

**EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE  
SOLUCIONES PARA UN SISTEMA DE  
QUIMIOTAXIS-NAVIER-STOKES EN EL CONTEXTO  
FRACCIONARIO**

**MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2022**

**EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE  
SOLUCIONES PARA UN SISTEMA DE  
QUIMIOTAXIS-NAVIER-STOKES EN EL CONTEXTO  
FRACCIONARIO**

**MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA**

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

**Magíster en Matemáticas**

Director:

**ÉLDER JESÚS VILLAMIZAR ROA**

Ph.D. en Matemáticas

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2022**

*Dedicado a:  
Mi familia, en especial, a mis padres  
y a mi hermano Jairo Fabián.*

# Agradecimientos

---

A Dios, porque creo profundamente que ha sido mi guía en cada uno de mis pasos, me ha acompañado siempre en este largo recorrido de cumplir la meta que tuve desde niño: tener una maestría antes de los treinta años. El camino no ha sido fácil, pero, sin duda, estoy culminando una etapa muy importante de mi vida, pues hoy cuento con la formación en matemáticas que algún día soñé tener.

A mi madre, Nubia Amanda Fontecha Medina y mi padrastro, Luis Cordero, quienes me han apoyado desde el primer momento en que tomé la decisión de hacer la maestría; sus incontables sacrificios y esfuerzos para que este objetivo sea una realidad, hoy tienen una recompensa.

A mi padre, Jose Salvador Cepeda, quien es un ejemplo para nosotros, sus hijos, un campesino trabajador, sencillo, humilde, y que, pese a las adversidades me apoyó económicamente y es el responsable que este sueño se materializara; siempre estaré agradecido con mi padre por su acto valiente y noble de apoyarme en esta etapa de mi vida.

A mi hermano Jairo Fabián Cepeda y mi cuñada Lina Julieth Villabona, por cada llamada y cada palabra de ánimo, su apoyo económico, pero sobre todo moral hizo que yo continuara cuando sentía que no lo iba a lograr, gracias por estar siempre.

A mi hermano Fredy Alexander Cepeda y mi cuñada Nini Johana Garcia, quienes ante la difícil situación del inicio de la pandemia y ante la falta de recursos como

el internet para poder recibir las clases, me recibieron en su casa de una manera desinteresada, proporcionándome las condiciones para que pudiera continuar con mis estudios.

Al profesor Dr. Élder Jesús Villamizar Roa, quien desde el primer momento que le comenté que quería hacer la maestría, me motivó y me apoyó para que pudiera continuar con mis estudios. Soy un convencido que he sido muy afortunado en mi vida, pero quizás de las bendiciones más grandes que he tenido, es contar con el profe Élder como mi director de tesis de pregrado y ahora también, de la maestría; su orientación, sus correcciones y su apoyo ha sido fundamental en la realización de este trabajo y en mi formación como matemático.

A mis compañeros de la maestría, a quienes les agradezco inmensamente su apoyo, su ánimo y su solidaridad ante las circunstancias difíciles de la pandemia del Covid-19; cada una de las reuniones por Zoom y llamadas grupales me hicieron saber la calidad de compañeros que tenía, aprendí mucho de cada uno y creo que soy un afortunado por haber tenido los compañeros que tuve.

A cada uno de los profesores que me correspondieron en esta etapa, admiro su paciencia y agradezco el apoyo brindado ante las difíciles circunstancias de la pandemia: el ánimo que nos daban, la flexibilidad ante tantas cosas que teníamos, la calidad de sus clases y el esfuerzo que hacían para que entendiéramos los diferentes temas a través de una pantalla.

# CONTENIDO

	<b>Pág</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>12</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>18</b>
1.1 ESPACIOS DE MORREY Y DE BESOV-MORREY .....	18
1.2 NOCIONES RELEVANTES DEL CÁLCULO FRACCIONARIO .....	21
1.2.1 La función Gamma y la función Beta .....	21
1.2.2 La integral de Riemman-Liouville, la derivada de Riemman-Liouville y la derivada de Caputo .....	23
1.2.3 Operadores lineales, el semigrupo del calor fraccionario y la transformada de Laplace .....	29
1.2.4 Los operadores de Mittag-Leffler .....	35
1.2.5 Dedución de la formulación integral .....	35
<b>2 MARCO FUNCIONAL Y ESTIMATIVAS</b>	<b>38</b>
2.1 EL MODELO .....	39
2.2 ESPACIOS SOLUCIÓN .....	39
2.3 EL PROYECTOR DE LERAY .....	43
2.4 FORMULACIÓN INTEGRAL .....	44
2.5 ESTIMATIVAS LINEALES PARA LOS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER	46
2.6 ESTIMATIVAS BILINEALES .....	55
<b>3 EXISTENCIA GLOBAL Y ESTABILIDAD</b>	<b>63</b>

3.1	UN RESULTADO DE EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES .....	63
3.2	UN RESULTADO DE ESTABILIDAD DE SOLUCIONES .....	67
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>74</b>

## RESUMEN

**TÍTULO:** EXISTENCIA GLOBAL Y COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO DE SOLUCIONES PARA UN SISTEMA DE QUIMIOTAXIS-NAVIER-STOKES EN EL CONTEXTO FRACCIONARIO.<sup>1</sup>

**AUTOR:** MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA.<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** QUIMIOTAXIS NAVIER-STOKES, ESPACIOS DE BESOV MORREY, DERIVADA FRACCIONARIA DE CAPUTO, DISIPACIÓN FRACCIONARIA.

### **DESCRIPCIÓN:**

El presente trabajo está dirigido al estudio de un modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes fraccionario, en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , con una variación temporal fraccionaria en el sentido de Caputo, una autodifusión fraccionaria para las variables físicas y un mecanismo de disipación fraccionaria para el proceso de quimioatracción.

Se inicia con una breve introducción, en la cual se presentan algunos elementos que motivan el planteamiento del problema y se exponen algunos resultados que han sido obtenidos previamente para el modelo clásico (sin régimen fraccionario). En el primer Capítulo, se introducen algunas definiciones y resultados preliminares que se usan en el desarrollo del trabajo; se presenta la definición de los espacios de Morrey y de Besov-Morrey, se mencionan algunas de sus propiedades y también se presentan algunas nociones relevantes del cálculo fraccionario. Al final del capítulo, se hace una deducción de la formulación integral para un problema de Cauchy abstracto con derivada temporal de orden fraccionario en el sentido de Caputo. En el Capítulo 2, se presenta una descripción del modelo, se define el marco funcional para los datos iniciales y las variables involucradas

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado.

<sup>2</sup>Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander.  
Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. en Matemáticas.

y, además, se introduce la formulación integral del modelo de Cauchy asociado. Luego, se derivan algunas estimativas de decaimiento en tiempo para los operadores de Mittag-Leffler y posteriormente, se calculan algunas estimativas bilineales, las cuales son necesarias para demostrar los principales resultados de este trabajo.

Finalmente, en el Capítulo 3, a partir de las estimativas calculadas previamente, se prueba un nuevo resultado de existencia y unicidad de soluciones *mild* globales con datos iniciales pequeños en espacios de Besov-Morrey. Así mismo, se prueba un resultado de estabilidad asintótica para las soluciones globales obtenidas.

## ABSTRACT

**TITLE:** GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR A CHEMOTAXIS-NAVIER-STOKES SYSTEM IN THE FRACTIONAL CONTEXT.<sup>3</sup>

**AUTOR:** MIGUEL ÁNGEL FONTECHA MEDINA.<sup>4</sup>

**KEYWORDS:** CHEMOTAXIS-NAVIER-STOKES, BESOV-MORREY SPACES, CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE, FRACTIONAL DISSIPATION.

### DESCRIPTION:

This work is concerned to the study of a fractional chemotaxis-Navier-Stokes model in the whole space  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , with a time-fractional variation in the Caputo sense, a fractional self-diffusion for the physical variables and a fractional dissipation mechanism for the chemoattraction process.

It begins with a brief introduction, showing some elements that motivate the approach of the problem, as well as recalling some results that have been previously obtained for the classical model (no fractional regime). In the first Chapter, some definitions and preliminary results that are used in the development of the work are introduced; in particular, the definitions and some properties of Morrey and Besov-Morrey spaces are given; in addition, some relevant notions of fractional calculus are reviewed. At the end of the chapter, a deduction of the integral formulation for an abstract Cauchy problem with a temporal derivative of fractional order in the sense of Caputo is carried out. In Chapter 2, a description of the model is presented; moreover, the functional framework for the initial data and the variables involved is established. In addition, the integral formulation of the associated Cauchy model is given. Then, some time decay estimates for the Mittag-Leffler operators are derived, and subsequently, some bilinear estimates, which are ne-

---

<sup>3</sup>Degree work.

<sup>4</sup>Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander.  
Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. in Mathematics.

cessary to demonstrate the main results of this work, are proved.

Finally, in Chapter 3, based on the previously obtained estimates, a result of existence and uniqueness of global *mild* solutions for the proposed system is proved. Likewise, an asymptotic stability result for the global solutions is obtained.

# INTRODUCCIÓN

---

La quimiotaxis corresponde al mecanismo biológico del movimiento de los organismos vivos en respuesta a un estímulo químico, que se puede dar hacia una mayor concentración de la sustancia química (atractiva) o hacia regiones de menor concentración (repulsiva). Algunos estudios experimentales, como los reportados en [28] y [44], han indicado que la interacción entre las células y los fluidos afecta considerablemente la dinámica. Algunos ejemplos de este tipo de comportamiento se han mostrado en llamativos experimentos que revelan la formación espontánea de agregados en forma de pluma en poblaciones *Bacillus subtilis* suspendidos en gotas de agua sésiles [46]. Este tipo de interacción quimiotaxis-fluido se puede modelar mediante el siguiente sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = D_n \Delta n - \chi \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t + u \cdot \nabla c = D_c \Delta c - \rho n c, \\ u_t + (u \cdot \nabla) u = D_u \Delta u - \nabla \pi - n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (0.0.1)$$

donde  $n = n(x, t) \geq 0$ ,  $c = c(x, t) \geq 0$ ,  $\pi(x, t)$  y  $u(x, t)$  denotan respectivamente, la densidad celular, la concentración de la señal química, la presión, y la velocidad del fluido en la posición  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , y tiempo  $t > 0$ . En este modelo se asume que la señal química es consumida con una tasa  $\rho$  proporcional a la cantidad de células. Tanto las células como la sustancia química son transportadas por un fluido viscoso incompresible que, a su vez, es impulsado por la fuerza inducida por la gravitación  $-n \nabla \phi$ , modelando los efectos debido a las

variaciones de densidad provocadas por la agregación celular. Los parámetros adicionales  $\chi, D_n, D_c$  y  $D_u$  son constantes positivas representando la sensibilidad quimiotáctica, el coeficiente de difusión celular, el coeficiente de difusión química y la viscosidad del fluido, respectivamente.

Teniendo en cuenta que el comportamiento de la mayoría de los sistemas biológicos tienen propiedades de memoria, que se ignoran cuando se supone una derivada del tiempo de orden entero, una consideración natural es sustituir el primer orden en la derivada del tiempo en (0.0.1) por una derivada temporal en un marco fraccionario, introduciendo un retraso no local en el tiempo para la población en movimiento. Por otra parte, el sistema (0.0.1) asume que la difusión celular no se ve afectada por el comportamiento espacial no local de los organismos. Sin embargo, observaciones recientes indican que en ciertos casos de movimiento quimiotáctico, los organismos desarrollan estrategias de búsqueda alternativas, particularmente cuando los quimioatrayentes, alimentos u otros objetivos son escasos o raros. Esto significa que las trayectorias de la población de organismos están mejor descritos por los llamados vuelos de Lévy que por el movimiento browniano (ver [21] y [31]). El mecanismo de vuelos de Lévy se ha sugerido en varios contextos biológicos, incluidas las dinámicas celulares, la ecología y un gran número de poblaciones de peces y mamíferos (c.f. [22] y referencias allí para una discusión más profunda). Por lo tanto, motivados por las observaciones anteriores, proponemos y analizamos teóricamente el siguiente sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes en un entorno fraccionario  $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ ,  $N \geq 2$ :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\beta n + u \cdot \nabla n = -D_n (-\Delta)^{\alpha/2} n - \chi \nabla \cdot (n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c)), \\ {}^c\mathcal{D}_t^\beta c + u \cdot \nabla c = -D_c (-\Delta)^{\alpha/2} c - \rho n c, \\ {}^c\mathcal{D}_t^\beta u + (u \cdot \nabla) u = -D_u (-\Delta)^{\alpha/2} u - \nabla \pi - n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (0.0.2)$$

donde  ${}^c\mathcal{D}_t^\beta$  es la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\beta \in (0, 1]$ ,  $\alpha \in (0, 2]$  y

$\theta \in [0, N)$  (ver definición en el Capítulo 1).

En los años recientes, el análisis de existencia, unicidad, regularidad, y el comportamiento asintótico de las soluciones de modelos de quimiotaxis-Navier-Stokes han atraído la atención de un buen número de autores, debido a la importancia en el contexto biológico y también, debido a sus desafíos teóricos. Para revisar resultados sobre la existencia, unicidad, regularidad y comportamiento asintótico de soluciones para (0.0.1) en el caso de dominios acotados referimos [7, 16, 35, 29, 42, 18, 47, 45, 46] y referencias allí citadas. Por otra parte, si el planteamiento del sistema de ecuaciones se da en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , la existencia local y global en el tiempo de soluciones para (0.0.1) se ha analizado en [11, 12, 13, 32, 51], y algunas referencias allí citadas. En particular, en [32] los autores obtuvieron una clase de soluciones globales pequeñas en el marco de los espacios  $L^p$ -débiles que incluyen términos no lineales de doble atracción en la ecuación de densidad. Un resultado de buena postura local en 3D para los datos iniciales en la clase de espacios de Besov no homogéneos  $B_{p,r}^s \times B_{p,r}^{s+1} \times B_{p,r}^{s+1}$  donde  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq r \leq \infty$ , y  $s > 3/p + 1$ , fue probado en [51] y, en [13] los autores obtuvieron un resultado de existencia de soluciones locales en el tiempo para datos iniciales grandes, así como de una existencia global en el tiempo para datos iniciales pequeños y alguna condición de pequeñez en el término gravitacional, en espacios de Besov críticos homogéneos. Más tarde, en [11] los autores demostraron un criterio de extensión para las soluciones locales en el tiempo. Incluso en el caso 3D, en [12] la existencia de soluciones globales para datos iniciales pequeños en el espacio de Besov crítico homogéneo  $\dot{B}_{p,1}^{-2+3/p} \times \dot{B}_{p,1}^{3/p} \times \dot{B}_{p,1}^{-1+3/p}$  con  $1 \leq p < 3$  fue probada. Más recientemente, en [19, 23], los autores obtuvieron resultados de existencia y comportamiento asintótico de soluciones globales pequeñas en diferentes clases de espacios tipo Besov-Morrey.

Los resultados anteriores están relacionados con el modelo no fraccionario (0.0.1). El objetivo de este trabajo es analizar la existencia y estabilidad de soluciones globales para el sistema fraccionario completo (0.0.2). Hasta donde se sabe, el

sistema fraccionario (0.0.2) no ha sido analizado previamente. Sin embargo, las ecuaciones de Navier-Stokes fraccionarias en el tiempo (con difusión entera), que corresponde a un submodelo de (0.0.2), ya se han estudiado en [10] en el marco de los espacios  $L^p$ . Como se señala en [10], el interés en el análisis de las ecuaciones de Navier-Stokes se reflejó en [40] considerando soluciones suaves y estableciendo varios resultados sobre la regularidad de sus soluciones. Posteriormente, en [50], el autor demostró la conjetura de Shinbrot, que afirmaba que cualquier solución débil de las ecuaciones de Navier-Stokes tiene cualquier derivada fraccionaria de orden menor o igual a  $1/2$ . Algunos resultados sobre el sistema Navier-Stokes con difusión fraccionaria se obtuvieron en [25]. Por otro lado, el sistema de Keller-Segel fraccionario, incluso en el caso en el que el término de consumo  $nc$  se reemplaza por  $n - c$ , tampoco se ha estudiado ampliamente. De hecho, solo se conocen las referencias [1, 2] donde los autores estudiaron la existencia global y el comportamiento a largo plazo de las soluciones para el sistema Keller-Segel fraccionario en el tiempo, es decir, asumiendo  $\alpha = 2$ ,  $\theta = 0$  y  $\beta \in (0, 1)$ , y considerando el régimen de producción-degradación  $n - c$  en la ecuación de la concentración. En [1], los autores analizaron la existencia global y el comportamiento a largo plazo de las soluciones considerando datos iniciales pequeños en el espacio Besov-Morrey  $\mathcal{N}_{r,\lambda,\infty}^{-b} \times \dot{B}_{\infty,\infty}$  con  $N \geq 2$ ,  $0 \leq \lambda \leq N - 2$ ,  $b = 2 - \frac{N-\lambda}{r}$  y  $\frac{N-\lambda}{2} < r < N - \lambda$ . Vale la pena observar que el espacio de existencia en [1] se basa en normas auxiliares *a la Kato*, como en [49]. Algunas propiedades de regularidad de la solución para (0.0.2), asumiendo  $\alpha = 2$ ,  $\theta = 0$  y  $\beta \in (0, 1)$ , y dato inicial en  $L^N \cap L^{N/2} \cap L^\infty \times \dot{B}_{\infty,\infty}$  se obtuvieron en [2].

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se plantea y se analiza un modelo de quimiotaxis Navier-Stokes-fraccionario en todo el espacio  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , con una variación fraccionaria de tiempo en el sentido de Caputo, una autodifusión fraccionaria para las variables físicas y un mecanismo de disipación fraccionaria para el proceso de quimio-atracción. Se prueban nuevos resultados de existencia y unicidad de soluciones *mild* globales con pequeños datos iniciales en una clase más grande de espacios críticos del tipo Besov-Morrey. Estos resultados amplían la buena postura en el clásico (no régimen fraccionario) obtenidos

por Postigo y Ferreira [23]. También se demuestra la estabilidad asintótica a largo plazo de las soluciones.

El contenido de esta tesis se ha organizado de la siguiente manera: en el primer capítulo, se introducen algunos conceptos y resultados relevantes que serán utilizados en el desarrollo del trabajo. Se inicia introduciendo la definición de los espacios de Morrey y de Besov-Morrey. En la segunda sección, la cual se ha dividido en varias subsecciones, se presentan algunas nociones relevantes del cálculo fraccionario, las cuales serán usadas a lo largo del texto; se inicia introduciendo dos funciones que juegan un rol importante en esta rama del análisis, como lo son la función Gamma y la función Beta, así como algunas de sus propiedades. Luego, se habla de los operadores integro-diferenciales del cálculo fraccionario, destacando, por supuesto, el operador derivada fraccionaria de Caputo. En lo que sigue, se introducen los operadores de Mittag-Leffler y se enuncian algunas de sus propiedades. Para terminar este capítulo, se presenta la deducción de la formulación integral de un problema de Cauchy abstracto con derivada temporal fraccionaria en el sentido de Caputo.

En el Capítulo 2, se presenta el marco funcional de los datos iniciales y de variables involucradas en el sistema (0.0.2), así como algunas estimativas lineales y no lineales que serán usadas más adelante para demostrar los principales resultados de esta tesis. Se inicia presentando, de una manera breve, la descripción del modelo. En la segunda sección se muestra la invarianza por *scaling* de cada una de las incógnitas, unas hipótesis sobre los parámetros involucrados y luego, el respectivo marco funcional para la solución del sistema planteado. Luego, se introduce la formulación integral del problema y se denota de una manera conveniente cada uno de sus términos, con el fin de facilitar los cálculos de las diferentes estimativas. En la siguiente sección, se presentan las estimativas lineales de decaimiento en tiempo de los operadores de Mittag-Leffler en los espacios de Besov-Morrey. Para culminar este capítulo, se desarrollan las estimativas bilineales asociadas a la formulación integral ya presentada.

En el Capítulo 3 se enuncian los principales resultados de esta tesis. Se inicia

demostrando, mediante un argumento de punto fijo, un teorema de existencia de solución para el sistema (0.0.2) con datos iniciales pequeños en espacios de Besov-Morrey. Posteriormente, se demuestra un teorema de estabilidad asintótica para la clase de soluciones dadas por el teorema de existencia. Para llevar a cabo la demostración de estos teoremas, se aplican las diferentes estimativas calculadas en el Capítulo 2 de este trabajo. Finalmente, es importante mencionar que los resultados presentados en esta tesis están consignados en el *preprint* [27].

---

## Capítulo

# 1

## PRELIMINARES

---

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados preliminares que facilitarán la lectura del contenido del presente trabajo; se inicia con la definición de los espacios de Morrey y de Besov-Morrey, y a continuación se mencionan algunas de sus propiedades. Posteriormente, se presentan las nociones más relevantes del cálculo fraccionario, las cuales serán usadas a lo largo de esta disertación; en particular, se enuncian la definición y propiedades de la función Gamma y la función Beta, además de recordar la definición y propiedades de los operadores integro-diferenciales asociados al cálculo fraccionario. Finalmente, se hará una breve deducción de la formulación integral de un problema de Cauchy abstracto con derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo. Los resultados preliminares presentados en este capítulo pueden ser encontrados principalmente en [9].

### 1.1 ESPACIOS DE MORREY Y DE BESOV-MORREY

Con el objetivo de aclarar y facilitar la comprensión de este trabajo, se inicia esta sección, estableciendo la notación usada a lo largo del mismo. Sea  $X$  un espacio de Banach y  $0 \leq T \leq \infty$ .

- Se define  $C^k(0, T; X) = \{f : [0, T] \rightarrow X, k \text{ veces diferenciable}\}$ . Se considera la norma  $\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{t \in [0, T]} \|D^\alpha f(t)\|$ . Así,  $(C^k(0, T; X), \|f\|_{C^k})$  es un espacio de Banach.

- Como es habitual, se denotan los espacios  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , con norma usual, por ejemplo,

$$L^p(0, T; X) = \left\{ f : [0, T] \rightarrow X; f \text{ medible, } \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty \right\}$$

con norma

$$\|f\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

- El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  está dado por

$$W^{k,p} = \{f : [0, T] \rightarrow X : f \in L^p(0, T; X) \text{ y } f^k \in L^p(0, T; X)\},$$

donde  $f^k$  es la  $k$ -ésima derivada débil de  $f$ .

- El espacio  $C(0, T; X)$  corresponde al conjunto de funciones continuas  $f : [0, T] \rightarrow X$  con

$$\|f\|_{(C(0, T); X)} := \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\| < \infty.$$

- El espacio  $BC_w(0, T; X)$  representa la clase de funciones  $f : [0, T] \rightarrow X$  débilmente continuas y acotadas.

Además, se denota por  $\mathcal{S}$  la clase de Schwartz y por  $\mathcal{S}'$  al espacio de distribuciones temperadas. Para  $f \in \mathcal{S}'$ ,  $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$  y  $\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$  representan la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier de  $f$ , respectivamente.

Por otra parte, para dar un contexto del marco funcional en el cual se estudia el sistema (0.0.2), se recuerdan, brevemente, algunos resultados preliminares acerca de los espacios de Morrey y de Besov-Morrey. Para mayores detalles ver [38].

**Definición 1.1.** Para  $1 \leq p_1 \leq p \leq \infty$  el espacio de Morrey  $\mathcal{M}_{p_1}^p = \mathcal{M}_{p_1}^p(\mathbb{R}^N)$  se define como el conjunto de todas las funciones medibles  $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\|u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} \sup_{R > 0} R^{\frac{N}{p} - \frac{N}{p_1}} \|u\|_{L^{p_1}(B(x_0, R))} < \infty,$$

donde  $B(x_0, R)$  es la bola cerrada en  $\mathbb{R}^N$  con centro  $x_0$  y radio  $R$ . El espacio  $\mathcal{M}_{p_1}^p$ , dotado con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}$ , es un espacio de Banach. Para  $1 < p < \infty$  se tiene que  $\mathcal{M}_p^p = L^p$ . En el caso  $p = p_1 = \infty$ , se tiene que  $\mathcal{M}_\infty^\infty = L^\infty$ .

Ahora, se recuerda la desigualdad de Hölder en el marco de los espacios de Morrey.

**Lema 1.2.** (Desigualdad de Hölder) Sean  $1 \leq p_1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq q_1 \leq q \leq \infty$  y  $1 \leq r_1 \leq r \leq \infty$ . Si  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  y  $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}$ , entonces

$$\|fg\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \leq \|f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|g\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (1.1.1)$$

para toda  $f \in \mathcal{M}_{p_1}^p$  y  $g \in \mathcal{M}_{q_1}^q$ .

A continuación, se introducen los espacios homogéneos de Besov-Morrey.

Sean  $u \in \mathcal{S}'$  y las funciones  $\psi_j$  construidas de la siguiente manera: Sea  $\varphi_0$  una función suave con soporte en la bola  $B(0, 1)$  tal que  $\varphi_0 \equiv 1$  para  $0 < |\xi| < \frac{2}{3}$ . Sea  $\varphi_j(\xi) = \varphi_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ , tal que  $\varphi_j$  tiene soporte en la bola  $B(0, 2^j)$ .

Se define  $\psi_j = \varphi_{j+1} - \varphi_j$ . Note que  $\psi_j(\xi) = \psi_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ , luego  $\psi_j(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .

**Definición 1.3.** El espacio homogéneo de Besov-Morrey  $\mathcal{N}_{p, p_1, r}^b = \mathcal{N}_{p, p_1, r}^b(\mathbb{R}^N)$  es definido como el conjunto de toda  $u \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$  tal que  $\check{\psi}_j * u \in \mathcal{M}_{p_1}^p$  para toda  $j$ , y

$$\|u\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, r}^b} = \begin{cases} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( 2^{bj} \|\check{\psi}_j * u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right)^r \right)^{\frac{1}{r}} < \infty, & \text{para } 1 \leq p_1 \leq p \leq \infty, 1 \leq r < \infty, b \in \mathbb{R}, \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left( 2^{bj} \|\check{\psi}_j * u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right) < \infty, & \text{para } 1 \leq p_1 \leq p \leq \infty, r = \infty, b \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde  $\mathcal{P}$  denota el conjunto de polinomios con  $N$  variables. El espacio  $\mathcal{N}_{p, p_1, r}^b$  es un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, r}^b}$ .

## 1.2 NOCIONES RELEVANTES DEL CÁLCULO FRACCIONARIO

El cálculo fraccionario ha sido tema de interés para muchos matemáticos importantes como Leibniz, L'hopital, Euler, Fourier, Abel, Liouville, Riemman, entre otros. En épocas más recientes, en particular durante los últimos cuarenta años, este tipo de herramienta del análisis ha sido retomada y extendida a varios contextos del análisis matemático y las ecuaciones diferenciales, encontrando un alto potencial en diversas áreas de las ciencias aplicadas, entre las que se pueden mencionar algunos trabajos en dinámicas de poblaciones, dinámicas no determinísticas [48], electromagnetismo [20], teoría de viscoelasticidad [15, 17, 8], entre otros. En esta sección se presentan algunas nociones importantes de esta rama del análisis que serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

### 1.2.1. La función Gamma y la función Beta

A continuación se presentan las definiciones de dos funciones muy importantes en el cálculo fraccionario, como lo son la función Gamma y la función Beta. Así mismo, se destacan algunas de sus propiedades, las cuales serán aplicadas en las estimativas del Capítulo 2 de esta tesis. Los detalles presentados en esta subsección pueden ser encontrados en [9, 14].

**Definición 1.4.** Sea  $D(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C}, \text{Re}(z) > 0\}$ . La función Gamma de Euler es definida por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau, \quad z \in D(\Gamma).$$

La función Gamma verifica, entre otras, las siguientes propiedades:

i)  $\Gamma(0) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

ii)  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ .

iii) Para  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\Gamma(N + 1) = N!$

La función *Gamma* permite generalizar la noción de *factorial* a cualquier número real positivo. Como se verá más adelante, los diferentes operadores integro-diferenciales en el sentido fraccionario se definen en términos de esta función. Una representación alternativa del recíproco de la función Gamma está dada por la fórmula,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \sigma^{-z} e^{\sigma} ds, \quad z \in D(\Gamma), \quad (1.2.1)$$

la cual es también conocida como *fórmula de representación de Hankel*. En (1.2.1)  $H_a$  denota un camino de Hankel, es decir un camino conformado por dos rayos  $\arg \sigma = \pm\phi$  extendiéndose hasta el infinito, y el arco circular  $\arg \sigma = \epsilon e^{i\theta}$ ,  $|\theta| \leq \phi$  con  $\phi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  y radio  $\epsilon > 0$ . La deducción de esta representación puede ser encontrada en [9, 39].

Por otra parte, a partir de la definición de los nuevos operadores en el contexto fraccionario, surgen ciertas integrales con una estructura particular, las cuales son encontradas de una manera natural en diferentes estimativas del cálculo fraccionario, a saber, la función beta, la cual se define a continuación.

**Definición 1.5.** Sea  $D(b) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \text{Re}(z_1) > 0, \text{Re}(z_2) > 0\}$ . La función Beta es definida por la integral

$$b(z_1, z_2) = \int_0^1 \tau^{z_1-1} (1-\tau)^{z_2-1} d\tau, \quad z_1, z_2 \in D(b).$$

Una propiedad conocida de la función Beta es la de simetría, esto es, dados  $z_1, z_2 \in D(b)$ , se verifica que  $b(z_1, z_2) = b(z_2, z_1)$ . Además, esta función guarda una relación con la función Gamma, como se muestra en el siguiente teorema. La prueba de este teorema puede ser encontrada en [9].

**Teorema 1.6.** Sean  $z_1, z_2 \geq 0$ . Entonces

$$b(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)},$$

y por lo tanto,

$$\int_0^t \tau^{z_1-1} (t-\tau)^{z_2-1} d\tau = t^{z_1+z_2-1} b(z_1, z_2). \quad (1.2.2)$$

## 1.2.2. La integral de Riemman-Liouville, la derivada de Riemman-Liouville y la derivada de Caputo

El objetivo de esta sección es presentar la definición de algunos operadores íntegro-diferenciales del cálculo fraccionario. Se inicia con una introducción informal del operador integral en este nuevo contexto. Sea  $X$  un espacio de Banach,  $T \in (0, \infty)$ . Considere la aplicación  $I : L^1(0, T; X) \rightarrow C([0, T]; X)$ , dada por

$$If(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Note que, por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$(I^2 f)(t) = I(If)(t) = \int_0^t \int_0^s f(r) dr ds = \int_0^t \frac{(t-s)}{1!} f(r) dr.$$

De nuevo, si se repite el proceso anterior,

$$(I^3 f)(t) = I(I(If))(t) = \int_0^t \int_0^s \int_0^r f(\xi) d\xi dr ds = \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2!} f(s) ds.$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier  $N \in \mathbb{N}$ , obteniendo así, una fórmula para calcular la  $N$ -ésima integral de una función  $f$ , la cual es conocida en la literatura como *fórmula de Cauchy*:

$$(I^N f)(t) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^t (t-s)^{N-1} f(s) ds. \quad (1.2.3)$$

Note que la fórmula (1.2.3) puede extenderse a cualquier número real positivo, generalizando el factorial mediante la función Gamma. Lo anterior permite introducir una definición del operador integral de orden fraccionario. Esta nueva noción de integral fraccionaria, se define a continuación.

**Definición 1.7.** Sea  $X$  un espacio de Banach, y  $f \in L^1(0, T; X)$ ,  $T > 0$ . La

integral fraccionaria de Riemman-Liouville de orden  $\beta \in (0, 1)$  de  $f$  está dada por

$$I_t^\beta f(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (1.2.4)$$

**Ejemplo 1.8.** Sean  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (-1, \infty)$  y  $k$  una constante. Considere la función  $f(t) = kt^\gamma$ . Entonces

$$I_t^\beta f(t) = k \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} t^{\beta+\gamma}. \quad (1.2.5)$$

*Demostración.* En efecto, de (1.2.4) y las propiedades de la función Beta, se tiene que

$$\begin{aligned} I_t^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k s^\gamma ds \\ &= \frac{k}{\Gamma(\beta)} t^{\beta+\gamma} \int_0^1 (1-s)^{\beta-1} s^\gamma ds \quad (\text{por(1.2.2)}) \\ &= \frac{k}{\Gamma(\beta)} t^{\beta+\gamma} b(\beta, \gamma+1) \\ &= \frac{k}{\Gamma(\beta)} t^{\beta+\gamma} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} \\ &= k \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\beta+\gamma+1)} t^{\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

■

**Ejemplo 1.9.** [14, Ejemplo 2.2] Sea  $f(t) = e^{\lambda t}$ , para algun  $\lambda > 0$ .

- Note que para  $N \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $I_t^N f(t) = \lambda^{-N} e^{\lambda t}$ .
- Ahora, para  $\beta \in (0, 1)$ , usando la expansión en serie de la función exponencial, el resultado del ejemplo anterior y una de las propiedades de la función Gamma, se obtiene

$$\begin{aligned}
I_t^\beta f(t) &= I_t^\beta \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} I_t^\beta [t^k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\beta+1)} t^{\beta+k} \quad (\text{por(1.2.5)}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{k!}{\Gamma(k+\beta+1)} t^{\beta+k} \\
&= \lambda^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k+\beta}}{\Gamma(k+\beta+1)}. \tag{1.2.6}
\end{aligned}$$

**Observación 1.10.** Note que la serie resultante en (1.2.6) no es el mismo  $e^{\lambda t}$ . Esto muestra que el operador integral fraccionario de Riemman-Liouville no reproduce funciones exponenciales como sí lo hacen las integrales de orden entero.

**Definición 1.11.** Sean  $\mathcal{T} \in (0, \infty)$  y dos funciones medibles  $f : [0, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : [0, \mathcal{T}] \rightarrow \mathbb{R}$ . La convolución entre  $f$  y  $g$  cse define como

$$f * g(t) := \int_0^t f(t-s) g(s) ds, \quad \text{para todo } t \in [0, \mathcal{T}]$$

**Observación 1.12.** Sea  $\beta > 0$ . Considere la función  $g_\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  definida por

$$g_\beta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma. Se tiene que:

- Si  $\beta_1, \beta_2 > 0$ , entonces  $(g_{\beta_1} * g_{\beta_2})(t) = g_{\beta_1+\beta_2}(t)$ ,  $t > 0$ .
- Note que para  $\beta \in (0, 1)$  y  $f \in L^1(0, T; X)$ , la integral  $I_t^\beta$  en (1.2.4) se puede escribir como la convolución

$$I_t^\beta f(t) = (g_\beta * f)(t) = \int_0^t g_\beta(t-s)f(s)ds, \quad \text{c.t.p en } [0, T].$$

- Para completar el operador integral fraccionario de Riemman Liouville, se define  $I^0 f(t) := f(t)$ .

Ahora, se introduce el respectivo operador derivada fraccionario.

**Definición 1.13.** Sea  $\beta \in (0, 1)$ ,  $T > 0$  y  $f \in L^1(0, T; X)$  con  $f * g_{1-\beta} \in W^{1,1}(0, T; X)$ . Se define la derivada fraccionaria de Riemman-Liouville de orden  $\beta$ , la cual es denotada como  $D_t^\beta f(t)$  por

$$D_t^\beta f(t) = D_t^1 I_t^{1-\beta} f(t) = D_t^1 (g_{1-\beta} * f)(t), \quad \text{c.t.p en } [0, T],$$

donde  $D_t^1 = \frac{d}{dt}$  es el operador derivada clásico.

**Observación 1.14.** Explícitamente, la derivada de Riemman Liouville se define como

$$D_t^\beta f(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} f(s)ds \right], \quad \text{c.t.p en } [0, T]. \quad (1.2.7)$$

**Ejemplo 1.15.** Sean  $\beta \in (0, 1)$ ,  $\gamma \in (-1, \infty)$  y  $k$  una constante. Considere la función  $f(t) = kt^\gamma$ . Entonces

$$D_t^\beta f(t) = k \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\beta+\gamma)} t^{\gamma-\beta}.$$

*Demostración.* En efecto, de (1.2.7) y de las propiedades de las funciones Gamma y Beta, se tiene que

$$\begin{aligned}
D_t^\beta f(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (1-s)^{-\beta} k s^\gamma ds \right] \\
&= \frac{d}{dt} \left[ \frac{kt^{1-\beta+\gamma}}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^1 (1-s)^{-\beta} s^\gamma ds \right] \quad (\text{por(1.2.2)}) \\
&= (1-\beta+\gamma) \frac{kt^{\gamma-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} b(1-\beta, \gamma+1) \\
&= k(1-\beta+\gamma) \frac{t^{\gamma-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\beta+\gamma+1)} \\
&= k(1-\beta+\gamma) t^{\gamma-\beta} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\beta+\gamma+1)} \\
&= k(1-\beta+\gamma) t^{\gamma-\beta} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{(1-\beta+\gamma)\Gamma(1-\beta+\gamma)} \\
&= k \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(1-\beta+\gamma)} t^{\gamma-\beta}.
\end{aligned}$$

■

**Observación 1.16.** *Del ejemplo 1.15, se deduce que la derivada de Riemman Liouville de una función constante ( $\gamma = 0$ ) es dada por*

$$D_t^\beta k = k \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}.$$

*Así, por ejemplo, si se escoge  $\beta = \frac{1}{2}$  y  $k = 1$ , se obtiene que*

$$D_t^{\frac{1}{2}}(1) = 1 \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{t} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0.$$

*De lo anterior, se concluye que la derivada de Riemman-Liouville de una constante  $k \neq 0$ , no es cero.*

El tratamiento de las ecuaciones diferenciales fraccionarias trae consigo la inclusión de las condiciones iniciales, lo cual genera un inconveniente si se considera la derivada de Riemman-Liouville. En consecuencia, es natural pensar en un concepto de derivada fraccionaria que permita analizar problemas de valor inicial con derivadas de orden entero, a saber, la derivada fraccionaria de Caputo. Este nuevo operador derivada, permitió incorporar de una mejor manera el cálculo

fraccionario en la modelización de varios fenómenos físicos.

**Definición 1.17.** Sea  $\beta \in (0, 1)$ ,  $T > 0$  y  $f \in C([0, T]; X)$  con  $f * g_{1-\beta} \in W^{1,1}(0, T; X)$ .

Se define la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\beta$ , la cual es denotada por

${}^c\mathcal{D}_t^\beta f(t)$ , como

$${}^c\mathcal{D}_t^\beta f(t) := D_t^\beta [f(t) - f(0)], \quad \text{c.t.p en } [0, T].$$

**Observación 1.18.** De manera equivalente,

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}_t^\beta f(t) &:= \frac{d}{dt} \left\{ I_t^{1-\beta} [f(t) - f(0)] \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-s)^{-\beta} [f(s) - f(0)] ds \right\}. \end{aligned}$$

**Proposición 1.19.** Sea  $\beta \in (0, 1)$  y suponga que  $f \in C^1([0, T]; X)$ . Entonces

$${}^c\mathcal{D}_t^\beta f(t) = I_t^{1-\beta} f'(t), \quad \text{para todo } t \in [0, T].$$

**Observación 1.20.** Se resalta lo siguiente:

- De la definición de la derivada de Caputo, es claro que si  $f(t) = k$ ,  $k$  es una constante, entonces  ${}^c\mathcal{D}_t^\beta f(t) = 0$ . Es decir, la derivada de Caputo supera el inconveniente de la derivada de Riemman-Liouville de que la derivada de una constante no nula no sea cero.
- La derivada de Riemman-Liouville y la derivada de Caputo son operadores no locales; contrario a lo que ocurre en el caso entero, estas derivadas dependen de los valores que tome la función a lo largo de un intervalo.

Para terminar, en la siguiente proposición, se enuncian algunas propiedades que relacionan los operadores fraccionarios definidos en esta sección.

**Proposición 1.21.** [9, Proposición 2.35] Sean  $\beta_1, \beta_2, T \geq 0$ , con  $f \in L^1(0, T; X)$  y  $h(t) \in C([0, T]; X)$ . Entonces

$$i) \quad I_t^{\beta_1} I_t^{\beta_2} f(t) = I_t^{\beta_1 + \beta_2} f(t).$$

$$ii) D_t^{\beta_1} I_t^{\beta_1} f(t) = f(t).$$

iii) Si  $g_{1-\beta_1} * f \in W^{1,1}(0, T; X)$ , entonces

$$I_t^{\beta_1} D_t^{\beta_1} f(t) = f(t) - \frac{1}{\Gamma(\beta_1)} t^{\beta_1-1} \left( I_t^{1-\beta_1} f(s) \right) \Big|_{s=0}.$$

$$iv) {}^c D_t^{\beta_1} I_t^{\beta_1} h(t) = h(t).$$

v) Si  $g_{1-\beta_1} * h \in W^{1,1}(0, T; X)$ , entonces

$$I_t^{\beta_1} {}^c D_t^{\beta_1} h(t) = h(t) - h(0).$$

### 1.2.3. Operadores lineales, el semigrupo del calor fraccionario y la transformada de Laplace

En esta sección se presentan algunas propiedades de operadores lineales y semigrupos; para más detalles ver [9]. En adelante,  $X$  es un espacio de Banach y  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

**Definición 1.22.** Sea  $B : D(B) \subset X \rightarrow X$  un operador lineal. El conjunto

$$\rho(B) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)^{-1} : R(\lambda I - B) \subset X \rightarrow X \text{ es inyectiva, acotada y } \overline{R(\lambda I - B)} = X \right\}$$

es llamado el conjunto resolvente de  $B$ . El complemento  $\sigma(B) = \mathbb{C} \setminus \rho(B)$  es llamado el spectrum de  $B$ . Para  $\lambda \in \rho(B)$  el operador  $(\lambda I - B)^{-1}$  es llamado el resolvente.

**Definición 1.23.** Sea  $X$  un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales acotados  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  se denomina un semigrupo de clase  $C_0$  si se verifican las siguientes propiedades:

$$i) S(0) = I, \text{ donde } I \text{ es el operador identidad en } X.$$

ii)  $S(t + s) = S(t)S(s)$ , para todo  $s, t \geq 0$ .

iii) Para cada  $f$  en  $X$ , se tiene que  $S(t)f \rightarrow f$ , cuando  $t \rightarrow 0^+$ .

**Definición 1.24.** Sea  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  un  $C_0$ -semigrupo en  $X$ . El generador infinitesimal del semigrupo es el operador lineal  $A : D(A) \rightarrow X$ , donde

$$D(A) = \left\{ f \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f - f}{t} \text{ existe} \right\}$$

y

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)f - f}{t}, \quad f \in D(A).$$

**Definición 1.25.** Sea  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un operador cerrado y densamente definido. Se dice que el operador  $A$  es un operador sectorial positivo si existen constantes  $N \geq 1$  y  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$  tales que

$$S_\phi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi\} \subset \rho(A),$$

y

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{N}{|\lambda|}, \quad \forall \lambda \in S_\phi \setminus \{0\}.$$

**Teorema 1.26.** Si  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  es un operador sectorial positivo, entonces  $-A$  genera un  $C_0$ -semigrupo  $\{S(t) : t \geq 0\}$ ,

$$S(t) = \int_{H_0} e^{\lambda t} (\lambda + A)^{-1} d\lambda,$$

donde  $H_0$  es el cambio de trayectoria de cualquier camino de Hankel contenida en  $\rho(-A)$ . Además para cualquier  $u \in X$  y  $t \in [0, \infty)$ , la función  $t \rightarrow S(t)u$  es analítica y  $\frac{d}{dt}S(t)u = -AS(t)u$ , para  $t > 0$ .

Potencias fraccionarias:

**Definición 1.27.** Sea  $A$  un operador sectorial positivo en  $X$  y  $\beta > 0$ . Se define

$$A^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \tau^{\beta-1} S(\tau) d\tau,$$

donde  $\{S(t) : t \geq 0\}$  es el  $C_0$ -semigrupo generado por  $-A$ .

**Observación 1.28.** Para complementar la definición anterior, se considera que  $A^0 = I_X$ .

**Proposición 1.29.** Sea  $A$  un operador sectorial positivo en  $X$ . Entonces para cualquier  $\beta \geq 0$  el operador  $A^{-\beta} \in \mathcal{L}(X)$  y es inyectivo. Además, si  $\beta$  y  $\delta$  son números reales no negativos, entonces  $A^{-\beta}A^{-\delta} = A^{-(\beta+\delta)}$ .

De lo anterior, podemos definir la potencia fraccionaria de  $A$  para cualquier  $\beta \geq 0$ , como

$$A^\beta : D(A^\beta) \subset X \rightarrow X,$$

donde  $D(A^\beta) := R(A^{-\beta})$  y  $A^\beta := (A^{-\beta})^{-1}$ .

#### El operador Laplaciano fraccionario

A continuación se presentan algunas generalidades del operador Laplaciano fraccionario; estos y otros detalles pueden ser consultados en [41] y [34].

Sea  $v$  una función en la clase de Schwartz  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . La transformada de Fourier de  $v$ , denotada por  $\widehat{v}$  está también en  $\mathcal{S}$ . Para el Laplaciano  $-\Delta$  en  $\mathbb{R}^N$ , se tiene

$$\widehat{(-\Delta)v}(\xi) = |\xi|^2 \widehat{v}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N$$

El Laplaciano fraccionario  $(-\Delta)^s$ ,  $0 < s < 1$ , se define de una manera natural como

$$\widehat{(-\Delta)^s v}(\xi) = |\xi|^{2s} \widehat{v}(\xi).$$

**Definición 1.30.** Para  $v \in \mathcal{S}$ ,  $0 < \alpha < 2$  se tiene que

$$\widehat{[(-\Delta)^{\alpha/2}v]}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{v}(\xi), \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Ahora, se estudia la solución de la ecuación del calor homogénea de orden fraccionario en su variable espacial. Considere el problema:

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) + (-\Delta)^{\alpha/2} v(x, t) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Si se aplica la transformada de Fourier en (1.2.8), formalmente se obtiene el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{v}(\xi, t) + |\xi|^\alpha \widehat{v}(\xi, t) = 0, & (\xi, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T) \\ \widehat{v}(\xi, 0) = \widehat{v}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

La solución de (1.2.9) es dada por  $\widehat{v}(\xi, t) = e^{-t|\xi|^\alpha} \widehat{v}_0(\xi)$ . Por otra parte, sea el núcleo del calor fraccionario

$$K_\alpha(x, t) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix \cdot \xi} e^{-t|\xi|^\alpha} d\xi.$$

Note que  $\widehat{v}(\xi, t) = \widehat{K}_\alpha(\xi, t) \widehat{v}_0(\xi)$  y así,

$$v(x, t) = K_t^\alpha * v_0(x). \quad (1.2.10)$$

La solución (1.2.10) define una familia de operadores a un parámetro  $\{S_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$ , dado por  $S_\alpha(t)v_0(x) = K_t^\alpha * v_0(x)$ , conocido en la literatura como *semigrupo del calor fraccionario*.

**Observación 1.31.** Note que para  $u \in \mathcal{S}$ , se tiene que

$$S_\alpha(t) \widehat{u(x)}(\xi) = K_t^\alpha * \widehat{u(x)}(\xi) = \widehat{K}_t^\alpha(\xi) \widehat{u}(\xi) = e^{-t|\xi|^\alpha} \widehat{u}(\xi). \quad (1.2.11)$$

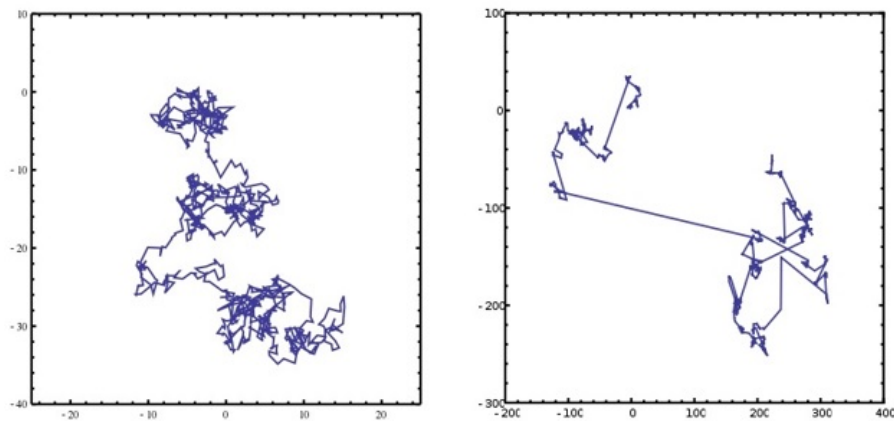
Por lo tanto, aplicando transformada inversa de Fourier en (1.2.11), el semigrupo del calor fraccionario está dado por

$$S_\alpha(t)u(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} \widehat{u}(\xi))(x). \quad (1.2.12)$$

**Observación 1.32.** *Para resaltar:*

- *Además de la definición en transformada de Fourier del operador Laplaciano fraccionario, es común encontrar otras formas de definir este operador, más específicamente, este operador se estudia como un operador de convolución y como un operador integral singular (ver [41, 34]).*
- *Como se muestra al inicio del Capítulo 4 en [34], la ecuación del calor fraccionaria puede ser deducida a partir de un modelo estocástico que describe el movimiento aleatorio de una partícula cuya trayectoria presenta movimientos aleatorios con saltos arbitrariamente largos (este tipo de comportamiento se puede dar en ciertos animales como los tiburones y en otras especies) y estas trayectorias se describen mejor, mediante los llamados vuelos de Lévy. Lo anterior, justifica que en el estudio de la dinámica de las especies que presentan este comportamiento en su desplazamiento, se debe asumir una difusión ya no de orden entero, sino una difusión anómala (con operador Laplaciano fraccionario).*

**Figura 1: Difusión normal vs difusión anómala (Vuelo de Lévy)**



**Fuente:** Sin autor. LevyFlight [imagen]. En: WIKIPEDIA la enciclopedia libre. San Francisco, USA. [Consultado 26 de noviembre de 2021]. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Vuelo\\_de\\_Lévy](https://es.wikipedia.org/wiki/Vuelo_de_Lévy).

Transformada de Laplace:

**Definición 1.33.** Se dice que una función  $f : [0, \infty] \rightarrow X$  es de tipo exponencial, si existe  $t_0, M > 0$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que  $\|f(t)\| \leq Me^{\gamma t}$  para todo  $t > t_0$ . Note que la función  $f(t)$  no debe crecer más rápido que una cierta función exponencial cuando  $t \rightarrow \infty$ .

**Proposición 1.34.** Sea  $f : [0, \infty) \rightarrow X$  una función localmente integrable de tipo exponencial. Entonces existe  $\gamma > 0$  tal que

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$$

es convergente para  $\operatorname{Re}(\lambda) > \gamma$ .

Teniendo en cuenta la Proposición anterior, considere la función

$\tilde{f} : D(\tilde{f}) \subset \mathbb{C} \rightarrow B$  dada por

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

La función  $\tilde{f}$  es llamada la *transformada de Laplace* de  $f(t)$ . El operador transformada de Laplace es un operador biyectivo y continuo. La transformada inversa es denotada por  $\mathcal{L}^{-1}$ .

**Definición 1.35.** Sean  $D(\mathcal{L}) = \{f : L_{loc}^1([0, \infty), B) : f \text{ es de tipo exponencial}\}$  y  $\mathcal{F}(\mathbb{C}, B)$  es el espacio de funciones definidas de un subconjunto de  $\mathbb{C}$  en  $B$ . La aplicación lineal  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{C}, B)$  es llamada el operador transformada de Laplace y se define por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\lambda) := (\tilde{f})(\lambda).$$

**Ejemplo 1.36.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\operatorname{Re} z > -1$ , y  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  dada por  $f(t) = t^z$ , entonces, para  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , se sigue que

$$\mathcal{L}\{t^z\}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^z dt = \frac{\Gamma(z+1)}{\lambda^{z+1}}. \quad (1.2.13)$$

### 1.2.4. Los operadores de Mittag-Leffler

Unos operadores a destacar en el cálculo fraccionario son los llamados operadores de Mittag-Leffler, los cuales se definen a continuación. Considere  $\beta \in (0, 1)$ , y suponga que  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  es un operador sectorial positivo, entonces

$$\mathbf{E}_\beta(-t^\beta A) = \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) S(\tau t^\beta) d\tau, \quad (1.2.14)$$

$$\mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta A) = \int_0^\infty \beta \tau \mathbf{M}_\beta(\tau) S(\tau t^\beta) d\tau, \quad (1.2.15)$$

donde  $\{S(t) : t \geq 0\}$  es el  $C_0$ -semigrupo generado por  $-A$  y  $\mathbf{M}_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es la conocida función de Mainardi, la cual se define como

$$\mathbf{M}_\beta(z) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-z)^N}{N! \Gamma(-\beta n + (1 - \beta))}.$$

**Observación 1.37.** La función de Mainardi también se puede representar mediante la formulación integral (ver [36, 37])

$$\mathbf{M}_\beta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\sigma - z\sigma^\beta} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}}, \quad (1.2.16)$$

donde  $Ha$  y  $\sigma$  son como en (1.2.1).

**Proposición 1.38.** [9, Proposición 2.43] Considere  $\beta \in (0, 1)$  y suponga que  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  es un operador sectorial positivo. Entonces para todo  $u \in X$ , se sigue que

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{E}_\beta(-t^\beta A)u \} (\lambda) = \lambda^{\beta-1} (\lambda^\beta + A)^{-1}u,$$

y

$$\mathcal{L} \{ t^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta A)u \} (\lambda) = (\lambda^\beta + A)^{-1}u.$$

### 1.2.5. Dedución de la formulación integral

En esta sección se presenta la deducción de la formulación integral de un problema abstracto de Cauchy fraccionario, la cual se usa para establecer la formu-

lación integral del sistema (0.0.2). Esta deducción se puede encontrar esencialmente en [9].

Considere el problema de Cauchy

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\beta u(t) = -Au(t) + f(t, u(t)), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (1.2.17)$$

donde  $X$  es un espacio de Banach,  $\beta \in (0, 1)$ ,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  un operador sectorial positivo,  ${}^c\mathcal{D}_t^\beta$  es la derivada fraccionaria de Caputo y  $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  una función continua. Suponga que  $u : [0, \infty) \rightarrow X$  es una función continua que satisface (1.2.17). Entonces, aplicando  $I_t^\beta$  a ambos lados de la ecuación diferencial, se obtiene

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (-Au(s)) ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} f(s, u(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados se obtiene

$$\tilde{u}(\lambda) = \frac{u_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^\beta} (-A\tilde{u}(\lambda)) + \frac{1}{\lambda^\beta} \widetilde{f(u)}(\lambda),$$

donde  $\tilde{u}(\lambda) = \mathcal{L}\{u(t)\}(\lambda)$  y  $\widetilde{f(u)}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(t, u(t))\}(\lambda)$ .

Suponga que  $\lambda^\beta \in \rho(-A)$ . Una manipulación algebraica lleva a

$$\tilde{u}(\lambda) = \lambda^{\beta-1} (\lambda^\beta + A)^{-1} u_0 + (\lambda^\beta + A)^{-1} \widetilde{f(u)}(\lambda).$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se deduce la expresión

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{\beta-1} (\lambda^\beta + A)^{-1} u_0\}(t) \\ &+ \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{(\lambda^\alpha + A)^{-1}\}(t-s) \mathcal{L}^{-1}\{\widetilde{f(u)}(\lambda)\}(s) ds. \end{aligned}$$

Finalmente, de las propiedades de la transformada inversa de Laplace y la pro-

posición 1.38, se sigue que

$$u(t) = E_{\beta}(-t^{\beta}A)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(t-s)^{\beta}A) f(s, u(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

---

## Capítulo

### 2

# MARCO FUNCIONAL Y ESTIMATIVAS

---

El objetivo de este capítulo es demostrar algunas estimativas que serán necesarias para demostrar los principales resultados de esta tesis. Se inicia recordando el modelo a estudiar y su relación de escala o *scaling*, y a partir de esa relación, se enuncian los espacios de tipo Besov-Morrey y Morrey que definirán la clase de datos iniciales y de las soluciones. Posteriormente, se presenta la formulación integral para la solución del sistema (0.0.2) vía el principio de Duhamel en el contexto fraccionario, y se analizan algunas estimativas de decaimiento temporal para los operadores de Mittag-Leffler. Finalmente, se obtienen estimativas bilineales correspondientes a la formulación integral en las normas de los espacios solución, presentados al inicio de este capítulo.

## 2.1 EL MODELO

El modelo de quimiotaxis-Navier-Stokes-fraccionario que se propone analizar en esta tesis, está dado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\beta n + u \cdot \nabla n = -D_n (-\Delta)^{\alpha/2} n - \chi \nabla \cdot (n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c)), \\ {}^c\mathcal{D}_t^\beta c + u \cdot \nabla c = -D_c (-\Delta)^{\alpha/2} c - \rho n c, \\ {}^c\mathcal{D}_t^\beta u + (u \cdot \nabla) u = -D_u (-\Delta)^{\alpha/2} u - \nabla \pi - n \nabla \phi, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde  $n = n(x, t) \geq 0$ ,  $c = c(x, t) \geq 0$ ,  $\pi(x, t)$  y  $u(x, t)$  denotan, respectivamente, la densidad celular, la concentración de la señal química, la presión, y la velocidad del fluido en la posición  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $N = 2, 3$ , y tiempo  $t > 0$ . En este modelo se asume que la señal química es consumida con una tasa  $\rho$  proporcional a la cantidad de células. Tanto las células como la sustancia química son transportadas por un fluido viscoso incompresible que, a su vez, es impulsado por la fuerza inducida por la gravitación,  $-n \nabla \phi$ , modelando los efectos debido a las variaciones de densidad provocadas por la agregación celular. En (2.1.1)  ${}^c\mathcal{D}_t^\beta$  es la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\beta \in (0, 1]$ ,  $(-\Delta)^{\alpha/2}$ ,  $\alpha \in (0, 2]$ , denota el operador Laplaciano fraccionario de orden  $\alpha/2$ . Además,  $\nabla \cdot ((-\Delta)^{-\theta/2} c)$ ,  $\theta \in [0, N)$ , también es un término no local, el cual puede ser representado por  $K(x) * c$ ,  $K(x) \sim \frac{x}{|x|^{N-\theta}}$ . El caso  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 2$  y  $\theta = 0$  formalmente corresponde al sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes (0.0.1). Por simplicidad en la notación, y sin pérdida de generalidad, se asume que el valor de los parámetros físicos es 1, esto es,  $D_n = \chi = D_c = D_u = \rho = 1$ .

## 2.2 ESPACIOS SOLUCIÓN

Note que el sistema (2.1.1) tiene una propiedad de scaling. En efecto, no es difícil ver que si  $[n, c, u]$  es una solución clásica para (2.1.1), entonces  $[n_\lambda, c_\lambda, u_\lambda]$

definida por

$$n_\lambda(x, t) = \lambda^\alpha n(\lambda x, \lambda^{\alpha/\beta} t), \quad c_\lambda(x, t) = \lambda^{\alpha+\theta-2} c(\lambda x, \lambda^{\alpha/\beta} t), \quad u_\lambda(x, t) = \lambda^{\alpha-1} u(\lambda x, \lambda^{\alpha/\beta} t), \quad (2.2.1)$$

es también solución de (2.1.1). En este caso, la aplicación

$$[n, c, u] \longmapsto [n_\lambda, c_\lambda, u_\lambda],$$

es llamada el *scaling* de (2.1.1), y las soluciones invariantes por este *scaling* se denominan soluciones *auto similares*. Observe que si  $[n, c, u]$  es una solución auto similar, el dato inicial  $[n_0, c_0, u_0]$  debe ser invariante por el *scaling*, y, por lo tanto, se debe satisfacer

$$n_0(x) = \lambda^\alpha n_0(\lambda x), \quad c_0(x) = \lambda^{\alpha+\theta-2} c_0(\lambda x), \quad u_0(x, t) = \lambda^{\alpha-1} u_0(\lambda x).$$

Teniendo en cuenta esta relación de escala se considera la siguiente clase de espacios críticos para los datos iniciales:

$$\begin{cases} n_0 \in \mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{\frac{N}{q} - \alpha}(\mathbb{R}^N), & c_0 \in L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}(\mathbb{R}^N) \text{ con } \nabla((-\Delta)^{-\theta/2})c_0 \in \mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r} - \alpha + 1}(\mathbb{R}^N), \\ u_0 \in \mathcal{N}_{p, p_1, \infty}^{\frac{N}{p} - \alpha + 1}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Así mismo, se considera que la fuente externa  $\phi$  es tal que

$$t^{\beta - \frac{2\beta}{\alpha}} \nabla \phi(\cdot) \in BC_w((0, \infty); \mathcal{M}_{N_1}^N), \quad (2.2.3)$$

donde los exponentes  $p, p_1, q, q_1, r, r_1$  y  $N_1$  son tomados verificando las siguiente hipótesis:

**Hipótesis 2.1.** *Asuma que  $N \geq 2$ ,  $\alpha > \frac{3}{2}$ ,  $\alpha + \theta \geq 2$ ,  $\beta > \frac{\alpha}{\alpha + 1 - \theta}$  y  $p > r$ . Para  $N = 3$ , suponga que los exponentes  $p, q$  y  $r$  satisfacen las condiciones (i), (ii) o (iii) abajo*

$$(i) \quad \frac{N}{2(\alpha - 1)} < q < N, \quad \frac{N}{\alpha - 1} < p < \frac{qN}{N + (1 - \alpha)q}, \quad \frac{N}{\alpha - 1} < r < \frac{qN}{N + (1 - \alpha)q};$$

$$(ii) \quad q = N, \quad \frac{N}{\alpha - 1} < p < \frac{N}{2 - \alpha}, \quad \frac{N}{\alpha - 1} < r < \frac{N}{2 - \alpha};$$

$$(iii) \quad \frac{\beta N}{2\beta\alpha - \beta - \alpha} < q < \frac{2\beta N}{\beta\alpha + \beta - \beta\theta - \alpha}, \quad \frac{N}{\alpha - 1} < p < \frac{\beta q N}{(2\beta\alpha - \beta - \alpha)q - \beta N},$$

$$\frac{qN}{N + q(\alpha + \theta - 2)} \leq r < \frac{\beta q N}{(2\beta\alpha - \beta - \alpha)q - \beta N}.$$

Si  $N = 2$  asuma que  $p, q$  y  $r$  satisfacen la condición (iii) anterior. Además, suponga que  $p_1, q_1, r_1$  y  $N_1$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$(A) \quad 1 \leq p_1 \leq p, \quad 1 \leq q_1 \leq q, \quad 1 \leq r_1 \leq r, \quad 1 \leq N_1 \leq N;$$

$$(B) \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{\alpha + \theta - 2}{N} \leq 1, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{\alpha + \theta - 2}{N} \leq 1,$$

$$\frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1,$$

$$(C) \quad \frac{p}{p_1} \leq \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1};$$

$$(D) \quad p_1 \left( \frac{1}{N_1} + \frac{1}{q_1} \right) \leq p \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{q} \right).$$

**Observación 2.2.** La Hipótesis 2.1 proviene del decaimiento en tiempo y las estimaciones no lineales que aparecen en las Secciones 2.5 y 2.6, las cuales son necesarias para usar un argumento de punto fijo. Si los parámetros  $\beta, \alpha$  y  $\theta$  son fijados como en la Hipótesis 2.1, entonces es posible hallar índices  $p_1, q_1, r_1$  y  $N_1$  suficientemente cercanos a  $p, q, r$  y  $N$ , respectivamente, tal que la Hipótesis 2.1 es no vacía. Además, si se consideran  $\beta = 1, \alpha = 2$  y  $\theta = 0$ , se obtienen las hipótesis establecidas en [23] para el sistema de quimiotaxis-Navier-Stokes no fraccionario (0.0.1).

Se definen los espacios funcionales

$$\begin{aligned}
X_1 &:= \left\{ n : t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} n(\cdot) \in BC_w((0, \infty); \mathcal{M}_{q_1}^q) \right\}, \\
X_2 &:= \left\{ c : c \in BC_w \left( (0, \infty); L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}} \right) \right. \\
&\quad \left. \text{con } t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \nabla((-\Delta)^{-\theta/2} c(\cdot)) \in BC_w \left( (0, \infty); \mathcal{M}_{r_1}^r \right) \right\}, \\
X_3 &:= \left\{ u : t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} u \in BC_w \left( (0, \infty), \mathcal{M}_{p_1}^p \right) \right\},
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

los cuales, dotados con las siguientes normas, son espacios de Banach

$$\begin{aligned}
\|n\|_{X_1} &:= \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} \|n(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \\
\|c\|_{X_2} &:= \sup_{t>0} \|c(t)\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} + \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2} c(t))\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r}, \\
\|u\|_{X_3} &:= \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \|u(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}.
\end{aligned}$$

Ahora, se introduce el espacio producto  $\mathcal{X}$

$$\mathcal{X} := \{[n, c, u] : n \in X_1, c \in X_2, u \in X_3\} \tag{2.2.5}$$

con la norma

$$\|[n, c, u]\|_{\mathcal{X}} := \|n\|_{X_1} + \|c\|_{X_2} + \|u\|_{X_3},$$

y

$$\mathcal{I} := \{[n_0, c_0, u_0] : n_0, c_0 \text{ y } u_0 \text{ son como en (2.2.2)}\}$$

con la norma

$$\|[n_0, c_0, u_0]\|_{\mathcal{I}} := \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q, q_1, \infty}^{\frac{N}{q} - \alpha}} + \|c_0\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} + \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2} c_0)\|_{\mathcal{N}_{r, r_1, \infty}^{\frac{N}{r} - \alpha + 1}} + \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p, p_1, \infty}^{\frac{N}{p} - \alpha + 1}}. \tag{2.2.6}$$

## 2.3 EL PROYECTOR DE LERAY

Para analizar el problema de Cauchy asociado al sistema (2.1.1), se usa el camino estándar de eliminar la presión de la ecuación del momento de las ecuaciones de Navier-Stokes, para trabajar solamente con la velocidad. La presión se recupera *a posteriori*. Para ello, se debe tener en cuenta la descomposición de Helmholtz-Hodge y del proyector de Leray. Dado un campo vectorial diferenciable,  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , la descomposición Helmholtz-Hodge establece que existe una única descomposición de  $\mathbf{v}$  como  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ , donde  $\mathbf{v}_1$  es un campo de divergencia nula y  $\mathbf{v}_2 = \nabla\psi$  para alguna función  $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  (ver por ejemplo [3]). Como la descomposición es única, se puede definir el operador proyector de Leray como  $\mathbb{P}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \nabla\psi$ . Dado que  $\operatorname{div}(\mathbf{v} - \nabla\psi) = 0$ , entonces  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta\psi$  y así, aplicando el laplaciano inverso, se tiene que

$$\mathbb{P}\mathbf{v} = \mathbf{v} - \nabla(\Delta^{-1}(\operatorname{div} \mathbf{v})). \quad (2.3.1)$$

Si se aplica la transformada de Fourier en cada componente del campo (2.3.1), se obtiene la expresión

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi}) - \sum_{k=1}^N \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|^2} (\xi_k \widehat{v}_k(\boldsymbol{\xi})). \quad (2.3.2)$$

con lo cual

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j(\boldsymbol{\xi}) = \left( \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right) \widehat{v}_j(\boldsymbol{\xi}),$$

donde  $\widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi})$  es la matriz con entradas

$$\left( \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right)_{j,k} = \delta_{j,k} - \frac{\xi_j \xi_k}{|\boldsymbol{\xi}|^2},$$

y la cual verifica que

$$\max_{1 \leq j \leq k} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left| \left( \widehat{\mathbb{P}}(\boldsymbol{\xi}) \right)_{j,k} \right| = 1.$$

Si se consideran los operadores pseudo diferenciales  $R_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), llamados transformadas de Riesz, definidos en términos de la transformada de Fourier como

$$\widehat{R_j f}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}),$$

se obtiene que

$$(\mathbb{P}\mathbf{v})_j = v_j + \sum_{k=1}^3 R_j R_k v_k, \quad j = 1, \dots, n,$$

cuya transformada de Fourier es justamente (2.3.2).

## 2.4 FORMULACIÓN INTEGRAL

Usando el principio de Duhamel, aplicando el proyector de Leray en la ecuación de la velocidad y reemplazando el operador  $A$  en la deducción presentada en la subsección 1.2.5 por el operador Laplaciano fraccionario, el sistema (2.1.1) es formalmente equivalente a la siguiente formulación integral:

$$\left\{ \begin{array}{l} n(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla n) d\tau \\ \quad - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \nabla \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c)) d\tau, \\ c(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c + nc) d\tau, \\ u(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\mathbb{P}(u \cdot \nabla u) d\tau \\ \quad - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\mathbb{P}(n \nabla \phi) d\tau, \end{array} \right. \quad (2.4.1)$$

donde  $\{\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\}_{t \geq 0}$  y  $\{\mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\}_{t \geq 0}$  denotan las familias de Mittag-Leffler definidas en (1.2.14) y (1.2.15), respectivamente. En (2.4.1)  $n_0, c_0, u_0$ , con  $\nabla \cdot u_0 = 0$  en  $\mathcal{S}'$ , son distribuciones representando los datos iniciales. Una tripla  $[n, c, u]$  satisfaciendo (2.4.1) es llamada una *solución mild* de (2.1.1).

A partir de esta formulación integral, se probarán un conjunto de estimativas lineales y bilineales en las normas de los espacios solución, las cuales permitirán aplicar un argumento de punto fijo para demostrar la existencia y estabilidad de las soluciones para el sistema (2.1.1). Para cada tripla de datos iniciales  $[n_0, c_0, u_0]$  y fuerza  $\phi$ , consideramos la aplicación  $\mathcal{F}([n, c, u]) = [\mathcal{N}, \mathcal{C}, \mathcal{U}]$ , definida por

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla n)(\tau) d\tau \\ \quad - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \nabla \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c))(\tau) d\tau, \\ \quad := \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0 + \mathcal{B}_{3,1}^1(t) + \mathcal{B}_{1,2}^1(t), \\ \mathcal{C}(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c)(\tau) d\tau \\ \quad - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(nc) d\tau, \\ \quad := \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0 + \mathcal{B}_{3,2}^2(t) + \mathcal{B}_{1,2}^2(t), \\ \mathcal{U}(t) = \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau \\ \quad - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})\mathbb{P}(n \nabla \phi)(\tau) d\tau \\ \quad := \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0 + \mathcal{B}_{3,3}^3(t) + L_3(t), \quad 0 < t < \infty. \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

En (2.4.2) se usa convenientemente la notación  $\mathcal{B}_{i,k}^j(t)$  donde los subíndices  $i, k$  hacen referencia a las incógnitas que aparecen en el término  $\mathcal{B}^j$  (1 para  $n$ , 2 para  $c$  y 3 para  $u$ ).

## 2.5 ESTIMATIVAS LINEALES PARA LOS OPERADORES DE MITTAG-LEFFLER

Para iniciar esta sección se presenta una proposición que establece una equivalencia de la norma de Besov-Morrey con la norma Morrey del semigrupo del calor fraccionario. La prueba de esta proposición se basa en la demostración de la Proposición 2.22 en [38].

**Proposición 2.3.** *Si  $b < 0$ , entonces*

$$\|u\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^b} \cong \sup_{t>0} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \quad (2.5.1)$$

La demostración de esta proposición es dividida en los siguientes dos Lemas; para facilitar la comprensión de la misma, recuerde que los espacios de Besov Morrey se definen a partir de una partición de la unidad de Littlewood-Paley  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Anexo a lo anterior,  $\psi_j(D)$  es el multiplicador de Fourier, con símbolo  $\psi_j(\xi)$ , donde  $\{\varphi_0(\xi), \psi_j(\xi)\}$  es una partición de la unidad de Littlewood-Paley dependiente de una descomposición diádica de  $\mathbb{R}^N$ . Más exactamente, el multiplicador de Fourier  $\psi_j(D)$  se define como

$$\psi_j(D)u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi))(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi)e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad u \in \mathcal{S}.$$

Note que  $\psi_j(D)u(x) = \check{\psi}_j * u(x)$ .

**Lema 2.4.** *Si  $u \in \mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^b$ , entonces  $\psi_j(D)u \in \mathcal{M}_{p_1}^p$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$  y existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\} \leq C \sup_{t>0} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}$$

*Demostración.* Sea  $t = (2^\alpha)^{-j}$ . Dado que la función  $\psi_j(\xi)$  tiene soporte en el anillo  $D_j = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid 2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+1}\}$ , observando que  $e^{t|\xi|^\alpha}$  alcanza su máximo sobre  $\overline{D_j}$  y teniendo en cuenta la definición de la norma Morrey, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &= \|\mathcal{F}^{-1}(\psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} e^{t|\xi|^\alpha} \psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq \widetilde{C} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} \psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \tag{2.5.2}
\end{aligned}$$

Note que  $t^{-\frac{b}{\alpha}} = [(2^\alpha)^{-j}]^{-\frac{b}{\alpha}} = (2^{-j\alpha})^{-\frac{b}{\alpha}} = 2^{bj}$ . Así, multiplicando por  $2^{bj} > 0$  a ambos lados de la desigualdad (2.5.2), teniendo en cuenta que  $\psi_j(\xi)$  tiene soporte en el anillo  $D_j = \{\xi \in \mathbb{R}^N \mid 2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+1}\}$ , que hace que  $\check{\psi}_j \in L^1$ , usando la desigualdad de Young para convoluciones en espacios de Morrey (ver [19]) y aplicando (1.2.12), se obtiene que

$$\begin{aligned}
2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq t^{-\frac{b}{\alpha}} \widetilde{C} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} \psi_j(\xi)\widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq \widetilde{C} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|\check{\psi}_j\|_{L^1} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} \widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq C t^{-\frac{b}{\alpha}} \|\mathcal{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^\alpha} \widehat{u}(\xi))\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq C t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\} \leq C \sup_{t > 0} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}.$$

■

**Lema 2.5.** Si  $u \in \mathcal{S}'$ , es tal que  $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\} < \infty$ , entonces

$$\sup_{t > 0} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\}. \tag{2.5.3}$$

*Demostración.* Primero se verificará esta desigualdad para el caso  $t = 1$ . En el Lema 2.24 de [38] se demostró que

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\} \approx \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\varphi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\}. \tag{2.5.4}$$

Entonces, teniendo en cuenta la equivalencia (2.5.4), basta demostrar que

$$\|S_\alpha(1)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\varphi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\}.$$

En el lado izquierdo se aplica una partición de Littlewood-Paley a  $u$  de modo que sea más conveniente reemplazar el supremo por una suma sobre  $j$  en el lado derecho. Se fija  $\rho$  y  $\delta \geq 0$ , tales que  $\rho - \delta > -b$ . Entonces, siguiendo [38] se tiene que

$$\sum_{j \geq 0} 2^{-j\rho} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq 2 \left( \sum_{j \geq 0} 2^{-j\delta} \right) \sup_{r \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{br} \|\varphi_r(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\}. \quad (2.5.5)$$

Ahora, note que en  $\mathcal{S}'$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} 2^{-j\rho} \varphi_j(D) &= c\varphi_0(D) + \sum_{j \geq 0} 2^{-j\rho} \sum_{r=0}^j \psi_r(D) \\ &= c\varphi_0(D) + \sum_{j \geq 0} \psi_r(D) \sum_{r=0}^j 2^{-j\rho}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Dado que si  $\phi_r$  es una función suave con soporte compacto, que es idénticamente uno en el anillo  $D_r$ , entonces la norma de  $e^{-|\xi|^\alpha} \phi_r(\xi)$  no excede  $C_\rho 2^{-r\rho}$  para todo  $\rho \geq 0$ , donde  $C_\rho$  no depende de  $r$ . Por lo tanto, observando que  $f = \left( \varphi_0 + \sum_{j \geq 0} \psi_j \right) f$ , recordando la definición de  $\{S_\alpha(1)\}$ , y (2.5.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \|S_\alpha(1)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq \|S_\alpha(1)\varphi_0(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} + \sum_{j \geq 0} \|S_\alpha(1)\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\ &\leq \|S_\alpha(1)\varphi_0(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} + C_\rho \sum_{j \geq 0} 2^{-j\rho} \|\psi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\ &\leq C_\rho \sum_{j \geq 0} 2^{-j\rho} \|\varphi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}, \quad \forall \rho \geq 0, \end{aligned}$$

y así, teniendo en cuenta (2.5.5), se concluye (2.5.3) para  $t = 1$ . Ahora, se probará que por la homogeneidad de la norma, si (2.5.3) se tiene para  $t = 1$ , entonces se verifica (2.5.3). En efecto, sea  $\omega = C \sup_{j \in \mathbb{Z}} \left\{ 2^{bj} \|\varphi_j(D)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right\}$  y veamos que

$$\sup_{t>0} t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_{\alpha}(t)u\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq \omega.$$

Sea  $u(x, t) = S_{\alpha}(t)f(x)$  la solución de  $u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$  con dato inicial  $u(x, 0) = f(x)$ . Se sabe que la función  $u_{\lambda}(x, t) = \lambda^k u(\lambda x, \lambda^{\alpha} t)$  también es solución de  $u_t + (-\Delta)^{\alpha/2} u = 0$  con dato inicial

$$u_{\lambda}(x, 0) = \lambda^k u(\lambda x, 0) = \lambda^k f(\lambda x) = f(x),$$

y además,  $u(x, t) = u_{\lambda}(x, t)$ , para todo  $\lambda > 0$ . Así,

$$\|u_{\lambda}(x, 1)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \|\lambda^k u(\lambda x, \lambda^{\alpha})\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \|u(x, 1)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq \omega, \quad (2.5.7)$$

y usando el *scaling* de  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}$ , se tiene que

$$\|u_{\lambda}(x, 1)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \lambda^k \|u(\lambda x, \lambda^{\alpha})\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \lambda^k \|S_{\alpha}(\lambda^{\alpha})f(\lambda x)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \lambda^k \lambda^{-\frac{N}{p}} \|S_{\alpha}(\lambda^{\alpha})f(x)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \quad (2.5.8)$$

Así, de (2.5.7) y (2.5.8), se obtiene

$$\|S_{\alpha}(\lambda^{\alpha})f(x)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = \lambda^{-k} \lambda^{\frac{N}{p}} \omega, \quad \forall \lambda > 0.$$

Tomando  $t = \lambda^{\alpha} > 0$ , se tiene que  $\lambda = t^{\frac{1}{\alpha}}$  y, por lo tanto,

$$t^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_{\alpha}(t)f(x)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq t^{-\frac{b}{\alpha}} t^{-\frac{k}{\alpha}} t^{-\frac{N}{\alpha p}} \omega,$$

en particular, cuando  $k = -b - \frac{N}{p}$ , se sigue la desigualdad requerida. ■

Ahora, se recordarán algunas estimativas de decaimiento en tiempo del semigrupo del calor fraccionario  $\{S_{\alpha}(t)\}_{t \geq 0}$  en los espacios de Morrey (ver [24, Lemma 2.2], [26, Lemma 3.2]).

**Lema 2.6.** *Sea  $k$  un multi-índice,  $1 \leq p_1 \leq p < \infty$  y  $1 \leq q_1 \leq q < \infty$ . Si  $p \geq q$  y  $\frac{p}{p_1} \geq \frac{q}{q_1}$ , entonces existe una constante positiva  $C > 0$  tal que*

$$\|S_\alpha(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (2.5.9)$$

$$\|\nabla^k S_\alpha(t)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq Ct^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (2.5.10)$$

$$\|S_\alpha(t)f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}, \quad (2.5.11)$$

para toda  $f \in \mathcal{S}'$ .

El siguiente Lema es necesario para obtener estimativas de decaimiento en tiempo para los operadores de Mittag-Leffler en los espacios de Besov-Morrey.

**Lema 2.7.** *Si  $\beta \in (0, 1)$  y  $-1 < l < \infty$ , entonces*

$$\int_0^\infty \tau^l \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(\beta l+1)}.$$

*Demostración.* Usando la representación integral de la función de Mainardi en (1.2.16), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^l \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau &= \int_0^\infty \tau^l \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^{\sigma-\tau\sigma^\beta} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^\sigma \left[ \int_0^\infty e^{-\tau\sigma^\beta} \tau^l d\tau \right] \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} e^\sigma \left[ \frac{\Gamma(l+1)}{(\sigma^\beta)^{l+1}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}} \quad (\text{por (1.2.13)}) \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{2\pi i} \int_{H_a} \frac{e^\sigma}{\sigma^{\beta l+1}} d\sigma \\ &= \Gamma(l+1) \frac{1}{2\pi i} \int_{H_a} \sigma^{-(\beta l+1)} e^\sigma d\sigma \\ &= \Gamma(l+1) \frac{1}{\Gamma(\beta l+1)} \quad (\text{por (1.2.1)}) \\ &= \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(\beta l+1)}. \end{aligned}$$

■

**Lema 2.8.** Considere  $\beta \in (0, 1)$  y  $p_1, p, q_1, q$  como en el Lema 2.6 tal que

$$\frac{p}{p_1} \geq \frac{q}{q_1}, \quad 1 < q \leq p < \infty, \quad \text{y} \quad \frac{pN}{\alpha p + N} < q.$$

Entonces, para cualquier  $f \in \mathcal{M}_{q_1}^q$ , existe una constante  $C_1 > 0$  tal que

$$\|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C_1 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q},$$

y

$$\|\mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C_1 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}.$$

*Demostración.* Usando (1.2.14), (2.5.9) y el Lema 2.7 se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \|S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) C (\tau t^\beta)^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq C \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq C t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left( \int_0^\infty \tau^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau \right) \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\leq C_1 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (1.2.15), (2.5.9) y el Lema 2.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq \int_0^\infty \beta\tau \mathbf{M}_\beta(\tau) \|S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \beta\tau \mathbf{M}_\beta(\tau) C (\tau t^\beta)^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq \beta C \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{1-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq \beta C t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \left( \int_0^\infty \tau^{1-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau \right) \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ &\leq C_1 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Note que si  $l_1 := -\frac{N}{\alpha} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$  entonces por hipótesis  $l_1 > -1$ , y por lo tanto,

del Lema 2.7, la constante  $C_1 = C_1(p, q, N, \beta)$  es tal que

$$C_1 \geq C \max \left\{ \frac{\Gamma(l_1 + 1)}{\Gamma(\beta l_1 + 1)}, \frac{\beta \Gamma(l_1 + 2)}{\Gamma(\beta(l_1 + 1) + 1)} \right\} > 0.$$

■

**Lema 2.9.** Sea  $k$  un multi-índice,  $\beta \in (0, 1)$  y  $p_1, p, q_1, q$  como en el Lema 2.6 tal que

$$\frac{p}{p_1} \geq \frac{q}{q_1} \text{ y } \frac{pN}{(\alpha - |k|)p + N} < q \leq p < \infty.$$

Entonces, para cualquier  $f \in \mathcal{M}_{q_1}^q$ , existe una constante  $C_2 > 0$  tal que

$$\|\nabla^k \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C_2 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad (2.5.12)$$

y

$$\|\nabla^k \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \leq C_2 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}. \quad (2.5.13)$$

*Demostración.* De la regla de Leibniz, se tiene que

$$\nabla^k \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f = \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \nabla^k S_\alpha(\tau t^\beta) f \, d\tau,$$

y

$$\nabla^k \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f = \int_0^\infty \beta \tau \mathbf{M}_\beta(\tau) \nabla^k S_\alpha(\tau t^\beta) f \, d\tau.$$

Argumentando como en la prueba del Lema 2.8, usando (2.5.10) y el Lema 2.7, se puede obtener

$$\begin{aligned}
& \|\nabla^k \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
& \leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \|\nabla^k S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
& \leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) C (\tau t^\beta)^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
& \leq C \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
& \leq C t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \left( \int_0^\infty \tau^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau \right) \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
& \leq C_2 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, por (2.5.10) y el Lema 2.7, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \|\nabla^k \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
& \leq \int_0^\infty \beta\tau \mathbf{M}_\beta(\tau) \|\nabla^k S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
& \leq \int_0^\infty \beta\tau \mathbf{M}_\beta(\tau) C (\tau t^\beta)^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
& \leq \beta C \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}+1} t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
& \leq \beta C t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \left( \int_0^\infty \tau^{1-\frac{N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{|k|}{\alpha}} \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau \right) \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
& \leq C_2 t^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{\beta|k|}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q}, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Note que si  $l_2 := -\frac{|k|}{\alpha} - \frac{N}{\alpha} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$  entonces por hipótesis  $l_2 > -1$  y por lo tanto, la constante  $C_2 = C_2(p, q, N, \beta)$  (por el Lema 2.7) es tal que

$$C_2 \geq C \max \left\{ \frac{\Gamma(l_2 + 1)}{\Gamma(l_2 + 1)}, \frac{\beta \Gamma(l_2 + 2)}{\Gamma(\beta(l_2 + 1) + 1)} \right\} > 0.$$

■

**Lema 2.10.** *Sea  $k$  un multi-índice,  $1 \leq q_1 \leq q < \infty$ ,  $1 \leq r_1 \leq r < \infty$  y  $\frac{b}{\alpha} > -1$ , entonces existe una constante  $C_3 > 0$  tal que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq C_3 t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^b} \\ \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{L^\infty} &\leq C_3 \|f\|_{L^\infty} \\ \|\nabla^k \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq C_3 t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|\nabla^k f\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^b}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Usando la equivalencia (2.5.4) y el Lema 2.7, se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \|S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) (\tau t^\beta)^{\frac{b}{\alpha}} (\tau t^\beta)^{-\frac{b}{\alpha}} \|S(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{\frac{b}{\alpha}} t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^b} d\tau \\ &= t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \left( \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{\frac{b}{\alpha}} d\tau \right) \|f\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^b} \\ &= t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{b}{\alpha} + 1)}{\Gamma(\beta \frac{b}{\alpha} + 1)} \|f\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^b} \\ &\leq C_3 t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|f\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^b}. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (2.5.11) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{L^\infty} &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \|S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{L^\infty} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) C \|f\|_{L^\infty} d\tau \\ &= C \left( \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) d\tau \right) \|f\|_{L^\infty} \\ &\leq C_3 \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Además, usando la equivalencia (2.5.4) y el Lema 2.7, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\nabla^k \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})f\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \|\nabla^k S_\alpha(\tau t^\beta)f\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
&\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) (\tau t^\beta)^{\frac{b}{\alpha}} (\tau t^\beta)^{-\frac{b}{\alpha}} \|S_\alpha(\tau t^\beta)\nabla^k f\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
&\leq \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{\frac{b}{\alpha}} t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|\nabla^k f\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^b} d\tau \\
&= t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \left( \int_0^\infty \mathbf{M}_\beta(\tau) \tau^{\frac{b}{\alpha}} d\tau \right) \|\nabla^k f\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^b} \\
&= t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \frac{\Gamma(\frac{b}{\alpha} + 1)}{\Gamma(\beta\frac{b}{\alpha} + 1)} \|\nabla^k f\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^b} \\
&\leq C_3 t^{\frac{\beta b}{\alpha}} \|\nabla^k f\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^b},
\end{aligned}$$

y así, se concluye la prueba del Lema. ■

## 2.6 ESTIMATIVAS BILINEALES

Aprovechando la notación usada en (2.4.2), se calcularán las siguientes estimativas bilineales en las normas de los espacios solución que fueron presentados en la Sección 2.2 de esta tesis. Estas estimativas serán una herramienta fundamental para probar los resultados de existencia y estabilidad de soluciones para el sistema (2.1.1).

**Lema 2.11.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2 existen constantes positivas  $K_1$  y  $K_2$  tales que*

$$\|\mathcal{B}_{3,1}^1(u, n)\|_{X_1} \leq K_1 \|u\|_{X_3} \|n\|_{X_1},$$

y

$$\|\mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)\|_{X_1} \leq K_2 \|n\|_{X_1} \|c\|_{X_2},$$

para todo  $[n, c, u] \in \mathcal{X}$ .

*Demostración.* De las condiciones (i), (ii) y (iii) en la Hipótesis 2.1, se tiene que

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p} > 0, \quad 1 - 2\beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta N}{\alpha q} > 0.$$

Tomando  $s_1 = \frac{p_1 q_1}{p_1 + q_1}$ , de (A), (B) y (C) en la Hipótesis 2.1, se sigue que

$$1 \leq s_1 \leq \frac{pq}{p+q} \leq q \text{ y } \frac{q}{q_1} \geq \frac{pq}{p+q} \frac{1}{s_1},$$

y del Lema 2.9, se obtiene

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}_{3,1}^1(u, n)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla n)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(un)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{\beta}{\alpha}} \|(un)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{\frac{pq}{p_1+q}}^{\frac{pq}{p_1+q}}} d\tau \text{ (por (2.5.13))} \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha}} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \text{ (por (1.1.1))} \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta}} d\tau \|u\|_{X_3} \|n\|_{X_1} \\
&= C_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} b\left(\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p}, 1 - 2\beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta N}{\alpha q}\right) \|u\|_{X_3} \|n\|_{X_1} \\
&= K_1 t^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} \|u\|_{X_3} \|n\|_{X_1}, \tag{2.6.1}
\end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , donde  $K_1 = K_1(N, \beta, p, p_1, q, q_1,)$  y  $b(\cdot, \cdot)$  denota la función beta.

Además, de la Hipótesis 2.1, se tiene

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha r} > 0, \quad 1 - 2\beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha r} > 0.$$

Tomando  $s_2 = \frac{r_1 q_1}{r_1 + q_1}$  se sigue que

$$1 \leq s_2 \leq \frac{rq}{r+q} \leq q \text{ y } \frac{q}{q_1} \geq \frac{rq}{r+q} \frac{1}{s_2},$$

y aplicando el Lema 2.9 se obtiene

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \nabla \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2}) (n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c))(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2}) (n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c))(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}) - \frac{\beta}{\alpha}} \|n \nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_2}^{\frac{rq}{r+q}}} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha}} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|\nabla ((-\Delta)^{-\theta/2} c)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta}} d\tau \|n\|_{X_1} \|c\|_{X_2} \\
&= C_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} b \left( \beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha r}, 1 - 2\beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha r} \right) \|n\|_{X_1} \|c\|_{X_2} \\
&= K_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} \|n\|_{X_1} \|c\|_{X_2}, \tag{2.6.2}
\end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , donde  $K_2 = K_2(N, \beta, q, q_1, r, r_1)$ . Así, de (2.6.1) y (2.6.2), se concluye la prueba del Lema. ■

**Lema 2.12.** *Bajo la hipótesis del Teorema 3.2 existen constantes positivas  $K_3, K_4, K_5$  y  $K_6$  tales que*

$$\|\mathcal{B}_{3,2}^2(u, c)\|_{X_2} \leq (K_3 + K_4) \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2},$$

y

$$\|\mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)\|_{X_2} \leq (K_5 + K_6) \|n\|_{X_1} \|c\|_{X_2},$$

para todo  $[n, c, u] \in \mathcal{X}$ .

*Demostración.* De las condiciones (i), (ii) y (iii) en la Hipótesis 2.1, se tiene que

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p} > 0, \quad 1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha p} > 0 \quad \mathbf{y} \quad \frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha p} > 0.$$

Tomando  $s_3 = \frac{p_1 N}{N + p_1(\alpha + \theta - 2)}$ , de (A), (B) y (C) en la Hipótesis 2.1, se obtiene

$$1 \leq s_3 \leq \frac{pN}{N + p(\alpha + \theta - 2)} \leq \frac{N}{\alpha + \theta - 2} \quad \mathbf{y} \quad 1 \geq \frac{pN}{N + p(\alpha + \theta - 2)} \frac{1}{s_3},$$

y

$$1 \leq s_3 \leq \frac{pN}{N + p(\alpha + \theta - 2)} \leq r \quad \text{y} \quad \frac{r}{r_1} \geq \frac{pN}{N + p(\alpha + \theta - 2)} \frac{1}{s_3}.$$

Por lo tanto, aplicando el Lema 2.9, se tienen las siguientes estimativas para  $\mathcal{B}_{3,2}^2$

y  $\nabla((-\Delta)^{-\theta/2} \mathcal{B}_{3,2}^2)$ :

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}_{3,2}^2(u, c)(t)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\ &= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\ &\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(uc)(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha} \left(\frac{\alpha+\theta-2}{N} + \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\theta-2}{N}\right) - \frac{\beta}{\alpha}} \|uc(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_3}^{\frac{pN}{N+p(\alpha+\theta-2)}}} d\tau \quad (\text{por (2.5.13)}) \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha}} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1 - \frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha}} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} d\tau \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= C_2 b \left( \beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p}, 1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha p} \right) \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= K_3 \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2}, \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

y

$$\begin{aligned} & \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2} (\mathcal{B}_{3,2}^2(u, c))(t))\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\ &= \left\| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\ &\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla^{2-\theta} \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(uc)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha} \left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha+\theta-2}{N} - \frac{1}{r}\right) - \frac{\beta(2-\theta)}{\alpha}} \|uc(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_3}^{\frac{pN}{N+p(\alpha+\theta-2)}}} d\tau \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha p} - 1} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\ &\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha p} - 1} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} d\tau \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= C_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} b \left( \frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha p}, 1 - \beta + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha p} \right) \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= K_4 t^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} \|u\|_{X_3} \|c\|_{X_2}. \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

Análogamente, de las condiciones (i), (ii) y (iii) en la Hipótesis 2.1, se tiene que

$$\beta - \frac{\beta N}{\alpha q} > 0, \quad 1 - \beta + \frac{\beta N}{\alpha q} > 0, \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha r} > 0.$$

Tomando  $s_4 = \frac{q_1 N}{N + q_1(\alpha + \theta - 2)}$ , de (A), (B) y (C) en la Hipótesis 2.1, se obtiene

$$1 \leq s_4 \leq \frac{qN}{N + q(\alpha + \theta - 2)} \leq \frac{N}{\alpha + \theta - 2} \quad \text{y} \quad 1 \geq \frac{qN}{N + q(\alpha + \theta - 2)} \frac{1}{s_4},$$

y

$$1 \leq s_4 \leq \frac{qN}{N + q(\alpha + \theta - 2)} \leq r \quad \text{y} \quad \frac{r}{r_1} \geq \frac{qN}{N + q(\alpha + \theta - 2)} \frac{1}{s_4}.$$

Por lo tanto, usando el Lema 2.8 se pueden estimar  $\mathcal{B}_{1,2}^2$  y  $\nabla((-\Delta)^{-\theta/2} \mathcal{B}_{1,2}^2)$  como sigue:

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)(t)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\ &= \left\| - \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(nc)(\tau) d\tau \right\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\ &\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(nc)(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \\ &\leq C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha} \left( \frac{\alpha+\theta-2}{N} + \frac{1}{q} - \frac{\alpha+\theta-2}{N} \right)} \|(nc)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_4}^{\frac{qN}{N+q(\alpha+\theta-2)}}} d\tau \\ &\leq C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha q}} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\ &\leq C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha q}} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha q}-\beta} d\tau \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= C_1 b \left( \beta - \frac{\beta N}{\alpha q}, 1 - \beta + \frac{\beta N}{\alpha q} \right) \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\ &= K_5 \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2}, \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

y

$$\begin{aligned}
& \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2}(B_{1,2}^2(n, c))(t))\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\
&= \left\| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(nc)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla^{1-\theta} \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(nc)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q} + \frac{\alpha+\theta-2}{N} - \frac{1}{r}) - \frac{\beta(1-\theta)}{\alpha}} \|nc(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_4}^{\frac{qN}{N+q(\alpha+\theta-2)}}} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta}{\alpha} - 1} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c(\tau)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta}{\alpha} - 1} \tau^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} d\tau \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\
&= C_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} b \left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha r}, 1 - \beta + \frac{\beta N}{\alpha q} \right) \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2} \\
&= K_6 t^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} \|n\|_{X_3} \|c\|_{X_2}, \tag{2.6.6}
\end{aligned}$$

para  $t > 0$ , donde  $K_3 = K_3(N, \beta, p, p_1)$ ,  $K_4 = K_4(N, \beta, p, p_1, r, r_1)$ ,  $K_5 = K_5(N, \beta, q, q_1)$ ,  $K_6 = K_6(N, \beta, q, q_1, r, r_1)$ . Así, de (2.6.3)-(2.6.6), se concluye la prueba del Lema. ■

**Lema 2.13.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2 existe una constante positiva  $K_7$  tal que para toda  $u \in X_3$ ,*

$$\|\mathcal{B}_{3,3}^3(u, u)\|_{X_3} \leq K_7 \|u\|_{X_3}^2.$$

*Demostración.* De las condiciones (i), (ii) y (iii) en la Hipótesis 2.1, se tiene que

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p} > 0, \quad 1 - 2\beta + \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{2\beta N}{\alpha p} > 0,$$

y dado que el operador de proyección  $\mathbb{P}$  es acotado en  $\mathcal{M}_{p_1}^p$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{B}_{3,3}^3(u, u)(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2}) \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\mathbb{P} \nabla \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}((t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(u \otimes u)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\nabla \cdot \mathbf{E}_{\beta,\beta}((t-\tau)^\beta (-\Delta)^{\alpha/2})(u \otimes u)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{2}{p}-\frac{1}{p})-\frac{\beta}{\alpha}} \|(u \otimes u)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{\frac{p_1}{2}}^{\frac{p}{2}}} d\tau \quad (\text{por (2.5.13)}) \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha p}-\frac{\beta}{\alpha}} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\
&= C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha p}-\frac{\beta}{\alpha}} \|u(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}^2 d\tau \\
&\leq C_2 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha p}-\frac{\beta}{\alpha}} \tau^{\frac{2\beta N}{\alpha p}+\frac{2\beta}{\alpha}-2\beta} d\tau \|u(\tau)\|_{X_3}^2 \\
&= C_2 t^{\frac{\beta N}{\alpha p}+\frac{\beta}{\alpha}-\beta} b \left( \beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha p}, 1 - 2\beta + \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{2\beta N}{\alpha p} \right) \|u(\tau)\|_{X_3}^2 \\
&= K_7 t^{\frac{\beta N}{\alpha p}+\frac{\beta}{\alpha}-\beta} \|u\|_{X_3}^2, \tag{2.6.7}
\end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , donde  $K_7 = K_7(N, \beta, p, p_1)$ . ■

**Lema 2.14.** *Existe una constante  $\gamma > 0$  tal que para toda  $n \in X_1$ ,*

$$\|L_3(n)(t)\|_{X_3} \leq \gamma \|n\|_{X_1}.$$

*Demostración.* De las condiciones (i), (ii) y (iii) en la Hipótesis 2.1, se tiene que

$$\beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha p} > 0, \quad 1 - 2\beta + \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha q} > 0.$$

Tomando  $s_5 = \frac{N_1 q_1}{N_1 + q_1}$ , de (A), (B) y (C) en la Hipótesis 2.1, se obtiene

$$1 \leq s_5 \leq \frac{Nq}{N+q} \leq p \quad \text{y} \quad \frac{p}{p_1} \geq \frac{Nq}{N+q} \frac{1}{s_5}.$$

Por lo tanto,  $L_3(n)$  puede ser estimado como sigue:

$$\begin{aligned}
& \|L_3(n)(t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&= \left\| \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2}) \mathbb{P}(n\nabla\phi)(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
&\leq \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \|\mathbb{P}\mathbf{E}_{\beta,\beta}((t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n\nabla\phi)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
&\leq C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (t-\tau)^{-\frac{\beta N}{\alpha}(\frac{1}{q}+\frac{1}{N}-\frac{1}{p})} \|(n\nabla\phi)(\tau)\|_{\mathcal{M}_{s_5}^{\frac{Nq}{N+q}}} d\tau \quad (\text{por (2.8)}) \\
&\leq C_1 \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha q}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta N}{\alpha p}} \|\nabla\phi(\tau)\|_{\mathcal{M}_{N_1}^N} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \quad (\text{por (1.1.1)}) \\
&\leq C_\phi \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1-\frac{\beta N}{\alpha q}-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta N}{\alpha p}-\beta+\frac{2\beta}{\alpha}\frac{\beta N}{\alpha q}-\beta} d\tau \|n(\tau)\|_{X_1} \quad (\text{por (2.2.3)}) \\
&=\leq C_\phi t^{\frac{\beta N}{\alpha q}+\frac{\beta}{\alpha}-\beta} b \left( \beta - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta N}{\alpha q} + \frac{\beta N}{\alpha p}, 1 - 2\beta + \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta N}{\alpha q} \right) \|n(\tau)\|_{X_1} \\
&= \gamma t^{\frac{\beta N}{\alpha q}+\frac{\beta}{\alpha}-\beta} \|n\|_{X_1}, \tag{2.6.8}
\end{aligned}$$

para todo  $t > 0$ , donde  $\gamma = \gamma(N, \beta, N_1, p, p_1, q, q_1, \phi)$ . ■

---

## Capítulo

### 3

# EXISTENCIA GLOBAL Y ESTABILIDAD

---

En este capítulo, se presentan nuevos resultados de existencia y estabilidad para un sistema de quimiotaxis Navier-Stokes fraccionario, los cuales serán demostrados a partir de las estimativas obtenidas en el capítulo anterior. En primer lugar, usando un argumento de punto fijo, se prueba un teorema de existencia y unicidad de soluciones globales con una condición de pequeñez sobre los datos iniciales, los cuales serán tomados en espacios de Besov-Morrey. Posteriormente, se demuestra un resultado de estabilidad asintótica para la clase de soluciones dadas por el teorema de existencia.

### 3.1 UN RESULTADO DE EXISTENCIA GLOBAL DE SOLUCIONES

En esta sección se enuncia y se demuestra el teorema que garantiza la existencia de una solución global en el tiempo para un sistema de quimiotaxis Navier-Stokes fraccionario, con datos iniciales en espacios de Besov-Morrey. Aprovechando la ventaja de usar la notación (2.4.2), se introduce el siguiente Lema, el cual ayudará a probar la existencia de solución mediante un argumento de punto fijo. La prueba de este Lema puede ser encontrada en [23].

**Lema 3.1.** *Para  $1 \leq i \leq 3$ , sea  $X_i$  un espacio de Banach con la norma  $\|\cdot\|_{X_i}$ .*

Considere el espacio de Banach  $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times X_3$  dotado con la norma

$$\|x\|_{\mathcal{X}} = \|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} + \|x_3\|_{X_3},$$

donde  $x = [x_1, x_2, x_3] \in \mathcal{X}$ . Para  $1 \leq i, k, j \leq 3$  asuma que  $\mathcal{B}_{i,k}^j : X_i \times X_k \rightarrow X_j$  es una aplicación bilineal continua, esto es, existe una constante positiva  $C_{i,k}^j$  tal que

$$\|\mathcal{B}_{i,k}^j(x_i, x_k)\|_{X_j} \leq C_{i,k}^j \|x_i\|_{X_i} \|x_k\|_{X_k}, \quad \text{para todo } (x_i, x_k) \in X_i \times X_k.$$

Suponga también que  $L_3 : X_1 \rightarrow X_3$  es una aplicación lineal continua tal que

$$\|L_3\|_{X_1 \rightarrow X_3} \leq \gamma. \quad \text{Considere las constantes}$$

$$\mathcal{K}_1 := 1 + \gamma \quad \text{y} \quad \mathcal{K}_2 := \gamma \sum_{i,k=1}^3 C_{i,k}^1 + \sum_{j,i,k=1}^3 C_{i,k}^j,$$

y sea  $0 < \epsilon < \frac{1}{4\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}$  y  $\mathcal{B}_\epsilon = \{x \in \mathcal{X} : \|x\|_{\mathcal{X}} \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon\}$ . Además, sean  $y = [y_1, y_2, y_3]$ , y  $\mathcal{B}(x) = [\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x), \mathcal{B}_3(x)]$ , donde

$$\mathcal{B}_1(x) = \sum_{i,k=1}^3 \mathcal{B}_{i,k}^1(x_i, x_k),$$

$$\mathcal{B}_2(x) = \sum_{i,k=1}^3 \mathcal{B}_{i,k}^2(x_i, x_k),$$

$$\mathcal{B}_3(x) = \sum_{i,k=1}^3 \mathcal{B}_{i,k}^3(x_i, x_k) + (L_3 \circ (y_1 + \mathcal{B}_1))(x).$$

Si  $\|y\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon$ , entonces existe una única solución  $x \in \mathcal{B}_\epsilon$  para  $x = y + \mathcal{B}(x)$ .

**Teorema 3.2.** Sea  $N \geq 2$ , los exponentes  $p, p_1, q, q_1, r, r_1$  y  $N_1$  como en la Hipótesis 2.1. Suponga que el dato inicial  $[n_0, c_0, u_0] \in \mathcal{I}$  y la fuerza  $f \in \mathcal{M}_{N_1}^N(\mathbb{R}^N)$ . Existen constantes positivas  $\epsilon, \delta(\epsilon)$  y  $\mathcal{K}_1$  tal que el sistema (2.1.1) tiene una única solución blanda global  $[n, c, u] \in \mathcal{X}$  satisfaciendo  $\|[n, c, u]\|_{\mathcal{X}} \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon$  desde que  $\|[n_0, c_0, u_0]\|_{\mathcal{I}} \leq \delta$ . Además, la aplicación dato-solución es localmente Lipschitz-continua.

*Demostración.* Considere  $X_1, X_2, X_3$  como en (2.2.4) y sea

$$y = [\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0, \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0, \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0].$$

Para  $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times X_3$  y  $x = [n, c, u] \in \mathcal{X}$ , se denota  $\mathcal{B}(x) = [\mathcal{B}_1(x), \mathcal{B}_2(x), \mathcal{B}_3(x)]$ , donde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(x) &= \mathcal{B}_{3,1}^1(u, n)(x) + \mathcal{B}_{1,2}^1(n, c)(x), \\ \mathcal{B}_2(x) &= \mathcal{B}_{3,2}^2(u, c)(x) + \mathcal{B}_{1,2}^2(n, c)(x), \\ \mathcal{B}_3(x) &= \mathcal{B}_{3,3}^3(u, u)(x) + L_3 \circ (\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0 + \mathcal{B}_1)(x). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Note que de los Lemas 2.11, 2.12 y 2.13 los operadores  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  en (3.1.1) son aplicaciones bilineales continuas; también, del Lema 2.14 se sigue que  $L_3$  es un mapeo lineal continuo. Ahora, sea

$$\mathcal{K}_1 = 1 + \gamma \quad \text{and} \quad \mathcal{K}_2 = \gamma(K_1 + K_2) + \sum_{i=1}^7 K_i, \quad (3.1.2)$$

donde  $K_1, K_2, \dots, K_7$  y  $\gamma$  son las constantes dadas en los lemas anteriores. Entonces, calculando la norma  $\mathcal{X}$  de  $y$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \|y\|_{\mathcal{X}} &= \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0\|_{X_1} + \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0\|_{X_2} + \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0\|_{X_3} \\ &= \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})n_0\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + \sup_{t>0} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} \\ &\quad + \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \|\nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})c_0\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\ &\quad + \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})u_0\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}. \end{aligned}$$

Recordando que los datos iniciales satisfacen (2.2.2), aplicando el Lema 2.10 y teniendo en cuenta la definición de la norma  $\mathcal{X}$  en (2.2.6), se obtiene

$$\begin{aligned}
\|y\|_{\mathcal{X}} &\leq \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} \mathcal{C}_0 t^{\frac{\beta N}{q} - \beta \alpha} \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{N}{q} - \alpha}} + \mathcal{C}_0 \|c_0\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} \\
&\quad + \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \mathcal{C}_0 t^{\frac{\beta N}{r} - \beta \alpha + \beta} \|\nabla((- \Delta)^{-\theta/2} c_0)\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r} - \alpha + 1}} \\
&\quad + \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \mathcal{C}_0 t^{\frac{\beta N}{p} - \beta \alpha + \beta} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p} - \alpha + 1}} \\
&= \mathcal{C}_0 \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} t^{\frac{\beta N}{\alpha q} - \beta} \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{N}{q} - \alpha}} + \mathcal{C}_0 \|c_0\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} \\
&\quad + \mathcal{C}_0 \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} t^{\frac{\beta N}{\alpha r} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} \|\nabla((- \Delta)^{-\theta/2} c_0)\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r} - \alpha + 1}} \\
&\quad + \mathcal{C}_0 \sup_{t>0} t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} t^{\frac{\beta N}{\alpha p} + \frac{\beta}{\alpha} - \beta} \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p} - \alpha + 1}} \\
&\leq \mathcal{C}_0 \left( \|n_0\|_{\mathcal{N}_{q,q_1,\infty}^{\frac{N}{q} - \alpha}} + \|c_0\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} + \|\nabla((- \Delta)^{-\theta/2} c_0)\|_{\mathcal{N}_{r,r_1,\infty}^{\frac{N}{r} - \alpha + 1}} + \|u_0\|_{\mathcal{N}_{p,p_1,\infty}^{\frac{N}{p} - \alpha + 1}} \right) \\
&\leq \mathcal{C}_0 \|(n_0, c_0, u_0)\|_{\mathcal{I}}. \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

Entonces  $\|y\|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon$  desde que  $\|(n_0, c_0, u_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \delta$ , donde  $\delta = \frac{\epsilon}{\mathcal{C}_0}$ . Por lo tanto, del Lema 3.1 se tiene que, si  $0 < \epsilon < \frac{1}{4\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2}$ , existe una única solución  $x \in \mathcal{X}$  para la ecuación  $x = y + \mathcal{B}(x)$ , y así, existe una única solución  $[n, c, u]$  para el sistema (2.4.2) tal que  $\|[n, c, u]\|_{\mathcal{X}} \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon$ . ■

### 3.2 UN RESULTADO DE ESTABILIDAD DE SOLUCIONES

**Teorema 3.3.** *Bajo las hipótesis del Teorema 3.2, asuma que  $[n, c, u]$  y  $[\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{u}]$  son dos soluciones dadas por el Teorema 3.2 correspondientes al dato inicial  $[n_0, c_0, u_0]$  y  $[\tilde{n}_0, \tilde{c}_0, \tilde{u}_0]$ , respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} & \left( t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n_0 - \tilde{n}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \right\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} \right. \\ & + t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \left\| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\ & \left. + t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u_0 - \tilde{u}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

si, y solo si,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta} \|n(\cdot, t) - \tilde{n}(\cdot, t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \left\| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2}(c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)) \right\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta} \|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

*Demostración.* Primero veamos que (3.2.1) implica (3.2.2). Sean  $[n, c, u]$  y  $[\tilde{n}, \tilde{c}, \tilde{u}]$  dos soluciones dadas por el Teorema 3.2 y sean

$$l_q = -\frac{\beta N}{\alpha q} + \beta, \quad \mu_r = -\frac{\beta N}{\alpha r} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta \quad \text{and} \quad \mu_p = -\frac{\beta N}{\alpha p} - \frac{\beta}{\alpha} + \beta.$$

Tomando la diferencia  $n - \tilde{n}$  y calculando en la norma  $\|\cdot\|_{X_1}$ , se obtiene

$$\begin{aligned} & t^{l_q} \|n(t) - \tilde{n}(t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ & \leq t^{l_q} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n_0 - \tilde{n}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \\ & + t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \left\| \mathbf{E}_{\beta, \beta}(-(t - \tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla n - \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{n}) \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ & + t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} \\ & \quad \left\| \nabla \mathbf{E}_{\beta, \beta}(-(t - \tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n \nabla((-\Delta)^{-\theta/2}c) - \tilde{n} \nabla((-\Delta)^{-\theta/2}\tilde{c})) \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\ & := t^{l_q} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n_0 - \tilde{n}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + J_1(t) + J_2(t). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Usando que  $u \cdot \nabla n - \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{n} = (u - \tilde{u}) \cdot \nabla n + \tilde{u} \cdot \nabla (n - \tilde{n})$  y trabajando como en (2.6.1), la integral  $J_1$  es acotada como sigue:

$$\begin{aligned}
& J_1(t) \\
& \leq \tilde{C}_1 t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\mu_p - 1} \\
& \quad \left( \|(u - \tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|(n - \tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \right) d\tau \\
& \leq \tilde{C}_1 t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\mu_p - 1} \tau^{-\mu_p - l_q} \tau^{\mu_p} \|(u - \tilde{u})(\tau)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n\|_{X_1} d\tau \\
& \quad + \tilde{C}_1 t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\mu_p - 1} \tau^{-\mu_p - l_q} \tau^{l_q} \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(n - \tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} d\tau \\
& \leq \tilde{C}_1 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_p - 1} z^{-\mu_p - l_q} (tz)^{\mu_p} \|(u - \tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n\|_{X_1} dz \\
& \quad + \tilde{C}_1 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_p - 1} z^{-\mu_p - l_q} (tz)^{l_q} \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} dz \quad (\text{tomando } \tau = tz) \\
& \leq \tilde{C}_1 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_p - 1} z^{-\mu_p - l_q} \\
& \quad \left( (tz)^{\mu_p} \|(u - \tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|n\|_{X_1} + (tz)^{l_q} \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \right) dz. \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

Trabajando de manera análoga en la última desigualdad, pero teniendo en cuenta el razonamiento usado en (2.6.2) se tiene que

$$\begin{aligned}
& J_2(t) \\
& \leq \tilde{C}_2 t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\mu_r - 1} \tau^{-l_q - \mu_r} \tau^{l_q} \|(n - \tilde{n})(\tau)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c(\tau)\|_{X_2} d\tau \\
& \quad + \tilde{C}_2 t^{l_q} \int_0^t (t - \tau)^{\mu_r - 1} \tau^{-l_q - \mu_r} \tau^{\mu_r} \|\tilde{n}(\tau)\|_{X_1} \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2}(c - \tilde{c}))(\tau)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
& \leq \tilde{C}_2 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{l_q} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c\|_{X_2} dz \\
& \quad + \tilde{C}_2 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} (tz)^{\mu_r} \|\tilde{n}\|_{X_1} \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2}(c - \tilde{c}))(tz)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} dz \\
& \leq \tilde{C}_2 \int_0^1 (1 - z)^{\mu_r - 1} z^{-l_q - \mu_r} \\
& \quad \left( (tz)^{l_q} \|(n - \tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c\|_{X_2} + (tz)^{\mu_r} \|\nabla((-\Delta)^{-\theta/2}(c - \tilde{c}))(tz)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \|\tilde{n}\|_{X_1} \right) dz. \quad (3.2.5)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
& \| (c - \tilde{c})(t) \|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\
& \leq \| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \\
& \quad + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \| \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c - nc - \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau) \|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} d\tau \\
& := \| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} + J_3(t), \tag{3.2.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t^{\mu_r} \| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2}(c - \tilde{c})(t) \|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\
& \leq t^{\mu_r} \| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \\
& \quad + t^{\mu_r} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \\
& \quad \quad \| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u \cdot \nabla c - nc - \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{c} - \tilde{n}\tilde{c})(\tau) \|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} d\tau \\
& := t^{\mu_r} \| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_{\beta,\beta}(-(t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} + J_4(t), \tag{3.2.7}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& t^{\mu_p} \| (u - \tilde{u})(t) \|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
& \leq t^{\mu_p} \| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u_0 - \tilde{u}_0) \|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \\
& \quad + t^{\mu_p} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \| \mathbf{E}_{\beta,\beta}((t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2}) \mathbb{P}(u \cdot \nabla u - \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u})(\tau) \|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
& \quad + t^{\mu_p} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \| \mathbf{E}_{\beta,\beta}((t-\tau)^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n \nabla \phi - \tilde{n} \nabla \tilde{\phi})(\tau) \|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} d\tau \\
& := t^{\mu_p} \| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u_0 - \tilde{u}_0) \|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} + J_5(t) + J_6(t). \tag{3.2.8}
\end{aligned}$$

Por otra parte, de las estimativas (2.6.3), (2.6.4), (2.6.5), (2.6.6), (2.6.7) y (2.6.8) se tiene

$$\begin{aligned}
J_3(t) &\leq \tilde{C}_3 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p} \\
&\quad \left( (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \right) dz \\
&+ \tilde{C}_4 \int_0^1 (1-z)^{l_q-1} z^{-l_q} \\
&\quad \left( (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{n}\|_{X_4} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \right) dz,
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\begin{aligned}
J_4(t) &\leq \tilde{C}_5 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} \\
&\quad \left( (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{u}\|_{X_4} (tz)^{\mu_r} \|\nabla(-\Delta)^{-\theta/2}(c-\tilde{c})(tz)\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} \right) dz \\
&+ \tilde{C}_6 \int_0^1 (1-z)^{l_q-\mu_r-1} z^{-l_q} \\
&\quad \left( (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|c\|_{X_2} + \|\tilde{u}\|_{X_4} \|(c-\tilde{c})(tz)\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} \right) dz,
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

$$\begin{aligned}
J_5(t) &\leq \tilde{C}_7 \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-2\mu_p} \\
&\quad \left( (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \|u\|_{X_4} + \|\tilde{u}\|_{X_4} (tz)^{\mu_p} \|(u-\tilde{u})(tz)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} \right) dz,
\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

$$\mathbf{y} \quad J_6(t) \leq \tilde{\gamma} \int_0^1 (1-z)^{l_q-\mu_p-1} z^{-l_q} (tz)^{l_q} \|(n-\tilde{n})(tz)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} dz. \tag{3.2.12}$$

Ahora, se definen

$$A_1 := \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{lq} \|n(\cdot, t) - \tilde{n}(\cdot, t)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q},$$

$$A_2 := \limsup_{t \rightarrow \infty} \|c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t)\|_{L^{\frac{N}{\alpha + \theta - 2}}},$$

$$A_3 := \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\mu_r} \|\nabla(-\Delta)^{-\theta/2}(c(\cdot, t) - \tilde{c}(\cdot, t))\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r},$$

$$A_4 := \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\mu_p} \|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p}.$$

Dado que  $\|[n, c, u]\|_{\mathcal{X}}, \|\tilde{[n, c, u]}\| \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon$ , se tiene que  $A_1, A_2, A_3, A_4 < \infty$ . Tomando que  $\limsup_{t \rightarrow \infty}$  en (3.2.3), (3.2.6), (3.2.7), (3.2.8), y usando (3.2.4), (3.2.5) y (3.2.9)-(3.2.12), se obtiene

$$\begin{aligned} A_1 &\leq 0 + \tilde{C}_1 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-lq} dz (A_4 + A_1) \\ &\quad + \tilde{C}_2 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_r-1} z^{-lq-\mu_r} dz (A_1 + A_3) \\ &\leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [K_1(A_1 + A_4) + K_2(A_1 + A_3)], \\ A_2 &\leq 0 + \tilde{C}_3 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p} dz (A_4 + A_2) \\ &\quad + \tilde{C}_4 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_r-1} z^{-lq} dz (A_1 + A_2) \\ &\leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [K_3(A_2 + A_4) + K_4(A_1 + A_2)], \\ A_3 &\leq 0 + \tilde{C}_5 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-\mu_p-\mu_r} dz (A_4 + A_3) \\ &\quad + \tilde{C}_6 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{lq-\mu_r-1} z^{-lq} dz (A_1 + A_2) \\ &\leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [K_5(A_3 + A_4) + K_6(A_1 + A_2)], \\ A_4 &\leq 0 + \tilde{C}_7 2\mathcal{K}_1\epsilon \int_0^1 (1-z)^{\mu_p-1} z^{-2\mu_p} dz (A_4 + A_4) + \tilde{\gamma} \int_0^1 (1-z)^{lq-\mu_p-1} z^{-lq} dz A_1 \\ &\leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [K_7 2A_4] + \gamma A_1, \end{aligned}$$

donde  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7$  y  $\gamma$  son como en los Lemas 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14, respectivamente. Recordando que  $\mathcal{K}_1 = 1 + \gamma$  y  $\mathcal{K}_2 = \gamma(K_1 + K_2) + \sum_{i=1}^7 K_i$

(ver (3.1.2)) y sumando todas las  $A_i$ 's, se llega a

$$\begin{aligned}
& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
& \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [A_1(K_1 + K_2 + K_4 + K_6)] + A_2(K_3 + K_4 + K_6) \\
& \quad + A_3(K_2 + K_5) + A_4(K_1 + K_3 + K_5 + 2K_7) + \gamma A_1 \\
& \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [A_1(K_1 + K_2 + K_4 + K_6) + \gamma(K_1 + K_2) + A_2(K_3 + K_4 + K_6) \\
& \quad + A_3(K_2 + K_5 + \gamma K_2) + A_4(K_1 + K_3 + 2K_7 + \gamma K_1)] \\
& \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon [A_1((K_1 + K_2 + K_4 + K_6) + \gamma(K_1 + K_2)) + A_2(K_3 + K_4 + K_6) \\
& \quad + A_3(K_2 + K_5 + \gamma K_2) + A_4(K_1 + K_3 + 2K_7 + \gamma K_1)] \\
& \leq 2\mathcal{K}_1\epsilon(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\
& \quad \times [(k_1 + k_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + 2K_7) + \gamma(K_1 + K_2)].
\end{aligned}$$

Note que  $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 + 2K_7 + \gamma(K_1 + K_2) \leq 2\mathcal{K}_2$ , y entonces

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \leq 4\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\epsilon (A_1 + A_2 + A_3 + A_4),$$

pero observando que  $4\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\epsilon < 1$ , se concluye

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0.$$

Ahora se demostrará que (3.2.2) implica (3.2.1). Teniendo en cuenta las estimativas (3.2.3), (3.2.6)-(3.2.8) y la hipótesis  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{l_q} \|\mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(n_0 - \tilde{n}_0)\|_{\mathcal{M}_{q_1}^q} & \leq A_1 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_1(t) + J_2(t)) \\
& \leq A_1 + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_1(A_1 + A_4) \\
& \quad + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_2(A_1 + A_3) \\
& = 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \right\|_{L^{\frac{N}{\alpha+\theta-2}}} &\leq A_2 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_3(t) \\
&\leq A_2 + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_3(A_2 + A_4) \\
&\quad + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_4(A_1 + A_2) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\mu_r} \left\| \nabla(-\Delta)^{-\theta/2} \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(c_0 - \tilde{c}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{r_1}^r} &\leq A_3 + \limsup_{t \rightarrow \infty} J_4(t) \\
&\leq A_3 + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_5(A_3 + A_4) \\
&\quad + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_6(A_1 + A_2) \\
&\leq 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{\mu_p} \left\| \mathbf{E}_\beta(-t^\beta(-\Delta)^{\alpha/2})(u_0 - \tilde{u}_0) \right\|_{\mathcal{M}_{p_1}^p} &\leq A_4 + \limsup_{t \rightarrow \infty} (J_5(t) + J_6(t)) \\
&\leq A_4 + 2\mathcal{K}_1\epsilon K_7 2A_4 + \gamma A_1 \\
&\leq 0 + 0 + 0 = 0,
\end{aligned}$$

y por lo tanto, la prueba está finalizada. ■

## REFERENCIAS

---

- [1] AZEVEDO, Joelma; CUEVAS, Claudio and HENRIQUEZ, Erwin. Existence and asymptotic behaviour for the time-fractional Keller–Segel model for chemotaxis. En: *Mathematische Nachrichten* [en línea]. Weinheim (Alemania): Wiley-VCH, marzo de 2019, vol. 292, nro. 3, p. 462-480. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 0025-584X. DOI: 10.1002/mana.201700237.
- [2] CUEVAS, Claudio; SILVA, Clessius and SOTO, Herme. On the time-fractional Keller-Segel model for chemotaxis. En: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* [en línea]. Weinheim (Alemania): Wiley-VCH, enero de 2020, vol. 43, nro. 2, p. 769-798. [Consultado: 05 de mayo de 2020]. ISSN 1099-1476. DOI: 10.1002/mma.5959.
- [3] BATHIA, Harsh, *et al.* The helmholtz hodge decomposition - a survey. En: *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics* [en línea]. Nueva York (USA): IEEE Computer Society, noviembre de 2012, vol. 19, nro. 8, p. 1386-1404. [Consultado: 25 de mayo de 2020]. ISSN 1941-0506. DOI: 10.1109/TVCG.2012.316.
- [4] BOURNAVEAS, Nikolaos and CALVEZ, Vincent. The one-dimensional Keller-Segel model with fractional diffusion of cells. En: *Nonlinearity* [en línea]. Londres (Inglaterra): IOP Publishing Ltd & London Mathematical Society, marzo de 2010, vol. 23, nro. 4, p. 923-925. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1361-6544. DOI: 10.1088/0951-7715/23/4/009.
- [5] BRAUKHOFF, Marcel. Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier–Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic

- growth. En: *Ann. Inst. Henri Poincaré-Anal. Non Lineaire* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, julio-agosto de 2017, vol. 34, nro. 4, p. 6115-6142. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1873-1430. DOI: 10.1016/j.anihpc.2016.08.0039.
- [6] BURCZAK, Jan and GRANERO-BELINCHÓN, Rafael. Suppression of blow up by a logistic source in 2D Keller-Segel system with fractional dissipation. En: *Journal of Differential Equations* [en línea]. Amsterdam (Reino de los Países Bajos): Elsevier, noviembre de 2017, vol. 263, nro. 9, p. 6115-6142. [Consultado: 14 de julio de 2020]. ISSN 1608-3083. DOI: 10.1016/j.jde.2017.07.007.
- [7] CAO, Xinru and LANKEIT, Johannes. Global classical small-data solutions for a three-dimensional chemotaxis Navier–Stokes system involving matrix-valued sensitivities. En: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* [en línea]. Berlín (Alemania): Springer, agosto de 2016, vol. 55, nro 4, p. 1-39. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1944-4036. DOI: 10.1007/s00526-016-1027-2.
- [8] CAPUTO, Michael. Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory. En: *The Journal of the Acoustical Society of America* [en línea]. Melville (USA): Acoustical Society of America, 1974, vol. 56, nro 3. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 0001-4966. DOI: 10.1121/1.1903344.
- [9] CARVALHO-NETO, Paulo M. Fractional differential equations: a novel study of local and global solutions in Banach spaces [en línea]. Tesis PhD. São Carlos, Brazil. Universidad de São Paulo-USP. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 2013. 124 pp. [Consultado: 15 de mayo de 2021]. Disponible en: <https://pdfs.semanticscholar.org/1a8c/11a01804488383b7141d591ee3c808d68735.pdf>.
- [10] CARVALHO-NETO, Paulo M. and PLANAS, Gabriela. Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in  $\mathbb{R}^N$ . En: *Journal of Differential*

- Equations* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, abril de 2015, vol. 259, p. 2948-2980. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN: 0022-0396. DOI: 10.1016/j.jde.2015.04.008.
- [11] CHOE, Hi J. and LKHAGVASUREN, Bataa. An extension criterion for the local in time solution of the chemotaxis Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. En: *Annali dell' Universita'di Ferrara: sezione VII-Scienze matematiche* [en línea]. Berlín (Alemania): Springer, noviembre de 2017, vol. 63, nro 2, p. 277-288. [Consultado: 10 de mayo de 2020]. ISSN 1944-4036. DOI: 10.1007/s11565-016-0265-8.
- [12] CHOE, Hi J. and LKHAGVASUREN, Bataa. Global existence result for chemotaxis Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [en línea]. Amsterdam (Reino de los Países Bajos): Elsevier, septiembre de 2016, vol. 446, nro 2, p. 1415-1426. [Consultado: 10 de mayo de 2020]. ISSN 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.050.
- [13] CHOE, Hi J.; LKHAGVASUREN, Bataa and YANG, Minsuk. Wellposedness of the Keller-Segel Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces. En: *Communications on Pure and Applied Analysis* [en línea]. California (USA): American Institute of Mathematical Sciences, septiembre de 2016, vol. 14, nro 6, p. 2453-2464. [Consultado: 12 de mayo de 2020]. ISSN 1534-0392. DOI: 10.3934/cpaa.2015.14.2453.
- [14] DIETHELM, Kai. The Analysis of fractional Differential Equations: An application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type [en línea]. Berlin: Springer, 2004. 247 p. [Consultado 20 de mayo de 2020]. DOI: 10.1007/978-3-642-14574-2. ISBN 978-3-642-14574-2.
- [15] DI PAOLA, Mario; PIRROTA, Antonina and VALENZA, Antonino. Viscoelastic behavior through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results. En: *Mechanics of Materials* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, diciembre de 2011, vol. 43, nro 12, p.

799-806. [Consultado: 16 de septiembre de 2020]. ISSN 1534-0392. DOI: 10.1016/j.mechmat.2011.08.016.

- [16] DUAN, Renjun; LORZ, Alexander and MARKOWICH, Peter. Global solutions to the coupled chemotaxis-fluid equations. En: *Communications in Partial Differential Equations* [en línea]. Londres (Reino Unido): Taylor & Francis, agosto de 2010, vol. 35, nro 9, p. 1635-1673. [Consultado: 12 de agosto de 2020]. ISSN 1532-4133. DOI: 10.1080/03605302.2010.497199.
- [17] HEIBIG, Arnaud and PALADE, Liviu I. Well posedness of a linearized fractional derivative fluid model. En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* [en línea]. Amsterdam (Reino de los Países Bajos): Elsevier, marzo de 2011, vol. 380, nro 1, p. 188-203. [Consultado: 12 de agosto de 2020]. ISSN 0022-247X. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.047.
- [18] DUARTE RODRÍGUEZ, Abelardo; FERREIRA, Lucas C.F. and VILLAMIZAR ROA, Élder J. Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis-fluid model with logistic source. En: *Discrete & Continuous Dynamical Systems* [en línea]. California (USA): American Institute of Mathematical Sciences, febrero de 2019, vol. 24, nro 2, p. 423-447. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 0022-247X. DOI: 10.3934/dcdsb.2018180.
- [19] DUARTE RODRÍGUEZ, Abelardo; FERREIRA, Lucas C.F. and VILLAMIZAR ROA, Élder J. Global Existence for an attraction–repulsion chemotaxis-fluid system in a framework of Besov–Morrey type. En: *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* [en línea]. Berlín (Alemania): Springer, diciembre de 2020, vol. 22, nro 63, 18 pp. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1944-4036. DOI: 10.1007/s00021-020-00539-x.
- [20] ENGHETA, Nader. Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory. En: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* [en línea]. California (USA): IEEE Transactions on Antennas and Propagation, abril de 1996, vol. 56, nro 897, p. 554-566. [Consultado: 10 de junio de 2020]. ISSN 1559-2221. DOI: 10.1121/1.1903344.

- [21] ESCUDERO, Carlos. The fractional Keller-Segel model. En: *Nonlinearity* [en línea]. Bristol (Inglaterra): IOP Publishing, noviembre de 2016, vol. 19, nro 12, p. 2909-2918. [Consultado: 25 de mayo de 2020]. ISSN 1361-6544. DOI: 10.1088/0951-7715/19/12/010.
- [22] ESTRADA RODRIGUEZ, Gisell; GIMPERLEIN, Heiko and PAINTER, Kevin. Fractional Patlak-Keller-Segel equations for chemotactic superdiffusion. En: *SIAM Journal on Applied Mathematics* [en línea]. Philadelphia (USA): Society for Industrial and Applied Mathematics, agosto de 2017, vol. 78, nro 2, p. 1155-1173. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1095-712X. DOI: 10.1137/17M1142867.
- [23] FERREIRA, Lucas C.F. and POSTIGO, Monisse. EGlobal well-posedness and asymptotic behavior in Besov-Morrey spaces for chemotaxis-Navier-Stokes fluids. En: *Journal of Mathematical Physics* [en línea]. Melville (USA): AIP Publishing, junio de 2019, vol. 60, nro 6, 22 p. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN 1361-6544. DOI: 10.1063/1.5080248.
- [24] FERREIRA, Lucas C.F. and PRECIOSO, Juliana. Existence and asymptotic behavior for the parabolic-parabolic Keller-Segel system with singular data. En: *Nonlinearity* [en línea]. Bristol (Inglaterra): IOP Publishing, marzo de 2011, vol. 24, nro 5, p. 1433-1449. [Consultado: 15 de abril de 2020]. ISSN 1361-6544. DOI: 10.1088/0951-7715/24/5/003.
- [25] FERREIRA, Lucas C. F. and VILLAMIZAR ROA, Élder J. Fractional Navier-Stokes equations and a Hölder-type inequality in a sum of singular spaces. En: *Fuel and Energy Abstracts* [en línea]. Amsterdam (Reino de los Países Bajos): Elsevier, noviembre de 2011, vol. 74, nro 16, p. 5618-5630. [Consultado: 16 de septiembre de 2020]. ISSN: 0140-6701. DOI: 10.1016/j.na.2011.05.047.
- [26] FERREIRA, Lucas C. F. and VILLAMIZAR ROA, Élder J. Self-similar solutions, uniqueness and long-time asymptotic behavior for semilinear heat equations. En: *Differential and Integral Equations* [en línea]. West Palm

- Beach (USA): Khayyam Publishing, diciembre de 2006, vol. 19, nro 12, p. 1349-1370. [Consultado: 16 de septiembre de 2020]. ISSN: 0893-4983. Disponible en: <https://www.researchgate.net/publication/265358004>.
- [27] FONTECHA MEDINA, Miguel A. and VILLAMIZAR ROA, Élder J. Global existence and asymptotic behavior of solutions for a fractional chemotaxis-Navier-Stokes system (*preprint*).
- [28] HILL, Nick A. and PEDLEY, Timothy J. Bioconvection. En: *Fluid Dynamics Research* [en línea]. California (USA): IOP Publishing, febrero de 2015, vol. 37, nro 1-2, p. 1-20. [Consultado: 23 de junio de 2020]. ISSN: 1361-6544. DOI: 10.1016/j.fluidyn.2005.03.002.
- [29] ISHIDA, Sachiko. Global existence and boundedness for chemotaxis-Navier-Stokes systems with position-dependent sensitivity in 2D bounded domains. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* [en línea]. California (USA): American Institute of Mathematical Sciences, febrero de 2015, vol. 35, nro 8, p. 3463-3482. [Consultado: 04 de marzo de 2021]. ISSN: 1534-0392. DOI: 10.3934/dcds.2015.35.3463.
- [30] KATO, Tosio. Strong solutions of the Navier-Stokes equation in Morrey spaces. En: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* [en línea]. Berlín (Alemania): Springer, septiembre de 1992, vol. 22, p. 127-155. [Consultado: 21 de agosto de 2021]. ISSN: 1944-4036. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01232939>.
- [31] KLAFTER, Joseph; White, B.S and LEVANDOWSKY, Michael. Microzooplankton Feeding Behavior and the Levy Walk. En: ALT Wolfgang and HOFFMANN, Gerhard. *Lecture Notes in Biomathematics: Biological Motion*. Berlín (Alemania): Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990, vol. 89, p. 281-296. [Consultado: 21 de octubre de 2020]. ISSN: 1944-4036. DOI: 10.1007/978-3-642-51664-1\_20.
- [32] KOZONO, Hideo; MIURA, Masanari and SUGIYAMA, Yoshie. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled

- with the Navier-Stokes fluid. En: *Journal of Functional Analysis* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, marzo de 2016, vol. 270, nro 5, p. 1663-1683. [Consultado: 15 de abril de 2020]. ISSN: 0140-6701. DOI: 10.1016/j.jfa.2015.10.016.
- [33] KOZONO, Hideo and YAMAZAKI, Masao. Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data. En: *Communications in Partial Differential Equations* [en línea]. Philadelphia (USA): Taylor & Francis, 1994, vol. 19, nro 5-6, p. 959-1014. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN: 0360-5302. DOI: 10.1080/03605309408821042.
- [34] LOACHAMÍN, Geremy G. Sobre el problema de Cauchy para la ecuación del calor fraccionaria [en línea]. Tesis de Pregrado. Quito, Ecuador. Escuela Politécnica Nacional. Facultad de Ciencias, 2020. 152 pp. [Consultado: 01 de marzo de 2022]. Disponible en: <https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/20800/1/CD%2010324.pdf>.
- [35] LOPEZ, Juan and VILLAMIZAR ROA, Élder J. An optimal control problem related to a 3D-chemotaxis-Navier-Stokes model. En: *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations* [en línea]. Les Ulis (Francia): EDP Sciences, mayo de 2021, vol. 27, Paper No. 58, 37 pp. [Consultado: 14 de noviembre de 2021]. ISSN: 1262-3377. DOI: 10.1051/cocv/2021055.
- [36] MAINARDI, Francesco. Lecture notes on mathematical physics [en línea]. En: Mini course on Introduction to Fractional Calculus. (11-15, marzo de 2013: Bilbao, España). Fractional Calculus and special functions. Bologna (Italia): Department of Physics, University of Bologna, 2013. 62 p. [Consultado: 14 de noviembre de 2021]. Disponible en: <https://appliedmath.brown.edu/sites/g/files/dprerj1051/files/fractional/21%20Fractional%20Calculus%20and%20Special%20Functions.pdf>.
- [37] MAINARDI, Francesco. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation. En: *VII Conference on Waves and Stability in Con-*

*tinuous Media*. Singapore: World Scientific, 1994. p. 246-251. vol. 23. [Consultado: 15 de noviembre de 2021]. ISBN: 978-981-4533-89-8.

- [38] MAZZUCATO, Anna L. Besov-Morrey spaces: function space theory and applications to non-linear pde. En: *Transactions of the AMS-American Mathematical Society* [en línea]. Providence (USA): American Mathematical Society, diciembre de 2002, vol. 355, nro 4, p. 1297-1364. [Consultado: 01 de abril de 2020]. Disponible en: <https://www.ams.org/journals/tran/2003-355-04/S0002-9947-02-03214-2/S0002-9947-02-03214-2.pdf>.
- [39] SCHMELZER, Thomas and TREFETHEN, Lloyd N. Computing the Gamma function using contour integrals and rational approximations. En: *SIAM Journal on Numerical Analysis* [en línea]. Philadelphia (USA): Society for Industrial and Applied Mathematics, marzo de 2007, vol. 45, nro 2, p. 558-571. [Consultado: 12 de noviembre de 2020]. ISSN: 1095-7170. DOI: 10.1137/050646342.
- [40] SHINBROT, Marvin. Fractional derivatives of solutions of the Navier-Stokes equations. En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* [en línea]. Berlín (Alemania): Springer, enero de 1971, vol. 40, p. 139-154. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN: 1944-4036. DOI: 10.1007/BF00250318.
- [41] STINGA, Pablo R. User's guide to the fractional Laplacian and the method of semigroups. En: *Handbook of Fractional Calculus with applications: Fractional Differential Equations* [en línea]. Berlín, Alemania: De Gruyter, 2019. Vol 2. [Consultado: 01 de marzo de 2022]. DOI: 10.1515/9783110571660-012.
- [42] TAO, Yoshuan and WINKLER, Michael. Eventual smoothness and stabilization of large-data solutions in a three-dimensional chemotaxis system with consumption of chemoattractant. En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, febrero de 2012, vol. 252, nro 3, p. 2520-2543. [Consultado: 14 de noviembre de 2021]. ISSN: 1090-2732. DOI: 10.1016/j.jde.2011.07.010.

- [43] TAYLOR, Michael. Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes and other evolution equations. En: *Communications in Partial Differential Equations* [en línea]. Londres (Reino Unido): Taylor & Francis, 1992, vol. 17, nro 9-10, p. 1407-1456. [Consultado: 25 de agosto de 2021]. ISSN: 0360-5302. DOI: 10.1080/03605309208820892.
- [44] TUVAL, Idan, *et al.* Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* [en línea]. Washington (USA): National Academy of Sciences, febrero de 2005, vol. 102, nro 7, p. 2277-2282. [Consultado: 15 de abril de 2020]. ISSN: 1091-6490. DOI: 10.1073/pnas.0406724102.
- [45] WINKLER, Michael. Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis-Navier-Stokes system. En: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, octubre de 2016, vol. 33, nro 5, p. 1329-1352. [Consultado: 15 de abril de 2020]. ISSN: 0294-1449. DOI: 10.1016/j.anihpc.2015.05.002.
- [46] WINKLER, Michael. How far do chemotaxis-driven forces influence regularity in the Navier-Stokes system? En: *Transactions of the AMS- American Mathematical Society* [en línea]. Providence (USA): American Mathematical Society, 2017, vol. 369, p. 3067-3125. [Consultado: 17 de abril de 2020]. ISSN: 1088-6850. DOI: 10.1090/tran/6733.
- [47] WINKLER, Michael, *et al.* Global large-data solutions in a chemotaxis-Navier-Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops. En: *Communications in Partial Differential Equations* [en línea]. Londres (Reino Unido): Taylor & Francis, enero de 2012, vol. 37, nro 2, p. 319-351. [Consultado: 01 de abril de 2020]. ISSN: 0360-5302. DOI: 10.1080/03605302.2011.591865.
- [48] XIAO, Yimin. Packing measure of the sample paths of fractional brownian motion. En: *Transactions of the AMS- American Mathematical Society* [en línea]. Providence (USA): American Mathematical Society, enero de 2012,

vol. 348, nro 8, p. 3193-3213. [Consultado: 25 de junio de 2021]. ISSN: 1088-6850. DOI: 10.1090/S0002-9947-96-01712-6.

- [49] ZHAI, Zhichun. Global well-posedness for nonlocal fractional Keller-Segel systems in critical Besov spaces. En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, 2010, vol. 72, p. 3173-3189. [Consultado: 02 octubre de 2020]. ISSN: 0362-546X. DOI: 10.1016/j.na.2009.12.011.
- [50] ZHANG, Kewei. On Shinbrot's conjecture for the Navier–Stokes equations. En: *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* [en línea]. Londres (Reino Unido): Royal Society, marzo de 1993, vol. 440, nro 1910, p. 537-540. [Consultado: 14 de octubre de 2020]. ISSN: 2053-9177. DOI: 10.1098/rspa.1993.0032.
- [51] ZHANG, Qian. Local well-posedness for the chemotaxis-Navier–Stokes equations in Besov spaces. En: *Nonlinear Analysis: Real World Applications* [en línea]. Amsterdam (Países Bajos): Elsevier Ltd, junio de 2014, vol. 17, p. 89-100. [Consultado: 14 de octubre de 2020]. ISSN: 0362-546X. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2013.10.008.