Conjuntos con más sumas que diferencias

Laura Milena Romero Parada

Ana Milena Santamaría Bueno

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

2013

Conjuntos con más sumas que diferencias

Autoras

Laura Milena Romero Parada

Ana Milena Santamaría Bueno

Trabajo de grado como requisito

parcial para optar el título de

Licenciadas en Matemáticas

Director

Carlos Arturo Rodriguez Palma

Magíster en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

2013

Agradecimientos

- Agradecemos a Dios por darnos salud, sabiduría y entendimiento para realizar este proyecto.
- Agradecemos especialmente a nuestro director, el profesor Carlos Arturo Rodriguez por toda su colaboración e interés en nuestro trabajo y por todos sus consejos.
- Agradecemos enormemente a nuestras familias por todo su amor y apoyo incondicional, brindado a lo largo de nuestras vidas.
- Damos gracias a nuestros profesores, a quienes les debemos nuestra formación académica y personal. En especial a los profesores Martín Acosta y Gabriel Yañez por convertirse en nuestros ejemplos a seguir; también al profesor Julio Carrillo por su colaboración en nuestro proyecto.
- Agradecemos a nuestros amigos por su apoyo y compañía; con ellos hemos compartido excelentes momentos. En especial a Vladimir Angulo por su colaboración y sus recomendaciones en el proceso de elaboración del proyecto.
- Damos gracias al grupo Edumat-UIS Olimpiadas Regionales de Matemáticas y a su directora, la profesora Adriana Albarracín, por apoyarnos en nuestro proceso de formación y aprendizaje.
- A todas las personas que de una u otra manera hicieron posible este logro.

Índice general

TITULO: CONJUNTOS CON MÁS SUMAS QUE DIFERENCIAS[1]

AUTORAS: Laura Milena Romero Parada, Ana Milena Santamaría Bueno[2]

PALABRAS CLAVE: Progresión aritmética; Conjunto simétrico; Conjunto suma; Conjunto diferencia; Conjunto $MSTD$.

DESCRIPCIÓN

La teoría de números aditiva incorpora, en sus objetos de estudio, los conjuntos con más sumas que diferencias o conjuntos $MSTD$, los cuales se caracterizan por tener el cardinal del conjunto suma mayor que el cardinal del conjunto diferencia. Estos conjuntos se han estudiado durante los últimos cincuenta años, en los cuales sobresale el planteamiento de métodos para construirlos. El contenido de este trabajo se basa en el estudio de [2] y [6].

El documento está organizado en dos capítulos y un apéndice. En el primer capítulo, se presentan los conceptos de progresión aritmética, conjunto simétrico, conjunto suma y conjunto diferencia; con algunos resultados relevantes para iniciar el estudio de los conjuntos $MSTD$ de enteros. Finalmente, se muestran algunos métodos que permiten construirlos. Los primeros métodos construyen conjuntos $MSTD$ cuya resta entre los cardinales de su conjunto suma y diferencia respectivamente es 1; mientras que con el último método se obtienen conjuntos $MSTD$, donde dicha resta es 2.

El segundo capítulo, provee una cota inferior para el número de conjuntos $MSTD$ contenidos en un grupo abeliano $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por último, en el apéndice A se encuentran consignados los algoritmos implementados en $MuPAD$®, los cuales permiten determinar si un conjunto es $MSTD$, calcular conjuntos suma y diferencia, y construir conjuntos $MSTD$.

[1]Tesis.

[2]FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Mg. Carlos Arturo Rodriguez Palma.

TITLE: SETS WITH MORE SUMS THAN DIFFERENCES[1]

AUTHOR: Laura Milena Romero Parada, Ana Milena Santamaría Bueno[2]

KEY WORDS: Arithmetic progression; Symmetric set; Sumset; Difference set; $MSTD$ set.

DESCRIPTION

Additive number theory incorporates in its objects of study, the sets with more sums than differences or $MSTD$ sets, which are characterized by having the cardinality of the sumset greater than the cardinality of the set difference. These sets have been studied for the last fifty years, where stands presenting methods to build them. The content of this paper is based on the study of [2] and [6].

The paper is organized into two chapters and an appendix. In the first chapter, introduces the concepts of arithmetic progression, symmetric set, sumset and set difference, with some relevant results to begin studying of $MSTD$ sets of integers. Finally, we show some methods to construct them. The first methods build $MSTD$ sets whose the cardinality of the sumset is 1 more than the cardinality of the difference set; while the last method constructs sets $MSTD$ who are greater by 2.

The second chapter provides an lower bound for the number of $MSTD$, which are subsets of the abelian group $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ultimately, in Appendix A are consigned algorithms implemented in *MuPAD*®, for determining whether a set is $MSTD$, calculating the sumset and the difference set, and building $MSTD$ sets.

[1]Thesis.

[2]FACULTY OF SCIENCES, DEGREE IN MATHEMATICS.
DIRECTOR Mg. Carlos Arturo Rodriguez Palma.

Introducción

La teoría de números aditiva, rama de la teoría de números, estudia en general los subconjuntos de números enteros y su comportamiento bajo la adición, a su vez incluye el estudio de los grupos abelianos y los semigrupos conmutativos bajo la suma. Dentro de esta rama uno de sus objetos principales de estudio son el conjunto suma $A + B$ de subconjuntos A y B de un grupo abeliano G, que se obtiene sumando cada elemento de A con cada elemento de B. De manera similar se puede calcular el conjunto diferencia $A - B$, restando cada elemento de A con cada elemento de B.

Por ejemplo para el conjunto $A = \{0, 2, 5, 9, 13\}$ su conjunto suma $A + A$ es $\{0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 22, 26\}$ y su conjunto diferencia $A-A$ es $\{0, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm7, \pm8, \pm9, \pm11, \pm13\}$. Como se puede ver, el conjunto suma tiene 14 elementos mientras que el conjunto diferencia tiene 19 elementos, luego el conjunto diferencia de A tiene más elementos que su conjunto suma.

Lo anterior se considera común, debido a que en el conjunto de los números enteros la adición cumple la propiedad conmutativa, mientras que la resta no; así, la suma de dos elementos diferentes, sin importar el orden, generan un mismo valor, no obstante, en la diferencia al cambiar el orden se obtienen dos elementos diferentes. Por lo tanto, se esperaría que para cualquier subconjunto de enteros su conjunto diferencia tenga más o igual cantidad de elementos que su conjunto suma. Sin embargo, existen conjuntos de enteros cuyo conjunto suma tiene mayor cardinalidad que su conjunto diferencia. Los conjuntos con esta propiedad se conocen como conjuntos con más sumas que diferencias. Éstos han sido objeto de estudio desde la década de los 70 por J. Marica, quien presenta en [3] el primer ejemplo, seguido de M. Nathanson quién realiza las primeras construcciones y los denomina conjuntos $MSTD$ en [5] y [6]. Posteriormente, P. Hegarty en [2] demuestra que no hay conjuntos $MSTD$ de cardinal menor que 8 y plantea otras construcciones de estos conjuntos.

Este trabajo, basado principalmente en [6], busca realizar un estudio de conjuntos con más sumas que diferencias o conjuntos $MSTD$; presentando al lector algunos métodos para su construcción a partir de progresiones aritméticas y conjuntos simétricos, implementando algoritmos para agilizar el proceso de obtención de conjuntos $MSTD$, y realizando una aproximación al conteo de conjuntos $MSTD$ contenidos en grupos abelianos de la forma $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

El documento está organizado en dos capítulos y un apéndice. En el primer capítulo, *Conjuntos con más sumas que diferencias*, se presentan varios conceptos y resultados acerca de progresiones aritméticas y conjuntos simétricos, relevantes para abordar el estudio de los conjuntos $MSTD$ de enteros y se muestran algunos métodos que permiten construirlos. Los primeros métodos construyen conjuntos $MSTD$ cuya resta entre los cardinales de su conjunto suma y diferencia respectivamente es 1; mientras que con el último método se obtienen conjuntos $MSTD$, cuya resta entre los cardinales de su conjunto suma y diferencia respectivamente es 2.

El segundo capítulo, *Un argumento de conteo*, provee una cota inferior para el número de conjuntos $MSTD$ contenidos en un grupo abeliano $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Finalmente, en el apéndice A se encuentran consignados los algoritmos implementados en *MuPAD*®, los cuales permiten determinar si un conjunto es $MSTD$, calcular conjuntos suma y diferencia, y construir conjuntos $MSTD$.

Capítulo 1

Conjuntos con más sumas que diferencias

Dado el conjunto $B = \{0, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 15, 16, 18\}$ se tiene que su conjunto suma $B + B$ es $[0, 36]$[1] $\setminus\{1, 26, 35\}$ y su conjunto diferencia $B - B$ es $[-18, 18] \setminus \{-17, -8, 8, 17\}$; luego, el cardinal de $B + B$ es 34 y el cardinal de $B - B$ es 33; por lo cual, el cardinal del conjunto suma de B es mayor que el cardinal del conjunto diferencia de B.

A continuación se presentan las tablas correspondientes al conjunto suma $B + B$ y al conjunto diferencia $B - B$, teniendo en cuenta que los números subrayados facilitan la identificación y el conteo de los elementos de cada conjunto.

+	0	2	3	4	5	9	14	15	16	18
0	<u>0</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>9</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>18</u>
2	2	4	5	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>11</u>	16	<u>17</u>	18	<u>20</u>
3	3	5	6	7	<u>8</u>	<u>12</u>	17	18	<u>19</u>	<u>21</u>
4	4	6	7	8	9	<u>13</u>	18	19	20	<u>22</u>
5	5	7	8	9	<u>10</u>	14	19	20	21	<u>23</u>
9	9	11	12	13	14	18	23	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>27</u>
14	14	16	17	18	19	23	<u>28</u>	<u>29</u>	<u>30</u>	<u>32</u>
15	15	17	18	19	20	24	29	30	<u>31</u>	<u>33</u>
16	16	18	19	20	21	25	30	31	32	<u>34</u>
18	18	20	21	22	23	27	32	33	34	<u>36</u>

Tabla 1.1: Tabla para $B + B$

[1] $[m, n]$ denota, a lo largo del trabajo, el conjunto de los números enteros que se encuentra entre m y n, inclusive.

$-$	0	2	3	4	5	9	14	15	16	18
0	0	-2	-3	-4	-5	-9	-14	-15	-16	-18
2	2	0	-1	-2	-3	-7	-12	-13	-14	-16
3	3	1	0	-1	-2	-6	-11	-12	-13	-15
4	4	2	1	0	-1	-5	-10	-11	-12	-14
5	5	3	2	1	0	-4	-9	-10	-11	-13
9	9	7	6	5	4	0	-5	-6	-7	-9
14	14	12	11	10	9	5	0	-1	-2	-4
15	15	13	12	11	10	6	1	0	-1	-3
16	16	14	13	12	11	7	2	1	0	-2
18	18	16	15	14	13	9	4	3	2	0

Tabla 1.2: Tabla para $B - B$

En este capítulo se presentarán algunas definiciones y resultados preliminares. Posteriormente se enunciarán algunos teoremas que permiten la construcción de conjuntos con más sumas que diferencias de enteros.

1.1. Preliminares

En el desarrollo del trabajo se tendrán en cuenta conceptos tales como, conjunto suma, conjunto diferencia, progresión aritmética y conjunto simétrico, con algunos resultados, que se presentarán a continuación.

Definición 1.1.1. *Sea G un grupo abeliano, escrito aditivamente, y sea A un subconjunto de G. Se define el conjunto suma como*

$$A + A = \{a + a' : a, a' \in A\},$$

y el conjunto diferencia como

$$A - A = \{a - a' : a, a' \in A\}.$$

Dado un conjunto finito A con n elementos, se tienen las siguientes cotas para los cardinales de sus respectivos conjuntos suma y diferencia:

$$2n - 1 \leq |A + A| \leq \frac{n(n+1)}{2},$$

$$2n - 1 \leq |A - A| \leq n(n-1) + 1.$$

Además, se garantiza la posibilidad de los siguientes tres casos:

$$|A - A| = |A + A| \text{ ó} \tag{1.1}$$

$$|A - A| > |A + A| \text{ ó} \tag{1.2}$$

$$|A + A| < |A - A|. \tag{1.3}$$

Un ejemplo de (1.1) se da si el conjunto A es simétrico. Intuitivamente (1.2) es considerada la más usual debido a la conmutatividad de los números enteros en la suma. Finalmente, encontrar conjuntos que cumplan (1.3) resulta difícil, dichos conjuntos se estudiarán en este trabajo.

Definición 1.1.2 (Progresión Aritmética)**.** *Dados $a, m \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, una progresión aritmética se define como el conjunto*

$$P = \{a + xm : 0 \leq x \leq k - 1\}.$$

Definición 1.1.3 (Progresión Aritmética Generalizada de dimensión d)**.** *Sean $d \geq 1$, m_1, m_2, ..., m_d, $a \in \mathbb{Z}$ y k_1, k_2, ... ,$k_d \in \mathbb{Z}^+$, se dice que el conjunto*

$$P = \{a + x_1 m_1 + \cdots + x_d m_d : \ell_i \leq x_i \leq \ell_i + k_i - 1 \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$$

es una progresión aritmética generalizada de dimensión d.

Ejemplo 1.1.4. Con $d = 3$, $a = 3$, $m_1 = 4$, $m_2 = 5$, $m_3 = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$ $k_3 = 2$ y $\ell_i = 0$, para $i = 1, 2, 3$. Se obtiene una progresión aritmética de dimensión 3:

$$P_1 = \{3, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 32\},$$

la cual se construye gráficamente de la siguiente forma:

Se comienza con un prisma de dimensiones $k_1 - 1 = 2$, $k_2 - 1 = 3$ y $k_3 - 1 = 1$,

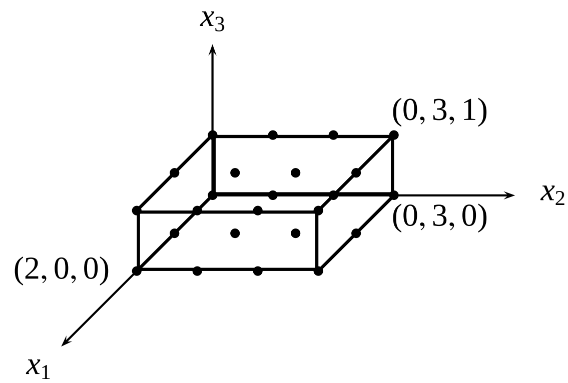

Figura 1.1: Prisma de dimensiones 2, 3 y 1

luego, se dilata cada dimensión, $k_i - 1$, por la razón m_i correspondiente,

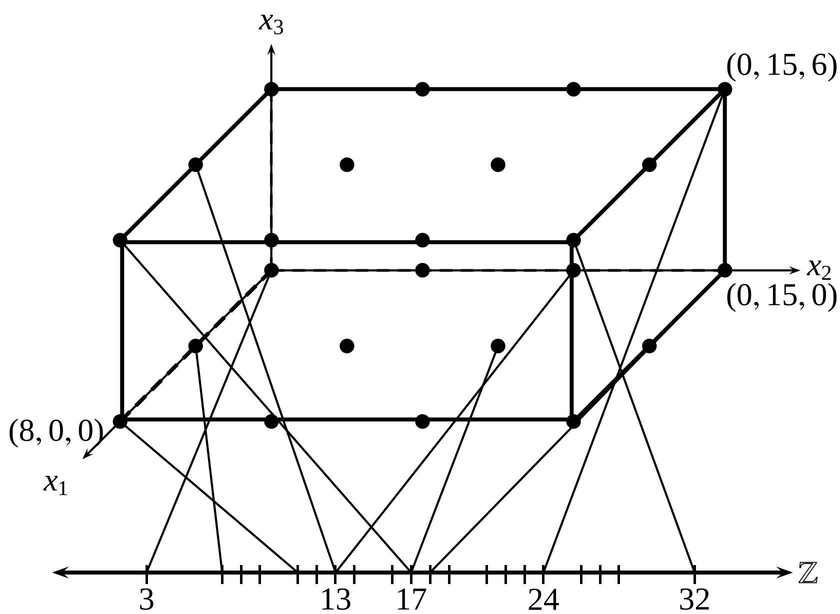

Figura 1.2: Gráfica de P_1

por último se proyecta sobre $\mathbb{Z}$ con los planos $z = x_1 + x_2 + x_3 + a$, con (x_1, x_2, x_3) puntos de coordenadas enteras en el prisma. Si dos puntos comparten plano, entonces dan la misma suma.

Definición 1.1.5. *Sea G un grupo abeliano y A un subconjunto de G. Si $a^* \in G$ y $A = a^* - A$,*[2] *entonces se dice que A es simétrico con respecto a a^*.*

Proposición 1.1.6. *Si A es simétrico con respecto a a^*, entonces A tiene el mismo número de sumas que diferencias.*

Demostración.

$$|A + A| = |A + (a^* - A)\,| = |a^* + (A - A)\,| = |A - A|. \qquad \square$$

Proposición 1.1.7. *Si A es un conjunto finito de enteros simétrico con respecto a a^*, entonces* $a^* = \text{mín}(A) + \text{máx}(A)$.

Demostración. Como A es un conjunto finito de enteros, existen $m,\ M \in A$ tales que $m = \text{mín}(A)$ y $M = \text{máx}(A)$, luego por la definición de mínimo, para todo $a \in A$ se tiene:

$$m \leq a,$$
$$-m \geq -a,$$
$$a^* - m \geq a^* - a.$$

Dado que A es simétrico con respecto a a^*, $a^* - m \in A$; luego, por definición de máximo, se sigue que $a^* - m = M$. Por lo tanto, $a^* = m + M$.

$\square$

Ejemplo 1.1.8. La progresión aritmética generalizada de dimensión d, con $d \geq 1$,

$$R = \{a + x_1 m_1 + \cdots + x_d m_d : \ell_i \leq x_i \leq \ell_i + k_i - 1 \text{ para } i = 1, \ldots, d\}$$

en los enteros es simétrica con respecto a

$$a^* = 2a + \sum_{i=1}^{d} (2\ell_i + k_i - 1)\, m_i.$$

[2] $a - B = \{a - b : b \in B\}$.

Demostración. Sea $p_i \in R$, $p_i = a + \sum_{i=1}^{d} x_i m_i$; $\ell_i \leq x_i \leq \ell_i + k_i - 1$ para $i = 1, \ldots, d$. Entonces,

$$\begin{aligned} a^* - p_i &= 2a + \sum_{i=1}^{d} (2\ell_i + k_i - 1)\, m_i - \left(a + \sum_{i=1}^{d} x_i m_i\right), \\ &= a + \sum_{i=1}^{d} (2\ell_i + k_i - x_i - 1)\, m_i. \end{aligned}$$

Como $\ell_i \leq x_i \leq \ell_i + k_i - 1$ para $i = 1, \ldots, d$, se tiene que

$$1 - \ell_i - k_i \leq -x_i \leq -\ell_i,$$

$$\ell_i \leq 2\ell_i + k_i - x_i - 1 \leq \ell_i + k_i - 1.$$

Por lo tanto, $a + \sum_{i=1}^{d} (2\ell_i + k_i - x_i - 1)\, m_i \in R$; por consiguiente, $R = a^* - R$.

□

1.2. *Conjuntos MSTD* de enteros

Definición 1.2.1 (Conjuntos con más sumas que diferencias)**.** . *Sea G un grupo abeliano y sea A un subconjunto finito de G. Si* $|A + A| > |A - A|$, *entonces el conjunto A se denomina conjunto con más sumas que diferencias (MSTD).*

Ejemplo 1.2.2. Algunos conjuntos $MSTD$ dados en [2] o [6] son:

$$A_1 = \{0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14\};$$

$$A_2 = \{0, 2, 4, 7, 8, 12, 14, 15\};$$

$$A_3 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\};$$

$$A_4 = \{0, 2, 3, 4, 7, 11, 15, 16, 18\};$$

$$A_5 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14, 16, 17\}.$$

Teniendo en cuenta la definición de conjunto $MSTD$ se diseñó un algoritmo que permite determinar si un conjunto es o no $MSTD$. Este algoritmo llamado *Decide* recibe un conjunto de enteros y calcula sus conjuntos suma y diferencia, sus respectivas cardinalidades; luego, realiza la diferencia de éstas y dependiendo del resultado retorna un mensaje afirmando si es o no un conjunto $MSTD$, así como la cardinalidad de los conjuntos suma y diferencia.

Por ejemplo, para el conjunto $A_6 = \{0, 1, 2, 4, 7, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 20\}$ el algoritmo *Decide* imprime el siguiente mensaje:

"El conjunto es MSTD"
"El cardinal del conjunto suma es:", 41
"El cardinal del conjunto diferencia es:", 39

Sin embargo, al ingresar el conjunto $\{1, 2, 3, 8, 13, 17\}$ y ejecutar el algoritmo, este último retorna el mensaje:

"El conjunto NO es MSTD"
"El cardinal del conjunto suma es:", 19
"El cardinal del conjunto diferencia es:", 27

Una de las cuestiones importantes que aborda el estudio de conjuntos con más sumas que diferencias es la construcción de los mismos. Algunos métodos para construir conjuntos $MSTD$ de enteros propuestos por M. Nathanson [6] y P. Hegarty [2] se presentarán, a continuación, junto con ejemplos obtenidos mediante la implementación de métodos computacionales.

Para empezar, se verá que la obtención de conjuntos $MSTD$ no resulta difícil cuando se cuenta con uno de ellos, como se puede observar en la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3. *([6]) Si A es un conjunto $MSTD$ de enteros, entonces para cada $x, z \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, el conjunto*

$$x * A + \{z\} = \{xa + z : a \in A\}$$

también es un conjunto $MSTD$.

Demostración. Sea $B = \{xa + z : a \in A\}$ donde $x, z \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$ y sea A un conjunto $MSTD$ de enteros.
Se define

$$\begin{aligned} \phi : A + A &\to B + B \\ m &\to xm + 2z. \end{aligned}$$

Note que para $m, n \in A + A$, si $m = n$; se tiene que, $\phi(m) = xm + 2z = xn + 2z = \phi(n)$; luego, ϕ está bien definida. Ahora, sean $m_1, m_2 \in A + A$, suponga que $\phi(m_1) = \phi(m_2)$; se sigue que, $xm_1 + 2z = xm_2 + 2z$; de donde, $m_1 = m_2$. Así, ϕ es inyectiva. Además, Dado $b \in B + B$ se tiene que $b = b_1 + b_2$ para $b_1, b_2 \in B$; luego, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que, $b_1 = xa_1 + z$ y $b_2 = xa_2 + z$; así que existe $a = a_1 + a_2 \in A + A$ tal que

$$\phi(a) = \phi(a_1 + a_2) = x(a_1 + a_2) + 2z = (xa_1 + z) + (xa_2 + z) = b_1 + b_2 = b.$$

Por lo tanto, ϕ es sobreyectiva.
Lo anterior implica que ϕ es una función biyectiva; por consiguiente, $|A + A| = |B + B|$.

Similarmente, sea

$$\begin{aligned} \psi : A - A &\to B - B \\ m &\to xm. \end{aligned}$$

Note que para $m, n \in A - A$, si $m = n$; se tiene que, $\psi(m) = xm = xn = \psi(n)$; luego, ψ está bien definida. Ahora, sean $m_1, m_2 \in A - A$, suponga que $\psi(m_1) = \psi(m_2)$; se sigue que, $xm_1 = xm_2$; de donde, $m_1 = m_2$. Así, ψ es inyectiva. Además, dado $b \in B - B$ se tiene que $b = b_1 - b_2$ para $b_1, b_2 \in B$; luego, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que, $b_1 = xa_1 + z$ y $b_2 = xa_2 + z$; así que existe $a = a_1 - a_2 \in A - A$ tal que

$$\psi(a) = \psi(a_1 - a_2) = x(a_1 - a_2) = (xa_1 + z) - (xa_2 + z) = b_1 - b_2 = b.$$

Por lo tanto, ψ es sobreyectiva.

Lo anterior implica que ψ es una función biyectiva; por consiguiente, $|A - A| = |B - B|$.

En conclusión, si A es un conjunto $MSTD$; se tiene que, B también es un conjunto $MSTD$.

□

El siguiente teorema permite generar conjuntos $MSTD$ a partir de una progresión aritmética que luego es perturbada por un conjunto simétrico y por un elemento específico.

Teorema 1.2.4. *([6]) Sean m, d y k enteros tales que $m \geq 4$, $1 \leq d \leq m-1$, $d \neq \frac{m}{2}$, $k \geq 3$ si $d < \frac{m}{2}$ y $k \geq 4$ si $d > \frac{m}{2}$. Sean*

$$\begin{aligned} B &= [0, m-1] \setminus \{d\}, \\ L &= \{m-d, 2m-d, \ldots, km-d\}, \\ a^* &= (k+1)\, m - 2d, \\ A^* &= B \cup L \cup (a^* - B)\,, \\ A &= A^* \cup \{m\}. \end{aligned}$$

Entonces, el conjunto A es un conjunto $MSTD$ de enteros.

Demostración. Para empezar, se probará que

$$|A + A| > |A^* + A^*|.$$

Dado que $m \in A$; se tiene que, $2m \in A + A$. Se mostrará que $2m \notin A^* + A^*$. Suponga que $2m = a + a' \in A^* + A^*$. Sin pérdida de generalidad, considere $a \geq a'$, luego $m \leq a \leq 2m$; así, $a \notin B$.

Además,

$$\text{mín}\,(a^* - B) \geq a^* - (m-1) = km - 2d + 1 \geq 2m,$$

si $(k-2)\, m \geq 2d$, y esta desigualdad se cumple si $k \geq 4$, o si $k \geq 3$ y $d < \frac{m}{2}$. Luego, $a \notin a^* - B$. Como $3m - d > 2m$, entonces $a \in L$ sólo si $a = 2m - d$ y $a' = d$; así, $a' \notin B$. Debido a que $d \neq \frac{m}{2}$, se sigue que $m - d \neq d$; luego, $a' \notin L$. Por lo tanto, $a' \notin A^*$.

Con lo anterior, se ha probado que $2m \in (A+A) \setminus (A^* + A^*)$. Por lo tanto, $|A+A| > |A^* + A^*|$.

Ahora, se probará que el conjunto A^* es simétrico con respecto a a^*. Como

$$\begin{aligned} a^* - A^* &= a^* - (B \cup L \cup (a^* - B)), \\ &= (a^* - B) \cup (a^* - L) \cup (a^* - (a^* - B)); \end{aligned}$$

basta probar que $a^* - L = L$ y $(a^* - (a^* - B)) = B$.

Dado que L es una progresión aritmética con k elementos y $a^* = \text{mín}(L) + \text{máx}(L)$; se tiene que, $a^* - L = L$. Como

$$a^* - B = \{a^* - b : b \in B\} = \{a^*, a^* - 1, \ldots, a^* - (m-1)\} \setminus \{a^* - d\};$$

entonces,

$$\begin{aligned} a^* - (a^* - B) &= \{a^* - a^*, a^* - (a^* - 1), \ldots, a^* - (a^* - (m-1))\} \setminus \{a^* - (a^* - d)\}, \\ &= \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{d\} = B. \end{aligned}$$

Por lo anterior, $a^* - A^* = (a^* - B) \cup L \cup B = A^*$. Luego, A^* es simétrico con respecto a a^*. Esto implica, de la proposición 1.1.6, que:

$$|A^* + A^*| = |A^* - A^*|.$$

Además, se probará que $A - A = A^* - A^*$. Para ello, es suficiente mostrar que $A^* - \{m\} \subseteq A^* - A^*$. Note que $0 \in A^*$, luego $A^* \subseteq A^* - A^*$.

Dado que $m = (2m-d) - (m-d) \in L - L$, se sigue que

$$\{m\} - B = \{1, 2, \ldots, m-1, m\} \setminus \{m-d\} \subseteq B \cup (L - L) \subseteq A^* - A^*,$$

y también $B - \{m\} \subseteq A^* - A^*$. Similarmente,

$$L - \{m\} = \{-d, m-d, \ldots, (k-1)\,m - d\} \subseteq L \cup \{-d\}.$$

Si $1 < d < m-1$, entonces $\{1, d+1\} \subseteq B \cup L \subseteq A^*$ y $d = (d+1) - 1 \in A^* - A^*$. Si $d = 1$, se tiene que $\{2, 3\} \subseteq B \cup L$ y $1 \in A^* - A^*$. Si $d = m-1$, entonces $m+1 = 2m-d \in L$, $2 \in B$, por consiguiente, $m-1 \in B - L \subseteq A^* - A^*$. Por lo tanto ,

$$L - \{m\} \subseteq A^* - A^*.$$

Finalmente, se debe probar que

$$a^* - B - \{m\} = \{a^* - b - m : b \in B\} \subseteq A^* - A^*.$$

Si $d = m-1$, entonces $a^* = (k-1)\,m + 2$ y

$$A^* = [0, m-2] \cup \{1, m+1, 2m+1, \ldots, (k-1)\,m+1\} \cup (a^* - [0, m-2])\,.$$

Si $b \in [0, m-4]$, entonces

$$a^* - b - m = a^* - (b+2) - (m-2) \in A^* - A^*.$$

Si $b = m-3$, entonces

$$a^* - b - m = a^* - (m-4) - (m+1) \in A^* - A^*.$$

Si $b = m-2$, entonces

$$a^* - b - m = a^* - (m-3) - (m+1) \in A^* - A^*.$$

Suponga que $1 \leq d \leq m-2$. Para $b \notin \{d-1, m-1\}$, se tiene que $b+1 \in B$, luego $a^* - (b+1) \in a^* - B$. Dado que $m-1 \in B$, entonces

$$a^* - b - m = (a^* - (b+1)) - (m-1) \in A^* - A^*.$$

Si $b = m-1$, entonces

$$\begin{aligned} a^* - b - m &= (k-1)\,m - 2d + 1, \\ &= ((k-1)\,m - d) - (d-1)\,, \\ &\in L - B \subseteq A^* - A^*. \end{aligned}$$

Si $b = d - 1$ y $d \neq m - 2$, entonces $2 \leq d \leq m - 3$ y se tiene que

$$\begin{aligned} a^* - b - m &= a^* - (d - 1) - m, \\ &= (a^* - (d + 1)) - (m - 2), \\ &\in A^* - A^*. \end{aligned}$$

Por último, si $b = d - 1$ y $d = m - 2$; se sigue que, $m \geq 5$, $k \geq 4$, así

$$a^* = (k + 1) m - 2d = (k - 1) m + 4;$$

luego,

$$\begin{aligned} a^* - b - m &= (k - 1) m + 4 - (d - 1) - m, \\ &= (k - 3) m + 7, \\ &= (k - 2) m + 2 - (m - 5), \\ &= ((k - 1) m - (m - 2)) - (m - 5), \\ &\in L - B \subseteq A^* - A^*. \end{aligned}$$

Entonces,

$$a^* - B - m \subseteq A^* - A^*.$$

Por consiguiente, $A - A = A^* - A^*$. Con esto se concluye la prueba. □

Ejemplo 1.2.5. Los siguientes son conjuntos $MSTD$ construidos utilizando el teorema 1.2.4:

a) Con $m = 4$, $d = 3$ y $k = 4$ se construye el conjunto $MSTD$

$$A_3 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\},$$

donde $|A_3 + A_3| = 28$ y $|A_3 - A_3| = 27$.

b) Para $m = 4$, $d = 1$ y $k = 4$ se obtiene el conjunto $MSTD$

$$A_4 = \{0, 2, 3, 4, 7, 11, 15, 16, 18\},$$

con $|A_4 + A_4| = 32$ y $|A_4 - A_4| = 31$.

La construcción manual y el análisis de conjuntos $MSTD$ a partir del teorema anterior no representan mayor dificultad para valores pequeños de m, d y k; sin embargo, al aumentar los valores, estas tareas demandan más tiempo. Por esta razón, se ha diseñado el algoritmo `MSTD(m,d,k)` que permite obtener conjuntos $MSTD$, de manera rápida. En el caso de $m = 5$, $d = 1$ y $k = 8$, este algoritmo retorna un conjunto $MSTD$, $A_7 = \{0, 2, 3, 4, 5, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 40, 41, 43\}$, la cardinalidad del conjunto suma y diferencia, que respectivamente es 74 y 73.

Al estudiar conjuntos $MSTD$, interesa conocer la cardinalidad de los conjuntos suma y diferencia de subconjuntos de enteros; en este sentido, el siguiente resultado compara los conjuntos suma, diferencia y sus cardinalidades de acuerdo a determinadas condiciones.

Lema 1.2.6. *([6]) Sea $m \geq 4$ y sean r y s enteros tales que*

$$r \geq 1 \ \text{ y } r + 1 \leq s \leq m - 1.$$

Sea

$$B = [0, r - 1] \cup [s, m - 1].$$

Si

$$s \leq 2r - 1 \text{ y } 2s \leq m + r - 1, \tag{1.4}$$

entonces

$$B + B = [0, 2m - 2].$$

Si

$$s \leq 2r - 1 \text{ o } 2s \leq m + r - 1, \tag{1.5}$$

entonces

$$B - B = [1 - m, m - 1]\,.$$

Sean $m \geq 4$ *y* $1 \leq r \leq m - 2$, *y sea*

$$B = [0, m - 1] \setminus \{r\}.$$

Entonces

$$B - B = [-(m - 1)\,, m - 1]\,.$$

Si $2 \leq r \leq m - 3$, *entonces*

$$B + B = [0, 2m - 2]\,.$$

Si $r = 1$, *entonces*

$$B + B = [0, 2m - 2] \setminus \{1\}.$$

Si $r = m - 2$, *entonces*

$$B + B = [0, 2m - 2] \setminus \{2m - 3\}.$$

Demostración. Note que

$$2B = B + B = [0, 2r - 2] \cup [s, m + r - 2] \cup [2s, 2m - 2]\,.$$

Si $s \leq 2r-1$ y $2s \leq m+r-1$; se tiene que, $[0, 2r - 2] \cup [s, m + r - 2] = [0, m + r - 2]$, incluso para $s = 2r-1$, además, $[s, m + r - 2] \cup [2s, 2m - 2] = [s, 2m - 2]$, inclusive si $2s = m+r-1$. Luego,

$$B + B = [0, 2m - 2]$$

Ahora, si $s \leq 2r - 1$ o $2s \leq m + r - 1$; se sigue que,

$$(B - B) \cap [0, m - 1] = [0, r - 1] \cup [s - r + 1, m - 1] \cup [0, m - 1 - s] = [0, m - 1]\,;$$

de modo, $B - B = [1 - m, m - 1]$.

Por otro lado, si $s = r + 1$ entonces $1 \leq r \leq m - 2$ y $B = [0, m - 1] \setminus \{r\}$. Note que la condición (1.5) se satisface y por lo tanto $B - B = [1 - m, m - 1]$. Adicionalmente, la condición (1.4) es equivalente a $2 \leq r \leq m - 3$ y por consiguiente, $B + B = [0, 2m - 2]$.

Para $r = 1$ se tiene que $B = \{0\} \cup [2, m - 1]$, luego

$$B + B = \{0\} \cup [2, m - 1] \cup [4, 2m - 2] = [0, 2m - 2] \setminus \{1\}.$$

Por último, para $r = m - 2$ se tiene que $B = [0, m - 3] \cup \{m - 1\}$, luego

$$B + B = [0, 2m - 6] \cup [m - 1, 2m - 4] \cup \{2m - 2\} = [0, 2m - 2] \setminus \{2m - 3\}.$$

Con esto se da por terminada la demostración. $\square$

A pesar de que el lema anterior no propone un método para construir conjuntos $MSTD$, es una herramienta útil que provee las condiciones necesarias para generarlos, como se observa en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.7. *([6]) Sea $m \geq 4$ y sea B un subconjunto de $[0, m - 1]$ tal que*

$$B + B = [0, 2m - 2]$$

y

$$B - B = [-m + 1, m - 1].$$

Sea L^* una progresión aritmética de dimensión $(d - 1)$ contenida en $[0, m - 1] \setminus B$ tal que $\text{mín}(L^*) - 1 \in B$. Sea $k \geq 2$ y sea L la progresión aritmética de dimensión d,

$$L = (m - L^*) + m * [1, k].$$

Sea

$$a^* = \text{mín}(L) + \text{máx}(L) = (k + 3)\, m - \text{mín}(L^*) - \text{máx}(L^*)$$

y

$$A^* = B \cup L \cup (a^* - B)\,.$$

Entonces $A = A^* \cup \{m\}$ *es un conjunto MSTD de enteros.*

Demostración. El conjunto A^* es simétrico con respecto a a^* luego

$$|A^* + A^*| = |A^* - A^*|.$$

Como $B \cap L^* = \emptyset$ y

$$A^* \cap [0, 2m] = B \cup (2m - L^*),$$

se tiene que $2m \notin A^* + A^*$, luego $2m \in (A + A)\backslash(A^* + A^*)$. El conjunto A será un conjunto $MSTD$ si $A - A = A^* - A^*$, y para esto es suficiente probar que:

$$A^* - m \subseteq A^* - A^*.$$

Note que la condición $B+B = [0, 2m-2]$ implica que $0, m-1 \in B$. En particular, $A^* \subseteq A^* - A^*$.

$$A^* - m = (B - m) \cup (L - m) \cup ((a^* - B) - m).$$

Dado que $m \in L - L$, se tiene que

$$m - B \subseteq [1, m] \subseteq (B - B) \cup (L - L) \subseteq A^* - A^*,$$

en consecuencia

$$B - m \subseteq A^* - A^*.$$

Además,

$$\begin{aligned} L - m &= (m - L^*) \cup ((m - L^*) + m * [1, k - 1]) \\ &\subseteq (B - B) \cup L \\ &\subseteq A^* - A^*. \end{aligned}$$

Finalmente, sea $a^*-b-m \in a^*-B-m$. Si $b \neq m-1$,, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $m+b = b_1+b_2$, así

$$a^* - b - m = (a^* - b_1) - b_2 \in (a^* - B) - B \subseteq A^* - A^*.$$

Si $b = m - 1$, entonces

$$\begin{aligned} a^* - b - m &= a^* - 2m + 1 \\ &= (k+3)m - \text{mín}(L^*) - \text{máx}(L^*) - 2m + 1 \\ &= (k+1)m - \text{máx}(L^*) - (\text{mín}(L^*) - 1), \end{aligned}$$

Como $(m - \text{máx}(L^*)) + km \in L$ y $\text{mín}(L^*) - 1 \in B$. se tiene que

$$a^* - b - m \in L - B \subseteq A^* - A^*.$$

Esto completa la demostración.

□

Inicialmente para obtener un conjunto $MSTD$ utilizando el teorema 1.2.7 es necesario llevar a cabo un proceso previo para construir los conjuntos B y L^* que cumplan con las condiciones establecidas, para esto se emplea el lema 1.2.6 de donde $B = [0, r-1] \cup [s, m-1]$ para algún $r \geq 1$, $s \leq 2r-1$ y un m tal que $2s \leq m+r-1$; además la progresión aritmética de dimensión $d-1$, $L^* \subseteq [0, m-1] \backslash B$ indica que $L^* \subseteq [r, s-1]$ y debido a que $\text{mín}(L^*) - 1 \in B$, entonces $r = \text{mín}(L^*)$. Por lo anterior, L^* se podrá construir como una traslación de una progresión aritmética P de dimensión $d-1$ con $\text{mín}(P) = 0$ y $\text{máx}(P) = M$ y así $s \geq M + r + 1$ y $r \geq M + 2$. En conclusión, para construir los conjuntos B y L^* se parte de una progresión aritmética P y se escogen enteros r, s y m tales que $r \geq M + 2$, $M + r + 1 \leq s \leq 2r - 1$ y $2s \leq m + r - 1$, luego se procede a construir $B = [0, r-1] \cup [s, m-1]$ y $L^* = \{r\} + P$.

Como se puede ver, la implementación del teorema 1.2.7 requiere varios procesos, haciendo que el trabajo de construcción sea más largo tanto para la elaboración de los conjuntos de la hipótesis como para la del conjunto final; por esta razón, se ha diseñado el algoritmo `MSTDG(R,k)` que en primer lugar, crea una progresión aritmética generalizada $P =$

$\{a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_{(d-1)}x_{(d-1)} : 0 \leq x_i \leq 1\}$ a partir de un conjunto que contiene las razones de la progresión, posteriormente calcula el $\text{máx}(P)$, escoge de manera aleatoria los enteros r, s y m teniendo en cuenta las condiciones establecidas para finalmente construir los conjuntos definidos en dicho teorema. A continuación, se muestra un conjunto $MSTD$, obtenido mediante la implementación del algoritmo.

Ejemplo 1.2.8. Tomando la progresión aritmética $P = \{3x_1 + 4x_2 + x_3 : 0 \leq x_i \leq 1$ para $i = 1, 2, 3\}$, cuyo máximo valor es $M = 8$, escogiendo $r = 10$, $s = 19$ y $m = 29$ y empleando el algoritmo `MSTDG(R,k)` se construye el conjunto $MSTD$

$$A_8 = [0, 9] \cup [19, 29] \cup [40, 48] \cup [69, 77] \cup [89, 98] \cup [108, 117] \setminus \{42, 46, 71, 75\},$$

donde $|A_4 + A_4| = 234$ y $|A_4 - A_4| = 233$.

El siguiente resultado permite la construcción de dos conjuntos $MSTD$ a partir de dos números enteros, con diferente cardinalidad, donde el primer conjunto se encuentra contenido en el segundo.

Teorema 1.2.9. *([2]) Sean $n, k > 1$. Si*

$$X := [0, n],$$

$$m := (2k + 3)n,$$

$$Y := m - X,$$

$$Z := \bigcup_{j=1}^{k} [2jn + 1, (2j + 1)n - 1],$$

$$B := X \cup Y \cup Z,$$

$$a := 2n,$$

$$A := B \cup \{a\},$$

entonces A es un conjunto $MSTD$ con $|A + A| - |A - A| = 1$. Además, si los conjuntos:

$$W := [(2k + 4)n, (2k + 5)n - 1],$$
$$\mathcal{A} := A \cup W,$$

entonces $\mathcal{A}$ también es un conjunto $MSTD$ con $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| - |\mathcal{A} - \mathcal{A}| = 2$.

Demostración. El conjunto B es simétrico con respecto a m, ya que

$$m - B = (m - X) \cup (m - Y) \cup (m - Z) = Y \cup X \cup Z = B.$$

Así, por proposición 1.1.6, se tiene que $|B + B| = |B - B|$.

Se probará que $A + A = (B + B) \cup \{2a\}$. Como $A + A = (B + B) \cup (a + B) \cup \{2a\}$, basta probar que $a + B \subseteq B + B$. Note que $0 \in B$ implica $B \subseteq B + B$. Dado que:

$$a + B = (a + X) \cup (a + Y) \cup (a + Z),$$

se tiene que

$a + X = [2n, 3n] \subseteq (X + X) \cup (Z + X) \subseteq B + B.$

$a + Y = [a + m - n, a + m] = [(2k + 4)n, (2k + 5)n] \subseteq (Y + X) \cup (Z + Y) \subseteq B + B.$

$a + Z = [4n + 1, 5n - 1] \cup [6n + 1, 7n - 1] \cup \cdots \cup [(2k + 2)n + 1, (2k + 3)n - 1] \subseteq Z \cup Y \subseteq B + B.$

De ahí que $A + A = (B + B) \cup \{2a\}$. Luego $|A + A| = |B + B| + 1$.

Ahora se mostrará que $A - A = B - B$. Debido a que $A - A = (B - B) \cup (a - B) \cup (B - a)$, es suficiente probar que $(B - a) \subseteq (B - B)$. Observe que $0 \in B$ implica $B \subseteq B - B$. Teniendo en cuenta que

$$(B - a) = (X - a) \cup (Y - a) \cup (Z - a),$$

y como $a = 2n = 2n + 1 - 1 \in Z - X$, entonces

$$a - X = [n, 2n] \subseteq X \cup (Z - X) \subseteq B - B \ \text{ y } \ X - a \subseteq B - B.$$

Además,

$$Y - a = [m - n - a, m - a] = [2kn, (2k+1)n] \subseteq (Z - X) \cup Z \cup (Y - X) \subseteq B - B.$$

$$\begin{aligned} Z - a &= \bigcup_{j=1}^{k} [(2j-2)n + 1, (2j-1)n - 1] \\ &= [1, n-1] \cup [2n+1, 3n-1] \cup \cdots \cup [(2k-2)n + 1, (2k-1)n - 1] \\ &\subseteq X \cup Z \subseteq B - B. \end{aligned}$$

Luego, $A - A = B - B$ y $|A - A| = |B - B|$. Por lo tanto, A es un conjunto $MSTD$ con $|A + A| = |A - A| + 1$.

Finalmente, se probará que $\mathcal{A}$ es un conjunto $MSTD$. Note que $0 \in A$ implica que $A \subseteq A - A$ y $A \subseteq A + A$. Como

$$\mathcal{A} - \mathcal{A} = (A - A) \cup (W - A) \cup (A - W) \cup (W - W),$$

basta analizar los subconjuntos $(W - A)$, $(A - W)$ y $(W - W)$. Se sabe que

$$W - A = (W - X) \cup (W - Y) \cup (W - Z) \cup (W - a),$$

y

$$A - W = (X - W) \cup (Y - W) \cup (Z - W) \cup (a - W).$$

Además,

$$\begin{aligned} W - X &= [(2k+3)n, (2k+5)n - 1] \subseteq Y \cup [(2k+3)n + 1, (2k+5)n - 1] \\ &\subseteq (A - A) \cup [(2k+3)n + 1, (2k+5)n - 1]. \end{aligned}$$

$$W - Y = [n, 3n - 1] \subseteq (a - X) \cup Z \subseteq A - A.$$

$$\begin{aligned} W - Z &= [3n+1, 5n-2] \cup \cdots \cup [(2k-1)n + 1, (2k+1)n - 2] \cup [(2k+1)n + 1, (2k+3)n - 2] \\ &\subseteq (Z - X) \cup (Z - a) \cup Z \cup (Y - X) \cup Y \subseteq A - A. \end{aligned}$$

$$W - a = [(2k+2)n, (2k+3)n - 1] \subseteq Y \subseteq A - A.$$

Por otro lado,

$$W - W = [-(n-1), n-1] \subseteq B - B = A - A.$$

De todo lo anterior, se concluye que $\mathcal{A} - \mathcal{A} = (A - A) \cup \pm[(2k+3)n+1, (2k+5)n-1]$; por consiguiente, $|\mathcal{A} - \mathcal{A}| = |A - A| + 2(2n-1) = |A - A| + (4n-2)$.

Ahora, como

$$\mathcal{A} + \mathcal{A} = (A + A) \cup (A + W) \cup (W + W),$$

basta estudiar los subconjuntos $(A + W)$ y $(W + W)$. Se sabe que

$$A + W = (X + W) \cup (Y + W) \cup (Z + W) \cup (a + W).$$

Y

$$\begin{aligned}
X + W &= [(2k+4)n, (2k+6)n-1] \subseteq (Y + X) \cup (Y + Z) \subseteq A + A.\\
Y + W &= [(4k+6)n, (4k+8)n-1] \subseteq (Y + Y) \cup [(4k+6)n+1, (4k+8)n-1]\\
&\subseteq (A + A) \cup [(4k+6)n+1, (4k+8)n-1].\\
Z + W &= [(2k+6)n+1, (2k+8)n-2] \cup [(2k+8)n+1, (2k+10)n-2] \cup \cdots\\
&\cup [(4k+4)n+1, (4k+6)n-2] \subseteq (Y + Z) \cup (Y + Y) \subseteq A + A.\\
a + W &= [(2k+6)n, (2k+7)n-1] \subseteq (Y + Z) \cup \{(2k+6)n\} \subseteq (A + A) \cup \{(2k+6)n\}.
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$W + W = [(4k+8)n, (4k+10)n-2] \subseteq [(4k+6)n+1, (4k+10)n-2].$$

Entonces $\mathcal{A} + \mathcal{A} = (A + A) \cup [(4k+6)n+1, (4k+10)n-2] \cup \{(2k+6)n\}$. Luego $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| = |A + A| + (4n-2) + 1$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es un conjunto $MSTD$, y se tiene que

$$|\mathcal{A} + \mathcal{A}| - |\mathcal{A} - \mathcal{A}| = |A + A| + (4n-1) - (|A - A| + 4n - 2) = 2.$$

Esto completa la demostración.

$\square$

Note que, en el teorema, el método empleado para la construcción del primer conjunto $MSTD$ presenta varias similitudes con respecto a los métodos anteriores; ya que también hace uso de conjuntos auxiliares en donde nuevamente uno de ellos es una progresión aritmética, en este caso Z, que se puede expresar como $Z = \{2n + 1 + x_1 + 2nx_2 : 0 \leq x_1 \leq n - 2, 0 \leq x_2 \leq k - 1\}$. Por lo tanto, la construcción de un conjunto $MSTD$, como se ha visto hasta ahora, se reduce a perturbar una progresión aritmética.

Una cuestión importante que se resalta en este teorema es la cuantificación de la resta entre la cardinalidad de los conjuntos suma y diferencia, lo cual es aplicado en el algoritmo `MSTDH(n,k)`, que permite crear dos conjuntos $MSTD$, donde para el primer conjunto, la resta entre el cardinal del conjunto suma y el cardinal del conjunto diferencia es 1; y para el segundo conjunto, el valor de dicha resta es 2.

Ejemplo 1.2.10. En el caso de $n = 4$ y $k = 3$ el algoritmo `MSTDH(n,k)` retorna

"Conjunto MSTD1", {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 36}
"El cardinal del conjunto suma de MSTD1 es:", 70
"El cardinal del conjunto diferencia de MSTD1 es:", 69
"Conjunto MSTD2", {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 19, 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 40, 41, 42, 43}
"El cardinal del conjunto suma de MSTD2 es:", 85
"El cardinal del conjunto diferencia de MSTD2 es:", 83.

Capítulo 2

Argumento de conteo

Sea $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y sea Ω el conjunto de todos los subconjuntos de G de la forma

$$A = \{(i + n\mathbb{Z}, \varepsilon_i + 2\mathbb{Z}) : i = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ y } \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}.$$

Observe que para todo $A \in \Omega$ $|A| = n$ y $|\Omega| = 2^n$.

¿Es posible encontrar $A \in \Omega$ tal que A sea un conjunto MSTD? Si es así, ¿Cuántos conjuntos MSTD se pueden encontrar?

Considere, por ejemplo, $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; luego, $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$ con

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2)\},\\
A_2 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [1]_2)\},\\
A_3 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [0]_2)\},\\
A_4 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\},\\
A_5 &= \{([0]_3, [1]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2)\},\\
A_6 &= \{([0]_3, [1]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [1]_2)\},\\
A_7 &= \{([0]_3, [1]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [0]_2)\},\\
A_8 &= \{([0]_3, [1]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.
\end{aligned}$$

Calculando el conjunto suma y diferencia para cada uno de los A_i, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
A_1 + A_1 &= A_1 - A_1 = \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2)\}.\\
A_2 + A_2 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([0]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_2 - A_2 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_3 + A_3 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([0]_3, [1]_2)\}.\\
A_3 - A_3 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_4 + A_4 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_4 - A_4 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_5 + A_5 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_5 - A_5 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_6 + A_6 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([0]_3, [1]_2)\}.\\
A_6 - A_6 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_7 + A_7 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([0]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_7 - A_7 &= \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2), ([1]_3, [1]_2), ([2]_3, [1]_2)\}.\\
A_8 + A_8 &= A_8 - A_8 = \{([0]_3, [0]_2), ([1]_3, [0]_2), ([2]_3, [0]_2)\}.
\end{aligned}
$$

Luego, no existe $A \in \Omega$ que sea $MSTD$ para $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sin embargo, lo anterior no descarta la posibilidad de encontrar conjuntos $MSTD$ en un grupo $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lema 2.0.11. *([6]) Sea $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y sea Ω el conjunto de todos los subconjuntos de G de la forma*

$$A = \{(i + n\mathbb{Z}, \varepsilon_i + 2\mathbb{Z}) : i = 0, 1, \ldots, n-1 \ y\ \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}.$$

Para cada conjunto $A \in \Omega$, si $(n\mathbb{Z}, \delta + 2\mathbb{Z}) \in A - A$, entonces $|A - A| \leq |G| - 1 = 2n - 1$.

Demostración. Sean $X, Y \in A$, con $X = (x + n\mathbf{Z}, \varepsilon_x + 2\mathbf{Z})$ e $Y = (y + n\mathbb{Z}, \varepsilon_y + 2\mathbb{Z})$, tales que

$$X - Y = (x + n\mathbb{Z}, \varepsilon_x + 2\mathbb{Z}) - (y + n\mathbb{Z}, \varepsilon_y + 2\mathbb{Z}) = (n\mathbb{Z}, \delta + 2\mathbb{Z}),$$

entonces $x \equiv y \pmod{n}$ luego $x = y$; así que $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ y $\delta \equiv 0 \pmod{2}$. Por lo tanto, $(n\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}) \notin A-A$. Como $|G| = 2n$ y $(n\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}) \in G$ entonces $|A-A| \leq |G|-1 = 2n-1$ $\square$

A partir del lema anterior, el problema de encontrar conjuntos $MSTD$ se reduce a probar que existe $A \in \Omega$ tal que $A + A = G$, es decir, $|A + A| = 2n$.

Teorema 2.0.12. *([6]) Sea $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y sea Ω el conjunto de todos los subconjuntos de G de la forma*

$$A = \{(i + n\mathbb{Z}, \varepsilon_i + 2\mathbb{Z}) : i = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ } y \text{ } \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}.$$

$\Psi(G)$ denota el número de $A \in \Omega$ tal que $A + A = G$. Entonces

$$\Psi(G) \geq \begin{cases} 2^n\left(1 - \frac{\sqrt{2}n}{2^{n/2}}\right) & \textit{si } n \textit{ es impar;} \\ 2^n\left(1 - \frac{2n}{2^{n/2}}\right) & \textit{si } n \textit{ es par.} \end{cases}$$

Demostración. Sea $g = (b + n\mathbb{Z}, \delta + 2\mathbb{Z}) \in G$ y denote $\phi(g)$ el número de $A \in \Omega$ tal que $g \notin A + A$. Entonces

$$|\Omega| - \Psi(G) \leq \sum_{g \in G} \phi(g).$$

Considere primero el caso en que n es impar. Hay una clase de congruencia única $a_0 + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tal que $2a_0 \equiv b \pmod{n}$ y $(a_0 + n\mathbb{Z}, \varepsilon + 2\mathbb{Z}) \in A$ para algún $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Si $\delta \equiv 0 \pmod{2}$, entonces

$$g = (b + n\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}) = (a_0 + n\mathbb{Z}, \varepsilon + 2\mathbb{Z}) + (a_0 + n\mathbb{Z}, \varepsilon + 2\mathbb{Z}) \in A + A,$$

así $\phi(g) = 0$.

Si $\delta \equiv 1 \pmod{2}$, entonces $(a_0 + n\mathbb{Z}, \varepsilon + 2\mathbb{Z}) + (a_0 + n\mathbb{Z}, \varepsilon + 2\mathbb{Z}) \neq g$. Si $a \not\equiv a_0 \pmod{n}$, entonces $b - a \not\equiv a \pmod{n}$. Se sigue que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \backslash \{a_0 + n\mathbb{Z}\}$ es la unión de $(n-1)/2$ conjuntos disjuntos de la forma $\{a_j + n\mathbb{Z}, b - a_j + n\mathbb{Z}\}$, para $j = 1, \ldots, (n-1)/2$. Sea $\{\varepsilon_j\}_{j=0}^{(n-1)/2}$ cualquier secuencia de ceros y unos, se define la secuencia $\{\varepsilon'_j\}_{j=0}^{(n-1)/2}$ como

$$\varepsilon'_j = \delta - \varepsilon_j + 1.$$

Definiendo el conjunto $A \in \Omega$ como $A = \{(a_j + n\mathbb{Z}, \varepsilon_j + 2\mathbb{Z})\}_{j=0}^{(n-1)/2} \cup \{b - a_j + n\mathbb{Z}, \varepsilon'_j + 2\mathbb{Z}\}_{j=0}^{(n-1)/2}$ se ve que $g \notin A + A$.

En conclusión, si n es impar se tiene que:

$$\phi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta \equiv 0 \pmod 2; \\ 2^{(n+1)/2} & \text{si } \delta \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Luego

$$\sum_{g \in G} \phi(g) = \binom{|G|}{2} 2^{(n+1)/2} = n2^{(n+1)/2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Psi(G) &\geq |\Omega| - \sum_{g \in G} \phi(g), \\ &= 2^n - n2^{(n+1)/2}, \\ &= 2^n \left(1 - \frac{\sqrt{2}n}{2^{n/2}}\right). \end{aligned}$$

Hay un argumento similar en el caso en el que n es par. Si b es impar, entonces la congruencia $2x \equiv b \pmod n$ no tiene solución, y $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ puede ser dividido en $n/2$ pares de elementos que suman b. De ello se deduce que $\phi(g) = 2^{n/2}$. Hay exactamente $n/2$ elementos en el grupo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con b impar, y entonces n elementos en el grupo G con b impar. Por consiguiente,

$$\sum_{\substack{g \in G \\ b \text{ impar}}} \phi(g) = n2^{n/2}.$$

Si b es par, entonces hay un entero a_0 tal que

$$b + n\mathbb{Z} = 2(a_0 + n\mathbb{Z}) = 2(a_0 + n/2 + n\mathbb{Z}).$$

Si $\delta \equiv 0 \pmod 2$, entonces $\phi(g) = 0$. Si $\delta \equiv 1 \pmod 2$, entonces $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \backslash \{a_0 + n\mathbb{Z}, a_0 + n/2 + n\mathbb{Z}\}$ se puede dividir en $(n-2)/2$ pares de elementos que suman b. De esto resulta que $\phi(g) = 4 \cdot 2^{(n-2)/2} = 2^{(n+2)/2}$ y

$$\sum_{\substack{g \in G \\ b \text{ par}}} \phi(g) = \binom{n}{2} 2^{(n+2)/2} = n2^{n/2}.$$

Así, $\sum_{g\in G} \phi(g) = 2n2^{n/2}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\Psi(G) &\geq |\Omega| - \sum_{g\in G} \phi(g),\\
&= 2^n - n2^{(n+2)/2},\\
&= 2^n\left(1 - \frac{2n}{2^{n/2}}\right).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Como se puede ver, el anterior teorema provee una cota inferior para los conjuntos $A \in \Omega$ que son $MSTD$, la cual depende de n debido a que:

Caso 1. Si n es impar entonces $\Psi(G) > 0$ cuando

$$\begin{aligned}
2^n\left(1 - \frac{\sqrt{2}n}{2^{n/2}}\right) &> 0,\\
1 - \frac{\sqrt{2}n}{2^{n/2}} &> 0,\\
\frac{\sqrt{2}n}{2^{n/2}} &< 1,\\
\sqrt{2}n &< 2^{n/2},\\
n &< 2^{(n-1)/2},
\end{aligned}$$

es decir, para $n \geq 7$.

Caso 2. Si n es par entonces $\Psi(G) > 0$ cuando

$$\begin{aligned}
2^n\left(1 - \frac{2n}{2^{n/2}}\right) &> 0,\\
1 - \frac{2n}{2^{n/2}} &> 0,\\
\frac{2n}{2^{n/2}} &< 1,\\
2n &< 2^{n/2},\\
n &< 2^{(n-2)/2},
\end{aligned}$$

es decir, para $n \geq 10$.

Ejemplo 2.0.13.

- Para $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se tiene que $\Psi(G) \geq 16$.

- Para $G = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se obtiene que $\Psi(G) \geq 384$.

Conclusiones

1. Se realizó un trabajo basado específicamente en [2] y [6], donde se presentan algunos resultados sobre la construcción de conjuntos con más sumas que diferencias; identificando y analizando los elementos usados en ellas como las progresiones aritméticas, señaladas como ejemplos de conjuntos simétricos, que luego son perturbadas conservando la propiedad de simetría.

2. Se observó que la estructura de los conjuntos obtenidos a través del teorema 1.2.4 es similar a la planteada en el teorema 1.2.7 ya que la esencia de cada conjunto y elemento auxiliar empleado para construir un conjunto $MSTD$ es la misma en los dos teoremas. No obstante, el primero permite diseñar conjuntos $MSTD$ usando progresiones aritméticas de dimensión uno y el segundo elabora los conjuntos con progresiones de dimensión mayor. Esta misma similitud se encontró en el teorema 1.2.9, dado que su conjunto Z es una progresión aritmética de dimensión 2; sin embargo, difiere de los teoremas anteriores al construir dos conjuntos $MSTD$ de diferente cardinalidad en la misma aplicación.

3. Se presentaron varios conceptos y propiedades necesarias para abordar el problema de construcción de conjuntos $MSTD$. De igual forma, se plantearon y ejecutaron algoritmos en *MuPAD*® como instrumento útil para la elaboración en menor tiempo de los conjuntos $MSTD$, teniendo en cuenta el procedimiento planteado en cada teorema.

4. Se estudió un argumento de conteo que sirvió para garantizar la existencia de conjuntos $MSTD$ contenidos en $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$; para esto se determinaron las condiciones bajo las cuales se obtiene un conjunto $MSTD$ $A = \{(i + n\mathbf{Z}, \varepsilon_i + 2\mathbf{Z}) : i = 0, 1, \ldots, n - 1 \text{ y } \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$ y finalmente se proporcionó una cota inferior del número de conjuntos $A \subseteq G$ que son $MSTD$.

Apéndice A

Algoritmos

Los teoremas presentados en el capítulo 1 proporcionan métodos para la construcción de conjuntos $MSTD$, facilitando el diseño de algoritmos que luego pueden ser traducidos a un lenguaje de programación, optimizando el tiempo de construcción de un conjunto $MSTD$ y el cálculo de la cardinalidad de los conjuntos suma y diferencia. El lenguaje usado para realizar este diseño es MuPAD®, el cual es un completo sistema de álgebra computacional que actualmente está disponible como parte de la caja de herramientas *Symbolic Math* de MATLAB®.

A continuación se presentan los algoritmos implementados en MuPAD® necesarios para la construcción de algunos conjuntos $MSTD$ de enteros.

A.1. Algoritmos auxiliares

Algoritmo 1. *(Suma1) Este algoritmo recibe un conjunto finito $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y retorna el conjunto suma $A + A = \{a + a' : a, a' \in A\}$.*

```
Suma1:= proc(A)
local i,j,S,sum;
```

```
begin
S:={};
for i from 1 to nops(A) do
    for j from i to nops(A) do
   sum:=(A[i]+A[j]);
   S:= S union {sum};
    end_for;
end_for;
end_proc;
```

Algoritmo 2. *(Resta1) Este algoritmo recibe un conjunto finito $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y retorna el conjunto diferencia $A - A = \{a - a' : a, a' \in A\}$.*

```
Resta1:= proc(A)
local i,j,S,res;
begin
S:={};
for i from 1 to nops(A) do
    for j from i to nops(A) do
   res:=(A[i]-A[j]);
   S:= S union {res,-res};
    end_for;
end_for;
end_proc;
```

Algoritmo 3. *(Suma) Este algoritmo recibe dos conjunto $A = \{a_1, ..., a_n\}$ y $B := \{b_1, ..., b_m\}$, retornando el conjunto suma $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.*

```
Suma:=proc(A,B)
local i,j,S;
begin
```

```
if nops(A)=0  or nops(B)=0  then
   if (nops(A)-nops(B))>0 then
       S:=A;
   else
       if (nops(A)-nops(B))<0 then
          S:=B;
       else
       print({});
       end_if;
   end_if;
else
S:={};
for i from 1 to nops(A) do
   for j from 1 to nops(B)  do
       S:=S union {A[i]+B[j]};
   end_for;
end_for;
end_if;
end_proc;
```

Algoritmo 4. *(Resta) Este algoritmo recibe dos conjunto* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *y* $B = \{b_1, ..., b_m\}$*, retornando el conjunto diferencia* $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$*.*

```
Resta:= proc(A,B)
local i,j,D,res;
begin
D:={};
for i from 1 to nops(A) do
    for j from 1 to nops(B) do
   D:= D union {A[i]-B[j]};
```

```
    end_for;
end_for;
end_proc;
```

Algoritmo 5. *(PA) Este algoritmo genera progresiones aritméticas de dimensión 1. Para esto recibe 3 enteros b, r, y k, que respectivamente son la base, la razón y el número de elementos de la progresión. Al final, retorna la progresión* $P = \{b + rx_i : 0 \leq x_i \leq k - 1\}$.

```
PA:= proc(b,r,k)
local i,A;
begin
A:={};
  for i from 0 to k-1 do
    A:=A union {b+i*r};
  end_for;
end_proc;
```

Algoritmo 6. *(PAG) Algoritmo para construir progresiones aritméticas generalizadas de dimensión n. Recibe un conjunto* $R = \{a_1, ..., a_n\}$ *y retorna una progresión aritmética generalizada* $P = \{a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_nx_n : 0 \leq x_i \leq 1\}$.

```
PAG:=proc(R)
local P,i;
begin
P:={0,R[1]};
  for i from 2 to nops(R) do
    P:=Suma(P,{0,R[i]});
  end_for;
end_proc;
```

A.2. Algoritmos conjuntos $MSTD$

Algoritmo 7. *(Decide) Algoritmo diseñado teniendo en cuenta la definición de conjunto $MSTD$. Recibe un conjunto $A = \{a_1, ..., a_n\}$, calcula los conjuntos $A + A$ y $A - A$, sus cardinalidades y la diferencia de éstas para retornar el mensaje: "El conjunto es MSTD", la cardinalidad de $A+A$ y $A-A$ si $|A+A| - |A-A| > 0$; en caso contrario retorna, "El conjunto NO es MSTD" y las cardinalidades.*

```
Decide:=proc(A)
local n,r,s;
begin
s:=nops(Suma1(A));
r:=nops(Resta1(A));
n:=s-r;
if n>0 then
   print("El conjunto es MSTD");
   print("El cardinal del conjunto suma es:", s);
   print("El cardinal del conjunto diferencia es:",r);
else
   print("El conjunto NO es MSTD");
   print("El cardinal del conjunto suma es:", s);
   print("El cardinal del conjunto diferencia es:",r);
end_if;
end_proc;
```

Los algoritmos que se presentan a continuación se diseñaron con el fin de generar nuevos conjuntos $MSTD$ de manera eficiente a partir de las condiciones presentadas en los teoremas 1.2.4, 1.2.7 y 1.2.9.

Algoritmo 8. *(MSTD) Este algoritmo tiene en cuenta las condiciones del teorema 1.2.4 para generar nuevos conjuntos $MSTD$. Recibe tres enteros, m, d y k, que deben cumplir* *con las condiciones establecidas en el teorema, para luego construir los conjuntos auxiliares presentados en éste, aplicando los algoritmos $PA(b,r,k)$ y $Resta(A,B)$. Al final, retorna un conjunto $MSTD$, la cardinalidad del conjunto suma y diferencia, el conjunto B y la progresión aritmética L. En el caso de que alguno de los tres enteros no cumpla las condiciones establecidas el algoritmo no se ejecutará y retornará mensajes como "m no es válido".*

```
MSTD:= proc(m,d,k)
local B,L,i,a,A,S;
begin
if m >3 then
    if d>(m-1) or d=(m/2) then
     print("d no es válido, escoja 0<d<m y d<>m/2")
    else
   if (d<(m/2) and k<3) or (d>(m/2) and k<4) then
    print("k no es válido")
   else
        B:={i $ i=0..m-1} minus {d};
    L:=PA(m-d,m,k);
    a:=L[1]+L[k];
    S:=Resta({a},B);
    A:= B union L union S union {m};
    print( "Conjunto MSTD", A);
    print("El cardinal del conjunto suma es:", card(Suma1(A)));
    print("El cardinal del conjunto diferencia es:", card(Resta1(A)));
    print("El conjunto B es", B);
    print("La progresión aritmética L es", L);
   end_if;
    end_if;
else
```

```
 print("m no es válido")
end_if;
end_proc;
```

Algoritmo 9. *(MSTDG) Este algoritmo se diseñó teniendo en cuenta las ideas proporcionadas por el lema 1.2.6 y el teorema 1.2.7. Recibe las n razones de la progresión aritmética generalizada auxiliar en forma de conjunto, que previamente debe ser escrito en la hoja de cálculos de MuPAD®, y el término k definido en el teorema 1.2.7; ingresados estos elementos, calcula los conjuntos B y* L^* *y posteriormente los conjuntos definidos en el teorema. Al final retorna un conjunto* $MSTD$*, la cardinalidad de los conjuntos suma y diferencia y los subconjuntos B,* L^* *y L.*

```
MSTDG:=proc(R,k)
local P,M,R1,r,S,s,T,B,LA,L,i,a,Z;
begin
P:=PAG(R);
M:=max(P);
R1:=random((M+2)..2*(M+2));
r:=R1();
S:=random((r+M+1)..(2*r-1));
s:=S();
M1:=random((2*s-r+1).. 2*(2*s-r+1));
m:=M1();
B:={i $ i=0..(r-1)} union {i $ i=s..(m-1)};
LA:=Suma({r},P);
L:=Suma(Resta({m},LA),{m*i $ i=1..k});
a:=min(L)+max(L);
Z:= B union L union Resta({a},B) union {m};
        print( "Conjunto MSTD", Z);
    print("El cardinal del conjunto suma es:", card(Suma1(Z)));
```

```
    print("El cardinal del conjunto diferencia es:", card(Resta1(Z)));
    print("El conjunto B es", B);
    print("La progresión aritmética L* es", LA);
    print("La progresión aritmética L es", L);
end_proc;
```

El anterior algoritmo posee una restricción sobre las progresiones aritméticas que usa, dado que su base cero y cada x_i varía solamente entre cero y uno; por esta razón, sólo crea conjuntos $MSTD$ a partir de una familia de progresiones aritméticas generalizadas.

Algoritmo 10. *(MSTDH) Este algoritmo tiene en cuenta las construcciones del teorema 1.2.9 para generar nuevos conjuntos $MSTD$. Recibe dos enteros, n y k, que deben cumplir la condición del teorema, para después generar los conjuntos auxiliares presentados en éste, aplicando el algoritmo $Resta(A, B)$. Al final, retorna un conjunto $MSTD$, la cardinalidad del conjunto suma y diferencia, seguido de otro conjunto $MSTD$, creado a partir del anterior conjunto $MSTD$, con la cardinalidad de sus conjunto suma y diferencia. Si alguno de los dos enteros no cumple la condición establecida el algoritmo no se ejecutará y retornará el mensaje: "Ingrese n,k > 1".*

```
MSTDH:=proc(n,k)
local  X,r,m,Z,A,W,t,w,B;
begin
if (n>1) and (k>1) then
X:={r $ r=0..n};
m:=(2*k+3)*n;
Y:=Resta({m},X);
Z:={};
for i from 1 to k do
  Z:=Z union {t $ t=(2*i*n+1)..(2*i*n+n-1)};
end_for;
 A:=X union Y union Z union {2*n};
```

```
 B:=A union {w $ w=(2*k+4)*n..(2*k+5)*n-1};
 A , B;
else
print("Ingrese n,k>1")
end_if;
        print( "Conjunto MSTD1", A);
   print("El cardinal del conjunto suma de MSTD1 es:", card(Suma1(A)));
   print("El cardinal del conjunto diferencia de MSTD1 es:", card(Resta1(A)));
   print( "Conjunto MSTD2", B);
   print("El cardinal del conjunto suma de MSTD2 es:", card(Suma1(B)));
   print("El cardinal del conjunto diferencia de MSTD2 es:", card(Resta1(B)));
end_proc;
```

Bibliografía

[1] G. A. Freiman y V. P. Pigarev, *The relation between the invariants R and T*, Number-theoretic studies in the Markov spectrum and in the structural theory of set adittion *Russian*, Kalinin. Gos. Univ., Moscow, (1973), pp. 172-174.

[2] P. V. Hegarty, *Some explicit constructions of sets with more sums than differences*, arXiv: math.NT/0611582v2, (2007).

[3] J. Marica, *On a conjecture of Conway*, Canad. Math. Bull. **12** (1969), 233-234.

[4] G. Martin y O'Bryant, *Many sets have more sums than differences*, arXiv: math.NT/060813v3, (2006).

[5] M. B. Nathanson, *Problems in additive number theory, 1,* arXiv: math.NT/0604340, (2006).

[6] M. B. Nathanson, *Sets with more sums than differences*, Integers : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7 (2007), Paper A5.