Conocimiento especializado en Cálculo Diferencial y su enseñanza: El caso de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas UIS

Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar y Johan Smith Salazar Giraldo

Trabajo de Grado para Optar al Título de Licenciatura en Matemáticas

Directora:

Jenny Patricia Acevedo Rincón

Doctora en Educación

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2026

Dedicatoria

A mi mamá, Nelly, y a mi papá, Martín, por su amor incondicional, su apoyo constante y por todos los sacrificios que han realizado para que hoy pueda cumplir este sueño. Gracias por sus enseñanzas, sus consejos y por creer siempre en mí.

A mi hermano, Simón, por su compañía, su apoyo y por ser parte fundamental de mi vida y de este proceso.

A mi nona Mariela, que, aunque ya no está físicamente, siempre fue fuente de motivación.

Diego Alonso Santiago Villar

A mis padres, Aide y Luis, por ser el cimiento de mis sueños y el motor que impulsa mi perseverancia. A mis hermanos Diego, Álvaro, Gabriela, por su compañía incondicional, y especialmente a mi hermano Camilo, cuyo apoyo ha sido una luz constante para llegar al final de este camino. Desde lo más profundo de mi corazón gracias por estar para mí y cuidar cada paso que doy.

Anamaria Rodríguez Capera

A mis padres, Alix y Luis, por su amor incondicional, su paciencia y su gran apoyo en este camino. Gracias por creer en mí incluso en los momentos de duda, por sus enseñanzas y por ser el pilar que ha sostenido cada uno de mis logros. Este triunfo también les pertenece.

A mis ángeles difuntos, Yostin, Margoth, Cesar, Edinson, Harold, Leonardo, David, Nicolás, aunque ya no estén físicamente, permanecen vivos en mi corazón y sé que están orgullosos de este logro. Su recuerdo ha sido fuente de fortaleza y guía en cada paso.

Johan Smith Salazar Giraldo

Agradecimientos

Expreso mi más sincero agradecimiento A Dios, por brindarme la sabiduría, la fortaleza y la perseverancia necesarias para recorrer este camino y permitirme alcanzar una de las metas más importantes de mi vida.

A mi asesora de tesis, la PhD. Jenny Acevedo, por su orientación, disposición y acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo, así como por sus valiosos aportes académicos.

A mi pareja, Camila, por su compañía, comprensión y apoyo constante durante este proceso, así como por brindarme ánimo y motivación en los momentos más exigentes del desarrollo de este trabajo.

También agradezco a mis compañeros Johan, Natalia, Melissa, Anamaría, Mateo, Camilo, Anghely y Felipe por los momentos compartidos, el apoyo mutuo y las experiencias vividas a lo largo de este proceso académico.

De igual manera, agradezco a la Universidad Industrial de Santander (UIS) por brindarme los espacios de formación académica y personal que hicieron posible mi crecimiento profesional.

Finalmente, agradezco a todas las personas que confiaron en mí y me brindaron la oportunidad de realizar asesorías académicas, ya que estas experiencias no solo representaron un apoyo durante mi proceso universitario, sino que también fortalecieron mi formación como futuro profesional.

Diego Alonso Santiago Villar

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi directora de tesis la PhD. Jenny Acevedo, por su guía constante, paciencia y sabiduría durante todo este proceso. Sus consejos no solo enriquecen mi trabajo, sino que me inspiran a crecer como investigadora.

A mis compañeros, gracias por el apoyo mutuo, las discusiones interminables y las risas que hicieron más llevadero este camino.

A mi familia, el pilar inquebrantable de mi vida: gracias por confiar en mi ciegamente, por apoyar cada una de mis decisiones, por creer en mi cuando yo misma dudaba, por mostrarme siempre lo orgullosos que están y por rezar por mí en silencio para que todo salga bien. Su fe y amor fueron mi mayor motivación.

A mis amigos, Adriana, Juliana, Jhonar, José, Yesica, por estar siempre ahí con palabras de aliento, por ser mi refugio en los momentos más duros, por escucharme sin juzgar, por no dejarme sola, por siempre estar disponibles y envolverme en una calidez inmensa que me sostuvo emocionalmente. Su presencia fue una fuerza invisible que me alentó para seguir.

Finalmente, un agradecimiento especial a mi jefa Martha en el restaurante Milus, por abrirme las puertas y darme tanto cariño. También a mis compañeros y todos con quienes he compartido, gracias por alegrarme el día a día y por mostrarme lo bello que hay en las personas.

Anamaria Rodríguez Capera

Agradecimientos

A Dios, por brindarme la fortaleza, la sabiduría y la perseverancia necesaria para alcanzar este logro académico.

A mi familia, especialmente a mi tía Hiliana, quién ha sido un pilar fundamental durante todo este proceso, brindándome apoyo incondicional, motivación constante y confianza en cada etapa de mi formación.

A la Universidad Industrial de Santander, por sus espacios de formación y el aporte de crecimiento a mi formación profesional.

A mi directora, PhD Jenny Patricia Acevedo Rincón, por su orientación, acompañamiento y valiosos aportes académicos, los cuales fueron esenciales para el desarrollo y consolidación de esta investigación. Su compromiso y dedicación han sido fundamentales en mi proceso de aprendizaje.

A mis compañeros, Diego, Anamaria, Nicolás, Nicole, Yerly, por la colaboración, las risas y aquellos momentos que vivimos a lo largo de este proceso académico. Su compañerismo y aporte hicieron más enriquecedor y significativo este camino.

A mi pareja, Mayra, por acompañarme en este proceso, por ser un pilar fundamental en mi vida y animarme en los momentos difíciles.

A mis amigos, Juan Manuel, Kevin, Sergio, Sebastián, por estar siempre presentes en mi camino universitario, por motivarme y compartir momentos gratos.

Johan Smith Salazar Giraldo

Tabla de contenido

Pág.

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Resumen

Título: Conocimiento especializado en Cálculo Diferencial y su enseñanza: El caso de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas UIS *

Autor: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar y Johan Smith Salazar Giraldo**

Palabras Clave: MTSK, Cálculo Diferencial, enseñanza, conocimiento especializado, formación inicial.

Descripción:
Esta investigación tuvo como objetivo diseñar un instrumento que caracterice el conocimiento especializado de las temáticas: función, límite y derivadas, y su enseñanza a partir de situaciones y capsulas de aprendizaje para fortalecer falencias en la formación de los estudiantes de licenciatura en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander tomando como referente teórico el modelo MTSK. La problemática central radica en la desconexión observada entre el conocimiento disciplinar y el didáctico durante la formación inicial, evidenciando una enseñanza mecánica y tradicional del Cálculo Diferencial. El trabajo de investigación se desarrolló mediante la metodología del Seminario Alemán y con un enfoque cualitativo. Este proceso reflexivo permitió la construcción colectiva mediante roles rotativos de relator, correlator y protocolante, en los cuales se tuvo una participación de nueve sesiones que documentan la evolución del estudio. Con el fin de lograr este propósito, se construyó un instrumento compuesto por nueve ítems basados en situaciones problema que integra el análisis de distractores y la creación de capsulas de aprendizaje orientadas a mitigar falencias conceptuales y didácticas. Los resultados revelan la necesidad de articular con mayor fuerza el conocimiento disciplinar con el didáctico, destacando que el instrumento permite identificar no solo la compresión de objetos matemáticos sino también la interpretación de registros de representación, el análisis de procedimientos y la reflexión sobre estrategias de enseñanza.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Jenny Patricia Acevedo Rincón. Doctora en Educación.

Abstract

Title: Specialized knowledge in Differential Calculus and its teaching: The case of the UIS Mathematics Bachelor's students*

Author(s): Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar y Johan Smith Salazar Giraldo**

Key Words: MTSK, Differential Calculus, teaching, specialized knowledge, initial education.

Description:
This research aimed to design an instrument to characterize the specialized knowledge of the topics of functions, limits, and derivatives, and their teaching through problem situation and learning capsules to address weaknesses in the training of Mathematics Education students at the Industrial University of Santander, using the MTSK model as a theoretical framework. The central problem lies in the observed disconnect between disciplinary and didactic knowledge during initial training, revealing a mechanical and traditional approach to teaching differential calculus. The research was conducted using the German Seminar methodology and a qualitative approach. This reflective process facilitated collective construction through rotating roles of rapporteur, correlator, and recorder, with participation in nine sessions that document the evolution of the study. To achieve this objective, an instrument was developed consisting of nine items based on problem situations that integrate distractor analysis and the creation of learning modules designed to mitigate conceptual and pedagogical deficiencies. The results reveal the need to more strongly link disciplinary and didactic knowledge, highlighting that the instrument allows the identification not only of the understanding of mathematical objects but also the interpretation of representation records, the analysis of procedures, and reflection on teaching strategies.

* Thesis

**Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor's Degree in Mathematics. Director: Jenny Patricia Acevedo Rincón. Doctor of Education.

Introducción

En el ámbito educativo suele asumirse que un buen profesor es aquel que domina plenamente los contenidos de su asignatura. Sin embargo, como señala Shulman (1986), el conocimiento disciplinar y el pedagógico no deben entenderse como dominios separados, sino como componentes integrados del saber enseñar. Esto implica que una buena calidad de la enseñanza no solo depende de que el docente tenga total dominio de los conocimientos, sino de la habilidad que posee para acoplar dichos dominios con unas estrategias de enseñanza las cuales sean significativas y accesibles para los estudiantes, lo cual influirá positivamente en el aprendizaje de los estudiantes De esta manera, surge la necesidad de contar con un instrumento que permita caracterizar a los docentes y analizar si relacionan efectivamente estos dos componentes en su práctica.

En la Universidad Industrial de Santander, el curso de Cálculo Diferencial se considera un espacio donde los estudiantes suelen enfrentar desafíos de aprendizaje, que podrían estar relacionados con la manera en que se implementan las estrategias de enseñanza. Esta situación evidencia la importancia de explorar cómo los docentes articulan sus conocimientos disciplinario y pedagógico para facilitar la comprensión de los contenidos. Por lo anterior, esta investigación se organiza en cinco capítulos. En el primero se presentará el planteamiento del problema y su justificación, en la cual se generó el cuestionamiento sobre las dificultades para abordar la enseñanza en cursos de Cálculo Diferencial en la Universidad Industrial de Santander con estudiantes de los últimos semestres de la Licenciatura en Matemáticas.

Posteriormente, en un segundo capítulo, se propone fundamentar la investigación bajo el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) que constituye una herramienta teórica y metodológica pertinente para el desarrollo del estudio, pues permite evaluar de manera integral tanto el conocimiento matemático como el conocimiento didáctico del profesor.

En un tercer capítulo, como metodología empleada por el estudio se plantea la elaboración de un instrumento en el marco de un seminario de investigación con enfoque cualitativo, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento especializado de los estudiantes de últimos semestres frente a los conocimientos disciplinares correspondientes al Cálculo Diferencial y su enseñanza. Para dicho instrumento se diseñarán cápsulas o ítems orientados a valorar diversos aspectos del desempeño docente en formación. Por último, en los capítulos cuatro y cinco se presentarán las respectivas actas y los ítems construidos y validados, finalizando la investigación con conclusiones derivadas de los resultados para proponer nuevos caminos de investigación.

1. El problema de Investigación

El presente capítulo aborda el problema de investigación que da origen al estudio, en él se expone el contexto en el que surge la problemática, los factores y la relevancia de indagar en torno a ella. Con este análisis se busca delimitar con claridad la situación objeto de estudio y sentar las bases para la formulación de los objetivos y el desarrollo metodológico de la investigación.

1.1. Planteamiento del problema

El Cálculo Diferencial es un punto de partida en la formación universitaria para asignaturas como Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables y Ecuaciones Diferenciales, ya que en este punto se permite modelar diversos fenómenos de cambio de diferentes disciplinas (Cantoral y Reséndiz, 2003). Sin embargo, las investigaciones en Educación Matemática destacan que los estudiantes presentan grandes dificultades en la comprensión de los conceptos centrales del Cálculo Diferencial (Artigue, 1995; Fiallo y Parada, 2014). Esto ha generado que los estudiantes asuman el cálculo como unos procedimientos mecánicos sin establecer conexiones entre conceptos y sus aplicaciones. Artigue (1998) señala que las falencias en la enseñanza del cálculo se centran en la poca didáctica que permite reconocer estas dificultades epistemológicas y cognitivas que enfrentas los estudiantes. En consecuencia, estos tienden a mecanizar los procedimientos sin reconocer un significado profundo, como se prioriza en las prácticas de enseñanza tradicional (Artigue, 1995).

Las concepciones con las que llegan los estudiantes a la universidad suelen ser a veces correctas, parciales o incorrectas, estas influyen directamente en cómo afrontan el cálculo diferencial en la universidad (Guarin, 2018). Desde los Lineamientos Curriculares de

Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) y los principios y estándares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) enfatizan en la necesidad de desarrollar procesos de pensamiento matemático (modelación, la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación y la ejercitación de procedimientos). Sin embargo, Cantoral y Reséndiz (2003) señala que en la práctica escolar suele privilegiarse la enseñanza de procedimientos numéricos y algebraicos, dejando en segundo plano la construcción de significados conceptuales. Estas dinámicas escolares que, posiblemente obedezcan a la falta de desarrollo de procesos en edades tempranas, que se mantienen y en su transición hacia la escolaridad de Básica Secundaria a la Media, y posteriormente, a la vida universitaria (Sánchez, 2023).

En ese sentido, la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial ha tenido muchas dificultades en la comprensión conceptual y también en los procedimientos. Según Barringer, Pohlman y Robinson (2010) mencionan que el desarrollar pensamiento memorístico podría influir en la compresión de los conceptos matemáticos y en la capacidad de resolver problemas. Frente a esto, Cantoral y Reséndiz (2003) señala que los estudiantes tienen la idea del cálculo diferencial como un conjunto de reglas operativas, pero sin la articulación del pensamiento variacional ni con el potencial para la modelación de fenómenos de la vida diaria.

En particular, la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS) presenta en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas la asignatura Cálculo Diferencial como asignatura básica, evidenciando que es un fundamento esencial en la formación inicial de los Licenciados en Matemáticas de la UIS, ya que en este punto el proceso de modelación, razonamiento y resolución de problemas se nutre de más información y también se fortalece el pensamiento variacional en el análisis riguroso de funciones (Artigue, 1995). Según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas del MEN (1998), la *modelación* se entiende como la creación de representaciones mentales, gráficas o simbólicas que le permitan al estudiante formular conjeturas y avanzar en razonamientos y demostraciones. También presenta el proceso de *formulación y resolución de problemas*, involucra plantear, analizar y resolver situaciones problemas, verificando, interpretando y generalizando resultados. El *razonamiento* lo define como la evaluación de argumentos y demostración, que evoluciona desde el uso de relaciones intuitivas hasta la construcción de demostraciones formales. Por otra parte, el *pensamiento variacional* plantea que el estudiante comprenda y represente fenómenos de cambio mediante funciones, variables, modelos y sistemas analíticos. A partir de este conjunto de procesos esenciales en la formación matemática escolar y a su vez son las bases para abordar el Cálculo Diferencial en la Educación Superior (Cantoral y Reséndiz, 2003).

Por lo anterior, en este seminario de investigación, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características del conocimiento didáctico y matemático pueden caracterizarse mediante el diseño de un instrumento que evalúa los conceptos en Cálculo Diferencial y su enseñanza para la formación de futuros profesores de matemáticas de la UIS?

1.2. Justificación

En los inicios de la formación docente encontramos que existe una relación que pasa, en muchas ocasiones, de desapercibida. Es la relación que existe entre las competencias matemáticas o saber que tiene el docente sobre su área y los saberes pedagógicos o prácticas que implementa en el ejercicio de la enseñanza. Frente a esto Moura (2011) expresa que “saberes específicos y saberes pedagógicos deberán constituir, necesariamente, las dos caras de una misma moneda” (p. 56). Esto nos advierte que ambos deben recorrer el mismo camino para que tanto el docente, en su papel de guía del conocimiento, como los estudiantes, receptores y partícipes activos, se apropien correctamente de los saberes que se comparten.

Es así como, una vez reconocida esta correspondencia entre el saber matemático y los procesos de acción que se llevan en el aula, se hace ineludible comprender como se desarrollan y llevan a cabo estos procesos de formación en los futuros docentes de la Licenciatura en Matemáticas de la UIS, para tratar de minimizar los obstáculos que encuentran los docentes en el camino a su profesionalización. Algunas investigaciones (Moura, 2011; Vergara & Mardones, 2014; Tellermo, 2024) abordan este tema e intentan dar claridad del por qué aún en las prácticas de aula se enfatiza el saber matemático sobre el pedagógico. Lo que implica que “los futuros docentes tienen un buen conocimiento del contenido (CK), así como un buen conocimiento tecnológico (TK). Sin embargo, aparecen más problemas cuando entra en juego la componente pedagógica y, en particular, las interrelaciones entre ellas” (Arnal & Oller, 2017, p. 152).

Por lo anterior se hace crucial buscar alternativas que generen cambios y propongan soluciones a dicha desconexión. Profundizando esto en la Educación Superior, específicamente en asignaturas de niveles básicos o iniciales como lo es el Cálculo Diferencial. Una de las asignaturas que lleva un gran peso por ser aquella que abren el camino para la formalización y el acercamiento a una matemática más compleja, y, en algunos casos permite avanzar en la Educación Superior. Si bien los cambios requeridos no se pueden hacer como una secuencia obligatoria de pasos, dado que si se realiza de esta manera se limita tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo de los procesos formativos, pero si es posible plantear una manera para generar conciencia y crítica a la formalización de competencias matemáticas y pedagógicas.

En este contexto, la enseñanza del Cálculo, en particular, se enfrenta a esta desconexión de saberes. A menudo, se aborda de forma tradicional y mecánica, siguiendo una estructura rígida, pues "los cursos de cálculo se inician con enunciados, teoremas y problemas estándar, los cuales tienen como finalidad ilustrar los conceptos expuestos. El énfasis se da al manejo algebraico, más que a lo visual y lo geométrico" (Fonseca & Alfaro, 2018, p. 6). Esto implica que se está dando un mayor enfoque al aspecto puramente matemático, pues se promueve en mayores medidas la manipulación de fórmulas, el aprendizaje de teoremas y la mecanización de procedimientos; dejando a un lado las representaciones, cuyo aporte en el estudiante marca la diferencia al permitir comprender los conceptos abstractos de manera más intuitiva y profunda.

Por lo anterior se hace necesario buscar teorías, métodos o modelos que permitan examinar y comprender las dimensiones que forman el conocimiento del docente, teniendo como eje principal el dominio matemático y el dominio didáctico del contenido. Es por ello, por lo que el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas se perfila como una opción sobresaliente para dar respuestas a esta desconexión de saberes. Así, el futuro profesor además de dominar los conceptos del Cálculo Diferencial deberá desarrollar un conocimiento especializado que le permita organizar, seleccionar y representar los temas de forma apropiada, que, además, se anticipe a los obstáculos que se puedan presentar y, que, por tanto, modele situaciones problema que promuevan habilidades y competencias importantes.

En consecuencia, esta investigación se justifica en la necesidad de contar con herramientas que permitan evaluar de manera integral el conocimiento didáctico y matemático de los futuros docentes, en particular en la asignatura de Cálculo Diferencial. Si bien se habla de la importancia de conectar en los procesos de formación inicial docente de manera fluida el dominio del contenido con su enseñanza, aún se presentan vacíos en cuanto a instrumentos que posibiliten valorar dicha conexión de forma sistemática. Por lo tanto, el diseño de un instrumento enfocado en el modelo MTSK se constituye como un aporte relevante, pues permitirá identificar fortalezas y debilidades de los docentes en formación en relación con el conocimiento matemático y su didáctica. Asimismo, este tipo de herramientas puede contribuir a orientar procesos formativos más coherentes que favorezcan el desarrollo de prácticas de enseñanza que trasciendan lo procedimental y promuevan una comprensión más profunda del Calculo Diferencial. De esta manera, la investigación no solo aporta al campo de la evaluación del conocimiento docente, sino también al fortalecimiento de la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad Industrial de Santander.

1.3. Objetivos

El objetivo general de la investigación es: Diseñar un instrumento que caracterice el conocimiento especializado de las temáticas: función, límites y derivadas, y su enseñanza a partir de situaciones y cápsulas de aprendizaje para fortalecer falencias en la formación de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Para lo cual se pretende alcanzar los siguientes objetivos específicos:

- Formular situaciones para el instrumento que permitan identificar el conocimiento sobre las temáticas: función, límites y derivadas y su enseñanza a partir de las categorías del modelo MTSK.

- Identificar los ejes de formación didáctica y disciplinar de los futuros profesores, frente a las temáticas: función, límites y derivadas, a partir del análisis del instrumento planteado para la formación de profesores en Licenciatura en Matemáticas.
- Estructurar cápsulas de aprendizaje orientadas a fortalecer las falencias presentadas por los futuros profesores en relación con la enseñanza de las temáticas: función, límites y derivadas.

2. Referentes teóricos y conceptuales

En el marco de esta investigación es indispensable realizar una exploración de los estudios previos, que permiten obtener información relevante frente a la problemática planteada brindando soportes teóricos. Teniendo en cuenta que reportes en las investigaciones educativas demuestran el creciente interés en temas relacionados con la formación inicial del docente de matemáticas especialmente en lo referente al conocimiento especializado que se necesita para enseñar contenidos complejos en asignaturas como el Cálculo Diferencial. La revisión se centró en investigaciones que emplean el MTSK, dado que este permite comprender y estructurar los conocimientos que movilizan los docentes, tanto en el plano matemático como en el pedagógico consolidándose, así como una herramienta teórica y metodológica que caracteriza la matemática y su enseñanza.

Si bien se observan numerosas investigaciones sobre la enseñanza del Cálculo y su gran diversidad de temas, los estudios revisados para este trabajo se enmarcan específicamente en la enseñanza de conceptos fundamentes y propios del Calculo Diferencial como: *funciones*, *límites y derivadas.* Dichos conceptos se abordarán ya sea desde particularidades o generalidades como lo es la interpretación, representación o tipología. Dado que estos contenidos resultan siendo pilares en el aprendizaje de esta asignatura y, al mismo tiempo, son aquellos que representan una mayor dificultad tanto para los estudiantes que en algún momento los estudiaron como para aquellos que los están viendo por primera vez, sin dejar de lado también los retos para quienes los enseñan.

2.1. Antecedentes

Investigaciones recientes sobre el modelo MTSK (Slabý et al., 2022; Afanador, 2023; Advíncula et al., 2024) han demostrado su utilidad para comunicar, comprender y estructurar los conceptos matemáticos en los futuros docentes; además de identificar dificultades y aciertos en su proceso didáctico. Por consiguiente, el modelo posibilita la progresión en el entendimiento del conocimiento especializado del docente y en la búsqueda de estrategias que favorezcan su formación integral.

En esa misma línea, se han diseñado distintos instrumentos para caracterizar el conocimiento del docente alrededor de temas puntuales de la matemática escolar. Por ejemplo, el *Teacher Education Study in Mathematics* (TEDS-M) un estudio internacional que analiza entre algunos aspectos el conocimiento matemático y didáctico de los futuros docentes, en términos de contenido y pedagogía, utilizando como instrumento una encuesta. Sin embargo, son aún escasos aquellos centrados en el Cálculo Diferencial como objeto de estudio en la formación de licenciados. En este sentido, se evidencia la necesidad de crear propuestas que integren tanto la caracterización del conocimiento especializado como recursos didácticos innovadores que apoyen la enseñanza de este campo.

Pese a ello, durante los últimos años algunas investigaciones analizan el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, particularmente en torno al Cálculo Diferencial y su enseñanza. Estas investigaciones aportan elementos valiosos para comprender las dinámicas de movilización, identificación y caracterización del conocimiento docente, así como para fundamentar la pertinencia de diseñar instrumentos que fortalezcan la formación inicial de los futuros Licenciados en Matemáticas.

El dominio disciplinar en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral con profesores universitarios en Brasil que se moviliza en un estudio de aula (Richit et al., 2022), donde un trabajo con ocho docentes de instituciones de educación superior y un estudiante de licenciatura en matemáticas, participaron en doce sesiones semanales alrededor del tema “máximos y mínimos”. Los resultados revelaron que el dispositivo de *lesson study* beneficio al análisis, comprensión y profundización de conocimientos específicos de la matemática y su fortalecimiento en las habilidades pedagógicas y la misión de formar futuros profesores. Es relevante mencionar que el trabajo colaborativo y reflexivo como estrategia para el desarrollo profesional docente permite desarrollar situaciones estructuradas que puede contribuir en caracterizar y fortalecer el conocimiento especializado (Richit et al., 2022). Como instrumentos, dicha investigación utiliza observaciones, análisis de sesiones colaborativas y entrevistas, permitiendo identificar la forma en que los profesores estructuran su enseñanza, así como los aprendizajes que emergen de la reflexión conjunta, instrumentos de gran alcance para este proyecto.

En otro contexto, con un docente de educación secundaria se documentó un estudio de caso que se focalizo en cómo se aprende y entiende el límite de una función. El objetivo fue describir el conocimiento especializado que el docente exhibe al conjeturar el desempeño que demuestran en tareas relacionadas con el límite los estudiantes. Se encontró que el profesor anticipó correctamente ciertas complicaciones en el registro gráfico (como la percepción de la aproximación de una sucesión), aunque no en el numérico, evidenciando así el uso del subdominio Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) del modelo MTSK.

El estudio concluye que la capacidad de interpretar y anticipar las producciones de los estudiantes es fundamental para la práctica docente, ya que permite diseñar actividades más ajustadas a las necesidades reales del aula (De Los Reyes et al., 2025). Los instrumentos utilizados fueron actividades matemáticas específicas sobre límite y una entrevista semiestructurada, lo que constituye una referencia directa para nuestro proyecto en el marco de la investigación, en tanto se busca también generar instrumentos que permitan identificar fortalezas y falencias en la comprensión de conceptos centrales del Cálculo Diferencial

Por su parte, en España se desarrollado un estudio con dos docentes del área de matemáticas que analizó el conocimiento especializado e interdisciplinario que manifiestan al implementar una actividad STEAM basada en la función logística con el apoyo de GeoGebra (Martín et al., 2025). El trabajo tuvo como propósito identificar la articulación del conocimiento matemático y didáctico con otras disciplinas al abordar fenómenos reales como la evolución de epidemias. Los resultados muestran que el modelo MTSK es útil para entender la complejidad del conocimiento docente en entornos interdisciplinares, sobre todo en categorías vinculadas con la contextualización y la integración tecnológica.

Asimismo, se concluyó la importancia de que los docentes tengan una formación sólida en conocimientos técnicos y didácticos, además de habilidades para integrar distintas disciplinas y favorecer un pensamiento creativo y flexible en el aula, sin dejar de lado los recursos tecnológicos que permiten a los docentes activar conocimientos especializados relacionados con la representación y el análisis de fenómenos complejos (Martín et al., 2025).

El modelo MTSK constituye un marco robusto para analizar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas, tanto en formación inicial como en ejercicio.

Estas investigaciones también muestran una clara preferencia metodológica por los estudios cualitativos de caso y en aula, en los cuales los instrumentos más utilizados son tareas matemáticas contextualizadas, entrevistas semiestructuradas y registros audiovisuales. Además, los hallazgos ponen de relieve la importancia de comprender la anticipación de dificultades, interpretación de respuestas de los estudiantes y movilización de distintos tipos de saberes en la enseñanza del Cálculo Diferencial. No obstante, si bien se reconocen avances en la caracterización del conocimiento especializado, aún se requieren instrumentos más específicos y directamente aplicados al Cálculo Diferencial.

Asimismo, estas investigaciones resaltan la necesidad de promover situaciones de aprendizaje colaborativas, fortalecer la anticipación de dificultades en los estudiantes y favorecer la integración de recursos tecnológicos e interdisciplinares. De ahí que la presente investigación se proponga el diseño de un instrumento que no solo caracteriza el conocimiento especializado en Cálculo Diferencial, sino que también se complemente con situaciones y cápsulas de aprendizaje orientadas a fortalecer las falencias detectadas en la formación inicial de los Licenciados en Matemáticas.

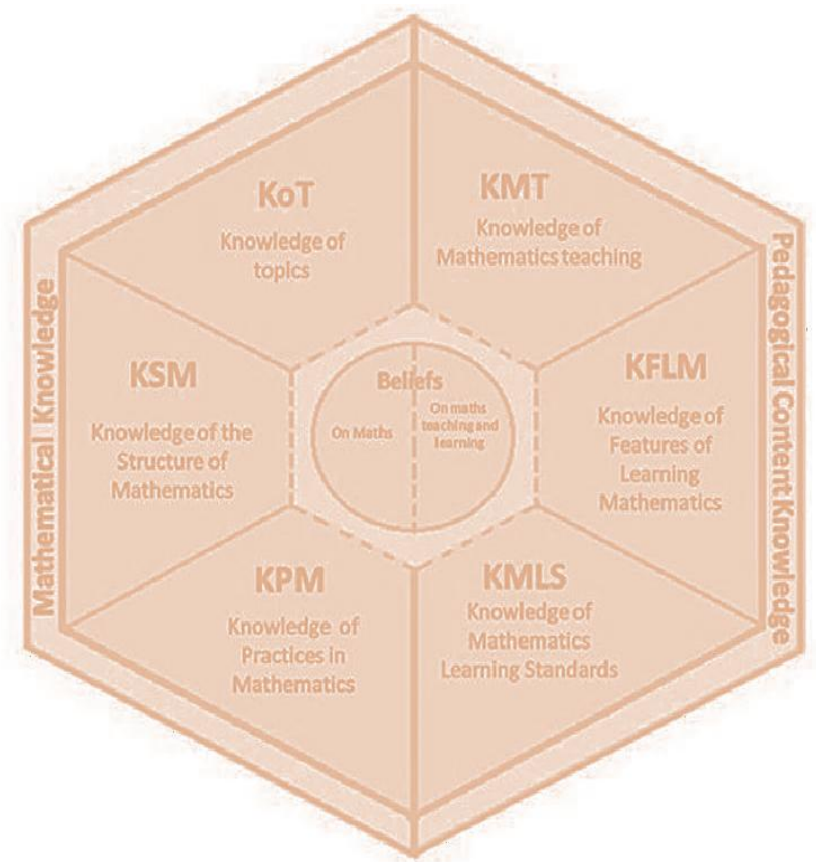
2.2. Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) es un marco teórico desarrollado por Carrillo et al. (2018), que se basa en el modelo propuesto por Shulman sobre el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), que detalla el conocimiento especializado que necesitan los profesores de matemáticas para enseñar esta disciplina de forma eficaz. La idea central es que enseñar matemáticas no requiere solo saber matemáticas, sino contar con un conocimiento especializado propio de los profesores de matemáticas. El modelo MTSK (Figura

1) se plantea en dos grandes dominios: *Mathematical Knowledge* (MK) y *Pedagogical Content Knowledge* (PCK).

Figura 1

Modelo MTSK



Nota. Esquema del modelo MTSK tomado (Carrillo et al., 2018).

El dominio *Conocimiento Matemático* (MK, por sus siglas en inglés), hace referencia al conocimiento matemático que debe poseer el profesor de matemáticas para enseñar, Según Meléndez et al. (2023) se refiere “conocimiento movilizado a partir de su formación y experiencia en el campo de la enseñanza de las matemáticas” (p. 197). Este conocimiento es diferente al que tiene un matemático puro, puesto que, no es suficiente con “saber hacer” matemáticas, sino que el profesor requiere entenderlas de una forma más amplia, flexible y conectada, permitiendo así explicarlas y justificar los procedimientos que se realizan, además del anticipar las posibles dificultade o interrogantes inesperados de los estudiantes. Dentro de este dominio se identifican tres subdominios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) y, por último, *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

El subdominio KoT comprende los saberes específicos de cada contenido matemático, este incluye varias categorías como lo son: la fenomenología, que se refiere a las situaciones cotidianas o contextos dentro de la matemática donde el tema puede ser aplicado o encontrado. Las definiciones, propiedades y fundamentos que abarcan el conocimiento formal del tema, pues un docente debe conocer las definiciones propias del campo de estudio, las propiedades clave, los teoremas y los fundamentos matemáticos que subyacen a esos conceptos, además de las representaciones que va a utilizar para conectar los diferentes conceptos matemáticos. Por último, se tiene el registro histórico-epistemológico, donde el docente conoce el origen y la evolución de un tema a lo largo del tiempo, permitiendo así transitar de lo antiguo a lo moderno.

El KSM es la comprensión que ostenta un docente sobre las conexiones y relaciones entre distintos conceptos matemáticos, no se limita al conocimiento de un tema individual, sino que abarca más allá, es la visión de cómo esos temas se conectan para formar un todo coherente. Un docente que comprende este subdominio es capaz de relacionar un tema actual con temas que fueron vistos en cursos anteriores y que se conectan con temas que verán en el futuro. Un punto importante en este subdominio es el hecho que le da al profesor esa capacidad de moverse entre los diferentes niveles de abstracción (concreto, pictórico o gráfico, simbólico, estructural y teórico), logrando con esto simplificar un concepto complejo y llevarlo a algo básico.

Para finalizar con los subdominios del MK, se encuentra el KPM. Este hace referencia al conocimiento que tiene el docente sobre las formas de hacer matemáticas y de fomentar en sus estudiantes la construcción activa de este saber. El KPM abarca más que el hecho de dominar el contenido KoT o comprender la estructura de los conceptos KSM, pues se centra en los procesos, métodos y hábitos propios de la práctica matemática que permiten generar y validar conocimiento. Se aclara que si bien un profesor debe conocer los algoritmos y procedimientos básicos (parte del KoT), el KPM resalta la importancia de comprender y transmitir la justificación y las implicaciones de dichos algoritmos.

Es así como el docente reconoce y maneja diversos métodos de prueba matemática (como la inducción, la reducción al absurdo, etc.) y sabe cómo dirigir a sus estudiantes en la construcción de argumentos lógicos y rigurosos propios del nivel en el que se encuentra el estudiante. Por último, el KPM incluye el dominio del lenguaje y de las notaciones matemáticas, no se trata únicamente de conocer el significado de un símbolo, sino también de comprender por qué se emplea, cómo se interpreta y de qué manera ha evolucionado en distintos contextos matemáticos.

Por otra parte, el dominio Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK**),** se describe como "La combinación de contenido y pedagogía para comprender cómo se organizan, representan y adaptan determinados temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes, y se presentan para su instrucción" (Shulman, p. 8). En general refiere a la integración única de conocimiento que tiene un maestro para transformar un tema de la asignatura en una forma que lo haga comprensible para los estudiantes. Dentro de este dominio se identifican tres subdominios: *Knowledge of Features of Learning Mathematics*

(KFLM), *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) y *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS).

El subdominio KFLM se centra en el conocimiento que tiene un profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas, implica saber las ideas previas, los errores o dificultades que suelen cometer y las representaciones que pueden resultar más accesibles o confusas. Este dominio se enfoca en la didáctica y la psicología del aprendizaje de las matemáticas. Aquí el docente puede elegir las mejores actividades, preguntas y representaciones para abordar las dificultades de los estudiantes y ayudarlos a construir un conocimiento sólido.

El subdominio KMT, hace referencia a aquellos métodos y decisiones que un profesor toma para beneficiar el aprendizaje de las matemáticas, enfocando en acciones concretas del maestro durante la instrucción. Por ejemplo, para organizar las actividades de aprendizaje de una secuencia lógica para construir el conocimiento y llegar a un resultado eficiente. En adición, el profesor debe saber cuándo y cómo usar recursos tales como material concreto, softwares dinámicos, libros o textos que van a servir de apoyo para que el estudiante comprenda.

Por último, el subdominio KMLS hace referencia al conocimiento que posee sobre los currículos y documentos oficiales que organizan la enseñanza de las matemáticas y su progresión de los temas. En Colombia el KMLS está directamente ligado a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Lineamientos Curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Tabla 1

Categorías asociadas al MTSK

	Subdominios	Categorías asociadas al subdominio	
Conocimiento matemático	**Conocimiento de los tópicos (KoT)**	Procedimientos	*¿cómo se hace?*
			¿cuándo puede hacerse?
			¿por qué se hace así?
			Características del resultado
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	
		Registro de representación	
		Fenomenología y aplicaciones	
		Significados	
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones basadas en el incremento de complejidad	
		Conexiones basadas en la simplificación	
		Conexiones transversales	
		Conexiones auxiliares	
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos	
		Formas de validación y demostración	
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	
		Procesos asociados con resolución de problemas	
		Practicas particulares del quehacer matemático (por ejemplo, modelación)	
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	
Conocimiento didáctico del contenido	**Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)**	Teorías de aprendizaje matemático	
		Fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático	
		Formas de interacción del alumno con un contenido matemático	
		Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	
	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de las matemáticas	
		Recursos didácticos (físicos y digitales)	
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Resultado de aprendizaje esperado	
		Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	
		Secuenciación de los temas	

Nota. *Adaptado de Carrillo, et al., 2018*

2.3. El cálculo diferencial como objeto de estudio y enseñanza

El Cálculo Diferencial se constituye en uno de los ejes fundamentales en la formación matemática universitaria, tanto para programas de ciencias básicas como para carreras de ingeniería y Licenciaturas en Matemáticas (Botello, 2013). En los trabajos de Newton y Leibniz, se ha fortalecido como una herramienta de modelación y análisis de fenómenos en diversas áreas del conocimiento. Más allá de esto, el Cálculo Diferencial mezcla una riqueza conceptual que representa un desafío pedagógico en la enseñanza y aprendizaje (Montes, Cadavid y Fernández, 2021).

Dentro de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial se destacan las funciones, el límite y la derivada. El concepto de función es un pilar esencial en el desarrollo del pensamiento matemático a lo largo de la historia de la humanidad. En su evolución, este ha sido interpretado de diversas maneras, adquiriendo al menos seis significados parciales (Parra, Pino-Fan y Castro, 2019): (i) como correspondencia, (ii) como relación entre magnitudes variables, (iii) como representación gráfica, (iv) como expresión analítica, (v) como correspondencia arbitraria y (vi) como noción fundamental en la teoría de conjuntos. Reconocer estos distintos significados permite comprender la riqueza histórica y conceptual del término, además, resulta esencial para los estudiantes al enfrentarse a diferentes representaciones y usos de la función en su proceso de aprendizaje.

En la enseñanza del concepto de función, es fundamental reflexionar sobre las ideas centrales que estructuran este concepto. En ese sentido, existen cinco ejes centrales esenciales que permiten comprender y trabajar con las funciones:

Noción de función se plantea la unicidad como una característica esencial de toda función, es decir, a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un único valor en el codominio. *Covariación y tasa de cambio* resalta la importancia de concebir las funciones como herramientas para describir la relación entre cantidades que varían mutuamente. Además, enfatiza que la tasa de cambio representa la medida cuantitativa de dicha covariación y construye un criterio clave para determinar el tipo de problema que se desea modelar. *Familias de funciones* se centra en reconocer las propiedades particulares de los distintos tipos de funciones, tales como su dominio y el comportamiento de su tasa de cambio. *Combinación y transformación de funciones* hace referencia a las operaciones que se pueden realizar entre funciones, tales como la suma, resta, multiplicación, división y composición de funciones. También señala la necesidad de identificar las condiciones que deben cumplirse para efectuar de manera correcta cada una de estas operaciones. *Diversas representaciones de las funciones* que subraya la relevancia de comprender que las funciones pueden expresarse de múltiples maneras, algébricas, gráficas, tabular y verbal.

Nota. Adaptado de Cooney, Beckman y Lloyd (2010, citados por Quintero, 2020)

Del mismo modo, se enfatiza que cada representación tiene características propias que la hacen más o menos adecuada según el contexto en que se trabaje. El concepto de limite es fundamental para el Cálculo Diferencial, puesto que permite formalizar el paso de lo finito a lo infinito y presenta detalladamente nociones como la continuidad, la derivada y la integral (Tall, 1992). En ese sentido, el aprendizaje de límite es esencial para comprender el Cálculo Diferencial, pues implica manejar la noción de procesos infinitos (Guarín, 2018). Sin embargo, Hernández, Prada y Ramírez (2017) plantearon que el límite de una función suele enseñarse de manera algebraica, reduciéndolo a la sustitución del valor en la expresión. Esto funciona hasta que aparecen limites factorizables, donde los estudiantes muestran dificultades por su poca habilidad en factorización. Además, propone que podrían evitarse dichos problemas al recurrir a distintos registros de presentación semiótica, partiendo de la idea de aproximación desde ambos lados para asegurar la unicidad del límite.

El concepto de derivada es un elemento esencial en la enseñanza del Cálculo Diferencial, porque es la base para comprender nociones de variación y de cambio en los diferentes fenómenos. Este concepto abarca múltiples dimensiones como la de interpretarse gráficamente como la pendiente de la recta tangente a una curva, analíticamente como el límite del cociente incrementado y también se presenta en un punto o en intervalos según la naturaleza del problema a resolver (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Sin embargo, Pineda (2019) evidenció que los estudiantes reducían el concepto de derivada de funciones a un procedimiento algebraico de aplicación de reglas, limitando la comprensión significativa de la variación y el cambio. Este hecho nos conlleva a incorporar la importancia de diferentes registros de representación y estrategias didácticas que trasciendan la mera manipulación simbólico y permitan al estudiante relacionar la derivada en contextos gráficos, geométricos y de aplicación (Duval, 1999).

Todo lo descrito aquí sobre los conceptos de funciones, límites y derivadas se constituye en referencia para el diseño de las situaciones y cápsulas de aprendizaje para fortalecer las falencias en la formación de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

3. Metodología

La Universidad Industrial de Santander cuenta con varias formas para realizar el trabajo de grado, y una de ellas es el seminario de investigación. Esta modalidad, incluida en el Acuerdo Superior 004 de 2007, se desarrolla como un proceso reflexivo y crítico que busca fortalecer en los estudiantes las habilidades para manejar información, comunicarse y llevar a cabo actividades investigativas. El mencionado acuerdo también señala que el seminario pretende impulsar la creación de trabajos originales sobre un tema concreto, promover tanto el trabajo en grupo como el individual y abrir espacios para explorar nuevas ideas o temas de investigación que sean de interés para los distintos campos del conocimiento (UIS, 2007).

Con base en ello, la investigación se desarrolla bajo la modalidad de seminario alemán, adaptado a un enfoque metodológico cualitativo. Esta elección se justifica porque dicho formato favorece la discusión académica, la construcción colectiva del conocimiento y la formación en investigación desde una perspectiva participativa.

Este capítulo se organiza en cuatro apartados principales. En el primero se abordan las generalidades, características del seminario alemán. El segundo presenta los roles y sus funciones asignadas a los participantes del seminario. En el tercero se describe la estructura del seminario, la organización de las sesiones. Finalmente, el cuarto apartado muestra el contenido trabajado en el seminario.

3.1. El seminario alemán

El seminario alemán surge hacia finales del siglo XVIII, como una alternativa a las clases tradicionales. Su propósito central fue ofrecer un espacio académico en el que los estudiantes y profesores pudieran interactuar de manera más activa, generando un ambiente de formación investigativa basado en el diálogo y la cooperación. A diferencia de la transmisión de información, esta modalidad se fundamenta en la construcción colectiva del conocimiento a partir de la lectura, el análisis crítico y la discusión de un tema específico.

Entre sus objetivos principales se encuentran fomentar la capacidad investigativa de los participantes, fortalecer el pensamiento crítico y desarrollar habilidades comunicativas que permitan argumentar y sustentar ideas frente a un grupo.

Las características principales del seminario alemán son la participación de todos los integrantes, la organización en roles establecidos como relator, correlator y protocolante y la centralidad de la discusión como motor del aprendizaje. De esta manera, el estudiante asume un papel protagónico, mientras que el director del trabajo de grado actúa como orientador del proceso. Entre sus ventajas se destacan la posibilidad de aprender a partir de múltiples perspectivas y la preparación para la práctica investigativa. Por otra parte, algunas desventajas pueden encontrarse en la necesidad de un alto nivel de compromiso por parte de los participantes y en la dificultad de coordinar adecuadamente las intervenciones cuando el grupo es numeroso.

3.2. Desempeño de roles

Durante el seminario Alemán se asignan distintos roles que orientan la dinámica investigativa y se distribuyen responsabilidades de manera equitativa; para garantizar que todos los participantes adquieran experiencias diversas, y estos rotan estos papeles a lo largo de las sesiones.

Tabla 2

Aporte de los roles en la formación integral de los participantes

Rol	Aporte
Relator	El rol de relator favorece el desarrollo de habilidades tales como: • Buscar, elegir y organizar la información que se necesita. • Explicarse bien frente a los demás y saber hablar en público. • Resumir lo más importante y dar su propia opinión. • Aceptar las críticas del grupo y aprender de ellas, lo que ayuda a crecer como persona y estudiante.
Correlator	El correlator permite mejorar en: • Escuchar con atención y concentrarse en lo que se dice. • Dar opiniones con respeto y sentido crítico. • Evaluar cómo se explica el tema, si se entiende bien y si logra convencer o motivar al grupo.
Protocolante	El protocolante desarrolla habilidades como: • Identificar lo más importante de lo hablado en la sesión. • Escribir los momentos más relevantes y las ideas principales. • Dejar un registro o memoria del trabajo hecho durante el seminario.
Participantes	Los participantes del seminario aprenden a: • Revisar qué tanto conocen sobre el tema. • Dialogar, compartir ideas, trabajar con otros y respetar las opiniones distintas. • Saber cuándo y cómo participar, organizar lo que van a decir y escuchar con interés lo que opinan los demás.

Nota. Adaptado de Bravo salinas (1997, citado de UIS 2007).

El primer rol corresponde al relator, cuya función es presentar los avances construidos y defender los ítems elaborados con su respectiva cápsula de aprendizaje diseñada para enriquecer el proceso, argumentando sus fundamentos teóricos y su pertinencia didáctica. El segundo rol es el del *correlator*, quien actúa como contraparte crítica, analizando la coherencia de la propuesta, señalando sus limitaciones y aportando sugerencias que contribuyan a su mejoramiento. Por último, el *protocolante* asume la tarea de sistematizar cada sesión, elaborando un registro escrito en el que se consignan la exposición, los comentarios de los asistentes y los acuerdos alcanzados.

La interacción entre estos roles no solo organiza el trabajo, sino que también fortalece la formación investigativa al promover la argumentación, la crítica constructiva y la capacidad de síntesis, competencias indispensables en el ejercicio académico.

El seminario de investigación plantea el rol de participantes, este rol no se tendrá en cuenta para la repartición con los integrantes del seminario.

3.3. Organización del seminario

El seminario se desarrollará en un total de nueve sesiones, cada una con una duración aproximada de una hora. La planificación de estos encuentros busca asegurar un ritmo de trabajo constante y un proceso de construcción progresiva, en el que cada sesión contribuya de manera significativa al avance del proyecto y al fortalecimiento de las competencias investigativas de los participantes.

Para garantizar el orden y la buena realización del proceso, cada sesión se organiza en seis momentos sucesivos: apertura de la sesión, lectura del protocolo, relatoría, correlatoría, discusión y conclusión. Esta estructura no solo delimita las fases de inicio, desarrollo y cierre del trabajo, sino que también distribuye de manera equitativa las responsabilidades entre los roles anteriormente mencionados.

Cada momento cumple un propósito específico. La apertura permite verificar la asistencia, revisar el plan de trabajo y recordar los roles para la sesión actual y la siguiente. La lectura del protocolo otorga continuidad al proceso mediante la presentación del registro anterior y la resolución de dudas. La relatoría, a cargo del estudiante responsable, expone los avances los materiales de apoyo construidos. Seguidamente, la correlatoría somete esos avances a un análisis crítico que busca resaltar fortalezas y señalar aspectos por mejorar. Posteriormente, la discusión abre un espacio de intercambio colectivo que enriquece las propuestas con la participación de todos los integrantes. Finalmente, la conclusión consolida los aprendizajes alcanzados, fija los acuerdos y deja escrito las tareas para el siguiente encuentro.

Tabla 3

Desarrollo de una sesión del Seminario de Investigación

Actividad		Descripción	Responsable
1	Apertura de la sesión	Se revisa el plan de trabajo y se pasa lista para verificar la asistencia. Se confirman o asignan los roles de cada participante y se recuerdan los encargados para la próxima reunión.	Profesor (Directora)
2	Lectura del protocolo	El protocolante lee el registro anterior. Se abre un espacio para hacer preguntas o aclarar dudas sobre el contenido del protocolo. Los cambios o correcciones que se propongan quedarán escritos en el próximo documento.	Protocolante
3	Relatoría	El relator presenta el tema preparado y entrega su trabajo escrito.	Relator
4	Correlatoría	El correlator complementa y analiza la exposición del relator. Además, guía al grupo para iniciar la discusión.	Correlator
5	Discusión	Los participantes hacen preguntas, aportes o comentarios sobre el tema tratado. Se valora el dominio del tema y la claridad del relator.	Todos los participantes

6	Conclusión	Se evalúa cómo se desarrolló la sesión. Se elabora un resumen del trabajo y se redacta el nuevo protocolo. Finalmente, se aprueba el contenido del protocolo y la síntesis del encuentro.	Participantes Directora Protocolante

Nota. Adaptado de Bravo Salinas (1997, citado de UIS 2007).

Con el fin de asegurar una participación equitativa y la rotación de responsabilidades, se estableció un plan detallado que asigna a cada estudiante los diferentes roles de relator, correlator y protocolante a lo largo de las nueve sesiones programadas. Esta distribución busca que todos los integrantes experimenten cada función, desarrollen competencias diversas y contribuyan de manera igualada al proceso investigativo. Se muestra la organización de las sesiones (Tabla 4), indicando quién asume cada rol en cada encuentro y precisando el tema correspondiente. Esta planificación permite anticipar las responsabilidades de los participantes, garantizar la continuidad metodológica y promover un trabajo colaborativo estructurado.

Tabla 4

Organización de las sesiones del seminario

Sesión	Relator	Protocolante	Correlator	Tema
1	Diego Santiago	Anamaría Rodríguez	Johan Salazar	Limites (ítem 1)
2	Anamaría Rodríguez	Johan Salazar	Diego Santiago	Derivadas (ítem 1)
3	Johan Salazar	Diego Santiago	Anamaría Rodríguez	Funciones (ítem 1)

4	Diego Santiago	Anamaría Rodríguez	Johan Salazar	Limites (ítem 2)
5	Anamaría Rodríguez	Johan Salazar	Diego Santiago	Derivadas (ítem 2)
6	Johan Salazar	Diego Santiago	Anamaría Rodríguez	Funciones (ítem 2)
7	Diego Santiago	Johan Salazar	Anamaría Rodríguez	Limites (ítem 3)
8	Anamaría Rodríguez	Diego Santiago	Johan Salazar	Derivadas (ítem 3)
9	Johan Salazar	Anamaría Rodríguez	Diego Santiago	Funciones (ítem 3)

Nota. La directora estará presente en todas las sesiones y tendrá un rol de segundo correlator y además será la que validará cada ítem.

3.4. El contenido del seminario

Para garantizar el adecuado desarrollo del seminario, se propone una esquematización general compuesta por tres fases: planeación, ejecución y finalización. En la fase de planeación, se definen el tema central, la revisión bibliográfica, la selección de subtemas y la organización detallada de las sesiones. Los ejes temáticos seleccionados para este proyecto corresponden al campo del Cálculo Diferencial, específicamente Funciones, Límites y Derivadas. Cada uno de ellos se desglosará en subtemas que servirán de base para las actividades propuestas en el instrumento.

La estructura planteada tiene como propósito comprender y analizar de qué manera las cápsulas de aprendizaje, diseñadas como parte del instrumento en construcción, permiten valorar aspectos relacionados con el conocimiento especializado de los futuros licenciados en matemáticas de la UIS. Al respecto, Álvarez-Gayou (2003) señala que los seminarios constituyen espacios participativos que promueven la discusión, la crítica fundamentada y la construcción colectiva de saberes, lo cual refuerza la pertinencia de la metodología aquí adoptada.

Figura 2

Esquema metodológico del Seminario de investigación

Nota. Tomado de UIS (2007, p. 9)

Con base en este enfoque, la propuesta busca la validación de ítems que estarán organizados en seis componentes fundamentales: (i) indicadores, (ii) subdominios y categorías del MTSK, (iii) ítem, (iv) análisis de distractores, (v) cápsulas de aprendizaje y (vi) aclaración final, los cuales serán registrados en la ficha propuesta.

En el primer inciso serán mencionados los propósitos o lo que se pretende alcanzar con la realización de los ítems, en el segundo se hará el reconocimiento de los dominios y subdominios que se utilizaran para la realización del ítem, en el tercero se hará referencia al ejercicio con el cual el docente en formación se enfrentará, junto con su respectiva respuesta correcta. En el cuarto inciso se justificará por qué las otras respuestas no eran correctas y cuáles fueron los posibles distractores que pudieron surgir al momento de responder. En el quinto inciso se brindará una orientación y fortalecimiento del tema en cuestión al sujeto evaluado. En el último inciso se harán comentarios finales relacionados con el ítem.

Este seminario busca no solo validar la calidad y pertinencia de las cápsulas de aprendizaje, sino también fomentar en los participantes habilidades investigativas esenciales como la argumentación, la crítica fundamentada y la escritura académica. A través de este proceso, cada cápsula será enriquecida con los aportes colectivos y quedará documentada en protocolos, lo que permitirá consolidar un cuerpo de propuestas coherente y riguroso que alimente la construcción del instrumento final.

4. Ejecución

El presente capítulo detalla el proceso de ejecución de la investigación, el cual se fundamentó en la metodología del Seminario Alemán como espacio crítico de construcción de conocimiento. El desarrollo del seminario se llevó a cabo de manera sistemática mediante sesiones semanales, realizadas los miércoles y viernes del mes de febrero y mes de marzo, contando con la participación de los tres investigadores y la directora del proyecto. En cada encuentro, se asumieron roles específicos tales como relator, correlator y protocolante (tabla 4) para garantizar una discusión estructurada. Los protocolos aquí anexados constituyen la memoria analítica de dicho proceso; en ellos se registra el debate, la nutrición de ideas y las correcciones derivadas del análisis colectivo, permitiendo evidenciar la evolución del instrumento de evaluación y la maduración de los conceptos didáctico-matemáticos abordados en cada sesión.

En este capítulo se encontrará la recopilación organizada y sistemática de los protocolos correspondientes a lo sucedido durante cada una de las sesiones de trabajo.

4.1. Protocolo No. 01

Fecha: 04 febrero de 2026 **Director y correlator:** Jenny Patricia Acevedo Rincón **Relator:** Diego Alonso Santiago Villar **Protocolante:** Anamaría Rodríguez Capera **Participantes:** Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción.

La presente sesión se enmarca en la metodología del Seminario Alemán, con el objetivo primordial de validar y refinar el primer ítem correspondiente al tema de límites. En este espacio, se evalúa desde una perspectiva pedagógica el conocimiento especializado de futuros docentes de matemáticas, tomando como base el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*). La sesión se fundamenta en una situación real detectada por el relator durante tutorías de Cálculo, experiencia de la cual surge la necesidad de explicar y profundizar en la relación intrínseca entre los conceptos de límites y continuidad.

La dinámica de la sesión se llevó a cabo siguiendo un orden riguroso para garantizar el análisis exhaustivo de la propuesta:

- Presentación y lectura del ítem: Se inició con la exposición del ítem y cada uno de sus elementos constitutivos: tema, indicador, ítem propiamente dicho, opciones de respuesta, distractores, cápsula de aprendizaje y aclaraciones complementarias. El problema se centra en una función por partes y la determinación de un parámetro para garantizar su continuidad a través de su relación con los límites.
- Análisis y defensa de dominios y subdominios bajo el modelo MTSK: Una vez leído el ítem, se procedió a verificar si los dominios y subdominios seleccionados (KOT, KSM y KMT) guardaban coherencia con la situación planteada. En esta etapa, el relator defendió la elección de sus categorías, explicando su pertinencia pedagógica, mientras se realizaban correcciones de fondo y forma para precisar la clasificación.
- Debate sobre estrategias pedagógicas y revisión de distractores: Se discutió la efectividad de las representaciones algebraicas frente a las gráficas digitales (software de geometría dinámica como GeoGebra). Posteriormente, se revisaron minuciosamente los distractores para asegurar que estuvieran bien redactados, tuvieran coherencia con el conflicto cognitivo planteado y cumplieran con los criterios de síntesis académica.
- Ajustes de redacción, formalismo y cierre: A lo largo de toda la sesión se realizaron correcciones continuas de escritura, redacción y ortografía. El proceso concluyó con una serie de aclaraciones generales y observaciones finales por parte del director de tesis para consolidar la versión final del ítem.

Tema y desarrollo

El eje temático de la sesión se centró en la validación técnica y pedagógica de un ítem de evaluación diseñado para medir el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), específicamente en lo que respecta a la articulación conceptual entre la continuidad y el límite de funciones.

La fase inicial de la sesión se caracterizó por la presentación formal del ítem por parte del relator. Durante este momento, se realizó una lectura integral de la propuesta sin intervenciones por parte de los participantes, permitiendo una visión global de la estructura diseñada. El relator procedió a desglosar cada uno de los componentes del ítem, incluyendo: el indicador de logro, el planteamiento del problema, la propuesta de subdominios y por último los distractores y sus respectivas justificaciones pedagógicas.

Tras la exposición, la sesión transitó hacia un debate técnico centrado en la clasificación del conocimiento docente. En esta fase, el relator defendió la pertinencia de los subdominios elegidos, con el propósito de verificar la integridad de la tabla de análisis; es decir, asegurar que tanto los subdominios como sus descriptores se ajustaran con precisión a la naturaleza del ítem expuesto. El debate inició con el análisis del subdominio KOT. Al respecto, se determinó que, si bien las descripciones proporcionadas eran conceptualmente correctas, resultaba imperativo realizar los siguientes ajustes: incluir el registro de representación, dado que el ítem moviliza simultáneamente registros gráficos y algebraicos, además ampliar la descripción del dominio del contenido pues se requiere no solo el manejo de la continuidad, sino también un conocimiento profundo de los conceptos de límites. Por último, se omitió la categoría de "significados", por considerar que estos se encuentran implícitos en las definiciones y propiedades ya enunciadas.

Tras concluir la revisión del primer subdominio, el debate se trasladó al Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM). El relator sostuvo inicialmente que la categoría predominante era la de conexiones transversales; no obstante, esta premisa dio lugar a una disertación técnica sobre la naturaleza de los vínculos conceptuales movilizados en el ítem., aquí se aclara que las conexiones auxiliares son relaciones locales y funcionales entre conceptos matemáticos que se apoyan mutuamente dentro de un mismo bloque conceptual o para dar sentido a un objeto específico. Un concepto sirve de soporte para comprender o justificar otro, mientras que las conexiones transversales son relaciones estructurales y organizadoras, que muestran cómo distintos conceptos se articulan para construir una idea matemática más amplia, revelando la coherencia interna de la disciplina.

Como resultado de la deliberación, se optó por una clasificación de conexión auxiliar, aquí uno de los participantes aclara que esta queda mejor pues la continuidad se define a partir del límite. El límite no depende de la continuidad, pero la continuidad sí depende del límite. En este sentido, el límite actúa como un concepto de apoyo para construir y justificar la continuidad. Esto corresponde principalmente a una conexión auxiliar, porque: El límite se usa como herramienta conceptual para entender otro concepto.

Por otra parte, en las funciones por partes la continuidad se analiza punto a punto, especialmente en los puntos de cambio. Para ello se requiere: límite lateral izquierdo y límite lateral derecho, coincidencia de dichos límites y coincidencia con el valor de la función en dicho punto. Aquí no solo se usa un concepto para apoyar a otro, sino que se articulan varios objetos matemáticos (función, límite, continuidad y definición por partes). Esta relación permite comprender cómo se organiza el comportamiento global de una función a partir de definiciones locales. Esto se acerca más a una conexión transversal, porque integra varios conceptos estructurales del análisis y no es solo apoyo, sino articulación de la estructura matemática.

Para concluir el proceso de validación de los subdominios, la discusión se centró en el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT). El relator propuso inicialmente la categoría de Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos como eje vertebrador del ítem. No obstante, tras la intervención dialéctica de los participantes, se determinó la necesidad de robustecer esta clasificación. Se acordó incorporar explícitamente la categoría de recursos didácticos y digitales, dada la presencia protagónica de software de geometría dinámica (GeoGebra) en el diseño del ítem. Esta herramienta no se considera un accesorio, sino un mediador fundamental en la visualización del objeto matemático.

El relator justificó la pertinencia de este subdominio argumentando que la situación planteada emerge de una interacción auténtica en el aula de clase. Se analizaron diversos factores que podrían obstaculizar la comprensión profunda del concepto de continuidad, como la dependencia exclusiva de algoritmos algebraicos o la interpretación errónea de representaciones estáticas. El director de tesis enfatizó que el ítem logra capturar la competencia del docente para movilizar estrategias multimodales. Se subrayó que el propósito no es solo el uso de gráficos, sino la orquestación de diversos medios (algebraicos, numéricos y visuales) para garantizar que la transición conceptual del límite hacia la continuidad sea íntegra y no fragmentada. La dirección reafirmó que la fortaleza del ítem radica en evaluar el uso adecuado y estratégico de los recursos por parte del profesor para resolver conflictos cognitivos en los estudiantes.

Con la validación de los subdominios finalizada, se procedió a una breve deliberación metodológica previa al análisis de los distractores. El debate se centró en la pertinencia y conveniencia de incorporar apoyos visuales dentro del cuerpo del ítem y su respectiva justificación. Se determinó que la inclusión de recursos gráficos es conveniente, siempre que estos actúen como un soporte pedagógico que aclare las ideas expuestas y no como un elemento meramente ornamental. Se enfatizó de manera unánime que cualquier recurso visual, especialmente las capturas de pantalla obtenidas de software de geometría dinámica, debe ser gestionado bajo un estricto rigor académico. Esto implica el cumplimiento de las normas de citación vigentes (APA o similares), otorgando los créditos correspondientes a la autoría del material o a la herramienta de software empleada. Finalmente, se otorgó autonomía al relator para decidir en qué puntos específicos del análisis es necesario integrar capturas de pantalla, priorizando aquellos momentos donde el apoyo gráfico sea determinante para sustentar la validez conceptual de la respuesta correcta o de los distractores.

Tras agotar el debate sobre los recursos visuales, la sesión procedió al escrutinio detallado de los distractores. El relator inició con la lectura del Distractor A. Una vez finalizada la lectura, el equipo evaluador y el director de tesis intervinieron para realizar ajustes de precisión. Estas correcciones no solo se limitaron a la forma, sino que se enfocaron en robustecer la redacción técnica y asegurar el empleo de conectores lógicos que otorgaran mayor cohesión al texto. El objetivo primordial fue garantizar que la idea central (la insuficiencia del método meramente procedimental) quedará expresada con absoluta claridad, evitando ambigüedades pedagógicas. Siguiendo el orden metodológico establecido, se procedió a la lectura y análisis del Distractor C. A diferencia del caso anterior, se determinó de manera unánime que tanto la redacción como la pertinencia conceptual de esta opción de respuesta se encontraban alineadas con los objetivos del ítem. No se identificaron ambigüedades ni errores de cohesión que requirieran intervención.

Los participantes validaron que la estructura del distractor capturaba de forma precisa el conflicto cognitivo planteado, sin necesidad de ajustes gramaticales o de léxico técnico.

Para concluir el apartado de validación de las opciones de respuesta, se sometió a análisis el Distractor D. Este segmento de la sesión fue especialmente enriquecedor, ya que permitió profundizar en la precisión terminológica y en la economía del lenguaje académico. Durante el debate, se determinó que, al hacer referencia al uso de herramientas digitales en la justificación del distractor, es imperativo especificar el software empleado. En este sentido, se acordó mencionar explícitamente a GeoGebra, evitando generalizaciones que puedan restar rigor a la situación de aprendizaje planteada.

Por otro lado, el director enfatizó la importancia de evitar la "sobre explicación". Se identificó una tendencia a reiterar argumentos ya expuestos (la explicación de la explicación), por lo que se procedió a realizar una limpieza editorial. El objetivo fue lograr que el distractor fuera directo, técnico y que comunicara el conflicto cognitivo sin redundancias innecesarias que pudieran confundir al lector. Para finalizar se ajustó la redacción para que el distractor reflejara fielmente el error de confiar exclusivamente en la continuidad visual de la gráfica, omitiendo la validación formal a través del concepto de límite.

Tras la validación de los distractores, la fase final de la sesión se dedicó a la revisión de las cápsulas de aprendizaje y las aclaraciones complementarias, espacio donde el equipo ejecutó un exhaustivo control de calidad gramatical y de estilo con el fin de optimizar la claridad y formalidad del contenido pedagógico. Durante este análisis, se enfatizó el imperativo ético y académico de incluir las citaciones bibliográficas correspondientes en aquellas definiciones o elementos teóricos que no fuesen de autoría propia, garantizando así la trazabilidad de las fuentes.

Para concluir la jornada, el director de tesis realizó una intervención estratégica de balance general, destacando que el ejercicio de someter el ítem al escrutinio colectivo de cuatro revisores permitió identificar sutilezas conceptuales y errores de forma que suelen omitirse en lecturas individuales, valorando este proceso como un "blindaje" académico fundamental frente a futuras evaluaciones de jurados. Finalmente, se resaltó que esta primera sesión fue determinante para que los participantes lograran distinguir con precisión cuándo la intención del ítem recae sobre el conocimiento especializado del docente y cuándo sobre el desempeño del estudiante, estableciendo así un criterio metodológico sólido que servirá como eje rector para las próximas exposiciones y análisis del proyecto.

Conclusiones

Al cierre de la sesión, se puntualizó los siguientes interrogantes y reflexiones clave:

¿Cómo diferenciar el conocimiento procedimental (igualar tramos algebraicamente) del conocimiento conceptual (entender la definición formal de continuidad)?

¿En qué medida el apoyo gráfico de software como GeoGebra es suficiente para validar una demostración matemática sin caer en falacias visuales?

¿Cómo debe responder un docente estratégicamente ante la duda de un estudiante sobre la utilidad de los límites en el cálculo de continuidad?

¿Cómo garantizar que el futuro docente no valide la continuidad únicamente a través de la interpretación gráfica, sino que utilice los límites como la herramienta formal de demostración?

¿De qué manera se puede orientar la enseñanza para que el estudiante comprenda que la igualdad de los tramos en una función por partes es una consecuencia directa de la existencia del límite y no un proceso mecánico de despeje?

Evaluación y Proyección

La sesión se evalúa como un ejercicio de revisión colectiva de alta profundidad. La interacción entre cuatro revisores permite identificar detalles de forma y fondo que pasan desapercibidos en lecturas individuales, fortaleciendo la coherencia del ítem y preparando al relator para la sustentación final. Se destaca la defensa que hizo el relator de sus elecciones de subdominios, lo que permitió aclarar la intención pedagógica del ejercicio. Asimismo, se registraron correcciones transversales en ortografía, redacción y estilo para ajustar el documento a estándares académicos.

Continuidad de la sesión

Con el fin de dar continuidad al desarrollo del seminario, se acordó que, para la próxima sesión, programada para el miércoles 11 de febrero de 2026, el protocolo correspondiente será compartido con antelación. Esto permitirá que todos los participantes lo revisen previamente, con el propósito de optimizar el tiempo durante la sesión, destinándolo únicamente a su aprobación. Posteriormente, se iniciará la exposición y explicación del siguiente ítem, a cargo de la estudiante Anamaría Rodríguez Capera, quien abordará el tema de máximos y mínimos.

4.2. **Protocolo No. 02**

Fecha: 11 febrero de 2026 **Director y correlator:** Jenny Patricia Acevedo Rincón **Relator:** Anamaría Rodríguez Capera

Protocolante: Johan Smith Salazar Giraldo

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La presente sesión se desarrolló bajo la metodología del Seminario Alemán, con el objetivo primordial de validar y refinar el primer ítem correspondiente al tema de derivadas. En este espacio, se evaluó desde una perspectiva disciplinar el conocimiento especializado de futuros docentes de matemáticas, tomando como base el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*). Se llevó a cabo una revisión del protocolo anterior, donde se discutieron conceptos matemáticos como las conexiones auxiliares y transversales, así como la importancia de sintetizar la información para evitar extensiones innecesarias, además, en esta sesión se abordaron temas relacionados con el uso de derivadas en funciones polinómicas, destacando errores comunes en el aprendizaje y la necesidad de aclarar conceptos clave.

Durante la sesión se analizó un ejercicio aplicado sobre máximos y mínimos de una función, contextualizado en el costo de fabricación de un tanque cilíndrico, con el propósito de evaluar no solo el dominio procedimental de la derivada, sino también la justificación e interpretación matemática. Luego de intercambiar ideas, se plantearon ajustes en la formulación del enunciado, en las posibles respuestas y en la intención de evaluar el ítem, considerando si se debe cambiar únicamente en el dominio matemático o incorporar los elementos propios del conocimiento didáctico del profesor. En conjunto, la sesión permitió consolidar acuerdo, clarificar categorías conceptuales y proyectar mejoras concretas para la incorporación de los protocolos en el trabajo de grado.

Tema y desarrollo

El eje temático de la sesión se centró en la validación conceptual y metodológica de un ítem orientado al análisis de máximos y mínimos de una función polinómica mediante el uso de la derivada, en el marco del modelo de Conocimiento Especializado del profesor de Matemáticas (MTSK). La discusión tuvo como propósito examinar la coherencia del ítem, la pertinencia de los subdominios seleccionados y la solidez técnica de los distractores propuestos, así como su alineación con los descriptores del conocimiento matemático (MK) y del conocimiento pedagógico del contenido (PCK).

La sesión inició con la revisión del protocolo previamente elaborado. En esta fase preliminar se realizaron ajustes de redacción y precisión conceptual, particularmente en la distinción entre conexiones auxiliares y conexiones transversales. Se retomó la definición consensuada en encuentros anteriores de las conexiones auxiliares se entienden como relaciones locales y funcionales entre conceptos que se apoyan dentro de un mismo bloque conceptual, mientras que las conexiones transversales implican una articulación estructural más amplia entre distintos objetos matemáticos. Esta clarificación permitió afinar el análisis posterior del ítem.

Posteriormente, el relator presentó formalmente el ítem, cuyo contexto situacional describe el diseño de un tanque cilíndrico con restricciones de volumen y costos diferenciados, modelado mediante una función de costo en términos del radio. El indicador de logro planteado busca que el docente en formación identifique y analice puntos máximos y mínimos utilizando la derivada, argumentando su interpretación en un contexto aplicado. Se expusieron los subdominios inicialmente propuestos KOT, KPM, KSM, KFML y KMLS junto con el análisis de las alternativas de respuesta y sus respectivos distractores.

En relación con el subdominio KOT (*Knowledge of Topics*), se determinó que el ítem moviliza de manera explícita definiciones, propiedades y fundamentos asociados a la derivada, puntos críticos, criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada. Asimismo, se reconoció la necesidad de incorporar categorías adicionales como fenomenología y aplicaciones, dado que el problema no se limita a un ejercicio procedimental, sino que modela una situación contextualizada de optimización.

En cuanto al subdominio KPM (*Knowledge of Mathematical Practice*), se validó su presencia a través de la exigencia de argumentación y justificación. El ítem no se limita al cálculo mecánico de la derivada, sino que requiere interpretar el comportamiento de la función a partir del análisis del signo y la concavidad, lo que implica procesos de validación y demostración matemática. También se incorporó el papel de los símbolos y uso del lenguaje forma, destacando que la clasificación de un punto como máximo o mínimo debe estar sustentada en condiciones necesarias y suficientes, evitando afirmaciones basadas únicamente en la anulación de la primera derivada.

Para finalizar el análisis del dominio MK, se examinó el subdominio KSM, identificando la presencia de las categorías conexiones basadas en el incremento de complejidad y conexiones transversales. En este sentido, el ítem exige que el estudiante relacione distintos conceptos del cálculo diferencial para analizar el comportamiento de la función de costo, tales como la interpretación de la función, el cálculo de la primera derivada para determinar puntos críticos y el uso de la segunda derivada para clasificar los extremos. Esto evidencia una progresión conceptual, en la que se pasa de comprender la función a aplicar herramientas de optimización, lo cual corresponde a conexiones basadas en el incremento de complejidad. No obstante, el análisis permite establecer que el ítem se ubica principalmente en la categoría de conexiones transversales, ya que integra y articula simultáneamente diferentes ideas del cálculo diferencial que deben comprenderse de manera conjunta para justificar la afirmación correcta.

Un momento clave de la sesión fue la discusión sobre la inclusión del subdominio PCK. Inicialmente, el ejercicio estaba formulado exclusivamente desde el dominio matemático, es decir, se centraba en resolver y clasificar el comportamiento del costo. Sin embargo, se analizó la posibilidad de reformular el enunciado para situarlo en un contexto donde el profesor analiza respuestas erradas de estudiantes y propone estrategias de intervención. Esta modificación implicaría transformar la redacción del ítem para que el foco evaluativo no recaiga únicamente en el cálculo, sino en la interpretación de errores frecuentes, tales como, asumir que todo punto donde la primera derivada se anula corresponde automáticamente a un mínimo, interpretar incorrectamente el signo de la segunda derivada y omitir el análisis del dominio por la presencia de términos racionales.

Se definió si era posible forzar la inclusión del PCK mediante una reestructuración profunda del ítem, dicha transformación implicaría modificar sustancialmente el enunciado, las opciones de respuesta y el análisis posterior. En consecuencia, se optó por mantener el ítem predominantemente en el dominio MK, evitando una incorporación artificial del componente pedagógico. La sesión también dedicó un espacio al análisis de los distractores. Se validó que la alternativa correcta corresponde al mínimo del costo cuando el radio es igual a 4, resultado obtenido mediante la anulación de la primera derivada y la verificación de la segunda derivada positiva. En cuanto a los distractores, se fortaleció su justificación conceptual, destacando que cada uno representa un error típico, además se realizaron ajustes de redacción para garantizar coherencia lógica y precisión terminológica, evitando ambigüedades en la explicación de los errores.

En la fase final, se revisaron las cápsulas de aprendizaje, enfatizando la necesidad de clarificar el significado de la derivada como razón de cambio, la interpretación de crecimiento y decrecimiento, y el sentido geométrico de la segunda derivada en términos de concavidad. Se enfatizó la importancia de que la argumentación del docente en formación no se limite al cálculo algorítmico, sino que evidencie comprensión conceptual y capacidad de interpretación contextual. Como cierre, la directora resaltó que el proceso de revisión colectiva permitió depurar tanto la coherencia interna del ítem como su alineación con los descriptores del MTSK. Se concluyó que esta sesión fue determinante para consolidar criterios metodológicos claros respecto a cuándo un ítem evalúa estrictamente conocimiento matemático y cuándo transita hacia el análisis pedagógico del error.

Conclusiones

En conclusión, esta sesión permitió hacer una revisión rigurosa del ítem desde el modelo MTSK, mejorando la coherencia conceptual y la alineación con los subdominios del MTSK. Se logró clarificar la distinción entre conexiones auxiliares y transversales, así como justificar de manera fundamentada la presencia de los subdominios KOT y KPM en el análisis del problema de optimización. Finalmente, el trabajo colaborativo permitió mejorar la formulación de los distractores y fortalecer la intencionalidad evaluativa del ejercicio, sentando bases sólidas para la construcción y validación de futuros ítems dentro del proyecto.

Evaluación y Proyección

La sesión permitió fortalecer la coherencia conceptual y metodológica del ítem, clarificando la presencia de los subdominios KOT, KPM y KSM mejorando la fundamentación de los distractores. Se logró mayor precisión en la intención evaluativa y en la alineación entre el enunciado y el marco teórico adoptado. Se proyecta continuar con la construcción y validación de ítems bajo criterios claros de coherencia teórica, así como diseñar futuras propuestas que integren, cuando sea pertinente, el análisis pedagógico de errores estudiantiles para ampliar el alcance del estudio.

Continuidad de la sesión:

Para la próxima sesión, programada para el miércoles 17 de febrero de 2026, el protocolo correspondiente será compartido con antelación. Esto permitirá que todos los participantes lo revisen previamente, con el propósito de optimizar el tiempo durante la sesión, destinándolo únicamente a su aprobación. Posteriormente, se dará inicio a la exposición y explicación del siguiente ítem, a cargo del estudiante Johan Smith Salazar Giraldo, quien abordará el tema de funciones.

4.3. Protocolo No. 03

Fecha: 18 febrero de 2026 **Director y correlator:** Jenny Patricia Acevedo Rincón **Relator:** Johan Smith Salazar Giraldo **Protocolante:** Diego Alonso Santiago Villar

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La sesión se desarrolló bajo la metodología del Seminario Alemán, con el propósito de aprobar y ajustar el primer ítem correspondiente al tema de funciones. Durante el encuentro se analizó el conocimiento especializado de futuros docentes de matemáticas desde el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*), buscando articular los aspectos disciplinares y didácticos implicados en la evaluación. Al inicio se realizó una revisión breve del protocolo anterior, en la cual se efectuaron ajustes de redacción y coherencia para mejorar su claridad.

Posteriormente, se llevó a cabo la lectura detallada del ítem y de sus componentes (tema, indicador, dominios y subdominios, enunciado, opciones de respuesta, análisis de distractores, cápsula de aprendizaje y aclaraciones finales), centrados en determinar si la temperatura puede considerarse en función del tiempo. El relator sustentó la pertinencia de los dominios y subdominios seleccionados. Finalmente, se discutió la posible incorporación del dominio del conocimiento pedagógico del contenido (PCK), con el fin de valorar si era conveniente ampliar el alcance didáctico del ítem.

Tema y desarrollo

El eje de la sesión se centró en la validación del ítem orientado a distinguir entre el concepto de función y relación, así como en la revisión de la coherencia de los dominios y subdominios seleccionados y de sus descripciones. También se analizó la posibilidad de ampliar la clasificación para fortalecer el alcance evaluativo del instrumento.

La sesión inició con la revisión del protocolo 2, en la cual se realizaron ajustes puntuales de redacción. Posteriormente, el relator presentó de manera organizada el ítem y cada uno de sus componentes. Al revisar la cápsula de aprendizaje, se analizó el video inicialmente propuesto y el equipo consideró que podría resultar demasiado básico para el nivel académico. Por esta razón, se sugirió incorporar un recurso audiovisual más acorde con el nivel académico al que está dirigido el instrumento y complementar la cápsula con herramientas de geometría dinámica (*GeoGebra*).

Posteriormente se abordó el análisis de los dominios y subdominios. El relator argumentó que, por la exigencia cognitiva del ítem, se mantuvo su clasificación en el dominio MK. Respecto al subdominio KOT, se justificó su inclusión en la categoría de definiciones, propiedades y fundamentos, dado que el ítem busca que los futuros docentes comprendan la definición formal de función y la propiedad de unicidad (a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de salida). También se consideró la categoría de registros de representación, ya que el ítem exige interpretar la relación en forma algebraica y gráfica mediante la prueba de la recta vertical.

En el subdominio KSM se mantuvo la categoría de conexiones auxiliares, puesto que el ítem requiere relacionar la expresión algebraica con su representación gráfica y con la definición formal de función, el subdominio ya corregido quedaría de la siguiente manera. Por su parte, en el subdominio KPM se incluyó la categoría de formas de validación y demostración, debido a que el ítem exige justificar la respuesta mediante razonamiento algebraico y análisis gráfico. Además, se consideró el papel de los símbolos y del lenguaje formal, por el uso del símbolo ±, la notación de pares ordenados, el producto cartesiano y la notación de conjuntos.

Con base en este análisis se dio por finalizado el proceso de validación del ítem, quedando como compromiso del relator realizar los ajustes acordados. Asimismo, se definió el calendario de trabajo para las siguientes sesiones. Se acordó que, durante el mes de marzo, en lugar de realizar una sesión semanal, se llevarán a cabo dos sesiones por semana, los miércoles y los viernes. Esta decisión se tomó con el propósito de destinar el siguiente mes exclusivamente a la elaboración del capítulo 4 (conclusiones) y a la culminación de la investigación.

Conclusiones

La sesión permitió validar y ajustar el tercer ítem sobre la diferenciación entre función y relación, verificando la coherencia entre la intención evaluativa, el enunciado y los fundamentos matemáticos involucrados. Se consideró adecuada la clasificación del ítem en los subdominios del modelo MTSK y se decidió mantener su ubicación únicamente en el dominio matemático MK.

Además, se acordó fortalecer la cápsula de aprendizaje mediante recursos audiovisuales y herramientas de geometría dinámica acordes con el nivel de formación de los futuros docentes.

Evaluación y Proyección

La sesión se desarrolló de manera organizada y participativa, evidenciando un trabajo colaborativo que favoreció el análisis crítico del ítem y la toma de decisiones fundamentadas en el modelo MTSK. La dinámica del Seminario Alemán permitió revisar con rigor los componentes del ítem e identificar ajustes necesarios. En general, se cumplieron los objetivos propuestos. Como proyección, el relator realizará los ajustes acordados en la redacción del ítem, la cápsula de aprendizaje y la presentación de los recursos didácticos. Asimismo, se continuará con la revisión de los demás ítems y con la organización del calendario de trabajo, con el fin de avanzar hacia la consolidación del instrumento y la elaboración del capítulo de conclusiones del trabajo de grado.

Continuidad de la sesión

Para la próxima sesión, programada para el miércoles 27 de febrero de 2026, el protocolo correspondiente será compartido con antelación, con el fin de que todos los participantes puedan revisarlo previamente. Esto permitirá optimizar el tiempo de la reunión, destinándolo exclusivamente a su aprobación. Posteriormente, se iniciará la exposición y explicación del siguiente ítem, a cargo del estudiante Diego Alonso Santiago Villar, quien abordará el segundo ítem del tema de límites.

4.4. **Protocolo No. 04**

Fecha: 27 de febrero de 2026

Director y correlator: Jenny Patricia Acevedo Rincón

Relator: Diego Alonso Santiago Villar

Protocolante: Anamaría Rodríguez Capera

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La presente sesión se desarrolla bajo la metodología del Seminario Alemán, cuyo propósito fundamental es la validación y el refinamiento del segundo ítem correspondiente a la unidad temática de Límites. El análisis del ítem se articula desde las dimensiones pedagógica (PCK) y disciplinar (MK), empleando como marco analítico el modelo de (MTSK). En particular, la sesión se centra en la aplicación técnica de los límites al infinito en un contexto de modelación química.

La dinámica de la sesión se llevó a cabo de la siguiente manera: Se inició con la lectura integral del ítem, detallando sus componentes fundamentales: eje temático, indicador de logro, enunciado, opciones de respuesta, distractores y cápsula de aprendizaje. El problema aborda específicamente la concentración de una sustancia dentro de un reactor químico. Una vez leído el ítem, se verifica si los dominios (MK y PCK) y subdominios seleccionados (KOT, KMS, KPM, KFLM y KMT) tienen coherencia con la situación planteada. Durante esta fase, el relator sustentó la pertinencia de dichas categorías, permitiendo realizar ajustes de fondo para precisar la clasificación teórica.

Para finalizar se sometió a debate la redacción del enunciado y la eficacia de las respuestas. Se determinó la necesidad de reformular la pregunta y la opción "a" de la respuesta para asegurar que el nivel de complejidad y formalismo sea coherente con las exigencias del ámbito universitario, por ende, al ser corregida la respuesta se debe hacer nuevamente la explicación de su distractor. La sesión concluyó con una revisión de la precisión terminológica y tipográfica. El proceso fue validado mediante las observaciones finales del director de tesis, consolidando así la versión definitiva del ítem.

Tema y desarrollo

En el primer segmento de la sesión, el relator introduce el segundo ítem enfocado en el concepto de límites al infinito. El desarrollo se sustenta en el modelo MTSK, detallando la movilización de dominios como el MK y el PCK con especial énfasis en subdominios como el

KOT para los fundamentos y procedimientos, y el KFLM para anticipar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes. El ítem presentado utiliza un contexto de modelación química para analizar la concentración de una sustancia en un reactor a lo largo del tiempo, planteando una situación donde un estudiante asume erróneamente que, si el tiempo crece indefinidamente, la concentración también lo hará, para ello se tiene en cuenta la siguiente función que modela lo descrito.

$$C(t) = \frac{4t^2 + 10}{t^2 + 5t + 8}$$

A partir de allí, se discuten diferentes estrategias de intervención docente, desde la aplicación de reglas de grados hasta el análisis estructural y gráfico. En este primer segmento de la sesión, el relator realiza una lectura integral y de corrido de todos los componentes del ítem (tema, indicador, enunciado, distractores y cápsula) para contextualizar la propuesta antes de profundizar en su fundamentación técnica, en este momento también se resalta la elección del video que se tomó para hacer la explicación en la cápsula de aprendizaje, justificando que en este se explica de manera clara cada paso que se necesita y debe tenerse en cuenta para resolver un problema de este tipo. Tras esta exposición general, se da paso al análisis detallado de la tabla de dominios y subdominios, donde se justifica la movilización de conocimientos bajo el modelo MTSK.

En primer lugar, se procedió con el examen del subdominio KOT, en el cual se destacó la solidez y el nivel de detalle alcanzado por el relator al exponer las categorías asociadas: procedimientos, definiciones, propiedades, registros de representación y fenomenología del concepto de límites. Durante el debate académico, tanto los asistentes como el director de tesis coincidieron en que la caracterización de este subdominio fue precisa y guardó una coherencia integral con el ítem planteado; por consiguiente, se determinó que no se requerían correcciones de fondo ni modificaciones sustanciales en esta sección. Esta validación ratifica que el sustento disciplinar del ítem posee el rigor necesario para explicar el comportamiento asintótico de la función cuando la variable tiende al infinito, consolidando su clasificación teórica sin necesidad de ajustes adicionales.

Posteriormente, se procedió con la validación del subdominio KSM. En esta instancia, el relator fundamentó la selección de la categoría Conexiones basadas en la simplificación, argumentando que el diseño del ítem exige reconocer el cálculo de un límite al infinito como la herramienta analítica fundamental para simplificar el estudio del comportamiento de una función racional compleja. De este modo, la resolución del problema permite transitar desde el análisis algebraico detallado hacia la comprensión simplificada del concepto de asíntota horizontal, evidenciando así la conexión estructural entre el cálculo infinitesimal y la geometría analítica.

Para finalizar en análisis del MK, se presentó el subdominio KPM, la sesión permitió validar que el relator posee un conocimiento profundo sobre el modo en que se produce y justifica el conocimiento matemático en el contexto de los límites. Durante el desarrollo de la discusión, se resaltó que el ítem exige un nivel de formalismo y validación que trasciende la simple intuición numérica, obligando al estudiante a emplear métodos algebraicos rigurosos para demostrar el comportamiento de la función. Al igual que en casos anteriores, los asistentes y el director de tesis consideraron que la elección de las categorías enfocadas en las formas de validación, demostración y los procesos asociados a la resolución de problemas era plenamente coherente con la situación planteada.

Sin embargo, surgió como consenso académico la necesidad de incorporar la categoría "Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal". Esta decisión se fundamenta en que cada componente del ítem emplea una rigurosidad terminológica y simbólica esencial para la comprensión del cálculo a nivel superior. La simbología matemática no es meramente accesoria, sino que articula toda la situación: desde la definición de la función y la asignación de una variable independiente (t) con significado contextual, hasta el uso preciso de la notación de límites y la representación de tendencias al infinito en expresiones racionales. Así, el manejo del lenguaje formal se convierte en una práctica matemática explícita que el ítem busca evaluar y que el profesor debe dominar.

Acto seguido, el análisis se desplazó hacia el dominio correspondiente al PCK, iniciando con el examen del KFLM. Tras la exposición del relator y el posterior intercambio de perspectivas, se determinó por consenso que este apartado no requería ajustes, dado que las categorías propuestas reflejaban con precisión las características del aprendizaje y las posibles dificultades de los estudiantes frente al concepto de límites.

Finalmente, se procedió a la validación del subdominio KMT. Tras el análisis, se determinó la supresión de la categoría “Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos”, al considerar que los elementos que la componen no se manifestaban de forma explícita en el ítem. En su lugar, se ratificó la categoría de “Recursos didácticos (físicos y digitales)”, fundamentada en la integración de representaciones gráficas dinámicas diseñadas mediante el software GeoGebra, las cuales son fundamentales para la visualización del comportamiento de la función.

Tras concluir la fase de análisis y validación de los dominios y subdominios del modelo MTSK, se procedió a la revisión técnica del enunciado con el fin de evaluar su claridad, coherencia y precisión comunicativa. Durante esta etapa, se identificó que la formulación inicial *¿Cuál de las siguientes intervenciones es más adecuada?* presentaba una ambigüedad relativa. Aunque una de las opciones de respuesta poseía un sustento matemático superior y era plenamente correcta, la pregunta permitía interpretaciones subjetivas sobre el grado de 'adecuación' de las demás. En consecuencia, se determinó reformular el interrogante para otorgarle un mayor rigor académico y asegurar que el estudiante identifique la respuesta basándose en fundamentos disciplinares sólidos. El enunciado reestructurado se presenta a continuación:

"*¿Cuál de las siguientes intervenciones satisface el propósito de enseñanza de este enunciado?*"

Asimismo, se dio por terminada la sesión con la discusión sobre la pertinencia de la opción de respuesta "a" con el fin de verificar si su nivel de formalismo era coherente con las exigencias académicas de la población a la que se dirige el instrumento. Dado que se buscaba alcanzar un estándar universitario más avanzado, se procedió a su reestructuración y optimización terminológica. Como consecuencia directa de este ajuste en la respuesta fue necesario modificar también el distractor asociado para mantener el equilibrio y la validez del ítem.

Conclusiones

A modo de cierre, la sesión de validación permitió consolidar el ítem no solo como un instrumento de evaluación procedimental, sino como una herramienta integral que moviliza el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El análisis exhaustivo de los dominios MK y PCK ratificó que el ítem posee un sustento desde una visión puramente algorítmica hacia una comprensión estructural del límite al infinito (vinculada a la estabilidad de sistemas físicos) demuestra que el ítem cumple con el rigor académico requerido para el nivel universitario.

Evaluación y Proyección

El proceso de evaluación de la sesión destaca el valor fundamental del trabajo colaborativo, donde la escucha activa y la libre expresión de ideas permitieron una mejora sustancial del ítem. La dinámica grupal enriqueció el análisis al integrar distintos puntos de vista, lo que facilitó la identificación de áreas de mejora que podrían pasar inadvertidas de forma individual, resultando en correcciones más precisas, pertinentes y verídicas. En este contexto, el rol del relator fue determinante, demostrando un dominio disciplinar sólido que garantizó que las explicaciones y los diálogos generados fueran acertados, claros y fluidos.

Esta sinergia entre el expositor y el grupo de expertos no solo validó el contenido matemático, sino que fortaleció la coherencia pedagógica del reactivo. Como proyección para futuras sesiones, se busca capitalizar esta experiencia de coevaluación para que los próximos ítems presentados cuenten con estructuras aún más refinadas desde su planteamiento inicial, integrando desde el principio las exigencias del modelo MTSK y los estándares de rigor comunicativo discutidos en este encuentro.

Continuidad de la sesión

Con el fin de dar continuidad al desarrollo del seminario, se acordó que, para la próxima sesión, programada para el miércoles 04 de marzo de 2026, el protocolo correspondiente será compartido con antelación. Esto permitirá que todos los participantes lo revisen previamente, con el propósito de optimizar el tiempo durante la sesión, destinando únicamente a su aprobación.

Posteriormente, se iniciará la exposición y explicación del segundo ítem de derivadas a cargo de la estudiante Anamaría Rodríguez Capera.

4.5. Protocolo No. 05

Fecha: 04 marzo de 2026

Director y correlator: Jenny Patricia Acevedo Rincón

Relator: Anamaría Rodríguez Capera

Protocolante: Johan Smith Salazar Giraldo

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

Con el propósito de continuar con las sesiones, se desarrolló la actividad bajo la metodología del seminario alemán, cuyo objetivo fue revisar y fortalecer un ítem didáctico relacionado con la definición de la derivada y su interpretación geométrica y algorítmica. Este análisis se realizó considerando tanto la dimensión matemática como la pedagógica, tomando como referente el modelo MTSK (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge)*. Para ello, se estableció una dinámica de trabajo que inició con una lectura continua del ítem sin interrupciones, seguida de un análisis de los dominios y subdominios del modelo, y finalizó con una revisión crítica de la redacción del enunciado y de la pertinencia de los distractores.

Durante la discusión se presentó el caso de un estudiante (Andrés) que comete errores típicos como sustitución directa, confusión entre rectas secantes y otras rectas de la gráfica, y malinterpretaciones sobre indeterminación y existencia de la derivada, lo que permitió evaluar en detalle los distractores A, B y C. En compañía del grupo se propuso y acordó ajustes editoriales para eliminar afirmaciones incorrectas y precisar que la derivada en un punto es el límite de las pendientes de rectas secantes que tienden a la tangente; además se recomendó incluir recursos gráficos y precisar el tránsito secante-tangente. Se debatió la necesidad de justificar formalmente por qué el límite define la pendiente de la tangente, el uso adecuado de símbolos y funciones, y la construcción de definiciones mediante condiciones necesarias y suficientes para evitar respuestas mecánicas. En conjunto, la sesión permitió consolidar y clarificar categorías conceptuales y proyectar mejoras concretas para la incorporación de los protocolos en el trabajo de grado.

Tema y desarrollo

La sesión se centró en el estudio de la definición de la derivada como cociente incremental y su significado geométrico, particularmente la interpretación de la derivada en un punto como el límite de las pendientes de las rectas secantes que se aproximan a la recta tangente. Durante la sesión se revisó el ítem en el que planteaba una situación de clase sobre una profesora que les muestra a sus estudiantes la definición formal de derivada y les solicita interpretarla. A partir de la respuesta de un estudiante que presenta ideas parcialmente incorrectas como pensar que la derivada se obtiene por simple sustitución o que corresponde a la pendiente de cualquier recta en la gráfica, los participantes de la sesión analizaron las posibles retroalimentaciones del docente y se discutió cuál sería la opción más adecuada. En este proceso se revisaron los distractores del ítem, identificando los errores conceptuales presentes en cada alternativa y justificando por qué solo una respuesta permite corregir adecuadamente las ideas del estudiante.

Seguido, se realizó el proceso de revisión y ajuste del enunciado, la redacción de las respuestas y la coherencia entre la interpretación analítica y la geométrica de la derivada. Se corrigieron algunas imprecisiones relacionadas con el uso de los términos recta secante y recta tangente, enfatizando que la derivada en un punto corresponde al límite de las pendientes de las rectas secantes cuando los puntos se aproximan, lo que da lugar a la pendiente de la recta tangente.

Finalmente, se inició con el análisis de los dominios y subdominios del MTSK, así como las categorías asociadas y la descripción de ellas en el ítem. En primer lugar, se abordó el KOT, donde se valida la categoría asociada de definiciones, propiedades y fundamentos, la cual describe que el ejercicio exige comprender la definición formal de derivada como límite. En este subdominio también se discutió la importancia de que los estudiantes comprendan conceptos como límite, diferenciabilidad, recta tangente y razón de cambio, así como la relación entre la expresión algebraica del cociente y su interpretación geométrica en la gráfica de una función. También se consideró que este dominio implica reconocer que la derivada en un punto no es simplemente un procedimiento de cálculo, sino un concepto fundamentado en la idea de aproximación mediante rectas secantes que convergen hacia una recta tangente.

En cuanto al subdominio KSM, se validó su presencia a través de conexiones auxiliares, ya que el ejercicio requiere la articulación de la definición de derivada con otros conceptos previamente estudiados, como el límite, la continuidad y la variación de una función. De esta manera, el ítem promueve que el estudiante establezca conexiones conceptuales entre distintos contenidos del cálculo diferencial y comprenda que la derivada surge como una extensión del estudio de los límites.

También se analizó el KPM, donde se valida la categoría de las formas de validación y demostración, además se sugiere agregar la categoría de condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones, ya que el ejercicio invita a justificar por qué la derivada se interpreta como la pendiente de la recta tangente y por qué no puede obtenerse únicamente mediante una sustitución directa en el cociente y se plantea introducir otra categoría que es la de símbolos y uso del lenguaje formal, puesto que la discusión se centró en la necesidad de comprender que el cociente incremental suele generar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, lo que obliga a aplicar procesos de simplificación y posteriormente calcular el límite.

Asimismo, se hizo énfasis en el KFLM, en este aspecto se aprueba la categoría relacionada con las fortalezas y dificultades que suelen aparecer en el concepto de la derivada, como la tendencia de algunos estudiantes a pensar que la derivada se obtiene únicamente sustituyendo en la expresión o la confusión entre la recta tangente y la recta secante, por ello, el análisis del ítem permite anticipar errores frecuentes y diseñar retroalimentaciones que orienten al estudiante hacia una comprensión más profunda del concepto. Además, se plantea agregar la categoría sobre las formas de interacción del alumno con un contenido matemático.

Finalmente, se discutió el KMLS, considerando el nivel de desarrollo conceptual o procedimental, donde se espera que los estudiantes tengan una comprensión profunda y no procedimental, en ese sentido, el docente en formación además de aplicar el concepto debe ser capaz de explicarlo y apropiarse de la temática.

Conclusiones

La discusión permitió reconocer la importancia de que la enseñanza de la derivada no se limite a procedimientos algebraicos, sino que incluya la comprensión conceptual de su definición y su interpretación geométrica. Asimismo, se evidenció que muchos errores de los estudiantes provienen de interpretaciones parciales del concepto, como asociar la derivada únicamente con un procedimiento de cálculo o confundir la recta tangente con rectas secantes. El análisis de este ítem permitió mejorar la claridad del enunciado y de las respuestas, confirmando que las alternativas realmente permitan identificar las dificultades conceptuales de los estudiantes.

Evaluación y Proyección

La sesión resultó pertinente para el fortalecimiento del análisis didáctico del ítem, ya que permitió abordar de manera articulada tanto la dimensión matemática como la pedagógica del concepto de derivada. El trabajo colectivo facilitó la identificación de imprecisiones conceptuales en el enunciado y en los distractores, así como la revisión crítica de los errores frecuentes que suelen presentar los estudiantes al interpretar la definición formal de derivada. En particular, la discusión en torno al caso del estudiante permitió reconocer dificultades recurrentes, como la tendencia a realizar sustituciones directas en el cociente incremental, la confusión entre rectas secantes y tangentes, y la interpretación inadecuada de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. En general, la sesión favoreció la consolidación de una versión más precisa del análisis del ítem y permitió profundizar en la comprensión de las categorías del modelo MTSK aplicadas al estudio del concepto de derivada.

Como proyección del trabajo realizado, se plantea continuar con el proceso de revisión y fortalecimiento de los ítems didácticos que harán parte del trabajo de grado, procurando mantener la coherencia entre el diseño de las preguntas, los objetivos de aprendizaje y las categorías del modelo MTSK. En particular, se sugiere profundizar en la construcción de distractores que reflejen de manera más explícita las concepciones erróneas de los estudiantes, de modo que el ítem no solo evalúe procedimientos, sino que también permita identificar el nivel de comprensión conceptual del contenido. De igual manera, se propone incorporar de manera más sistemática representaciones gráficas y situaciones de interpretación que favorezcan la articulación entre las perspectivas algebraica y geométrica de la derivada. Esto contribuirá a fortalecer la comprensión del tránsito entre la recta secante y la recta tangente, aspecto fundamental en la construcción del significado del concepto.

Continuidad de la sesión

De cara a la sesión prevista para el viernes 06 de marzo de 2026, el protocolo será distribuido con anticipación entre los participantes para que puedan revisarlo previamente. Esto permitirá que, durante el encuentro, el tiempo se utilice principalmente para su validación. Una vez realizado este proceso, se dará paso a la presentación y análisis del siguiente ítem, responsabilidad del estudiante Johan Smith Salazar Giraldo, quien abordará el tema relacionado con el concepto de función.

4.6. Protocolo No. 06

Fecha: 6 de marzo de 2026

Director y correlator: Jenny Patricia Acevedo Rincón

Relator: Johan Smith Salazar Giraldo

Protocolante: Diego Alonso Santiago Villar

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La sesión se desarrolló bajo la metodología del Seminario Alemán, con el propósito de revisar y ajustar el segundo ítem de la unidad de funciones, analizando su estructura, los distractores y la clasificación de los dominios, subdominios y categorías desde el modelo MTSK

(*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*). En un primer momento se realizó la lectura del protocolo de la sesión anterior. Durante esta revisión se efectuaron algunos ajustes de redacción y de sentido para mejorar la claridad del documento. Asimismo, se dejó como compromiso del protocolante completar el apartado de evaluación y proyección, ya que este no se había desarrollado en el protocolo anterior.

Posteriormente, se inició la revisión detallada del ítem, mediante una lectura continúa realizada por el relator. A lo largo de esta lectura se discutieron algunos aspectos relacionados con la redacción de los distractores, la cápsula de aprendizaje y la pertinencia de los dominios y subdominios propuestos en el análisis del ítem.

Tema y desarrollo

La sesión se centró en la revisión del ítem propuesto, así como en el análisis de los dominios, subdominios y categorías utilizados para su clasificación dentro del modelo MTSK. Inicialmente, el relator realizó la lectura completa del ítem el cual se propuso un caso de estudio que involucró una función cuadrática y la identificación de su valor máximo. Durante este proceso se identificó que los distractores presentaban un error en el orden en el que estaban organizados, por lo cual se procedió a reorganizarlos. Además, se realizó un ajuste en uno de ellos, ya que incluía una afirmación adicional que no era necesaria para el propósito del análisis. En su versión inicial, el distractor señalaba que el futuro licenciado en matemáticas confirmaba que el valor máximo de la función era 5 cuando $x = 2$ y daba por terminado el análisis del ejercicio. Sin embargo, se consideró más pertinente simplificar la redacción, dejando únicamente la idea de que el estudiante reconoce el resultado correcto, pero no profundiza en la explicación del concepto ni en el significado matemático del máximo dentro de la función.

Posteriormente se revisó la cápsula de aprendizaje. En este punto se propuso utilizar una herramienta de geometría dinámica elaborada en GeoGebra por el relator. Esta herramienta permite modificar los valores de los coeficientes $a, b\ y\ c$ de una función cuadrática y observar de manera dinámica la gráfica correspondiente. Durante la discusión se sugirió mejorar la herramienta para que, además de mostrar la gráfica, permita visualizar algunos puntos de interés de la función cuadrática, como el vértice y los puntos de corte con los ejes. Asimismo, se recomendó que la expresión algebraica de la función sea visible de forma explícita dentro del recurso. El relator quedó encargado de realizar estas modificaciones. Posteriormente se inició la lectura y discusión de los dominios, subdominios y categorías propuestas para el análisis del ítem.

En primer lugar, se revisó el subdominio KoT (*Knowledge of Topics*). En este se propusieron tres categorías: definiciones, propiedades y fundamentos; Significados; y Registros de representación. La primera categoría fue aprobada sin dificultad, ya que el ítem requiere reconocer propiedades relacionadas con el máximo de una función cuadrática. En cuanto a la categoría de Significados, se generó un espacio de discusión, debido a que inicialmente se justificaba su uso relacionando el punto máximo con el punto más alto de la gráfica. No obstante, se señaló que esta categoría se vincula de manera más adecuada con el concepto de vértice de la función cuadrática y con el significado que este adquiere según el signo del coeficiente a, es decir, cuando la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Finalmente, la categoría de Registros de representación también fue aprobada, aunque se sugirió complementar su descripción indicando de manera explícita los diferentes registros que intervienen en el ítem.

Posteriormente se analizó el subdominio KSM (*Knowledge of the Structure of Mathematics*). En este caso se había propuesto la categoría Conexiones de simplificación. Sin embargo, tras la discusión se concluyó que en el ítem no se evidenciaba de manera clara el uso de este tipo de conexión, por lo que se decidió no incluir este subdominio dentro del análisis final. En relación con el subdominio KPM (K*nowledge of Practices in Mathematics*), inicialmente no se había propuesto ninguna categoría. No obstante, durante la discusión se consideró pertinente incorporarlo mediante la categoría de Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, ya que el ítem requiere interpretar y utilizar adecuadamente la notación matemática asociada a la función cuadrática y a sus elementos.

Seguidamente se revisó el subdominio KMLS (*Knowledge of Mathematics Learning Standards*). En este caso se propuso la categoría de Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, la cual fue aprobada por el grupo. Se argumentó que en el ítem el estudiante logra aplicar el procedimiento para encontrar el resultado, pero no otorga sentido al proceso ni al concepto involucrado, lo cual permite analizar el nivel de comprensión esperado en este tipo de situaciones. Finalmente, se analizó el subdominio KFLM (*Knowledge of Features of Learning Mathematics*), en el cual inicialmente se propusieron tres categorías: Fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático, Formas de interacción del alumno con un contenido matemático, y Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas. Durante la discusión se decidió eliminar la primera categoría, ya que su uso no resultaba suficientemente claro y podía generar confusión con la segunda. En consecuencia, se optó por mantener únicamente la categoría Formas de interacción del alumno con un contenido matemático. De igual manera, se revisó la categoría relacionada con los aspectos emocionales, pero se decidió no incluirla, dado que en el ítem no se evidencia una afectación emocional del estudiante; por el contrario, el estudiante llega al resultado correcto, aunque sin comprender completamente el concepto involucrado.

Las correcciones finales pueden consultarse en el ítem 2 de la sección de funciones.

Conclusiones

La sesión permitió revisar y ajustar diferentes elementos del ítem, particularmente la redacción de uno de los distractores y la organización de las opciones de respuesta. Asimismo, se realizaron sugerencias para mejorar la cápsula de aprendizaje mediante el uso de herramientas de geometría dinámica que permitan visualizar de manera más clara las características de la función cuadrática. De igual manera, se llevó a cabo un análisis detallado de los dominios, subdominios y categorías del modelo MTSK asociados al ítem, lo cual permitió realizar algunos ajustes en su clasificación. Como resultado de la discusión, se redefinieron algunas categorías, se eliminaron aquellas que no se evidenciaban claramente en el ejercicio y se incorporaron otras que fortalecen el análisis del conocimiento especializado del futuro docente.

Evaluación y Proyección

La sesión se desarrolló de manera organizada y participativa, permitiendo un análisis detallado de los distintos componentes del ítem. La discusión entre los participantes facilitó la identificación de aspectos que requerían ajustes, especialmente en la redacción de los distractores y en la clasificación de los subdominios del modelo MTSK. Como proyección, el relator realizará las modificaciones acordadas en la cápsula de aprendizaje, particularmente en la herramienta de GeoGebra, con el fin de que esta permita visualizar de manera más completa los elementos relevantes de la función cuadrática y en la sección de dominios, subdominios y categorías asociadas.

Continuidad de la sesión

Para la próxima sesión, la presentación del siguiente ítem estará a cargo del estudiante Diego Alonso Santiago Villar, quien abordará el tercer ítem del tema de límites. La sesión se llevará a cabo el miércoles 11 de marzo de 2026.

4.7. Protocolo No. 07

Fecha: 11 de marzo de 2026

Director y correlator: Jenny Patricia Acevedo Rincón

Relator: Diego Alonso Santiago Villar

Protocolante: Johan Smith Salazar Giraldo

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La reunión tuvo como propósito revisar y ajustar el protocolo número 6 y analizar la clasificación pedagógica de ítems dentro del modelo MTSK. Se leyó y corrigió el protocolo existente. A continuación, se revisaron dominios y subdominios del modelo (KOT, KSM, KPM, KMLS, KFLM), aprobando y eliminando categorías según su pertinencia y señalando la necesidad de complementar descripciones y registros de representación. La discusión central fue la revisión pedagógica de un ítem sobre límites, proponiendo mover su enfoque hacia la modelación gráfica (con applet o imagen) y ajustar enunciados y opciones para que los estudiantes exploren variaciones de constantes; también se identificaron tres niveles de respuesta estudiantil y se propuso eliminar la categoría de "fortalezas y debilidades" con las descripciones de interacciones y niveles de desarrollo. Finalmente se acordaron tareas y la responsabilidad de modificación del ítem.

Tema y desarrollo

La sesión se centró en la revisión del tercer ítem que corresponde al concepto de límites trigonométricos, así como en el análisis y ajuste de los dominios, subdominios y categorías desde el modelo MTSK. El ítem tenía como objetivo evaluar la comprensión del límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$$

En la resolución de la expresión:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{3x}$$

A partir de la revisión del ítem, de sus distractores y de la capsula de aprendizaje, se discutieron los subdominios inicialmente propuestos y se realizaron ajustes en algunas categorías y descripciones para hacerlas más coherentes con la intención didáctica de la situación.

Inicialmente, se revisó el subdominio KOT, en el cual se mantuvieron las tres categorías que inicialmente estaban propuestas, es decir, se mantuvo la categoría de procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos y los registros de representación. Los participantes consideraron que estas categorías resultaban pertinentes, ya que el ítem exige reconocer el límite notable, transformar algebraicamente la expresión y a partir del ajuste en la cápsula de aprendizaje, incorporar también una exploración gráfica mediante GeoGebra que permita relacionar el registro simbólico con el registro gráfico.

Seguidamente, se analizó el subdominio KSM, inicialmente se habían propuesto las categorías conexiones basadas en la simplificación y conexiones auxiliares. Durante la discusión, se concluyó que ambas categorías fueron sólidas y justificadas en el ítem, dado que el estudiante debe transformar una expresión particular para conectarla con límite general conocido. También, se pudo argumentar una relación entre trigonometría, álgebra y límites, se consideró que dicha conexión era auxiliar.

A continuación, se revisó el subdominio KPM, en la discusión se señaló que, aunque inicialmente se había mencionado la posibilidad de incluir formas de validación y demostración, esta categoría no resultaba suficientemente evidente en el ítem, ya que el estudiante no está validando formalmente frente a las respuestas dadas. Por esta razón, se consideró mantener únicamente la categoría papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, la cual si se ajusta al ejercicio.

En ese orden, seguimos revisando el subdominio KFLM, donde inicialmente se habían considerado las categorías fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático y formas de interacción del alumno con un contenido matemático. Sin embargo, durante la discusión se concluyó que la descripción de la categoría de fortalezas y debilidades se ajustaba mejor a la descripción de la interacción del alumno con el contenido matemático, porque lo que realmente se evidencia en el ítem es la manera en que los estudiantes interpretan la estructura del límite, reconocen el límite notable y realizan o no la manipulación algebraica requerida. En ese sentido, se decidió eliminar la categoría de fortalezas y debilidades.

Seguidamente, se analizó el subdominio KMT, en este caso, se mantuvieron las categorías teorías de enseñanza de las matemáticas y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Sin embargo, se ajustó la descripción de la primera categoría, ya que se señaló que no bastaba con mencionar de manera general el aprendizaje por descubrimiento. Se propuso, precisar que la intervención pedagógica se apoya en una exploración guiada, la modelación y la generalización a partir del uso de un recurso dinámico como GeoGebra, lo cual justifica mejor el diseño del ítem y de la cápsula de aprendizaje.

Finalmente, se revisó el subdominio KMLS, durante la discusión se consideró la posibilidad de incluir tanto resultado de aprendizaje esperado como el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado. Sin embargo, se determinó que, aunque las respuestas de los estudiantes permiten evidenciar distintos niveles de desempeño, la categoría más pertinente y sólida para el análisis final del ítem es resultado de aprendizaje esperado, porque el propósito principal es valorar si el estudiante logra aplicar adecuadamente el límite notable en otro ejercicio.

Evaluación y Proyección

Esta sesión avanzó de manera ordenada y con buena participación, donde se hizo un análisis detallado de los distintos componentes del ítem presentado. Se destaca como aspecto positivo el diálogo crítico entre los participantes, ya que permitió revisar la coherencia entre el propósito del ítem, la intervención pedagógica esperada y la clasificación de los dominios, subdominios y categorías desde el modelo MTSK. Asimismo, se evidenció un avance importante en la comprensión de las diferencias entre categorías que inicialmente generaban ambigüedad, especialmente en los subdominios KSM, KPM, KFLM y KMLS. Sin embargo, se hizo evidente la necesidad de mejorar la organización y actualización del documento general, puesto que algunos protocolos aún no han sido incorporados formalmente y persisten apartados desactualizados que deben ajustarse a la versión final del documento.

Como proyección para la siguiente sesión, el estudiante Diego Alonso Santiago Villar realizará las modificaciones acordadas al ítem 3, especialmente la cápsula de aprendizaje, incorporando de manera más explícita el uso del applet de GeoGebra como recurso para promover la exploración, la modelación y la generalización del límite trigonométrico. También se acordó que todos los integrantes deberán subir y actualizar los protocolos pendientes y completar los apartados faltantes del documento final antes del viernes, de modo que el trabajo pueda ser revisado integralmente y se elimine la información que ya no corresponde a la versión definitiva.

Continuidad de la sesión

Para la próxima sesión, la presentación del siguiente ítem estará a cargo del estudiante Anamaría Rodríguez Capera, quien abordará el tercer ítem del tema de derivadas. La sesión se llevará a cabo el viernes 13 de marzo de 2026.

4.8. **Protocolo No. 08**

Fecha: 13 de marzo de 2026 **Director y correlator:** Jenny Patricia Acevedo Rincón **Relator:** Anamaría Rodríguez Capera **Protocolante:** Diego Alonso Santiago Villar **Participantes:** Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

En la presente sesión de trabajo se llevó a cabo con el propósito de continuar con la revisión y análisis de los ítems diseñados para el instrumento de la investigación. En un primer momento, se realizó una revisión general del documento de la investigación, con el fin de verificar que este cumpliera con los lineamientos y exigencias establecidos por la universidad, especialmente en lo relacionado con la estructura del documento, la organización de los apartados y la coherencia entre las diferentes secciones del trabajo

Posteriormente, la sesión se orientó al análisis del tercer ítem correspondiente al tema de derivadas, el cual aborda el uso de la regla de la cadena dentro de un contexto de identificación de errores en el procedimiento realizado por un estudiante al derivar una función. A partir de la lectura del ítem, se procedió a revisar sus diferentes componentes, tales como el enunciado, los distractores, la cápsula de aprendizaje y la aclaración final, con el objetivo de determinar si estos presentaban coherencia y claridad en relación con el propósito del ejercicio.

Asimismo, se dio inicio al proceso de análisis del ítem desde las categorías del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), lo cual permitió discutir y justificar la presencia o ausencia de los distintos subdominios y categorías asociadas al conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Este análisis se desarrolló mediante una discusión colectiva entre los integrantes del grupo, en la cual se revisaron las categorías inicialmente propuestas por el relator y se realizaron los ajustes pertinentes con el fin de lograr una clasificación más precisa y fundamentada de los elementos presentes en el ítem.

Tema y desarrollo

La sesión inició con la revisión general del documento de investigación, con el objetivo de comprobar que la estructura del trabajo se ajustara a los requerimientos institucionales y que cada apartado estuviera correctamente organizado. Posteriormente, se procedió con la lectura del ítem 3, correspondiente al tema de derivadas. Este ítem tenía como tema principal el uso de la Regla de la cadena. En el ejercicio se presentaba la resolución realizada por un estudiante para derivar la función $f(x) = \ln(\cos^2(x))$y se solicitaba que el profesor identificara en cuál de los pasos propuestos por el estudiante se había cometido un error. Luego de la lectura del enunciado, se revisaron los distractores, la cápsula de aprendizaje y la aclaración final, apartados en los cuales no se consideró necesario realizar modificaciones. Posteriormente se dio paso al análisis y discusión del ítem.

En primer lugar, se analizó el subdominio KOT. Inicialmente, el relator había propuesto únicamente la categoría procedimientos. Sin embargo, tras la discusión del grupo, se decidió incluir también las categorías definiciones, fundamentos y propiedades, así como registros de representación. La primera se incorporó debido a que en el ítem se hace uso de la definición y de las propiedades asociadas a la regla de la cadena, mientras que la segunda se añadió porque en el desarrollo del ejercicio se evidencian representaciones tanto verbales como algebraicas. En relación con el subdominio KSM, se determinó que no se evidenciaba ninguna categoría asociada, por lo que este subdominio no fue considerado dentro del análisis del ítem.

Seguidamente, se abordó el subdominio KPM. En un inicio, el relator había propuesto únicamente la categoría papel de los símbolos y uso del lenguaje formal. No obstante, tras la discusión, el grupo llegó al consenso de incorporar también la categoría jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos, ya que en la aplicación de la regla de la cadena es necesario seguir un orden lógico de procesos para obtener el resultado correcto.

Posteriormente se inició el análisis del dominio PCK, comenzando por el subdominio KFLM. En este caso se utilizó únicamente la categoría fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático. Durante la discusión se aceptó esta categoría, realizándose únicamente algunos ajustes en la redacción con el fin de mejorar la justificación presentada.

En cuanto al subdominio KMT, inicialmente se había considerado la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Sin embargo, durante la discusión se concluyó que el ítem no evidencia directamente una estrategia didáctica utilizada por el profesor para enseñar el tema, sino que se centra únicamente en el análisis del procedimiento realizado por el estudiante. Se comentó que esta categoría podría aplicarse si el ítem planteara una situación posterior al examen, en la cual el docente tuviera que diseñar una estrategia para evitar que el estudiante repitiera el error. No obstante, dado que el ítem no contempla dicha situación, se decidió no incluir este subdominio en el análisis final. Finalmente, se revisó el subdominio KMLS, el cual no había sido propuesto inicialmente. Tras una nueva revisión del ítem, se decidió incluirlo mediante la categoría nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado, ya que el profesor espera que el estudiante sea capaz de realizar de manera adecuada el procedimiento asociado a la derivación de la función.

Posteriormente se discutió si dentro de esta última categoría se evidenciaba únicamente el desarrollo procedimental o también el desarrollo conceptual descrito en el ítem. Para ello se intentó analizar la situación desde una posible representación gráfica que permitiera identificar algún componente conceptual. No obstante, se concluyó que la evidencia presente en el ítem se orienta principalmente al desarrollo procedimental.

Conclusiones

Durante la sesión se realizó el análisis completo del ítem 3 del tema de derivadas, revisando su correspondencia con las diferentes categorías del modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). A partir de la discusión colectiva se ajustaron varias de las categorías inicialmente propuestas, ampliando el análisis en los subdominios KOT y KPM, así como incorporando el subdominio KMLS. Asimismo, se determinó que los subdominios KSM y KMT no presentaban evidencia suficiente dentro del ítem. Con esto se dio por finalizado el análisis correspondiente al tercer ítem del tema de derivadas.

Evaluación y Proyección

Se concluyó la sesión con la revisión completa del ítem analizado. El relator quedó comprometido a realizar los ajustes correspondientes al ítem, teniendo en cuenta las correcciones y sugerencias realizadas durante la reunión.

Continuación de la sesión

Para la próxima sesión se llevará a cabo el análisis del ítem 3 correspondiente al tema de funciones, el cual estará a cargo del estudiante Johan Smith Salazar Giraldo. Esta sesión se realizará el 18 de marzo de 2026.

4.9. Protocolo No. 09

Fecha: 18 marzo de 2026

Director y correlator: Jenny Patricia Acevedo Rincón

Relator: Johan Smith Salazar Giraldo

Protocolante: Anamaría Rodríguez Capera

Participantes: Anamaría Rodríguez Capera, Diego Alonso Santiago Villar, Jenny Patricia Acevedo Rincón y Johan Smith Salazar Giraldo

Introducción

La sesión dio inicio con la lectura formal del tema y el indicador de desempeño correspondientes al tercer y último ítem de la unidad de Funciones. El foco central del análisis fue el dominio en funciones compuestas, abordando en primera instancia la estructura y formulación del enunciado. Se precisó que las opciones de respuesta del reactivo están diseñadas para reflejar la actuación docente frente a las producciones de los estudiantes, incluyendo un análisis detallado de los distractores y la construcción de la cápsula de aprendizaje.

En relación con dicha cápsula, se enfatizó la necesidad de integrar y explicar el método del cementerio (diagrama de signos), dada su eficacia didáctica para simplificar la comprensión de las restricciones del dominio en este tipo de ejercicios. Posteriormente, se abrió un espacio de diálogo técnico para evaluar la pertinencia de incorporar una simulación en GeoGebra como recurso dinámico de apoyo para visualizar la composición; no obstante, tras debatir su viabilidad, el grupo determinó no incluir recursos externos en esta etapa.

Finalmente, se procedió a la caracterización profunda del ítem a través de las categorías del modelo MTSK. En este ejercicio, se identificaron y discutieron los subdominios del Conocimiento de los Temas y el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas, vinculándolos con el Conocimiento de la Práctica Matemática. De igual forma, el análisis permitió visibilizar el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas, el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas que se movilizan al evaluar este contenido específico.

Tema y desarrollo

La sesión inició con la intervención del relator, quien presentó el tercer ítem de la unidad de Funciones, diseñado para evaluar el conocimiento docente sobre el dominio de funciones compuestas. La apertura de la jornada se centró en la lectura del indicador de desempeño, el cual subraya la capacidad del profesor para identificar, analizar y verificar las restricciones algebraicas críticas que surgen al componer funciones, especialmente cuando intervienen expresiones radicales y racionales. Una vez expuesto el indicador se procedió a leer el enunciado, que plantea la situación en la que un profesor les deja una tarea a sus estudiantes de determinar la composición $f \circ g(x)$ de las funciones $f(x) = \sqrt{x-2}$ y de $g(x) = \frac{1}{x-1}$el núcleo del ítem no reside únicamente en el cálculo procedimental, sino en la evaluación de una respuesta errónea proporcionada por un estudiante ficticio. El objetivo es identificar la intervención docente más pertinente para mediar dicho error. En este sentido, el grupo realizó un examen exhaustivo de las cuatro opciones de respuesta, analizando cómo cada distractor refleja distintos niveles de comprensión pedagógica y disciplinar ante los equívocos comunes en el manejo de desigualdades y dominios restringidos. Luego se procede al dialogo de la capsula de aprendizaje, en esta el relator comenta el interés de agregar un recurso en GeoGebra para apoyar su explicación de la composición de funciones.

Tras un debate técnico prolongado sobre la pertinencia didáctica de este software, el equipo llegó al consenso de que, para este ítem en particular, el recurso resultaría meramente decorativo. Se argumentó que el aprendizaje esperado en este nivel de complejidad es de naturaleza eminentemente algebraica y analítica, por lo que se decidió priorizar el rigor del proceso simbólico sobre la representación gráfica. En su lugar, se acordó que la cápsula debe centrar su fuerza explicativa en el método del cementerio (diagrama de signos). Se justificó esta elección debido a que este método organiza de manera lógica y visual la resolución de las inecuaciones necesarias para hallar el dominio de la función compuesta, facilitando la comprensión de las regiones donde la función está definida y evitando errores de cálculo en las restricciones.

Luego de haber agotado el análisis de la estructura del enunciado, la configuración de la cápsula de aprendizaje y la ruta procedimental completa para la resolución del problema, la sesión transitó hacia su fase constitutiva: la caracterización del ítem a través de los dominios y subdominios del modelo MTSK. En esta etapa, el equipo identificó y debatió cómo cada componente del reactivo moviliza categorías específicas del conocimiento especializado del profesor, permitiendo una validación teórica profunda de la propuesta pedagógica.

El análisis del conocimiento especializado inició con el dominio del Conocimiento Matemático (MK), centrándose específicamente en el subdominio de los Temas (KoT). Tras la exposición detallada por parte del relator, se procedió a la descripción y validación de las categorías asociadas al ítem: procedimientos, definiciones, propiedades y fundamentos, y registros de representación.

El siguiente subdominio que se analizo fue el KSM, El foco del debate se centró en la validación de la categoría inicialmente propuesta por el relator: conexiones basadas en el incremento de complejidad. Tras un análisis crítico por parte de los participantes, se cuestionó si el ítem realmente exigía una profundización en las propiedades intrínsecas del concepto de función o si, por el contrario, movilizaba una estructura distinta. Los asistentes propusieron rebatir la clasificación inicial y situar la relación dentro de la categoría de conexiones auxiliares. El argumento central radicó en que el ítem no busca “complicar” el objeto matemático “función” para explorar dimensiones más abstractas o generalizadas del mismo; más bien, el ejercicio exige la articulación funcional de dos tópicos distintos: la composición de funciones y el álgebra de desigualdades. En este contexto, el conocimiento sobre inecuaciones y restricciones actúa como una herramienta o soporte necesario para alcanzar la solución del problema principal.

Para finalizar con el análisis de los dominios pertenecientes al Conocimiento Matemático, se presentó la caracterización del subdominio KPM. Tras la exposición del relator sobre las categorías asociadas y sus respectivas descripciones, los participantes validaron la propuesta de manera unánime. El grupo coincidió en que las categorías seleccionadas reflejan fielmente las formas de proceder, argumentar y validar que se movilizan al resolver el ítem de funciones compuestas.

Dando continuidad al análisis, se procedió al abordaje del dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido, iniciando con el subdominio KFLM. En esta fase, el relator justificó la selección de la categoría 'formas de interacción del alumno con un contenido matemático', argumentando que el ítem está diseñado específicamente para movilizar el conocimiento del profesor sobre las estrategias, razonamientos y posibles obstáculos que surgen cuando el estudiante intenta determinar el dominio de una función compuesta. Se aclaró que se propone esta categoría puesto que el reactivo exige que el evaluado identifique la lógica subyacente al error del alumno (la confusión entre composición e intersección), permitiendo así caracterizar el conocimiento que el docente posee sobre cómo los estudiantes asimilan las restricciones algebraicas. Los participantes manifestaron su acuerdo con esta elección.

Al abordar el subdominio KMT, la discusión se centró en la pertinencia de la categoría inicialmente propuesta por el relator. Tras un análisis colectivo, se determinó que la categoría de recursos didácticos no resultaba la más adecuada para este ítem en particular, especialmente tras haber concluido que el uso de GeoGebra no aportaba un valor cognitivo diferenciador frente al proceso analítico requerido. En su lugar, el equipo argumentó que, dada la estrecha relación con las formas de interacción identificadas previamente en el KFLM, la caracterización debía orientarse hacia la categoría de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. Esta elección se justifica en la necesidad de analizar cómo el docente utiliza el método del cementerio como una técnica instruccional específica y cómo diseña tareas de mediación para corregir el error conceptual del estudiante.

Finalmente, la caracterización del ítem concluyó con el subdominio KMLS, centrando el análisis en la categoría de nivel de desarrollo procedimental o conceptual esperado. Tras la revisión del ítem se determinó que, si bien la comprensión del concepto de función compuesta es fundamental, la demanda cognitiva del ítem se inclina hacia un nivel de desarrollo procedimental. Esta decisión se fundamenta en que el éxito de la intervención docente propuesta y la resolución del error del estudiante depende estrictamente de la ejecución correcta de una secuencia de pasos algorítmicos: la sustitución algebraica, el planteamiento de inecuaciones y la aplicación técnica del método del cementerio. De este modo, el ítem exige al estudiante no solo conocer la definición de composición, sino demostrar competencia en el manejo operativo de las restricciones del dominio. Con esta última precisión, se dio por finalizada la validación de los subdominios para el tercer ítem de la unidad de funciones.

Conclusiones

El análisis del tercer ítem de la unidad de funciones permitió consolidar una visión integral sobre el conocimiento especializado necesario para la enseñanza de la composición de funciones. La validación grupal reafirmó que la identificación de restricciones en el dominio no es un proceso meramente mecánico, sino que requiere una movilización profunda del KoT (procedimientos y definiciones) y una articulación precisa con el álgebra de desigualdades (KSM - Conexiones Auxiliares). Asimismo, el debate técnico permitió concluir que la eficacia de un recurso didáctico como GeoGebra está vinculada a su pertinencia cognitiva.; en este caso, se priorizó el rigor del análisis simbólico y el uso del método del cementerio como estrategia de instrucción fundamental (KMT). En definitiva, el ítem se validó como un instrumento eficaz para caracterizar cómo el futuro docente interpreta y media los errores de aprendizaje (KFLM) asociados a la interpretación lógica de la composición.

Evaluación y proyección.

La sesión se evaluó como altamente productiva, destacándose el nivel de debate técnico alcanzado por los participantes. El tránsito desde la revisión de la estructura del ítem hasta la caracterización profunda mediante el modelo MTSK permitió unificar criterios sobre la evaluación del cálculo diferencial. La decisión de reclasificar la conexión del KSM de incremento de complejidad a auxiliar demuestra una madurez en el manejo del marco teórico por parte del equipo asegurando que el instrumento final sea teóricamente robusto y coherente. Como fase final de este ciclo de validación, la proyección de trabajo para la siguiente sesión se ha definido como un espacio de consolidación técnica, donde todos los participantes realizarán una revisión exhaustiva de los protocolos y atenderán aquellas dudas o correcciones que quedaron pendientes en encuentros previos.

Continuidad de la sesión.

Dando continuidad al cronograma, la sesión programada para el próximo 20 de marzo se ha definido como una jornada de consolidación y cierre técnico. En este encuentro, que contará con la participación de todo el equipo de investigación, se procederá a la revisión del último protocolo y aportes finales a los ítems ya presentados, como una segunda lectura. Un objetivo central de esta sesión será atender las aclaraciones, dudas y correcciones pendientes que, aunque fueron identificadas en encuentros previos, quedaron pendientes. Este ejercicio de corrección técnica permitirá realizar los retoques finales al instrumento, asegurando la coherencia interna de cada ítem antes de proceder a la redacción de las conclusiones generales del trabajo. Con esta validación exhaustiva, el seminario dará por concluida la fase de recolección y refinamiento de datos, dejando el documento listo para su fase de cierre.

5. Resultados

El presente apartado expone los resultados definitivos de la investigación, representados en el conjunto de ítems diseñados y validados para evaluar el conocimiento especializado del Cálculo Diferencial. A diferencia del proceso de discusión cronológica, los resultados se organizan aquí de manera categórica por unidades temáticas: Funciones, Límites y Derivadas. Esta estructura permite al lector apreciar la coherencia y profundidad con la que se aborda cada objeto matemático desde el modelo MTSK. Cada ítem se presenta bajo una estructura técnica estandarizada que incluye: el tema y su indicador correspondiente; una tabla detallada de los dominios y subdominios del modelo MTSK que se pretenden evaluar; el enunciado o situación problema y las opciones de respuesta con su respectiva clave. Finalmente, se integra un análisis profundo de los distractores, la cápsula de aprendizaje diseñada para la mediación pedagógica y las aclaraciones finales.

5.1. Instrumento-Eje funciones

En esta sección se proponen cuatro situaciones (ítems) relacionadas con el concepto de función en Cálculo Diferencial, diseñadas para profesores de matemáticas en formación y analizadas bajo el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK). Estas situaciones abordan aspectos claves como la definición de función, la interpretación del concepto de función cuadrática y el dominio de una función compuesta. El análisis de cada ítem permite identificar los subdominios del conocimiento especializado del profesor que se reflejan al interpretar, justificar y explicar las ideas matemáticas o didácticas.

5.1.1. Ítem 1

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Funciones

Tema: Concepto de función

Indicador: Reconoce y justifica si una relación representa una función dado un problema dado, utilizando argumentos algebraicos, gráficos y conceptuales.

Subdominios y categorías MTSK			
Dominio	**Subdominio**	**Categoría asociada**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	KOT	Definiciones, propiedades y fundamentos	Comprender la definición de función y la propiedad de unicidad, indicando que a cada valor de t debe corresponder un único T Reconocer que la relación $T = \pm\sqrt{t}$ incumple esta condición al generar dos valores posibles para una misma entrada.
		Fenomenología y aplicaciones	Se presenta una situación contextualizada permitiendo interpretar la relación matemática a partir de un fenómeno de enfriamiento.
		Registros de representación	Interpretación de la relación desde lo algebraico y lo gráfico (no pasa la recta vertical) para concluir que no es función.
	KSM	Conexiones auxiliares	Existen conexiones con otros conceptos de la matemática como la raíz cuadrada, las relaciones en $\mathbb{R}^2$ y la condición de unicidad que define el concepto de función.
	KPM	Formas de validación y demostración	Justificar rigurosamente el resultado mediante razonamiento algebraico, análisis gráfico y aplicación de la definición formal.
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Uso del símbolo $\pm$ y notación de conjuntos para representar rigurosamente la relación entre tiempo y temperatura y analizar si cumple la condición para ser función.

Enunciado

Los estudiantes de la Universidad Industrial de Santander se encontraban realizando un experimento sobre la temperatura de un laboratorio, se mide la temperatura T de una sustancia en grados Celsius en función del tiempo t (en minutos) después de colocarla en un ambiente frío. Durante las mediciones, el profesor pregunta a los estudiantes:

Según la siguiente relación $R = (t, T) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T = \pm\sqrt{t}\}$ ¿Podemos decir que la temperatura es una función del tiempo?

a. Sí, porque a cada tiempo t le va a corresponder al menos una temperatura T .
b. Si, porque el gráfico de la función pasa la prueba de la recta vertical.
c. No, porque a un mismo valor de tiempo t le corresponden dos valores distintos de temperatura T .
d. No, solo cumple si $t > 0$.

Respuesta correcta

Alternativa c

Análisis de distractores

El estudiante que responde a, no tiene en cuenta el criterio fundamental de una función, el cual no solo se basa en tener un valor en el dominio, sino tener uno y sólo uno para cada valor del codominio.

El estudiante que responde b, no considera la representación gráfica real de la relación $T = \pm\sqrt{t}$, si se trazara la gráfica se observaría que por cada valor t existen dos puntos, uno con $T > 0$ y otro con $T < 0$ que están alineados verticalmente, por tanto, no pasa la prueba de la recta vertical.

El estudiante que responde d, considera que el problema está en el dominio y no en la unicidad de los valores del codominio.

Cápsula de aprendizaje

La cápsula aborda el concepto de una función a partir de una situación de la vida real vinculada con la temperatura de una sustancia en función del tiempo. Este contexto permite comprender como una magnitud puede depender de otra, analizando si esa relación se podría considerar como una función matemática. Recordando que una función establece una relación unívoca entre dos conjuntos, es decir, a cada valor del dominio o entrada le corresponde un único valor en la salida o codominio.

Además de reconocer este concepto formal, se busca que el estudiante interprete el concepto de función desde distintas formas de representación, como gráficas, numéricas y algebraicas, reforzando la comprensión de cómo las funciones modelan fenómenos de la vida real y cómo la representación gráfica puede evidenciar visualmente cuando una relación deja de ser función. Para ello, se recomienda utilizar software de calculadoras gráficas para ver la representación gráfica de dicha relación y de otras, en este caso se recomienda el software de GeoGebra.

En cuanto a los conceptos de relación y función, se sugiere revisar aquellos conceptos de una manera más detallada y con ejemplo para notar la diferencia. Para ello, considerar lo presentado en el siguiente video desde el segundo 20 hasta el minuto 1,25 segundos: https://www.youtube.com/watch?v=AzTGmJGIpI8

Aclaración final

En la situación que se propone, el objetivo es analizar si la relación $\mathrm{R} = \{(t, T) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T = \pm\sqrt{t}\}$ puede considerarse una función que asigne a cada tiempo t una única temperatura T . A partir del comportamiento de la expresión dada, se concluye que esta relación no representa una función, ya que para cada valor de $t \geq 0$ se obtienen dos valores posibles de temperatura, uno positivo y otro negativo, es decir, $T = \sqrt{t}\ y\ T = -\sqrt{t}$. Esto incumple el criterio fundamental de las funciones, según el cual a cada elemento del dominio debe corresponderle un único valor en el codominio. Asimismo, si se representa gráficamente la relación, se evidencia que la gráfica completa no supera la prueba de la recta vertical, pues cualquier recta vertical con $t \geq 0$ interseca la curva en dos puntos distintos. Por tanto, aunque la relación es válida desde el punto de vista algebraico o como correspondencia, no cumple las condiciones necesarias para ser considerada una función. Este análisis refuerza la importancia de verificar la unicidad en la asignación de valores y de utilizar distintas representaciones algebraicas, numéricas y gráficas para determinar adecuadamente la naturaleza funcional de una relación dada.

5.1.2. ítem 2

Universidad Industrial de

Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Funciones

Tema: Función cuadrática (Máximos y mínimos)

Indicador: Reconoce e interpreta el valor máximo de una función cuadrática a partir de su expresión algebraica, identificando el vértice de la parábola y explicando su significado dentro del comportamiento de la función.

Subdominios y categorías MTSK

Dominio	Subdominio	Categoría asociada	Descripción en el contexto del ítem
MK	**KOT**	Definiciones, propiedades y fundamentos	La situación presenta una función cuadrática específica y solicita interpretar su valor máximo, lo que involucra definiciones, comprender propiedades fundamentales de estas funciones, como la existencia de un vértice y su relación con el valor extremo de la función.
		Significados	Es importante tener en cuenta que significa el vértice de una función, es decir, conocer sus características e interpretarlo en la situación.
		Registros de representación	Se presenta la función mediante su expresión algebraica, lo que implica reconocer este registro como una forma de representar una función cuadrática y analizar información matemática a partir de ella. También se analiza a partir de su representación gráfica o tabular.
	KPM	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Es importante reconocer el papel de los símbolos, como lo son los signos de la función y los detalles que describen la expresión algebraica.
PCK	**KMLS**	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Se evidencia que el estudiante alcanza un nivel procedimental al identificar el valor máximo, pero aún no logra justificar conceptualmente por qué ese punto corresponde al máximo de la función.
	KFLM	Formas de interacción del alumno con un contenido matemático	Se evidencia que los estudiantes pueden reconocer un resultado numérico correcto sin comprender plenamente el significado del máximo dentro de la estructura de la función.

Enunciado

En una clase de Cálculo I, un profesor está trabajando con el concepto de función y representación gráfica. Para ello representa la función: $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

El docente solicita a los estudiantes que encuentren el valor máximo de la función y expliquen por qué el valor encontrado corresponde al punto más alto de la gráfica. Un estudiante responde:

El valor máximo es 5 cuando $x = 2$, porque probé varios valores en la función y ese fue el más grande que encontré, pero no estoy seguro de por qué ocurre eso.

Ante la respuesta presentada por el estudiante, ¿Qué responderías para favorecer la comprensión del concepto de máximo en esta función?

a. Pedirles a los estudiantes que construyan una tabla de valores de x cercanos a 2 para observar cómo cambian los valores de la función y notar que antes de 2 los valores aumentan y después de 2 comienza a disminuir.
b. Confirmaría que el valor máximo es 5 cuando $x = 2$ y pediría a los estudiantes usar ese resultado para continuar resolviendo otros ejercicios similares.
c. Explicaría que la función es cuadrática y que su gráfica es una parábola y como el coeficiente de x^2 es negativo, entonces la parábola abre hacia abajo. Luego, mostraría que en el punto $(2,5)$ se encuentra el vértice, que es el punto más alto de la parábola.
d. Recordaría a los estudiantes que en las funciones cuadráticas el valor donde ocurre el máximo o mínimo se puede encontrar usando la expresión $x = \frac{-b}{2a}$ y se verifica que en este caso ese valor de x es 2 .

Respuesta correcta

Alternativa c

Análisis de distractores

El futuro licenciado en matemáticas que considera la respuesta a, valora la exploración mediante tablas de valores alrededor de $x = 2$, lo cual tiene cierto valor didáctico porque permite observar que la función aumenta antes de ese punto y disminuye después. Sin embargo, su razonamiento se mantiene en un nivel empírico, basado únicamente en probar números. De esta manera, identifica el máximo por comparación de resultados, pero no explica la estructura matemática de la función cuadrática.

El futuro licenciado en matemáticas que considera la respuesta b, se limita a confirmar que el máximo de la función es 5 cuando $x = 2$. Aunque reconoce el resultado correcto, su intervención no profundiza en la explicación del concepto ni en el significado matemático del máximo dentro de la función.

El futuro licenciado en matemáticas que considera la respuesta d, recurre a la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$ para determinar el valor donde ocurre el máximo de la función cuadrática. Aunque esta estrategia es matemáticamente correcta, su enfoque se centra principalmente en la aplicación de una regla o procedimiento, sin explicar su significado ni relacionarla con la forma de la gráfica. En ese sentido, se privilegia el uso del algoritmo para obtener el resultado, pero no se promueve la comprensión de por qué ese valor corresponde al vértice de la parábola ni como se conecta la expresión algebraica con su representación gráfica.

Cápsula de aprendizaje

Una función cuadrática tiene la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ con\ a \neq 0$

La gráfica de este tipo de función es una parábola, cuya apertura depende del signo del coeficiente a :

- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y la función tiene un valor mínimo.

- Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y la función tiene un valor máximo.

El punto donde ocurre ese máximo o mínimo se denomina vértice de la parábola. Para una función cuadrática, la coordenada x del vértice se puede determinar mediante la expresión: $x = \frac{-b}{2a}$.

Luego, se calcula la imagen de ese punto x en la función y este representa el mayor o menor valor dependiendo de la orientación de la parábola. A continuación, se presenta un applet en GeoGebra que permite validar la gráfica de cualquier función cuadrática: https://www.geogebra.org/m/phbtpegg

Aclaración final

La comprensión del máximo o mínimo de una función cuadrática resulta fundamental en la formación de los estudiantes, ya que permite interpretar de qué manera el comportamiento algebraico de una función se refleja en su representación gráfica. En ese sentido, la retroalimentación que el docente comunica a los estudiantes debe enfatizar que estos valores no se determinan únicamente mediante la prueba de distintos valores numéricos, sino a partir de la comprensión de la estructura de la función y de las características de su representación gráfica.

Desde esta perspectiva, es importante reconocer que el vértice de la parábola corresponde al punto en el cual la función alcanza su valor extremo, ya sea máximo o mínimo, dependiendo de la orientación de la parábola. Asimismo, aunque la expresión $x = -\frac{b}{2a}$ permite determinar la coordenada x del vértice, su uso no debe limitarse a la aplicación de una fórmula, sino que debe interpretarse en relación con la forma de la gráfica y el comportamiento general de la función cuadrática.

5.1.3. ítem 3

Universidad Industrial de

Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Funciones

Tema: Función compuesta (Dominio)

Indicador: Reconoce y valida el dominio de una función compuesta, articulando el significado de la composición de funciones y las restricciones del dominio.

Subdominios y categorías MTSK			
Dominio	**Subdominio**	**Categoría asociada**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Procedimientos	Se quiere determinar el dominio de una función compuesta, obteniendo restricciones y la resolución de la desigualdad.
		Definiciones, propiedades y fundamentos	Se reconoce la definición formal del dominio en funciones compuestas y las propiedades de funciones racionales y radicales que restringen los valores.
		Registros de representación	Se presentan las funciones mediante sus expresiones algebraicas, la composición de funciones se representa algebraicamente implicando reconocer este registro como una relación entre la salida de una función y la entrada de otra.
	KSM	Conexiones auxiliares	La situación requiere de hacer conexión entre el dominio de funciones elementales hacia funciones compuestas, de acuerdo con los procedimientos algebraicos.
	KPM	Jerarquización y planificación como	El ítem permite organizar la solución en pasos, primero es interpretar la

		forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos	composición, establecer restricciones, resolver la desigualdad y validar el dominio obtenido.
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Se identifica el papel del símbolo de composición, las funciones como expresiones algebraicas, las desigualdades, etc.
PCK	**KFLM**	Formas de interacción del alumno con un contenido matemático	El ítem permite analizar cómo el estudiante desarrolla el ejercicio mediante la mecanización del criterio de intersección de dominios sin comprender el significado de la composición.
	KMT	Estrategia, técnicas, tareas, ejemplos	En el ítem se exige que el futuro docente de matemáticas proponga una intervención basada en preguntas orientadoras, comparación de procedimientos y análisis guiado del significado de la composición.
	KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Se evidencia que el estudiante debe articular la comprensión conceptual, manejo simbólico y justificación del procedimiento, es decir, además de hacer el procedimiento correcto, debe identificar el dominio a partir de las desigualdades.

Enunciado

En un curso de Cálculo Diferencial, el profesor propone a sus estudiantes la siguiente tarea:

Sean las funciones: $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$

Determine el dominio de la función compuesta $(f \circ g)$

Uno de los estudiantes responde:

"El dominio de $(f \circ g)$ es la intersección entre el dominio de f y el dominio de g. Entonces:

$$Dom(f) = [2, \infty), Dom(g) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

Por lo tanto, $Dom(f \circ g) = [2, \infty)$"

¿Cuál es la mejor intervención didáctica para abordar el error del estudiante?

a. La respuesta es incorrecta porque en las funciones compuestas no se puede usar la intersección de dominio. Debes memorizar que en estos casos primero se reemplaza una función dentro de la otra y luego se resuelve la desigualdad faltante. Haz nuevamente el procedimiento.
b. El error está en que aplicaste una regla de manera general sin considerar el significado de la composición. Ten en cuenta que, en la composición de funciones, $x \in Dom(g)$ y además $g(x) \in Dom(f)$. Te propongo revisar primero los valores que puede tomar la función $g(x)$, representarlos en una tabla o bosquejo gráfico y luego analizar los valores que cumplen la condición. Después de eso, comparas tu respuesta inicial con el nuevo razonamiento.
c. El dominio correcto es $\left(1, \frac{3}{2}\right]$, porque al resolver correctamente se obtiene ese intervalo. El procedimiento que hiciste está mal, así que debes practicar más ejercicios similares para evitar equivocarte en el parcial.
d. El error que cometiste es algebraico, lo mejor es mostrarte la solución completa en el tablero:

$$\sqrt{\frac{1}{x-1} - 2}$$

Luego, resolvemos:

$$\frac{1}{x-1} - 2 \geq 0$$

Tenemos que:

$x = 1$ y $x = \frac{3}{2}$ son puntos críticos

Luego, si hacemos el análisis de signos, obtenemos que el dominio es:

$$Dom(f \circ g) = \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

Después de ver varios ejemplos resueltos, entenderás cómo hacerlo.

Respuesta correcta

Alternativa b

Análisis de distractores

El futuro docente de matemáticas que elige la respuesta a, reconoce que la intersección de dominio no es válida, sin embargo, su intervención se reduce a una corrección procedimental e intentar que el estudiante memorice una regla o propiedad. Es decir, no aprovecha el error como una oportunidad de aprendizaje para introducir el significado matemático de la composición de funciones.

El futuro docente de matemáticas que selecciona la respuesta c, aunque presenta el resultado matemático, no ofrece una explicación didáctica formativa. El error del estudiante se reduce a una supuesta falta de práctica o ejercitación, sin atender al origen conceptual. Esta respuesta muestra una mirada centrada en el resultado y no en la interpretación del aprendizaje del estudiante.

El futuro docente de matemáticas que escoge la respuesta d, desarrolla el procedimiento correcto, sin embargo, lo hace de forma mecánica sin garantizar que el estudiante comprenda por qué su razonamiento inicial era insuficiente.

Cápsula de aprendizaje

Estudiar el dominio de una función compuesta permite comprender cómo se articulan dos funciones cuando la salida de una función se convierte en la entrada de otra. Cuando queremos encontrar el dominio de una función compuesta, en este caso $f(g(x))$, no basta con realizar la intersección entre los dominios de f y g. Lo verdaderamente importante es comprender que la x debe pertenecer al dominio de la función interna g y, además, la imagen de $g(x)$ debe ser un valor sin restricciones en la función externa f.

https://www.youtube.com/watch?v=o0l59wSySeA

Aclaración final

La resolución correcta no debe presentarse como una secuencia algebraica, sino como una oportunidad para enfatizar que el dominio de una función compuesta se constituye por la siguiente relación:

$$x \in Dom(g) \text{ y } g(x) \in Dom(f)$$

En ese sentido, la solución correcta del ejercicio es:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } g(x) = \tfrac{1}{x-1}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1} - 2}$$

Luego, debemos tener en cuenta que lo que está dentro de la raíz tiene que ser mayor o igual a cero, es decir:

$$\frac{1}{x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{3-2x}{x-1} \geq 0$$

De ahí que, los puntos críticos son:

$$x = 1 \text{ y } x = \tfrac{3}{2}$$

A partir del análisis de signos, tenemos que:

$3-2x$	+		+		-
$x-1$	-		+		+
	-	1	+	$\frac{3}{2}$	-

Por tanto, el dominio correcto es:

$$Dom(f \circ g) = \left(1, \frac{3}{2}\right]$$

5.2 Instrumento – Eje límites

En esta sección se presentan los resultados correspondientes al análisis de los ítems relacionados con el concepto de límite en el contexto del cálculo diferencial. Los ítems fueron diseñados con el propósito de explorar distintos aspectos del conocimiento matemático involucrado en la comprensión de este concepto. En particular, se incluyen preguntas asociadas a límites al infinito, límites trigonométricos y continuidad.

5.2.1. Ítem 1

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Límites

Tema: Continuidad

Indicador: Identificar la relación entre el concepto de límites y el concepto de continuidad.

Subdominios y categorías MTSK

Dominios	Subdominios	Categorías asociadas	Descripción en el contexto del ítem
MK	KOT	Definiciones, propiedades, y fundamentos	Conocimiento de los conceptos de continuidad y límites y sus condiciones formales.
		Registros de representación.	Representación mediante la expresión algebraica
	KSM	Conexiones auxiliares.	Comprensión de la relación entre límite, continuidad y función por partes.
PCK	KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos.	Selección de objetivos, recursos y estrategias adecuadas para enseñar continuidad.
		Recursos didácticos digitales.	Uso de geometrías dinámicas (GeoGebra)

Enunciado

El profesor propone analizar la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & si\ x \leq 2 \\ ax + 1, & si\ x > 2 \end{cases}$$

y pide hallar el valor de a para que sea continua.

Luego un estudiante pregunta: “Profe, ¿Qué relación tiene este tema de continuidad con el tema de límites?

¿Cuál de las siguientes estrategias ayuda a que el estudiante comprenda el concepto de continuidad y su conexión con los límites?

a. Encontrar el valor de a que hace continua la función aplicando directamente operaciones algebraicas y fórmulas.
b. Representar la función en GeoGebra, analizar los límites laterales en $x = 2$ y verificar explícitamente las condiciones de continuidad en ese punto.

c. Identificar los puntos donde la función presenta interrupciones y clasificar dichas rupturas como de salto o de hueco, sin calcular límites.
d. Representar la función en GeoGebra y determinar el valor de a para el cual la gráfica parece continua en $x = 2$.

Respuesta correcta

Alternativa b

Análisis de distractores

Distractor respuesta a: El profesor se centra en la manipulación algebraica (igualar expresiones) y cree que resolver el valor de $\boldsymbol{a}$ ya implica comprender la continuidad. Sin embargo, queda con el proceso y no con el concepto, dejando a un lado la reflexión del por qué se igualan los tramos.

Distractor respuesta c: El docente puede creer que detectar discontinuidades equivale a comprender la continuidad, cuando en realidad este objetivo se centra en diagnosticar rupturas, no en explicar el concepto. Además, en este caso solo hay un punto candidato a ser discontinuo $(x = 2)$, por lo que el análisis de "tipos de discontinuidad" no aporta comprensión conceptual.

Distractor respuesta d: El uso del software GeoGebra puede dar una ilusión de comprensión al ver la gráfica "sin ruptura", ya que puede parecer condición suficiente para validar la continuidad de la función. Luego, una representación no es suficiente, por lo que se requiere la justificación conceptual.

Cápsula de aprendizaje

En la enseñanza de la continuidad, es importante no quedarse solo en el cálculo del valor de a, sino guiar al estudiante hacia el significado del proceso. El docente debe promover que los alumnos comprendan que la continuidad no se trata de que la gráfica "no se parta", sino de que los límites laterales coincidan con el valor de la función en el punto. Por eso, las preguntas o actividades deben orientarse a que el estudiante explique con sus propias palabras qué implica igualar las expresiones, entendiendo este procedimiento como la forma de garantizar que los tramos de la función se unan de manera coherente. Además, se espera que el estudiante relacione el límite con la idea de unión entre tramos y use la gráfica como apoyo conceptual para la modelación de la función, no como evidencia suficiente. Así, el aprendizaje pasa de ser procedimental, centrado en la aplicación mecánica de un método, a ser conceptual, enfocado en la comprensión del sentido matemático del proceso. Sin negar que, para algunas definiciones, el apoyo gráfico es suficiente para ejemplificar el concepto de continuidad en situaciones introductorias.

Para ello toca tener en cuenta la definición[††] de continuidad vista como límites

Una función $f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- $f(a)$ está definida.
- Existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$
- El valor del límite coincide con el valor de la función:

En el caso de funciones definidas por partes, esta condición se traduce en que los límites laterales sean iguales y coincidan con el valor de la función en el punto de unión:

[††] [1] Adaptado de: Zill, D. G., & Wright, W. S. (2011). Cálculo: Trascendentes tempranas (4.ª ed.). McGraw-Hill.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Aclaración final

Aunque la representación visual mediante un software como puede ser el siguiente: https://www.geogebra.org/classic/kmzuvhbj sirve para ejemplificar una situación puntual para apoyo visual del concepto.

Este ejercicio se resolvería mediante el siguiente proceso, sin dejar de lado el concepto básico.

Se tiene la función

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x^2 - 1, & si\ x \leq 2 \\ ax + 1, & si\ x > 2 \end{Bmatrix}$$

Sabemos que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Entonces

$$\lim_{x \to 2^-} x^2 - 1 = 3\ y\ \lim_{x \to 2^+} a\,x + 1 = 2a + 1$$

$$3 = 2a + 1$$

$$a = 1$$

Por lo tanto, para que la función sea continua el límite por derecha y por izquierda deben coincidir, y, para que eso pase el valor de a debe ser igual a 1.

5.2.2. ítem 2

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Límites

Tema: Límites al infinito

Indicador: Interpretar el comportamiento de una función definida algebraicamente cuando la variable tiende a infinito, utilizando el concepto de límite para describir su tendencia.

Subdominios y categorías MTSK

Dominios	**Subdominios**	**Categorías asociadas**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Procedimientos	En el ítem se requiere aplicar y analizar procedimientos matemáticos para determinar el comportamiento de la función cuando la variable tiende al infinito
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	En el ítem se usa la propiedad de las funciones racionales según la cual, cuando los grados del numerador y denominador son iguales, el límite al infinito corresponde al cociente de los coeficientes principales.
		Registro de representación	En el ítem se utilizan distintos registros (algebraico, numérico y gráfico) para analizar la tendencia de la función.
		Fenomenología y aplicaciones	En el ítem se contextualiza el comportamiento de una función racional en una situación aplicada (concentración en un reactor)
	KSM	Conexiones basadas en la simplificación	En el ítem se evidencia la simplificación algebraica como medio para comprender el

			comportamiento de la función racional.
	KPM	Formas de validación y demostración	En el ítem se ven las diferentes formas de justificar la tendencia al infinito.
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Interpretación del significado de la expresión $C(t)$como función, de la razón algebraica entre polinomios y del símbolo $t \to +\infty$
		Procesos asociados con resolución de problemas.	En el ítem se analiza una afirmación del estudiante y se decide la intervención más adecuada para abordar el problema.
PCK	KFLM	Fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático.	En el ítem se identifica una dificultad; asumir que, si la variable crece, la función también crece sin límite.
		Formas de interacción del alumno con un contenido matemático.	En el ítem se observa una conjetura intuitiva del estudiante que requiere ser confrontada mediante una participación.
	KMT	Recursos didácticos (físicos y digitales).	En el ítem se propone el uso de tablas y gráficas como posibles recursos para analizar la tendencia de la función.

Enunciado

La concentración $C(t)$ de una sustancia en un reactor químico (en $\frac{mg}{L}$) después de t horas está dada por:

$$C(t) = \frac{4t^2 + 10t}{t^2 + 5t + 8}$$

Un estudiante afirma:

"Como el tiempo crece indefinidamente, la concentración también crecerá sin límite."

El profesor desea intervenir para favorecer una comprensión conceptual del comportamiento de $C(t)$ cuándo $t \to +\infty$.

¿Cuál de las siguientes intervenciones satisface el propósito de enseñanza de este enunciado?

a. Aplicar directamente la propiedad de que, cuando los grados del numerador y del denominador son iguales, el límite es el cociente de los coeficientes mayores, y concluir que el valor es 4.
b. Reescribir la expresión dividiendo numerador y denominador por t^2 (término con el grado mayor) y analizar el comportamiento de cada término cuando $t \to +\infty$, para justificar por qué la función se aproxima a 4.
c. Construir una tabla de valores grandes de t (por ejemplo 100, 1000, 10000) para observar la tendencia numérica de la función y contrastarla con la afirmación del estudiante.
d. Representar gráficamente la función y analizar la presencia de una asíntota horizontal para refutar la idea de crecimiento indefinido.

Respuesta correcta

Alternativa b

Análisis de distractores

Distractor respuesta a: Esta opción representa una enseñanza centrada en la aplicación directa de una regla sin justificas su significado. Aunque el resultado es correcto, no promueve la comprensión conceptual del comportamiento de la función, sino una memorización procedimental.

Distractor respuesta c: Esta intervención se basa en evidencia empírica numérica. Si bien puede mostrar tendencia, no garantiza comprensión conceptual del límite al infinito ni explica por qué la función se aproxima a un valor específico. Se apoya en aproximaciones, no en análisis estructural.

Distractor respuesta d: Esta opción privilegia la representación visual como argumento principal. Aunque la gráfica puede sugerir la existencia de una asíntota horizontal, no asegura que el estudiante comprenda la razón algebraica que determina el valor del límite.

Cápsula de aprendizaje

En la enseñanza de los límites al infinito en funciones racionales, es importante no centrarse únicamente en la aplicación mecánica de reglas, sino guiar al estudiante hacia la comprensión del comportamiento global de la función (observar el siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=4dmO8UG1z3I&list=PL9SnRnlzoyX0o0z-YWbg6P3Pz9I0xlklS&index=52). El docente debe promover que los alumnos reconozcan que cuando x tiende a infinito, el valor del límite depende principalmente de la relación entre los grados del numerador y del denominador, y no del crecimiento aislado de la variable.

Por ello, las actividades deben orientarse a que el estudiante explique por qué ciertos términos dominan el comportamiento de la función para valores grandes de x , interpretando el proceso como un análisis de tendencias y no solo como un procedimiento algebraico. Además, se espera que el estudiante relacione el resultado del límite con la existencia de asíntotas horizontales y utilice representaciones gráficas como apoyo para la interpretación, pero no como única evidencia de la respuesta.

De esta manera, el aprendizaje transita de un enfoque procedimental centrado en aplicar reglas de forma automática a un enfoque conceptual que privilegia la comprensión del comportamiento asintótico de las funciones.

Para una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

cuando $x \to \infty$:

- Si grado $P < grado\ Q \Rightarrow$ el límite es 0.
- Si grado $P = grado\ Q \Rightarrow$ el límite es el cociente de coeficientes de grado mayor.
- Si grado $P > grado\ Q \Rightarrow$ el límite no es finito (crece o decrece sin cota).

Aclaración final

Se tiene la función:

$$C(t) = \frac{4t^2 + 10t}{t^2 + 5t + 8}$$

Sabemos que, cuando se calcula un límite al infinito en funciones racionales, el comportamiento depende de los términos de mayor grado.

En este caso, el numerador y el denominador son polinomios de grado 2. Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{4t^2+10t}{t^2+5t+8} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{4t^2}{t^2}+\frac{10t}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{5t}{t^2}+\frac{8}{t^2}}$$

Cuando $t \to +\infty$, los términos $\frac{10}{t^2}, \frac{5t}{t^2}, \frac{8}{t^2}$ tienden a 0, por lo que el límite es: $\frac{4}{1} = 4$

Por lo tanto, aunque el tiempo crece indefinidamente, la concentración no lo hace; se aproxima a un valor constante igual a 4, lo que corresponde a la asíntota horizontal de la función.

5.2.3. ítem 3

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Límites

Tema: Límites trigonométricos

Indicador: Reconoce y aplica el límite notable $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$

Subdominios y categorías MTSK			
Dominios	**Subdominios**	**Categorías asociadas**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Procedimientos	La resolución del límite requiere transformar algebraicamente la expresión $\frac{\sin(3x)}{x}$para obtener la forma $\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3$
		Definiciones, propiedades y sus fundamentos	El ejercicio se fundamenta en el uso del límite notable $\lim_{X \to 0} \frac{Sen(x)}{x}$
		Registros de representación	A partir de una exploración gráfica, los estudiantes pueden identificar patrones y formular una posible generalización del límite notable, relacionando el registro gráfico con el registro simbólico de la expresión.
	KSM	Conexiones basadas en la simplificación	Transformación algebraica para conectar un caso particular con un límite general conocido.
		Conexiones auxiliares	Relación entre funciones trigonométricas límites fundamentales
	KPM	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	En el ítem se evidencia mediante el uso de la notación de función, límite, infinito y expresiones algebraicas para representar formalmente la situación matemática.
PCK	**KFLM**	Formas de interacción del alumno con un contenido matemático	En el ítem se evidencian dificultades para interpretar la estructura del límite, reconocer límites notables y realizar la manipulación algebraica necesaria para determinar su valor.

	KMT	Teorías de enseñanza de las matemáticas	En el ítem se evidencia esta categoría porque el profesor decide cómo intervenir frente a las respuestas de los estudiantes con el objetivo de favorecer la comprensión del concepto. La opción correcta propone una intervención basada en el aprendizaje por descubrimiento
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	En el ítem se propone una tarea que requiere que el estudiante analice la expresión del límite, realice transformaciones algebraicas y aplique propiedades conocidas para determinar su valor.
	KMLS	Resultado de aprendizaje esperado	El ítem evalúa la capacidad del estudiante para aplicar propiedades y límites notables en la determinación del valor de un límite.

Enunciado

En una clase se propone calcular:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(3x)}{x}$$

Tres estudiantes presentan los siguientes argumentos:

Estudiante 1:

“Como $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$, entonces este límite también es 1.”

Estudiante 2:

“Si reemplazo directamente $x = 0,\ da\frac{0}{0}$, entonces el límite no existe.”

Estudiante 3:

“Reescribo la expresión como $\frac{sen(3x)}{3x} \cdot 3$. Como el primer factor tiende a 1, el límite es 3.”

El profesor decide aprovechar las respuestas de los estudiantes para favorecer la comprensión del concepto mediante aprendizaje por descubrimiento.

¿Cuál de las siguientes intervenciones pedagógicas es la más adecuada para favorecer la comprensión conceptual del grupo?

a. Explicar inmediatamente el procedimiento correcto y mostrar que el resultado del límite es 3.
b. Recordar a los estudiantes la regla del límite notable y pedir que la memoricen para aplicarla en ejercicios similares.
c. Pedir a los estudiantes que exploren un *applet* de GeoGebra que represente el comportamiento de la expresión $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$ cuando x se aproxima a 0, con el propósito de que, a partir de la observación y la exploración puedan: identificar patrones, deducir una posible generalización del límite notable y utilizar esta idea para justificar el valor del límite en este caso particular.
d. Indicar a los estudiantes que revisen en el libro o en el material del curso el ejemplo del límite notable y luego intenten aplicar el mismo procedimiento al ejercicio.

Respuesta correcta

Alternativa c

Análisis de distractores

Distractor A: Esta acción permite llegar al resultado correcto, limita la participación activa de los estudiantes y reduce la oportunidad de que analicen sus propios razonamientos. Desde la perspectiva del aprendizaje por descubrimiento, esta intervención centra el proceso en la explicación del profesor y no en la exploración del estudiante.

Distractor B: Aunque se promueve la activación de conocimientos previos, el enfoque sigue siendo principalmente procedimental, ya que se orienta a aplicar una regla conocida sin necesariamente analizar la estructura de la expresión ni comprender por qué es necesario transformarla.

Distractor D: Aunque puede ayudar a recordar el método, esta intervención no aprovecha las ideas expresadas por los estudiantes durante la discusión ni promueve la exploración de la estructura de la expresión a partir de sus propios razonamientos. En consecuencia, el aprendizaje se orienta hacia la reproducción de un ejemplo conocido, más que hacia la construcción del conocimiento mediante el análisis y el descubrimiento guiado de la transformación necesaria para aplicar el límite notable.

Cápsula de aprendizaje

En la enseñanza del cálculo diferencial, es importante que el estudio de los límites trigonométricos no se reduzca únicamente a la memorización de resultados conocidos. Uno de los límites fundamentales establece que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$$

Este resultado describe el comportamiento de la razón entre el seno de un ángulo y el propio ángulo cuando este se aproxima a cero, siempre que el ángulo esté medido en radianes. Comprender este comportamiento permite utilizar el límite notable como herramienta para analizar otras expresiones trigonométricas.

En situaciones como

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$$

Es necesario reconocer que el límite notable solo puede aplicarse cuando aparece la estructura. Por esta razón, se requiere transformar algebraicamente la expresión para obtener

$$\frac{sen(3x)}{x}=\frac{sen(3x)}{3x}\cdot 3$$

lo que permite aplicar el límite notable.

Desde una perspectiva didáctica, este tipo de situaciones puede abordarse mediante la teoría del aprendizaje por descubrimiento, propuesta por Jerome Bruner. Según esta teoría, el aprendizaje es más significativo cuando los estudiantes participan activamente en la exploración de los conceptos y descubren las relaciones matemáticas a partir del análisis de diferentes estrategias de solución. En lugar de proporcionar directamente el procedimiento, el profesor puede guiar la discusión y promover que los estudiantes identifiquen por sí mismos la estructura que permite aplicar el límite notable.

Para apoyar esta comprensión conceptual, se puede utilizar una representación dinámica como la disponible en GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/emv6tjba

Aclaración final

Multiplicamos y dividimos por 3:

$$\lim x \to 0 \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 \right)$$

Sabemos que:

$$\lim x \to 0 \frac{\sin(3x)}{3x} = 1$$

Por lo tanto:

$$1 \cdot 3$$

El valor del límite es: 3

5.3 Instrumento – Eje derivadas

En esta sección se presentan tres ítems correspondientes a la unidad de derivadas, diseñados con el propósito de analizar el conocimiento matemático y didáctico de profesores en formación en relación con algunos conceptos fundamentales del cálculo diferencial. Cada ítem aborda un aspecto específico de este contenido y propone situaciones en las que se analizan procedimientos matemáticos realizados por estudiantes, con el fin de identificar posibles errores y reflexionar sobre los conocimientos implicados. En particular, los ítems consideran los siguientes temas: máximos y mínimos de funciones, como aplicación de la primera y segunda derivada; la definición de derivada a partir del límite, mediante el análisis del cociente incremental; la derivación de funciones compuestas, a través de la aplicación de la regla de la cadena. De esta manera, los ítems permiten explorar diferentes aspectos conceptuales y procedimentales asociados al cálculo diferencial, así como posibles dificultades que pueden presentarse en su comprensión y enseñanza

5.3.1. Ítem 1

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Derivadas

Tema: Máximos y mínimos de una función (aplicación de las derivadas)

Indicador: Identifica y analiza los puntos de máximo y mínimo de una función polinómica utilizando la derivada, argumentando su interpretación en un contexto aplicado.

Subdominio y categorías MTSK			
Dominio	**Subdominio**	**Categoría asociada**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Procedimientos	Implica saber cómo se hace el cálculo de la primera y segunda derivada de una función racional/polinómica y cuándo puede hacerse (dominio de $r > 0$) .
		Definiciones, propiedades y fundamentos	Comprensión del concepto de derivada, de punto crítico y de los criterios de la primera y segunda derivada para clasificar máximos y mínimos.
		Fenomenología y aplicaciones	Aplicación del concepto de derivada para minimizar costos.
		Significados	Interpretación de $C'(r)$como la variación del costo respecto al radio y de $C''(r)$como la concavidad de la función, permitiendo identificar el punto de mayor eficiencia económica.
	KPM	Formas de validación y demostración	Capacidad para justificar por qué un punto es máximo o mínimo a partir del análisis del signo de la derivada o del valor de la segunda derivada.
		Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Comprensión del rigor de la notación funcional. Implica interpretar correctamente que $C''(4) > 0$ no es solo un cálculo positivo, sino la representación simbólica de la concavidad hacia arriba de la función de costo en el punto específico donde el radio es 4 .
		Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos	Conocimiento del orden lógico del que hacer matemático. Implica seguir una estructura jerárquica: Modelar, Identificar puntos críticos, Clasificar puntos críticos mediante criterios de segundo orden.
	KSM	Conexiones basadas en el incremento de complejidad	Reconocimiento de que este problema de optimización sitúa al docente en un nivel superior de la estructura del cálculo, donde se requiere integrar

			conocimientos previos de funciones y límites para resolver un problema de aplicación real.
		Conexiones transversales	El problema exige relacionar la interpretación de la función de costo, el cálculo de la primera derivada para identificar puntos críticos y el uso de la segunda derivada para clasificar el tipo de extremo.

Enunciado

Un ingeniero diseña un tanque cilíndrico abierto en la parte superior. El volumen debe ser de $32\pi\, m^3$ y el material para la base cuesta el doble que el del cuerpo lateral. El costo total de fabricación (en función del radio r) está dado por:

$$C(r) = 2\pi r^2 + \frac{64\pi}{r}$$

Analiza la función y selecciona la afirmación correcta respecto al comportamiento del costo.

a. El costo mínimo se obtiene cuando $r = 2$ porque $C'(r) = 0$ en ese punto.
b. El costo mínimo se obtiene cuando $r = 4$ porque $C''(4) > 0$.
c. El costo máximo se obtiene cuando $r = 4$ porque $C''(4) > 0$.
d. El costo no presenta extremos ya que $C'(r)$ nunca se anula.

Respuesta correcta

Alternativa b

Análisis de distractores

El profesor responde la alternativa "a". iguala la derivada a cero, pero no verifica la naturaleza del punto crítico. Cae en el error de asumir que $C'(r) = 0$ implica mínimo sin analizar $C''(r)$.

El profesor que responde la alternativa "c" Calcula correctamente la segunda derivada, pero interpreta mal su signo, creyendo que $C''(4) > 0$ indica máximo.

El profesor que responde la alternativa “d” observa el término $\frac{64\pi}{r}$ y omite el dominio positivo, pensando que la derivada no se anula al tener un denominador.

Cápsula de aprendizaje

La primera derivada de una función $f(x)$, denotada $f'(x)$, describe la tasa de cambio instantánea de la función. En términos generales esta mide la pendiente de la recta tangente al gráfico en cada punto. Así se tienen en cuenta las siguientes afirmaciones:

- Si $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, la pendiente es positiva luego la función crece.
- Si $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, la pendiente es negativa luego la función decrece.
- Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, la pendiente es nula luego la tangente es horizontal, y el punto puede ser máximo, mínimo o punto de inflexión.

También se aclara que los puntos críticos son los valores de x (o r en este caso) donde la función podría cambiar su tendencia. Desde una mirada Matemática, un punto crítico se presenta cuando $f'(x) = 0$ o cuando $f'(x)$ no existe, pero x pertenece al dominio de f .Estos puntos no garantizan por sí mismos un máximo o un mínimo, sino que son candidatos a serlo. Para confirmar su naturaleza, se debe analizar cómo cambia el signo de la derivada o aplicar la segunda derivada.

Así tenemos que la segunda derivada, $f''(x)$, mide la variación de la pendiente; en otras palabras, describe la concavidad de la gráfica. De manera clara nos dice que:

- Si $\boldsymbol{f''(x) > 0}$, la función tiene concavidad hacia arriba, es decir el punto crítico es mínimo local.
- Si $\boldsymbol{f''(x) < 0}$, la función tiene concavidad hacia abajo, es decir el punto crítico es máximo local.
- Si $\boldsymbol{f''(x) = 0}$, no se puede concluir directamente; puede ser un punto de inflexión.

Aclaración final

En este tipo de problemas la derivada se interpreta como una tasa de cambio que permite decidir si la función crece o decrece. La resolución de la situación para determinar el punto donde el costo de fabricación es mínimo es la siguiente:

Primero se tiene en cuenta que el dominio de la función cumple que $r > 0$, esto dado que el radio no puede ser negativo ni nulo. Luego se procede a hallar la primera derivada y encontrar sus puntos críticos.

$$C(r) = 2\pi r^2 + \frac{64\pi}{r}$$

$$C'(r) = 4\pi r + \frac{64\pi}{r^2}$$

$$4\pi r - \frac{64\pi}{r^2} = 0 \;\Rightarrow\; r = 4 \; punto\ crítico$$

El valor $r = 4$ es un punto crítico, porque la pendiente de la tangente se anula, es decir, el costo deja de aumentar o disminuir en ese instante.

En segundo lugar, se analiza la segunda derivada para saber si tenemos mínimos o máximos.

$C''(r) = 4\pi + \frac{128\pi}{r^3}$

En nuestro caso como $C''(4) > 0$, tenemos un mínimo local. Se concluye entonces que el costo de fabricación es mínimo cuando el radio del recipiente es $r = 4$.

5.3.2. ítem 2

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Derivadas

Tema: Definición de la derivada (cociente incremental y significado geométrico)

Indicador: Analiza la derivada en un punto desde su definición como límite, justificando rigurosamente la transición de recta secante a recta tangente y evidenciando la comprensión profunda de la noción de tasa de cambio instantánea

Subdominios y categorías MTSK			
Dominio	**Subdominio**	**Categoría asociada**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Definiciones, propiedades y fundamentos	Precisión conceptual en el significado de límite, diferenciabilidad, recta tangente y razones de cambio. Conexión entre formulación algebraica y fundamentación geométrica.
		Procedimientos	Identificar que el reemplazo directo genera una indeterminación $\frac{0}{0}$ y conocer los procedimientos algebraicos (factorización, racionalización) para "romper" esa indeterminación y encontrar el valor del límite.
		Significados	Comprender la derivada como la tasa de cambio instantánea de una función, que surge de aproximar una tasa de cambio promedio en un intervalo cada vez más pequeño. Identificar la derivada como la pendiente de la recta tangente en un punto (diferenciar claramente que el cociente representa la pendiente de la secante y solo el límite representa la tangente)

	KSM	Conexiones auxiliares	Articulación entre conceptos: límite → continuidad → derivabilidad → tangente. Relación entre variación promedio y variación instantánea.
	KPM	Símbolos y uso de lenguaje formal	Entender que el símbolo $\lim_{h \to 0} f(x)$ no es una instrucción decorativa, sino un operador que define un proceso de aproximación. Además, el uso formal del lenguaje implica entender que el símbolo 0/0 no es un número ni un error, sino una "forma indeterminada". Por último, reconoce que la expresión $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tiene una estructura específica donde los símbolos a , $f(a)$y h representan elementos de un sistema lógico. Este símbolo compuesto representa una pendiente y que su significado cambia drásticamente al anteponerle el símbolo del límite.
		Condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones	Saber que la derivada "nace" de la transición lógica: Secante (2 puntos) ⟶ Límite⟶ Tangente (1 punto).
		Formas de validación y demostración	Capacidad para justificar por qué el límite define la pendiente de la tangente mediante argumentación formal y visual.
PCK	**KFLM**	Fortalezas y dificultades	Identificación de concepciones erróneas típicas: “reemplazo directo”, confusión $\frac{0}{0}$, interpretación incorrecta de secantes, pensar que tangente es cualquier recta en el punto.
		Formas de interacción del alumno con un contenido matemático	Reconocer la dificultad del alumno para distinguir entre una recta cualquiera y la recta tangente obtenida por el límite de secantes.

	KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental	Se espera comprensión profunda, no procedimental. El docente en formación debe ser capaz de explicar el concepto, no solo aplicarlo.

Enunciado

La profesora Camila está trabajando con su grupo la definición de derivada como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

Después de algunos ejemplos, Camila pide a los estudiantes explicar cómo interpretar esta definición y justificar qué representa la derivada en un punto. Uno de los estudiantes, Andrés, responde:

> Profe, para sacar la derivada basta con reemplazar en el límite. Si al reemplazar no da indeterminación, entonces la derivada existe. Además, la derivada es la pendiente de cualquier recta que forme la gráfica en ese punto

Con base en lo dicho por Andrés, ¿cuál sería una retroalimentación adecuada por parte de Camila?

a. Recuerda que la derivada se obtiene evaluando el límite directamente y corresponde a la pendiente de cualquier recta visible en la gráfica.
b. Ten en cuenta que cuando al reemplazar aparece una indeterminación del tipo 0/0 so significa que la función no es derivable en ese punto.
c. Recuerda que la derivada se interpreta como la pendiente de una recta tangente, así que basta con considerar cualquier recta cercana al punto para interpretarla.

d. Ten en cuenta que la derivada no se obtiene por simple reemplazo: normalmente el cociente incremental produce 0/0 y por eso debe calcularse el límite. Además, la derivada representa la pendiente de la recta tangente, obtenida como límite de las rectas secantes, no de cualquier recta.

Respuesta correcta

Alternativa d

Análisis de distractores

El profesor que responde la alternativa "a" no identifica dos errores centrales: primero que la derivada no se obtiene por sustitución directa y segundo que la pendiente relevante es la de la recta tangente, no de cualquier recta en la gráfica. Aquí se revela ausencia de comprensión del significado geométrico del límite.

El profesor que responde la alternativa "b" interpreta incorrectamente la indeterminación 0/0 Justamente este valor indica que es necesario calcular el límite, no que la derivada no exista. Manifiesta una confusión estructural entre "indeterminación" y "no existencia".

El profesor que responde la alternativa "c" identifica la relación con rectas secantes, pero aún no comprende que el valor de la derivada no proviene de cualquier secante. El proceso esencial es el límite cuando la secante se aproxima a la tangente. Aquí revela comprensión parcial, pero insuficiente, del concepto.

Cápsula de aprendizaje

La derivada de una función f en un punto a se define mediante el límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

Esta expresión representa la tasa de cambio promedio de la función en el intervalo $[a,\ a+h]$ que se aproxima a la tasa de cambio instantánea cuando el intervalo se hace infinitamente pequeño.

Interpretación geométrica

- El cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ corresponde a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $\left(a,\ f(a)\right)$ y $\left(a+h,\ f(a+h\ )\right)$.
- La derivada en un punto es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando los puntos se acercan. Por tanto, la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = a$.

Aclaración final

Comprender la definición de la derivada es esencial para futuros profesores, ya que constituye la base del significado de tasa de cambio, pendiente de la tangente y variación instantánea. Es por esto, por lo que el punto central que debe rescatar la retroalimentación correcta para el estudiante es:

- La derivada de un punto no se obtiene de un cálculo directo, sino de un límite que surge de la aproximación de las rectas secantes.
- La recta tangente se obtiene como resultado del proceso límite, no sólo de la observación y deducción sobre la gráfica.
- La indeterminación $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ es esperada y conduce al análisis del límite, no a descartar la derivabilidad de la función en dicho punto.

Esta comprensión permite distinguir entre el uso mecánico de reglas de derivación y el entendimiento conceptual profundo del objeto matemático “derivada”.

5.3.3. ítem 3

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Unidad: Derivadas

Tema: Derivada de funciones compuestas (Regla de la Cadena con composición múltiple).

Indicador: Aplicar la regla de la cadena para derivar funciones que involucran logaritmos, potencias y funciones trigonométricas de forma analítica.

Subdominio y categorías MTSK			
Dominio	**Subdominio**	**Categoría asociada**	**Descripción en el contexto del ítem**
MK	**KOT**	Procedimientos	Comprensión de las reglas de derivación involucradas: derivada del logaritmo natural, regla de la cadena y derivación de funciones trigonométricas.
		Definición, Propiedades y fundamentos	Reconocer las propiedades y fundamentos de la derivación de funciones compuestas y analizar su uso adecuado dentro del procedimiento presentado, con el fin de identificar si las reglas de derivación han sido aplicadas correctamente.
		Registros de representación	Uso de registros de representación verbal y algebraico. El registro verbal se evidencia en la descripción de los pasos del procedimiento, mientras que el registro algebraico aparece en las expresiones simbólicas utilizadas para representar la función y su derivada.
	KPM	Papel de los símbolos y uso del lenguaje formal	Interpretar correctamente las expresiones matemáticas y las notaciones utilizadas en el proceso de derivación y comprender el significado de las representaciones simbólicas, identificar la estructura de la función y analizar cómo se aplican las reglas de

			derivación dentro del lenguaje algebraico y funcional propio del cálculo.
		Jerarquización y planificación como forma de proceder en la resolución de problemas matemáticos	Capacidad de analizar y organizar el procedimiento de derivación de manera secuencial, identificando las etapas necesarias para resolver el problema (entender que la regla de la cadena tiene implícitamente una jerarquización que se resuelve de afuera hacia adentro).
PCK	**KFLM**	Fortalezas y debilidades en el aprendizaje matemático	Identificación de errores frecuentes en estudiantes de cálculo: aplicar incorrectamente la regla de la potencia, lo que implica omitir la derivada de la función interna o confundir la derivada.
	KMLS	Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado	Se espera un nivel de desarrollo procedimental, ya que se espera que la resolución se realice siguiendo una serie de pasos o procedimientos propios del proceso de derivación. En particular, se requiere reconocer la estructura de la función, identificar la función exterior y la función interior, determinar las reglas de derivación implicadas y aplicar dichos procedimientos de manera organizada.

Enunciado

Cristian es un estudiante de primer semestre que en su examen presenta el siguiente procedimiento para derivar la función $f(x) = \ln(\cos^2(x))$

Paso 1: Identifica la estructura como $f(x) = \ln(u)$, por lo que $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\cos^2(x))$

Paso 2: Aplica la regla de la potencia para la función interna $\frac{d}{dx}(\cos^2(x)) = 2\cos(x)$

Paso 3: Realiza la sustitución final $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot 2\cos(x)$

Paso 4: Simplificar la expresión $f'(x) = \frac{2}{\cos(x)} = 2\sec(x)$

¿Es correcto el procedimiento desarrollado por el estudiante? En caso de no serlo, identifique el primer paso en el que se presenta un error en su razonamiento.

a. El trabajo es correcto.
b. Es incorrecto. El primer error aparece en el Paso 1.
c. Es incorrecto. El primer error aparece en el Paso 2.
d. Es incorrecto. El primer error aparece en el Paso 3.

Respuesta correcta

Alternativa c

Análisis de distractores

El docente que responde la opción "a" no reconoce la falta de un factor en la cadena, lo que sugiere una debilidad en la comprensión de la composición triple de funciones.

El docente que responde la opción "b" asume erróneamente que la regla del logaritmo natural se aplicó de forma incorrecta, desconociendo la propiedad $\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{u'}{u}$.

El docente que responde la opción "d" identifica un error en el resultado final pero no es capaz de rastrear el origen conceptual del fallo en la derivación de la potencia.

Cápsula de aprendizaje

En el ámbito del cálculo diferencial universitario, la derivación de funciones compuestas requiere la identificación precisa de la estructura jerárquica de la función. Cuando una función f está compuesta por más de una subfunción, la Regla de la Cadena se aplica de forma iterativa, siguiendo un orden de "afuera hacia adentro".

Si consideramos una función $y = (f \circ g \circ h)(x)$, su derivada analítica se define como el producto de las derivadas de sus componentes evaluadas en sus respectivos argumentos:

$$\left[f\left(g(h(x))\right)\right]' = f'\left(g(h(x))\right) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Para evitar la omisión de factores, es útil descomponer la función original en sus niveles de dependencia: externo, intermedio e interno.

Aclaración final

Para derivar correctamente la función $f(x) = \ln(\cos^2(x))$primero se identifica la estructura de función compuesta y se aplica la regla de derivación del logaritmo natural.

$$f(x) = \ln(\cos^2(x))$$

Sea $u(x) = \cos^2(x)$ entonces$f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$.

Sustituyendo se obtiene $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\cos^2(x))$

Ahora se deriva la función interna utilizando la regla de la cadena $\frac{d}{dx}(\cos^2(x)) =$ $2\cos(x)\,(-\sin(x))$

Por lo tanto $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}(-2\cos(x)\sin(x))$

Simplificando la expresión se obtiene $f'(x) = -2\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Finalmente $f'(x) = -2\tan(x)$

Se concluye que el error en el procedimiento presentado aparece cuando no se aplica correctamente la regla de la cadena al derivar $\cos^2(x)$. Este tipo de error es común cuando se interpreta la expresión como si fuera una potencia simple, sin considerar que se trata de una potencia aplicada a una función.

6. Conclusiones

El desarrollo de esta investigación identificó algunas características del conocimiento didáctico y matemático que intervienen en el diseño de un instrumento orientado a evaluar conceptos de Cálculo Diferencial y su enseñanza en la formación de futuros profesores de matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Desde el inicio del diseño del instrumento se hizo evidente la necesidad de articular el conocimiento disciplinar con el conocimiento didáctico, especialmente a partir de las categorías propuestas por el modelo MTSK descritas en cada uno de los dominios. Esto permitió estructurar situaciones que no solo evaluarán la comprensión de los conceptos de función, límite y derivada, sino también aspectos relacionados con sus representaciones, su enseñanza y las dificultades que suelen presentarse en su aprendizaje. En este sentido, el instrumento permite evidenciar características del conocimiento especializado del profesor en formación, tales como la comprensión conceptual de los objetos matemáticos, la interpretación de distintos registros de representación, el análisis de procedimientos y la reflexión sobre estrategias de enseñanza asociadas a estas temáticas, dando respuesta de esta manera a la pregunta de investigación.

En relación con el objetivo general, se logró diseñar un instrumento compuesto por nueve ítems organizados alrededor de las temáticas de función, límites y derivadas, acompañado de situaciones y cápsulas de aprendizaje orientadas a identificar y fortalecer elementos del conocimiento especializado del profesor en formación mediante la discusión crítica entre los investigadores acorde con el MTSK, permitiendo un análisis riguroso con cada uno de los dominios y subdominios que propone el modelo. Respecto al primer objetivo específico, orientado a la formulación de situaciones que permiten identificar el conocimiento sobre función, límites y derivadas desde las categorías del modelo MTSK, se diseñaron ítems que integran el papel de los símbolos, recursos didácticos, formas de validación, interacción del estudiante con el contenido matemático etc. Esto permitió que el instrumento no se centrara únicamente en la resolución de ejercicios, sino también en la comprensión del significado de los conceptos y en su relación con la enseñanza. En cuanto al segundo objetivo específico, relacionado con la identificación de algunos ejes de formación disciplinar y didáctica en los futuros profesores frente a estas temáticas, se lleva a cabo un análisis especifico de los distractores presentes en el instrumento de evaluación. Dicho análisis permite caracterizar los ejes tanto disciplinares como didácticos que reflejan las respuestas de los futuros profesores.

En relación con el tercer objetivo específico, se estructuraron cápsulas de aprendizaje orientadas a atender algunas de las dificultades identificadas, especialmente en lo relacionado con la comprensión conceptual de función, límite y derivada. Estas cápsulas representan un aporte importante del trabajo, ya que pueden utilizarse como apoyo en procesos de formación inicial de profesores de matemáticas para fortalecer sus concepciones y formas de razonamiento y mitigar sus dificultades en torno a los contenidos trabajados.

A partir de los resultados obtenidos, una consecuencia importante del estudio es la pertinencia de revisar algunos elementos del plan de estudio de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, particularmente en lo relacionado con la formación en cálculo diferencial. Se hace necesario generar espacios académicos dirigidos específicamente a estudiantes de licenciatura en los que estos cursos no solo se aborden desde su componente conceptual y procedimental, sino también desde la didáctica, favoreciendo la reflexión sobre cómo enseñar los conceptos de función, límite y derivada en contextos universitarios.

Sin embargo, esta investigación presenta algunas limitaciones. Por una parte, los ítems diseñados fueron validados principalmente por la directora del trabajo de grado junto con los investigadores en la voz de protocolante, relator y correlator. Por lo que sería importante ampliar este proceso mediante una segunda validación que involucre otros expertos en Educación Matemática y campos de estudio relacionados al cálculo diferencial que permitan fortalecer la validez del instrumento desde diferentes perspectivas, cuando este sea aplicado en futuros profesores.

Por otra parte, el instrumento está conformado por nueve ítems centrados en algunas temáticas específicas del cálculo diferencial, como la noción de función, características de la función cuadrática, el dominio, la continuidad, los límites trigonométricos, los límites al infinito, el concepto de derivada y recta tangente, los máximos y mínimos y las derivadas de funciones compuestas. Aunque estos temas son fundamentales, no abarcan la totalidad de los contenidos asociados al cálculo diferencial, lo cual limita el alcance del instrumento en términos de una caracterización más amplia del conocimiento especializado del profesor en formación.

Al concluir la investigación, se plantean algunas recomendaciones que pueden orientar futuros trabajos en este campo de acción. En primer lugar, para futuras investigaciones desarrollar estudios orientados a la validación y aplicación del instrumento con el fin de fortalecer su pertinencia como una herramienta de evaluación del conocimiento profesional del docente para evidenciar la articulación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico en la formación inicial de los futuros profesores. Además, se recomienda implementar el instrumento en distintos momentos del proceso formativo de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en los cuales se vean asignaturas relacionadas con el Cálculo Diferencial. Este tipo de aplicación permitiría analizar la evolución del conocimiento especializado del profesor en formación a lo largo de la carrera.

Asimismo, sería pertinente ampliar el instrumento mediante la incorporación de nuevas temáticas del cálculo diferencial que no fueron consideradas en los nueve ítems diseñados en esta investigación, con el propósito de lograr una caracterización más completa del conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores. Finalmente, después de realizar procesos de validación más amplios, podría explorarse la posibilidad de que el instrumento sea utilizado institucionalmente como apoyo en procesos de evaluación diagnóstica relacionados con la enseñanza del cálculo diferencial dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, así como continuar investigando el impacto de las cápsulas de aprendizaje en el fortalecimiento del conocimiento especializado del profesor en formación.

Referencias Bibliográficas

Advíncula, E., Torres, I., Carreño, E., Hau Yon, F. y Montes, M. (2024). Conocimiento especializado de un profesor de educación secundaria al diseñar clases de cuadriláteros. PNA 18(4), 415-438. http://doi.org/10.30827/pna.v18i4.27637

Afanador, T. (2023). Conocimiento especializado de los futuros profesores de educación básica primaria sobre la enseñanza de las fracciones [Tesis de pregrado, Universidad Industrial de Santander]

Álvarez, J. L. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y metodología*. México: Paidós.

Arnal, A., & Oller, A. M. (2017). Formación del profesorado y demostración matemática. Estudio exploratorio e implicaciones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 135-157.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (eds.), Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. 97-140. Bogotá: Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares*. Revista Latinoamericana en Matemáticas Educativa. 1 (1), 40-55.

Badillo, E. R. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

Barringer, M., Pohlman, C. & Robinson, M. (2011) *Schools for all kinds of minds: boosting student success by embracing learning variation.* 139–181, DOI: 10.1002/9781118269367.ch

Botello, I. C. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Universidad Industrial de Santander, escuela de matemáticas. Tesis de maestría en Educación Matemática. Bucaramanga.

Cantoral, R. & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. En *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 6(2), 133-154. ISSN 1665-2436. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2092522

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores, E., Escudero, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M. y Muñoz, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, 20(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

De Los Reyes, D., Hernández, L. y Flores, E. (2025). Conocimiento especializado de un profesor sobre el aprendizaje del límite de una función al predecir el desempeño de sus estudiantes. PNA, 19(4), 347-370.https://doi.org/10.30827/pna.v19i4.30587

De Moura, M. O. (2011). Educar con las matemáticas: saber específico y saber pedagógico. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 47-57.

Duval, R. (1999) Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Proceedings of the Annual Meeting of the North

American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cu-ernavaca, Morelos, México.

Fernández, O., Montes, J. W., & Cadavid, G. (2021). *Acercamiento mediante redes semánticas a creencias epistemológicas sobre el cálculo diferencial*. Scientia et Technica, 26(4), 507–520. Universidad Tecnológica de Pereira.

Fiallo, J. & Parada, S. (2014) Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del Pensamiento Variacional. *Revista Científica*. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia. 20, 56-71. ISSN 0124-2253

Fonseca , J., & Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica.

Gamboa, R. y Chavarría, J. (2023). Aplicación del modelo MTSK en el diseño de secuencias didácticas con problemas de modelización matemática. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.), Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (pp. 55–62). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Guarin, S. (2018). Aproximación y Tendencia: nociones para la comprensión del límite de una función en un punto (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría. Universidad Industrial de Santander]. https://www.dropbox.com/s/bnt1qzxjhcm6yc0/TesisSGuar% C3% ADn. pdf)

Hernández, C. A., Prada, R., & Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. Revista Perspectivas, 2(2), 73–83. https://doi.org/10.22463/25909215.1316

Martín, D., Guede, R., & Cid, A. I. (2025). The mathematics teacher's specialized and interdisciplinary knowledge when implementing a STEAM-based activity on the logistic function. STEM Education, 5(5), 802-835.

Meléndez, J. A., Flores, E., & Hernández, L. A. (2023). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas al analizar una secuencia de suma de fracciones. Uniciencia, 37(1), 193-211.

Ministerio de Educación Nacional MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá.

NCTM. (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de M. Fernández (Traducción de la versión del 2000 del NCTM). SAEM Thales. Sevilla.

Pineda, C. E. (2019). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de derivada en el último grado de educación secundaria (Tesis de Maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Pino, L. R., Parra, Y. E., & Castro, W. F. (2019). Significados de la función pretendidos por el currículo de matemáticas chileno. Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación, 11(23), 201-220. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m11-23.sfpc

Quintero, A. C. (2020). *Una comunidad de práctica de profesores de matemáticas en formación que reflexiona sobre el significado de la función*. Universidad Industrial de Santander, escuela de matemáticas. Tesis de maestría en Educación Matemática. Bucaramanga.

Richit, A., da Ponte, J. P. e Richit, L. A. (2022). Conhecimento profissional de professores universitários em um estudo de aula em Cálculo. PNA, 17(1), 89-116. https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.23931

Sánchez, D. M. (2023). La articulación en la transición de la educación media a la educación superior, el caso colombiano: Universidad en Tu Colegio. *Praxis Educativa, 28*(1), 1–18.

Sánchez, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, *11*(2),267-296.

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&tlng=es.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57*(1), 1-23.

Slabý, M., Semanišinová, I., & Climent, N. (2022). The specialized knowledge of middle school teachers concerning the concept of function. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis | Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, *14*, 81–101. https://doi.org/10.24917/20809751.14.5

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In proceedings of working group. ICME-7. Québec, Canadá.

Tellermo, E. S. (2024). Pedagogical and Content Knowledge (PCK) in Problem Solving of Pre-Service Teachers. *International Journal of Research and Innovation in Social Science*, *8*(10), 130-137.

Vergara, C., & Mardones, H. (2014). Conocimiento Pedagógico del Contenido: ¿el paradigma perdido en la formación inicial y continua de profesores en Chile? *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *40* (ESPECIAL), 323-338.