por el grupo de Miguel.

Otro grupo, el de Sofía, tuvo en cuenta la distribución de los intervalos de 30 segundos, pero en cada uno de ellos analizó las alturas desde cero decibeles como se muestra en la siguiente figura, lo que erróneamente la llevó a concluir que Mariana no podía ir al concierto. “con x marque donde Mariana no puede ir y con √ donde si puede ir” (Sofía, estudiante 8º grado, 01 de noviembre de 2006).

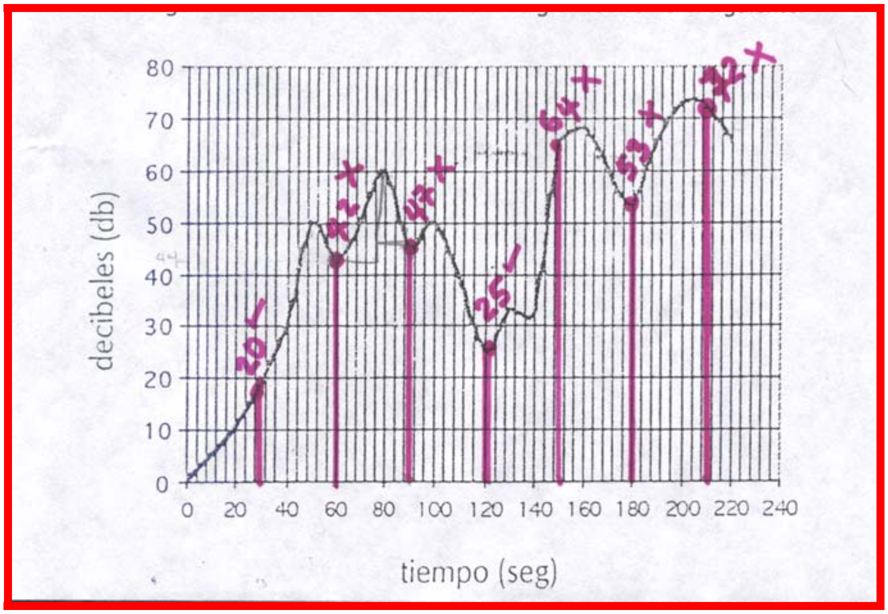


Figura 31. Análisis realizado por Sofía

Una vez estudiada la noción de función, junto con sus elementos y formas de representación, dimos inicio al estudio de Función Lineal. En vista de que faltaba poco tiempo para terminar el año escolar, decidimos abordar algunas características generales de ésta, continuando con el abordaje desde situaciones de variación haciendo énfasis en el cambio constante presente en una función lineal, y los aspectos más relevantes que atañen a esta, así como Camargo & Guzmán (2005, p. 52) lo afirman:

> “[...] Las situaciones problema deben permitir un recorrido que parta de la identificación de situaciones de cambio y la matematización de dichos cambios en registros numéricos, gráficos, geométricos y analíticos; enfocar la atención en la cuantificación de los cambios […]

> y finalmente identificar que el invariante que caracteriza el cambio constante corresponde a la pendiente de la recta que modela gráficamente la variación lineal".

Fue así como preparamos la Actividad VII "**Midiendo el agua**", adaptando la propuesta de Sara[10],y comentada por Llinares (2006), que se realizó el 2 de noviembre, cuyo formato se muestra a continuación:

[10] Nombre de la profesora protagonista de un caso, quien intentaba por medio de gráficas y problemas construir la idea de pendiente. Caso expuesto por Salvador Llinares.

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD

Estudiantes: ______________________________

Grado: ____________ Fecha: ______________

OBJETIVO: Recrear situaciones prácticas como instrumentos que fundamenten la noción de pendiente de la función lineal.

MIDIENDO EL AGUA

PARA TENER EN CUENTA:

Para realizar esta actividad deberán organizarse en grupos de tres estudiantes, quienes deberán tomar nota de lo hecho cada uno en sus respectivos cuadernos. A cada equipo se le entregarán dos vasos y un recipiente con agua. Para un óptimo resultado de la experiencia es importante ser cuidadosos y hacer un adecuado uso del material dado, **"no derramar agua sobre pupitres o demás útiles escolares", "evitar lavarle la cara a sus compañeros"** y desarrollar la actividad con el mayor orden y seriedad posible.

1. Tomen el vaso pequeño y midan medio centímetro de agua, viértanlo en el vaso grande, ahora repitan el mismo proceso varias veces. Intenten graficar en el plano cartesiano como creen que está variando esta situación.
2. ¿Qué gráfica obtuvieron?, ¿por qué tiene esta forma?
3. ¿Qué estamos relacionando en los ejes?
4. Seleccionen un punto de la gráfica dibujada y expliquen qué significa éste punto
5. ¿Qué cree el grupo que sucedería si cambiamos el vaso grande por una vasija con otro tamaño o con otra forma?
6. ¿creen que hay alguna relación entre el número de vasos pequeños que se echan en el vaso grande y la altura del agua en el mismo?
7. Encuentren una expresión matemática que describa esta relación.

Figura 32. Actividad "Midiendo el Agua"

En esta actividad, los estudiantes debían manipular el agua y los dos recipientes dados (vaso grande y vaso pequeño) para comparar el aumento de la altura del nivel de agua en el vaso grande a medida que se agregaban más vasos pequeños de agua; permitiendo de esta forma lo que Rodríguez (2004) planteaba al mencionar que materiales como estos propician la manipulación e interpretación de los contenidos matemáticos al utilizarlos en el aula, además de favorecer los procesos de la percepción y de la acción.

Presentamos a continuación el trabajo que plasmó Susana con relación a esta actividad:

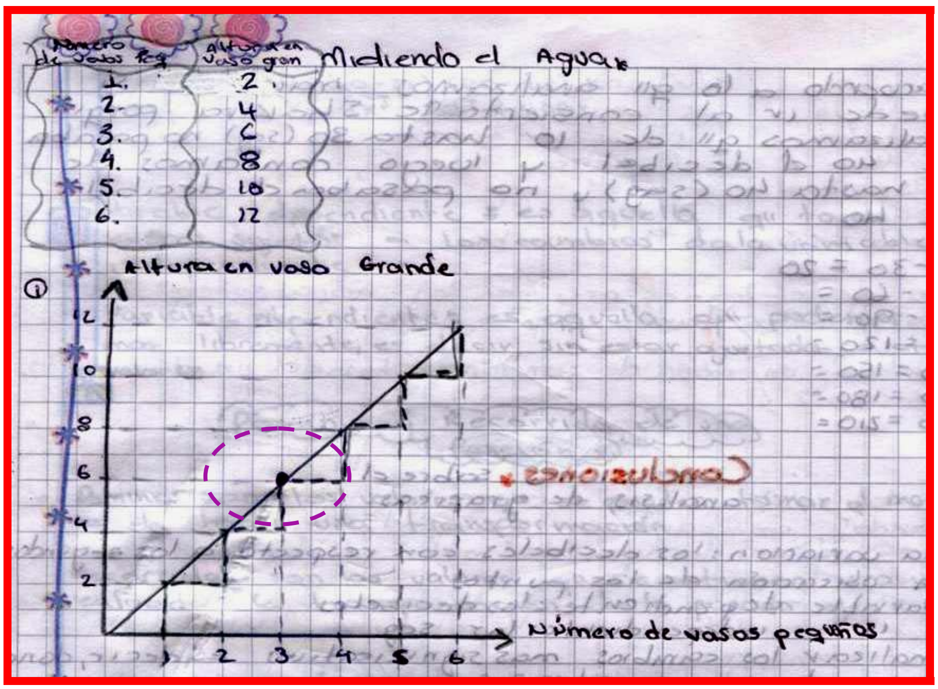


Figura 33. Trabajo realizado por Susana.

Aunque en el desarrollo de la Actividad no se planteaba elaborar tablas, pudimos ver que Susana y otros estudiantes las utilizaron para organizar y observar cómo variaba la altura del vaso grande en la medida que se agregaban más vasos pequeños de agua.

Susana nos explicó qué significaba en su gráfica el punto resaltado (3,6) en la Figura 33, ella indicó *"que por 3 vasos pequeños de agua que se agregaban, mediría 6 cm de altura del vaso grande".* Finalmente, concluyó diciendo *"que por cada vaso pequeño de agua que se echa en el vaso grande, la altura va aumentando de 2 cm en 2 cm".* Esto nos dejó ver que Susana, además de otros estudiantes, estaba intuitivamente manejando la variación constante implícita en la situación.

En esta gráfica y con sus palabras, Susana logró establecer una relación entre una situación práctica y un razonamiento matemático, hallando intuitivamente la razón en que varía la variable dependiente con respecto a la variable independiente – altura medida en el vaso grande con respecto al número de vasos agregados –.

Otro aspecto para resaltar en esta actividad fue el hecho de plantear un ejemplo del modelo lineal de la forma ***F(x) = kx*** y se indagó sobre el origen (0,0) preguntando qué pasaba cuando no se habían agregado vasos de agua; los estudiantes se miraron los unos a los otros y contestaron casi al unísono: *"Pues la altura es cero".*

Seguidamente, el 3 de noviembre de 2006, apoyados en Salinas (2002), aplicamos la Actividad VIII, "**El carro y la taza de café**" como se muestra a continuación:

Universidad Industrial de Santander

CONSTRUIMOS FUTURO

SERVICIO SOCIAL EDUCATIVO Y TRABAJO DE GRADO II

INSTITUTO LA LIBERTAD

Estudiantes: ____

____

Grado: __________ Fecha: ______________

Teniendo en cuenta lo trabajado en clase hasta el momento, hacer un análisis, lo más detallado posible, de cada situación problema.

1. Un carro transita por una carretera recta, el carro viaja con una velocidad constante de 40 metros por segundo. Supongamos que empezamos a medir el tiempo cuando el carro se encuentra a 30 metros a la derecha del punto de partida en la carretera.

2. Una taza de café se calienta en un horno microondas y alcanza una temperatura de 80 grados centígrados. La taza de café se saca del horno y se deja en una mesa a una temperatura ambiente de 20 grados centígrados. Supongamos que la temperatura de la taza de café disminuye constantemente a razón de 3 grados centígrados por minuto.

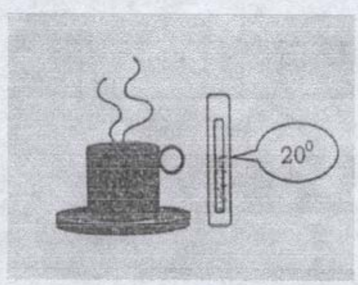


Figura 34. Actividad “El carro y la taza de café”

A través de esta situación quisimos abordar una situación de función lineal que no pasa por el origen, es decir, de la forma ***F(x) = kx+c,*** y otra que tuviera pendiente negativa. Se intentó resaltar que para un valor de cero en la variable independiente, la variable dependiente no es cero. Observamos que muchos de los estudiantes, cuando intentaron encontrar soluciones, se inclinaron por el aspecto numérico. Es decir, representaron los datos nuevamente mediante tablas para luego intentar encontrar una fórmula. Algunos tuvieron inconvenientes cuando quisieron expresar los valores en la tabla pues no tuvieron en cuenta el valor inicial puesto que el carro ya había recorrido 30 km de distancia.

Otro aspecto que consideramos relevante fue el pedirles a los estudiantes que explicaran cada una de las partes de la expresión algebraica, como lo plantea Salinas et al (2002). Jazmary logró dar una explicación coherente, atribuyéndole a cada término de la expresión algebraica un significado apropiado según la situación planteada, como se muestra en la siguiente figura:

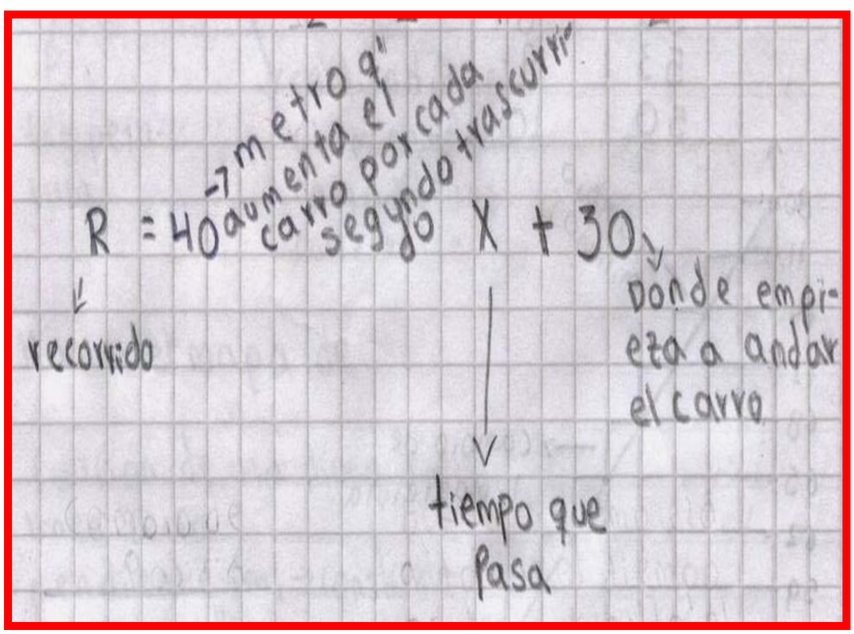


Figura 35. Fórmula explicada por Jazmary para la situación del carro.

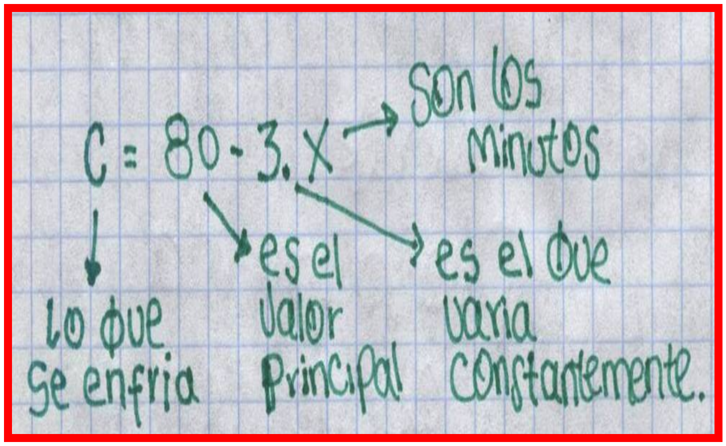


Figura 36. Fórmula representada por Karen para la temperatura del café.

En la anterior ilustración que presentó Karen, observamos que a ella un lenguaje propio para relacionar la situación planteada con la parte algebraica. Por ejemplo, a C que es lo que varía, la magnitud en estudio, dijo que era *"lo que se enfría"*; llamó *"valor principal"* a la temperatura inicial; del "-3" que es lo que disminuye la temperatura al transcurrir ciertos minutos, dijo *"es el que varía constantemente"*.

Por último, dado que se acercaban las fechas para las evaluaciones de fin de año escolar que normalmente se programan en la Institución, planeamos nuestra evaluación final a la que rotulamos con el nombre "¿**Cómo va mi aprendizaje**?".

Esta constaba de dos partes: una, la realización de un MC individual general que fue posteriormente discutido en grupos; y, dos, una evaluación escrita. En esta última parte se esperaba que los estudiantes pudieran emplear al máximo sus habilidades metacognitivas al pensar y re-pensar sobre cada uno de los conceptos vistos y cómo organizarlos de manera cooperativa en un mapa conceptual que serviría como herramienta de estudio para la evaluación escrita. En seguida mostramos (figuras 37 y 38) algunos de los MC individuales:

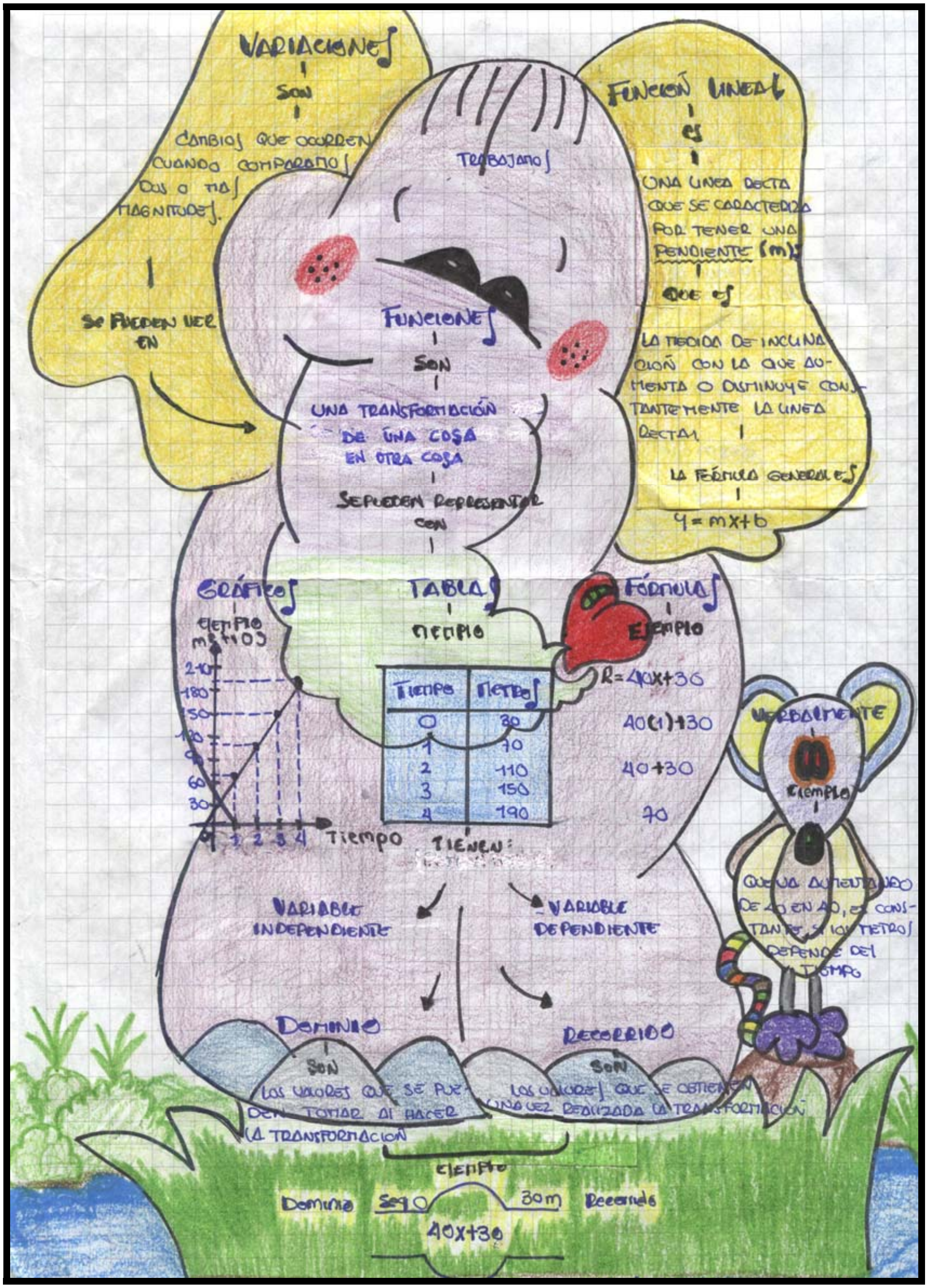


Figura 37. MC individual elaborado por Kelly.

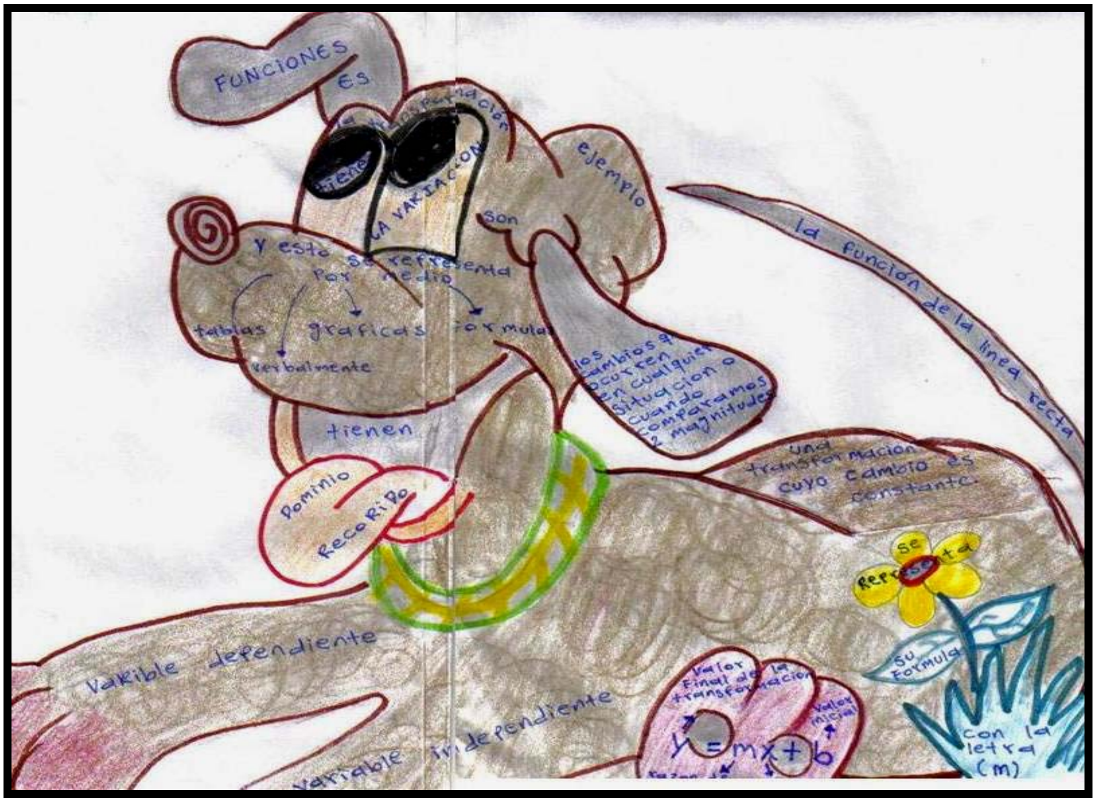


Figura 38. MC elaborado por Lizeth

Cabe aclarar que el proceso de evaluación con los estudiantes se había realizado continuamente a través de los mapas conceptuales pues, como dice Ontoria (1997, p. 40): "el mapa conceptual sirve fundamentalmente para evaluar, tanto al inicio de las actividades de enseñanza - aprendizaje como a lo largo y al final del proceso".

Una vez realizados los MC generales individuales, quisimos que los estudiantes socializaran sus MC para que a través de la discusión con otros pudieran compartir sus producciones, despejar dudas y concretar las ideas que pudieran estar sueltas para plasmarlas en un MC grupal (esto lo realizaron en grupos de tres o cuatro personas).

Finalmente, cada grupo expuso su MC ante todo el curso y así se eligió, por consenso general, el MC que se consideró mejor elaborado en organización y contenido, esto con el propósito de utilizarlo como material de consulta el día de la evaluación escrita. Dicho mapa, cuyas autoras fueron: Jessica, Lizeth, Kelly y Tatiana se ilustra a continuación:

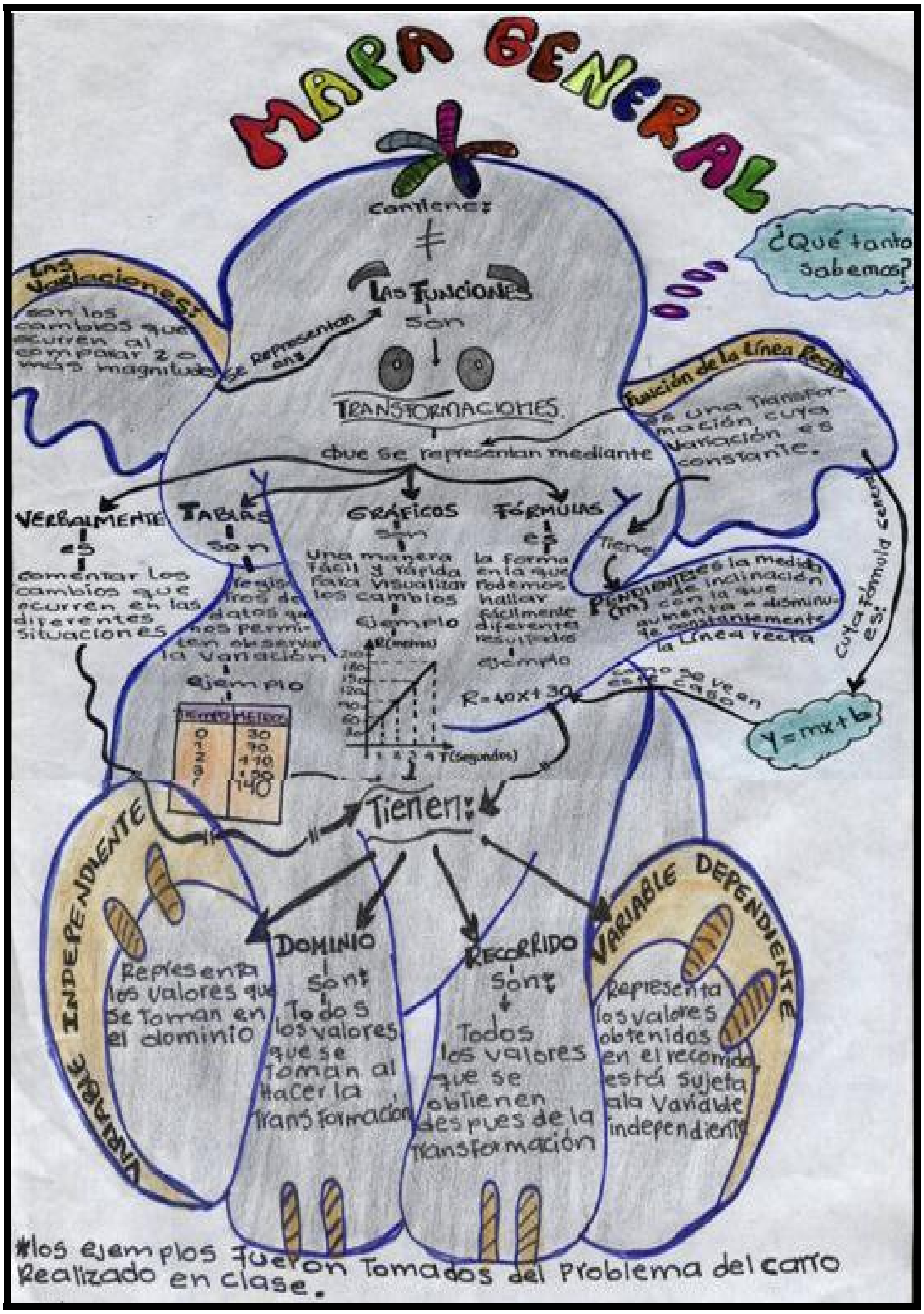


Figura 39. Mapa Conceptual General para la evaluación.

En cuanto a las apropiaciones matemáticas de este mapa general, las autoras nos comentaron que en su grupo habían analizado cada uno de los MC individuales, haciendo una lista de los términos presentes en cada uno, para proceder a organizarlos de manera coherente en un nuevo MC de acuerdo a lo comprendido a través de las actividades, discutiendo entre ellas los conceptos para llegar a acuerdos. Logrando lo que afirma Novak (2006); la ventaja los MC colaborativos es que a medida que los estudiantes trabajan con otros, generan un producto intelectual, en el que todos pueden haber contribuido.

Posteriormente, implementamos la siguiente evaluación escrita:

INSTITUTO LA LIBERTAD

ESTUDIANTE: ______________________ Grado: __________ ASIGNATURA: ALGEBRA FECHA: __________

Evaluación Acumulativa – Cuarto Periodo

¿CÓMO VA MI APRENDIZAJE?

INDICACIONES:

La evaluación debe ser resuelta en forma clara y ordenada, se le entregará el mapa conceptual general realizado por: Jessica, Lizeth, Kelly y Tatiana, que contiene los conceptos básicos que fueron trabajados en clase como material de consulta para la evaluación.

TIEMPO: 100 minutos

1. Cuáles de las siguientes situaciones se pueden representar por medio de una función y cuáles no, explique por qué en cada caso:

a) El cambio de estatura de una persona con su edad.
b) Cantidad de dinero gastado jugando X-BOX con el tiempo empleado.
c) Número de estudiantes de un colegio con los empleados de El Banco Popular.
d) El tiempo que dedico a estudiar con el rendimiento académico.

Figura 40.a. Evaluación "¿Cómo va mi aprendizaje?, pregunta 1

2. Un escalador se encuentra a 1200 metros de altura cuando empieza a escalar una montaña a las 6:00 de la mañana; supongamos que empieza a ascender (subir) constantemente a razón de 250 metros por hora hasta medio día.

a) Construir una tabla numérica donde se identifiquen las variables dependiente e independiente.

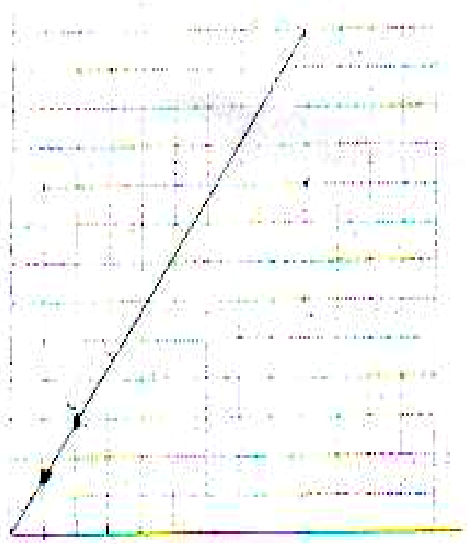
b) Dibujar la gráfica correspondiente a esta situación.

c) Encontrar la fórmula que represente esta situación.

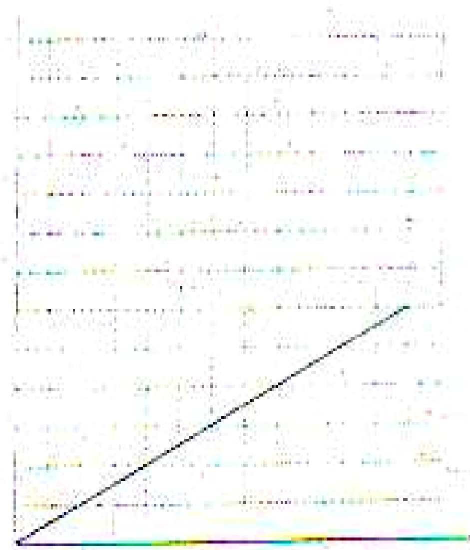
d) Explique con sus propias palabras qué significa cada término de la fórmula hallada.

e) Escriba el dominio y el recorrido de este caso.

3. ¿Cuál es el valor de la pendiente en cada una de las siguientes rectas?



m= ----------



m= ---------

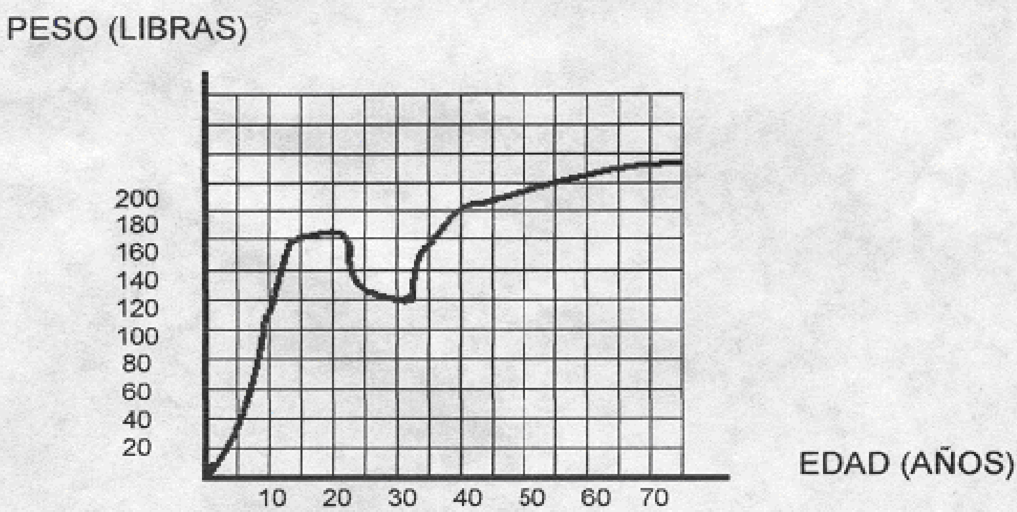
Figura 40.b. Evaluación "¿Cómo va mi aprendizaje?, preguntas 2 y 3

4. Represente mediante una gráfica las siguientes situaciones:
a) Cuanto más tiempo dedico a estudiar más aprendo, pero llega un momento en que estoy muy cansado y no aprendo más.
b) Entre más distancia en metros recorra el taxi, más dinero costará la carrera.

5. En las expresiones que representen una recta, indicar cuál es la pendiente:

a) $y = 3 \cdot x + 5$	b) $y = x^2 + 3$	c) $y = 3 \cdot x^3 + 2$	d) $y = \frac{2}{3} \cdot x$
m= ----------	m= ---------	m= ---------	m= --------

6. Analizar cuidadosamente la siguiente gráfica



Describa con sus palabras la manera en que varía el peso de esta persona a lo largo del tiempo, ¿qué cree que le sucedió a la persona entre los 20 y los 30 años?

"Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado. Un esfuerzo total es una victoria completa" **Mahatma Gandhi**

Figura 40.c. Evaluación "¿Cómo va mi aprendizaje?, preguntas 4 y 5.

La mayoría de los estudiantes manifestaron que el MC general fue una herramienta de apoyo al que no necesitaron consultar en el momento de la evaluación escrita, ya que lo general de los conceptos habían sido adquiridos durante el proceso de construcción y discusión de los MC. El tenerlo como material de consulta dio más seguridad en algunos estudiantes.

Otros por su parte pensaron que el MC iba a ser la respuesta inmediata a los interrogantes planteados en la evaluación, tratando de encontrar las respuestas en el mapa, perdiendo así tiempo valioso que pudieron haber empleado en hacer un análisis de las situaciones planteadas.

En general encontramos que el MC puede ser una buena estrategia de estudio para aquellos estudiantes que lo realizan a conciencia. Al respecto Novak & Gowin (1988, p. 48) manifiestan: "Los mapas conceptuales, cuando se elaboran concienzudamente, revelan con claridad la organización cognitiva de los estudiantes".

Antes de dar paso al siguiente capítulo, queremos mencionar una actividad extraclase que resultó muy particular y significativa dentro de la vida escolar de los estudiantes que se vieron involucrados en ella, y no solo para ellos, para nosotros también lo fue:

La profesora Diana Jaramillo, nos abrió un espacio en su seminario "Matemática y Sociedad", dictado a los estudiantes de cuarto semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, para que nuestros cuatro nominados de la investigación, comentaran su experiencia con los MC y expusieran algunos de ellos, ante este público más experimentado.

Esta actividad resultó interesante para nuestros estudiantes; además de hacer un recorrido por la universidad los jóvenes se mostraron alegres e hicieron muchas preguntas alrededor de la vida universitaria *"¿y en esta* *universidad es difícil entrar a estudiar?, ¿cuáles son las carreras más difíciles?, ¿cuánto pagan los de estrato dos?..."*

Una vez frente al auditorio, nuestros estudiantes, aunque al comienzo sintieron el temor normal de tener que hablar en público, con el transcurrir del tiempo se tomaron confianza y se atrevieron a intercambiar ideas y expresar opiniones con naturalidad. Se notó interés en ellos por mostrar su trabajo, al explicar sus MC y mostrar sus avances en el aprendizaje matemático utilizando esta estrategia.

Finalmente, al ser interrogados nuestros estudiantes sobre cómo se habían sentido trabajando matemáticas con MC, manifestaron que hacer MC les había resultado agradable, que hacer un dibujo los desestrezaba, distensionaba y les era significativo para recordar, era una oportunidad para intercambiar ideas con otros. Poner los conectores y hacer la organización del mapa les ayudaba a reflexionar sobre los temas, estudiaban lo visto y les ayudaba a recordar más fácilmente.

Fue satisfactorio para nuestros estudiantes de esta experiencia el ser felicitados tanto por la profesora Diana como por nuestros compañeros de carrera.

LOS NOMINADOS Y SUS HISTORIAS

"Los mapas conceptuales pueden fomentar la cooperación entre el estudiante y el profesor en un debate donde el "monstruo"que hay que vencer es la falta de significatividad de la información y la victoria consiste en llegar a compartir significados" Novak & Gowin (1988, p. 42).

Nuestro interés se centró en analizar cómo los MC se convertían en una estrategia metacognitiva en el aprendizaje de Función y Función Lineal. Por lo que para tal fin optamos por escoger a cuatro estudiantes para, a partir de los mapas que elaboraron, discutir sobre el proceso de aprendizaje que se vivió en cada uno de ellos.

El análisis que elaboramos se fundamentó en los autores que tuvimos en cuenta al realizar esta investigación como Camargo & Guzmán (2005), Jaramillo (2003a), Jaramillo (2003b), Llinares (2006), Mateos (2002), Novak & Gowin (1988), Ontoria (1997), Posada et al (2005), Salinas et al (2002), Sierpinska (1992), entre otros, junto con la perspectiva que nosotros como docentes e investigadores tuvimos del proceso de aprendizaje centrando nuestra atención en las acciones, pensamientos, y sentimientos de los estudiantes al enfrentarse a los conceptos de función y función lineal a través de la elaboración de mapas conceptuales.

El grupo en el que centramos el análisis está compuesto por tres mujeres y un hombre, cada uno con sus propias motivaciones, fortalezas y debilidades. Línea tras línea iremos presentando sus "historias" a través de las cuales trataremos de mostrar cómo fue evolucionando su pensamiento y su aprendizaje individual; qué dificultades encontramos en el proceso de aprendizaje; qué metas se cumplieron; y, finalmente daremos respuesta a la pregunta que enmarca este trabajo de investigación.

No obstante, es importante mencionar que antes de cualquier acto que hiciera público el nombre de los estudiantes en mención solicitamos a sus respectivos padres de familia autorización para tal fin.

Universidad Industrial de Santander

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Bucaramanga, 1 de noviembre de 2006

Señores Padres de Familia:

____

E. S .M.

Reciban un cordial saludo.

En la clase de álgebra se está desarrollando el proyecto de investigación denominado: "MAPAS CONCEPTUALES: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES Y FUNCIÓN LINEAL EN OCTAVO GRADO".

Queremos formalmente solicitar su autorización para que su hijo(a):________________________________ forme parte de nuestro grupo de investigación, como sujeto de la misma, e igualmente presentarlo en la publicación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos datos de su hijo (a) en forma de fotos, encuestas, entrevistas y actividades extraclase, que consisten en reuniones llevadas a cabo en el Instituto La Libertad en las horas de la tarde los días martes 31 de octubre, jueves 2 de noviembre y martes 7 de noviembre.

Agradecemos su atención y su colaboración,

MAYURY BURGOS	JHOVANY CAMACHO	DIANA JARAMILLO
Estudiante investigadora	Estudiante investigador	Orientadora de la investigación
Escuela de Matemáticas	Escuela de Matemáticas	Escuela de Matemáticas

Autorizamos la participación de nuestro (a) hijo (a) ______________________________ en la investigación "MAPAS CONCEPTUALES: ESTRATEGIA METACOGNITIVA EN EL APRENDIZAJE DE FUNCIONES Y FUNCIÓN LINEAL EN OCTAVO GRADO".

Firma del Padre

Firma de la Madre

Ciudad universitaria – Cra. 27 Cll. 9, Edificio Camilo Torres. Oficina 201
PBX: (097) 6 34 40 00 Ext. 2316 – 2308, Fax: (097) 6 45 03 01
E-mail: maticf@uis.edu.co

Figura 41. Formato de la carta para la autorización de la participación de los estudiantes en la investigación.

JOSÉ LUÍS vs. LOS MAPAS CREATIVOS

Primer Nominado

"Para hacer un mapa uno tiene que pensar qué cosas pone y cómo las pone"
José Luís

José Luis Remolina, (13 años)
Se caracterizó por ser un chico trabajador y servicial. Desde primero primaria tenía afinidad por las matemáticas, aunque comentó que ya no era tan "brillante" en el estudio como antes porque, según sus propias palabras, dedicaba más tiempo a los amigos.

Al iniciar esta experiencia, para los estudiantes hombres el trabajar con MC causó mayor dificultad al momento de motivarlos en su elaboración, tal vez por la inmediatez con la que los jóvenes quieren hacerlo todo. O sencillamente es el reflejo de nuestro sistema educativo tradicional en matemáticas lo que hace que nuestros jóvenes se muestren poco abiertos a formas diferentes de aprendizaje; o quizás es un efecto secundario de nuestra sociedad donde a las niñas se les permite expresar más sus sentimientos y a los niños no tanto.

De las primeras manifestaciones que se presentaron cuando los estudiantes empezaron a diseñar MC rescatamos la de José Luís fue quien cuestionó el uso de “matachitos en matemáticas”. Para nosotros, esta expresión fue el reflejo de su poco entusiasmo frente a lo que se estaba planteando ya que, además, se mostró reacio a este proceso de aprendizaje con MC.
Ante esta consideración, le explicamos que el dibujo no es un requisito fundamental para un MC, que se utiliza más para facilitar la organización y la recordación de los conceptos que se estén aprendiendo.

Sin embargo, fue éste el motivo que nos llevó a incluirlo en nuestro grupo de investigación ya que, aunque su primera reacción frente a esta herramienta de aprendizaje no fue la mejor, en el desarrollo de las actividades ya mencionadas fue cambiando considerablemente su posición y actitud.

En la actividad I “Ordenando Palabras”, José, en un primer intento de elaboración de un MC, se dedicó a hacer exclusivamente lo que se le pidió. Al parecer no poseía mucho conocimiento del tema de los MC. Sin embargo, él fue uno de los que organizó las palabras en menos tiempo y con relaciones coherentes.

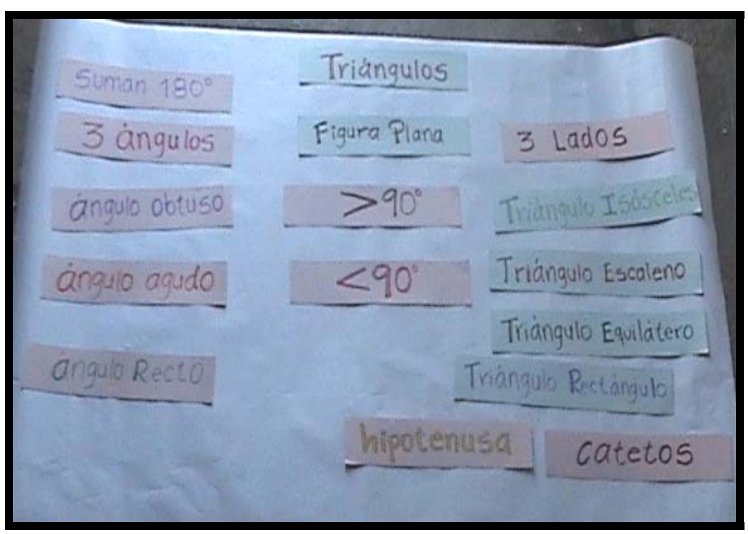


Figura 42. MC de la actividad “Ordenando Palabras, José Luís.

Al observar el mapa logrado se puede afirmar que la jerarquización que le dio a los conceptos fue consecuente. Pero cuando se le pidió que agregara los conectores para darle mayor conexión a las palabras, José no produjo ningún cambio en ella y solo añadió algunas palabras de enlace.

En la siguiente actividad que consistió en la realización más formal y más creativa del MC que resultó de "Ordenando Palabras", José conservó la organización jerárquica que inicialmente había hecho manteniendo las relaciones entre los conceptos dados. Los conectores, algunos dibujos como árboles, soles y cometas de colores fueron los que hicieron la diferencia.

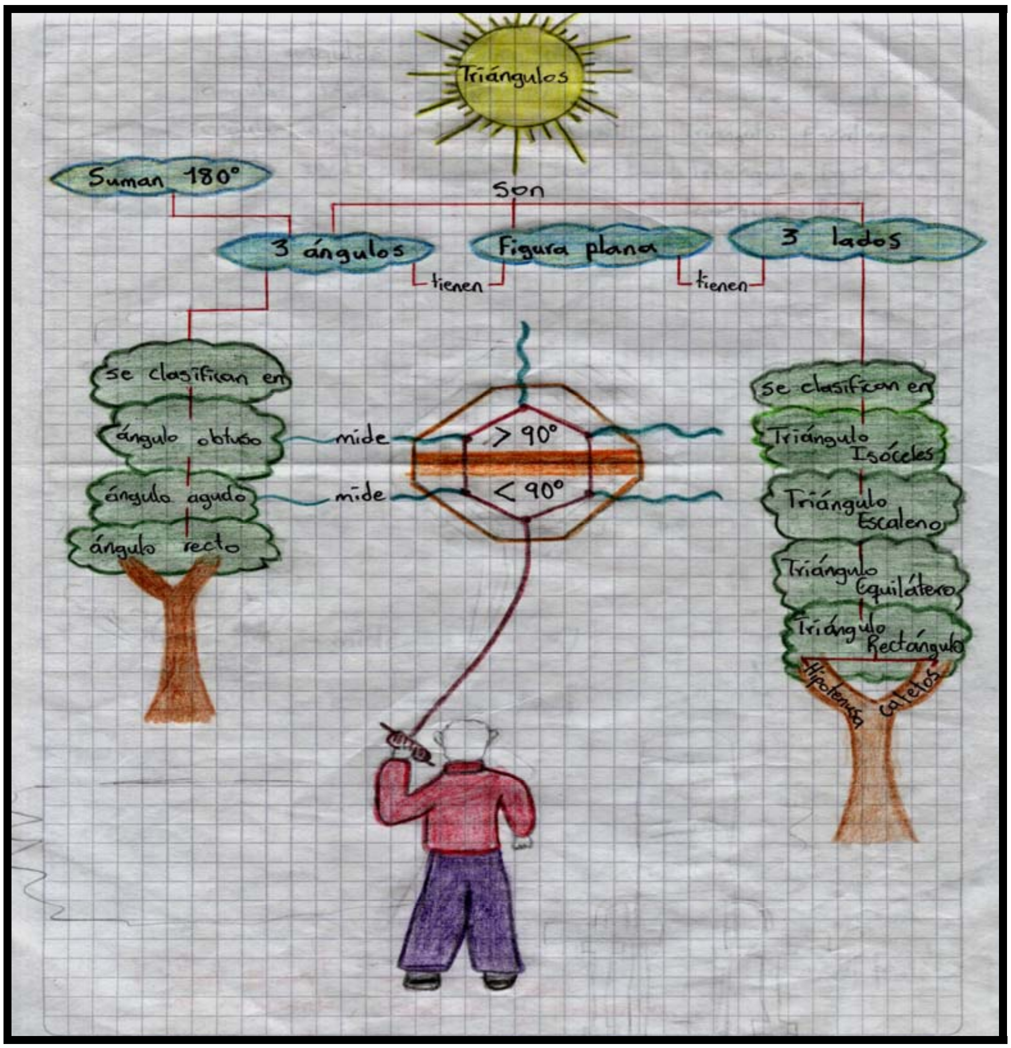


Figura 43. MC creativo, "La cometa", de José Luís

En cuanto a la inclinación de José por las cometas, nos comentó que en agosto le gustaba mucho ir a elevarlas y que, además tienen unas formas geométricas muy bonitas que llamaban su atención, en ello pensó a la hora de realizar el dibujo.

En ese momento, para nosotros fue interesante escucharlo hablar de sus gustos pues, además, vimos una faceta de su personalidad jovial que desconocíamos, nosotros y él mismo: podía expresar sus sentimientos y sensaciones en el proceso de aprendizaje.

Fue así como poco a poco se fue haciendo motivante el trabajo con los MC pues había lugar para que los estudiantes personalizaran sus MC echando mano de sus gustos sin necesidad de encasillarlos ni cortar su creatividad pues, como bien puede pensar el lector, los estudiantes estaban usando dibujos ajenos al contexto matemático. Pero aunque era así, estos no resultaron ajenos al estudiante; al contrario, estos fueron los que nos ayudaron a que el grupo se motivara a trabajar con los MC haciendo del trabajo algo significativo y agradable para los autores.

De otra parte, es importante resaltar que el hecho de agregar conectores a la organización inicial de las palabras produjo, en aproximadamente la mitad de los grupos, una reacomodación en la organización inicial de las palabras dadas. Esto evidenció que los estudiantes re-pensaron las ideas, o tuvieron en cuenta otras que en el primer momento no habían fluido.

Al respecto Moreira & Buchweitz (1987) considera que a medida que el pensamiento evoluciona, o se relaciona lo que ya se sabe con nuevos conocimientos, se pueden ir realizando cambios en los mapas para ir mejorando y reacomodando los conceptos e ideas.

En la actividad II “**Adicciones Modernas**”, José mostró su habilidad para extractar ideas principales de una lectura; dando así indicios de su actitud crítica y de su capacidad para tomar de decisiones. Actitud crítica y capacidad para tomar decisiones que son dos características que según Ontoria (1997) definen el proceso de aprender a aprender.

Sin embargo, al observar su mapa (Figura 44) nos encontramos con que José realizó este mapa con una estructura similar al que hizo anteriormente: Un título arriba del que salían tres ramificaciones, incluso, en esta sesión, nos expresó que aún no le parecía tan productivo hacer “mapas creativos”.

Era tal la preocupación de José que nos preguntó, el 22 de septiembre de 2006: *“¿Qué temas de matemáticas van a enseñar?” ¿Tenemos qué hacer más mapas?”***.** Al escuchar a José, le preguntamos si le parecía aburrido trabajar con los MC; él nos comentó que no le gustaba mucho ya que no era tan experto en la elaboración de ellos. Finalizó diciendo: *“No soy muy creativo, pero lo intento, no sé hacer dibujos bonitos”*.

De igual forma, le dijimos que no viera los MC como una obligación ni que considerara que lo más importante de ellos era un dibujo bonito. Por otro lado, nos dio la impresión de que José asoció la creatividad con la realización de dibujos, reflejando así la errónea concepción de que la creatividad solo es propia de artistas, pintores, poetas o compositores y en donde queda poco espacio para los matemáticos.

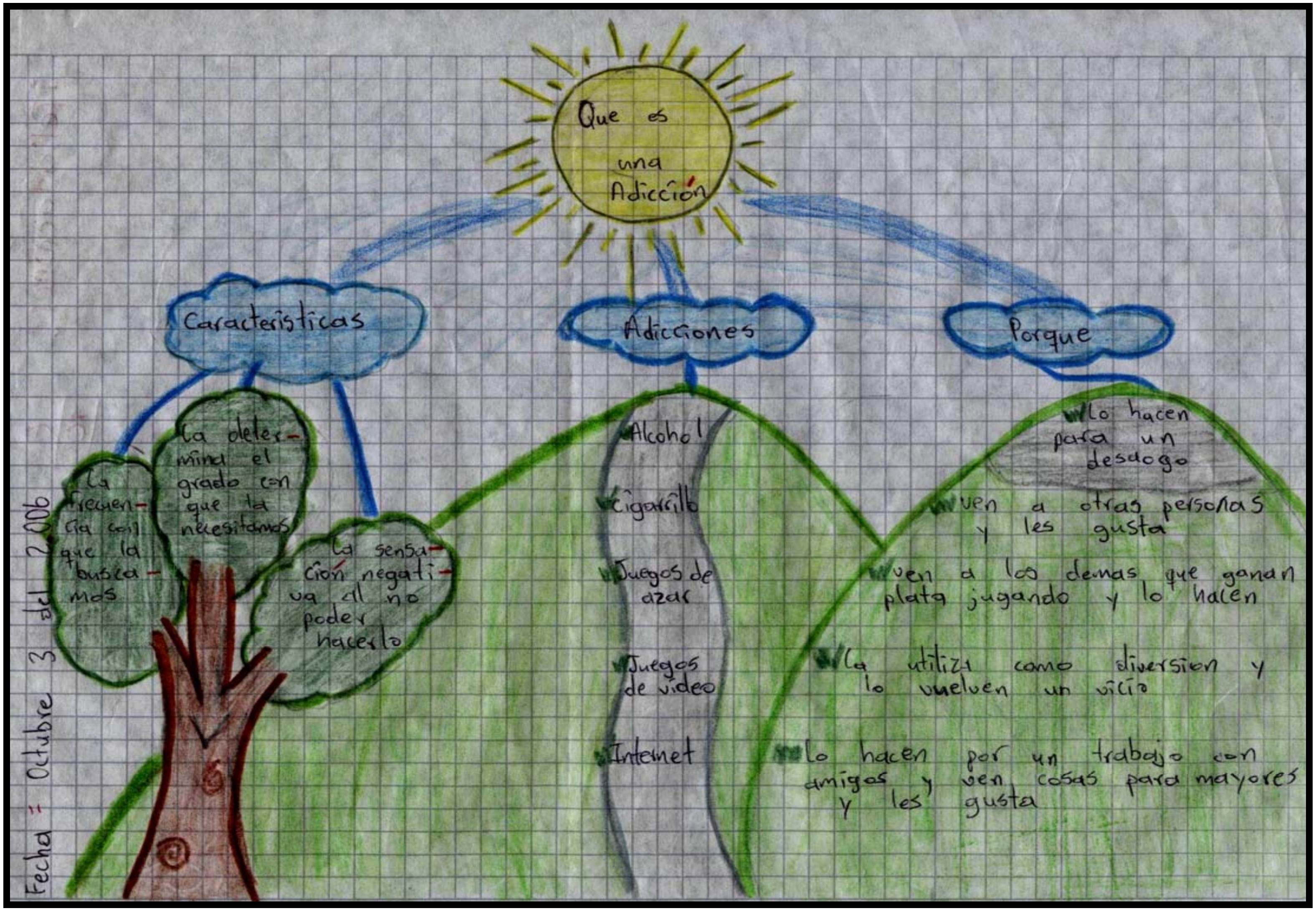


Figura 44. “La montaña del placer”, MC elaborado por José.

Además, era importante explicarle que lo relevante de los mapas era lo que transmitimos a través de él y la forma como nos lleva a reflexionar y pensar de manera flexible lo que queremos aprender o estudiar. Así mismo, que no hay formas correctas o definitivas para la construcción de un mapa conceptual ya que es una tarea difícil encontrar el mapa conceptual más acertado pues este es muy personal y válido para cada individuo, como lo corroboran (Moreira & Buchweitz, 1987).

Finalmente, José se calmó un poco y su disposición para trabajar cambió un poco después de nuestra charla. Esto lo notamos cuando vimos el mapa de factorización (ver figura 45) que se dejó de tarea ya que en él, José dejó volar un poco más su imaginación, consiguió elaborar un mapa original.

> *"Se me vino a la mente un castillo grande porque la factorización es una edificación, como son varios casos los que la conforman, parece un edificio"* (Entrevista, 24 de octubre de 2006).

En el anterior comentario, se observa el cambio en la actitud frente al trabajo con los MC, además, de que cambió la forma como organizó sus ideas, le dio una estructura distinta a la organización, con su toque personal y esta vez no estuvo tan preocupado por la belleza de su dibujo; dedicándole, así, más tiempo a la comprensión y análisis de los conceptos.

Además, relacionó el dibujo con lo que para él resultaba ser la Factorización: *"parece un edificio".* No obstante, hubo algunas confusiones de tipo algebraicas, pero aún así él tuvo en cuenta otros aspectos que la mayoría pasó por alto.

Cuando analizamos con José el contenido de su mapa conceptual, él nos explicó que cuando escribió sobre diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto, trataba de explicar lo que él entendía y el proceso que hacía para poder factorizar estos casos.

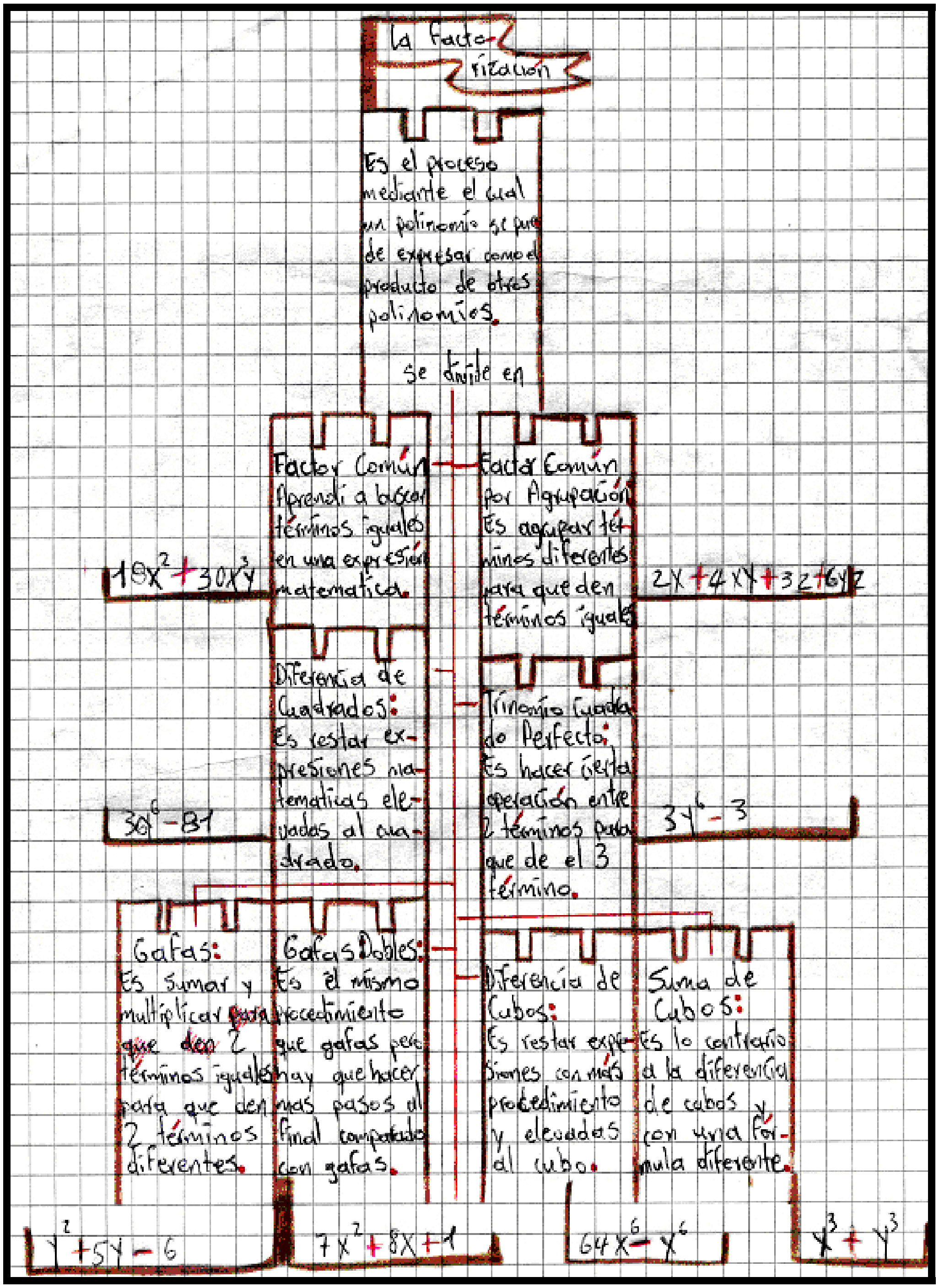


Figura 45. “El castillo”, MC sobre factorización elaborado por José.

Como se ha dicho anteriormente, la revisión que se hace de la elaboración de un mapa permite observar – a quien lo realiza y a quien lo lee – las falencias en los conceptos utilizados para su construcción. Por ejemplo, José notó, y nosotros notamos, que había usado los escasos conceptos que recordaba del tema. Tal como lo mencionan Novak & Gowin (1988, p. 129):

> "Los mapas conceptuales ponen de manifiesto las estructuras proposicionales del individuo y pueden emplearse para verificar las relaciones erróneas o para mostrar los conceptos relevantes que no están presentes".

Lo anterior nos permitió sugerirle a José que debía consultar sobre los temas que no comprendiera en clase –en este caso factorización– para que, posteriormente, confrontara en clase lo consultado para despejar dudas ya que esto le permitiría profundizar en el tema particular que se estuviera tratando. Además, se le enfatizó la importancia del trabajo que se debe asumir con compromiso y responsabilidad.

En la elaboración del siguiente mapa, que se llevó a cabo luego de realizar la actividad III "**Juguemos con las Variaciones**", José en su intento por explicarnos lo que había entendido de variación nos dio a conocer su "Lluvia de Ideas", nombre de su MC. Cuando observamos su MC notamos que en medio de la lluvia había dos frases particulares "entendí mejor" y "entendí poco" (ver Figura 46).

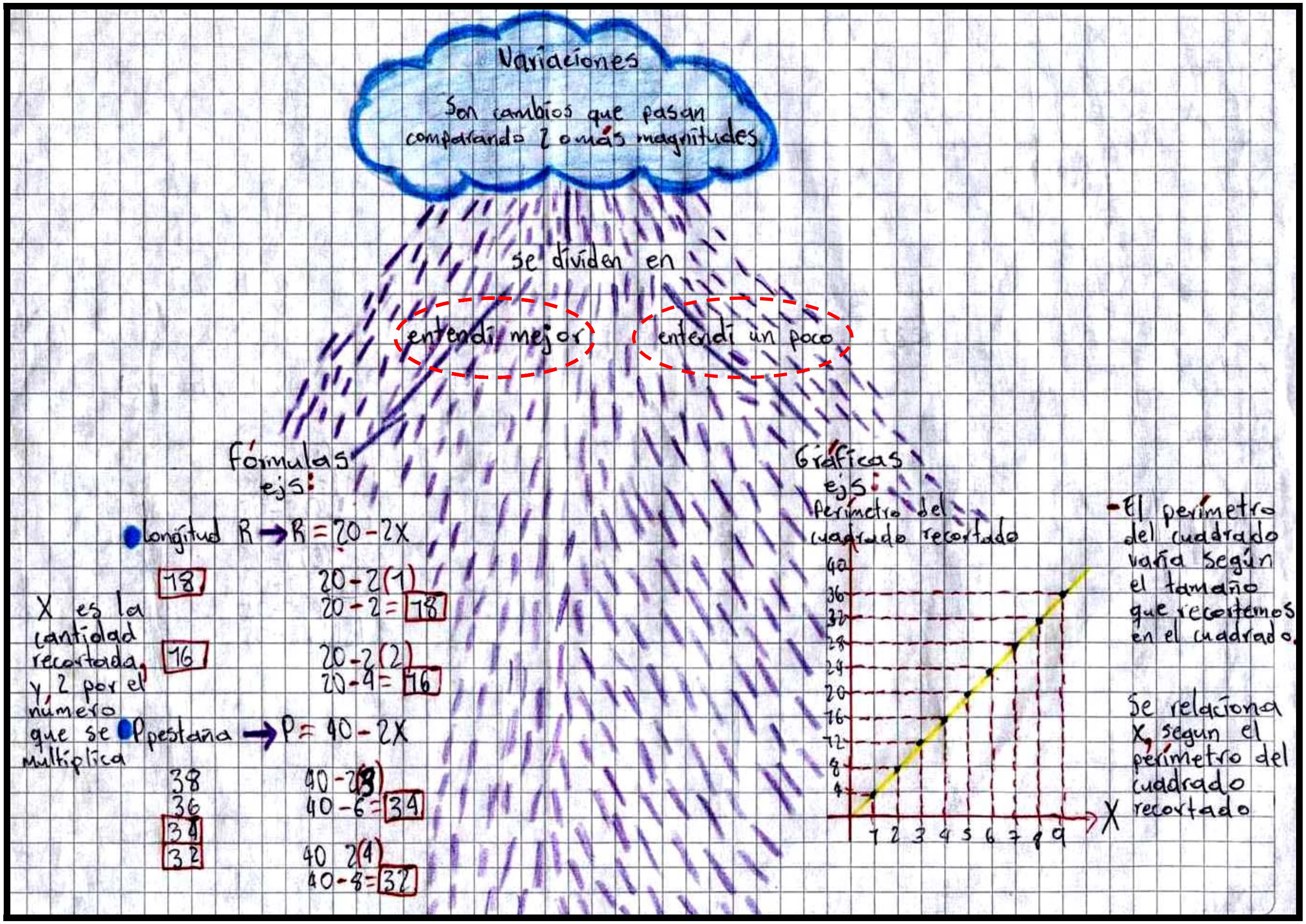


Figura 46. “Lluvia de Ideas”, MC de variaciones de José.

Al respecto nos comentó, en la entrevista realizada el 24 de octubre de 2006, "entendí mejor" la había escrito porque el hecho de elaborar el mapa lo obligó a pensar más sobre el tema, a consultar sus apuntes para, finalmente, sentirse más seguro de lo aprendido.

Además, nos dijo que se le había facilitado determinar el patrón de variación y expresarlo en la fórmula, que le parecía divertido e interesante el jugar a darle valores y era satisfactorio comprobar que había hallado la fórmula correcta cuando comparaba con los datos tabulados.

En cuanto a la justificación de su expresión matemática, nos dijo que había observado que en la tabla los datos iban disminuyendo de dos en dos a medida que se aumentaba en un centímetro el lado del cuadrado recortado. Además, que como la medida del trozo de papel entregado era de 20 cm. de lado, a partir de esa cantidad se empezaba a restar.

Al respecto Posada et al (2005, p. 51) afirman:

> "Los patrones permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones […]. El análisis cuidadoso de patrones y regularidades permite establecer generalizaciones. De acuerdo con John Mason (1999), entre las habilidades que se pueden movilizar en el estudio de patrones son: ver, decir y registrar"

Volviendo a sus particulares expresiones, manifestó que había escrito "entendí un poco" porque para él las gráficas no le eran tan familiares. Se le dificultaba encontrar la variación cuando se daba una gráfica para, a partir de ella, construir una tabla y deducir la fórmula. Ante esto dimos una corta explicación de cómo se interpreta una gráfica en el plano, para tratar de obtener una tabla y hallar la fórmula que era el proceso que a José se le dificultaba.

En este punto, es necesario enfatizar la importancia de la comunicación entre el profesor y el estudiante ya que esta permite que ambas partes se reconozcan y crezcan ya que el profesor se hace más consciente de las fortalezas y debilidades del estudiante, logrando con ello ayudarlo en su proceso de aprendizaje de manera más precisa y acertada, Ontoria (1997).

Además del proceso metacognitivo que se estaba dando en José tras la realización de cada mapa, se resaltaba el papel de los MC a la hora de autoevaluarse y evaluar el aprendizaje.

Después de varias intervenciones en las que José expresó su inconformidad con el trabajo que se proponía, en aquel momento de la investigación satisfactoriamente expresó: “El mapa me ayuda a saber que sé y que no sé”. Con esto, nos dio a entender que la construcción de los mapas le estaban ayudando a reafirmar más lo que sabía, estaba intentando “explorar” los beneficios de aprender por medio de MC.

> *“Me llamó la atención eso de usar mapas conceptuales para estudiar y por eso los hago. […] Uno tiene que pensar qué cosas pongo y cómo las pongo”* (Entrevista, 31 de octubre de 2006).

Con estas palabras nos empezó a sorprender ya que José estaba haciéndose consciente de la estrategia metacognitiva que estaba utilizando y de las ventajas que estaba obteniendo, “uno tiene que pensar qué cosas pongo y cómo las pongo”, en este sentido Novak & Gowin (1988, p. 62) manifiestan:

> “Los estudiantes pueden quedar sorprendidos al darse cuenta de hasta que punto han elaborado, clarificado y relacionado conceptos en sus propias estructuras cognitivas”

En el siguiente mapa (Figura 47), “la estrella”, en el que se abordó el tema de Función, José siguió mostrando sus avances, realizando un trabajo elaborado tanto en el dibujo como en la forma y en los conceptos matemáticos involucrados esforzándose por plasmar lo más importante del tema con pocas palabras.

> *“Así es más fácil, como me gusta, no tengo que aprenderme todo de memoria”* (Entrevista, José Luís, 31 de octubre de 2006).

De lo anteriormente relatado, podemos ver cómo cobra poco significado el aprendizaje memorístico para dar paso a un trabajo más creativo y autónomo. Desde esta perspectiva la creatividad se convierte en una meta para alcanzar en los años escolares ya que a través de ella se abren espacios de innovación necesarios para competir en la economía global, comentario realizado por Novak (2006) en su entrevista concedida a Eduteka.

Volviendo al mapa sobre Función de José, “La estrella”, al momento de negociar significados nos comentó que había planteado el siguiente ejemplo de función:

> *“Yo relacioné la función con la elaboración de un vestido en donde se tiene la tela, los botones y el hilo, se les hace un proceso y se transforma en un vestido”.* (Entrevista, José Luís, 31 de octubre de 2006).

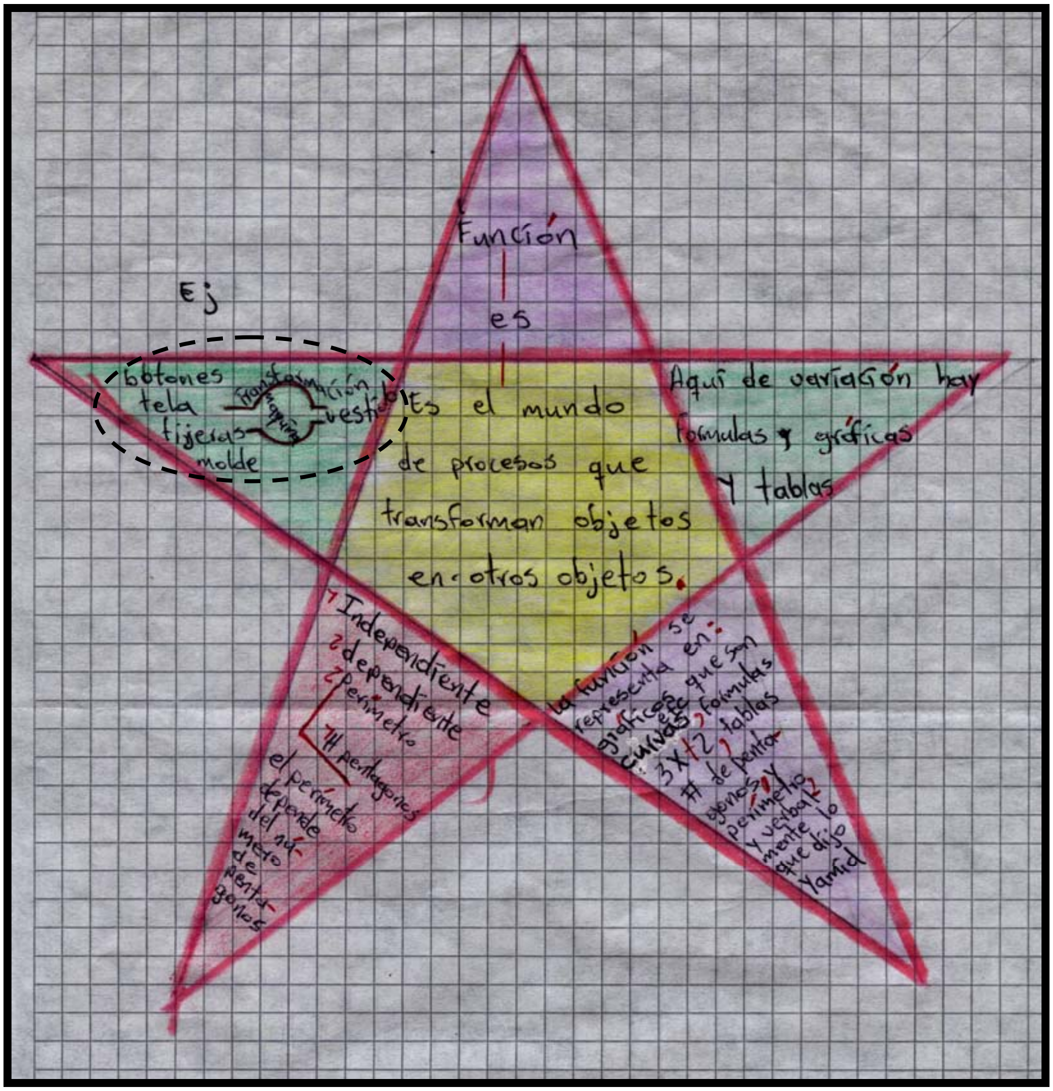


Figura 47. "La estrella", MC de funciones de José.

En la entrevista que tuvimos con él nos dijo que comprendía bien el concepto de función. Ante su seguridad quisimos cuestionarlo para profundizar más en su aprendizaje a través de la entrevista realizada el 31 de octubre de 2006. A continuación unos apartes de ésta:

(M&J: Mayury y Jhovany; JL: José Luís):

M&J: Explíquenos su ejemplo

JL: *Pues los botones, la tela las tijeras y el molde son el dominio y se transforman en un vestido que sería el recorrido.*

M&J: ¿En este ejemplo, entonces quién varía?

JL: *Los botones, la tela, el molde porque no todos los vestidos llevan los mismos botones, ni la misma tela, ni el mismo molde.*

Este ejemplo fue pertinente para aclararle a José, y de paso al grupo, que aunque esta representación es una aproximación intuitiva a la idea de función, ella no es una función como tal, además para nuestro caso no se tendría en cuenta ya que esta representaría una función multivariable porque había varios elementos presentes.

Además, se aprovecharon estas inquietudes para recalcarle al grupo la importancia de tener claros los conjuntos del dominio y del recorrido para determinar si la relación dada es o no una función. De acuerdo con Sierpinska (1992), estas relaciones o procesos tienen que estar bien definidos ya que se refieren a las reglas, patrones, leyes que hacen alusión a la definición de función.

Así, José en su MC no expresó muy claramente cómo relacionó la función con la variación, como se muestra en la siguiente figura:

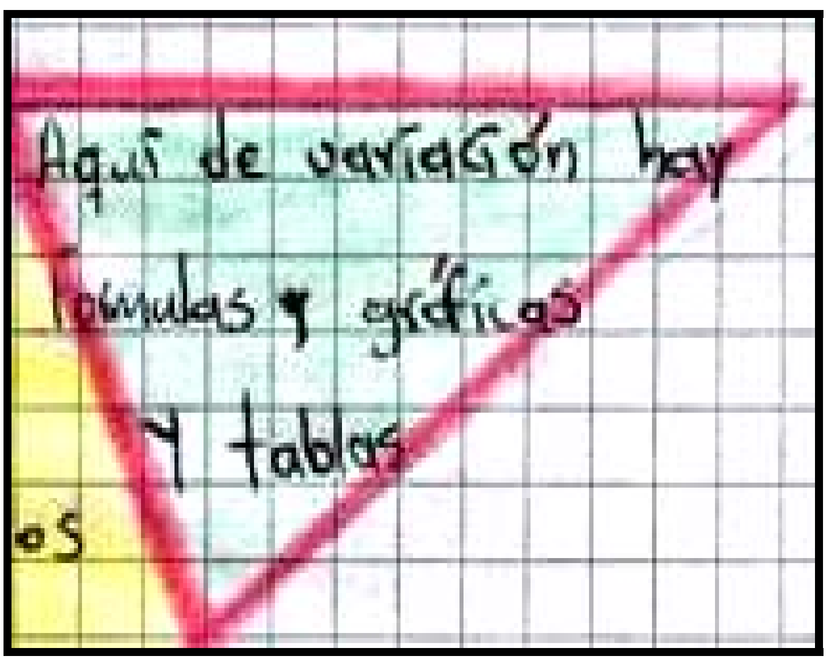


Figura 48. Una punta de la “La estrella” de José Luís

Para ello le preguntamos:

> M&J: ¿Cómo relaciona la función con la variación?"
>
> JL: *Que como la variación está dentro de la función, entonces las funciones también se representan en gráficos, tablas por eso lo escribí en esa esquina de la estrella.*
>
> M&J: ¿Por qué dices que los gráficos son curvas?
>
> JL: *Porque los gráficos a veces son rectas como el perímetro de la caja, otras veces son curvas como montañas como en el caso del área de la caja.*
>
> (Entrevista, 3 de noviembre de 2006).

Otro aspecto importante para resaltar en José es que logró asimilar claramente los conceptos de variable dependiente e independiente, conectándolo con lo trabajado en clase, incluso en su mapa hizo un esbozo en el plano cartesiano (ver figura 49). Esto suele ser útil ya que la observación de los cambios propicia que el estudiante identifique qué está cambiando o cuáles son los objetos que cambian en los procesos de variación, esto facilita la identificación y discriminación entre las variables dependiente e independiente Sierpinska (1992).

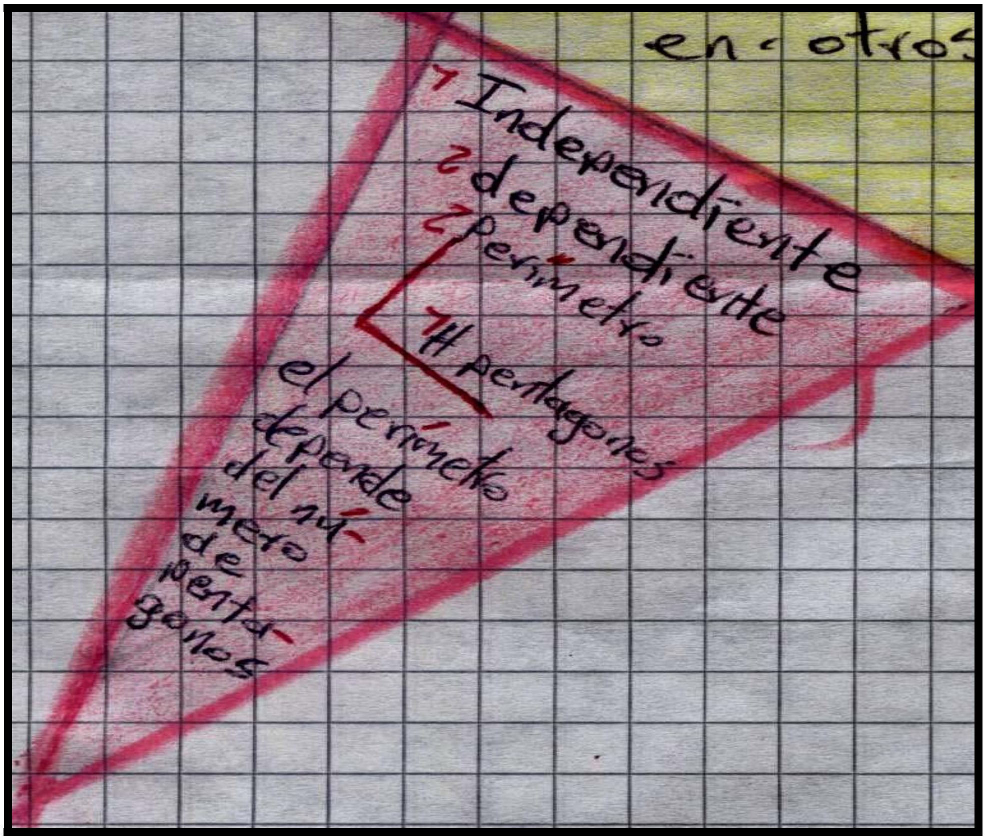


Figura 49. Una punta de la “La estrella” de José Luís.

Por otro lado, cuando abordamos el tema de Función Lineal tuvimos inconvenientes de tiempo para tratarlo a profundidad, factor que creemos tuvo que ver con la poca aprehensión del concepto de variación constante que la define. Para el MC de este tema, José escogió el esbozo del cuerpo de un niño.

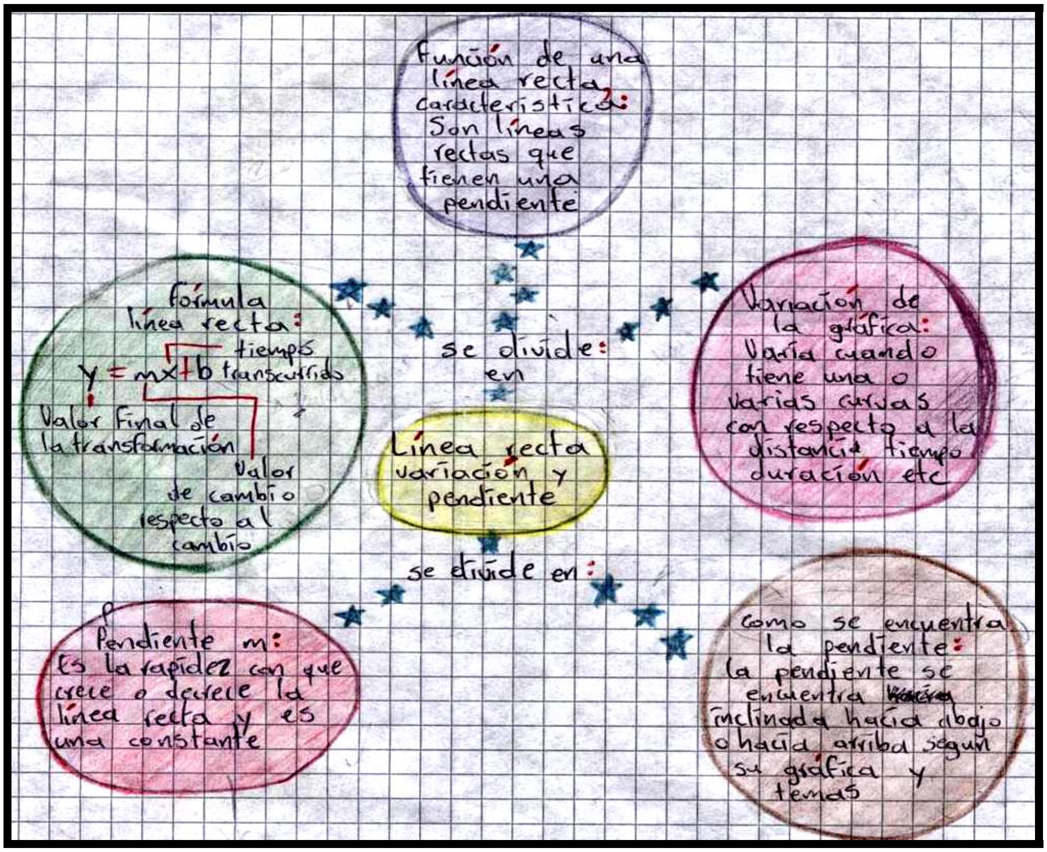
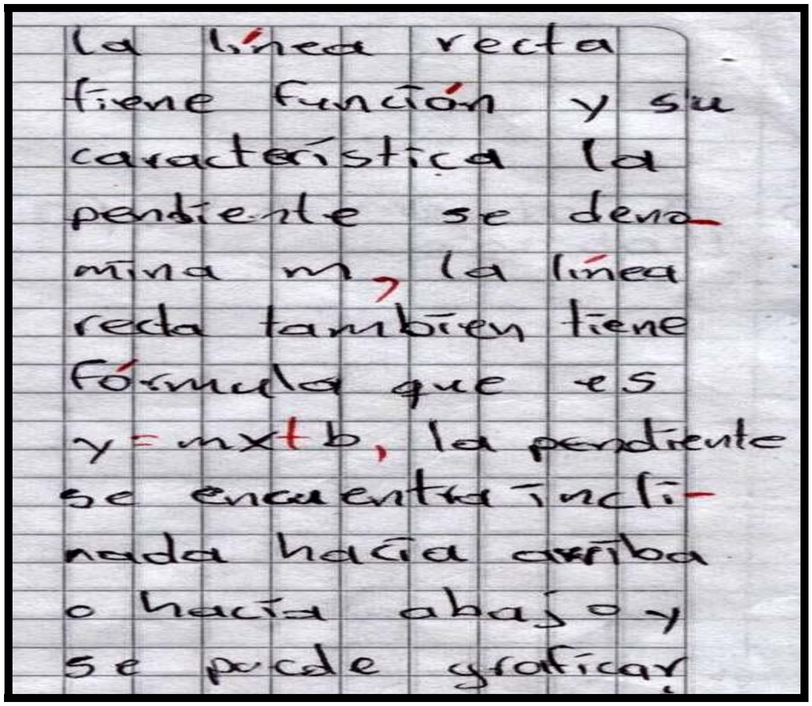


Figura 50. “El niño de la línea recta” MC elaborado por José.

Cuando analizamos la información presentada en este mapa, sentimos la necesidad de pedirle a José que construyera un texto para evidenciar la reflexión matemática que había hecho alrededor de su construcción ya que había en su mapa algunas irregularidades conceptuales. Por lo que antes de hacer un juicio, quisimos escucharlo para comprender el proceso que vivenció a la hora de su construcción. En la Figura 51 mostramos el texto que construyó José de su mapa.



la línea recta
tiene función y su
característica la
pendiente se deno-
mina m, la línea
recta también tiene
fórmula que es
y = mx+b, la pendiente
se encuentra incli-
nada hacia arriba
o hacia abajo y
se puede graficar

Figura 51. Texto narrativo del mapa “El niño de la línea recta”

En este texto y su MC, José manifestó falencias en el concepto de función al decir que la línea recta tiene función, por lo cual recurrimos a mencionarle que la función vista como una transformación, sugiere que el valor de algo va cambiando o depende de los valores de otras cosas; existen muchas relaciones y fenómenos en el mundo que nos rodea que pueden ser admitidas matemáticamente como funciones, lo importante es comprender cómo se relacionan estas variables.

Para ello recurrimos al ejemplo de “Pentágonos en fila” y le dijimos que estableciera la relación que existe entre el número de pentágonos agregados y el perímetro resultante de la figura que se está formando, le preguntamos a José:

> M&J: ¿Si llamamos **“x”** al número de pentágonos agregados y **“p”** al perímetro resultante, entonces, cómo piensa usted que se comportan estas variables en la función?
>
> JL: *Pues al ir construyendo la figura y aumentar el número de pentágonos, aumenta el perímetro.*

M&J: ¿Cómo aumenta?

JL: *Por cada pentágono que se va pegando, se va transformando el perímetro agregando tres lados al total y se les suman los dos que siempre quedan a los lados. Así es como cada pentágono agregado transforma el perímetro.*

(Entrevista, 7 de noviembre de 2006)

Después de este intercambio de ideas que buscaban aclarar la noción de función, retomamos lo que José expresó en su texto y le preguntamos:

M&J: ¿Cree que es correcto decir que la línea recta tiene función?

JL: *No profes, lo que pasa es que algunas funciones, al ser representadas gráficamente, toman forma de línea recta.*

M&J: Correcto, entonces la línea recta es una función.

Otro aspecto para cuestionarle a José hasta el momento, fue la forma en que se refería a la pendiente *"como la característica de la línea recta y que se encuentra inclinada hacia arriba o hacia abajo"*

Observamos que las "inclinaciones" de las gráficas no representaban nada para él, acerca de los procesos dinámicos de las situaciones variacionales que se estaban trabajando, aparentando ser un proceso estático.

M&J: ¿A qué se refiere cuando dice que la pendiente de la línea recta se encuentra inclinada hacia arriba o hacia abajo?

JL: *Lo que pasa es que, como ustedes me aclararon, hablando de funciones, la función lineal describe fenómenos en los que el cambio es el mismo y su gráfica es una línea recta que sube o baja dependiendo si aumenta o disminuye*

M&J: ¿Podría darnos algunos ejemplos?

JL: *En el ejercicio de medir el agua, cada vaso de agua que uno echaba, aumentaba en 2 cm. el nivel de agua en el vaso grande. En la taza de café pasa al revés, la temperatura de la taza va bajando de 3 en 3.*

Retomando el concepto de pendiente que José nos había dado en su MC, debemos admitir que al principio nos pareció una intuición bastante acertada pero cuando comparamos el texto con el mapa y reflexionamos alrededor de esto, vimos que esta definición podría dar lugar a malentendidos cuando se trataran temas relacionados con movimiento.

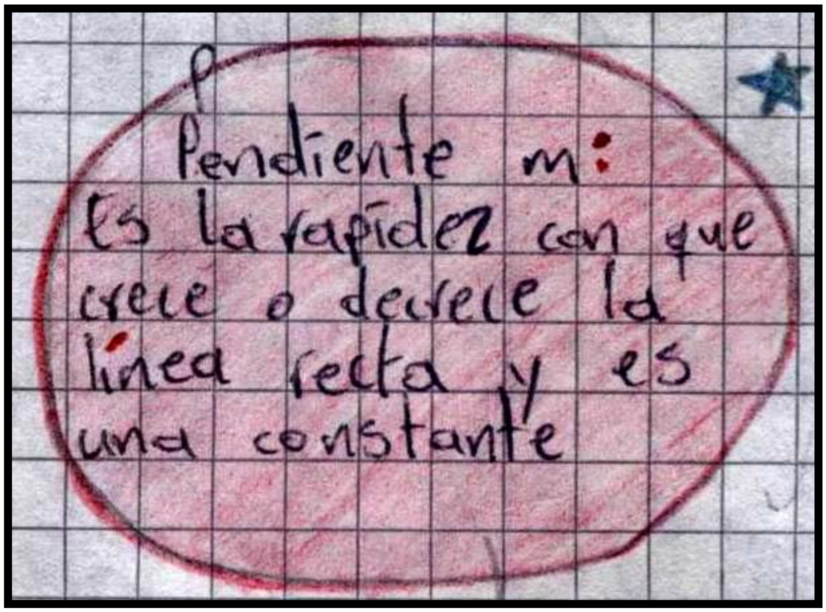


Figura 52. Aparte de “El niño de la línea recta”.

Por tal razón, cuestionamos nuevamente a José sobre este concepto para así evitar entorpecer su futuro aprendizaje al estudiar funciones crecientes y decrecientes. Veamos:

> M&J: ¿Cómo así que la pendiente es la rapidez con la que crece o decrece la línea recta?
>
> JL: *Pues si, es la rapidez de su crecimiento o su cambio; por ejemplo que de 30 pasa a 70 luego a 110 aumenta de 40 en 40, y esa rapidez es constante.*
>
> M&J: ¿Qué entiende por rapidez de crecimiento?
>
> JL: *Mmm… Rapidez de crecimiento es como qué tanto aumenta algo.*
>
> (Entrevista, 7 de noviembre de 2006)

Le aclaramos a José que la pendiente no es la rapidez de crecimiento o decrecimiento sino que esta es una medida de cambio de la variable dependiente con respecto a la variable independiente y que para ciertas situaciones ésta es constante. Cuando esta variación es constante, la gráfica resulta ser una línea recta ya que si se analiza el cambio entre un punto y otro éste no cambia.

Aunque hasta el momento José tenía una comprensión aceptable del tema en general le pedimos que elaborara otro mapa dado que hubo evidencia, después de la negociación de significados, de que no tenía muy claros los conceptos que giraban alrededor de Función Lineal. Esta fue su segunda versión:

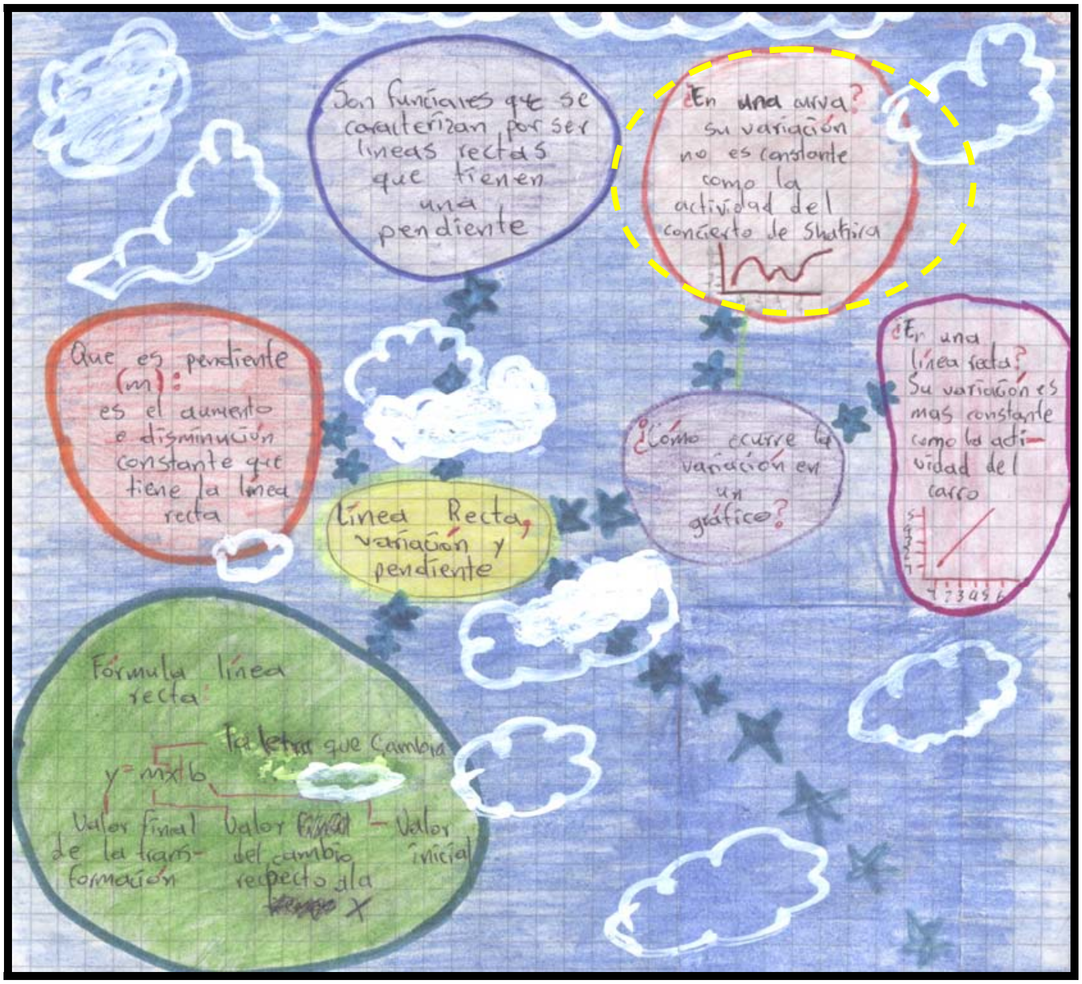


Figura 53. Segunda versión del MC de Función Lineal.

Fue así como en su nueva elaboración observamos una mayor comprensión del tema pues los conceptos fueron más explícitos, los conectores más apropiados. Esto muestra que en la revisión del mapa siempre se puede mejorar la claridad de las relaciones conceptuales que se ilustren en él (Novak & Gowin, 1988)

De otra parte, en cuanto a la actividad “Interpretando los conciertos de Shakira” y a la variación que se ilustra en las gráficas, José determinó en su MC (como se muestra en el ovalo amarillo) que la variación que se presentaba en la situación no era constante, como lo presentó en la siguiente gráfica:

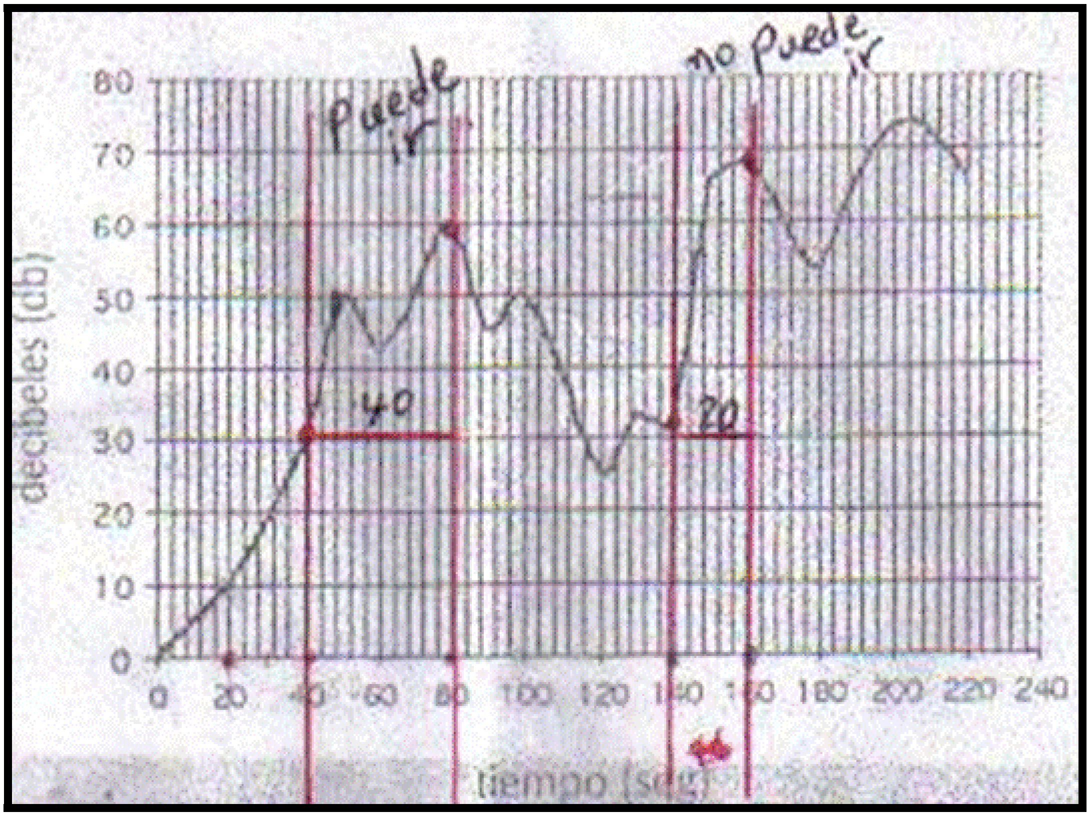


Figura 54. Gráfica de la actividad “Interpretando los Conciertos de Shakira”

En este punto, José mostró su avance en la interpretación y análisis de gráficas ya que, para este caso, utilizó la estrategia de analizar diferentes lapsos de tiempo, unos más grandes, otros más pequeños, que le permitieron hacer comparaciones diferentes a las que se habían pedido, que eran con intervalos de 30 segundos. Así pudo concluir lo siguiente:

> *“Entre más tiempo pase, más oportunidad tiene de ir Mariana al concierto, entre más poco tiempo pase menos oportunidad tiene de ir”* (1 de noviembre de 2006).

En todo el proceso de construcción de los conceptos matemáticos que nos competen en esta investigación a través de los MC es importante resaltar que en cada sesión estuvimos atentos a construir con los estudiantes significados nuevos y más completos, atendiendo a las concepciones y saberes que ellos tenían. Una de las conclusiones dadas por José fue:

> *"Con los mapas conceptuales he aprendido a tener más orden y a conectar mejor mis ideas"* (Entrevista, 14 de noviembre de 2006).

Finalmente, le pedimos a José que nos entregara un último mapa en el que recopilara los dos temas principales (Función y Función Lineal; ver Figura siguiente:

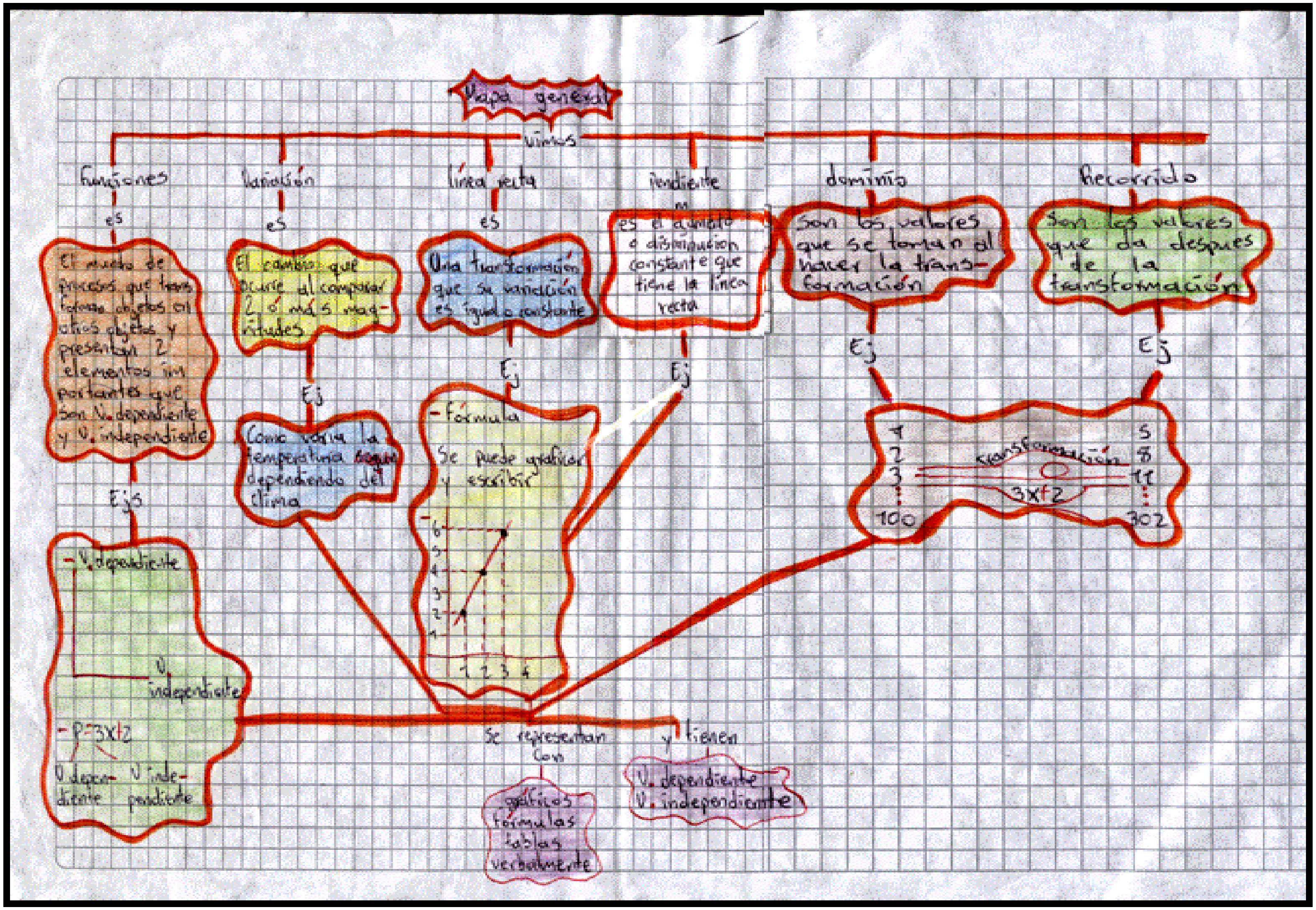


Figura 55. MC general elaborado por José.

Una vez realizado este mapa, nos comentó en clase lo siguiente:

> *"Los mapas me sirvieron para poder comprender la idea central de los temas, lo más importante y así poder acordarme"* (Entrevista, 14 de noviembre de 2006).

Reiterando, como bien lo afirma Jaramillo (2003b, p. 65), que:

> "los MC, en el salón de clases, se pueden constituir en un instrumento para ayudar a los estudiantes y a los profesores a captar el "significado" de los temas que se van a aprender. Ellos posibilitan que estudiantes y profesores se den cuenta de nuevas relaciones y, por lo tanto, de nuevos significados o al menos que no podrían encontrar de una manera consciente, antes de la elaboración del MC".

Hasta este punto podemos decir que se había logrado un buen trabajo con José pues, como el lector recordará, su posición inicial frente a los MC era poco favorecedora. Pero a través de la elaboración de cada mapa, José fue adquiriendo confianza y destreza para realizar sus creaciones y poco a poco fue re-estructurando sus procesos cognitivos hasta alcanzar una madurez que le permitió reconocer sus falencias sin nuestra intervención directa. En este sentido Ontoria (1997, p. 62) menciona: "Al final de dicho proceso, será el propio alumno el que tendrá que reflexionar sobre las consecuencias positivas o negativas de su trabajo, en cuanto al significado que ha supuesto la experiencia de aprendizaje"

Respecto a la evaluación final que se les propuso a los estudiantes, José fue uno de los pocos chicos que encontró una solución adecuada al punto dos (ver figura 56) ya que tuvo en cuenta aspectos como el valor inicial (aspecto que, según él, no le era muy claro cuando elaboró el MC de este tema) y cómo, a través de la comprobación cuando daba valores a la fórmula, logró darse cuenta de la forma correcta de la gráfica de esta situación.

2. Un escalador se encuentra a 1200 metros de altura cuando empieza a escalar una montaña a las 6:00 de la mañana; supongamos que empieza a ascender (subir) constantemente a razón de 250 metros por hora hasta medio día.

a). Construir una tabla numérica donde se identifiquen las variables dependiente e independiente.

b). Dibujar la gráfica correspondiente a esta situación.

c). Encontrar la fórmula que represente esta situación.

d). Explique con sus propias palabras qué significa cada término de la fórmula hallada.

e). Escriba el dominio y recorrido de este caso.

Figura 56. Punto 2 de la evaluación

Al observar lo hecho por José en la siguiente figura, se percibe que él hizo una correcta asociación entre la expresión hallada y el gráfico de la situación.

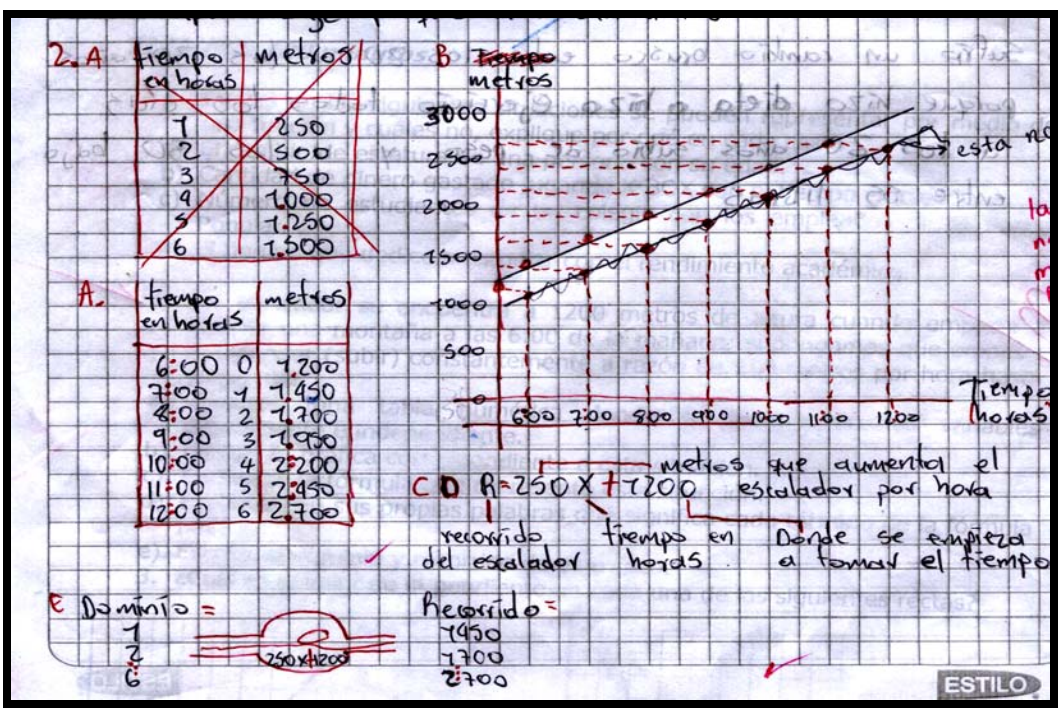


Figura 57. Respuesta de José al segundo punto de la evaluación.

Al momento de dialogar con José sobre la evaluación, nos comentó que inicialmente había tomado los valores del tiempo desde las 6 de la mañana hasta el medio día sin tener en cuenta el valor inicial (6 am) pues solo había fijado en el cambio que hacía el escalador, sin tener en cuenta el valor dónde inició (1200 m.)

Fue así que al hallar el dominio y el recorrido, tratando de comprobar que los valores coincidieran en la fórmula, los valores que resultaron le hicieron pensar que la gráfica no correspondía a dicha fórmula: "Lo que hice fue mirar el mapa para saber quiénes eran los valores del dominio, miré si podía servir con 1, 2, 3, por eso me di cuenta que la gráfica estaba mal".

Además, mencionó que el MC general que tenía de consulta (el que hicieron en grupo) le ayudó, pues recordó conceptos como dominio y recorrido que necesitó a la hora de contestar la evaluación.

Finalmente, José manifestó que los MC le habían ayudado en su proceso de aprendizaje. Veamos lo que refirió al respecto:

> *"Los mapas me sirvieron para resumir y entender más las ideas, los conceptos de las palabras como: variación, pendiente, función y dominio. No tuve la necesidad de estudiar, ponía cuidado en clase; los mapas me ayudaron a estudiar porque son [...] resumidos, tienen las palabras clave de los conceptos"* (Entrevista, 14 de noviembre de 2006).

Según Mateos (2001), los MC dan pruebas de las reflexiones que el autor hace sobre sus saberes, cómo los entiende, cómo los esperaba utilizar y en qué ocasiones, siendo esto el primer indicio que cómo él controla de forma autónoma su propio su aprendizaje.

“PERO ME DA PENA EXPLICAR EL MAPA”

Segundo Nominado

“Cuando yo hago el mapa, después yo me acuerdo de casi todo, y es más fácil estudiar” Kelly.

Kelly Katherine Castrillón (14 años),
Consideraba a las matemáticas como una materia para la que se necesita ingenio, y útil porque ayuda a resolver problemas. Se describía a sí misma como una buena estudiante. Además de esto, era calmada, respetuosa y responsable. Era notoria en su personalidad la timidez.

Cuando iniciamos la experiencia, Kelly pasaba inadvertida en el aula de clase por su timidez, salvo por sus compañeras más allegadas quienes valoraban su trabajo y eran las que comentaban sus puntos de vista. Kelly era de las personas que manejan un bajo perfil: trabajaba silenciosamente pero con un alto sentido de la responsabilidad.

Sin embargo, al acercarnos a ella a través de las actividades que se desarrollaron en clase, tomó confianza y en las entrevistas nos dijo que se sentía un poco apática frente a la elaboración de MC: *“A pesar de que me gusta dibujar, los primeros mapas los entregué como por cumplir”* (entrevista 8 de octubre de 2006).

Con lo anterior, comprendimos que hacía los mapas por ser, como tradicionalmente se dice, buena estudiante y evitar las notas desfavorables. Más no porque los encontrara productivos.

Con esta particularidad queremos resaltar la influencia que tienen la motivación y los sentimientos en la planeación y elaboración de los MC, tal como lo menciona Jaramillo (2003a), puesto que se espera que el estudiante logre, en su experiencia de aprendizaje, integrar conocimientos, pensamientos y sentimientos en la búsqueda de un mejor aprendizaje. Es decir, si uno no se mete en el cuento de una realización a conciencia de los mapas conceptuales, éstos mismos no van a ser útiles en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, el factor que nos llevó a tener en cuenta a Kelly entre los estudiantes que participaron directamente en la investigación fue precisamente su sentido de la responsabilidad, su sinceridad, su creatividad para dibujar –contrario a José Luís–, y su particular timidez ya que esta le impedía expresar sus ideas ante los demás, aunque fueran correctas.

Empecemos el recorrido por el trabajo realizado por Kelly con los MC y la conceptualización de la temática matemática alrededor de la cual gira este trabajo.

En su primer MC Kelly optó por recrearlo con un pequeño jardín. Esto nos llamó la atención pues distribuyó en tres flores tres términos algebraicos: binomio, trinomio y polinomio (ver Figura 58). Al observar el mapa es interesante ver cómo para ella tenía sentido cada elemento del mapa con los conceptos implicados en la construcción del mismo.

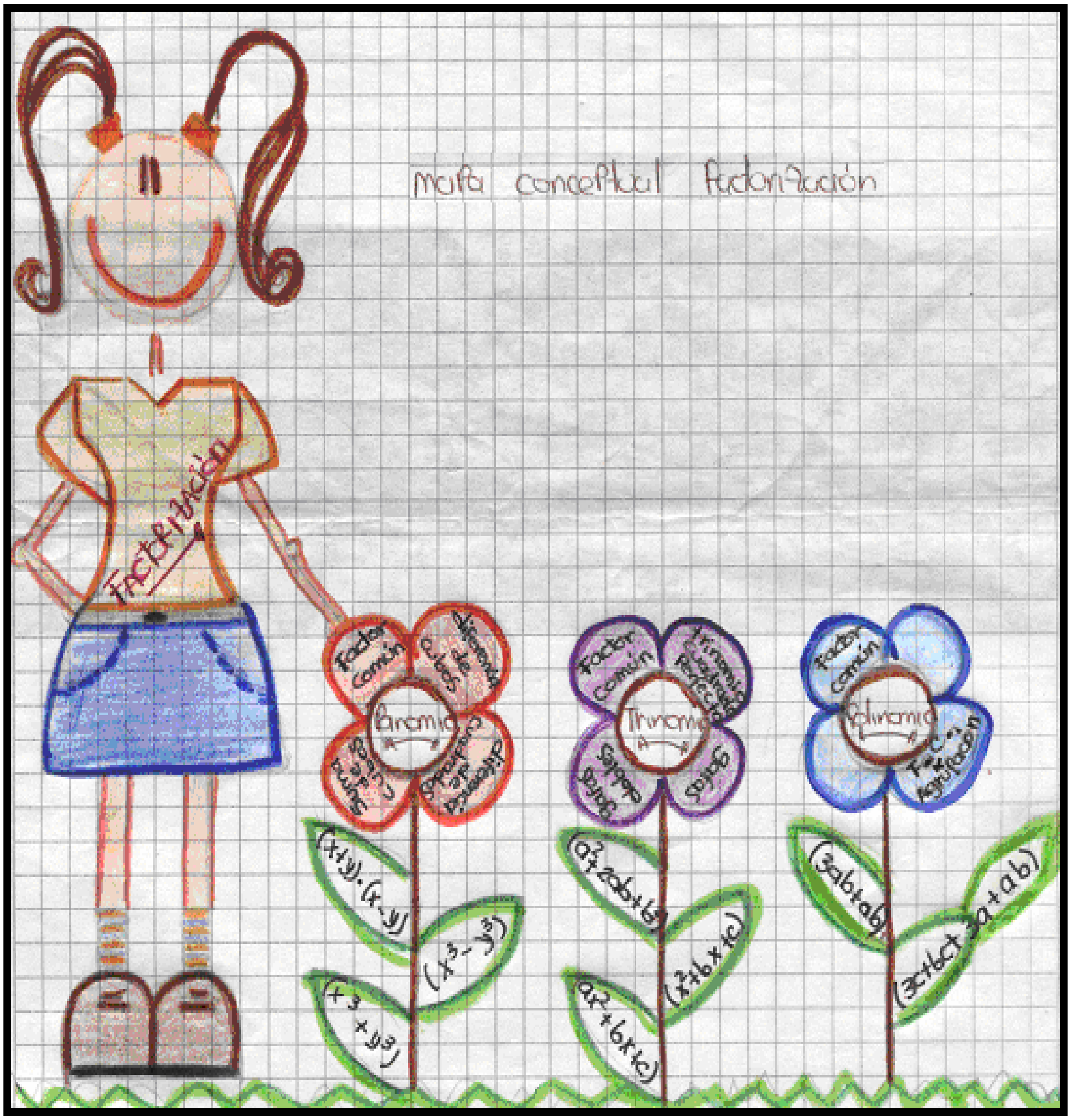


Figura 58. “El jardín de la factorización”, MC elaborado por Kelly.

Como se ha dicho anteriormente, es importante interactuar con el autor del mapa para comprender lo que este intenta transmitir a través de su elaboración. Veamos la entrevista que tuvimos con Kelly haciendo referencia a su mapa:

> M&J: ¿A qué se refiere cuando habla de “gafas” y “gafas dobles”?
>
> K: *Es un caso de factorización que nos enseñó la profesora Gloria. Ella decidió llamarlas “gafas” porque el nombre es muy raro y se nos olvida.*

M&J: ¿Recuerda el nombre de este caso de factorización?

K: *No.*

M&J: ¿Por qué le dicen "gafas[11]"?

K: *Porque hay dos paréntesis que parecen unas gafas, el de gafas dobles es porque se hace dos veces el procedimiento de las gafas.*

M&J: ¿Cuál es la diferencia entre un trinomio y un polinomio?

K: *El trinomio son tres términos y el polinomio son bastantes términos.*

M&J: ¿Tres términos no son bastante?

K: *Eh... no, porque es muy poquito; bastantes son cuatro o más.*

M&J: ¿Así que un polinomio son sólo aquellos que tienen cuatro o más términos?

K: *Sí*.

M&J: Entonces, ¿por qué ubicó en la hoja de la flor polinomio un ejemplo con dos términos?

K: *Lo puse porque se le puede sacar factor común.*

M&J: Sí, pero ¿no es eso un binomio?

[...]

K: *Pues sí. Entonces ¿es binomio o polinomio?*

M&J: ¿Usted que cree?

K: *Pues que son las dos cosas porque está en las dos flores.*

M&J: Y en la flor trinomio, ¿qué pasa ahí?

K: *También está.*

M&J: ¿Qué puede concluir sobre el trinomio?

K: *Entonces que también es un polinomio.*

Haciendo referencia a la conversación con Kelly sobre su mapa, a través de su exposición palpamos que se fue dando cuenta de que hacer un mapa

[11] De la conversación resulta particular la analogía que la profesora de Álgebra había hecho del Trinomio Cuadrado Perfecto con las gafas en aras de ayudarle al estudiante a integrar el caso de factorización. Consideramos interesante la estrategia que la profesora usó pero resaltamos que se debe tener especial cuidado con el manejo que se le da a los objetos matemáticos cuando se usa determinada metodología de enseñanza ya que se puede ir dejando de lado la rigurosidad de la matemática misma.

requiere de coherencia y de reflexiones previas. Además, de esta primera experiencia surgió un elemento que empezó a modificar la actitud y la percepción de Kelly frente a los MC.

> *"Yo pensaba que el mapa era solo por hacerlo, que era para que hiciéramos algo bonito. Pero no pensé que serviría para aclarar más mis ideas"* (Entrevista, 24 de octubre de 2006).

De esto, nuevamente, salta la importancia de realizar las discusiones y compartir significados pues este espacio propicia un acercamiento entre profesores y estudiantes. Desde ese entonces, la actitud de Kelly empezó a mejorar pues se animó paulatinamente a preguntar en clase y en ocasiones se atrevía a pasar a exponer representando a su grupo trabajo.

En este sentido, Ontoria (1997, p. 32) afirma:

> "El uso del MC como técnica de enseñanza-aprendizaje tiene importantes repercusiones en el ámbito afectivo-relacional de la persona ya que el protagonismo que se le otorga al estudiante, la atención y aceptación que se presta a sus aportaciones y el aumento del éxito en el aprendizaje favorece el desarrollo de la autoestima".

Por otro lado, una de las cosas que hacía particular el trabajo de Kelly era su capacidad para intentar comunicarse a través del mapa. Es así como, según Novak & Gowin (1998, p. 106):

> "un mapa que se puede calificar como bueno es aquel que es conciso y muestra las relaciones entre las ideas principales de un modo simple y vistoso, aprovechando la notable capacidad humana para la representación visual".

Ahora, en cuanto a la actividad III, "Juguemos con las Variaciones", la comprensión que realizó Kelly, la plasmó en la siguiente producción:

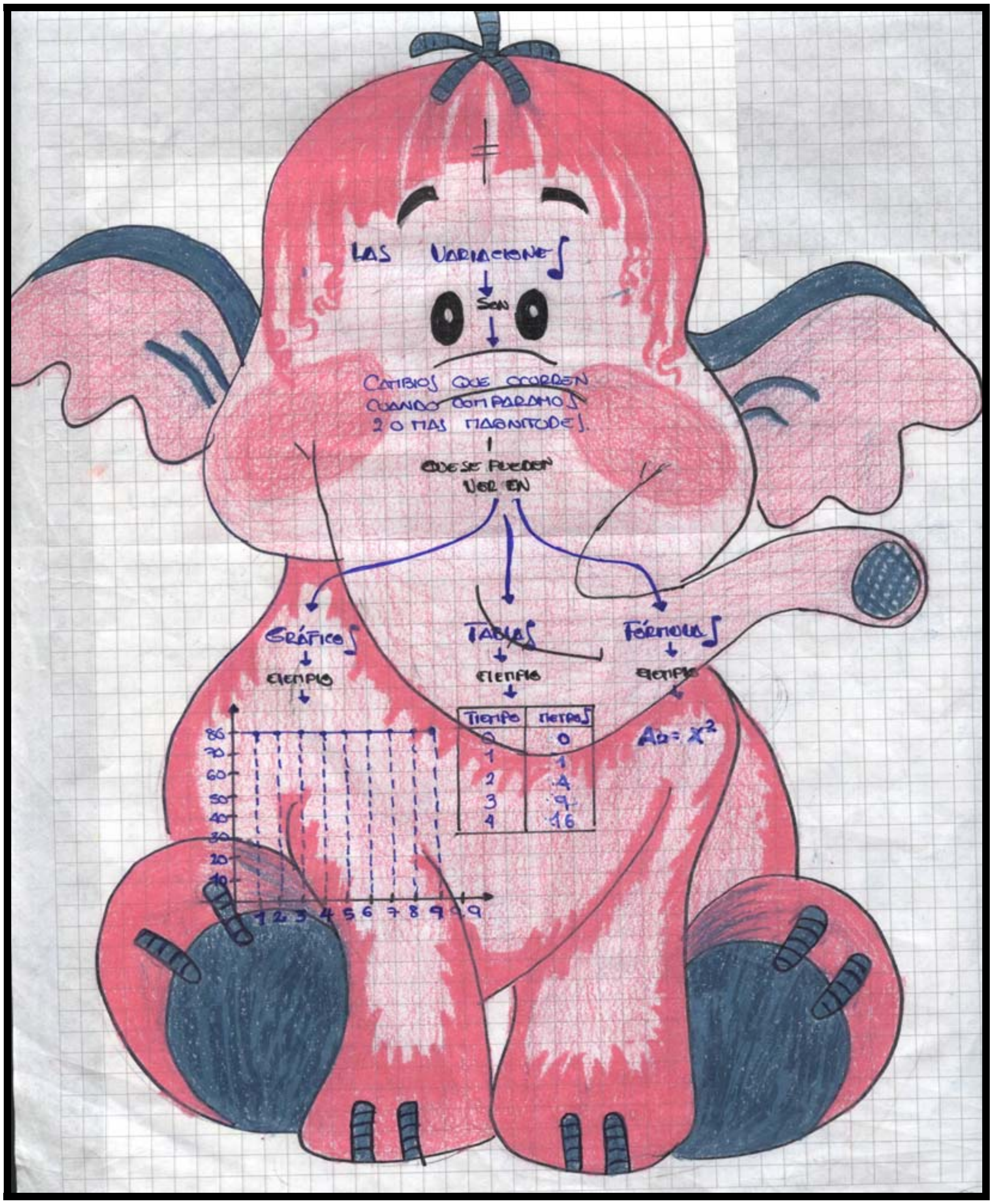


Figura 59. "La elefantita", MC sobre variaciones elaborado por Kelly.

A través de este mapa, Kelly permitió ver aspectos de su personalidad en cuanto a su forma de ser: tranquila, respetuosa, ordenada y sensible.

Referente a los conceptos, Kelly mostró claridad en el concepto general de variación y reconoció las distintas formas de representarla. Sin embargo, decidimos indagarla sobre el término "magnitud" que plasmó en su mapa ya que en ningún momento nosotros habíamos mencionado durante el transcurso de la experiencia.

> M&J: ¿Qué entiende por magnitud?
> Kelly se quedó en silencio y finalmente respondió:
> K: *Magnitud es como los metros, los litros.*
> M&J: ¿Así que en las variaciones solo se puede comparar los metros y los litros?
> K: *No, se pueden comparar más cosas.*
> M&J: ¿Como cuáles?
> K: *Pues el perímetro con el cuadrado recortado, también los metros cúbicos de agua con lo que uno paga.*

En esta última respuesta, podemos notar que Kelly recurre a las situaciones propuestas para justificar sus respuestas, demostrando así que contextualiza lo aprendido. Lo que mostró que una de las concepciones que permiten analizar la variación es la diferenciación de las magnitudes cambiantes en una situación de cambio Camargo & Guzmán (2005).

> M&J: Entonces, ¿qué es una magnitud?
> K: *Lo que se pueda medir para compararlo, como el cuadrado recortado con el perímetro.*
> (Entrevista, 27 de octubre de 2006).

Kelly tocó un aspecto importante en sus razonamientos como lo son las magnitudes, las mismas que Camargo & Guzmán (2005, p. 65) describen como: "propiedades de los objetos susceptibles de ser medidas. Conviene diferenciar entre magnitudes constantes y magnitudes variables". Conceptos que se hacen relevantes en la comprensión de función.

Por otro lado, si el lector observa cuidadosamente la siguiente figura, notará que los ejemplos que usó kelly en las representaciones no tienen concordancia (tabulación y la gráfica), ya que la gráfica representaba el perímetro de la figura resultante (el cual era constante), mientras que la tabla y la fórmula se referían al área del cuadrado recortado que corresponden a una cuadrática.

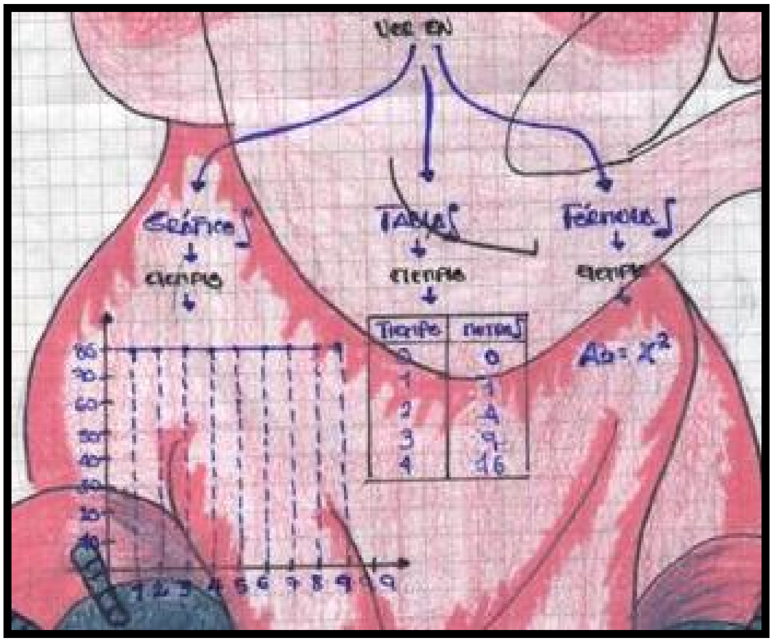


Figura 60. Aparte de “La Elefantita”

M&J: ¿crees que hay un error?

K: *Sí, pero solo era un ejemplo.*

(Entrevista, 27 de octubre de 2006).

Hasta el momento Kelly había logrado relacionar la variación con las magnitudes cambiantes que se involucran y las formas más comunes de representar la variación como son tablas, gráficos y fórmulas, sin embargo ella omitió la representación verbal.

Cuando avanzamos un poco más en el tema de función y luego de realizar las actividades “Analicemos los Servicios Públicos” y “Pentágonos en Fila” Kelly nos presentó un nuevo mapa al que llamó “Pooh y su función” el cual se muestra a continuación:

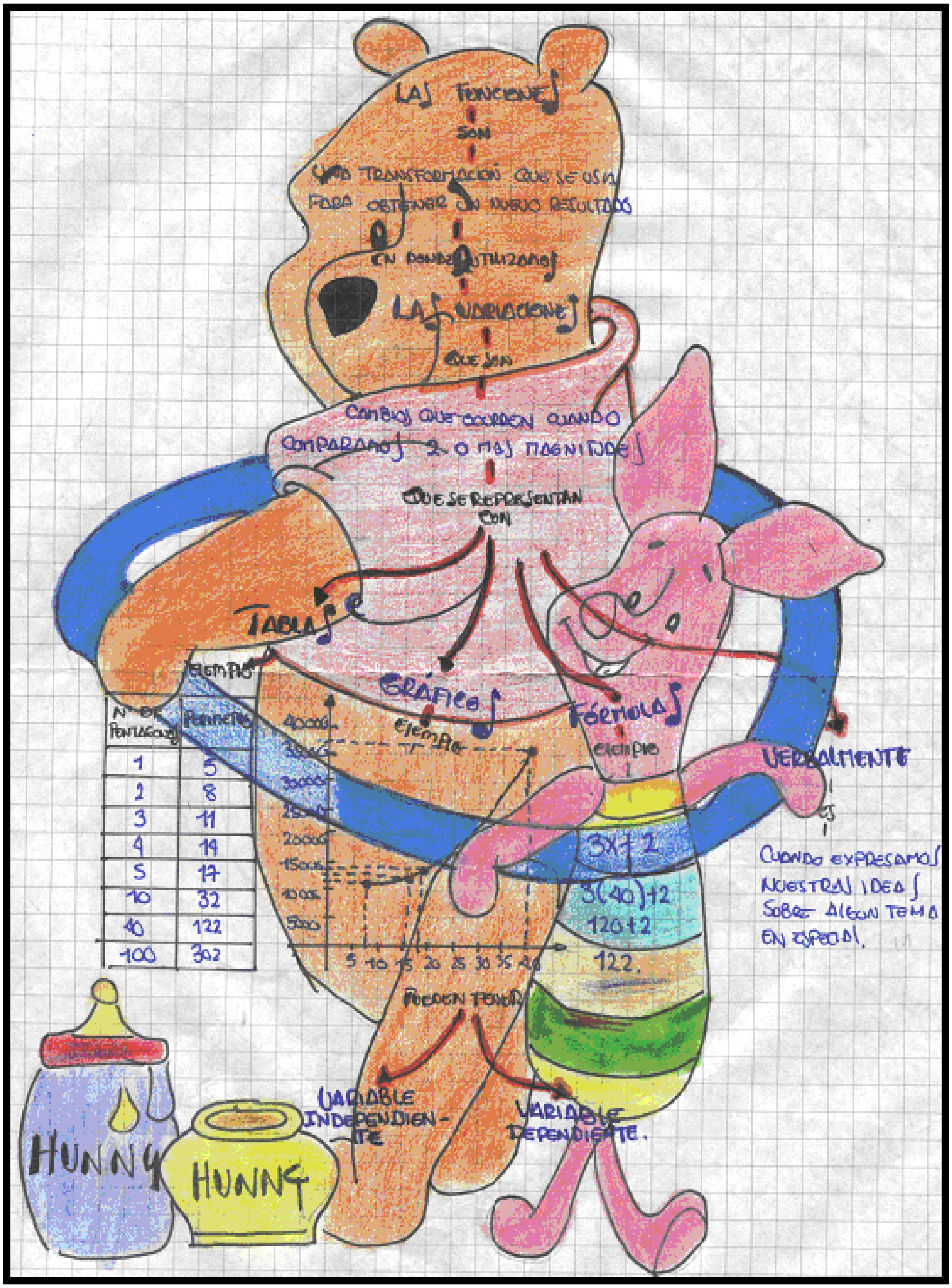


Figura 61. “Pooh y su función” MC de funciones de Kelly.

En él se ve la secuencia creativa que Kelly usó para el diseño de sus MC, mostrando con ello –por lo menos una inclinación por esta clase de dibujos que le permitían exteriorizar sus sentimientos y, de una u otra forma, el agrado al elaborar los mapas pues, como bien se puede observar, cada dibujo requería de tiempo y dedicación para su elaboración. El mapa es un reflejo del grado de motivación y creatividad del estudiante Jaramillo (2003a).

En la discusión sobre el mapa, Kelly mencionó que las funciones eran una transformación que se usaba para obtener un nuevo resultado. Estuvimos atentos a dialogar con ella sobre la atención que estaba fijando en el resultado de la transformación y no en la transformación misma, teniendo en cuenta las advertencias dadas por Sierpinska (1992) cuando menciona que se debe evitar que el estudiante centre solamente su atención en la importancia del resultado, porque se puede convertir en el simple hecho de calcular un valor y no se da la prioridad al proceso que se realiza.

Atendiendo a esta necesidad, no solo de Kelly sino del grupo en general, se complementó esta concepción con la actividad de "Analicemos los Servicios Públicos", ya mencionada, en la que se debía determinar el valor a pagar de cada factura del agua; para ello debían analizar detenidamente la situación teniendo en cuenta el cargo fijo a pagar según el estrato, el consumo en m^3 durante el mes y el subsidio. Aprovechando esta actividad le indagamos a Kelly sobre la concepción de función hasta hora adquirida por ella tratando de hacerle énfasis en la función como una transformación de situaciones de variación y no como sólo cálculos de resultados.

> M&J: ¿Cómo se obtiene el resultado en el valor a pagar en el recibo del agua?
> K: *Para eso nosotros tuvimos varias cosas en cuenta*
> M&J: ¿Cuáles?

> K: *El valor fijo a pagar por m^3 según el estrato, el cargo fijo que se paga mensual y lo que se descuenta.*

Nuestra finalidad era aclararle la importancia de comprender cómo se produce esa transformación que consideramos matemáticamente como función.

Consecuentemente, pudimos notar en Kelly la facilidad con la que comprendió cómo y cuándo se involucran las variaciones en las funciones. No obstante, lo que no tenía claro, según apreciamos, era quién se representa por medio de tablas, gráficos, fórmulas y verbalmente: las variaciones o las funciones o las dos. A continuación un aparte de la entrevista que trata lo mencionado:

> K*: Las variaciones son las que se representan, la tabla va cambiando al igual que la gráfica y ahí vemos la variación.*
> M&J: ¿Y la función?
> K: *También porque en las funciones también hay variación, por eso son una transformación.*
>
> (Entrevista, 1 de noviembre de 2006)

Posada et al (2005, p. 55) se refieren a la representación de las funciones de la siguiente manera:

> "Lo importante es poder vincular todos los sistemas de representación de una función desde situaciones que permitan hacer predicciones en un fenómeno de cambio. Lo que le resta importancia, por ejemplo al manejo mecánico de una función".

Otro aspecto del que debemos hablar es que Kelly no logró comprender que aunque en cada representación de la función y en cada situación de variación están implícitas las variables dependiente e independiente, sin profundizar en ellas, solo las asociaba con la representación gráfica, olvidando que ellas también están presentes en las demás formas de representación de una función.

> M&J: ¿En las tablas y fórmulas no hay variable dependiente e independiente?
> K: *pues si todas representan lo mismo, […] en las gráficas se entiende mejor.*
>
> (Entrevista, 01 de noviembre de 2006)

A continuación mostramos el aparte del MC en el que Kelly nos ilustró este aspecto (observe el lector que ella escribió “pueden tener”).

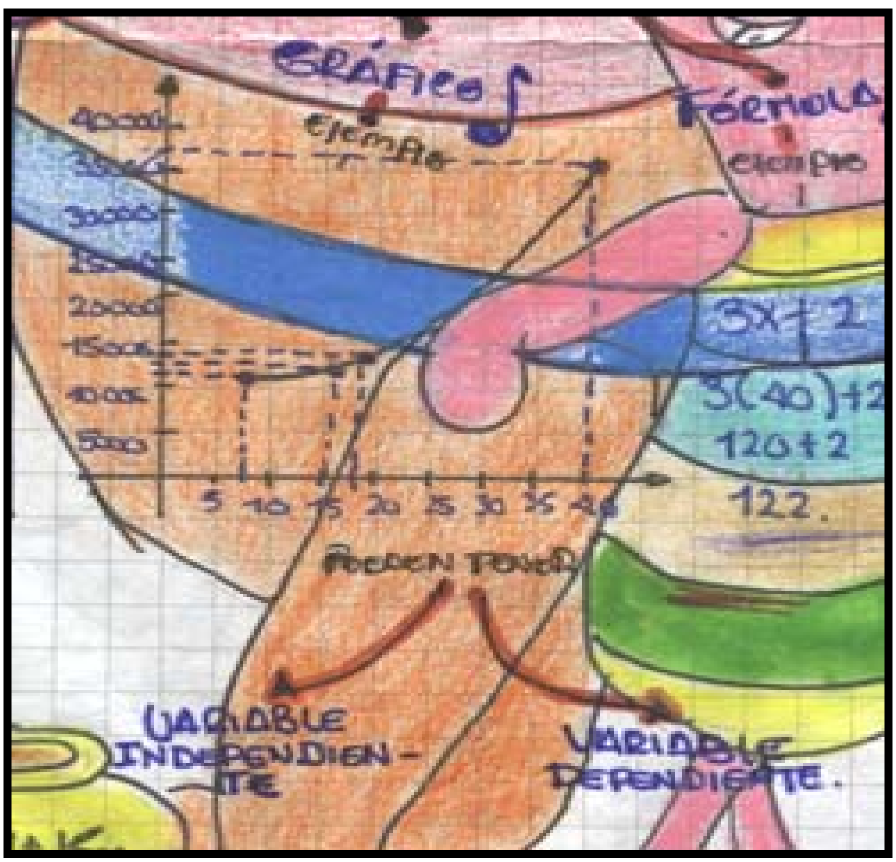


Figura 62. Aparte de “Pooh y su función”

Otra de las falencias que encontramos al analizar el mapa tenía que ver con la representación verbal de las funciones pues no parecía haber quedado muy clara para los estudiantes ni para Kelly. Pero cuando le referimos a ella nuestra suposición al respecto nos dijo rápidamente: "Son los cambios que suceden como en los ejemplos dados, es como explicar los cambios sin hacer las fórmulas ni las gráficas".

Inmediatamente su respuesta nos hizo recordar que la representación verbal de una función fue muy utilizada en el salón de clase puesto que en cada situación planteada estuvimos atentos a escuchar cómo los estudiantes describían con sus propias palabras los cambios ocurridos, haciendo ellos –sin darse cuenta– la representación verbal. Así que aprovechamos tales ejemplos para enfatizarle a Kelly la variación a través de la representación verbal: "Por cada pentágono pegado el número de lados se aumenta en tres"; "entre más agua gaste, más caro llega el recibo". En este sentido Sierpinska (1992, p. 34) afirma: "En el estudio de las funciones es importante llevar a los estudiantes a percibir y verbalizar los sujetos de los cambios".

Finalizada la negociación de significados llegamos al acuerdo con Kelly de que realizara una segunda versión del MC ya que una nueva versión es de ayuda en la búsqueda de claridad en los conceptos (Novak & Gowin, 1988).

En la Figura 63 se puede observar que Kelly mantuvo el mismo dibujo, asegurando –y afirmando lo que ya habíamos comentado al respecto:

> *"Me gustan mucho los matachitos como Winnie Pooh porque son muy tiernos y transmiten mucha paz; dejé el mismo dibujo porque como era sobre el mismo tema"* (Entrevista, 3 de noviembre de 2006).

Después de la entrega de mapa, Kelly nos comentó que le había servido re-elaborar el mapa ya que había aprendido más.

> *"Cuando yo hago el mapa, después yo me acuerdo casi de todo, y es más fácil para estudiar. Siento que he aprendido bastante"***.**
>
> (Entrevista, 3 de noviembre de 2006).

Al escuchar estas palabras corroboramos que Kelly estaba realizando un control adecuado de su proceso metacognitivo reconociendo así el beneficio que obtenía al implementar los MC como estrategia de aprendizaje Mateos (2001).

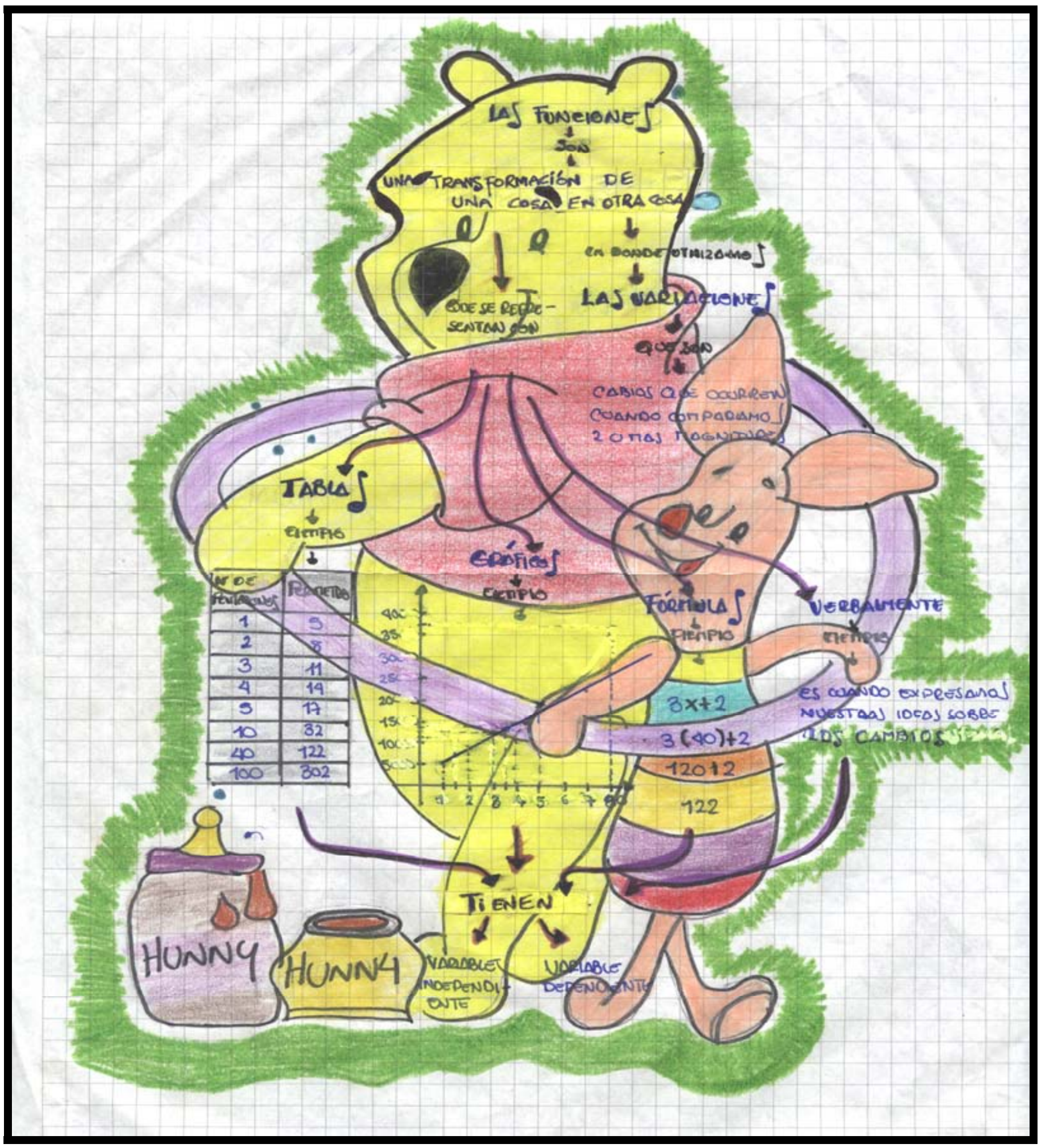


Figura 63. "Winnie Pooh y su función", segunda versión

Pudimos encontrar algunos leves cambios entre los dos MC que Kelly realizo sobre el tema de función, entre ellos el organizar las formas de representación a partir de un mismo ejemplo (Actividad "Pentágonos en fila"), Debemos comentar que en esta versión del mapa, Kelly no se atrevió a realizar cambios significativos, ella tuvo en cuenta los aspectos discutidos en la entrevista para los cambios de su mapa, esta vez si reconoció que las variables independiente y dependiente están presentes en las diferentes formas de representar una función. Pero Kelly no les atribuyó a las variables ningún significado, escribiéndolas en forma aislada en la parte baja del MC.

Para ello, le pedimos a Kelly que diera un ejemplo de situaciones de variación diferentes a las ya trabajadas en clase, ella propuso:

> K: *La plata que debo pagar según el número de camisetas que me compre.*
> M&J: ¿Cuáles son las variables implicadas en esta situación?
> K: *El dinero a pagar y la cantidad de camisetas que me compro.*
> M&J: Explíquenos cuál sería la variable dependiente y cuál la variable independiente
> K: *Lo que pago va a depender de la cantidad de camisetas que me compre.*
> M&J: ¿En conclusión?
> K: *La variable independiente es las camisetas que me quiera comprar y la dependiente es la plata que pago por ellas.*

Ahora, en cuanto al MC general que debían realizar como preámbulo a la evaluación, Kelly sobresalió por presentarlo de una forma clara y ordenada, como solía hacerlo. En el trabajo grupal fue ella quien lideró las acciones, apoyada por su capacidad de elaborar dibujar y la destreza que había adquirido para la elaboración de MC.

Además demostró haber alcanzado un buen nivel en los temas matemáticos, por lo que el mapa general que se permitió sacar como herramienta de consulta en la evaluación escrita para todos los estudiantes logro mucha influencia, en su estructura y dibujo, del trabajo individual de Kelly. A continuación su mapa.

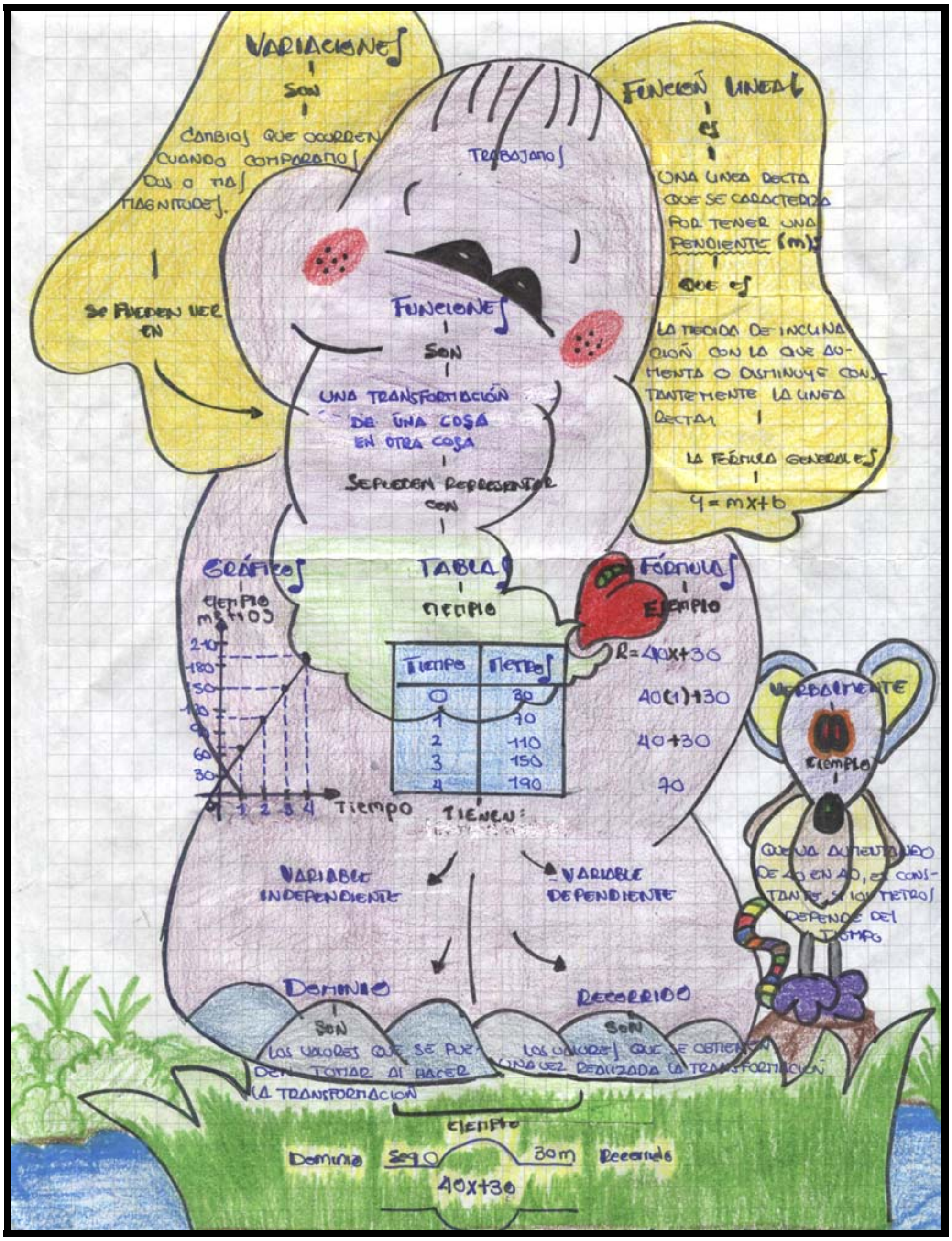


Figura 64. Mapa General de Kelly.

En cuanto a la noción de función, fue relevante para Kelly las formas de representar una función (gráficas, tablas, fórmulas y verbalmente), como lo muestra en su mapa, pero reiteró que las funciones son una transformación de una cosa en otra. Quisimos profundizar en esta concepción de Kelly para que no pareciera como una frase recitada y que cobrara el significado que tiene. La indagamos de la siguiente manera:

> M&J: En la actividad “Midiendo el agua, ¿cuáles fueron las cosas que se transformaron?
>
> K: *Esta vez no hubo transformación de cosas.*
>
> M&J: Entonces, ¿qué hicimos?
>
> K: *Lo que hicimos fue comparar vasos pequeños que se agregaban, con la altura del vaso grande.*
>
> M&J: ¿Y esta situación se puede representar por medio de una función?
>
> K: *Ah si profes, lo que pasa es que el nivel del agua depende del otro valor que es el número de vasos agregados.*
>
> M&J: ¿O sea que es función?
>
> K: Ah… como *en esta situación hay una relación entre dos cosas que se están comparando, esto produce una transformación.*
>
> M&J: ¿Qué tipo de relación encontró?
>
> K: *Por cada vaso agregado, aumenta el nivel de altura sube 2 cm.*

Le mencionamos que una función no puede ser vista como algo estático, sino como números, situaciones que dependen de un contexto o de su forma de variación particular.

Kelly también relacionó la variable independiente con el dominio y la variable dependiente con el recorrido, dijo que el dominio son los valores que se pueden tomar al hacer la transformación, y el recorrido, son los valores que se obtienen una vez realizada la transformación, como se observa en la siguiente figura:

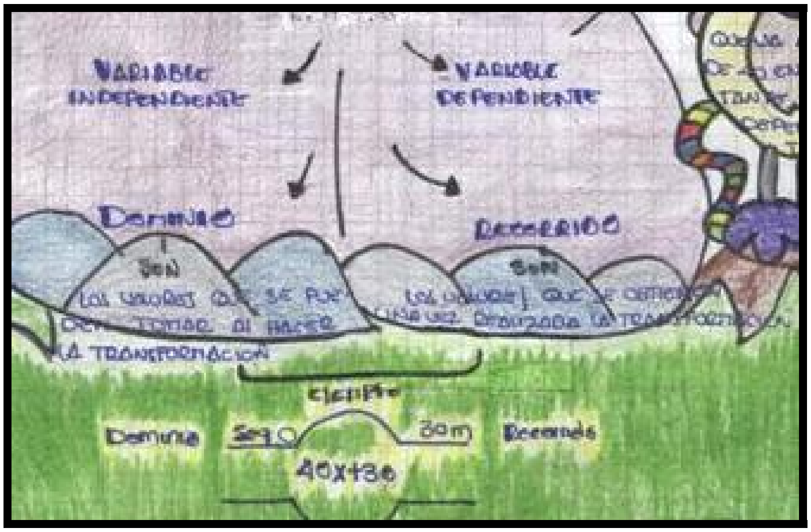


Figura 65. Aparte del Mapa General de Kelly.

Notamos la claridad que Kelly tenía de los conceptos de dominio y recorrido, como se muestra en la figura anterior, al tener en cuenta en el ejemplo del carro, donde la variable del dominio eran los segundos y la variable del recorrido eran los metros, asociando matemáticamente la forma como ocurre la transformación.

Sin embargo, aunque Kelly realizó un excelente trabajo con los MC, una de sus mayores dificultades fue hallar una expresión matemática cuando se requería, ella tomaba datos, observaba y graficaba, pero el manejo algebraico no le era tan natural; dificultad que ella misma manifestó en la actividad del 3 de noviembre, “La taza de café y el carro”. Para ser exactos, la dificultad consistía en que ella no sabía cómo plasmar la variabilidad en una expresión matemática. A pesar de las actividades planteadas y su proceso individual de aprendizaje, esta dificultad en Kelly persistió, *“casi siempre yo entiendo en las situaciones de variación, pero me cuesta mucho explicarlo con letras”*

Finalmente, además de los buenos resultados que Kelly obtuvo del trabajo con los MC en la elaboración de los conceptos de Función y Función Lineal, fue ella una de las estudiantes que participó en la experiencia de exposición en la clase de Seminario de la Universidad, mencionada anteriormente.

Durante la exposición Kelly estuvo muy segura de sí misma esto porque tras la elaboración de cada mapa, cada uno de ellos se fue convirtiendo en un buen aliado que le proporcionaba seguridad.

Tal seguridad se reflejó cuando habló frente al auditorio de la clase de Seminario “Matemática y Sociedad”; a medida que transcurría el tiempo de exposición lucía tranquila y libre, beneficios que se obtienen, según Ontoria (1997) por el uso frecuente de la técnica de los MC.

> “Los mapas me sirvieron, porque ahí llevaba mejor organizadas mis ideas y así me siento más segura a la hora de hablar en público”.
>
> (Entrevista, 14 de noviembre de 2006)

Finalmente, en el momento de dialogar con Kelly sobre la evaluación final, ella nos comentó sobre cómo se había sentido:

> K: *Cuando llegué al previo no llegué tan segura, pero fui leyéndolo y comprendí poco a poco.*
>
> M&J: ¿Utilizó el MC general?
>
> K: *Mmm, casi no lo utilicé para nada, pues yo lo tenía grabado y me acordaba de todo lo que decía.*

Tradicionalmente, los profesores se encuentran en sus aulas de clase con estudiantes cuyo aprendizaje se fundamenta en la memoria pero la mayoría de las personas tienen una memoria un poco pobre para los detalles concretos y que logran recordar más a través de imágenes visuales, Novak & Gowin (1988).

> M&J: ¿O sea que estudió con el MC?
> K: *Sí, estudié mientras lo hacía y así no gasté tanto tiempo para aprenderme las cosas.*

Para concluir con la entrevista, le hicimos la siguiente pregunta, para tratar de que ella misma concluyera si los mapas le habían dejado algo positivo para su proceso de aprendizaje.

> M&J: ¿Considera que los MC le aportaron algo positivo a su proceso de aprendizaje en matemáticas?
> K: *Claro, me he dado cuenta que con los MC es más fácil entender un tema porque uno no se queda tan sólo con la explicación del profesor y lo que copia en el cuaderno, sino que uno tiene que resumir las ideas como las entiende, como en el caso de la función, del dominio, el recorrido y sus variables..*

trevista, 14 de noviembre de 2006).

"ME GUSTAN LOS MAPAS CON DIBUJOS"

Tercer Nominado

"Profes, yo entendí que la variación es encontrar qué cambia y por qué, tratar de expresarlo en una fórmula y se puede también graficar" Lizeth.

Lizeth Xiomara Rueda.
A sus 13 años era una joven responsable, introvertida y con mucho carisma, siempre había estudiado en el Instituto La Libertad, y lo consideraba su segundo hogar. Se destacaba por su dedicación al estudio. Afirmó que las matemáticas son importantes para las personas.

Como en todo salón de clases, siempre hay estudiantes que se distinguen de los demás por su responsabilidad y por su capacidad de raciocinio frente a los objetos matemáticos que se les presenta. Este es el caso de Lizeth que desde las primeras clases realizadas, llamó nuestra atención por las reflexiones matemáticas que hacía cuando pasábamos orientando las actividades por cada uno de los grupos. Pero por su perfil, no le gustaba mucho hablar frente a sus compañeros, empero lograba destacarse por el trabajo individual que realizaba.

Además, al momento de exponer, ella prefería usar la táctica de explicarle a alguno de sus compañeros de grupo el tema para que no le tocara hablar a ella. Con ello, Lizeth mostró el perfil propio de un líder; características que quisimos aprovechar al incorporarla al grupo de investigación.

Cuando se inició la elaboración de los MC percibimos una buena aceptación y disposición de parte de Lizeth ya que para ella no era tan desconocida esta técnica. En otras ocasiones había trabajado mediante MC en materias como español y biología, nos comentó, claro que con una estructura de elaboración diferente al que nosotros propusimos para nuestra clase.

En la actividad introductoria a los MC, "Ordenando palabras", el grupo de Lizeth fue uno de los que preguntó *"¿Hay que colocarle palabras?"*, refiriéndose a los conectores. A continuación presentamos el esquema planteado por el grupo de Lizeth:

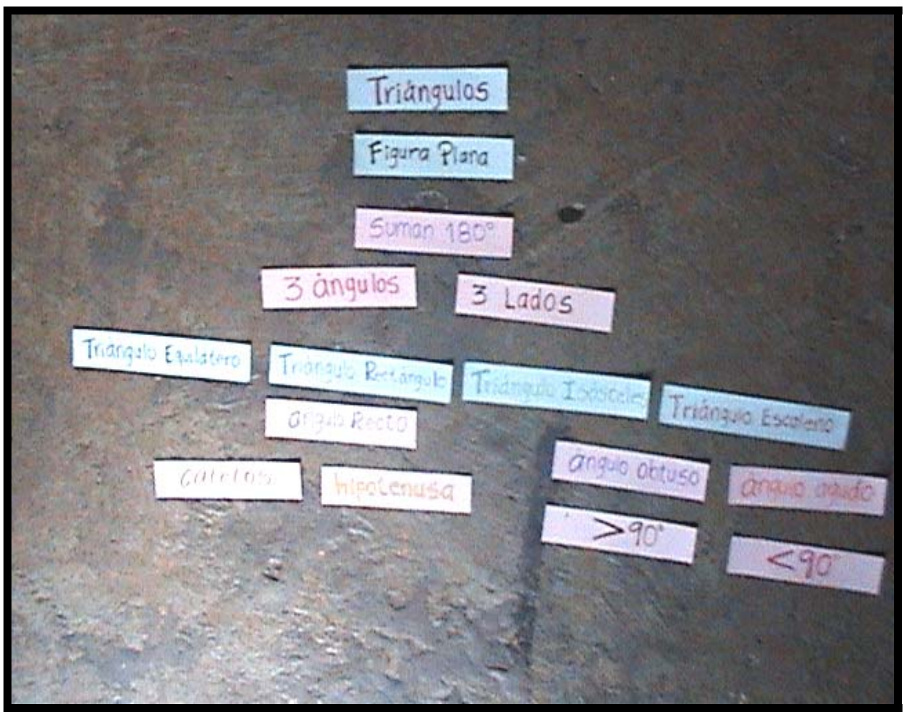


Figura 66. Organización de las palabras que realizó el grupo de Lizeth

La organización de los conceptos de este mapa generó debate dentro del grupo ya que Lizeth discutía con un compañero de su grupo sobre si la única clase de triángulo que poseía ángulo obtuso era el escaleno. Otro grupo dijo que era falso porque en ocasiones ni siquiera éste mismo lo tenía, y dieron como ejemplo un triángulo con ángulos de 60, 70 y 50 grados.

También discutieron si habían triángulos isósceles, que en algún caso especial, tuvieran sus ángulos equivalentes menores de 45º. Además de lo anterior, en el grupo de Lizeth se presentó una duda ya que no pudieron decidir quién sumaba 180º, si los 3 lados o los 3 ángulos; explicaron que por ello colocaron la palabra en ese sitio para que no les sobrara ninguna.

Fue así como el sólo hecho de hacer una organización con palabras resultó productiva, pues se problematizó en clase algunas de las características que poseen los triángulos, sus lados, sus ángulos, la suma de los mismos, las clases de triángulos.

De esta manera se logró un primer acercamiento a la negociación de significados en donde, como lo menciona Ontoria (1997), se espera vivir una experiencia compartida mientras se van comprendiendo, tanto profesor como estudiante, los conceptos.

Reiteramos, contrario a los dos nominados anteriores, la inicial aceptación y comodidad frente a la elaboración de MC por parte de Lizeth. Eran notorios en ella el esmero, la creatividad y cariño que ponía en la elaboración de sus mapas. En la siguiente página presentamos el primer mapa creativo que Lizeth hizo sobre el tema de triángulos –el lector recordará que “mapa creativo” fue el nombre dado por los estudiantes a los MC que no tienen la construcción convencional de rectángulos y elipses ni la jerarquía entre ellos implícita.

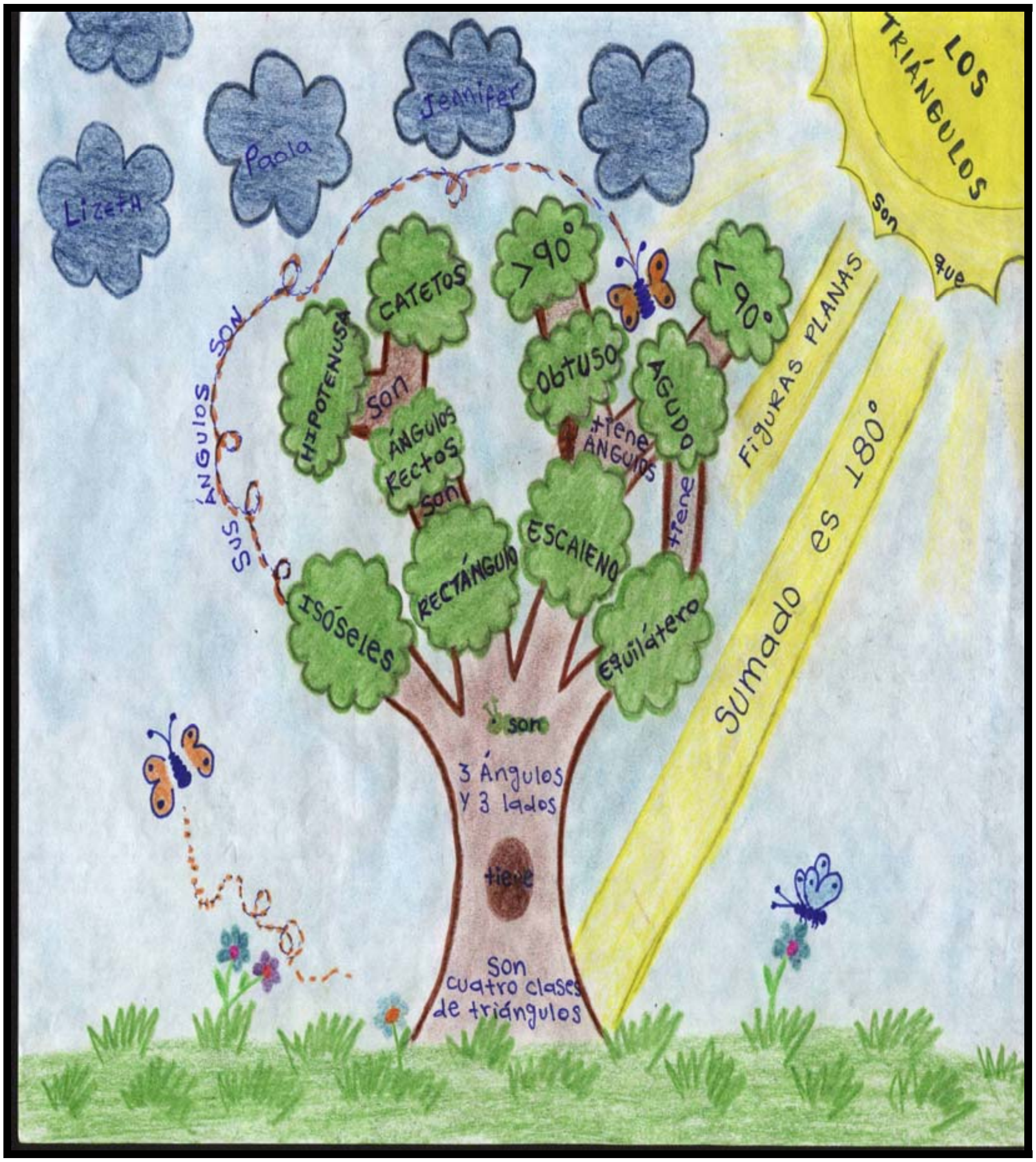


Figura 67. “El Triángulo Primaveral”, mapa elaborado por el grupo de Lizeth.

A través este mapa pudimos darnos cuenta que para Lizeth todavía no sabía qué los ángulos interiores de todo triángulo “sumaba 180º”. De igual forma, al indagar con ella sobre esto nos dijo: *“aún no tenía resuelta esa duda, por eso lo puse en la raíz del árbol, ya que así se relaciona con todo el tema”.*

En sus palabras se reflejaban las dudas que causaban el trabajar estos conceptos en una nueva manera, dejando a un lado la “tradicionalidad” en el estudio de los mismos, tal como se evidenció durante la actividad.

Ante esta duda, que no solo poseía Lizeth, procedimos a hacer un ejercicio en clase de medición de los ángulos internos de un triángulo para que ellos mismos confirmaran la propiedad y aclararan la duda.

> *"Es más creativo hacer los mapas así, escogí el árbol porque se alimenta del sol, los rayos me parecieron que podían ser los conectores y todo lo que tiene en el tronco le da vida a las ramas"* (Diario de campo, 22 de septiembre de 2006).

Estas palabras de Lizeth, reflejaron lo que considera Jaramillo (2003a) al referirse a los MC cuando comenta que al realizar el mapa, se exterioriza en forma libre y autónoma los aspectos cognitivos, intelectuales y emocionales del autor.

Al dar inicio a las actividades que ayudarían a comprender la variación, Lizeth elaboró varias versiones del mismo mapa tratando de aclarar cómo entendía la variación, este fue su primer intento:

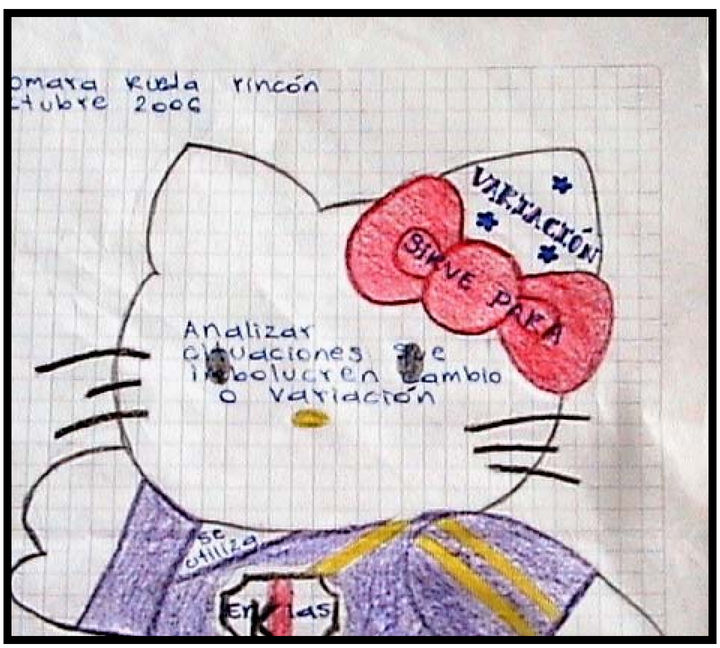


Figura 68. "Hello Kitty", primera versión del MC sobre variación.

Estas fueron sus primeras impresiones cuando intentó explicarnos el mapa:

> *“Me pareció más difícil hacer este mapa, ustedes nos dijeron que hiciéramos el mapa sobre la variación, pero no nos dictaron nada en el cuaderno. Aquí no se qué escribir y tengo que esforzarme más para decir lo que he entendido al resolver los problemas de la guía”* (Entrevista, 24 de octubre de 2006).

En este primer intento, Lizeth transcribió literalmente el objetivo de la guía “Juguemos con las Variaciones”. Además, manifestó que no tenía ideas muy claras para plasmar en el mapa; Novak (2006), en una entrevista concedida a Eduteka, plantea que:

> “Los estudiantes que no entienden los significados de los conceptos (así hayan memorizado la definición) construyen, en el mejor de los casos, mapas conceptuales no muy dicientes”.

Como nuestra intención inicialmente no era darles los conceptos como tal, sino que a través de la realización de las actividades ellos mismos fueran explorándolos, le dijimos que no se preocupara y le sugerimos estar atenta a las siguientes actividades sobre variación para que luego elaborara un nuevo mapa.

Fue así como estuvo atenta a las clases posteriores y elaboró su segundo mapa sobre variación, después de finalizada la actividad “Analicemos los Servicios Públicos”, mapa que aparecerá a continuación:

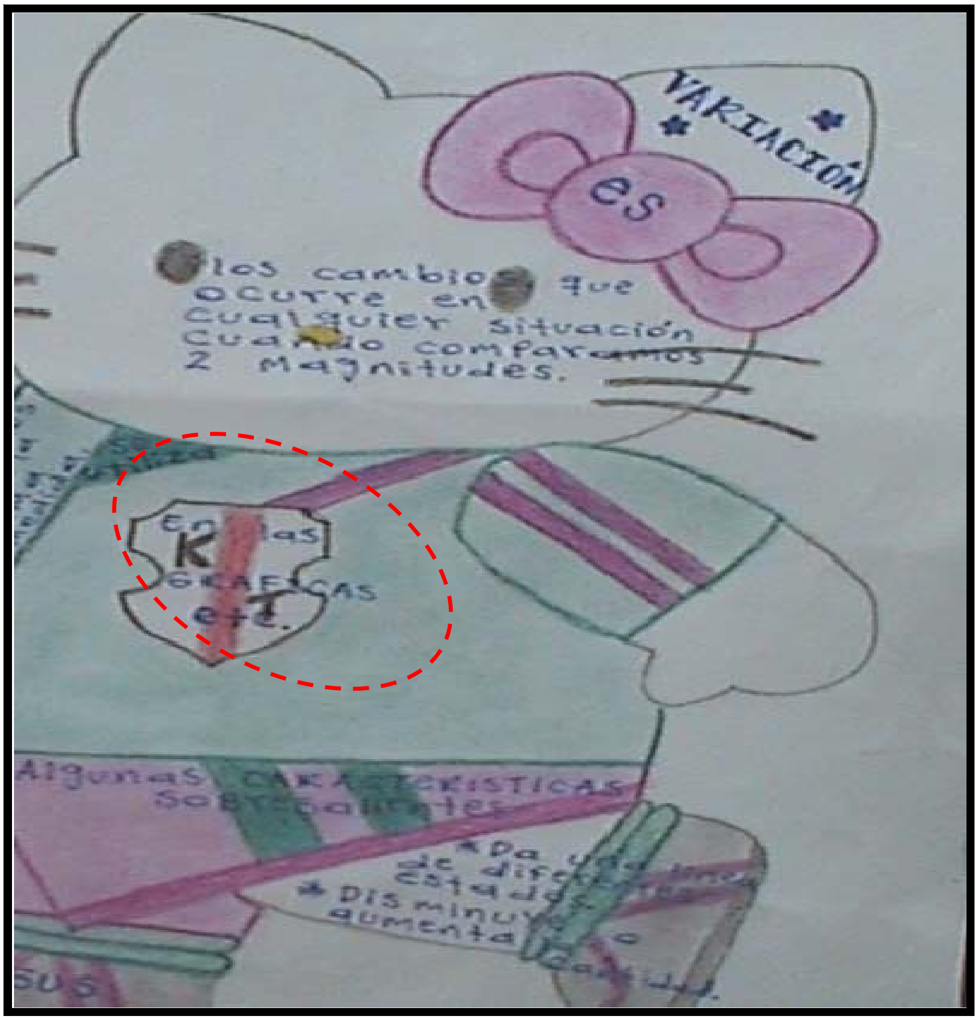


Figura 69. Segunda versión del MC de Lizeth sobre variación.

En la negociación de significados, comentamos con ella algunos aspectos en los que todavía no mostraba mucha claridad. Refiriéndonos a lo que está encerrado con el círculo rojo en la Figura anterior, le preguntamos:

> M&J: ¿Por qué dice que la variación se utiliza en las gráficas?
>
> Lizeth (L): *Porque si quiero pagar menos, ahorro más agua y si uno gasta más, pues paga más; por eso la variación explica estas cosas y se utiliza en todas las casas y la muestran en los recibos utilizando gráficos de barras.*

> M&J: Bien, tiene razón al decir que la variación se hace cargo de situaciones cotidianas. Explíquenos, ¿la variación se muestra en gráficos o se utiliza en gráficos?
> L: *¡Ah! Pues se muestra.*
> M&J: ¿Sólo en gráficos?
> L: *No solo en las gráficas sino también en las tablas, fórmulas y cuando lo decimos, por eso yo coloqué etc., ¿está mal?"*
> M&J: Sus ideas están bien lo que pasa es que debe plasmar todo lo que sabe en sus mapas.
>
> (Entrevista, 27 de octubre de 2006)

Como bien hemos venido exponiendo, el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referentes a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. Entre los sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las fórmulas y las expresiones analíticas (Lineamientos Curriculares, 1998, pp. 72, 73).

Fue sorprendente la motivación de Lizeth con el trabajo que realizó apoyados por las aprobaciones que le habíamos dado. Fue así que, de manera espontánea, nos preguntó si podía realizar una tercera versión del mapa, que ya comprendía mejor los conceptos y tenía otros que quería incluir.

De tan particular situación recordamos a Ontoria (1997) quien menciona que la motivación por el aprendizaje permite en los estudiantes transformar en acción las estrategias adecuadas para el dominio de un tema. Por supuesto que nosotros le avalamos su iniciativa de realizar otro mapa. La elaboración de este mapa fue después de trabajar la Actividad V, "Pentágonos en Fila", que se encuentra en la siguiente página:

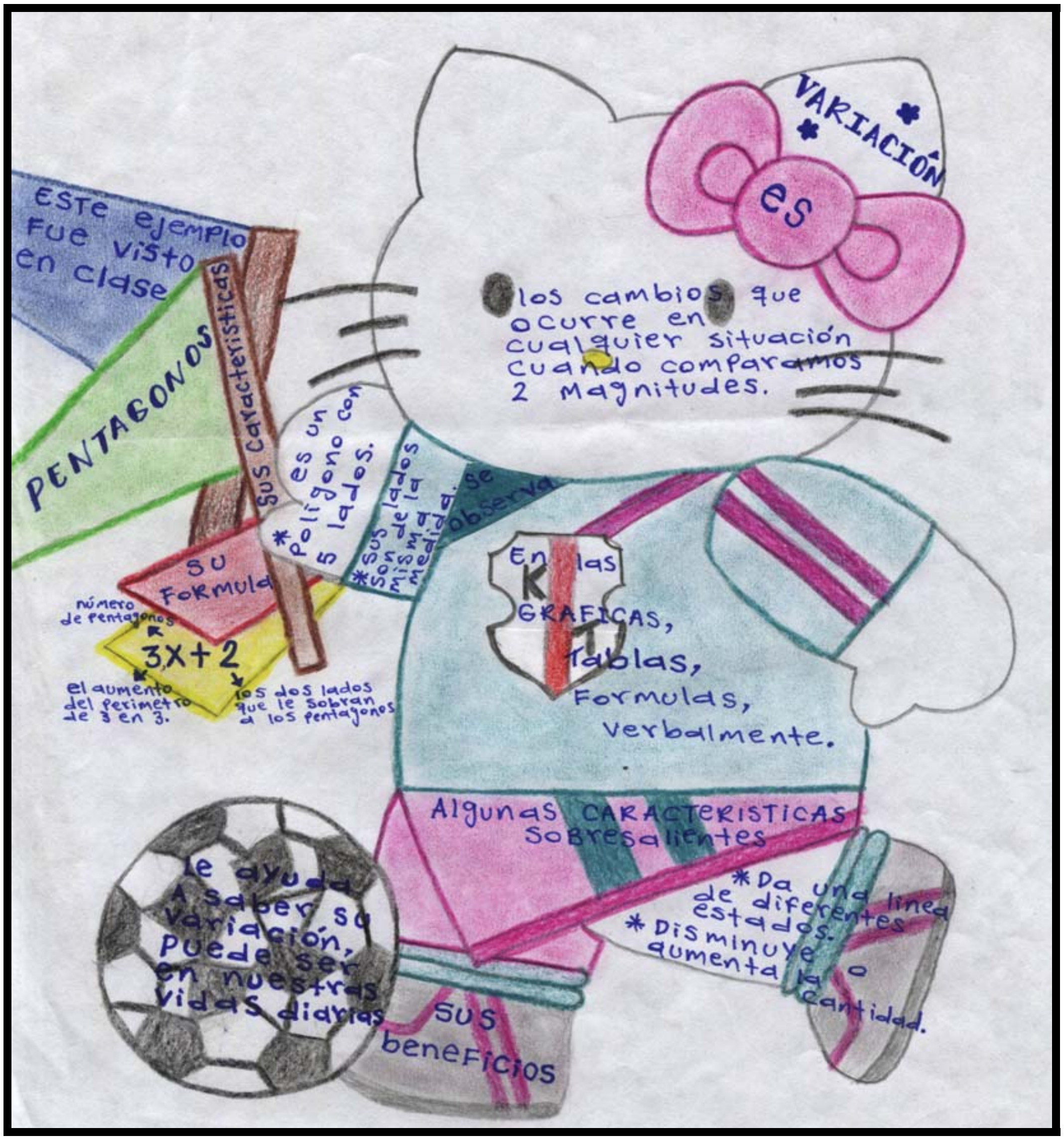


Figura 70. Tercera versión de “Hello Kitty” elaborada por Lizeth.

De esta tercera versión, Lizeth nos dijo:

> *“Entendí más al hacer este mapa porque pude agregarle otras cosas que antes no entendía como los pentágonos y su perímetro. La variación se ve porque si hay más pentágonos el perímetro va a ser más grande. Profes, yo entendí que la variación es encontrar qué cambia y por qué, tratar de expresarlo en una fórmula y se puede también graficar”* (Entrevista, 31 de octubre de 2006).

El lector podrá notar los cambios significativos en los conceptos incluidos en las tres versiones realizadas por Lizeth sobre variación: entre el primer mapa y el segundo, Lizeth amplió su concepción de variación; cuando realizó el tercer mapa, incluyó el ejemplo de los pentágonos, que consideraba pertinente para explicar mejor la variación.

Al ver este tercer mapa sentimos la necesidad de indagarla sobre la razón conceptual que la llevó a escribir en una de las piernas de su dibujo "da una línea recta de diferentes estados". A esto ella contestó:

> *"Es una recta que puede ser diagonal o curva y disminuye o aumenta la cantidad, como con los pentágonos, a mayor número de pentágonos, el perímetro es más grande y al contrario también, ¡Ah! y esto es una línea recta, ¿cierto?"* (Entrevista, 31 de octubre de 2006).

En el desarrollo del tema de funciones, Lizeth vivió un proceso "paso a paso" ya que se evidencian sus procesos cognitivos en la elaboración de las tres versiones que hizo de sus mapas, igual que en el mapa de variación. Además nos comentó, entre otras cosas, que se había sentido cómoda haciendo el primer MC de Funciones.

> *"Lo primero que hice fue buscar un dibujo que se relacionara con las funciones y como son el tema central del mapa, escogí el Sistema Solar porque las funciones son como el sol y muchas cosas giran alrededor de ellas"* (Entrevista, 3 de noviembre de 2006).

Algo interesante que realizó Lizeth para la elaboración de su mapa fue un planeación previa que le permitió obtener el MC que presentaremos con el rótulo de Figura 71. Ella describe, con sus palabras, el proceso que realizó:

> *“Primero hice un borrador donde puse los términos clave como funciones, variación, variable dependiente, variable independiente, dominio, recorrido, etc., tratando de organizarlos, todavía no tenía claro lo de las características de algunos términos que me confundían”* (Diario de campo, 1 de noviembre de 2006).

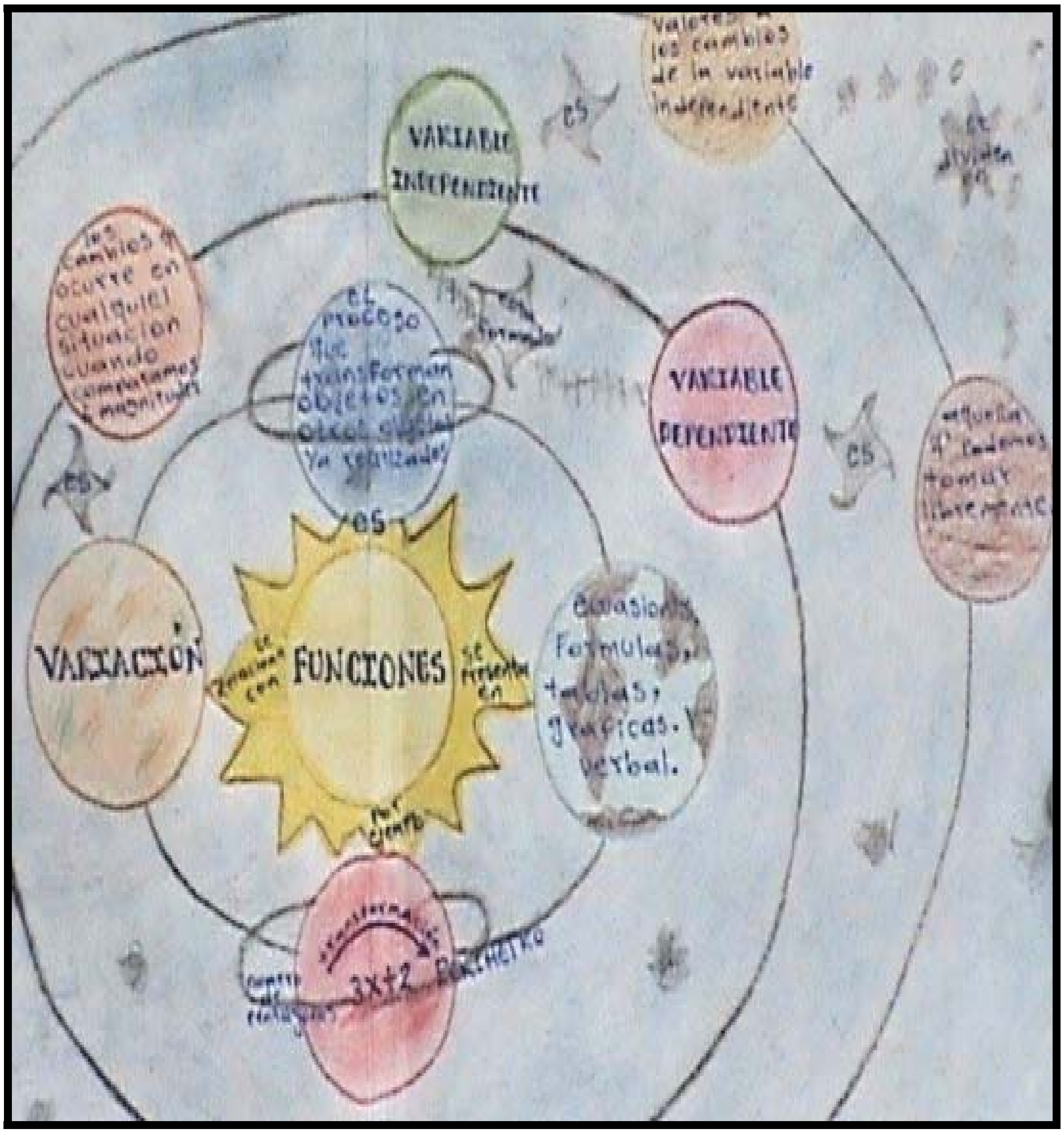


Figura 71. “La Función Espacial” versión inicial realizada por Lizeth.

Es importante resaltar que Lizeth ya estaba desarrollando procesos metacognitivos pues autorregulaba su aprendizaje y se autoevaluaba, como bien se puedo percibir en el comentario anterior. Según Mateos (2001) la elaboración de MC posibilita la reflexión de los estudiantes sobre la forma en que aprenden, leen, escriben o resuelven problema y, por tanto, se favorece el desarrollo de la reflexión metacognitiva.

Observamos con satisfacción el progreso que tuvo Lizeth en la elaboración de MC en la evolución del aprendizaje de los conceptos de función como lo es su definición y las características de sus variables, ya que, aparecieron nuevas asociaciones expresadas en el mapa. Estas dan muestra de un aprendizaje significativo puesto que relacionó conceptos familiares como variación con los nuevos temas que fueron vistos en clase: las funciones, dominio y recorrido, variable dependiente e independiente, confirmando lo expuesto por Jaramillo (2003b) al decir que los mapas posibilitan al estudiante encontrar nuevas relaciones y de esta forma, nuevos significados.

Sin embargo, esta primera versión del MC sobre Función evidencia apropiaciones conceptuales confusas por parte de Lizeth en la construcción del concepto.

A propósito de esto, Novak & Gowin (1988) consideran que el estudiante al exteriorizar lo que sabe en el MC, este se convierte en un instrumento efectivo para evidenciar las interpretaciones no aceptadas. Lizeth mostró algunas relaciones interesantes, para las cuales fue necesario el diálogo con el fin de esclarecer los conceptos allí trabajados: la primera hace referencia al concepto de función. Veamos la Figura 72:

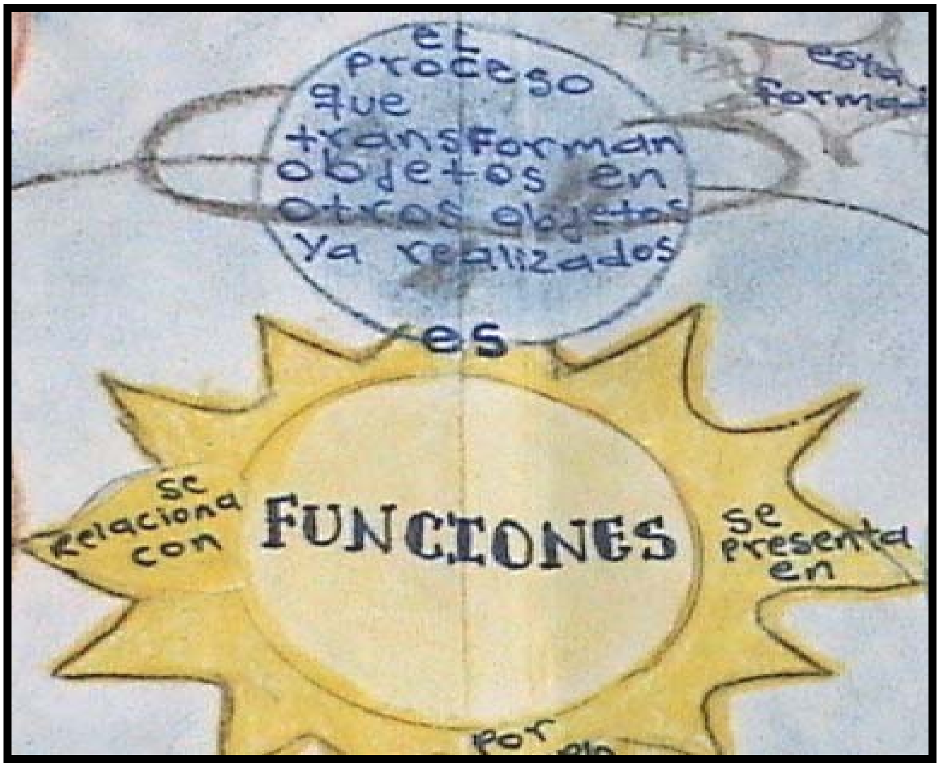


Figura 72. Aparte del MC sobre Funciones.

Fue así que, después de analizar el mapa, nos llamó la atención la palabra “proceso” que usó para definir Función. Ante nuestra curiosidad en el referente, esto nos explicó:

> M&J: Al dar el concepto de función, ¿a qué se refiere con “proceso”?
>
> L: *Es como ustedes nos explicaron que la función es como una maquinita que hace un procedimiento para transformar un objeto.*

Dadas estas explicaciones, se hizo necesario concretar el concepto de función como una transformación, el cual fue el enfoque que quisimos dar en este trabajo. Retomamos la analogía planteada de concebir la función como una máquina que transforma objetos, le aclaramos a Lizeth que la función no es la sola máquina sino que se debe atender a todo el proceso y la relación que experimentan entre sí las variables y cómo ocurre esta relación.

La respuesta de Lizeth evidencia lo mencionado por Sierpinska (1992, p. 6) quien manifiesta: "¿A qué hace, entonces, alusión la definición de Función? […] Se refiere entonces al mundo de relaciones entre cambios u objetos cambiantes o al mundo de procesos que transforman objetos en otros objetos".

Por otro lado, el segundo diálogo se dio con el fin de esclarecer en Lizeth el concepto de las variables independiente y dependiente pues, según su mapa, confundía la una con la otra, como su puede observar en la siguiente Figura:

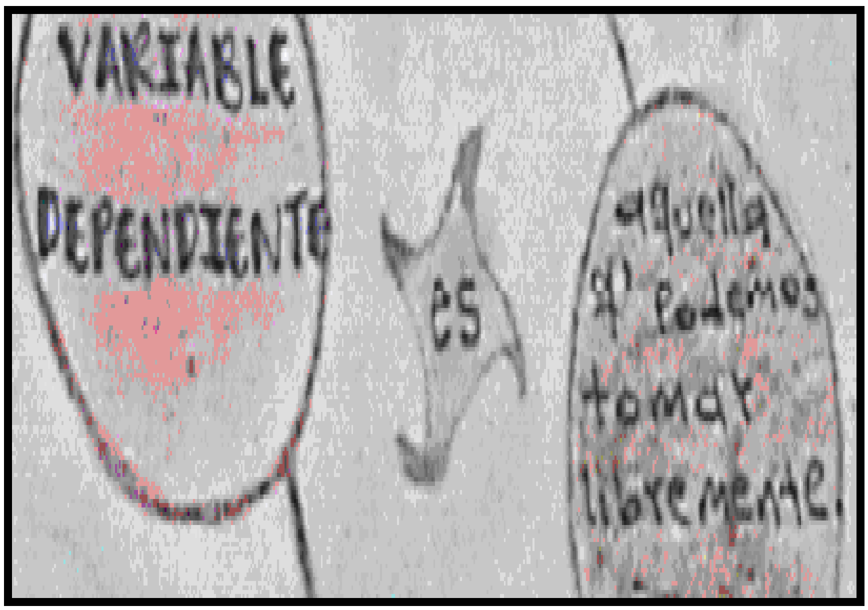


Figura 73. Aparte del mapa "La función Espacial".

Para la respectiva aclaración que ameritaba esta dificultad que podría traer serios problemas en el aprendizaje de nuevos entes matemáticos, recurrimos a la actividad "Pentágonos en Fila", veamos:

M&J: ¿En el ejercicio de Pentágonos en Fila, qué varía?

L: *Varía el perímetro a medida que ponemos pentágonos.*

M&J: ¿Cuáles son las variables entonces?

L: *Pues… el perímetro y los pentágonos.*

M&J: ¿Qué es lo que podemos tomar libremente el perímetro o los pentágonos?

L: *Los pentágonos.*

M&J: ¿Si los pentágonos se toman libremente que clase de variable es dependiente o independiente?

L: *Pues independiente, cuando uno es libre, es independiente.*

(Entrevista, 3 de noviembre de 2006).

La discusión sobre este concepto le permitió a Lizeth re-estructurar su proceso mental para alcanzar una mejor construcción del concepto matemático de función. Después de socializar el mapa “La Función Espacial” con otros dos compañeros como lo habíamos planeado, surgió una segunda versión del mapa, lo que contribuyó a que Lizeth plasmara la re-estructuración que mencionamos.

Fue así como este mapa (ver Figura 72) generó una dinámica entre Lizeth y sus compañeros de grupo al momento de compartir significados, ya que el trabajo de construcción y reconstrucción de MC exige el contacto con los otros compañeros; Ontoria (1997, p. 56), menciona que “este trabajo de reconstrucción es un esfuerzo solidario que anima a compartir los significados que cada uno aporta, como un equipo deportivo comparte su actividad de entrenamiento”.

Además, el grupo problematizó si la función es la transformación de objetos en otros objetos ya elaborados, como estaba registrado en el MC de “La Función Espacial”.

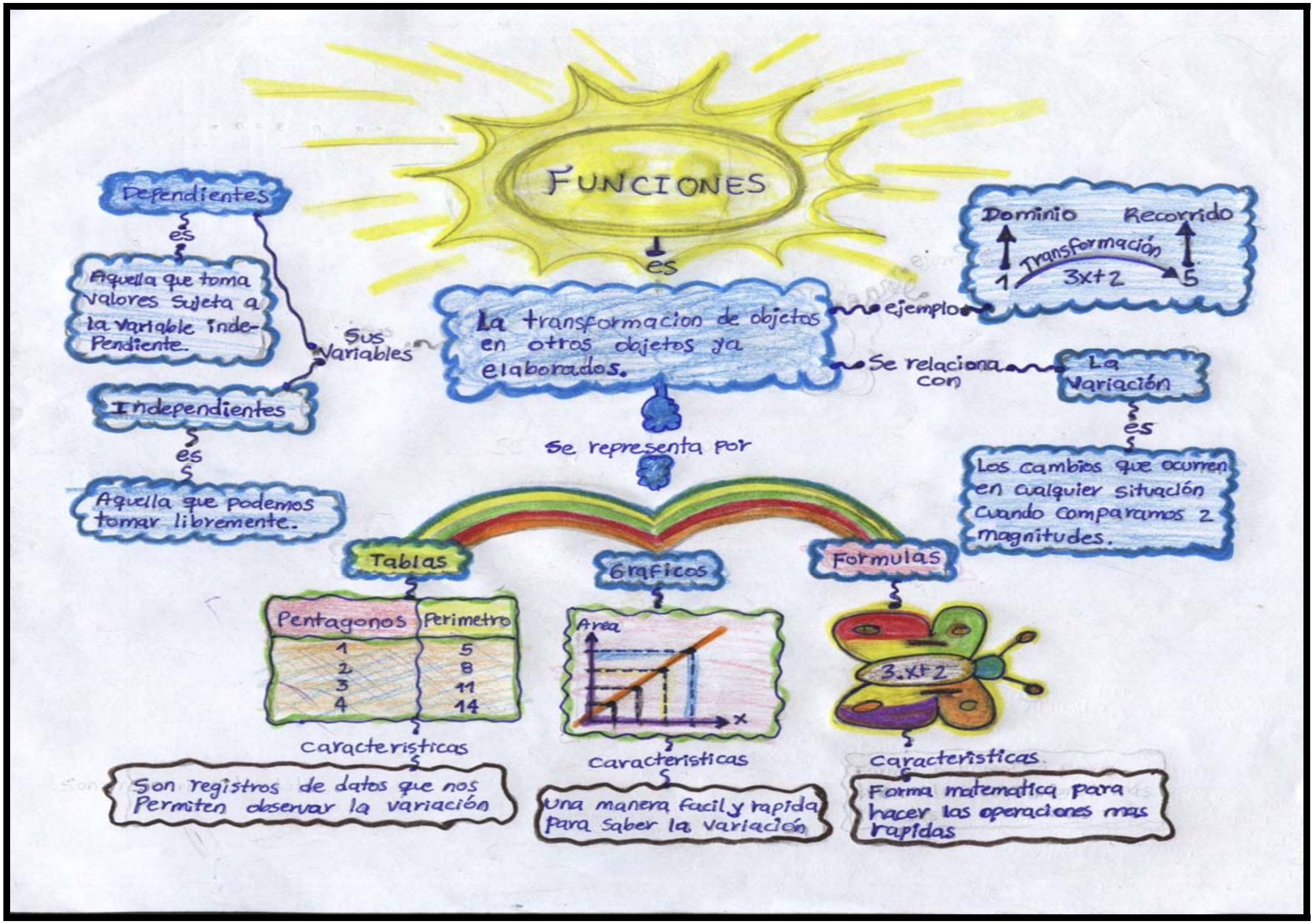


Figura 74. “El Arco Iris”, mapa grupal elaborado por Lizeth, Jennifer y Eliécer.

De esta manera, aprovechamos esta definición para cuestionar a todo el grupo si era válido afirmar que en una función se pueda transformar una cosa en ella misma, con la intención de hablar de la función idéntica. Frente a esto los estudiantes se mostraron desconcertados, diciendo que no es transformación porque no hacía nada.

Ante su escepticismo, procedimos a mostrarles la función identidad, $y = x$, les pedimos que hicieran una tabla para, posteriormente, realizar la gráfica. Una vez realizado este trabajo matemático, los estudiantes pudieron observar que aunque se obtenga en la transformación el "mismo" elemento eso no indica que no sea función ya que lo especial de esta es la transformación misma que la define. El grupo quedó satisfecho con lo observado y explicado.

Ahora, analizaremos el MC denominado "Garfield Lineal" (ver Figura 73) que surgió de las actividades "Midiendo el Agua" y "El carro y la taza de café" realizadas el 2 y 3 de noviembre de 2006. Como con los anteriores MC, discutiremos a continuación algunos apartes de este que merecieron nuestra atención.

Pero antes de ello, nos corresponde reconocerle a Lizeth su elaboración creativa para este mapa, al igual que el anterior, ya que –de igual modo que Kelly– muestra con ellos la complacencia que tenía al elaborar los mapas, pues aparte del esfuerzo matemático que realizaba en su elaboración invertía dedicación a su mapa.

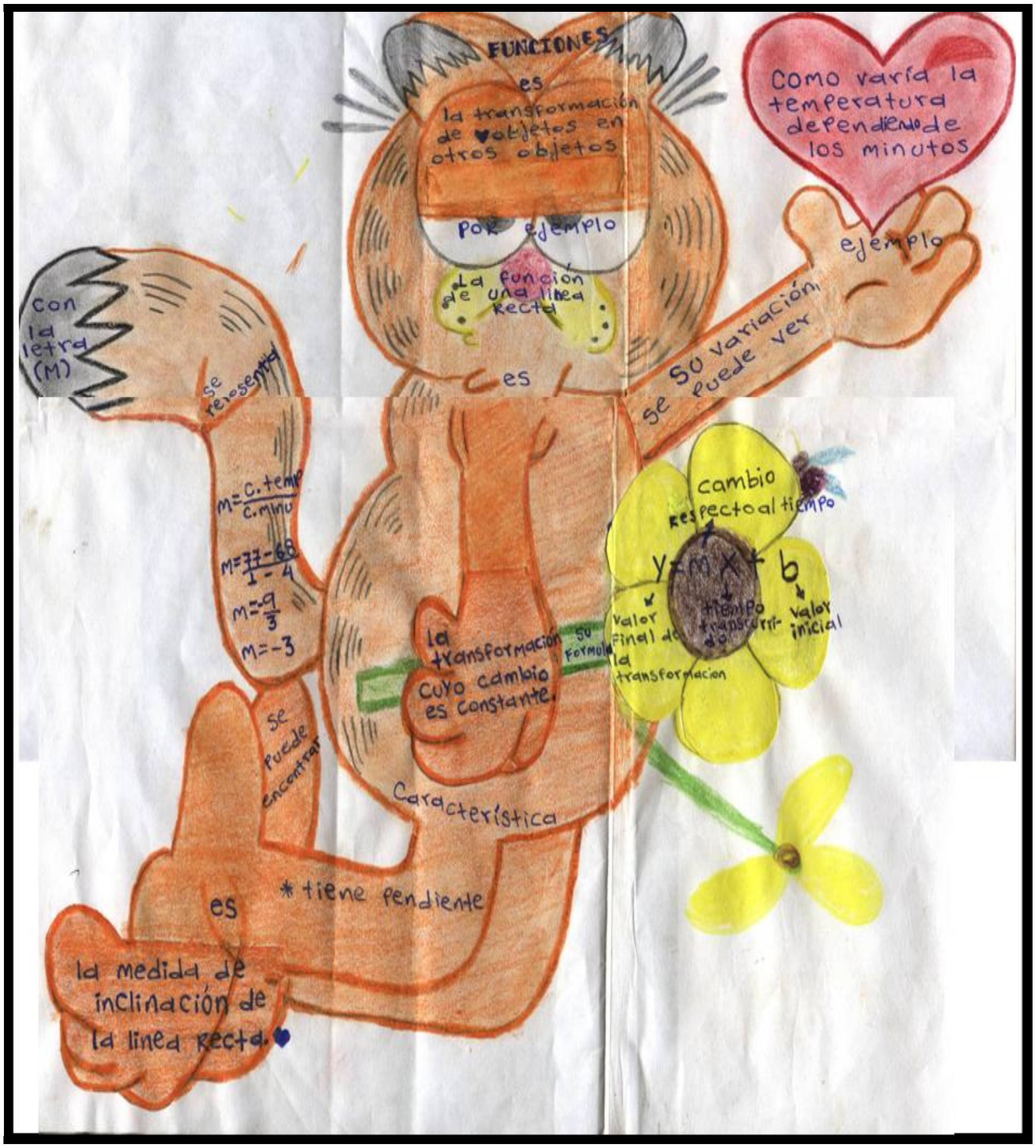


Figura 75. “Garfield Lineal”, MC de Lizeth.

Ahora empezaremos a observar con cada una de las partes del MC. Empecemos con la flor y la interpretación que Lizeth le intentó dar a cada término de la ecuación de la función lineal.

Figura 76. Flor del MC "Garfield Lineal".

Después de hacer la lectura debida de lo que Lizeth interpretó para cada término de la ecuación se puede afirmar que logró una buena interpretación contextualizando la ecuación con la situación del carro y la taza de café. Sin embargo, la variable "x" solo fue relacionada con el tiempo.

Nuevamente notamos que los estudiantes aunque parten de un contexto significativo, a la hora de formalizar los conceptos matemáticos no logran apartarse de la situación inicial que les permitió empezar a manipular tales entes para dar paso a la generalización y a la rigurosidad de la matemática.

Ya habiendo abordado diversas situaciones que involucraran directamente al modelo lineal, fue pertinente concretar el acercamiento intuitivo ala función lineal. La expresión $\boldsymbol{Y = mx + b}$ es la forma general de una función lineal, el significado que toma cada uno de sus elementos está asociado a las situaciones propias de variación.

Como lo expresa Lizeth:

> *"**Y** es el valor final de la transformación, o sea, la variable dependiente. La pendiente (**m**) es el cambio que siempre hay en la relación establecida entre las variables dependiente e independiente y **b** es el valor inicial".*
>
> (Diario de campo, 3 de noviembre de 2006)

También se debatieron con Lizeth ideas sobre las partes de la ecuación, por ejemplo, Qué pasaba si ***m*** era positiva, negativa o cero, ella dijo: *"La pendiente es positiva y pasa como en el caso del agua, por eso la recta va subiendo… y cuando es negativa ya no sube sino baja".*

No obstante, Lizeth logró deducir la razón de cambio para la situación de la taza de café. Es decir, tomó dos pares de datos (tiempo transcurrido y temperatura) e hizo explícita la variación que hubo de un instante a otro en ambas magnitudes (ver Figura 77).

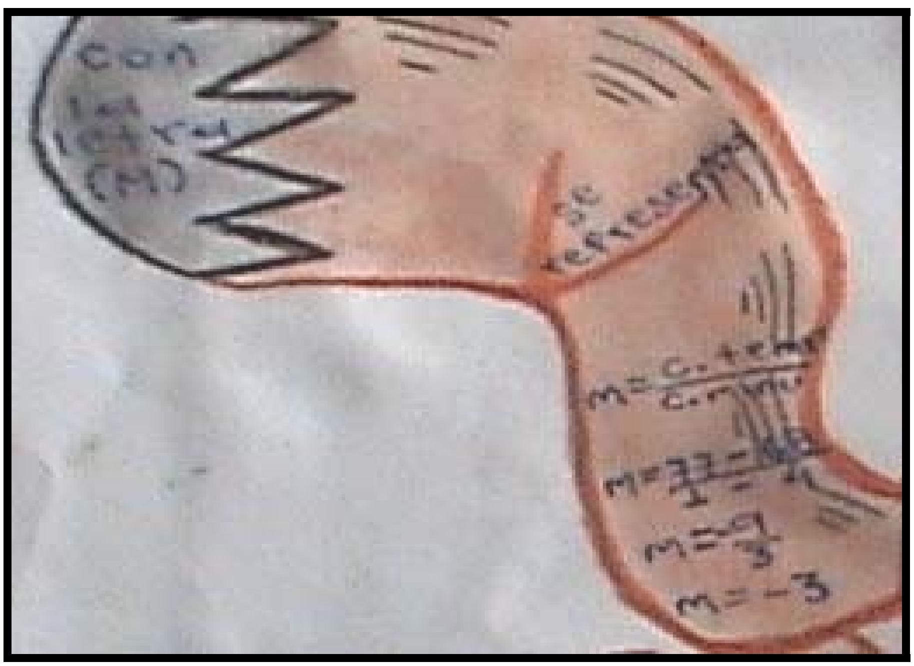


Figura 77. Aparte del MC de línea recta, elaborado por Lizeth

Camargo & Guzmán (2005) mencionan que la pendiente ha de verse como una medida de la razón de cambio de los incrementos de la variable dependiente con respecto a los incrementos de la variable independiente, en situaciones de variación; Lizeth, plasmó esta visión empleando como ejemplo uno de los ejercicios trabajados en clase, el de la Taza de café en donde ilustra que la pendiente se halla encontrando la razón entre el cambio de temperatura y el cambio del tiempo.

Para nosotros fue enriquecedor encontrarnos con esta construcción matemática de la pendiente en el MC ya que fue Lizeth la única estudiante que le dio este trato a la pendiente. De igual forma, fue gratificante ver que el proceso de aprendizaje de Lizeth se estaba dando de manera significativa ya que estaba evidenciando en cada mapa qué tanto había aprehendiendo acerca de los conceptos matemáticos vistos.

Es así como los mapas plasman lo que el estudiante está comprendiendo, Ontoria (1997) menciona este beneficio de los MC, ya que permiten observar con claridad el número de conceptos que el estudiante domina, los errores o aciertos de los significados que otorga y la forma en la que los ha estructurado.

Finalmente, en la evaluación, Lizeth logró determinar la pendiente de las gráficas que se le dieron. Cuando conversamos con ella, nos dijo que al comienzo no sabía cuáles eran los datos, refiriéndose a que no había una situación problema, ni tabla de valores en donde se pudiera ver la variación. Por eso recurrió a mirar como cambiaba en el eje y a medida que aumentaba en el eje “x”. Sin embargo, en el análisis de la segunda gráfica (Figura 78) tomó intervalos de dos unidades lo que le llevó a concluir que la pendiente era 1.

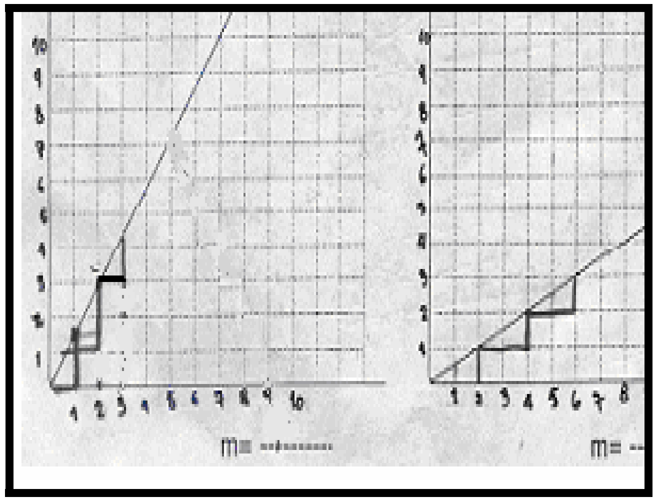


Figura 78. Punto tres de la evaluación de Lizeth.

De Lizeth es rescatable el hecho de que en cada actividad, así como en la evaluación, siempre intentaba dar solución a lo que se le planteaba ya fuera usando la recursividad propia o los conceptos adquiridos, lo cual se logró potenciar a través de la construcción de cada uno de sus MC. Por lo tanto,

> "los MC se constituyen en estrategias que propician el aprendizaje metacognitivo, pues este aprendizaje ocurre cuando una persona adquiere una estrategia general que facilite su aprendizaje o su comprensión sobre algún conocimiento específico". Moral (1994) Citado por Jaramillo (2003a, p.108)

En cuanto a los MC, Lizeth refirió:

> *"Los mapas me sirvieron para estudiar en forma recreativa, con dibujos. […] Los mapas conceptuales le ayudan a uno mucho al aprender los temas vistos en clase. Además con los mapas me doy cuenta qué cosas sé y qué no"* (Entrevista, 14 de noviembre de 2006).

Fue así como los mapas se fueron convirtiendo para esta estudiante en una estrategia fácil y rápida en la medida que fue descubriendo su valor respecto a la comprensión y asimilación de los conceptos más importantes.

"CON LOS MAPAS ORGANIZO MIS IDEAS"

Cuarto Nominado

"Como el perímetro de la caja es constante y la pendiente de una recta también es constante entonces pensé que eran la misma cosa" Jazmary.

Jazmary Santos (13 años) Extrovertida, habladora y cuestionadora, ávida de aprendizaje. A su corta edad manifestó que deseaba ser médica. Le gustaba el colegio porque estaba rodeada de amigos. Las matemáticas eran un reto para ella, le causaban curiosidad y le gustaba la lectura de temas matemáticos. De su personalidad, resaltaba su desmotivación cuando algo salía mal.

Contrario a sus compañeros de la investigación, al comenzar la experiencia Jazmary mostró interés y algunas habilidades previas para la realización de los MC. Aún sin haber comentado nada al grupo acerca del tema, en la primera actividad "Organizando Palabras", ella se destacó porque autónomamente colocó algunos conectores. Además ella hizo el bosquejo de los términos en una hoja para tener en cuenta en el momento de pasar a exponerlo ante sus compañeros.

Por las características de su personalidad Jazmary, siempre estaba abierta a la participación lo cual le permitía interactuar constantemente con el conocimiento en construcción y, al mismo tiempo, esto la favorecía en el proceso de elaboración de los mapas pues cada vez aclaraba y profundizaba mejor los conceptos.

Esta fue la representación que realizó en primera instancia con las palabras sueltas que se entregaron en la primera actividad. Si el lector observa, rápidamente notará que esta organización tiene la estructura tradicional de los MC.

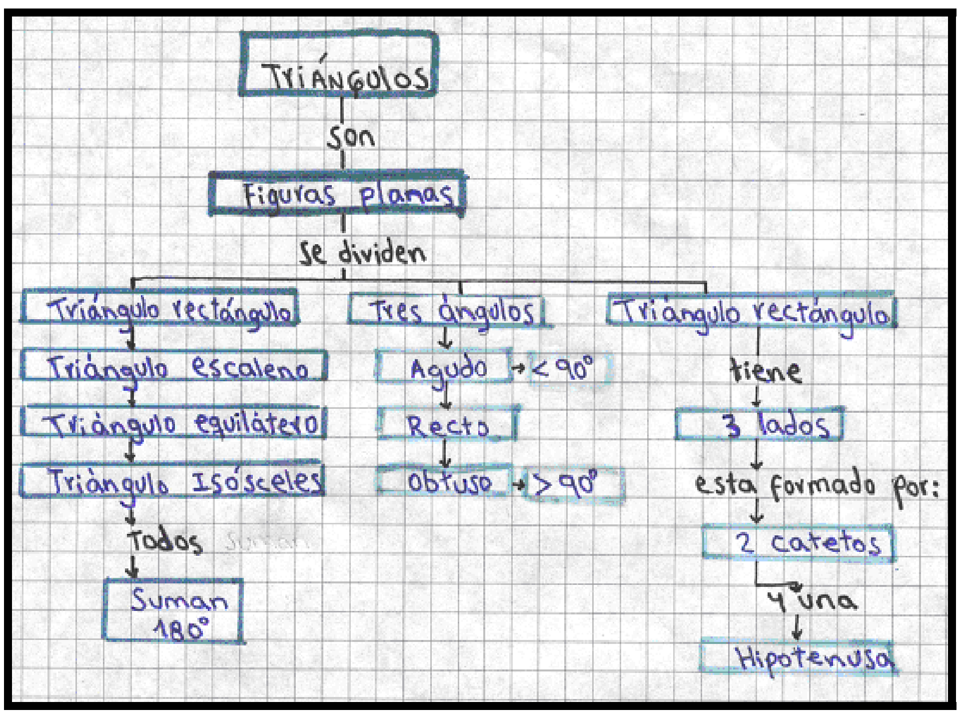


Figura 79. Primer bosquejo elaborado por Jazmary, para exponer a sus compañeros.

Es de resaltar que al comienzo de esta experiencia, en varios casos la linealidad y jerarquización en sus mapas era el distintivo tal vez porque, como ya mencionamos, es el tipo de mapa que más se trabaja en las otras áreas del currículo.

La discusión sobre el contenido de los mapas siempre generaba debates sobre sus concepciones matemáticas en donde cada grupo aportaba una idea, defendía sus razones y quería que sus justificaciones fueran las que se consideraran correctas; los MC propician el debate de ideas.

Dado que para cada MC hay un autor diferente, entonces cada MC resulta ser único y personal. Ante esto surgió una inquietud por parte de un estudiante, a quien no le pareció lógico que diferentes formas de hacer un mapa pueden reflejar lo mismo, al respecto comentó:

> *"Pero qué gracia esto, si todos los organizamos diferentes entonces ¿cómo se sabe cuál esta bien?"*
>
> Jazmary contestó:
>
> *"No importa porque todos lo podemos ordenar diferente y eso no quiere decir que esté mal".*

Era tan clara su recepción de la actividad que para ella fue obvio que cada persona tiene una forma particular de comprender un concepto y por tanto el aprendizaje no se da igual en diferentes personas. Su pensamiento abierto, la autonomía y la propiedad con la que asumía su rol de estudiante, sus posturas críticas y decididas fueron algunas de las razones que tuvimos en cuenta para incluir a Jazmary dentro de nuestro grupo de seleccionados para realizar la investigación.

Volviendo a las actividades, una vez revisado el primer mapa, le pedimos al grupo de Jazmary que elaborara otro que no fuera tan lineal. Posteriormente, Jazmary nos comentó:

> *"Fue difícil ponernos de acuerdo en qué dibujo hacer y más porque era nuestro primer mapa hecho de esa forma ya que nosotras siempre habíamos estado acostumbradas a hacer mapas de la otra forma".*

Finalmente lo hicieron dándole estructura de cuadro sinóptico [23]

[23] Técnica usada para expresar ideas, normalmente se utilizan llaves para la distribución de la información. Se pone el título o idea central en el principio, luego se utiliza una llave para poder ampliarlo.

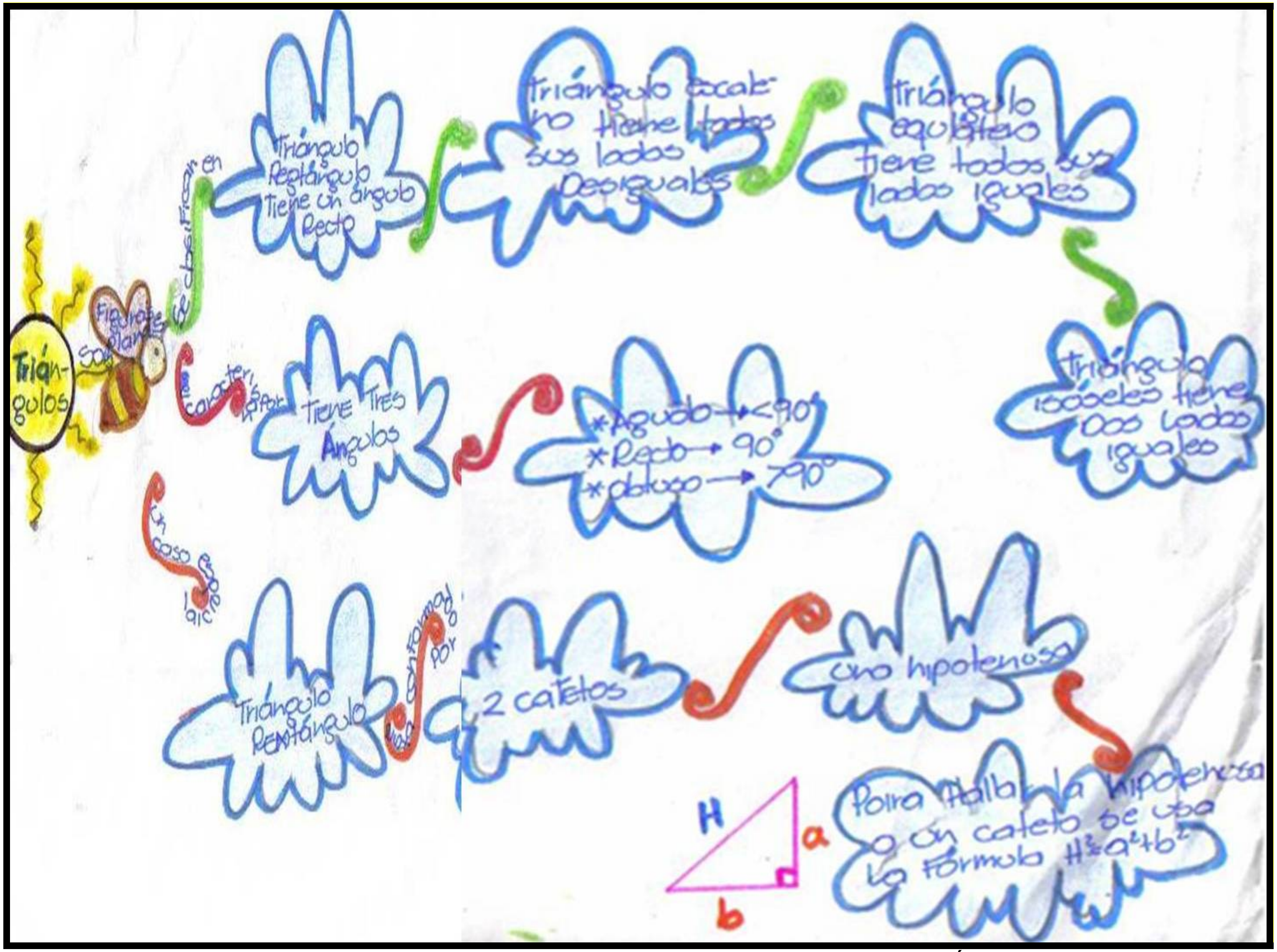


Figura 80. Mapa conceptual elaborado por Jazmary, Tatiana y Érika.

De las preguntas de Jazmary, hubo una muy particular: *"¿No pasa nada si coloco el teorema de Pitágoras, y cómo es cada clase de triángulos en el MC?"* (Diario de campo, 22 de septiembre de 2006).
Así ella mostró una vez más su capacidad cuestionadora y su iniciativa al hacer aportes personales al elaborar los mapas. Es interesante ver cómo Jazmary intentó relacionar los conocimientos nuevos con los que ya tenía – tarea de asociación que en palabras de Ausubel, citado por Moreira y Buchweitz (1982), es lo que se denomina un aprendizaje significativo.

En la entrevista, Jazmary, quien fue la autora del dibujo, nos habló de este mapa como un reflejo de sus ganas de ser libre; ella nos dijo que le colocó nubes porque en ellas se escriben mensajes, y los conectores están representados por el viento, así nos mostró su lado creativo y artístico, capaz de expresar sentimientos a través de un trabajo matemático.

Durante el proceso de investigación, Jazmary mostró ser una joven caracterizada por su fluidez verbal, esto facilitó la tarea de indagación sobre los significados que le atribuía a los conceptos que estaba aprendiendo.

Como bien lo podrá notar el lector, Jazmary estaba siendo muy particular entre los nominados de está investigación: una joven abierta, espontánea, con un buen nivel de autoestima que tras cada sesión de trabajo mostraba su disposición para aprender y para crecer a través de la comunicación con sus pares y profesores.

Por otro lado, en su MC de variaciones que se muestra a continuación (figura 81), Jazmary retomó hechos de la actividad "Juguemos con las Variaciones" en aras de expresar tácitamente lo que había entendido. Sin embargo, en su afán por hacerse entender no se percató de que utilizó mucho texto en la elaboración de su MC y esto no es tan recomendable ya que, según Novak &

Gowin (1988, p. 106): “un buen mapa conceptual expone los conceptos y las proposiciones fundamentales en un lenguaje muy explicito y conciso”.

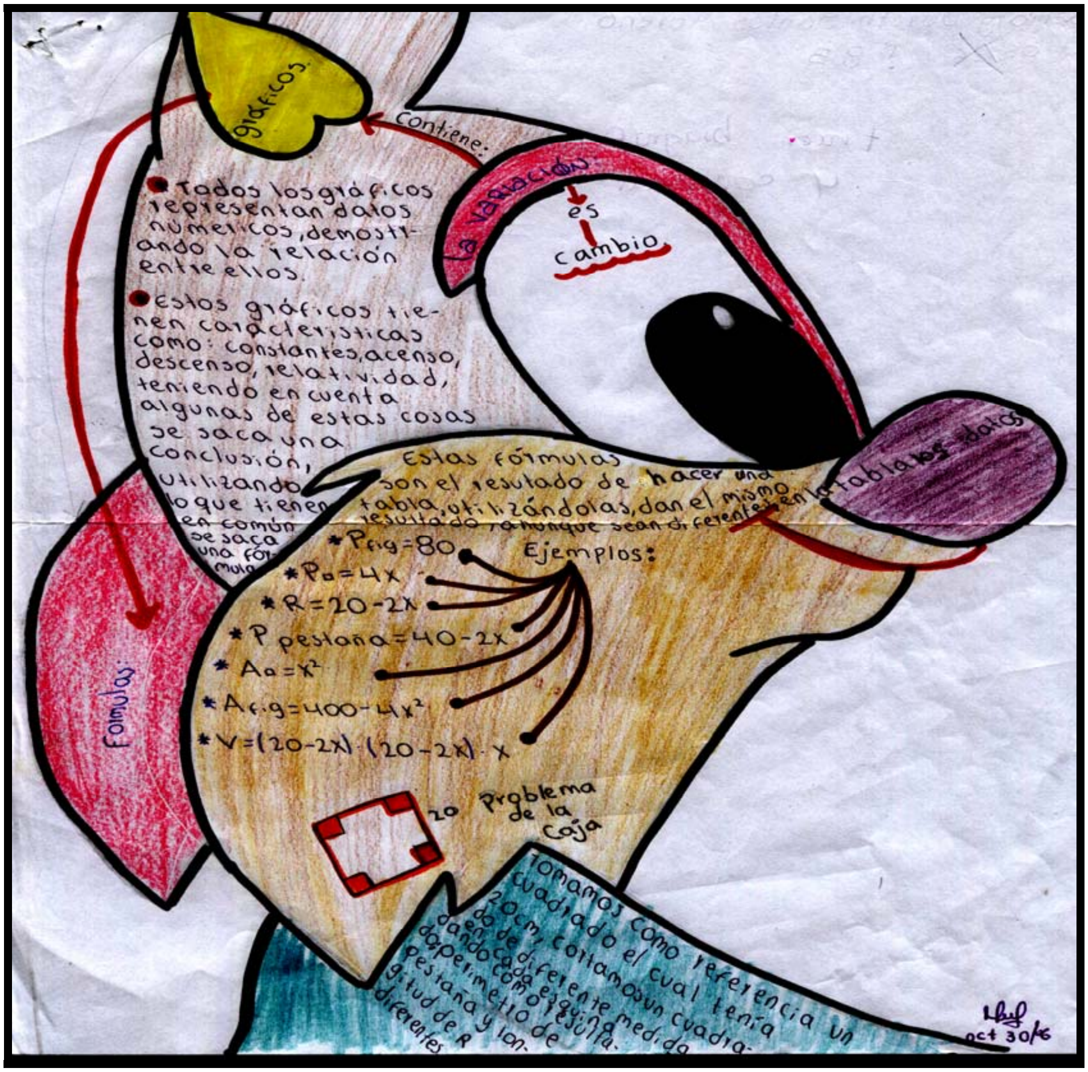


Figura 81. “El variable silvestre”, MC sobre variación.

Cuando le preguntamos sobre el mapa, Jazmary inicialmente contestó:

> *“Cuando ustedes me dijeron que hiciera un mapa conceptual sobre variación lo primero que se me vino a la mente fue fórmulas, gráficos, perímetro, área y tiempo”.*

Aquí se reflejó el esfuerzo metacognitivo que realizó antes de elaborar su mapa; cabe mencionar aquí a Ontoria (1997) quien indica que el estudiante, en el esfuerzo de comprender, intenta primero dar sentido a aquello con lo que está en contacto, formando así una representación y esquema cognitivo.

Además, esto resulta revelante porque en ese esfuerzo metacognitivo que realiza el estudiante para elaborar su MC está reorganizando los conceptos matemáticos de tal forma que le resulten claros para alcanzar el objetivo del MC. Es decir, que la construcción del MC lo está obligando suspicazmente a esforzarse matemáticamente en la comprensión de los conceptos

> M&J: ¿Por qué mencionó que la variación es cambio?
> J: *Porque por ejemplo, cuando yo recortaba cuadrados más grandes, el perímetro de la pestaña no quedaba igual, iba a ser más poquito y eso es un cambio.*

Sin embargo, Jazmary no era muy contundente al referirse al conector “contiene” para relacionar la variación con los gráficos (ver siguiente figura)

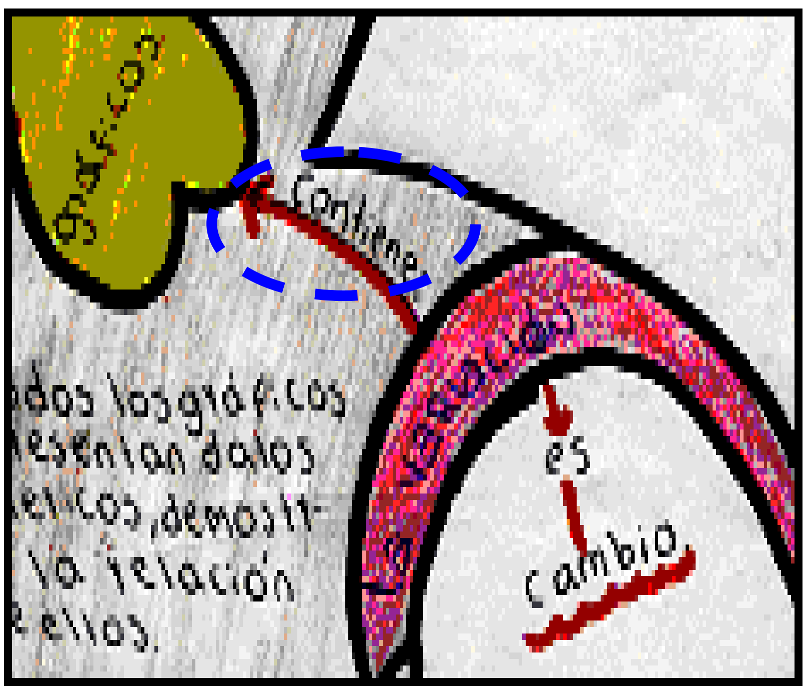


Figura 82. Forma en que Jazmary utilizó el conector “contiene”.

Al respecto manifestó que había colocado éste porque no encontró uno más apropiado para expresar lo que quería, evidenciando con ello que en este caso le faltaba aun claridad en los conceptos.

De esta manera, se hace explicita la utilidad del conector ya que permite “unir” los conceptos permitiendo ver el tipo de relación existente entre los mismos (Ontoria, 1997).

> M&J: Cuando dice que la variación contiene gráficos y fórmulas, ¿a qué se refiere?
> J: *No encontré el conector adecuado; me demoré mucho pensándolo, tanto que decidí dejar ese*.
> M&J: ¿Qué quería decir entonces?
> J: *Que cuando estamos hablando de variaciones trato de sacar fórmulas por medio de lo que tienen en común los números de la tabla y hago el gráfico. […] Pero todavía no puedo relacionarlos y [por tal razón] puse ese conector*.
> M&J: ¿Qué otro conector le puede ayudar, teniendo en cuenta lo que nos acaba de decir?
> J: *“Está presente”, este suena mejor y obvio, se entiende más. Espere, ¿también sirve “se encuentra”?*
> M&J: Pueden ser una opción; ¿por cuál de los dos se inclina?
> J: *Pues, yo escogería los dos [ja, ja, ja]. Pero queda mejor “se encuentran” porque en los gráficos se encuentran la variación.*
> M&J: ¿Sólo en los gráficos?
> J: *No, también en fórmulas*.
> M&J: ¿De dónde sacamos los datos para las fórmulas?
> J: *De la tabla*.
> M&J: ¿Y los datos de la tabla?
> J: De los problemas.
> M&J: ¿Y esos problemas qué representan?
> J: *Eh... representan... situaciones de cambio, como el problema de la caja.*

M&J: Entonces, ¿en dónde ese encuentra la variación?
J: *En todo, es decir, en lo que nos rodea. EL tiempo siempre cambia y así muchas otras cosas.*
M&J: Y ahora qué piensa, ¿será que la variación se encuentra en los gráficos?
J: *Pues no, en otras cosas también –lo acabé de decir. Los gráficos más bien la representan.*
M&J: ¿Cuál sería un conector adecuado?
J: *Se representan en, o se expresa en*
[…]
M&J: Bien, ¿ahora logró encontrar la relación entre variación, gráficos y fórmulas?
J: *Sí, me demoré un poco y ahora pienso cuando ustedes nos dijeron al principio que los conectores eran muy importante en los mapas. Siento que al buscar este conector me ayudó a aclarar mis ideas.*
(Entrevista, 27 de octubre de 2006)

No hay duda que la comunicación en el proceso de aprendizaje es fundamental para ayudar al estudiante a comprender conceptos que quedan sueltos; además, de que favorece la capacidad argumentativa del estudiante al pensar y repensar lo que realizó en determinado momento. De igual modo, esto le permite al profesor evidenciar el razonamiento matemático que el estudiante realiza. Como lo señala Ontoria (1997, p. 55) recordando las afirmaciones de Edwards y Mercer: "El conocimiento compartido se construye por medio de la ‹‹actividad y el discurso conjuntos››".

Otro aspecto para resaltar en su mapa es la forma como se refirió a los gráficos al mencionar sus características, entre ellas: los ascensos y descensos, la representación de datos numéricos relacionados entre ellos, la relatividad y el ser constante. A continuación se ilustra esto, (Figura 83).

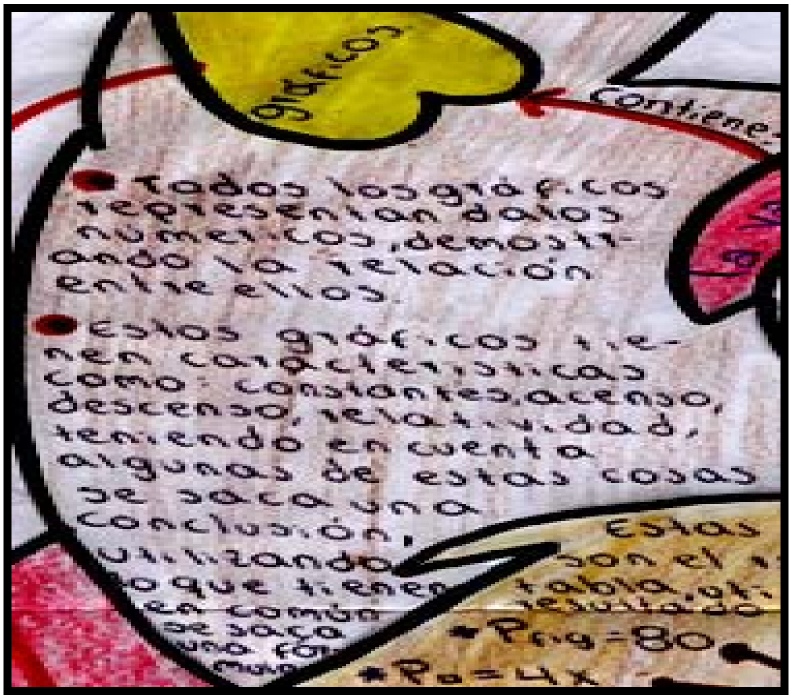


Figura 83. Cabeza de “El variable silvestre”.

En primera instancia, en la redacción de la primera viñeta se traslucen conocimientos de estadística lo que muestra la conexión que Jazmary estaba haciendo entre el pensamiento variacional y el pensamiento estadístico. Le cuestionamos a Jazmary por qué los gráficos representan datos y cómo muestran la relación entre ellos, ella nos dijo: *“porque es parecido a los gráficos que salen en los periódicos, donde explican cosas que están sucediendo, como las encuestas”,* al seguir indagándole sobre un ejemplo específico, contestó: *“un ejemplo que he visto es la cantidad de muchachos que les gusta cierta música o comida, también sobre quién puede ganar las elecciones”.*

Según Posada et al. (2005), al trabajar el pensamiento variacional se deben involucrar los pensamientos numérico, espacial, métrico y estadístico, ya que este ayuda al reconocimiento de estructuras invariantes en medio de la variación y cambio en diversas situaciones cotidianas así como en las diversas ramas del conocimiento.

En cuanto a la segunda viñeta, nos comentó que cuando usó “constante” lo hizo para referirse a la función constante que se comentó en clase al hacer el gráfico del cuadrado recortado con el perímetro de la figura resultante; “descenso y ascenso” los relacionó con la dirección de las líneas o curvas en la gráfica, es decir, si iban hacia arriba o hacia abajo.

Singularmente, de esta viñeta, nos sorprendió la inclusión de la palabra “relatividad”; ella nos comentó que con esta pretendía mencionar los cambios repentinos que sufren las curvas, donde unas veces suben y otras bajan. Frente a este análisis intuitivo de la variación de un gráfico Camargo & Guzmán (2005, p. 65) afirman:

> “La necesidad de utilizar razones como unidades de medida para estudiar los cambios relativos, surge de manera casi natural, para caracterizar los movimientos en términos de la dirección del cambio y del comportamiento de éste, en situaciones críticas como en los puntos máximos y mínimos”.

Respecto a las tabulaciones, Jazmary encontró su utilidad, nos comentó que le sirvieron para identificar cómo varían los datos en una situación y así entender mejor el comportamiento de la variación. A continuación veamos la forma en que Jazmary plasmó esto en su mapa y como lo relacionó con la actividad realizada.

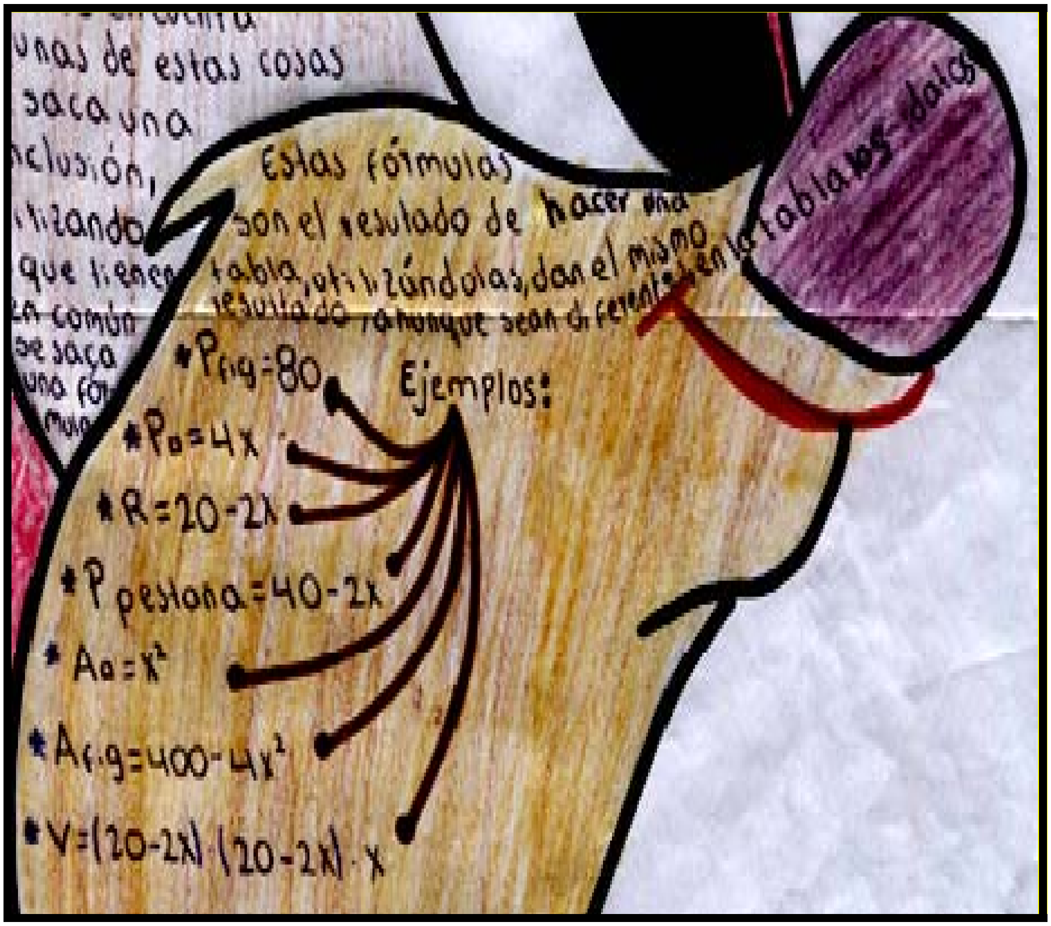


Figura 84. Sección del mapa conceptual elaborado por Jazmary.

Es interesante ver que el uso de los entes matemáticos históricamente se mantiene, pues así como ella encontró esta utilidad, en el pasado nuestros antepasados iniciaron el estudio de la variación a través de las tablas babilónicas.

El siguiente paso era re-elaborar el MC y complementarlo con la negociación de significados que habíamos tenido. Pero frente a esta tarea Jazmary se incomodó –e incluso desmotivó–, según ella, porque no le gustaba hacer las cosas dos veces, además, ella sentía tenerlo todo claro y dijo que no necesitaba hacer todo el proceso nuevamente.

Los autores Novak & Gowin (1984, p. 52) en este sentido afirman:

> "Frente a este sentimiento de inconformismo y negación afirman que la mayoría de los estudiantes no tendrá la paciencia o el interés necesario para intentar hacer una tercera o cuarta versión de un mapa sobre un tema determinado, pero habría que animarlos para que realizaran una segunda versión, al menos".

Fue así que, de la mejor manera, le explicamos los propósitos y las ventajas de re-hacer los mapas y le aclaramos que no era hacer correcciones sino estar atentos a establecer nuevas relaciones entre los conceptos. Finalmente, accedió a comprometerse a realizar una nueva producción.

Aunque se mostró bastante reacia a esta tarea, cuando vimos el nuevo MC nos sorprendió el cambio tan notorio en la organización del mismo, que aunque usó el mismo dibujo, mostró un esquema muy diferente.

Uno de los factores que influyó en este resultado fue la buena costumbre que Jazmary tenía de leer y consultar. Además, ella nos comentó que animada por el diálogo matemático que tuvimos decidió ampliar los conceptos debido a que no sentía seguridad en los conceptos y que esto lo notó porque no le resultó fácil hacer su primer mapa.
A continuación mostramos la segunda versión de su MC que tituló "silvestre mejorado".

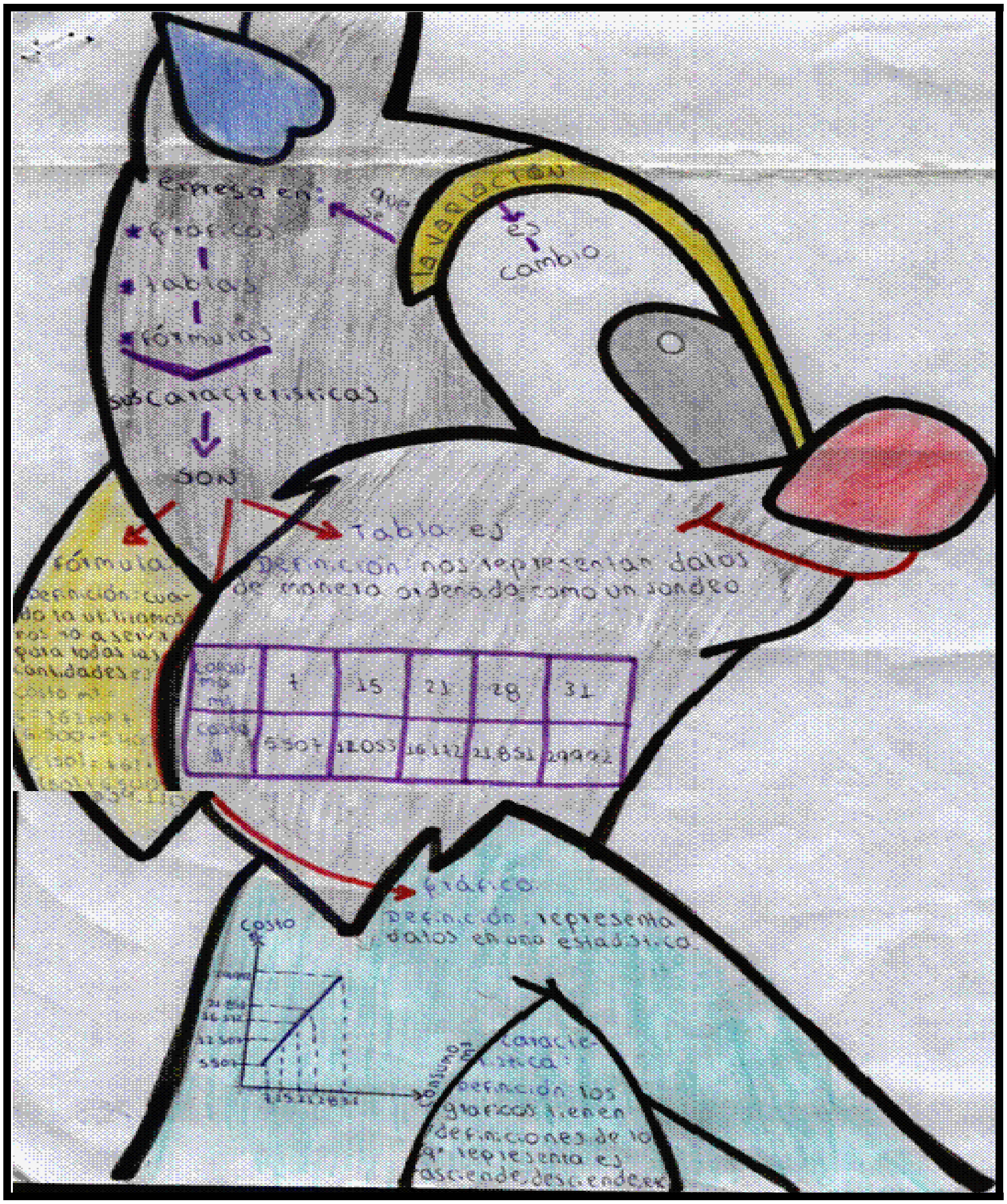


Figura 85. “Silvestre Mejorado”, nombre dado por Jazmary.

El primer cambio que se observa en este nuevo MC es que hay menos texto que en el anterior. Pero inquietos por su anterior respuesta ante la nueva tarea de re-elaboración del MC, le preguntamos cómo se había sentido en la elaboración de “Silvestre Mejorado” y esto fue lo que contestó:

> *"Bien, porque aquí ya tuve en cuenta el ejemplo de los servicios públicos, lo que leí y eso hizo que hacer el mapa fuera más fácil".* (Diario de campo, 26 de octubre de 2006).

También en su nuevo mapa cambió el anteriormente cuestionado conector "contiene" por "se expresa en", lo que es para este caso un conector mas adecuado; cambió los ejemplos y esta vez recurrió a una tabla y el trazo de una función lineal para ilustrar el valor a pagar en el recibo de su servicio público contra el consumo, esto muestra su capacidad de retomar lo aprendido para aplicarlo en las situaciones diferentes que se le plantean.

También explicó que como esta era una segunda versión trató de poner lo más importante sin extenderse tanto, de escribir las características más importantes de cada cosa y debido a que tenía más claridad, sintió que ya no necesitó escribir tanto, que además con el solo hecho de ver rápidamente el mapa lograba traer rápidamente a su mente los conceptos y los ejemplos realizados.

> *"Profes, lo bueno de hacer un mapa es que después con solo verlo un poco uno se acuerda de los ejemplos y de casi todo"* (Diario de campo, 26 de octubre de 2006).

A continuación presentamos el mapa hecho por Jazmary sobre el tema de funciones:

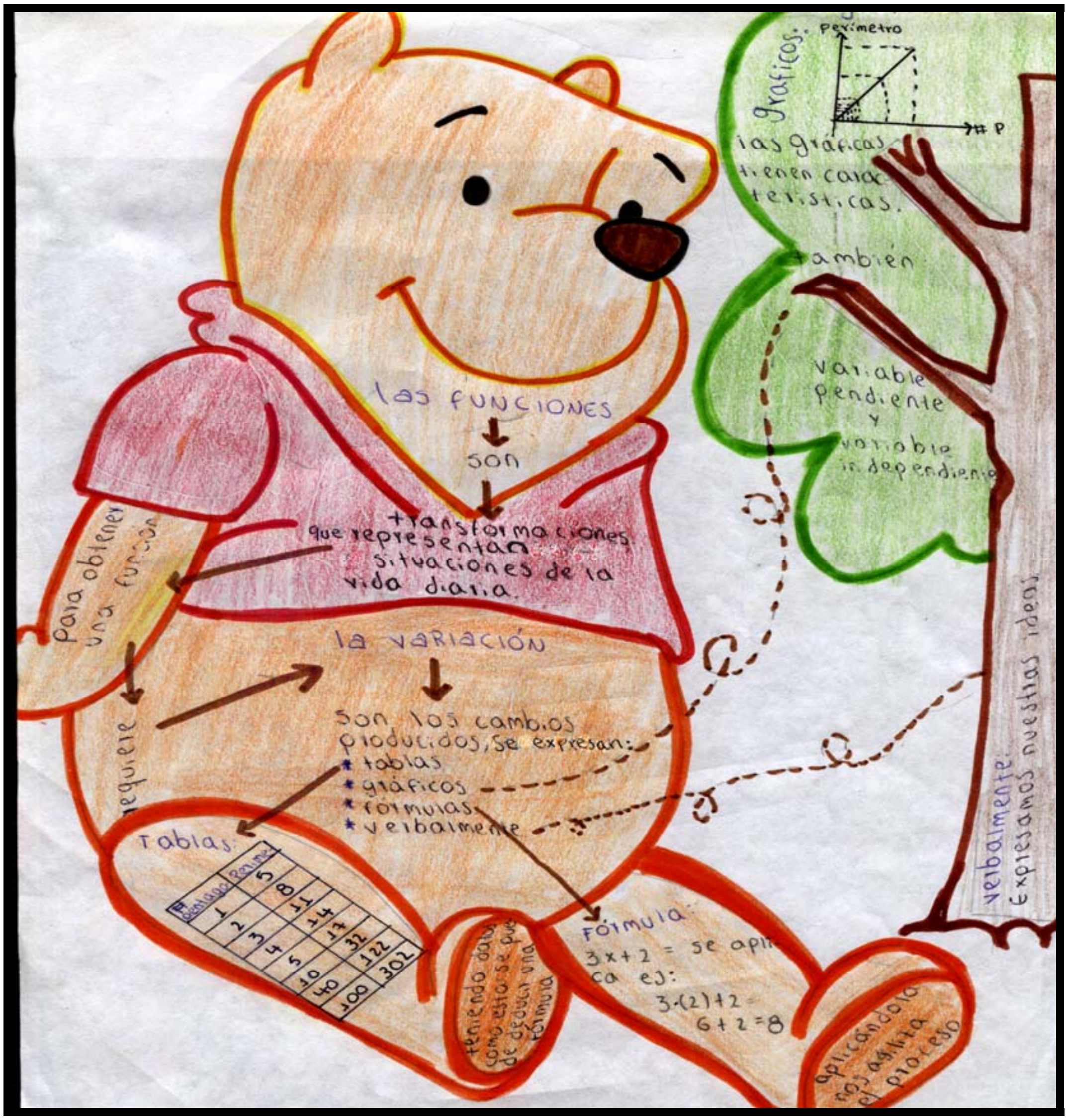


Figura 86. “Winnie Pooh, el matemático”, MC sobre Función.

En “Winnie Pooh, el matemático”, Jazmary nos dio a conocer el proceso previo que realizaba en la elaboración de sus mapas conceptuales:

> *“Cuando voy a hacer un mapa, primero hago uno o dos borradores donde saco los conceptos y miro cómo relacionarlos; después pienso en un dibujo que pueda servir”* (Entrevista, 1 de noviembre de 2006).

Al escucharla comprendimos el por qué de su inconformidad para realizar una segunda versión de los mapas, pero a la vez dejó ver su alto grado de compromiso ya que ella elaboraba varios borradores del mismo antes de presentarlos, en los cuales iba reestructurando los conceptos.

Es así como la tarea de hacer MC no es tan sencilla puesto que necesita de varias reflexiones a través de las cuales el autor se convence de la estructura y contenido del mapa, en ese sentido como ha señalado Novak & Gowin (1988, p. 38) han señalado: “Nos resulta muy difícil pensar en las ideas que son nuevas, poderosas y profundas, necesitamos tiempo y alguna actividad mediadora que nos ayude. El pensamiento reflexivo es un quehacer controlado, que implica llevar y traer conceptos uniéndolos y volviéndolos a separar”.

Volviendo al mapa, cuestionamos a Jazmary acerca del significado del conector “requiere” que utilizó para relacionar función con variación, lo cual se ilustra en el siguiente fragmento de su MC:

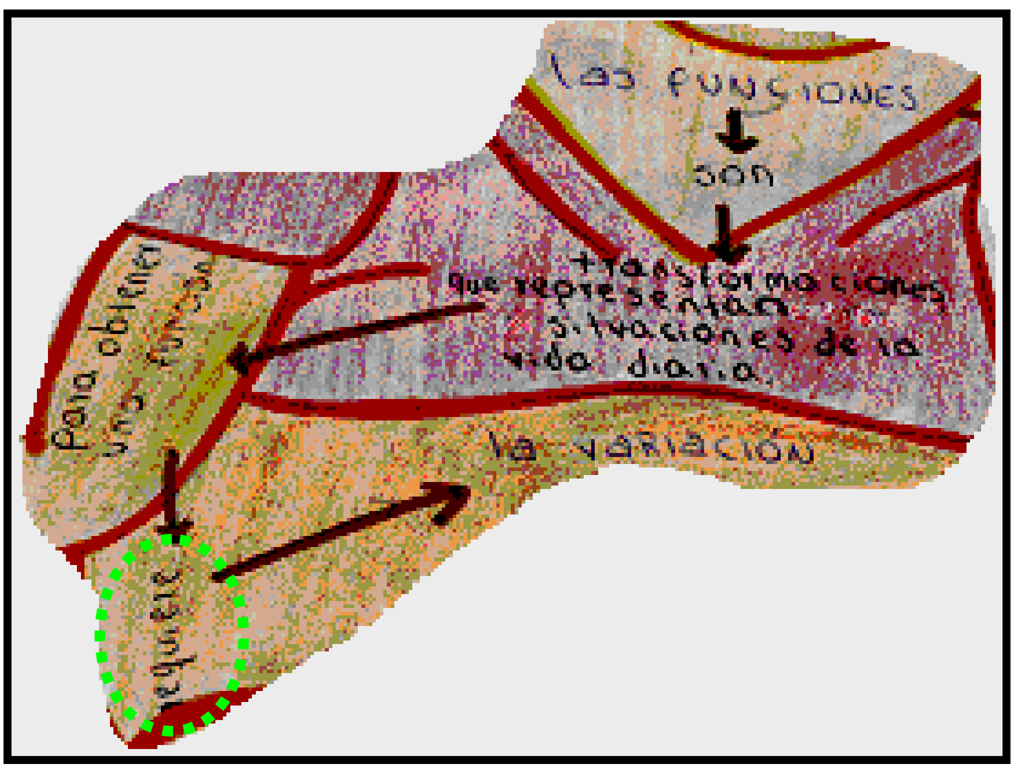


Figura 87. Fragmento del MC “Winnie Pooh, el matemático”, elaborado por Jazmary

Al respecto le preguntamos:

> M&J: ¿Por qué dice que se *requiere* de la variación para obtener una función?
>
> J: *Porque las variaciones son cambios y cuando se hacen transformaciones hay cambios. O sea, si no hay un cambio, no existe una transformación.*

Además, continuando con nuestra indagación conceptual, quisimos cuestionarla sobre la relación que hasta el momento había hecho con los conceptos de la variabilidad y la función como transformación. Veamos:

> M&J: [Usted] dice que sin cambio no hay transformación, ¿quiere decir que si no hay variación no pueden haber funciones?
>
> J: *Pues sí, eso es lo que quiero decir.*
>
> M&J: ¿Cómo se relaciona la variación con la función?
>
> J: *Lo que pasa es que la variación se explica por medio de las funciones.*

En este punto pudimos notar que Jazmary tenía la idea intuitiva de ver las funciones como resultado de la cuantificación de la variación. Referente a esto Posada, et al. (2005, p. 50) afirma que: “Los procesos de variación ofrecen herramientas para modelar situaciones a través de las funciones como resultado de la cuantificación de la variación”.

Por otro lado, una concepción que debimos corregirle fue el hecho de que ella asoció, como otros de sus compañeros, la transformación únicamente cuando ocurren cambios (cuando los ve en el resultado de esta), por lo que le aclaramos que en una función es importante analizar y comprender qué cambia y cómo cambia, dándole como ejemplos de función constante el perímetro resultante en el ejercicio de la caja con el lado del cuadrado recortado.

Además, manifestó una equivocación al no comprender las definiciones de la variable dependiente e independiente y cómo estas esta implícitas en todas las representaciones de las funciones, ya que le atribuyó esta característica únicamente a los gráficos.

No obstante, al dialogar con ella sobre esto nos dijo que para ella era más fácil identificarlas en la gráfica. Además expresó:

> *“Sí, yo sé que también en las tablas y las fórmulas [están], no más que no me alcanzó el espacio”* (Entrevista, 1 de noviembre de 2006).

Aunque su justificación era válida, pues a muchos les sucede que por falta de espacio o de tiempo en una construcción obvian muchos detalles que para el lector resultan ser sinónimo de error o falencia conceptual, le recordamos lo necesario e importante que resulta que los MC queden elaborados en forma clara y comprensible para que cualquier lector pueda ver y comprender el tema.

De la experiencia y de la interacción con Jazmary notamos que era como “una esponjita” afanosa por absorberlo todo. Pero cuando no lo lograba manifestaba su inconformidad con su actitud en clase haciéndola evidente en los gestos de su rostro. Uno de esos momentos de inconformidad se hizo notorio cuando nos dejó ver en su mapa general la confusión que tenía con la pendiente y la función constante. Veamos el mapa:

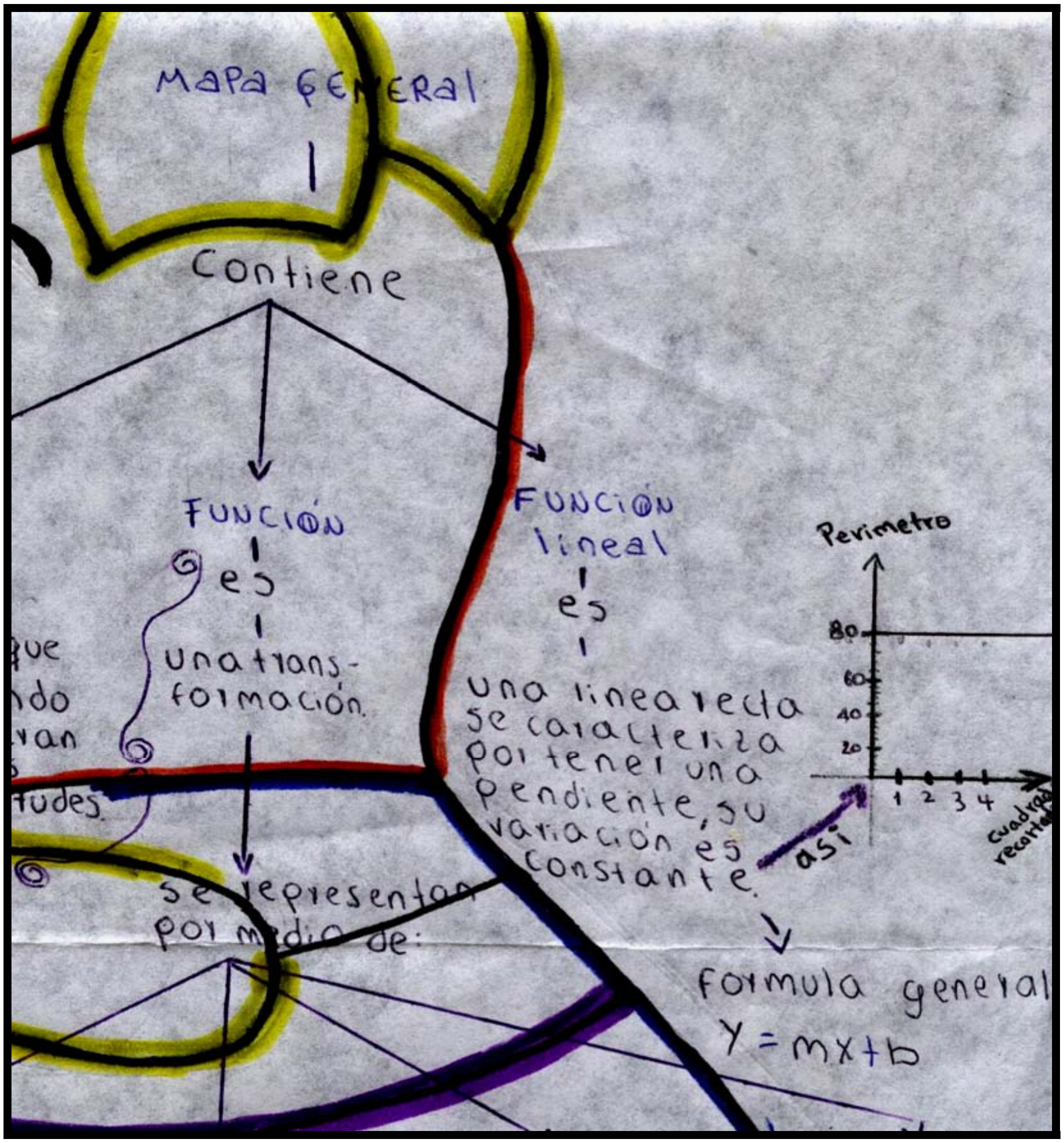


Figura 88.” mapa general” elaborado por Jazmary.

En él podemos observar el dominio que Jazmary tenía sobre lo visto en cada una de las clases trabajadas, la forma en la que percibía la función como una transformación, identificando la función lineal como aquella que tiene una pendiente que varía constantemente. Pero confundió esto con la función constante y pensó que las gráficas de las rectas siempre serían paralelas al eje “x”.

Era necesario clarificar esta parte con Jazmary teniendo en cuenta el cuidado con los significados ya establecidos. Por tal razón, buscamos el espacio para dialogar con ella sobre esto.

Le explicamos que la función constante es una recta que tiene pendiente cero por eso en la gráfica no sube ni baja, pero que la pendiente constante se refiere a que la variación siempre es la misma, pero no quiere decir que siempre es cero, como en el caso de los pentágonos en fila la pendiente es 3 y la gráfica no es horizontal. Al final del dialogo cuyo propósito era negociar significados, Jazmary expresó:

> *"Pensé que era la misma cosa, como ustedes me dijeron que la gráfica del perímetro es constante y la pendiente de una recta también es constante, pensé que era la misma cosa"* (Entrevista, 7 de noviembre de 2006).

Esto nos llevó a considerar, como ya lo habíamos mencionado, que en la búsqueda de relacionar los conceptos que ya se saben con lo que se está aprendiendo, en ocasiones se hacen asociaciones no válidas por causa de algunas similitudes que guardan entre sí las palabras.

Retomando el buen hábito de Jazmary de consultar, ella nos compartió que los MC se habían convertido en una herramienta de aprendizaje de su agrado ya que no tenía que copiar tanto; al contrario, la impulsaban a leer, lo cual para ella era mejor.

> *"Los mapas conceptuales me parece que resumen las ideas de todo lo que uno entiende sobre el tema; además, voy aprendiendo mientras voy haciendo los mapas y no se me hace tan aburrido porque obviamente tengo que leer y organizar los conceptos"* (Entrevista, 14 de noviembre de 2006).

De esta manera, en esta historia nuestra protagonista dejó ver algunas curiosidades, puntos de vista personales, concepciones no acertadas y la forma en que trató de superarlas a través de los MC, poniendo de manifiesto que ella no sólo forjó un aprendizaje matemático sino también se conoció un poco más ella misma, con la ayuda de los mapas conceptuales fue evolucionando de acuerdo a sus intereses y concepciones propias, en su intento de aprender a aprender.

LO QUE PODEMOS CONCLUIR

Antes de dar cualquier conclusión queremos resaltar que, en esta experiencia de aula, el uso de los MC como herramienta de aprendizaje en Matemáticas fue nueva para los estudiantes. Tal vez por eso mismo nos encontramos con reacciones poco favorables al principio.

No obstante, con el trabajo hecho tras cada actividad planeada los estudiantes fueron viendo por sí mismos cuánto podían aprender a través de ellos. Fue así como poco a poco las actitudes fueron cambiando hasta obtener un grado de aceptación y de reconocimiento a los frutos que de esta estrategia se puede obtener.

Hoy consideramos que los MC son una buena opción para contribuir a la enseñanza significativa de Matemáticas. Esta consideración la respaldan los estudiantes que hicieron parte de esta investigación ya que ellos mismos expresaron que los MC los ayudaron a aprender y comprender la temática que se les enseñó.

Queremos mostrarles a continuación la diversidad de frutos que obtuvimos de nuestra investigación (el lector recordará que se realizó un MC que sintetizó nuestra investigación, el cual se organizó y estructuró en la creación de un árbol y todo un sistema que le dio vida y sentido).

A continuación presentamos los frutos de este árbol, que son a su vez, los frutos de esta investigación:

- Con los MC el estudiante aporta algo de sí mismo para su aprendizaje, ya que al realizarlo debe pensar y reflexionar sobre lo que está intentando aprender. De esta manera se evita que el estudiante solo sea un receptor pasivo de ejercicios y fórmulas que pocas veces cobran significado.

- El momento de compartir significados se convierte en una experiencia de aprendizaje en donde se elogia, se discute, se negocia y se conoce al estudiante en los aspectos no solo cognitivos sino también afectivos y socioculturales, generando más confianza, amistad y respeto entre los participantes de la experiencia educativa.

- Fue notoria, en esta experiencia, la influencia individual que produjeron los MC en los estudiantes de acuerdo a sus necesidades, estilos de aprendizaje y cómo en esa búsqueda de conocimiento, la adecuan e implementan. A José Luís, por ejemplo, le ayudó a crear confianza en su creatividad y ser más organizado; a Kelly, organizar y expresar con seguridad sus ideas; permitió que Lizeth percibiera de una forma más atractiva el aprendizaje de las matemáticas; Jazmary, por su parte, afianzó su estrategia de estudio. Y así sucedió con otros de los estudiantes, no nominados, con quienes compartimos esta experiencia.

- Como docentes, utilizando los MC y especialmente en los momentos de negociación de significados, pudimos observar tácita y explícitamente las fortalezas y dificultades que poseían los estudiantes en un momento dado sobre el tema que se estaba intentando enseñar, lo que nos permitió aclarar las dudas y retomar ideas que los estudiantes mismos aportaban.

- En cuanto a los conceptos que se trabajaron en clase debemos decir que al abordar el tema de Función desde un contexto variacional, cobró interés en los estudiantes el tratar de interpretar las situaciones problemas planteadas y plasmarlas en un MC, ya que ellos se hicieron concientes de estas situaciones de variación con propiedad.

- Los estudiantes adoptaron sus propios métodos para hallar expresiones matemáticas que representarán la variación, recurriendo al análisis numérico, tomando datos, midiendo, manipulando las variables presentes en las situaciones de cambio. Lo anterior propició que una expresión algebraica no pareciera como algo estático y carente de significado.

- A través de las actividades prácticas de variación se logró fortalecer el significado de las representaciones de las funciones, haciéndolas visibles y, por qué no, tangibles. Ahí el MC contribuyó a establecer conexiones entre la parte práctica con los conceptos matemáticos.

- En cuanto al concepto de función, este se presentó como una forma de expresar la variación y la dinámica que se establece entre las variables presentes, ya que los estudiantes comenzaron a percibirla en la medida que asociaban la variación.

- Al estudiar funciones se hace necesario que los estudiantes posean cierta conciencia del álgebra. En esta experiencia este aspecto se hizo evidente ya que es más natural para los estudiantes analizar una situación de cambio, describiéndola verbalmente, tomando datos y haciendo tablas, que tratando de hallar una fórmula o expresión que permita generalizar la situación. El escaso manejo del álgebra hace que se cometan errores de escritura, de signos de agrupación y de confusión en las operaciones.

- Cabe mencionar aquí que durante la aplicación de las actividades, a algunos estudiantes les costó vincular las formas de representación de la función. Especialmente a partir de la representación gráfica de una función dada, hacer un análisis o deducciones de la situación de variación implícita en ella, o a partir de la gráfica encontrar una expresión algebraica.

- Además, para algunos estudiantes cuesta esfuerzo elaborar MC ya que para ello se requiere de una buena dosis de tiempo y dedicación, pero estamos seguros que cualquier persona que adopte los mapas como una herramienta de aprendizaje logrará buenos resultados.

- Finalmente, es importante aclarar que los mapas por si solos no son la respuesta a las inquietudes y dificultades matemáticas que se presentan. Estos cobran importancia en la medida que el profesor planea actividades significativas y atractivas para los estudiantes, en la medida que se comparten y se negocian significados, y en la medida en que se hace un seguimiento continúo del proceso de aprendizaje. Es decir, introducir los MC como herramienta o estrategia en las clases de matemáticas requiere de un alto sentido de compromiso por parte de estudiantes y docentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D.P; NOVAK, J.D; HANESIAN, H. (1983). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. 2ª. ed.* México: Editorial Trillas.

BABSKI, D. (1996). *Algebra is cool: reflections on a changing pedagogy in an urban setting.* En D, SHIFTER (ed.). *What´s happening in math class? Envisioning new practices through teacher education.* Vol. 2. Teachers College. New York: Columbia University.

CAMARGO, L; GUZMÁN, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio.* Bogotá: Magisterio.

CORIA, K. (2001). *Documento de Cátedra 10, Estudio de Casos.* Recuperado el 13 de abril de 2007 de http://www.sai.com.ar/KUCORIA/estudio_casos.html.

JARAMILLO, D. (2003, a). *(Re)constituiçao do ideário de futuros profesores de matemática num contexto de investigaçao sobre a práctica pedagógica.* Tesis de Doctorado. Campinas: UNICAMP.

JARAMILLO, D. (2003, b). *Processos metacognitivos na (re)constituçao do idéario pedagógico de licenciandos em matemática.* En: FIORENTINI, D. (org.) F*ormação de professores de matemática: explorando novos caminhos com outros olhares.* Campinas: Mercado de letras.

JARAMILLO, D. (2004). Material de clase Seminario de Investigación Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

LLINARES, S. (2006). *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas.* Recuperado el 17 de octubre de 2006 de http://www.spce.org.pt/sem/9900Llinares.pdf.

LYTLE, S; COCHRAN-SMITH, M. (1999). *Aprender de la investigación de los docentes: una tipología de trabajo.* En PÉREZ, A; BARQUÍN, J & ÁNGULO, J. *"Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica".* Madrid: Ediciones AKALT S.A.

MASON; GRAHAM; PIMM; GOWAR. (1999). *Raíces del álgebra y Rutas hacia el álgebra. (Agudelo, C. trad.)* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

MATEOS, M. (2001). *Metacognición y educación.* Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

MEC, Diseño Curricular Base. (1989). *Ministerio de Educación y Ciencia.* Madrid.

MEN, Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

MEN, Ministerio de educación Nacional. (2003). *Estándares básicos de Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

MOREIRA, M; BUCHWEITZ, B. (1987). *Mapas Conceituais instrumentos didáticos de avaliaçao e de análise de currículo.* Sao Paulo: Editora Moraes.

MOREIRA, M; SALZANO, E. (1982). *Aprendizagem Significativa a teoria de Davis Ausubel.* Sao Paulo: Editora Moraes.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Ediciones Martínez Roca.

NOVAK, J. D. (2006). *Entrevista brindada a EDUTEKA.* Recuperada el 20 de septiembre de 2006 de http://www.eduteka.org/entrevista22.php.

ONTORIA, A. (1997) *Mapas conceptuales una técnica para aprender.* Madrid: Nancea S.A. de ediciones.

POSADA, M.; OBANDO, G.; MÚNERA, J. MARÍN, A; CÁRDENAS, M; CARVAJAL, B; BASTIDAS, M. (2005) *Interpretación e implementación de los estándares básicos de matemáticas.* Medellín: Digital Express Limitada.

RODRÍGUEZ, C. (2004). *Figuras geométricas: Relación entre sus medidas y su dimensión*. Monografía de Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

SALINAS, P; ALARÉS, J; PULIDO, R; SANTOS, F; ESCOBEDO, J; GARZA, J. (2002). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. 2ª. ed.* México: Editorial Trillas.

SANTOS, V.M.P. (1997). Av*aliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática: métodos alternativos.* Rio de Janeiro: UFRJ.

SIERPINSKA, A. (1992). *Sobre la comprensión de la noción de función.* En E. DUBINSKI & G. HAREL (eds.). *The concept of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA* Notes, vol. 25, pp. 25-58. *(Delgado, C. trad.)* Washington: Mathematical Association of America.

SOLANO, S. (2005). *Los mapas conceptuales: una herramienta/estrategia en el proceso de aprendizaje de las identidades trigonométricas.* Monografía de Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: UIS.

STEWART, J. (2002). *Cálculo: Trascendentes tempranas. 4ª ed.* México: Internacional Thompson Editores S.A.