Construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector: una experiencia con estudiantes universitarios de primer año

Alexander Betancur Sánchez

Trabajo de grado para optar el título de Magíster en Educación Matemática

Directora:
Solange Roa Fuentes
Doctora en ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Educación Matemática
Bucaramanga
2020

Agradecimientos

A Dios, por proveer todo lo necesario y darme fuerzas para lograr mis objetivos.

A mis padres, Marlene y Miguel, quienes me han enseñado los más importantes principios y valores para mi desarrollo profesional. Este logro también es de ustedes.

A mis hermanos, Jhon y Maryi, por su amistad y apoyo en cada momento.

A mi familia, por creer en mí y brindarme su apoyo. En especial a mis tías Martha y María por su ayuda incondicional.

A Yuly Andrea, por su amor, comprensión y apoyo en la etapa final de este estudio.

A la Dra. Solange Roa Fuentes, mi directora de tesis, gracias por creer en mí, por sus aportes durante mi proceso de aprendizaje en la investigación y las motivaciones a continuar mi formación.

A la Dra. Asuman Oktaç, por la invitación a realizar mi estancia de investigación, gracias por sus grandes aportes en mi formación como investigador. Así mismo, a la Dra. María Trigueros, por su disposición a brindarme asesoría.

A mis evaluadores, Dra. Darly Ku y Dr. Jorge Enrique Fiallo, por sus aportes en la revisión del informe de tesis.

A la Escuela de Matemáticas de la UIS y el grupo de investigación EDUMAT-UIS, por el apoyo brindado para la asistencia a eventos académicos e instancia de investigación.

A Brandon, Juliana, Alejandra, Hellen y Andrea, mis compañeros de maestría, por su amistad y confianza durante la maestría.

A Sergio y Edwin, mis compañeros colegas y grandes amigos, gracias por todas sus motivaciones.

A todos los estudiantes involucrados en el desarrollo de este proyecto de investigación por su buena disposición.

A todos ustedes ¡Muchas Gracias!

Tabla de Contenido

Pág.

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

RESUMEN

TÍTULO: CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE EIGENVALOR Y EIGENVECTOR: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE PRIMER AÑO*

AUTOR: ALEXANDER BETANCUR SÁNCHEZ**

PALABRAS CLAVES: ÁLGEBRA LINEAL, EIGENVALOR Y EIGENVECTOR, DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA, TEORÍA APOE, MODELOS.

DESCRIPCIÓN:
En este documento presentamos resultados de una investigación, su objetivo fue describir las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector en estudiantes universitarios de primer año, cuando trabajan en actividades que involucran problemas de modelación. Con el propósito de alcanzar el objetivo, se utilizó el ciclo de investigación de la teoría APOE (Arnon et al., 2014) y se usó de forma complementaria los seis principios de la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003).

En el primer componente del ciclo de investigación, análisis teórico, se diseñó una descomposición genética hipotética (preliminar) que orientó la elaboración del diseño de clase. En el segundo componente del ciclo de investigación, diseño e implementación de la enseñanza, se realizó un análisis a priori de cada actividad o problema donde se describió la intención cognitiva y didáctica de cada situación. La implementación de la enseñanza se desarrolló con 30 estudiantes que pertenecían programas de ciencias e ingeniería. El análisis de los datos, como tercer componente del ciclo de investigación, permitió identificar evidencia empírica sobre las estructuras y mecanismo mentales presentes en el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

Finalmente, se presenta un modelo cognitivo refinado para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. Las reflexiones sobre la enseñanza del concepto se apoyan en el análisis de la implementación realizada, donde se identificaron aspectos a la fecha no reportados en la literatura. El desarrollo de esta investigación deja preguntas abiertas para futuras investigaciones respecto a la estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector y las relaciones entre otros Esquemas.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora. Solange Roa Fuentes

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

ABSTRACT

TITLE: CONSTRUCTION OF THE EIGENVALUE AND EIGENVECTOR CONCEPT: AN EXPERIENCE WITH FIRST-YEAR UNIVERSITY STUDENTS*

AUTHOR: ALEXANDER BETANCUR SÁNCHEZ**

KEYWORDS: LINEAR ALGEBRA, EIGENVALUE AND EIGENVECTOR, GENETIC DECOMPOSITION, APOE THEORY, MODELS

DESCRIPTION:

In this document we present results of an investigation, the aim was to describe the mental structures and mechanisms that allow the construction of the eigenvalue and Eigenvector concept in first-year university students, when they work in activities that involve modeling problems. In order to achieve the objective, the APOE theory research cycle was used (Arnon et al., 2014) and complementary used of the six principles of Models and Modeling theory (Lesh and Doerr, 2003).

In the first component of the research cycle, theoretical analysis, we designed a hypothetical (preliminary) genetic decomposition for that guide the development of class design. In the second component of the cycle of research, design and implementation of instruction, an prior analysis of each activity or problem was performed with the icognitive and didactic intention of each situation described. The implementation of the instruction was developed with 30 students who belonged to science and engineering carreers. The analysis of the data, as a third component of the research cycle, allowed us to identify empirical evidence on the mental structures and mechanisms present in the learning of eigenvalues and eigenvectors.

Finally, we proposed a refined genetic descomposition for learning of the eigenvalue and Eigenvector concept. The reflections on the teaching of the concept are supported by the analysis of the data and implementation of instruction. We reported aspects not yet in the literature were identified. The development of this research leaves open questions for future research regarding the structure Object of eigenvalue and eigenvector and the relations between other Schemes

---

* Degree work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. PhD. Solange Roa Fuentes

Introducción

El aprendizaje y la enseñanza de conceptos del álgebra lineal hace parte del interés de la comunidad en Matemática Educativa. Tales conceptos forman parte de un componente importante en los planes de estudio de diversas carreras universitarias cuyo enfoque es el área de la ciencia y/o la tecnología. Sin embargo, la experiencia de enseñanza por los profesores y de aprendizaje en los estudiantes es considerada como frustrante (Hillel, 2000). Stewart, Andrews-Larson, Berman & Zandieh, (2018) expresan que los conceptos del álgebra lineal requieren que los estudiantes razonen con cuidado sobre estos, usen de manera consciente las definiciones y demuestren afirmaciones fundamentales. Las investigaciones muestran que los cursos de álgebra lineal con frecuencia se caracterizan por un uso extensivo de elementos abstractos y teóricos, que, aunque el profesor puede disfrutar, resulta un mundo desconocido para los estudiantes y no les ofrece oportunidad para reflexionar sobre los conceptos.

Dubinsky (1997) afirma que antes de considerar estrategias pedagógicas, se necesita investigación para determinar las construcciones mentales específicas que un estudiante puede hacer para comprender los conceptos básicos del álgebra lineal. Así mismo, algunas investigaciones (Trigueros, 2009; Possani et al. 2010; Salgado y Trigueros, 2015) muestran que los estudiantes trabajando en contextos de modelación pueden desarrollar conceptos importantes del álgebra lineal.

Al respecto, el propósito de esta investigación fue describir las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector en estudiantes universitarios de primer año, cuando trabajan en actividades que involucran problemas de modelación. El desarrollo metodológico se sustenta en el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE (Arnon et al., 2014) conformado por tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de la enseñanza y análisis y verificación de datos. A partir del análisis de tres libros de texto y los reportes de investigación se propone una descomposición genética hipotética. El modelo cognitivo orientó la elaboración de un diseño de clase para implementar en un primer curso de álgebra lineal. El diseño de las actividades de instrucción incluyó un uso complementario con la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003), esto con el fin de elaborar un problema de modelación que provocará el uso de modelos y la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. Mediante el análisis de la implementación de la enseñanza y dos entrevistas didácticas se encontró evidencia empírica sobre los mecanismos y estructuras mentales para la construcción del concepto. A partir de esto se presentan algunas reflexiones para la enseñanza y tópicos para futuras investigaciones.

Este reporte de investigación está dividido en siete capítulos y a continuación se describe el contenido y propósito de cada uno de forma breve:

El primer capítulo es sobre los **antecedentes y el problema de investigación** de este estudio. En las dos primeras secciones se problematiza sobre el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal y en particular sobre los reportes de investigación acerca del concepto de eigenvalor y eigenvector. En la tercera sección se ubica la problemática de esta investigación, así como sus objetivos.

El **marco teórico** de este estudio se describe en el capítulo dos. Se presentan los elementos de la teoría APOE incluyendo aspectos teóricos, metodológico y pedagógicos. También se explica el uso complementario con la teoría de Modelos y Modelación, especificando el rol de su uso y el papel que desempeña en el desarrollo de la investigación.

El capítulo tres presenta el **análisis de libros de texto y el diseño de una descomposición genética preliminar**. Se describen los aspectos teóricos considerados para el análisis de tres libros de álgebra lineal y se problematiza sobre el enfoque pedagógico presentados en los libros de textos, así como las construcciones mentales involucradas en el aprendizaje del concepto en cada caso. Resultado del análisis teórico se presenta una descomposición genética hipotética (preliminar) para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector.

El **diseño e implementación de la enseñanza** se presenta en el capítulo 4. En las secciones de este capítulo se muestra cómo se diseñó el problema de modelación y la verificación de los principios de la teoría de Modelos y Modelación mediante implementaciones piloto. También se describe la elaboración de un diseño de clase orientado por la descomposición genética, así como el diseño de una entrevista didáctica.

En el capítulo 5 se muestra el **análisis de la actividad de modelación relacionada con eigenvalores y eigenvectores**. Se describen cuatro ciclos de modelación sobre el trabajo de los estudiantes con el problema y cómo fue emergiendo las nociones relacionadas con eigenvalores y eigenvectores.

El **análisis de las construcciones mentales de los estudiantes sobre eigenvalores y eigenvectores** se presentan en el capítulo 6. Se describen y analizan los datos provenientes de la implementación de la enseñanza y dos entrevistas didácticas. Los datos muestran evidencia sobre las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. Finalmente, en el capítulo 7 se relacionan las **conclusiones** del presente estudio. Se describe la descomposición genética refinada, algunas reflexiones para la enseñanza y preguntas abiertas para futuras investigaciones.

1. Antecedentes y problema de investigación

En este capítulo se presentan reflexiones de resultados de investigaciones que involucran diferentes perspectivas de la Matemática Educativa y relacionan principios e intereses cercanos a los de la presente de investigación. Las líneas de este capítulo centran su atención en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. En primer lugar, problematizamos sobre la construcción de conceptos en álgebra lineal en relación a la instrucción tradicional centrada en los algoritmos y la falsa comprensión. Particularmente, se discuten los resultados de investigaciones en relación a la enseñanza y aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. Las reflexiones al respecto nos permiten trazar un el enfoque y delimitar el problema que aborda esta investigación.

1.1 Construcción de conceptos en el álgebra lineal

El interés en estudiar cómo los estudiantes comprenden conceptos del álgebra lineal se puede ubicar desde las investigaciones por Robinet a finales de la década de los ochenta. Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) expresan resultados de investigaciones realizadas entre los años 1987 y 1994 afirmando que las principales críticas de los estudiantes son el "uso del formalismo, la abrumadora cantidad de nuevas definiciones y la falta de conexión con lo que ya saben en matemáticas" (p. 86). Como resultado de dichas investigaciones se indica la resistencia del *obstáculo del formalismo*[1] como un constructo teórico inherente a la comprensión del álgebra lineal.

[1] Constructo teórico de orden cognitivo que explica las dificultades con el lenguaje del álgebra lineal.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Las investigaciones de Sierpinska (2000) sobre los modos de pensamiento en álgebra lineal y las formas de representación (Alves Días y Artigue, 1995; Hillel, 2000) son problemáticas que han recibido la atención de investigadores. El interés de Dubinsky por explicar cómo un individuo construye conocimiento matemático, entre estos conceptos del álgebra lineal, permitió el desarrollo de la teoría APOE (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros y Weller, 2014), la cual permite explicar las diferentes abstracciones que los estudiantes enfrentan para comprender los conceptos matemáticos.

En los cursos de álgebra lineal el enfoque pedagógico que generalmente se realiza consiste en mostrar técnicas y/o algoritmos y enseñarles a los estudiantes cómo funcionan, es decir, se les enseña cómo resolver cierto tipo de ejercicios y/o problemas y luego se les solicita que resuelvan muchos casos del mismo tipo. Respecto a lo anterior, Dubinsky (1997) considera que los estudiantes no comprenden los conceptos matemáticos porque el enfoque pedagógico que prima generalmente no les provee la oportunidad de construir sus propias ideas. Es mediante la interacción entre los estudiantes y el profesor alrededor de situaciones problemáticas que surgen inquietudes, inconsistencias, contradicciones y desacuerdos. La solución de estos conflictos le permite al estudiante una comprensión del concepto acorde con lo aceptado por la comunidad matemática.

El uso de algoritmos y las actividades que promueven la reproducción de pruebas memorizadas, comunes en los enfoques pedagógicos tradicionales pueden aparentar una falsa comprensión de los conceptos. Con respecto a esto, Oktaç (2019) afirma que reproducir el discurso habitual, citar definiciones y desarrollar los algoritmos paso a paso no implica que los estudiantes tengan una buena comprensión. Por ejemplo, algunos estudiantes pueden recitar la definición de transformación lineal, sin embargo, no reconocen la linealidad de la transformación en ciertas situaciones problemáticas. (Oktaç, 2019).

1.2 Investigaciones en Matemática Educativa sobre eigenvalor y eigenvector

El concepto de eigenvalor y eigenvector ha recibido atención de la comunidad en Matemática Educativa desde hace casi dos décadas. Los reportes de investigación sobre dicho concepto se ubican en tres grandes temáticas, el propósito es problematizar aspectos importantes que contiene la presente investigación. Las tres temáticas son: geometría y tecnología computacional, modelación y sobre la comprensión y los diseños de instrucción.

1.2.1 Enfoque geométrico y tecnología computacional. En las recomendaciones presentadas por Carlson, Tohnson, Lay y Duane (1993) para el currículo de un primer curso de álgebra lineal se puede encontrar la preocupación por incluir representaciones geométricas y uso tecnología computacional para el concepto de eigenvalor y eigenvector, entre otros. En las últimas décadas se ha empezado a investigar sobre la enseñanza y el aprendizaje en ambientes de tecnología computacional, entre estos se destacan los de geometría dinámica.

En una investigación desarrollada por Klasa, J. y Klasa, S. (2002) se analizó particularmente el uso de programas como *Cabri* y *Maple* para introducir los conceptos de transformación lineal y, eigenvalores y eigenvectores. En *Maple* los estudiantes trabajaban con representaciones simbólicas y computacionales, con *Cabri* representaciones geométricas dinámicas. Los estudiantes exploraban en *Cabri* una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicada a vectores w en una circunferencia unitaria (Ver Figura 1), averiguaban por los ejes de simetría del lugar geométrico resultante y el tipo de matriz asociada a la transformación para que los ejes de simetría coincidieran con las líneas de los eigenvectores. Klasa, J. y Klasa, S. (2002) muestran evidencias que el uso de ambientes de tecnología computacional puede mejorar la relación entre el conocimiento geométrico y el conceptual, al mismo tiempo que favorece vincular modos de pensamiento del álgebra lineal.

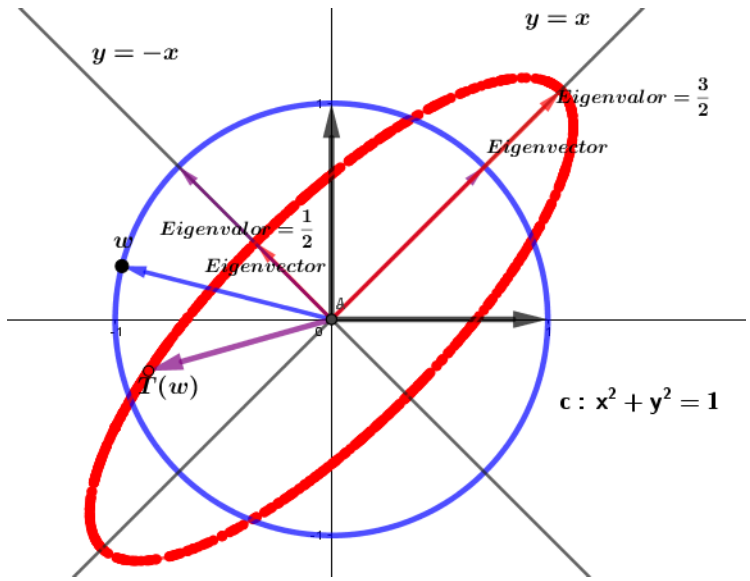


Figura 1: Exploración en Cabri de las líneas de simetría mediante eigenvectores

El diseño de algunos enfoques pedagógicos usando los programas de *Maple* y *Cabri* es presentado en Klasa (2010). En el diseño se incluye los conceptos de transformaciones lineales, eigenvalores y eigenvectores, formas cuadráticas, cónicas y cambio de base. La investigadora considera en el diseño de instrucción el estudio de las transformaciones lineales y sus propiedades mediante la exploración el software de geometría dinámica. Los estudiantes se orientaban a explorar diferentes transformaciones lineales y detectar geométricamente sus eigenvectores y eigenvalores. Frente a situaciones como la presentada en la Figura 1, al realizar la animación de un vector w en el software *Cabri* los estudiantes visualizaban el vector $T(w)$ para encontrar donde los vectores w y $T(w)$ eran colineales. Utilizando herramientas de *Cabri* se determinaba la longitud de los vectores w y $T(w)$ y mediante el cociente $\frac{||T(w)||}{||w||}$ se encontraba el respectivo eigenvalor. El acercamiento presentado por Klasa (2010) para los conceptos de eigenvalores y eigenvectores es mediante la transformación lineal, llevando a los estudiantes a la siguiente definición[2].

Un vector v no nulo es un eigenvector de una transformación lineal $T: V \rightarrow V$ si tenemos la igualdad $T(v) = cv$ para algún escalar c llamado entonces el eigenvalor asociado. (Klasa, 2010, p. 2104).

Soto y García (2002) en un reporte preliminar investigan la conversión de diferentes representaciones de eigenvalores y eigenvectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tomando como elementos teóricos Duval (1998) y Sierpinska, Dreyfus y Hillel (1999). En un ambiente dinámico con *Cabri Geometry* II los estudiantes interactúan en la pantalla de computadoras con transformaciones lineales, su matriz asociada y el polinomio característico. De la exploración en el ambiente dinámico se encontró que los estudiantes no identifican inicialmente los eigenvectores como vectores sobre la misma línea asociada, causando dificultades con reconocer eigenvalores negativos. Estas dificultades, expresan Soto y García (2002), parecen prevalecer y transferirse en las diferentes representaciones del concepto.

En relación a las dificultades mencionadas anteriormente, Gol (2012; 2014) usando la teoría de la génesis instrumental (Verillon & Rabardel, 1995) y la teoría de los cambios de atención (Mason, 2008) analiza el proceso de génesis instrumental para el concepto de eigenvalor y eigenvector. A partir de un seguimiento a las exploraciones realizada por los estudiantes en el software *The*

[2] No es la más común en los libros de texto.

Geometer's Sketchpad al estudiar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz 2×2, la investigadora muestra evidencias que relacionan un tipo de arrastre[3] con un cambio en la estructura de atención del alumno y recíprocamente. En la parte exploratoria los estudiantes utilizaron el arrastre errante, después cuando hacían arrastre en línea su atención se centró en coordinar la representación geométrica y algebraica de la definición de eigenvalores y eigenvectores. La coordinación entre las representaciones permitió a los estudiantes percibir una propiedad sobre los eigenvectores, la colinealidad entre x y Ax (Gol, 2014). Esta investigación muestra como la instrumentación y la instrumentalización ayudan a explicar la problemática de la mediación tecnológica.

La visualización del concepto de eigenvalor y eigenvector en ambientes de geometría dinámica, los significados generados y los modos de pensamiento fue investigado por Caglayan (2015). La investigación desarrollada se enmarcó dentro de un proyecto más grande sobre las conexiones entre geometría-cálculo-álgebra lineal en ambientes dinámicos. El análisis de las entrevistas desarrolladas respecto al trabajo de los estudiantes en el ambiente de geometría dinámica permitió inventar o utilizar nuevas formas de representación del concepto, criticar o comparar diferentes representaciones y entender el propósito de estas. Caglayan (2015) muestra evidencias sobre como los estudiantes pueden dar sentido al concepto de eigenvalor y eigenvector. El modo de pensamiento sintético-geométrico se evidencia cuando los estudiantes detectan vectores que son eigenvectores, es decir, pueden reconocer geométricamente que el vector y su imagen bajo la transformación lineal están alineados en la misma dirección o direcciones opuestas. Por su parte, el modo de pensamiento analítico-aritmético puede manifestarse en el caso de las matrices singulares en la determinación del eigenvalor cero. Aunque el modo analítico-estructural ocurre

[3] Los tipos de arrastre considerados eran; arrastre errante, guiado, sobre un lugar oculto y en línea.

en pocos casos, Caglayan (2015) afirma que este puede evidenciarse cuando se tiene el conocimiento de la transformación de una trayectoria (círculo, elipse, etc) al aplicarle una matriz y se puede anticipar en la transformación los posibles eigenvalores y eigenvectores. Mediante este estudio, el autor muestra la importancia de favorecer en los diseños de instrucción el tránsito entre los modos de pensamiento, especialmente entre el modo sintético y el analítico-estructural.

Otras investigaciones como la de Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila y Albarracín (2017) integran el uso de tecnología computacional, especialmente de geometría dinámica con la visualización y las aplicaciones físicas. Estos investigadores proponen usar la noción de momento de inercia de un cuerpo rígido y el software GeoGebra para introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector. Al implementar un diseño de enseñanza desde esta perspectiva encontraron evidencias que los estudiantes podían integrar mejor la visión geométrica del concepto de eigenvalor y eigenvector. Particularmente, los investigadores afirman que esta integración de aplicaciones de la física y la visualización en ambientes de geometría dinámica permite a los estudiantes de ciencias e ingenierías tener una motivación y una interpretación del concepto diferente a la matemática misma.

La inmersión de la tecnologia computacional al aula para integrarse a la enseñanza y aprendizaje ha desencadenado investigaciones que muestran que dicha problemática no es nada trivial. Existen investigaciones en desarrollo como la de Orozco, Cuevas, Madrid y Trouche (2018) que investigan el complejo proceso de instrumentación que los estudiantes desarrollan cuando usan varios artefactos en una situación de enseñanza relacionada con los conceptos de eigenvalor y eigenvector. Particularmente, en dicha investigación se utiliza un sistema de álgebra computacional integrada por: Octave, software de geometría dinámica: GeoGebra, papel / lápiz y calculadora CASIO fx-991MS. La investigación de este tipo muestra que no es suficiente con darles a los estudiantes la tecnologia y explicarles cómo usarla. El proceso de apropiación de un artefacto y la construcción de un instrumento deben ser estudiados con profundidad.

1.2.2 Situaciones de modelación para la enseñanza. Otro acercamiento para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal es el uso de problemas abiertos para impulsar la construcción de conceptos matemáticos que susciten el interés de los estudiantes. Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich (2007) usaron la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003) y la teoría del diseño instruccional de la Educación Matemática Realista RME (Gravemeijer, 1999) para diseñar una situación de modelación sobre la distribución de automóviles alquilados en cierta ciudad. En las estrategias de los estudiantes no apareció un acercamiento que involucrara el concepto de eigenvalores y eigenvectores directamente, sin embargo, los autores afirman que una discusión antes de abordar el problema podría ayudar a enfocar el pensamiento de los estudiantes en la tarea de predecir el comportamiento sistémico a largo plazo y pensar sobre el comportamiento en estado estable; lo que involucraría eigenvalores y eigenvectores.

En relación a la investigación anterior, Larson, Zandieh y Rasmussen (2008) utilizaron los mismos elementos teóricos para proponer una situación de modelación que requería la formulación de una matriz estocástica y de un proceso de Markov, el propósito era que resultara más directo para los estudiantes acercarse al concepto de eigenvalor y eigenvector. Con el problema planteado lograron llevar a los estudiantes a pensar que encontrar eigenvalores y eigenvectores es un procedimiento en el cual se encuentran vectores cuya imagen este en la misma línea del vector original.

Analizando el papel de la modelación en los conceptos del álgebra lineal, Salgado (2015) en su investigación doctoral reporta una propuesta didáctica para el aprendizaje de los conceptos de combinación lineal, conjunto generador, espacio generado, independencia y dependencia lineal, base, dimensión, eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios apoyada en dos marcos teóricos; la teoría APOE y la teoría de Modelos y Modelación. Salgado y Trigueros (2015) diseñan un problema de empleo – desempleo que involucra ecuaciones en diferencia y satisface los seis principios de la teoría de Modelos y Modelación con el propósito de introducir la construcción de los conceptos de eigenvalores, eigenvectores y eigenespacios. El problema propuesto consiste en lo siguiente:

> En una economía, supongamos que x_t representa el número de personas empleadas durante un período t, mientras que y_t es el número de desempleados durante el mismo período. Si la fuerza laboral permanece constante, sea p la probabilidad de que una persona desempleada encuentre un empleo en un período determinado y sea q la probabilidad de que una persona empleada permanezca empleada. Encuentre un modelo que describa la dinámica del empleo y describa su comportamiento a largo plazo (Salgado y Trigueros, 2015, p. 105)

En el trabajo con el modelo la profesora que orientaba la clase presentó de manera natural el concepto de eigenvalor y eigenvector después de haber discutido el modelo con los estudiantes. El trabajo con la actividad de modelación fue complementado por el desarrollo de actividades diseñadas a la luz de un modelo cognitivo (descomposición genética) usando la teoría APOE. Sobre este aspecto nos referimos en la siguiente sección. La investigación desarrollada por Salgado y Trigueros (2015) muestran evidencias del papel de la modelación en el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal, particularmente, para el concepto de eigenvalor y eigenvector se muestra como la situación de modelación permitió que los estudiantes desarrollaran nuevas formas de pensar; usaran sus conocimientos y a la vez enfrentaran nuevas necesidades conceptuales. Dicha investigación presenta evidencias de como dos teorías de Matemática Educativa pueden utilizarse de forma complementaria para estudiar una problemática y buscar formas de superarla.

1.2.3 Sobre la comprensión y diseños instruccionales. Las investigaciones desarrolladas entorno al concepto de eigenvalor y eigenvector también ha abordado la problemática desde una perspectiva cognitiva y de diseños de instrucción, sin embargo, dichas investigaciones están relacionadas con otros elementos importantes como son los libros de texto, la tecnología computacional y las formas de pensamiento.

Las investigaciones reportadas por Thomas y Stewart (2007; 2011) analizan desde la óptica de la teoría APOE y la teoría de los tres mundos de pensamiento matemático de Tall si el pensamiento de los estudiantes está influenciado por nociones encarnadas o geométricas y cómo estructuran su pensamiento frente a eigenvalores y eigenvectores. Los investigadores muestran que algunos estudiantes tienen nociones de eigenvalor y eigenvector encarnadas en la geometría y pueden relacionar dicho concepto con la invariancia de la dirección. Sin embargo, gran parte de los estudiantes pueden tener pensamientos encarnados que son erróneos. Las definiciones en matemáticas surgen del pensamiento en el mundo formal, gran parte de los estudiantes en los primeros años universitarios no logran transitar hacia esta forma de pensamiento, de manera que pueden trabajar en problemas de álgebra lineal sin ser conscientes de la importancia de la definición y mucho menos llegar a comprenderlas. Las investigaciones de estos autores muestran que una de las primeras tensiones en el mundo simbólico es la ecuación básica, $Ax = \lambda x$, involucrada en la definición. Básicamente ambos lados de la ecuación representan procesos matemáticos diferentes, sin embargo, aunque son bastante diferentes pueden existir vectores que tienen el mismo efecto de transformación.

En relación a la idea encarnada de invariancia reportada por Thomas y Stewart (2011) para el concepto de eigenvalor y eigenvector, Camacho y Oktaç (2016) proponen un acercamiento a la enseñanza y aprendizaje del concepto mediante los subespacios invariantes. Esta investigación que corresponde a un trabajo doctoral hace uso complementario entre la teoría APOE y la teoría de espacio de trabajo matemático (ETM). El interés de los investigadores corresponde a un modelo cognitivo que describa como ocurre el aprendizaje del concepto. Como parte de la investigación doctoral se entrevista a un profesor con experiencia en cursos de geometría y álgebra lineal. La actividad propuesta en la entrevista haciendo uso del software GeoGebra consistía en describir cómo una transformación lineal deforma el plano. El análisis de los episodios de la entrevista permitió detectar de forma inesperada algunas concepciones inadecuadas del esquema de transformación lineal por parte del profesor. La reflexión sobre lo conocimientos del álgebra lineal y el uso de software permitió al profesor ampliar o adecuar construcciones mentales.

Las investigaciones de Salgado y Trigueros (2014; 2015), Yañez (2015) y Campos (2017) usan la teoría APOE con el propósito de estudiar modelos cognitivos para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. En Salgado y Trigueros (2014; 2015) se reporta un modelo cognitivo (Descomposición Genética) en el contexto de matrices cuadradas. A partir de este modelo las investigadoras hacen un diseño de instrucción en el que integran el problema de modelación mencionado en la sesión anterior y otras actividades específicas. Mediante la implementación de la enseñanza y el análisis de la misma, las autoras muestran evidencias de la validez del modelo para el contexto de matrices cuadradas, sin embargo, no se presenta un modelo en el que se describa la construcción del concepto para transformaciones lineales. En Yañez (2015) se analizan los articuladores desde una perspectiva geométrica y otros conceptos que yacen en la educación secundaria para iniciar la construcción del concepto en los primeros años de universidad. Entre los articuladores y conceptos identificados se encuentra: sentido o dirección, rotación y múltiplo escalar. Por otra parte, Campos (2017) analiza un libro de texto con el propósito de identificar la postura del autor sobre el aprendizaje de dicho concepto y buscar una posible descomposición que se presenta en el texto para el aprendizaje del concepto.

Algunos investigadores como Zandieh, Wawro y Rasmussen (2016) han diseñado secuencias de instrucción para algunos conceptos de álgebra lineal como eigenvalores y eigenvectores. Dichos diseños hacen parte de un proyecto titulado IOLA (Inquiry-Oriented Linear Algebra) donde se busca desarrollar tareas desafiantes y coherentes que faciliten un enfoque orientado a la investigación. Particularmente en Plaxco, Zandieh y Wawro (2018) se analizan tres tareas las cuales tienen un orden de dificultad. Dicho análisis permite identificar como los estudiantes construyen y amplían su conocimiento sobre eigenvalores y eigenvectores al trabajar con ecuaciones matriciales de la forma $Ax = b$, identificando casos particulares con $Ax = \lambda x$ y aprovechar formas de representar transformaciones lineales para comprender el concepto.

Finalmente, en otro estudio desarrollado por Bouhjar, Andrews-Larson, Haider y Zandieh (2018) se examina la comprensión conceptual y procedimental de dos poblaciones de estudiantes sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector. Un grupo recibió la enseñanza mediante la instrucción orientada a la investigación y usando actividades diseñadas en el proyecto IOLA, mientras que el otro grupo no. Los investigadores muestran evidencias que en ambos grupos la comprensión procedimental fue igual, mientras que la comprensión conceptual fue menos favorecida en el grupo que recibió instrucción tradicional. El estudio pone en evidencia que el componente procedimental y algorítmico suele ser privilegiado por los profesores y estudiantes, descuidando la comprensión conceptual.

1.3 Planteamiento del problema

En la exposición anterior se destacaron investigaciones en el ámbito internacional sobre los conceptos de interés. En el contexto local, la universidad Industrial de Santander (UIS), se han desarrollado investigaciones usando la teoría APOE, aunque estas investigaciones no incluyen directamente los conceptos de eigenvalores y eigenvectores, mediante la revisión de la literatura se puede observar algunas relaciones. Por ejemplo, Roa-Fuentes y Parraguez (2017) investigan las estructuras y mecanismos mentales para que los estudiantes construyan un teorema que relaciona las transformaciones lineales y las matrices, también González-Rojas y Roa-Fuentes (2017) proponen un esquema de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base.

En la revisión de la literatura se identificaron algunos estudios sobre el concepto de eigenvalores y eigenvectores desde una mirada cognitiva (Salgado y Trigueros, 2014; 2015; Yañez, 2015; Camacho y Oktaç, 2016; Campos, 2017), sin embargo, no se encontró una descomposición genética que describa cómo ocurre el aprendizaje del concepto desde la transformación lineal. Los estudios reportados que han desarrollado una perspectiva geométrica y de tecnología computacional muestran un camino para el aprendizaje de eignevalor y eigenvector desde la transformación lineal. Particulamente Klasa (2010) afirma que mediante la teoría APOE se pueden diseñar tareas a la luz de una descomposición genética que permita a los estudiantes aprender el concepto desde la transformación lineal. Las investigaciones sobre el aprendizaje en un contexto de modelación usando la teoría de Modelos y Modelación (Larson et al. 2007; Larson, Zandieh y Rasmussen, 2008; Salgado y Trigueros, 2014, 2015) muestran que es un contexto favorable para la construcción de los conceptos del álgebra lineal.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Al revisar algunos libros de texto que son tomados como guía en cursos regulares de álgebra lineal, por ejemplo *Poole (2011)* 3era edición, *Anton (1994)* 3era edición y *Grossman y Flores (2012)* 7ma edición, se identificó que la presentación se remite a eigenvalores y eigenvectores de una matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$, sin ninguna mención a las transformaciones lineales a excepción de *Grossman y Flores (2012)* que inicialmente menciona eigenvalores y eigenvectores de una transformación lineal, pero propone la definición en términos de matrices $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$.

Bajo este panorama la presente investigación se plantea las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector en estudiantes universitarios de primer año, cuando trabajan en actividades que involucran problemas de modelación?

¿Qué mecanismos propician la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector a partir de la transformación lineal como Proceso?

¿Qué actividades deben desarrollarse en un curso regular de álgebra lineal para propiciar la construcción de dicho concepto?

Para dar cuenta de las posibles respuestas a los interrogantes planteados se proponen los siguientes objetivos generales y específicos.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Objetivo general

Describir las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector en estudiantes universitarios de primer año, cuando trabajan en actividades que involucran problemas de modelación.

Objetivos específicos

Construir un modelo cognitivo validado para el concepto de eigenvalor y eigenvector tomando como elemento fundamental la transformación lineal y sus representaciones.

2. Marco teórico

En este capítulo se presentan los elementos teóricos en relación a la teoría APOE (Arnon, et al., 2014) y los principios que caracterizan las actividades de la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003). Se inicia con una descripción de las estructuras y mecanismos mentales propuestos por la Teoría APOE, la Descomposición Genética y el Ciclo de Investigación. Posteriormente se describen los principios o criterios para la elección del problema que será propuesto a los estudiantes y el uso complementario de las dos teorías.

2.1 Teoría APOE

La teoría APOE (acrónimo de las construcciones mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema) presentada en detalle en Arnon et al., (2014) fue desarrollada inicialmente por Dubinsky y el grupo de *investigación Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC, por sus siglas en inglés). Es una teoría cognitiva que permite describir cómo aprende los conceptos matemáticos un individuo y proporcionar aspectos clave para la enseñanza. La teoría APOE toma como marco de referencia epistemológico las ideas de Piaget sobre la *abstracción reflexiva*, en la adaptación al contexto educativo Dubinsky la consideró como un mecanismo indispensable en la construcción de conocimiento matemático. Desde la teoría se entiende que los estudiantes generan significado de los conceptos matemáticos cuando construyen y usan ciertas estructuras mentales; estas surgen mediante instancias de abstracción reflexiva, las cuales consisten de mecanismos mentales tales como interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización (Arnon et al., 2014).

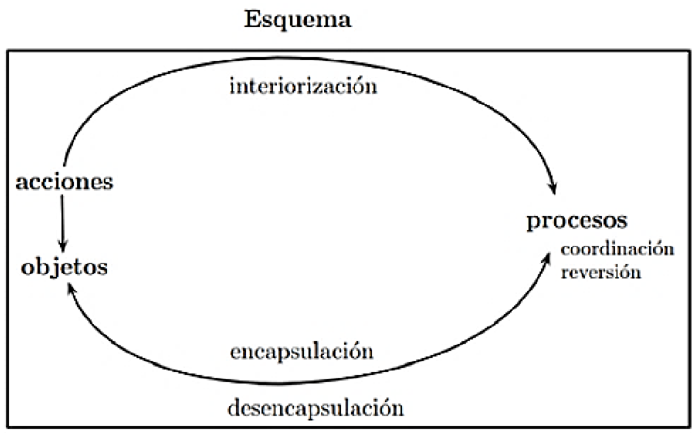


Figura 2: Estructuras y mecanismos mentales. Arnon et al., (2014)

La relación entre las estructuras y mecanismos mentales presentadas en Arnon et al., (2014) se ilustra en la figura 3. Las interacciones de los elementos en la figura se describen a continuación usando el concepto de función. Antes de realizar dicha descripción es necesario precisar la diferencia entre concepto y concepción. El concepto es un acuerdo en común por la comunidad en matemáticas y la concepción es el entendimiento para un individuo en particular (McDonald, Mathews y Strobel, 2000).

2.1.1 Estructuras y mecanismos mentales. *Acción*: desde la teoría APOE, la comprensión de un concepto matemático inicia a partir de la aplicación de Acciones sobre objetos físicos y/o construcciones mentales previas. Las Acciones se consideran como transformaciones externas dirigidas, en el sentido que se necesita instrucciones explicitas y precisas para abordar una situación que incluya un concepto particular. Bajo esta concepción el estudiante no es capaz de imaginar u omitir algún paso en su razonamiento, se limita a las indicaciones externas.

Por ejemplo, una concepción Acción de función se da cuando el estudiante necesita conocer la expresión analítica de la función para actuar sobre los elementos x del dominio. Para ilustrar lo anterior considere una función $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ definida como sigue $f(x) = \sqrt{x-1}$. En esta concepción el estudiante se limita a realizar Acciones sobre números reales x específicos para determinar cuál es su imagen. No puede decidir sobre la imagen de un número real x o explicar si pertenece al dominio de la función sin calcular su imagen; esta concepción le impide al estudiante pensar sobre todo el dominio de la función y cuál es su imagen.

Aunque esta concepción sea la más simple de las consideradas por la teoría APOE y la que generalmente se promueve en el aula, es importante para la construcción de las demás concepciones, las cuales implican una complejidad de mayor abstracción.

Proceso: cuando las Acciones se repiten y el alumno reflexiona sobre lo que realiza, su dependencia de pautas o claves externas empieza a disminuir. Cuando esto ocurre se dice que la Acción se han interiorizado en un Proceso. El mecanismo de interiorización lleva la actividad específica del estudiante del mundo externo al interno; de tal manera que puede imaginar los pasos o acciones a seguir sin necesidad de realizarlos explícitamente. Como la actividad tiene mayor lugar en el mundo interno el estudiante puede ejecutar diversas acciones, coordinarlas con otros Procesos y revertirlos para obtener otros.

Para el concepto de función un estudiante que muestra una concepción Proceso de función puede pensar en términos de entradas y salidas no específicas, reconocer la condición para que un elemento x pertenezca al domino de la función y poder responder sin hacer cálculos explícitos sobre el rango de la función. Esta concepción dinámica de función le permite al individuo reconocer propiedades de la función como ser uno a uno o sobreyectiva. Desde la teoría APOE se considera que los Procesos no provienen solo de la interiorización de Acciones, sino que también pueden ser construidos mediante la coordinación de otros dos o más Procesos gracias al mecanismo de coordinación. En el concepto de función este mecanismo está involucrado cuando los estudiantes construyen la composición de funciones, la concepción dinámica de función como una transformación que empareja elementos de conjuntos le permite mediante el mecanismo de coordinación establecer los Procesos de dos funciones como uno solo el cual también relaciona objetos de dos conjuntos llamados dominio y rango.

En la teoría APOE también se considera que los Procesos pueden surgir mediante el mecanismo de reversión. En el concepto de función este mecanismo está involucrado cuando los estudiantes construyen la inversa de una función. Es decir, la concepción dinámica de emparejamiento de objetos que pertenecen a dos conjuntos ahora debe estudiarse en la otra dirección. Si se considera el rango de la función como elementos del dominio de una función la relación a cada imagen su pre-imagen debe ser reconocida por los estudiantes como un nuevo emparejamiento que corresponde a una función.

Objeto: cuando el estudiante continúa reflexionando sobre los Procesos que ha construido, se encuentra con la necesidad de realizar nuevas Acciones e identificar la totalidad del Proceso, desde la teoría APOE se dice que puede encapsular el Proceso en un Objeto cognitivo. Este mecanismo es considerado por Arnon et al., (2014) el más difícil, pues requiere pasar de una estructura dinámica a una estática. Una concepción Objeto de un concepto matemático le permite al estudiante trabajar con una nueva entidad, aplicarle transformaciones mediante nuevas Acciones o analizar sus propiedades. Cuando los estudiantes alcanzan una concepción Objeto pueden desencapsular el objeto al Proceso que le dio origen y usarlo nuevamente al enfrentar diversos problemas.

El paso de una concepción dinámica a una estática para el concepto de función le permite al estudiante tratar a las funciones como elementos de un conjunto y aplicar Acciones sobre dichos elementos. Las Acciones pueden corresponder a realizar operaciones entre funciones y estudiar propiedades como continuidad para caracterizar ciertos conjuntos de funciones.

Esquema: el conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados entre sí se agrupan de manera consistente y coherente en la mente del estudiante, es decir, el estudiante tiene la capacidad de determinar si se puede utilizar en otra actividad matemática. Aunque el Esquema puede parecer la última estructura, no es algo terminado, se reconstruye constantemente según la actividad matemática del individuo. La evolución del Esquema es estudiada por la triada *intra-*, *inter*, y *trans-* propuesta por Piaget y García (1989) para clasificar los niveles de relaciones que se pueden establecer con componentes del Esquema y otros. Si el estudiante es capaz de considerar el Esquema como un objeto para aplicarle Acciones y Procesos nuevamente desde la teoría APOE se dice que el Esquema se ha tematizado. En suma, se puede observar que en la teoría APOE existen dos formas de construir Objetos, una mediante la encapsulación de Procesos y la otra por la tematización de un Esquema (Arnon et al., 2014).

Lo anterior describe a la luz de la teoría APOE cómo los estudiantes construyen conceptos matemáticos la cual no sigue una forma lineal como se podría inferir, por el contrario, es dinámica y mediante el mecanismo principal de *abstracción reflexiva* se puede ir de una estructura a otra. Para describir cómo se deben relacionar las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de un concepto matemático se considera un modelo denominado *descomposición genética.* Este modelo no es necesariamente único, pues el aprendizaje es dinámico, depende específicamente de la experiencia del estudiante resolviendo problemas matemáticos y las oportunidades proporcionadas por una institución. Dubinsky (1991) considera que al elaborar una *descomposición genética* hay tres elementos importantes, estos son: elementos teóricos como las estructuras y mecanismos mentales, la comprensión matemática por parte del investigador y la observación sobre como los estudiantes intentan construir el concepto matemático en cuestión. Complementando la observación anterior, Arnon et al., (2014) consideran diferentes fuentes que pueden estar involucradas en la elaboración de una *descomposición genética preliminar*, algunas de estas son: análisis epistemológico o histórico de los conceptos involucrados, análisis de la literatura en Matemáticas y su Didáctica, la experiencia de los investigadores como profesores, análisis de libros de texto o combinaciones entre estos.

El análisis teórico busca un modelo a priori denominado *descomposición genética preliminar*, mediante la investigación empírica se analiza el modelo propuesto con el propósito de validar su pertinencia respecto a la construcción del concepto por los estudiantes. Cuando los datos muestran evidencia que implique realizar un ajuste al modelo con el propósito que describa mejor el aprendizaje desde la teoría APOE nos referimos a una *descomposición genética refinada*. Si las evidencias divergen se requiere realizar un nuevo diseño de descomposición genética (Arnon et al., 2014).

El diseño de una descomposición no es solo un modelo teórico de investigación, es un elemento clave en el diseño de actividades y secuencias de instrucción. A partir de la descomposición genética el profesor y/o investigador puede diseñar tareas para garantizar la construcción de las estructuras mentales previas identificadas como necesarias en la construcción del concepto. Así mismo, la descomposición genética señala las demás construcciones; ya sea interiorización de Acciones o coordinación de ciertos Procesos, entre otros, los cuales son necesarios para una comprensión del concepto por parte del estudiante.

2.1.2 Paradigma de investigación. La teoría APOE se caracteriza por tener su propio paradigma de investigación, para Arnon et al., (2014) esto corresponde a un marco filosófico y teórico que orienta la investigación. Básicamente el paradigma de investigación en la teoría APOE tiene tres componentes, esto corresponde a un enfoque teórico, metodológico y pedagógico.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Respecto al primer componente nos hemos referido en la subsección 2.1, el componente metodológico se describe a continuación y el pedagógico en líneas posteriores.

El ciclo de investigación de la teoría APOE involucra tres componentes: análisis Teórico, desarrollo e implementación de la instrucción, y recolección y análisis de datos. La interacción entre dichos componentes se ilustra en la Figura 4, la dirección de las flechas describe la implicación entre estos y la dinámica que involucra la realización del ciclo.

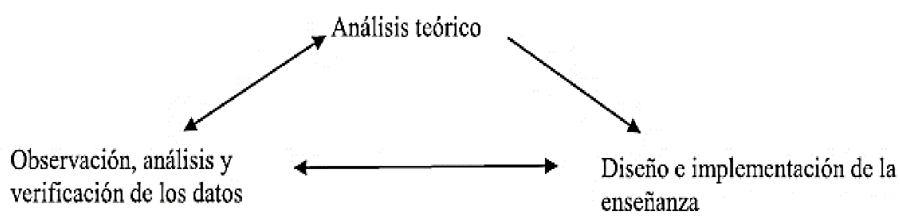


Figura 3. Ciclo de investigación (Arnon et al., 2014)

De acuerdo con este ciclo metodológico la investigación comienza con un análisis teórico cognitivo sobre el concepto matemático involucrado. Como resultado del análisis teórico se diseña la *descomposición genética preliminar* de la cual nos referimos en la subsección 2.1.1. Una vez se tenga el análisis teórico este impulsa y sustenta el diseño de tareas, actividades, problemas o instrumentos que serán implementados en la instrucción para promover en los estudiantes la interiorización de Acciones, la coordinación de Procesos y la encapsulación de Procesos en Objetos. La implementación de la instrucción se sustenta en la componente pedagógica del paradigma. Sobre este componente nos referimos más adelante en la sección 2.3.1.

Considere la doble flecha entre el diseño e implementación de la enseñanza y la observación, análisis y verificación de los resultados. Elaborados los instrumentos, situaciones o tareas para el aprendizaje del concepto en cuestión se realiza la instrucción, el conjunto de datos obtenidos son observados y analizados con el lente del modelo teórico, la pregunta de investigación, etc. Las interpretación y reflexión sobre los datos pueden conducir a reajustes en los instrumentos, tareas o metodología de la instrucción. De esta manera la evidencia empírica puede permitir refinar el modelo teórico construido en la etapa inicial.

En suma, la relación dialéctica entre estos tres momentos consolida un método dinámico y consistente de investigación y desarrollo curricular. Dicho ciclo puede realizarse las veces que sea necesario según los objetivos definidos en la investigación a realizar.

Respecto a lo anterior se ha destacado algunos elementos de la teoría APOE que son de referencia en esta investigación, la componente pedagógica se describe en la siguiente sección después de describir los principios para el diseño de actividades según la teoría de Modelos y Modelación.

2.2 Teoría de Modelos y Modelación: principios para el diseño de actividades

La modelación ha ocupado un espacio importante en la enseñanza de la matemática, Trigueros (2009) presenta perspectivas consolidadas sobre la modelación en Matemática Educativa. Una perspectiva en particular es la teoría de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003). Esta teoría propone el aprendizaje de los alumnos mediante el trabajo con situaciones reales donde utilicen sus conocimientos previos, desarrollen un modelo matemático para dar respuesta a las preguntas planteadas en la situación y requieran el uso de nuevos conocimientos.

La teoría de Modelos y Modelación no se desarrolló para investigar la resolución de problemas matemáticos, su interés está en el desarrollo de conceptos matemáticos a través de la solución de problemas y el procedimiento aplicado. Las investigaciones relacionadas con este enfoque se refieren a los problemas o situaciones relaes como *actividades que provocan modelos* (Lesh y

Doerr, 2003). Se denominan así porque los productos que realizan los estudiantes van más allá de respuestas específicas a preguntas planteadas, "involucran herramientas conceptuales que se pueden compartir, manipular, modificar y reutilizar (es decir, modelos) para construir, describiendo, explicando, manipulando, prediciendo o controlando sistemas matemáticamente significativos" (Lesh y Doerr, 2003, p. 3). Por lo tanto, las descripciones, explicaciones y construcciones que realizan los estudiantes no son simplemente procesos que se usan como ruta para encontrar la solución, se considera que el proceso es realmente un producto.

La comunidad académica que ha desarrollado investigaciones con esta teoría han consolidado seis principios, estos caracterizan las actividades que provocan modelos de manera que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes. A continuación, se hace una breve referencia de estos seis principios y cómo son entendidos en esta investigación.

Principio de realidad: también podría llamarse principio de significado. Aquí se busca que los estudiantes den sentido al problema según sus conocimientos y experiencias personales. La situación propuesta debe exigir en los estudiantes elementos matemáticos de modo que la solución no sea trivial (Lesh, Hoower, Hole, Kelly & Post, 2000).

Principio de construcción de modelos: la situación planteada debe buscar más que una respuesta a una pregunta, se espera que demande explicaciones, predicciones, justificaciones con el fin de desarrollar un modelo para interpretar los datos y posibles procesos de solución. Además, la actividad debe motivar la transformación a un lenguaje matemático (Lesh, Hoower, Hole, Kelly & Post, 2000).

Principio de autoevaluación: cuando los estudiantes reconocen la necesidad de una construcción pueden surgir muchas ideas, el principio sugiere criterios para valorar la utilidad de las posibles soluciones con el propósito de avanzar en la elaboración del modelo. Se busca que los estudiantes puedan tener control sobre la meta que propone el problema reconociendo cuándo es necesario un cambio en el modelo (Salgado, 2015).

Principio de documentación: se cuestiona si para el estudiante responder a determinada pregunta de la actividad demanda que revele explícitamente cómo está pensando, los objetivos y posibilidades de solución consideradas. Por lo tanto, se busca con la actividad contribuir al aprendizaje y la documentación del mismo, conocer los constructos que permitieron generar aprendizaje y fomentar a la vez autorreflexión buscando externalizar el pensamiento de los estudiantes (Lesh, Hoower, Hole, Kelly & Post, 2000).

Principio de simplicidad: las actividades deben ser retadoras y accesible para los estudiantes, de manera que al resolverlas puedan convertirse en prototipos importantes en el aprendizaje, el modelo y razonamiento se reutilicen en la solución de otra situación (Lesh y Doerr, 2003).

Principio de generalización: una pregunta que guía este principio es ¿el modelo que se desarrolla de la actividad es válido solo para la situación particular? Se busca guiar y confrontar a los estudiantes para desarrollar formas generales de pensamiento, no estrategias y desarrollos particulares. Para Salgado (2015) el desarrollo del modelo "debe convertirse en un nuevo objeto matemático que los estudiantes puedan aplicar" (p.26).

En esta investigación se diseñó una situación utilizando como referentes los principios descritos anteriormente, así como la descomposición preliminar construida como resultado del análisis teórico. Mediante evidencia empírica se valida que el diseño del problema de modelación es acorde con los principios y además permite a los estudiantes iniciar la construcción del concepto de eigenvalores y eigenvectores. En la sección 4.1 se muestra el diseño inicial la situación de modelación, en la subsección 4.4.2.2 se muestra la actividad de modelación refinada y en 4.4.3 su validez respecto a los seis principios.

A continuación, se muestra el uso complementario entre la teoría APOE y los principios para el diseño de actividades según la teoría de Modelos y Modelación. Se muestra el papel de cada componente teórico en esta investigación, se describe la adaptación realizada a la componente pedagógica del paradigma de la teoría APOE al involucrar actividades que corresponde a la teoría de Modelos y Modelación.

2.3 Uso complementario entre la teoría APOE y Modelos y Modelación

La teoría APOE se caracteriza por el interés en la construcción de conceptos matemáticos, aunque no hace mención explícita al uso de algún contexto para el aprendizaje no se opone a este, al respecto plantea la necesidad de investigar su uso y el rol en la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014). El uso complementario de las teorías se reporta en Possani, Trigueros, Preciado y Lozano (2010) y Salgado y Trigueros (2015), los investigadores usan la teoría de Modelos y Modelación y la teoría APOE para diseñar actividades que fomenten las construcciones previas y generen una oportunidad para gestar un nuevo concepto matemático.

El Análisis Teórico realizado con la teoría APOE permite ubicar los conocimientos previos y las construcciones mentales que los estudiantes deben desarrollar para comprender el concepto. El trabajo con la actividad que provoca modelos estimula la necesidad de nuevos conocimientos, el diseño de las actividades específicas basadas en una descomposición genética promueve la construcción del nuevo concepto. El análisis a priori de las actividades que provocan modelos o actividades específicas es una guía para el docente en la implementación de la instrucción y para el investigador al analizar las producciones de los estudiantes. De esta manera como lo expresa

Salgado (2015) los ciclos de enseñanza e investigación correspondientes a la Teoría APOE se anidan en los ciclos de modelación de acuerdo a la perspectiva de Modelos y Modelación.

2.3.1 Adaptación del ciclo ACE de Arnon et al., (2014). Desde los inicios de la teoría APOE en las investigaciones desarrolladas por Dubinsky se identifica la preocupación por generar estrategias pedagógicas que permitan a los estudiantes generar sus propias construcciones sobre conceptos matemáticos. Dubinsky (1997) considera que los estudiantes desarrollan comprensión conceptual como resultado de enfrentar situaciones problemáticas que involucran ciertas construcciones mentales para dar sentido y resolver el problema. En este sentido Oktaç (2019) afirma que es necesario brindar oportunidad para que los estudiantes construyan sus propias ideas sobre un concepto matemático y puedan discutirlas con sus compañeros de clase y el profesor.

La teoría APOE considera como estrategia pedagógica un ciclo de enseñanza que consta de tres componentes: (A) Actividades; (C) discusión en el aula; (E) Ejercicios. Este ciclo se denominado ciclo de enseñanza ACE (por las siglas en ingles de las tres componentes). La implementación de la enseñanza en esta investigación se enmarca dentro del ciclo que se muestra en la Figura 4, inspirado en la investigación de Salgado y Trigueros (2015) sobre el ciclo de instrucción ACE propuesto por Arnon et al., (2014) y la perspectiva de modelos y modelación Lesh y Doerr (2003) respecto al diseño de actividades.

El ciclo puede iniciar desde cualquiera de los tres momentos, ya sea actividades de modelación, actividades específicas o discusiones grupales o generales. Una sección de clase alrededor de un concepto matemático puede involucrar más de uno de los momentos o posiblemente se realicen todos.

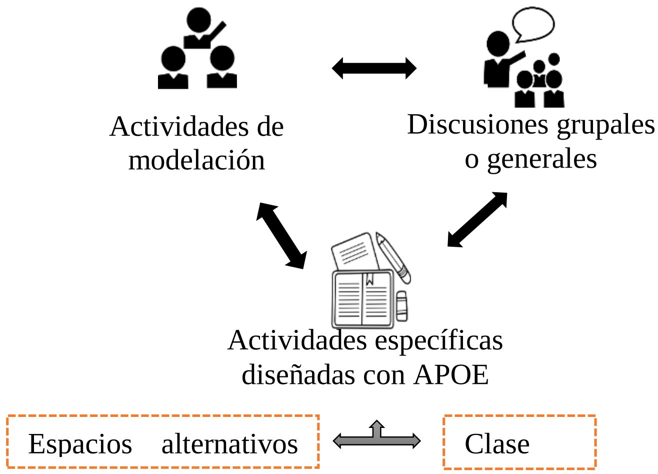


Figura 4: Ciclo de instrucción inspirado en Salgado y Trigueros (2015)

La actividad de modelación introduce a los estudiantes a la construcción del concepto o avanzar en la construcción del mismo, promueve las discusiones en pequeños grupos y discusiones generales con el fin de negociar los acercamientos para encontrar el modelo requerido. De esta manera el docente y/o investigador puede identificar los momentos oportunos para liderar conversaciones generales con todo el grupo y propiciar las reflexiones pertinentes que darán paso a la construcción del concepto. Las actividades específicas diseñadas bajo la lupa de la descomposición genética preliminar promueven el desarrollo de las construcciones emergentes en el trabajo con el modelo. Se considera que el desarrollo de las actividades específicas puede ocurrir en diferentes espacios como el salón de clases, un espacio alternativo de taller y/o como tareas de profundización que el estudiante desarrollará en otros espacios.

3. Análisis de libros de texto y diseño de una descomposición genética preliminar

En este capítulo se explica la metodología desarrollada en la presente investigación, se usa el paradigma de investigación propuesto por la teoría APOE incluyendo algunos elementos teóricos que justifican las decisiones descritas. Para iniciar se ubica la investigación según su enfoque, luego, el análisis teórico y aspectos considerados en el análisis de libros de texto, diseño de situaciones de modelación, tareas específicas y análisis a priori.

3.1 Tipo de investigación

Este trabajo de investigación se caracteriza por desarrollar una metodología cualitativa, estudia las construcciones mentales desarrolladas por los estudiantes mediante el trabajo con la actividad de modelación y las discusiones con sus compañeros, profesora e investigador. El fenómeno de aprendizaje y enseñanza se ubica en el contexto universitario sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector. Particularmente busca describir las estructuras y mecanismos mentales que modelan la construcción de dicho concepto en un individuo. Mediante el enfoque cognitivo inspirado en la epistemología de Piaget y usado por la teoría APOE se estudian los esquemas cognitivos referidos al aprendizaje. La indagación tiene lugar en una consideración holística, acudiendo a variadas formas de externalización de las Acciones realizadas por los individuos; el propósito es desentrañar las estructuras internas involucradas en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector (Stake, 2010; Godino, 2009).

El paradigma de investigación, entendido por Arnon et al., (2014) como un marco filosófico y teórico, permite desarrollar investigación y teoría a partir de unos principios generales dados. En el campo de investigación en Matemática Educativa, los estudios pueden provenir de metodologías con diferentes enfoques. Particularmente, la teoría APOE contiene componentes teóricos, metodológicos y pedagógicos articulados que permite distinguirse de otros enfoques teóricos. Arnon et al., (2014) distingue básicamente cuatro tipos de estudios que pueden desarrollarse usando el paradigma de APOE: comparativos, no comparativos, de desarrollo cognitivo y longitudinales, sin embargo, los estudios también pueden caracterizarse por evidenciar simultáneamente varios tipos.

La presente investigación se caracteriza por ser un estudio no comparativo y de desarrollo cognitivo. Se propone un modelo teórico para la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvalor y se hace un diseño de instrucción para ser implementado en un curso regular de álgebra lineal I tomando como base una adaptación del ciclo de instrucción ACE.

3.2 Análisis teórico

En esta primera componente se propone estudiar el concepto de interés tomando como referencia libros de texto, literatura reportada y la experiencia del docente y/o investigador. Algunas preguntas orientadoras son: ¿Qué significa comprender el concepto de eigenvalor y eigenvector? y ¿Cómo esa comprensión puede ser lograda por un estudiante?” (Arnon et al., 2014). El resultado final de esta componente es proponer un modelo teórico, *descomposición genética*, que describa las construcciones previas que necesita un estudiante y las estructuras y mecanismos mentales involucrados en el aprendizaje de dicho concepto (Arnon et al., 2014).

En esta investigación se usan como elementos principales en el diseño de una descomposición genética el análisis de libros de texto y los reportes de investigación. Los libros de texto como lo expresa Kilpatrick (2014) se han destacado a lo largo de la historia como repositorios válidos de conocimiento y recursos importantes de comunicación que posee la cultura. Básicamente, se han utilizado como un recurso para la presentación de problemas, como un medio para apoyar la instrucción en el aula por parte del docente y para el estudiante como un recurso para orientar su autoaprendizaje.

Investigadores como Cook y Stewart (2014) consideran que el analizar diferentes libros de texto sobre un concepto de interés permite extraer una estrategia general sobre aspectos relacionados con su aprendizaje y enseñanza. Al respecto, desde la teoría APOE el análisis de libros de texto se considera como un elemento importante en el diseño de una descomposición genética, pero, no se describen elementos para el análisis y las investigaciones desarrolladas parecen no referirse al respecto. Sin embargo, en la investigación desarrollada por Campos (2017) usando la teoría APOE propone cuatro criterios para el análisis de libros de texto los cuales se describen a continuación.

Estructura general del texto: en este criterio se identifica la secuencia de los contenidos y orientaciones propuestas por el autor del libro con el fin de determinar su enfoque. De esta manera el interés se deposita en identificar los conocimientos previos y estructuras mentales que requiere un individuo que aborda el aprendizaje de determinado concepto.

Presentación y definición de los conceptos: se espera conocer cuál es la motivación para presentar los conceptos; si se definen de manera súbita o hay un problema que impulse la definición del mismo. De tal manera se identifica si el texto proporciona definiciones o proposiciones equivalentes que permitan establecer las estructuras y mecanismos mentales que están implícitas en la definición y construcción del concepto.

Los ejemplos y ejercicios proporcionados por el libro: se rastrean las construcciones que son promovidas en los diferentes ejemplos y ejercicios sugeridos con el objetivo de identificar la filosofía del libro respecto a cómo son promovidas las estructuras mentales, Acción, Proceso, Objeto y Esquema y cómo pueden ser caracterizadas.

Lector modelo: con este último criterio se espera completar el reconocimiento de estructuras necesarias para alcanzar la comprensión del concepto bajo la complejidad expuesta en el texto. Por lo tanto, se requiere interpretar los contenidos del texto según lo haría el propio autor. Una pregunta orientadora es: ¿Cuáles son las estructuras mentales que el lector modelo debe poseer para cubrir satisfactoriamente el desarrollo del concepto? (Campos, 2017).

En esta investigación se analizan 3 libros de texto con el objetivo de considerar diferentes estrategias pedagógicas para enriquecer el análisis teórico y diseñar una descomposición genética preliminar. Además, de los criterios descritos anteriormente se consideró el ciclo de la Figura 5 donde se ilustra de forma más precisa los momentos desarrollados hacia la constitución de la descomposición genética hipotética a partir del análisis de tres libros de texto. Las flechas entre las estructuras y mecanismos mentales de la definición, ejemplos y ejercicios muestran que los elementos presentes en el diseño de la descomposición genética son el resultado de contrastar, reflexionar y rastrear aspectos que trasciendan más allá de una perspectiva particular de un libro de texto. Cada aplicación del ciclo en las diferentes direcciones permite identificar cuáles estructuras y mecanismos son promovidos por los libros de texto e identificar cómo puede ser motivada la construcción del concepto.

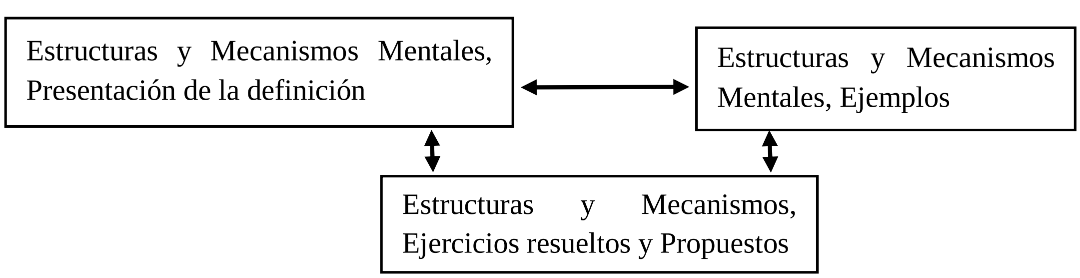


Figura 5: Ciclo en el análisis de libros de texto para la elaboración de una descomposición genética preliminar.

3.3 Selección de los libros de texto

La selección de los libros de texto para el análisis comenzó con una revisión de los programas de álgebra lineal I y II de la Escuela de Matemáticas en la Universidad Industrial de Santander. En el programa de álgebra lineal I se identificó que se sugieren cuatro formas posibles de organizar el curso. Dichas organizaciones se relacionan con la estructura de libros de texto, ver http://matematicas.uis.edu.co/sites/default/files/paginas/archivos/Programa_Agebra_Lineal_I.pdf . Particularmente, la denominada "organización moderna" se inspira de la estructura del libro *Álgebra lineal Una introducción moderna* de Poole (2011). Seleccionamos este libro porque los profesores que lo usan en el curso de álgebra lineal I generalmente desarrollan una introducción al concepto de eigenvalores y eigenvectores.

Por otra parte, al revisar los libros de textos sugeridos para el curso de álgebra lineal II, ver http://ciencias.uis.edu.co/algebralineal2/bibliografia.html, se seleccionó el libro *Álgebra lineal para estudiantes de Ingeniería y Ciencias* Del Valle (2011) considerando los comentarios de algunos profesores acerca de los ejercicios resueltos y propuestos. Otro de los libros seleccionados fue *Álgebra Lineal* de Hoffman y Kunze (1973) el cual es usado por profesores en cursos de maestría. De esta manera, los tres libros mencionados anteriormente quedan determinados en diferentes niveles de escolaridad y perspectiva pedagógica, permitiendo una revisión y análisis del concepto de eigenvalor y eigenvector en un panorama más amplio.

3.4 Algunos elementos a destacar del análisis de los libros de texto

En esta sección se presenta algunos elementos del análisis de los libros de texto sin ser exhaustivos al respecto. El propósito es dar cuenta de cómo dicho análisis enriqueció el diseño de la descomposición genética preliminar que más adelante se describe.

El estudio del concepto de eigenvalor y eigenvector se presenta en momentos diferentes por algunos libros de texto. En particular, en los tres libros de texto analizados se identificó que los textos Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) desarrollan el estudio de eigenvalores y eigenvectores después de espacios vectoriales y transformaciones lineales, sin embargo, Poole (2011) después de estudiar matrices y una breve introducción a las transformaciones lineales. En los dos primeros textos mencionados después de trabajar con otros espacios vectoriales diferentes a $\mathbb{R}^n$ se define el concepto de eigenvalor y eigenvector, por su parte, Poole (2011) inicia el estudio de dicho concepto en el contexto de los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con matrices cuadradas.

Al revisar la forma como se introduce o motiva el estudio de eigenvalores y eigenvectores en los libros de texto analizados identificamos dos formas: sistemas dinámicos de grafos y diagonalizar un operador lineal. Los textos Del valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) exponen el problema de diagonalizar un operador lineal y por qué es importante su estudio. Los autores coinciden en interpretar dicho problema como encontrar una representación matricial diagonal, sin embargo, Del valle (2011) agrega un aspecto relevante sobre encontrar dicha representación: facilita estudiar propiedades intrínsecas del operador, es decir, propiedades que son invariantes respecto a la base; ejemplo de esto son los eigenvalores, el determinante y la traza. Desde una motivación diferente, Poole (2011) muestra la necesidad e importancia de estudiar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz mediante problemas sobre sistemas dinámicos, situación que involucra conocer potencias de matrices y comportamiento a largo plazo.

A partir de estos tres libros de texto se presenta perspectivas pedagógicas diferentes respecto al aprendizaje y la enseñanza de eigenvalores y eigenvectores. Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) desarrolla una perspectiva que va desde lo general a lo particular y principalmente algebraica. Por su parte, Poole (2011) introduce conceptos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, base, entre otros, en un contexto concreto ($\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) para posteriormente abordarlos en formas más abstractas.

A continuación, se discuten algunos aspectos relativos a la definición de eigenvalores y eigenvectores presentes en los libros de texto analizados.

3.4.1 Definición de Eigenvalores y Eigenvectores en los libros de texto. Investigaciones en Matemática Educativa se han ocupado del estudio de los elementos presentes en una definición, así como la complejidad debida a la naturaleza de estos elementos. Para Durand-Guerrier, Hausberger y Spitalas (2015) una definición es una oración abierta asociada con una propiedad de un objeto (ser un número par) o también una relación entre objetos (ser semejante con), de manera que se verifica para ciertos objetos de un dominio dado. La definición no es ni verdadera ni falsa; lo que es verdadero o falso es si un objeto cumple con las condiciones presentes en la definición. Los autores consideran que en una definición existe una estructura lógica compleja, relaciones lógicas, cuantificadores y otros conceptos matemáticos.

En el análisis de las definiciones presentadas por los tres libros de textos se identificaron las posibles estructuras y mecanismos mentales que necesitaría un estudiante para comprender la definición y abordar el estudio de eigenvalores y eigenvectores siguiendo la perspectiva del texto.

También, se resalta la problemática de las relaciones lógicas y la cuantificación, particularmente la cuantificación existencial.

En Poole (2011) la definición presentada es:

Se A una matriz de n $\times$ n. Un escalar λ se llama **Eigenvalor** de A si existe un vector x distinto de cero tal que $Ax = \lambda x$ Tal vector x se llama **Eigenvector** de A correspondiente a λ (Poole, 2011, p. 265)

La definición presentada para el contexto de matrices cuadradas demandaría en un estudiante una concepción Objeto de Matriz y vector y, una concepción Proceso de múltiplo escalar. Mediante el mecanismo de coordinación los Procesos producto de un vector por una matriz y múltiplo escalar el estudiante pueden reconocerse mediante la igualdad entre los dos vectores. Identificar el eigenvector y su respectivo eigenvalor o el eigenvalor y sus respectivos eigenvectores. Al rastrear este concepto a lo largo del libro se encontró que tal concepto no se retoma en transformaciones lineales, particularmente, aquellas definidas sobre un espacio vectorial V.

En el texto de Del valle (2011) se define el concepto de eigenvalor y eigenvector para operadores lineales, se hace referencia explícita a la validez de la definición para espacios vectoriales de dimensión infinita.

*Sean E un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y $T: E \to E$ un operador lineal. Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un **valor propio** (valor característico, eigenvalor, autovalor) de T si existe un vector $u \in E$, con $u \neq 0$, tal que: $T(u) = \lambda u$.*

*Si λ es un valor propio de T y $u \in E$ es un vector no nulo que satisface que $T(u) = \lambda u$, entonces se dice que u es un **vector propio** (vector característico, eigenvector, autovector) del operador T correspondiente al valor propio λ (Del Valle, 2011, p. 458)*

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Consideramos que un estudiante requiere un esquema de transformación lineal para entender un operador lineal como una transformación lineal definida sobre el mismo espacio vectorial. Una concepción Objeto de vector le permite realizar Acciones sobre el vector mediante la transformación lineal, por otra parte, una concepción Proceso de múltiplo escalar implica entender que dado un vector v multiplicarlo por un escalar produce un vector colineal a v. Mediante el mecanismo de coordinación el estudiante puede reconocer la igualdad entre los vectores identificando cual es el eigenvector o eigenvectores con su correspondiente eigenvalor.

Por su parte, la definición de eigenvalor y eigenvector en Hoffman y Kunze (1973) es:

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea T un operado lineal sobre V. Un ***valor propio*** *de T es un escalar c de F tal que existe un vector no nulo α con $T(\alpha) = c\alpha$. Si c es un valor propio de T, entonces*

a). cualquier α tal que $T(\alpha) = c\alpha$ se llama un ***vector propio*** *de T asociado al valor propio c;*

b). la colección de todos los α tales que $T(\alpha) = c\alpha$ se llama ***espacio propio asociado*** *a c (Hoffman y Kunze, 1973, p.181).*

Este libro muestra una mirada más estructural y general de los conceptos de álgebra lineal. Consideramos las estructuras mentales involucradas en la definición de los textos Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) muy similares. Sin embargo, al indagar más a profundidad se identificó que para este último libro de texto se requiere una concepción Objeto de múltiplo escalar dado que el concepto se define considerando un cuerpo arbitrario F y no sobre el cuerpo de los Reales.

Dubinsky (1991) se refiere a la incapacidad de los estudiantes para hacer frente a la cuantificación existencial y universal. El cuantificador existencial está inmerso en la definición de eigenvalor y eigenvector, sin embargo, la relación bicondicional de existencia que involucra el concepto en cuestión en los textos analizados no se hace explicita salvo a una presentada en Del valle (2011).

La Figura 6 es un extracto que corresponde al texto de Del Valle (2011). En esta se puede evidenciar la interpretación matricial del concepto y los elementos de la lógica que parecen invisibles al lector en la definición que presenta el texto, especialmente la relación bicondicional de existencia. Este operador lógico presente en definiciones de conceptos matemáticos puede ser descuidado tanto por profesores como estudiantes, de manera que suele identificarse en un solo sentido. Referente al concepto de eigenvalor y eigenvector, Campos (2017) afirma que los libros de texto suelen presentar al lector una sola implicación, asumiendo que la otra implicación no produce dificultades al estudiante. Al no reconocer la relación bicondicional de existencia un estudiante podría evidenciar dificultades en la comprensión de dicho concepto.

Sea A una matriz cuadrada de orden n; dado que un sistema cuadrado homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si la matriz de coeficientes del mismo tiene determinante cero, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow \text{existe } \vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ tal que } A\vec{u} = \lambda\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \text{el sistema homogéneo } (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad\ \text{tiene soluciones no triviales} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0\end{aligned}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Ahora, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A, entonces debe existir una solución no trivial del sistema homogéneo

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}.$$

Así, los vectores propios correspondientes a λ son las soluciones no triviales de este sistema homogéneo.

Figura 6: Relación bicondicional de existencia en el concepto de eigenvalor y eigenvector

3.4.2 Sobre los ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto. Los ejemplos presentes en un libro de texto ofrecen al lector un medio para generar y fomentar el aprendizaje matemático. Llinares y García (como se citó en Campos, 2017) afirman que un libro de texto lleva una determinada filosofía; una manera de "ver" el contenido matemático escolar, por tanto, los ejemplos y tipos de tareas están permeados por dicha filosofía. En la Tabla 1 se presentan datos sobre los ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto según la complejidad cognitiva considerara por la teoría APOE de manera que el lector pueda entenderlos y solucionarlos.

La relación dialéctica entre el análisis de los libros de texto y la descomposición genética preliminar permitió relacionar cada ejemplo y ejercicio con las posibles estructuras mentales descritas por la teoría APOE. Algunos ejemplos y ejercicios no fue posible asociarlos a una estructura específica (Acción, Proceso, Objeto), se concluyó que estos pueden favorecer el tránsito de una estructura Acción a una Proceso o de una estructura Proceso a una Objeto. Los ejemplos o ejercicios se etiquetaron como A-P o P-O si involucraban facetas de más de una concepción y parecían fomentar el tránsito de una concepción a otra.

En cada libro de texto además de relacionar los ejemplos y ejercicios según sus estructuras mentales requeridas para la solución se identificó la secuencia en relación a la progresión Acción – Proceso – Objeto sugerida por la teoría APOE. El símbolo → hace referencia al orden o secuencia, en este caso corresponde a la secuencia Acción – Proceso – Objeto. Por otra parte, usamos ↔ indicar la existencia de ejercicios a los cuales les preceden otros que demandan una estructura más compleja y luego otros que pueden demandar una estructura menos compleja. Una ilustración de lo anterior es: ejercicios que demandan una concepción Acción, posteriormente otro(s) relacionados con una concepción Proceso y nuevamente otro(s) que parecen corresponder a Acción.

Tabla 1: Clasificación de ejemplos y ejercicios según las estructuras mentales de la teoría APOE

Poole (2011)	**Del Valle (2011)**	**Hoffman y Kunze (1973)**
Ejemplos: Acción: 6 (54%); Proceso: 3 (27%); A-P: 2 (18%) Secuencia: A→ P *Ejercicios propuestos:* Acción: 22 (29%); A-P:13 (17%); Proceso:21 (27%); Objeto:20 (26%); *Secuencia:* A ↔ P ↔ O	*Ejemplos:* Acción: 3 (42%) Proceso: 2 (28%) Objeto: 2 (28%) Secuencia: O → A → P *Ejercicios Resueltos:* Objeto: 3 (27%); Esquema: 8 (73%) Secuencia: O → E *Ejercicios Propuestos:* Acción: 18 (34,6%); A-P:1 (2%) Proceso: 19 (36%); P-O:4 (8%). Objeto:10 (19%); *Secuencia:* P ↔ O; P → A	*Ejemplos:* Acción: 2 (75%); Proceso: 1 (75%); Secuencia: A→P *Ej. propuestos:* A–P: 2(12%); Proceso:5(41%); Objeto:9 (75%); *Secuencia:* A-P → P ↔ O

En los tres libros analizados los ejemplos y ejercicios que requieren una concepción Acción generalmente aparecen en mayor porcentaje, sin embargo, dichos ejemplos y ejercicios se presentan en diferentes momentos. Por ejemplo, los textos Poole (2011) y Hoffman y Kunze (1973) utilizan ejemplos que requieren una concepción Acción en los primeros ejemplos y ejercicios. Por su parte, Del Valle (2011) los presenta posterior a otros que requieren de una concepción Proceso o incluso Objeto de eigenvalores y eigenvectores. Aunque desde la perspectiva de la teoría APOE se considera que la construcción de conceptos matemáticos no ocurre de forma lineal, consideramos importante investigar respecto a este tipo de secuencias, su incidencia en el aprendizaje y el lugar que deben ocupar en la instrucción.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

A continuación, se discute sobre algunos ejemplos de los libros de texto para evidenciar su perspectiva sobre el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores. Además, damos cuenta de tareas que pueden favorecer el tránsito de una concepción a otra, así como, la evolución del concepto desde el punto de vista matemático y cognitivo.

El primer ejemplo (4.1, ver Figura 7) en Poole (2011) involucra realizar Acciones sobre un vector con el fin de justificar si es un eigenvector al encontrar su respectivo eigenvalor. Posteriormente, el segundo ejemplo (4.2, ver Figura 7) es dado un escalar justificar que es un eigenvalor al encontrar un eigenvector o eigenvectores asociados. Los ejercicios propuestos siguen la misma secuencia que se puede identificar en los ejemplos de la Figura 7: tareas que implican justificar que un vector dado es un eigenvector y luego otras que se relacionan con probar que un escalar dado es un eigenvalor.

Ejemplo 4.1

Demuestre que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre el eigenvalor correspondiente.

Ejemplo 4.2

Demuestre que 5 es un eigenvalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y determine todos los eigenvectores correspondientes a este eigenvalor.

Figura 7: Los dos primeros ejemplos presentados en Poole (2011).

Los ejemplos y ejercicios propuestos en este libro también involucran la representación geométrica de dicho concepto. En la Figura 8, se ilustra mediante la representación geométrica como la matriz transforma a eigenvectores. Particularmente, en la imagen derecha de la Figura 8 mediante un "eigendibujo" –denominado así por Schonefeld (1995)- involucra analizar más de un vector y su imagen en la representación geométrica. En este caso se debe analizar si existen vectores cuya imagen están contenidos en la misma recta.

Respecto al libro de texto Del Valle (2011) no se muestran ejemplos y ejercicios que involucren directamente la representación geométrica. Los primeros ejemplos implican encontrar eigenvalores y eigenvectores de operadores lineales definidos en diferentes espacios de dimensión finita e infinita. Estos ejemplos involucran un esquema de transformación lineal y una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector dado que no existe un algoritmo para espacios vectoriales de dimensión infinita; el estudiante necesita pensar en escalares y vectores generales y actuar sobre estos y el operador lineal para los eigenvalores y eigenvectores.

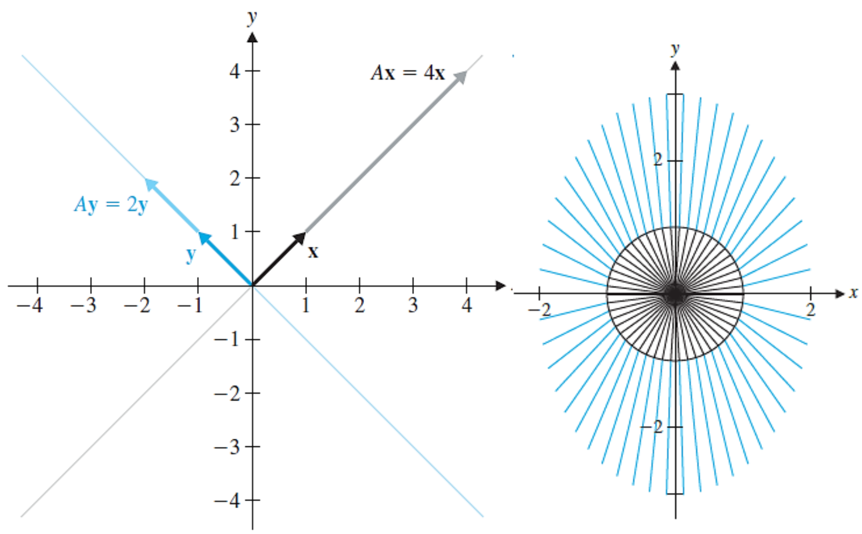


Figura 8: Ejemplos y ejercicios que involucran la interpretación geométrica de eigenvalores y eigenvectores.

Aunque los ejercicios propuestos no siguen la progresión sugerida por la teoría APOE, se identificaron problemas que puede promover una concepción Proceso. En la Figura 9 se proponen dos matrices 2×2, se solicitada encontrar los eigenvalores de las matrices AB y BA cuestionando al estudiante si las matrices resultantes tienen los los mismos eigenvectores.

421 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular los valores propios de AB y BA. Por el ejercicio precedente estos productos deben tener los mismos valores propios, ¿tienen los mismos vectores propios correspondientes?

Figura 9: Ejercicio que puede promover una concepción Proceso.

Un estudiante con una concepción Acción puede calcular dichos eigenvectores, de forma a priori el estudiante puede suponer que efectivamente tienen los mismo eigenvectores dado que tienen iguales eigenvalores. Sin embargo, la reflexión motivada por la pregunta puede inquietar al estudiante al determinar que en realidad tienen diferentes eigenvectores. Situaciones de este tipo son importantes para la toma de consciencia respecto a la relación de existencia entre eigenvalores y eigenvectores bajo la matriz u operador lineal. En relación a las reflexiones motivadas por situaciones de este tipo es importante en la construcción del concepto de eigenvalores y eigenvectores y reconocer la terna (λ, v, T); es decir, la relación de existencia entre un escalar y vectores está dada bajo el marco dado por el operador lineal. En este sentido, la existencia involucra el campo K sobre el cual se define el espacio vectorial V.

Los libros de texto Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) se refieren al isomorfismo entre las matrices $m \times n$ y las transformaciones lineales definidas sobre espacios vectoriales de dimensión finita. Particularmente se aplica dicho isomorfismo para los operadores lineales definidos sobre un espacio vectorial V de dimensión finita y las matrices cuadradas $n \times n$. Los textos muestran que una comprensión de dicha relación es importante para definir el determinante de un operador lineal y por tanto su polinomio característico. Particularmente, en los ejemplos y ejercicios propuestos por Hoffman y Kunze (1973) se evidencia una fuerte referencia a los polinomios característico.

La Figura 10 muestra un ejercicio que cuestiona sobre el polinomio característico del operador lineal identidad definido sobre V un F- espacio vectorial de dimensión finita y el operador lineal cero. En ambas preguntas se necesita pensar en la representación matricial del respectivo operador lineal asociada a alguna base β. Dado que el operador lineal es arbitrario el estudiante requiere actuar sobre entradas no especificadas de la matriz, por ejemplo, la primera pregunta puede llevar al estudiante a actuar sobre la representación matricial del operador lineal $I - \lambda I$ para encontrar su determinante. Una concepción Proceso de polinomio característico le permite al estudiante reconocer que basta multiplicar todos los factores lineales presentes en la diagonal principal los cuales son de la forma $1 - \lambda$. Por lo tanto, el polinomio característico es $(1 - \lambda)^n$ dado que la dimensión del espacio vectorial es n.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre F. ¿Cuál es el polinomio característico del operador identidad sobre V? ¿Cuál es el polinomio característico para el operador cero?

Figura 10: Ejercicio que demanda una concepción Proceso de polinomio característico y reconocer el isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices.

La revisión de los ejemplos y ejercicios propuestos particularmente por los libros Del valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) permiten identificar el polinomio característico de un operador lineal como un elemento importante con la construcción Objeto de eigenvalor y eigenvector.

3.5 Descomposición genética preliminar para la construcción de eigenvalores y eigenvectores

Resultado del análisis teórico, se presenta una descomposición genética que actúa como modelo para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. La descomposición genética que se describe a continuación se fundamenta en el análisis de los tres libros descritos en la sección 3.4 y los resultados de investigación reportados sobre el concepto.

Construcciones previas: con el propósito de precisar sobre las construcciones previas necesarias para la construcción del concepto se describen el nivel de los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial.

El concepto de transformación lineal es entendido por Roa-Fuentes y Oktaç (2010) como una función $T: V \rightarrow W$ definida entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales. Un individuo que logra establecer relaciones entre transformaciones lineales y otros conceptos se encuentra en un nivel *Inter* de dicho Esquema. González y Roa-Fuentes (2017) consideran como estructuras básicas en la construcción de este Esquema el concepto de base como Proceso y vector como Objeto. En el presente estudio, dichas estructuras son importantes, pues se considera que el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores implica trabajar con matrices y operadores lineales. Consideramos además como necesarias una estructura Proceso de matriz asociada a un operador lineal, Proceso de espacio nulo y Proceso de determinante.

El concepto de base, fundamental en la construcción de las representaciones geométrica, funcional y matricial de la transformación lineal en una estructura Proceso permite reconocer que cualquier vector $v \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de la base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; de esta manera, la transformación lineal (operador lineal) queda determinada mediante los vectores v_i de la base β (González y Roa-Fuentes, 2017). El Proceso anterior se coordina con el Proceso de transformación lineal para obtener las imágenes $T(v_i)$ con $i = 1, \dots, n$, las cuales están en W. La coordinación entre los procesos anteriores con el Proceso de vector de coordenadas relativo a una base permiten determinar $[T(v_i)]_{\beta'}$; vector de coordenadas relativo a la base β' del espacio vectorial W. Una representación matricial para la transformación lineal T será el resultado de la coordinación entre el vector de coordenadas relativo a la base β' y el Proceso de matriz.

La estructura Proceso de espacio nulo de un operador lineal y matriz permite reconocer características sobre la transformación como la deformación que sufriría un objeto en el espacio vectorial al aplicársele el operador lineal o la matriz. Por otra parte, permite reconocer propiedades de las funciones como la inyectividad. El estudiante tambien puede establecer relaciones con otros conceptos, por ejemplo, el determinante. Así, entiende que el espacio nulo será diferente del vector cero si el determinante es igual a cero.

Aunque se mencionan por separado los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial estos se encuentran relacionados e interactúan entre sí; un concepto en particular que motiva dicha interacción es el concepto de base. Parraguez y Oktaç (2010) consideran que un nivel *Inter* del Esquema de espacio vectorial implica establecer relaciones entre conceptos como subespacios, transformaciones lineales, bases, entre otros. Se considera que una concepción previa de espacio vectorial permite al individuo acceder a otras estructuras como vector y operación binaria, particularmente, la operación múltiplo escalar. Una concepción Proceso de operación binaria referida a, múltiplo escalar le permite a un individuo pensar en forma dinámica, esto es, dado un escalar $k \in K$- campo y un vector $v \in V$, la transformación kv produce un nuevo vector que pertenece al espacio vectorial V. La estructura Objeto de vector, permite concebir a un vector como un elemento de un espacio vectorial y según el nivel del Esquema se reconoce que los vectores también pueden ser polinomios, matrices, funciones, entre otros.

Finalmente, una concepción Proceso de factorización de un polinomio sobre un campo K le permite al estudiante determinar sus raíces o justificar por qué no existe raíces sobre dicho campo.

Construcciones necesarias: si un estudiante posee de manera previa un Esquema de transformación lineal en un nivel *Inter* puede reconocer que un operador lineal es una transformación lineal definida de un espacio vectorial V en sí mismo.

La construcción del concepto comienza con la realización de dos Acciones, ver Figura 11. La primera Acción es de comparación. Dado un operador lineal $T: V \to V$, sobre un espacio vectorial V o una representación matricial A_T y un vector especifico $v_0 \in V$ se busca un escalar λ_0 tal que $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Esta Acción de comparación puede ser interiorizada en un Proceso (*Proceso 1*), el estudiante puede dar cuenta de la existencia de un escalar λ_0. Tal construcción tambien puede provenir de la coordinación entre el Proceso de imagen de operador lineal y el Proceso de múltiplo escalar. Se reconoce a $T(v_0)$ o $A_T v_0$ y $\lambda_0 v_0$ como nuevos vectores del espacio vectorial V y bajo el cumplimiento de la relación de igualdad se puede denominar a v_0 y λ_0 como un eigenvector y eigenvalor de T respectivamente.

La coordinación entre el Proceso de imagen de un operador lineal y múltiplo escalar puede ser motivada particularmente en espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de forma geométrica mediante la colinealidad entre v_0 y $T(v_0)$ o v_0 y $A_T v_0$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ la colinealidad se relaciona con rotaciones de 0° o 180° mostrando la existencia de un escalar λ_0 en el campo K que escala al vector v_0 de tal modo que es igual a $T(v_0)$ o $A_T v_0$ (Yáñez, 2015).

Dado λ_0 en el campo K y un operador lineal T o representación matricial A_T, la segunda Acción consiste en determinar vectores v_0 que verifiquen la ecuación $T(v) = \lambda_0 v$ o $A_T v = \lambda_0 v$. La interiorización de esta Acción (*Proceso 2*) permite reconocer la existencia de vectores v_0 no nulos como eigenvectores del operador T o la matriz A_T con correspondiente eigenvalor λ_0. El Proceso 2 puede coordinarse con el Proceso de espacio nulo mediante la contenencia de eigenvectores del operador lineal T o A_T en el espacio nulo de $T - \lambda_0 I$ $(A_T - \lambda_0 I)$. El Proceso resultante (*Proceso 3*) es coordinado con el Proceso de determinante el cuál permite al estudiante reconocer que si $\det(A_T - \lambda_0 I) = 0$ entonces, existen vectores diferentes de cero en $Nul(T - \lambda_0 I)$ [$Nul\,(A_T -$

$\lambda_0 I)$].

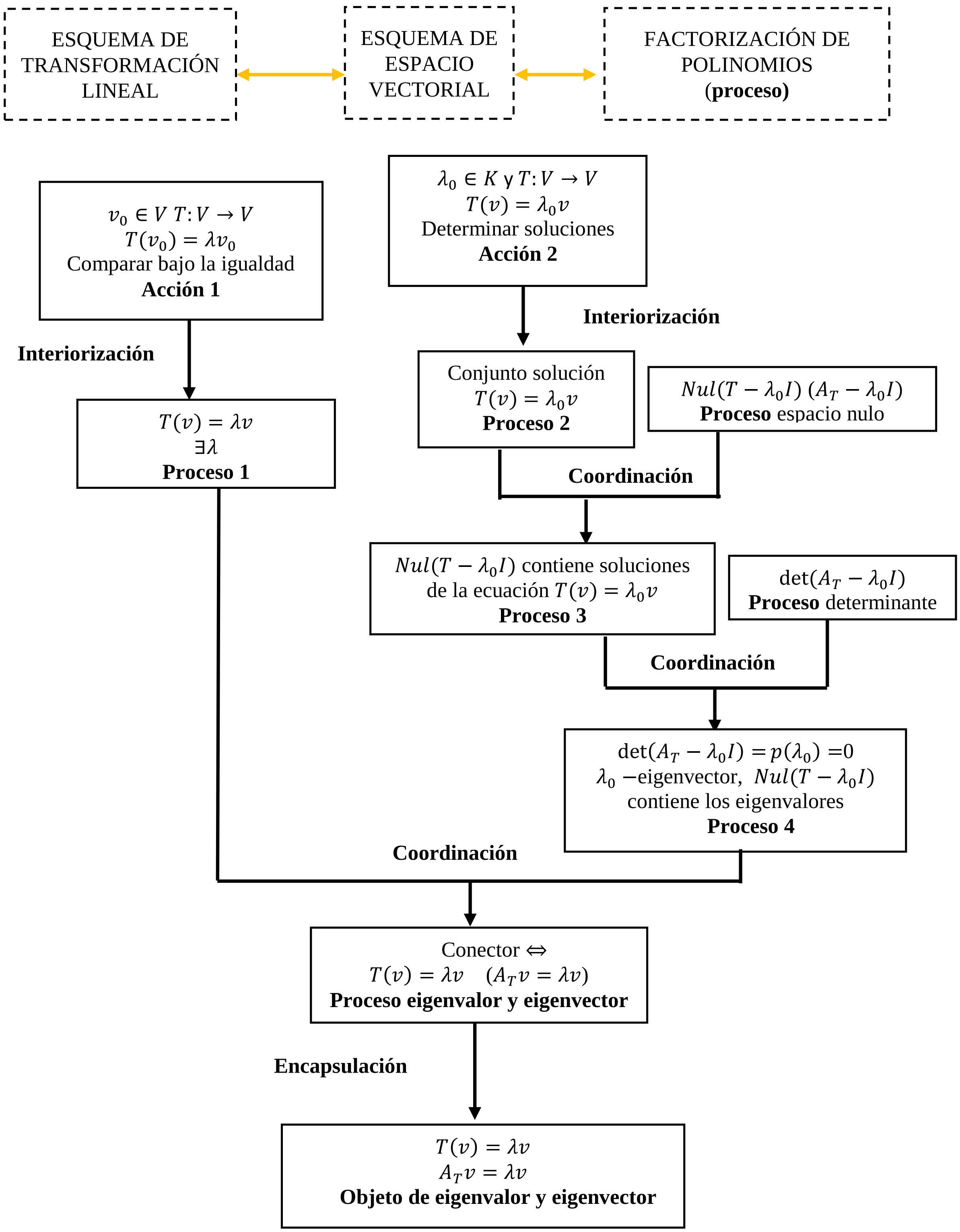


Figura 11: Descomposición genética preliminar para el concepto de eigenvalor y eigenvector.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

A partir de lo anterior el estudiante puede relacionar el $\det(A_T - \lambda I\ )$ como una condición para que existan vectores no nulos en $Nul(T - \lambda I)$ $[Nul\ (A_T - \lambda I)]$ y denominar al $\det(A_T - \lambda I)$ como el polinomio característico. Las raíces λ sobre el campo K del polinomio característico pueden identificarse como los eigenvalores de T y los vectores no nulos en $Nul(T - \lambda I)$ $[Nul\ (A_T - \lambda I)]$ como los respectivos eigenvalores. Una construcción de los Procesos involucrados anteriormente le permite al estudiante dotar de sentido la ecuación característica $T - \lambda I = 0$ $[A_T - \lambda I = 0]$.

El Proceso 4 y el Proceso 1 se coordinan mediante la relación bicondicional (↔) de existencia dando resultado al Proceso de eigenvalor y eigenvector. Una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector, por ejemplo, implica reconocer que si w es un eigenvector asociado al eigenvalor λ_0, entonces todo vector diferente de cero del espacio generado por w es un eigenvector de T asociado al mismo eigenvalor λ_0. De esta manera, se reconoce al $Nul\ (T - \lambda_0 I)$ como el eigenespacio asociado al eigenvalor λ_0. Lo anterior puede ser motivado mediante la comparación del espacio generado por diferentes eigenvectores (Salgado y Trigueros, 2014; 2015). La coordinación bajo la relación bicondicional de existencia permite entender que: si v es un eigenvector de T (A_T) entonces, existe un escalar λ en el campo K tal que $T(v) = \lambda v$ o $(A_T v = \lambda v)$. Y, si λ es un eigenvalor de T (A_T) entonces, existen vectores $v \in V$ no nulos tal que $T(v) = \lambda v$ o $(A_T v = \lambda v)$.

La reflexión sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector permite identificar que determinar los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal equivale a encontrarlos para alguna representación matricial.

Es decir, cualquier representación matricial del operador lineal ofrece la misma información, pues los eigenvalores y eigenvectores son invariantes a representaciones matriciales. De esta manera el estudiante puede reconocer el isomorfismo entre los operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales de dimensión finita y las matrices de tamaño $n \times n$.

Mediante el mecanismo de encapsulación el estudiante puede ver el Proceso como una totalidad, pasar de una concepción dinámica de eigenvalores y eigenvectores a una concepción estática donde se identifican como parejas (λ, v) que definen una relación funcional, donde $\lambda \in K$ y $v \in E_\lambda$ diferente del vector cero. Incluso el estudiante puede reconocer una base β_{E_λ} del eigenespacio E_λ para actuar sobre la pareja $(\lambda, \beta_{E_\lambda})$.

Una vez encapsulado el Proceso eigenvalor y eigenvector se pueden realizar Acciones como sumar eigenvalores de un mismo operador y analizar si el escalar resultante es un eigenvector del operador. En este punto hay plena consciencia que al hablar por ejemplo de eigenvalor, necesariamente se involucran los eigenvectores o viceversa. Así mismo, se entiende que el polinomio característico de un operador lineal corresponde al polinomio característico de alguna representación matricial. En esta estructura se reconoce la multiplicidad de los factores lineales del polinomio característico y se relaciona con características de los respectivos eigenespacios. Por otra parte, consideramos que una concepción Objeto de eigenvalor y eigenvector puede ser necesaria para construir otros conceptos como la diagonalización de operadores lineales.

Con el propósito de dar una ilustración referente a cada concepción, nos referimos a algunos ejercicios presentados en los libros de texto analizados o de elaboración propia. Una concepción Acción sobre eigenvalores y eigenvectores se limita a realizar Acciones específicas orientadas por indicaciones externas sin tener control de la relación bicondicional de existencia entre eigenvalores y eigenvectores. Para ilustrar mejor este tipo de concepción, considere la siguiente tarea:

Sea $P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *un operador lineal definido así:* $P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x-2y \\ -2x-2y \end{bmatrix}$

¿0 *es un eigenvalor de* P*?*

¿$u = [-3, 3]$ *es un eigenvector de* P*? ¿Por qué?*

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

¿Existen otros eigenvalores para P? ¿Cuáles son?

Encuentre dos eigenvectores relativos a cada eigenvalor diferente.

Un individuo con una concepción Acción se puede limitar en repetir un algoritmo. Al resolver el sistema homogéneo $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$ no puede interpretar el conjunto solución para determinar los eigenvectores de P. Si el estudiante necesita realizar Acciones sobre u para justificar si es un eigenvector es porque no puede reconocer que el vector u cumple con las características para pertenecer al subespacio vectorial asociado al eigenvalor 0. También el estudiante puede evidenciar dificultades para justificar la existencia de otros eigenvalores para el operador P.

Consideramos que en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector parecen estar involucrados la coordinación de ciertos Procesos. Las tareas o problemas propuestos deben motivar la interiorización de las Acciones y la coordinación de Procesos con el propósito de construir el concepto de eigenvalor y eigenvector.

Un estudiante con una concepción Proceso puede aplicar Acciones no solo a vectores o escalares específicos sino a un conjunto de vectores que cumplen cierta característica y a escalares generales. Además, puede identificar la relación bicondicional de existencia entre eigenvalores y eigenvectores. En la Figura 12 corresponde a un ejercicio propuesto por Del Valle (2011). El ítem a) implica que el estudiante reconozca la no existencia de eigenvalores o eigenvectores ya sea de forma geométrica o algebraica. La forma geométrica se da al reconocer que no existen vectores bajo el operador lineal que sean transformados sobre la misma recta que los contiene. La forma algebraica se relaciona con reconocer que no existen raíces del polinomio caracterismo en $\mathbb{R}$. Sin embargo, en el ítem b) ahora el estudiante necesita probar que todo vector de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ es un eigenvector asociado al eigenvalor $\mathbf{1}$. Una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector le permite al estudiante reconocer que al componer el operador lineal consigo mismo la transformación resultante será rotar $\mathbf{180°}$ cada vector. Dado que la longitud del vector no cambia el eigenvalor asociado es $\mathbf{1}$.

401 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal que rota cada vector $\pi/2$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj conservando la norma (cfr. el ejercicio resuelto 3 de este capítulo).

(a) Probar que T no tiene valores propios.

(b) Mostrar que todo vector no nulo es vector propio de T^2.

Figura 12: Situación que puede demandar una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector.

Por último, Consideramos que un individuo que tiene una concepción Objeto identifica el par $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v})$ como un objeto al cual puede aplicarle Acciones. Dado que el estudiante es consciente de la relación bicondicional de existencia puede actuar sobre el escalar o un vector para referirse al otro. En la Figura 13 se propone una situación en la que un estudiante necesitaría haber encapsulado el concepto de eigenvalor y eigenvector.

411 Sean T un operador lineal en un espacio $\mathbf{E}$, λ y μ $(\lambda \neq \mu)$ valores propios de T con sendos vectores propios $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Mostrar que si $a\vec{u} + b\vec{v}$ es un vector propio de T, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Figura 13: Situación que puede demandar una concepción Objeto de eigenvalor y eigenvector.

El estudiante puede realizar Acciones sobre combinaciones lineales de eigenvectores asociados a diferentes eigenvalores mediante el operador lineal. Dado que no actúa sobre vectores y escalares específicos debe reconocer si tal subespacio representado en la combinación lineal general $\boldsymbol{au} + \boldsymbol{bv}$ es invariante bajo el operador lineal o para que valores de $\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ esto se verifica. Las tareas propuestas por Wawro, Watson y Zandieh (2019) pueden promover la encapsulación del Proceso de eigenvalor y eigenvector dado que involucran realizar combinaciones lineales específicas de eigenvectores linealmente independientes correspondientes a un mismo eigenvector.

4. Diseño e implementación de la enseñanza

En este capítulo se describe el proceso de diseño de la actividad de modelación, así como la verificación de los seis principios de la teoría de Modelos y modelación. El diseño de instrucción presentado en secciones de este capítulo permite dilucidar el proceso de reflexión alrededor de cada tarea diseñada para la instrucción y los instrumentos de investigación. Finalmente, el capítulo presenta como se desarrolló la implementación de la enseñanza.

4.1 Diseño de actividad que provoca modelos

En esta investigación se diseñó una actividad provocadora de modelos con el propósito de utilizarla para introducir el estudio al concepto de eigenvalores y eigenvectores. El análisis teórico y los seis principios presentados por Lesh et al., (2000) fueron los elementos principales en el diseño de la actividad.

En la descomposición genética descrita para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector se consideró como construcciones previas un Esquema de transformación lineal y un Esquema de espacio vectorial, por lo tanto, se determinó que la actividad que provoca modelos debería favorecer el uso de la representación geométrica, matricial y funcional de la transformación lineal. Tales representaciones se relacionan gracias a la base como Proceso

(González, Roa-Fuentes, 2017), por tal razón, consideramos que este concepto debería involucrarse en la actividad provocadora de modelos. Tal como lo expresa Trigueros y Oktaç (2019) cada situación diseñada o tarea debe estar enfocada en los diferentes detalles y aspectos presentados en la descomposición genética preliminar.

Las investigaciones reportadas sobre el concepto (Klasa, 2010; Gol, 2014, Yáñez, 2015; Beltrán, Murillo y Jordán, 2017) se refieren a la importancia de una comprensión geométrica de eigenvalores y eigenvectores previo a los algoritmos que involucran el cálculo de dichos escalares y vectores. Así mismo, consideramos que el uso de softwares de geometría dinámica tiene un rol importante para dar sentido e interpretar diversas situaciones de modelado y comunicar las formas de pensar de los estudiantes (Lesh et al., 2000; Lesh y Doerr, 2003; Sinclair y Jackiw, 2010). También las representaciones dinámicas y las simulaciones median entre un modelo físico concreto y otro más abstracto asociado con conceptos matemáticos (Dubinsky, 1997; Sinclair y Jackiw, 2010).

Considerando los aspectos mencionados anteriormente se comenzó el diseño y la búsqueda de una situación en el contexto de $\mathbb{R}^2$ para elaborar una simulación interactiva usando el software GeoGebra. Morphett, Gunn y Maillardet (2015) reportan el desarrollo de applets interactivos con GeoGebra para matemáticas y estadística; en particular existe una para álgebra lineal. Al revisar y estudiar dicha simulación consideramos adaptarla dado que se cumplían parte de los requisitos descritos anteriormente. Se realizó la descripción de la actividad que provoca modelos relacionada con encontrar un nuevo diseño para un reloj circular de pared la cual se presenta a continuación.

4.1.1 Diseño de un reloj. Usted es un artista que le han solicitado diseñar un reloj en forma de elipse a partir de un reloj circular de pared con 1 decímetro de radio. Si considera el centro del reloj circular como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el diseño serían los siguientes:

a). Si son las 12:00 en el reloj circular, en el nuevo diseño la ubicación del extremo del minutero deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha respecto a su posición de las 12:00.

b). Si son las 3:15, en el nuevo diseño la ubicación del extremo del minutero deberá estar una unidad hacia arriba respecto a su posición de las 3:15.

A partir de lo anterior,

1. Describa como cualquier punto del reloj circular debe ser transformado para construir el nuevo diseño.
2. Suponga que el reloj circular indica las 6:20 y considere el minutero como un vector. Describa específicamente como es transformado esta posición del minutero para tener el nuevo diseño. (Ver Archivo GeoGebra) ¿En qué otra posición el minutero tendrá una transformación parecida? ¿Cuál(es) sería aproximadamente la longitud del minutero para este(os) caso (s)?
3. Suponga que el minutero puede ser representado por un vector $\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, se hacen algunas modificaciones a los requisitos del diseño de tal manera que puede ser descrito por un modelo E. ¿Qué características debe cumplir el vector $\boldsymbol{m}$ tal que la transformación bajo el modelo E sea similar al encontrado en el ítem b?

La actividad descrita anteriormente no tenía evidencia empírica sobre el cumplimiento de los seis principios propuestos por la teoría de Modelos y Modelación. se consideró realizar una implementación de la actividad para analizar la pertinencia del problema para introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector y la verificación de los principios. Mediante el pilotaje de la actividad se estudia la posibilidad de ajustar la situación de tal manera que sea más clara para los estudiantes .

4.1.2 Análisis a priori de la situación “diseño de un reloj”. En el ítem (a) se espera que los estudiantes utilicen diferentes estrategias, entre estas, una interpretación grafica de la situación. Desde la Perspectiva de Modelos y Modelación esto establece posibilidades para la construcción de modelos. Al construir la representación gráfica se espera que los estudiantes logren un primer acercamiento al diseño solicitado; es decir, reconocer los requisitos exigidos en el nuevo diseño. Los estudiantes pueden asociar las posiciones del minutero con los vectores $e_1 = [1,0]$ y $e_2 = [0,1]$, reconocer al conjunto $B_c = \{e_1, e_2\}$ como base canónica de $\mathbb{R}^2$ e identificar las imágenes respectivas para los vectores de la base bajo la transformación lineal T(ver Figura 14).

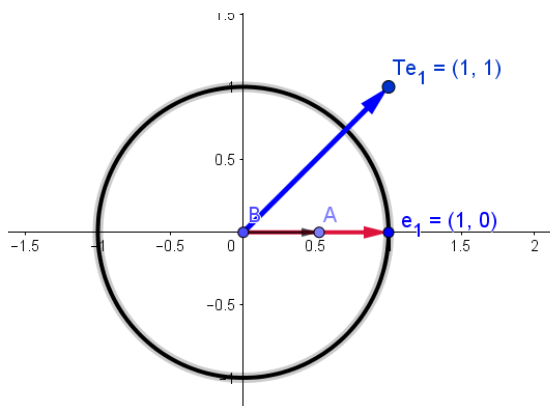


Figura 14: Ilustración de un vector de la base canónica y su respectiva imagen según la situación de modelación.

Los estudiante pueden coordinar el Proceso de base con el Proceso de transformación lineal para reconocer que cualquier vector $v = [x, y]$ puede ser expresado como una combinación lineal de la base B_c. Consideramos que algunos estudiantes pueden reconocer la representación matricial de la transformación lineal que deforma al reloj circular y otros pueden expresar la transformación de forma funcional como $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$. La transformación lineal T puede ser estructurada como un modelo que describe el nuevo diseño de reloj, pues para cualquier vector v su imagen se encuentra al evaluarlo en T. Consideramos que un reconocimiento de lo anterior es un avance importante en la descripción del nuevo modelo del reloj.

Al pedir en el ítem b) describir la deformación que sufre el minutero cuando indica 20 minutos tiene por objetivo que los estudiantes usen el modelo que han construido hasta el momento y analicen la pertinencia del modelo. Además, se busca orientar a los estudiantes a identificar un eigenvalor y eigenvector de forma geométrica. Para conocer las coordenadas del vector cuando se indican 20 minutos los estudiantes pueden pensar en el ángulo que se forma con el eje x y encontrar una relación funcional que determine los grados para cualquier minuto especifico. Una posible relación es $\theta(m) = 90 - 6m, \quad 0 \leq m \leq 60$. A partir de esto, el vector que representa al minutero cuando indica aproximadamente 20 minutos se puede determinar mediante la expresión $[x, y] = [\cos(\theta(20)), sen(\theta(20))]$.

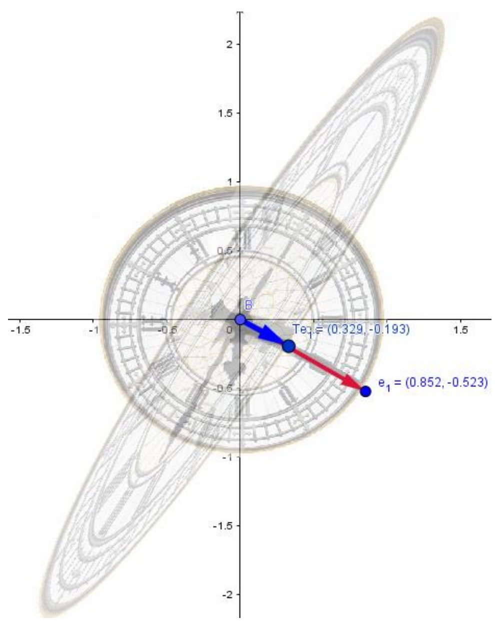


Figura 15: Simulación del nuevo diseño en GeoGebra

Mediante la exploración con el software de geometría dinámica GeoGebra (Figura 15) se espera que los estudiantes reflexionen y validen los resultados mencionados anteriormente, también, identifiquen otros vectores cuya trasformación bajo T se reduce a un múltiplo escalar. En este momento toda la actividad movilizada por los grupos de trabajo y el profesor es fundamental para identificar características geométricas y aritméticas de dichos vectores.

Las reflexiones que surgen entre los estudiantes pueden estar relacionadas con la preservación de la dirección del vector y su transformación al comprimirse o alargarse. Mediante una estructura Proceso de transformación lineal los estudiantes pueden reconocer que cualquier vector w verifica que $T(-w) = -T(w)$. De esta manera, el estudiante podría reconocer que la deformación del vector que indica 50 minutos equivale a multiplicar el vector por un escalar al igual que para el vector de 20 minutos.

En el ítem (c) el objetivo es generalizar las características de los vectores que fueron identificados en el ítem (b) a otros modelos. Particularmente el interés es a generalizar estas características para otra transformación lineal (modelo) E que describa un nuevo diseño de reloj en forma de elipse. El interés finalmente es generar la reflexión alrededor de la existencia del vector y el escalar y su relación condicional bajo la transformación lineal E.

4.2 Primera prueba piloto de la actividad de modelación

En el segundo semestre académico del año 2018 se desarrolló una prueba piloto sobre la situación de diseño de un reloj, esto con el propósito de obtener resultados empíricos sobre la pertinencia para introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector, el cumplimiento de los seis principios de

Modelos y Modelación y tener evidencias para mejorar el diseño del problema. Dado que la situación propuesta es original y no ha sido documentada, se aplicó en un curso de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander a cargo del docente investigador con un total de 20 estudiantes de las carreras de Química e Ingeniería de sistemas. La recolección de los datos para las evidencias fue a partir de las hojas de trabajo y las videograbaciones de la actividad generada por los estudiantes y el docente.

Análisis Posteriori de la prueba piloto: se revisaron las videograbaciones y se seleccionaron segmentos con evidencias sobre las construcciones mentales movilizadas por los estudiantes y la emergencia del concepto de eigenvalor y eigenvector. Según se había previsto en el análisis a priori, los estudiantes podrían interpretar la información del problema y realizar representaciones gráficas y geométricas para tener un bosquejo del modelo solicitado y relacionarlo con conceptos de álgebra lineal.

Después de identificar los segmentos de video grabación que aportaban evidencia sobre las construcciones movilizadas se utilizó las etiquetas $E_1, \ldots E_{10}$ para denotar a los diferentes estudiantes involucrados en las discusiones analizadas.

En la implementación de la prueba piloto los estudiantes trabajaron en grupos de dos o tres donde compartian diferentes ideas sobre el diseño del nuevo reloj. Después de trabajar aproximadamente 40 minutos algunos estudiantes de diferentes grupos mostraban sus avances sobre el modelo. En la siguiente transcripción el estudiante E_1 deja ver un acercamiento en la construcción del modelo del problema.

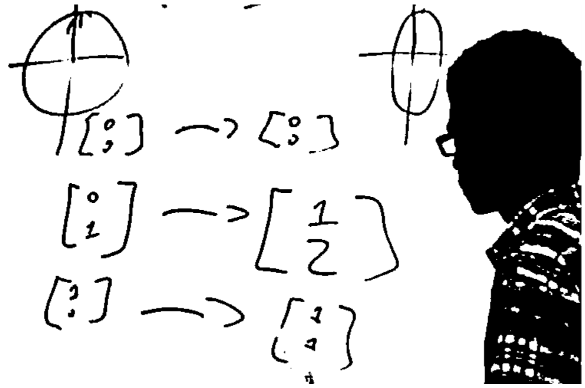


Figura 16: La interpretación de E_1 sobre el problema de modelación.

E_1: […] básicamente necesitamos encontrar una transformación lineal con las “pistas” que nos dieron. […] por lo que si utilizamos un vector para representar esto, es como si hubiera pasado de $[0,1]$ a $[1,2]$. Así mismo lo hice con el otro, $[1,0]$ a $[1,1]$ […] Quiero ver cómo es transformado un $[x, y]$ por la transformación lineal […] estoy mirando que matriz me puede servir.

En la Figura 16 se muestra la gráfica que realiza el estudiante E_1, desde la Perspectiva de Modelos y Modelación esto es un acercamiento a la elaboración del modelo, proporciona formas y medios para que este evolucione mediante el uso de construcciones previas. En la intervención de E_1 se puede identificar que hace uso de las construcciones previas sobre transformaciones lineales y base, aunque este último no lo menciona explícitamente, en el siguiente diálogo los estudiantes E_4 y E_5 hacen más explícitas estas construcciones.

E_5: Nosotros inicialmente tenemos que ver cuál es la matriz g que nos genera nuestra transformación lineal y que nos forma el nuevo diseño […]

E_4: Tomamos la base canónica y hallamos las imágenes […] (Ver Figura 17)

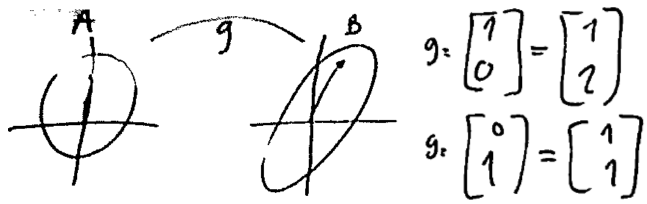


Figura 17: Interpretación de E_4 y E_5 sobre el problema de modelación.

Los estudiantes E_1, E_4 y E_5 están pensando en una transformación lineal como una matriz. Al hacer referencia explícita al uso de la base y la transformación lineal consideramos que los estudiantes están movilizando su esquema de transformación lineal y base, pues el problema no se refería directamente a estos conceptos, sin embargo, estos estudiantes pueden traer sus conocimientos sobre dichos conceptos para construir el modelo solicitado. La Figura 18 muestra como los estudiantes E_4 y E_5 encontraron la expresión para la transformación lineal.

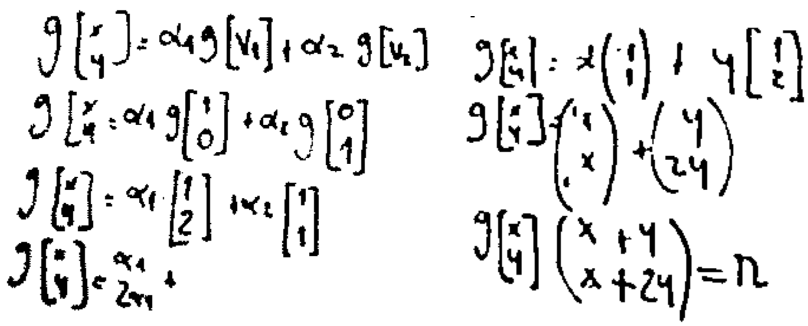


Figura 18: Transformación lineal asociada al problema de modelación por E_4 y E_5

Los estudiantes E_4 y E_5 habían asignado de forma errónea las imágenes de los vectores de la base canónica, después de compartir sus primera ideas en una discusión general otros estudiantes identifican el error y es corregido. Los estudiantes no solo relacionan los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ con sus imágenes, también, reconocen que cualquier vector $[x, y]$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base. En el desarrollo presentado en la Figura 18 se muestra evidencia que los estudiantes coordinan el Proceso de base con el Proceso de transformación lineal para entender que la imagen de $[x, y]$ mediante la transformación lineal corresponde a una combinación lineal de las imágenes de los vectores de la base. Después de encontrar los escalares de la combinación lineal concluyen que la transformación lineal es $g\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+2y \end{bmatrix}$. Aunque habían hecho referencian a la matriz de transformación la expresión que escriben corresponde a la transformación lineal g en su forma funcional.

El siguiente diálogo se desarrolla después de una pregunta realizada por el investigador respecto lo presentado por los estudiantes E_4 y E_5.

I: ¿Por qué esto describe el diseño del reloj? ¿Cómo muestran que sirve para cualquier posición del minutero?

E_4: Aplicando esto (señala la expresión que ha encontrado) a los vectores de la base […]se cumple para todo si es una transformación lineal de la figura.

E_3: ¿Qué me garantiza que se cumpla para todos los vectores?

E_4: Estoy utilizando una base… una base canónica.

E_7: Si es una base me va a generar. Entonces me va a dar todos los puntos ahí sí.

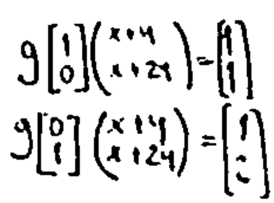


Figura 19: Verificación del modelo por E_4 y E_5

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

A partir de la Figura 19 y el diálogo anterior se resaltan dos cosas: 1) los estudiantes usan su esquema de base para argumentar la validez del modelo que están proponiendo. 2) muestran que si se cumple para los vectores de la base entonces se debe cumplir para los demás. Aunque en el episodio de clase no se cuestionó a los estudiantes sobre cómo sería deformado otra posición del minutero diferente a 20 minutos, se consideró incluirse en una nueva versión con el propósito de motivar a los estudiantes refinar el modelo y fomentar la discusión sobre su validez.

Las evidencias en las producciones escritas y verbales de los estudiantes muestran que la situación propuesta generó interés hacia una interpretación matemática del problema, los estudiantes utilizaron sus construcciones previas y expresaron versiones del modelo solicitado. Lo anterior indica que los principios de realidad y construcción de modelos se verifican en la situación propuesta.

La concepción Proceso de base en los estudiantes E_4 y E_5 les permite argumentar que basta conocer como son transformados los vectores de la base para que la transformación lineal quede determinada de manera única. Por lo anterior, se verifica también los principios de autoevaluación y documentación, pues los estudiantes a partir del registro de sus formas de pensamiento pueden verificar su progreso en la construcción del modelo.

Al revisar las notas de campo del investigador y las videograbaciones de las intervenciones en pequeños grupos, se identificó la necesidad de mejorar el archivo de GeoGebra. El propósito es brindar dos vistas gráficas al estudiante: en la primera, la simulación de la deformación del reloj y cómo es el contorno del nuevo diseño; en la segunda, mostrar elementos matemáticos asociados al problema como los vectores de la base canónica y sus respectivos vectores imágenes.

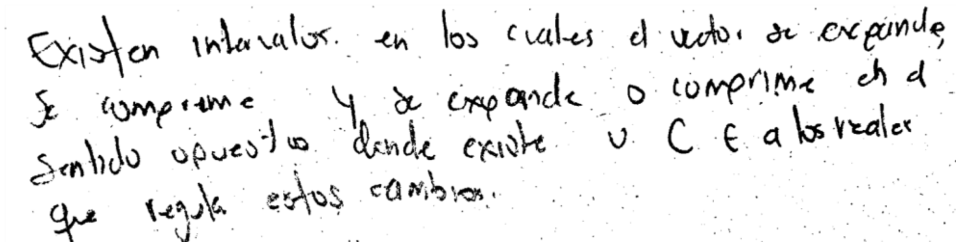

Existen intervalos en los cuales el vector se expande, se comprime y se expande o comprime en el sentido opuesto donde existe v. C ∈ a los reales que regula estos cambios.

Figura 20: Conclusiones de E_{10} al problema de modelación.

En la figura 20 se muestra algunas conclusiones del estudiante E_{10} después de explorar el archivo de GeoGebra. Se identificó que los estudiantes reconocen la existencia de posiciones en los minuteros para las cuales la transformación se reduce a expandir o comprimir los vectores "regulados" por un número escalar.

Por otra parte, las producciones escritas de los estudiantes del ítem (c) mostraron que no era claro lo que se preguntaba, sin embargo, en general el problema generó un espacio propicio para pensar en eigenvalores y eigenvectores, particularmente cuando se desea conocer si existen posiciones del reloj circular que quedan invariantes en el nuevo diseño.

4.3 Segunda prueba piloto de actividad de modelación y pilotaje de actividades específicas

En esta investigación se consideró realizar una implementación piloto con el propósito de mejorar el diseño de las actividades específicas de instrucción y la actividad provocadora de modelos. En el primer semestre del 2019 se seleccionaron 9 estudiantes de dos cursos diferentes de álgebra lineal I en la Universidad Industrial de Santander. Los profesores de los dos cursos desarrollaban una metodología de enseñanza similar. Se realizaban reuniones periódicas con el propósito de discutir sobre la enseñanza de conceptos de álgebra lineal.

El diseño de actividades de instrucción e instrumentos en el desarrollo de una investigación desde la teoría APOE es muy importante (Oktaç, 2019). El pilotaje de instrumentos se realiza con el propósito poderlos refinar, de manera que, la información recolectada sean datos relevantes para el problema que aborda la investigación. Consideramos que el diseño de tareas o actividades específicas para la instrucción no puede ser descuidado, cada tarea debe tener un objetivo claramente determinado y especificado. Así mismo, consideramos que una implementación piloto de algunas tareas contribuye al diseño y establecimiento de las tareas coherentes, es decir, existe una lógica en la presentación de una tarea a otra. Desde la teoría APOE la coherencia de las tareas de instrucción se sustenta en la descomposición genética preliminar. Sin embargo, existen algunas variables del diseño que no pueden ser controladas por el investigador y es necesario realizar intervenciones piloto con el propósito de mejorar la secuencia de instrucción.

La implementación piloto se desarrolló en tres sesiones de dos horas y media. Se aplicaron tareas en relación a las construcciones previas, se implementó una nueva versión de la actividad que provoca modelos y también se presentaron tareas diseñadas para desarrollar las construcciones necesarias en el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

La primera prueba piloto de la actividad que provoca modelos permitió refinarla. A continuación, presentamos la versión refinada tal como se presentó a los estudiantes en la implementación piloto. En líneas posteriores discutimos evidencias de los seis principios que propone la teoría de Modelos y Modelación para la actividad diseñada.

4.3.1 “Diseño de un nuevo reloj”: versión refinada. Usted es un artista y le han solicitado diseñar un reloj en forma de elipse a partir de un reloj circular de pared con 1 decímetro de radio. Si considera el centro del reloj circular como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el diseño serían los siguientes:

a). Si son las 12:00, en el nuevo diseño la ubicación del extremo superior del minutero deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha.

b). Si son las 3:15, en el nuevo diseño la ubicación del extremo derecho del minutero deberá estar una unidad hacia arriba.

A partir de lo anterior,

1. ¿Cómo es transformado cualquier punto del reloj circular para construir el diseño en forma de elipse? Encuentre un modelo para el nuevo diseño de reloj.
2. Considere el minutero del reloj circular como un vector $\boldsymbol{m}$ y para el elíptico el vector $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{m})$. ¿Cuál es el vector $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{m})$ cuando se indica 10 minutos? ¿Qué relación geométrica tiene los respectivos vectores? ¿Esta relación se conserva para otros vectores?
3. Explore el archivo Act.1.ggb [Seleccione la casilla "*show clockface*" y mueva el punto $\boldsymbol{P}$]. Si existen, ¿Para cuál(es) vector(es) en el diseño circular su transformación es invariante para el nuevo diseño? ¿Qué características tienen este(os) vector(es)? Justifique su respuesta
4. Sea $\boldsymbol{m} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ un vector que representa la posición del minutero del reloj circular y sea E otro modelo de reloj en forma de elipse. Realice un bosquejo, describa características y condiciones de manera que existan posiciones invariantes de la transformación del minutero.

4.4.2 Análisis del trabajo de los estudiantes con la actividad "Diseño de un nuevo reloj". En la segunda sesión los estudiantes trabajaron en pequeños grupos por un tiempo estimado de 30 a 40 minutos alrededor del problema "diseño de un nuevo reloj". El investigador pasaba por los diferentes grupos, interactuaba con los estudiantes para conocer como estaban abordando la actividad, identificaba posibles dificultades y buscaba evidencias del cumplimiento de los seis principios.

Los estudiantes participantes en la implementación piloto trabajaron en grupos de 2 o 3 y se etiquetó a cada estudiante como $e_1, \dots, e_9$ con el propósito de conserva su identidad. En su grupo, e_1 explica a sus dos compañeros como él está entendiendo el problema. En el siguiente párrafo se presentan sus comentarios.

> e_1: Me dicen que a las doce en el reloj circular (ubica el punto) al que le corresponde el vector $[1,0]$. Ahora las 3:15 seria este punto (lo ubica) el $[0,1]$. A las 3:15 me dicen que el extremo del minutero debe estar una unidad hacia arriba […] tengo las imágenes de los vectores unitarios que formarían la base de mi reloj (escribe las respectivas coordenadas que son las imágenes de los vectores de la base canónica). Entonces a partir de estos vectores (señala los de la base), teniendo las imágenes de la transformación ya podemos saber la matriz de la transformación.

En el diálogo anterior el investigador identificó que el problema le permitía a e_1 usar su experiencia y lo que conoce sobre relojes para identificar elementos matemáticos. e_1 identifica la información proporcionada en la actividad como vectores. Al ubicarlos en el plano cartesiano y explicarles a sus compañeros cuál era su plan, el investigador evidencia que sus compañeros pueden entender las ideas de e_1. Además, en su explicación el estudiante evidencia pensar en conceptos matemáticos más complejos como base y transformación lineal. Lo anterior, son evidencias que sustentan el cumplimiento del principio de simplicidad y de realidad.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

En una discusión general e_1 comparte con todos los estudiantes y el investigador el plan para encontrar el modelo; este se presentó en el diálogo anterior. Un estudiante de otro grupo, e_3, pregunta a e_1 lo siguiente:

e_3: ¿por qué tomó los puntos que se mueven respecto al origen? La guía decía que si eran las doce … debería estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha. ¿Por qué no la tomo desde el origen?

e_1: porque me dice que me ubique en las doce […] y que el punto de referencia es el centro del reloj circular.

I: ¿Los demás cómo consideraron la referencia para ubicar e interpretar los puntos en el nuevo diseño?

e_2: También lo tomamos como e_1 … tomando como referencia el punto donde acaba el minutero en cada caso.

En este diálogo se evidencia que no había buena claridad en el enunciado del problema y estaba causando confusión en los estudiantes. A partir de esto se consideró que se debía hacer más explícita la información respecto a las posiciones del minutero en el nuevo diseño, de tal manera que se entendiera.

En otro momento de la sesión de clase los estudiantes en los diferentes grupos expresan haber encontrado un modelo para el nuevo diseño solicitado. El investigador interviene y se desarrolla el siguiente diálogo:

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

I: ¿Con esto tenemos la seguridad de poder conocer cómo cualquier punto del reloj es deformado?

e_1: Si claro […] Simplemente ubico las coordenadas del punto que desee en el modelo circular y le aplico la transformación para obtener las del nuevo modelo.

I: Quiero que piensen en los aspectos que consideraron para plantear el modelo para el nuevo diseño de reloj.

e_1: Yo lo hice con el concepto de base. De que si yo tengo las imágenes [momento de silencio] de mi base [momento de silencio] yo puedo obtener cualquier imagen de mi espacio porque ya sé cómo afectan esa transformación a la base y por lo tanto afectar de alguna manera a cualquier punto del espacio. Ya a partir de estos dos puedo obtener vectores del espacio y obtener las imágenes de cualquier punto del reloj.

Los estudiantes expresan que han construido el modelo para el nuevo diseño del reloj. En el diálogo e_1 afirma que puede tomar cualquier punto del diseño circular y conocer cómo será en el nuevo diseño. La pregunta del investigador se hace con el propósito de conocer la forma de pensar de los estudiantes respecto a la generalidad del modelo que están proponiendo. En su respuesta el estudiante e_1 explica porque su modelo propuesto funciona para cualquier punto seleccionado. En su explicación se refiere a la interacción de los conceptos de base y transformación lineal. Gracias a la concepción Proceso que evidencia el estudiante sobre base y transformación lineal entiende que puede expresar cualquier vector del espacio vectorial en términos de la base y mediante la transformación lineal encontrar su imagen. Lo anterior nos hace pensar que la actividad cumple con los principios de generalización y modelación. Para agregar más evidencia a lo anterior nos remitimos a presentar conclusiones de los estudiantes al trabajar con el modelo, analizar el modelo en GeoGebra y reflexionar sobre este.

Los estudiantes validan sus razonamientos mientras analizan la animación del nuevo reloj presentada en GeoGebra. Ahora pueden referirse no simplemente a un modelo para encontrar cómo cualquier punto puede ser transformado, sino que además pueden identificar y describir transformaciones "especiales" de ciertos vectores. Por ejemplo, la estudiante e_2 expresa lo siguiente "*el primero está en el cuadrante positivo yo puedo encontrar que el otro está en el cuadrante 3 al multiplicarlo por un escalar. Además, puedo obtener sus imágenes al multiplicarlos por un escalar".*

Cuando los estudiantes piensan en lo que debería pasar en otros modelos para que existan posiciones donde los vectores se sobrepongan están utilizando sus reflexiones sobre el modelo inicial como un producto, es decir, pueden hacer predicciones y generalizar para otras situaciones. La explicación del estudiante e_4 sobre las condiciones para otros modelos es la siguiente: "*deberían existir ángulos en los cuales, para cierta cantidad de minutos, la transformación del minutero sea como una multiplicación por un escalar. Por ejemplo, para lo que estábamos hablando ahorita, lo que hacemos es multiplicar a la norma del vector por* 2.62 *y a otros por* 0.38. *En esos casos el ángulo es el mismo".* Por lo tanto, en diferentes momentos desarrollados en la implementación de la enseñanza y algunos de estos presentados anteriormente se puede evidenciar que los estudiantes traen diferentes conceptos matemáticos para abordar la situación presentada. La actividad no pretende que el estudiante responda una situación particular, sino busca que el estudiante reconstruya y construya conceptos matemáticos. Los estudiantes pueden establecer características para nuevos modelos las cuáles se relacionan con el concepto de eigenvalor y eigenvector. De esta manera consideramos que la actividad satisface los principios de construcción de modelos y generalización.

En la Figura 21 se muestra los procedimientos desarrollados por los estudiantes después de haber discutido el modelo. Los estudiantes analizan como encontrar los vectores de posición del minutero circular y el del nuevo diseño. Para esto, reflexionando sobre el modelo usan razones trigonométricas para establecer una relación entre el ángulo y las componentes del vector. Una vez encontrando el vector de posición para 10 minutos utilizan el modelo para encontrar las coordenadas de la posición del minutero en el nuevo diseño. Los estudiantes expresan que este razonamiento muestra cómo funciona el modelo con otros puntos del reloj circular. En las notas de campo se registró que los estudiantes usaban los vectores canónicos para verificar si el modelo propuesto era válido con las condiciones propuestas al igual que el razonamiento presentado en la sección 4.2. Lo anterior muestra evidencias que los estudiantes pueden analizar sus progresos con el modelo y dar evidencias que sus razonamientos se pueden verificar. La evidencia recolectada nos permite afirmar que la actividad también cumple con el principio de autoevaluación. Además, la reflexión sobre este principio nos sugiere que es factible transformar el ítem 2 como una condición inicial del modelo para la implementación abierta de la actividad.

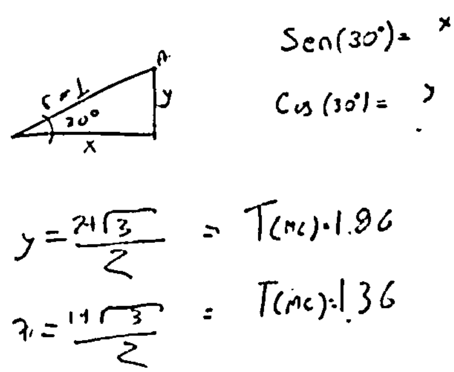


Figura 21: Procedimientos de e_4 para determinar la posición del minutero en el nuevo diseño de reloj a los 20 minutos.

El análisis de las hojas de trabajo de los estudiantes junto con las videograbaciones realizadas muestra evidencias que la actividad permite que los estudiantes registren sus avances y su forma de pensar ya sea de forma verbal o escrita. Por otra parte, la solicitud de escribir características para otros modelos mediante bosquejos permite al investigador o profesor acceder a las construcciones que los estudiantes realizan. Esto se relaciona con el principio de documentación, de manera que se encontraron evidencias del cumplimiento de los principios de la teoría de Modelos y Modelación para la actividad diseñada.

La situación de diseño de un nuevo reloj en las dos intervenciones solicitaba a los estudiantes construir un modelo, sin embargo, se presentaban preguntas puntuales con el propósito de investigar la posibilidad de proponer la situación de forma abierta y verificar el cumplimiento de los principios. Respecto al uso del archivo en GeoGebra consideramos que en la versión abierta se presentaría cuando fuera pertinente. La versión abierta del problema se presenta a continuación.

4.3.3 El problema de modelación "diseño de un nuevo reloj". Una empresa está interesada en crear nuevos diseños de relojes. A usted le han solicitado diseñar un nuevo modelo de reloj cuyo contorno es en forma de elipse a partir de otro circular con 1 decímetro de radio. Si se considera el centro del reloj circular como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el nuevo diseño serían los siguientes:

a). Si son las 12:00, la ubicación del extremo superior del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha respecto al extremo del minutero del reloj circular.

b). Si son las 3:15, la ubicación del extremo derecho del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba respecto al extremo derecho del minutero del reloj circular.

c). Si en el reloj circular se indica 10 minutos, los minuteros de los dos diseños no pueden estar sobrepuestos.

La empresa se comunicará con usted cuando lo considere necesario. El trabajo que usted debe realizar es:

1) Encontrar un modelo para el nuevo diseño que describa como es transformado cualquier punto del reloj circular y si es el caso, explicar en qué posiciones los minuteros se sobreponen y que relación guardan.
2) Proponer otros modelos de reloj en forma de elipse tal que existan posiciones donde los minuteros se sobrepongan. Mostrar ilustraciones, describir características y condiciones para que esto ocurra.

A continuación, se menciona una descripción sobre cómo ocurren los principios de la teoría de Modelos y Modelación en la actividad de diseño de un nuevo reloj.

4.3.4 Evidencias de los seis principios de la teoría de Modelos y Modelación en la actividad "diseño de un nuevo reloj". *Principio de simplicidad:* La situación es accesible a los estudiantes en el sentido que los elementos que involucra son comprensibles y conocidos. La situación posibilita incluir conceptos matemáticos más complejos de forma progresiva. Los estudiantes pueden dibujar los minuteros de los relojes, asociarlos con vectores en $\mathbb{R}^2$ y luego incluir conceptos como transformación lineal y base.

Principio de realidad: Los estudiantes pueden dar sentido al problema mediante el uso de gráficos o representaciones geométricas, además, pueden reconocer la necesidad de usar sus conocimientos matemáticos para avanzar en la situación. Diseñar un nuevo reloj puede ser una situación poco común para los estudiantes, sin embargo, los estudiantes están familiarizados con las partes de un reloj y cómo funciona, de manera que pueden traer sus experiencias al problema propuesto. Este problema de modelación no implica una respuesta trivial, por el contrario, se necesitan conceptos matemáticos avanzados.

Principio de construcción de modelos: la situación propuesta requiere transformar una situación real en lenguaje matemático. Los estudiantes pueden reconocer en diferentes momentos la necesidad de justificar y predecir, esto les permite traer a la situación otros conceptos matemáticos. Los estudiantes pueden considerar la transformación lineal como un modelo, actuar sobre este para buscar describir mejor la situación planteada y establecer condiciones para la existencia de posiciones en la cual los minuteros de ambos diseños se sobrepongan. Esto en términos matemáticos es que los vectores estén sobre una misma recta. De esta manera los estudiantes pueden trabajar con eigenvalores y eigenvectores mediante las representaciones de la transformación líneal.

Principio de generalización: mediante el trabajo con la actividad de modelación los estudiantes pueden considerar diferentes transformaciones lineales como modelos para los diseños de reloj en forma de elipse. Pueden pensar en vectores en el espacio vectorial dominio tal que su deformación se puede describir mediante un múltiplo escalar. Las discusiones entre los estudiantes y el profesor se pueden enfocar en determinar formas para encontrar dichos vectores (eigenvectores) y los escalares (eigenvalores) para un operador lineal dado, así como determinar condiciones sobre la existencia de tales vectores y escalares. La actividad de modelación fomenta en los estudiantes el estudio de un nuevo concepto matemático.

Principio de autoevaluación: en el problema el estudiante analiza si existen posiciones donde los minuteros de ambos diseños se sobrepongan. Las condiciones propuestas en el enunciado del problema pueden ser usadas tanto en la construcción como evaluación y verificación del problema. Por ejemplo, la condición que en 10 minutos los minuteros no pueden estar superpuestos permite que los estudiantes evalúen si el modelo encontrado satisface tal condición. Lo anterior también posibilita considerar la necesidad de refinar el modelo con el propósito que se pueda describir dicha situación.

Principio de documentación: el problema favorece la discusión entre los estudiantes y el profesor. Los estudiantes pueden expresar sus razonamientos, conjeturas y el modelo que describe el nuevo diseño del reloj de manera verbal. Por otra parte, se solicita a los estudiantes hacer ilustraciones, describir y establecer condiciones. Lo anterior fomenta que los estudiantes busquen expresar su forma de pensamiento en sus producciones escritas. Esto permite al profesor e investigador conocer las estructuras mentales involucradas.

4.3.5 Algunas reflexiones sobre el pilotaje de las actividades específicas. En la primera parte de la sección 4.3 se hizo referencia a la implementación piloto con el propósito de mejorar el diseño de las actividades específicas. Sin ser exhaustivos en las reflexiones, dado que, no se presenta una descripción y análisis de episodios desarrollados sobre tales actividades como se hizo para la versión refinada de la actividad de “Diseño de un nuevo reloj”, el objetivo es clarificar en forma breve mediante dos aspectos los aportes de la implementación piloto para las actividades específicas.

Selección de las transformaciones lineales pertinentes para el diseño de actividades y la secuencia de las mismas

En la implementación piloto se identificó que, dado que los eigenvalores asociados al modelo del problema “Diseño de un nuevo reloj” eran positivos, las transformaciones o matrices seleccionadas para las primeras actividades preferiblemente deberían tener eigenvalores negativos o particularmente el cero. Lo anterior está relacionado con considerar matrices asociadas a transformaciones lineales cuyos vectores renglón o columna sean combinaciones lineales y garantizar que la imagen era escalada a una dimensión inferior. Por otra parte, la implementación piloto fue clave en la toma de decisiones sobre la organización de cada actividad para su presentación en las guías de instrucción como en los talleres.

Sobre las preguntas o ítems en las actividades especificas

La implementación piloto fue muy importante para reflexionar sobre las formas de preguntar en las actividades específicas. Consideramos como un aspecto importante la claridad de los enunciados y lo solicitado en cada caso. Después de la implementación piloto se realizaron ajustes a algunas actividades específicas, se determinó diseñar actividades con indicaciones externas bien precisas después del trabajo con el problema de modelación y posteriormente actividades o tareas abiertas, es decir, los estudiantes podían utilizar diferentes estrategias y razonamientos para solucionarlas. Lo anterior, es acorde con lo propuesto por la teoría APOE dado que un avance en la comprensión de un concepto matemático está relacionado con la no dependencia de indicaciones externas y la realización de Acciones totalmente internas. A partir de las reflexiones en esta implementación se consideró para la instrucción tres tipos de “materiales”: i) guías de instrucción, contienen actividades específicas que de forma guiada orientan al estudiante para su desarrollo; ii) problemas de modelación, presenta una situación retadora que propicia generación de nuevos conocimientos; iii) talleres, contiene actividades o preguntas abiertas donde el estudiante puede movilizar diferentes estrategias de solución.

4.4 Elaboración de un diseño de clase para el concepto de eigenvalor y eigenvector en un primer curso de álgebra lineal desde la perspectiva de la teoria APOE

Elaborar un diseño instruccional o un diseño de clase puede incluir diferentes aspectos, Belloch (2013) muestra varias definiciones donde se destaca la planeación, preparación de recursos y materiales, implementación de la enseñanza y la evaluación.

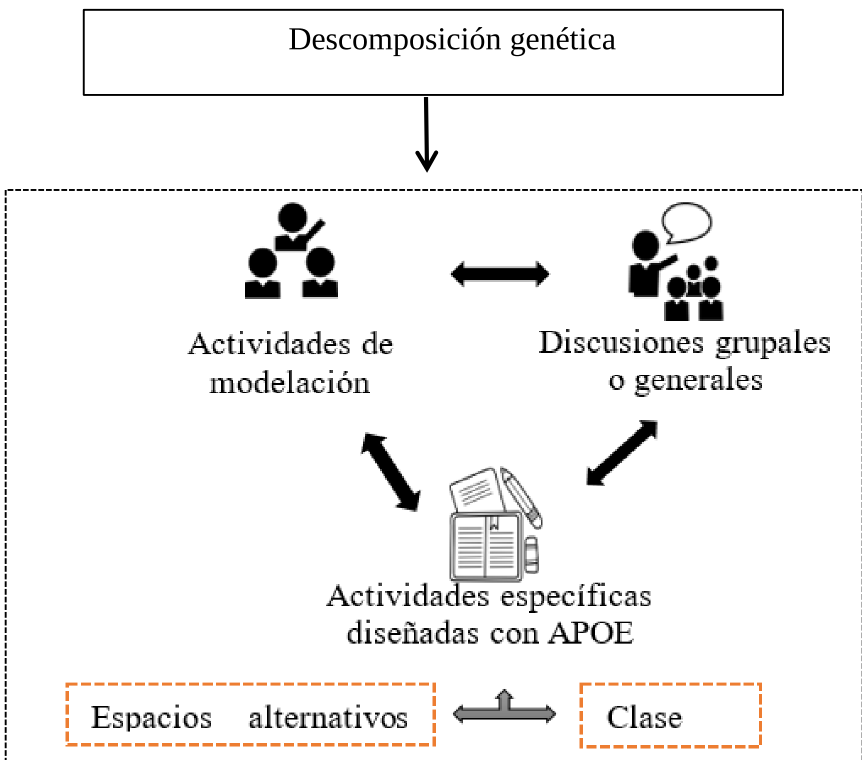


Figura 22: La descomposición genética en el diseño de instrucción. (Adaptado de Arnon et al., 2014)

El diseño y la implementación de la enseñanza para un concepto desde la teoría APOE se realiza a la luz de una descomposición genetica del concepto. El diseño de cada tarea y/o actividad se hace con el proposito de motivar las Acciones identificadas como necesarias en la descomposición genética. Mas especificamente diversas tareas pueden estar enfocadas en realizar diferentes Acciones, tanto geométricas como algebraicas. Las tareas y/o actividades preparadas deben fomentar la inteorización descrita en la descomposición genética, al igual que, promover la coordinación de los respectivos Procesos. En suma, el diseño de instrucción orientado por la descomposición genética debe garantizar la interiorización de Acciones, coordinación de Procesos, la Encapsulación de Procesos, etc (Trigueros y Oktaç, 2019).

La descomposición genética no solo esta presente en el diseño de cada tarea, afecta directamente a cada componente del ciclo de instrucción. En la Figura 22 la flecha que va desde descomposición genética hasta el ciclo de instrucción indica que las actividades propuestas para discutir en pequeños grupos por los estudiantes fueron elaboradas acorde a lo descrito por la descomposición genética. Las discusiones generales que lidera el profesor deben fomentar la reflexión y la discusión con el propósito que los estudiantes realicen sus propias construcciones del concepto, además, el profesor debe ser consciente de las construcciones que promueve cada actividad, de manera que pueda realizar preguntas que complemente lo propuesto y asignar tareas respectivas para fortalecer las construcciones que se han comenzado a formar.

La descomposición genética que orienta el diseño de clase se describió en la etapa de análisis teórico, sección 3.5. Dado que en un primer curso de álgebra lineal básicamente se abordan los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, se acotó el diseño de las actividades y tareas a los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$. A continuación, se precisa las construcciones previas consideradas para la instrucción en un primer curso regular de álgebra lineal.

Sobre las construcciones previas en $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$*:* un nivel *inter* para el Esquema de transformación lineal acotado a los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ y $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$ implica que el estudiante puede establecer relaciones entre conceptos involucrados al estudiar las transformaciones lineales como son: base, matriz asociada, espacio nulo y determinante; los cuales se requieren en una concepción Proceso.

Una concepción Proceso de base le permite al estudiante expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como una combinación lineal de los vectores de la base. Esta forma dinámica de pensar respecto a los elementos de dichos espacios vectoriales puede coordinarse con el Proceso de Transformación lineal para entender que basta conocer como son transformados los vectores de una base para conocer cómo se transforma cualquier otro vector del dominio de la transformación (González-Rojas y Roa-Fuentes, 2017). Respecto a este tipo de construcciones se diseñaron tareas en las cuales se presentaba una figura y su deformación y se solicitaba encontrar tal transformación lineal que deforma la figura.

El concepto de matriz asociada a una transformación lineal según Trigueros et al., (2015) puede construirse mediante la coordinación de los Procesos de base, transformación lineal y matriz. Dado que principalmente se usará las bases canónicas de los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el Proceso de vector de coordenadas relativo a una base considerado por Trigueros et al., (2015) no se exige en este caso.

Por otra parte, consideramos que una concepción Proceso de determinante asociada a dichos espacios vectoriales permite que el estudiante pueda pensar en el determinante de una matriz asociada a un operador sin actuar de manera externa sobre esta, por ejemplo, si una columna o fila de una matriz es combinación lineal de otras entonces su determinante es cero.

Otra de las construcciones previas referidas en la descomposición genética preliminar (ver Figura 11) es el Esquema de espacio vectorial. Sin embargo, como lo expresan Parraguez y Oktaç (2010) dicho Esquema en un nivel *inter* permite establecer relaciones con otros conceptos como subespacios, transformaciones lineales, entre otros. Anteriormente se ha especificado que el diseño de clase se ha acotado a los espacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. De modo que, adicional a lo descrito en líneas anteriores una concepción Proceso de múltiplo escalar implica relacionar dicha transformación con la colinealidad entre los vectores; los vectores pueden ser escalados conservando su dirección o escalados y rotados 180° (Yañez, 2015). Aunque principalmente los escalares son números reales, en el diseño se promove el uso de escalares complejos.

Una concepción Objeto de vector en los espacios de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ está asociado con la idea de n −tupla y poder aplicar transformaciones sobre está. El estudiante debe entender que las transformaciones aplicadas sobre una n −tupla puede producir un vector que no está en el espacio vectorial de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ sino que tal transformación le asocia a una n −tupla una m −tupla. La transformación de un vector bajo un operador lineal, multiplicar el vector por una matriz cuadrada o actuar sobre el vector bajo la operación binaria múltiplo escalar, en todas estas situaciones el estudiante debe reconocer que el vector resultante es un elemento del mismo espacio vectorial.

4.4.1 Sobre la organización del curso y el libro de texto. El diseño de clase en esta investigacion se enmarcó bajo los parametros generales recomendados por la institución de educación superior donde se desarrolló la instrucción. Aunque el diseño de clase al cual nos referimos en este estudio corresponde a un concepto especifico de álgebra lineal, a saber, el concepto de eigevalor y eigenvector, a continuación se describe en forma breve la organización teórica del curso.

El programa de álgebra lineal I ofrecido por la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander considera como objetivos generales del curso propiciar en el estudiante la capacidad de formalizar algebraicamente situaciones geometricas, de la ciencia y de la tecnologia y analizar ejemplos básicos de las estructuras de espacio vectorial. En el programa de álgebra lineal I se incluyen cuatro posibles organizaciones del curso, entre estas se encuentra la denominada “Organización Moderna”, inspirada en la estructura del libro de texto de Poole (2011).

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

La instrucción en el curso se desarrolló usando la organización Moderna, por tal razón, el principal libro de apoyo tanto para los estudiantes como el profesor fue el libro de texto de Poole (2011). El profesor a cargo del curso en oportunidades anteriores había realizado la instrucción usando dicho libro. Previo al desarrollo de la instrucción se determinó que la perspectiva del texto era acorde para introducción el estudio de eigenvalores y eigenvectores en un primer curso de álgebra lineal. Además, algunos conceptos considerados como requisitos para el aprendizaje del concepto en la descomposición genética preliminar eran desarrollados en secciones anteriores a la de eigenvalores y eigenvectores.

En el capítulo 1 del texto el enfoque principal es el estudio de vectores, su geometría y álgebra. Los ejemplos y problemas propuestos se enfocan en mostrar las propiedades que cumple los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para posteriormente generalizarla para $\mathbb{R}^n$. A partir de esto se introducen las primeras ideas de espacio vectorial basicamente para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Se define el concepto de combinación lineal y los conceptos de rectas y planos fortalecen su interpretación geométrica. El capítulo 2 dedicado a los sistemas de ecuaciones lineales usan la interpretación geométrica de planos y rectas para ilustrar los tipos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales. Los problemas de dependencia e independencia entre vectores empiezan hacer estudiados desde este capítulo mediante el estudio particular de los sistemas homogeneos. De igual manera los conceptos de conjunto generador y espacio generado son introducidos al final del capítulo.

El capítulo 3 es dedicado al estudio de las matrices, operaciones y el estudio de sus propiedades. Estas propiedades se ponen en relación con las identificadas para $\mathbb{R}^n$, los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generado y espacio generado se estudian ahora para las matrices. La parte final del capítulo esta destinada a introducir los conceptos de subespacio, base y transformación lineal al tiempo que se muestra el espacio nulo como un subespacio vectorial y se trabaja con la representación matricial de la transformación relativa a la base canonica de $\mathbb{R}^{n}$. Aunque el estudio del determinante se presenta en el siguiente capítulo. La idea de determinante se introduce en el capítulo 3 con el proposito de caracterizar las matrices invertibles mediante un valor escalar.

El capítulo 4 dedicado al estudio de eigenvalores y eigenvectores se define y presenta para matrices cuadradas. El estudio del determinante es motivado por el estudio y generalizacion del polinomio característico de matrices cuadradas. Es precisamente en la instrucción de este concepto que el diseño de clase asume un rol principal.

4.4.2 Análisis a priori de las actividades de instrucción e instrumentos de investigación. El análisis a priori de las actividades de instrucción e instrumentos de investigación es un elemento clave para la instrucción y la investigación misma. Desde el punto de vista para un docente, el análisis a priori le permite tener claridad sobre la instrucción, organizar las preguntas, comentarios o actividades complementarias con el propósito que los estudiantes construyan nuevos conocimientos matemáticos. Ahora, para el investigador es una reflexión teórica inicial que actúa como una lente para entender y explicar los datos obtenidos. A continuación, presentamos el análisis a priori de las actividades de instrucción que a la vez fungen como instrumentos de investigación.

Algunas tareas sobre construcciones previas

1. Considere la siguiente función P definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ mediante la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ donde P se define como $P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   a). Determine si P es una transformación lineal. **Justifique su respuesta.**

b). Considere $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $A_{n\times m}$ una matriz. ¿ $F(v) = Av$ define una transformación lineal? **Justifique su respuesta**

En esta situación se usa un ejemplo en particular para motivar la pregunta general presentada en el ítem b) acerca de la matriz como una transformación lineal. Se considera que los estudiantes requieren una concepción Proceso de transformación lineal para mostrar el cumplimiento de las condiciones de linealidad de la matriz A. Si el estudiante verifica las condiciones de linealidad considerando vectores específicos y un escalar, diremos que el estudiante tiene una concepción Acción de transformación lineal. En el ítem b) el estudiante necesitaría una concepción Proceso de transformación lineal y objeto de matriz para mostrar que las condiciones de linealidad son válidas en matrices según las propiedades distributiva respecto a la suma y asociativa respecto al múltiplo escalar. Básicamente la intención es mostrar la relación entre matrices y transformaciones lineales definidas en espacios de dimensión finita; relación que será recurrente en las diferentes actividades y tareas a desarrollar.

2. Sea M: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y B $= \{[1,0],[0,1]\}$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$. M es una transformación lineal tal que M$[1,0] = [1,1]$ y M$[0,1] = [1,-1]$.

a). Determine $M[2,3]$ y $M[-3,1]$. ¿Es posible determinar la imagen de cualquier otro vector en $\mathbb{R}^2$? **Justifique su respuesta.**

b). Encuentre una representación matricial para M.

c). Encuentre $M[x,y]$. ¿Existe otra transformación lineal M, diferente a la encontrada, que satisface las mismas condiciones mencionadas? **Justifique su respuesta**

En esta situación se planea evidenciar el concepto de base como elemento clave en la relación entre matrices y transformaciones lineales, básicamente en el ítem b) una concepción Proceso de matriz asociada a una transformación lineal le permite a un estudiante encontrar dicha representación. En el ítem a) y c) un estudiante necesitaría una concepción Proceso de base para entender que existen escalares tal que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base dada y mediante la concepción Proceso de transformación lineal determinar la imagen de cualquier vector. La reflexión planteada en el ítem (c) busca llevar a identificar que una transformación lineal queda determinada mediante las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial dominio.

Actividades específicas diseñadas para apoyar las construcciones necesarias presentadas en guías de instrucción

1. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, un operador lineal definido por: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - 2y \\ -2x - 2y \end{bmatrix}$.

    a). Considere los vectores $u_1 = [2, -1]; u_2 = [-3,3]; u_3 = [1,1]$. Encuentre los vectores $T(u_1); T(u_2); T(u_3)$.

    b). ubique en planos cartesianos cada vector u_i con su respectiva imagen bajo T. ¿Qué relación geométrica se tiene con cada par de vectores u_i y $T(u_i)$? ¿Cuál(es) vector(es) es(son) eigenvector(es) de T?

    c). ¿Existen otros eigenvectores para el operador lineal T? Si es así, ¿Cuáles son? **Justifique su respuesta.**

    d). ¿2 es otro eigenvalor para el operador lineal T?, Si es así, ¿Cuáles son los eigenvectores asociados?

El propósito de esta tarea es permitir que el estudiante trabaje con eigenvalores y eigenvectores en las representaciones algebraicas y geométricas. Al encontrar las imágenes de varios vectores del dominio del operador lineal y graficar los vectores u_i y $T(u_i)$ en respectivos planos cartesianos, el estudiante puede identificar aquellos casos en los cuales u_i y $T(u_i)$ son vectores colineales. En la actividad de modelación los eigenvectores tenían la misma dirección que su imagen bajo el operador lineal. En esta tarea se garantizó que existiera un eigenvector con eigenvalor negativo. Otro de los eigenvectores tiene al 0 como eigenvalor asociado, se espera provocar una discusión respecto a si el vector cero puede ser un eigenvector.

En el ítem c) se espera motivar al estudiante a encontrar otros eigenvectores específicos con el propósito que reflexione sobre eigenvectores asociados a un mismo eigenvalor. El ítem d). es una pregunta que puede confrontar las ideas del estudiante sobre los eigenvalores de un operador lineal. Es posible que el estudiante en el ítem anterior encuentre una cantidad finita o infinita de eigenvectores, la pregunta puede motivar la reflexión sobre la existencia de vectores v tal que $T(v) = 2v$. Se espera motivar la interiorización de la Acción de mostrar soluciones no nulas a ecuaciones de la forma $T(v) = \lambda_0 v$, donde λ_0 son valores específicos.

2. Sea $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal cuya representación matricial respecto a la base canónica está dada por la matriz C.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a). Determine $Nul(C)$ y $\det(C)$.

b). ¿Existe una relación entre $Nul(C)$ y $\det(C)$?

c). Seleccione vectores $w \in Nul(C)$, ¿w es un eigenvalor de C?

d). Suponga que $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un operador lineal cuya representación matricial respecto a una base es la matriz M. ¿Todo vector diferente de cero en el espacio nulo de M es un eigenvector?

En esta tarea se busca motivar la coordinación de los Procesos de espacio nulo y determinante de una representación matricial de un operador lineal. Se busca que los estudiantes reconozcan que si $\det(C) = 0$ entonces, $Nul(C) \neq \{0\}$. En el ítem c). el estudiante puede seleccionar los vectores que él considere para analizar si son eigenvectores del operador y mostrar que 0 es el respectivo eigenvalor . La intención de proponer un operador lineal cuyo espacio nulo sea diferente del vector cero es favorecer la discusión sobre 0 como eigenvalor y utilizar esto para enfocar la reflexión de los estudiantes sobre el $Nul(P - \lambda I)$ cuando $\lambda = 0$ y las soluciones de la ecuación $P(w) = 0w$. Consideramos que la reflexión sobre las preguntas propuestas en esta tarea y la anterior puede favorecer al estudiante a reconocer que el vector cero no puede ser un eigenvector de un operador lineal y, que el escalar 0 si puede ser un eigenvalor de un operador lineal.

3. Considere el operador lineal $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$.

a). Sea $E = \{[x, y]: x = -y; x, y \in \mathbb{R}\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$. ¿Todo vector $w \in E$ es un eigenvector de H? **Justifique su respuesta**

b). Sea $u = [3,3]$, ¿Existe un escalar λ tal que $H(u) = \lambda u$? ¿u es un eigenvector? **Justifique su respuesta**

c). ¿cualquier múltiplo escalar de u es un eigenvector de H? Si es así, ¿Cuál(es) es(son) el(los) eigenvalor (es) asociado(s)? **Justifique su respuesta**

d). Considere el operador lineal $H - 5I: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, I el operador identidad. Encuentre $Nul(H - 5I)$ y $\det(H - 5I)$. ¿Existe una relación entre $Nul(H - 5I)$ y $\det(H - 5I)$?

e). ¿Todo vector del espacio nulo de $H - 5I$ es un eigenvector de H? **Justifique su respuesta**

f). Considere ahora $H - 4I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ¿$4$ es un eigenvalor de H? **Justifique su respuesta**

La tarea tiene una relación estrecha con la anterior. El propósito es motivar la reflexión de los estudiantes sobre diferentes aspectos de eigenvalores y eigenvectores. En los ítems a). b). y c). se pregunta por eigenvalores y eigenvectores del operador lineal H usando diferentes formas y representaciones. En el ítem a). no se proporcionan vectores específicos sino un conjunto de vectores con una característica. Esta situación busca fomentar la reflexión de los estudiantes sobre eigenvectores, motivar la realización de Acciones sobre vectores generales mediante el operador lineal y establecer que a un eigenvalor le corresponden infinitos eigenvectores. Un estudiante que está transitando a una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector puede actuar sobre un vector representante del conjunto E y justificar que todos los vectores son eigenvectores con -1 como respectivo eigenvalor . Con los ítems b). y c). se busca analizar y caracterizar de forma algebraica eigenvectores asociados a un mismo eigenvalor.

Los ítems d). e). y f). buscan motivar la coordinación entre los Procesos descritos en la descomposición genética que involucran el concepto de espacio nulo y el determinante. Se espera que los estudiantes puedan establecer condiciones sobre la existencia de eigenvalores y eigenvectores, identifiquen que $\det(H - 5I) = 0$ y utilizarlo para explicar que $Nul(H - 5I) \neq 0$. Mediante la pregunta del ítem e). se busca que los estudiantes reconozcan que todo vector no nulo de $Nul(H - 5I)$ es un eigenvalor de H con correspondiente eigenvalor 5. La discusión entre los estudiantes y el profesor debe enfocarse en reflexionar sobre la ecuación $H(v) = 5v$ y sus soluciones en $Nul(H - 5I)$. La pregunta en el ítem f). busca confrontar al estudiante frente a la ecuación $H(v) = 4v$ y $Nul(H - 4I)$ para favorecer la compresión de la relación de contenencia entre elementos los vectores solución de la ecuación $H(v) = 4v$ y el conjunto de vectores en $Nul(H - 4I)$.

4. Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a un operador lineal $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a su base canónica. El operador lineal modela la transformación que sufre los vectores con centro en el origen y de radio 1. En la Figura (23) se muestra la transformación de algunos vectores, la imagen de cada vector azul v se ha ubicado en el punto final de este.

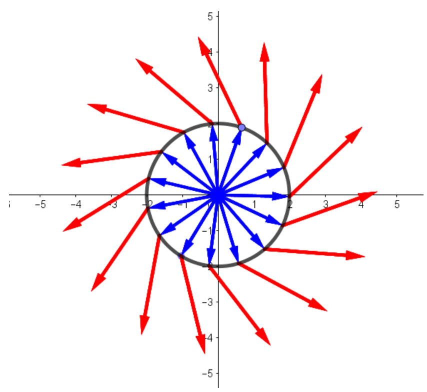


Figura 23: Transformación de ciertos vectores bajo el operador lineal K.

a) Analice la Figura (23), ¿Existen eigenvectores y eigenvalores para el operador lineal K? Si es así, ¿Cuáles son?

b) Sea λ un escalar, el **polinomio característico de una matriz** $A_{n\times n}$ se define como $\det(M - \lambda I)$, donde I es la matriz identidad $n \times n$. Encuentre el polinomio característico de M.

c) ¿Para qué valores de λ en los reales la ecuación matricial $(M - \lambda I)v = 0$ tiene soluciones diferentes del vector cero? Si $\lambda \in \mathbb{C}$, ¿Existen eigenvalor es y eigenvectores para el operador lineal K sobre los complejos?

Las tareas anteriores se diseñaron con el propósito que los estudiantes realicen las coordinaciones entre la Acción interiorizada de comparar $T(v_0)$ y $\lambda_0 v_0$ bajo la igualdad y el Proceso de espacio nulo. El nuevo Proceso de la coordinación anterior es coordinado con el proceso de determinante de una matriz con el propósito de discutir con los estudiantes las condiciones sobre la existencia de eigenvalores y eigenvectores. A partir de lo anterior se espera institucionalizar el concepto de polinomio característico y ecuación característica. Como resultado de las coordinaciones mencionadas, los estudiantes pueden usar y entender la ecuación $\mathrm{p}(\lambda) = 0$ para determinar los eigenvalores asociados del operador lineal K. La discusión sobre existencia de raíces λ_0 del polinomio característico sobre el campo de los complejos busca motivar la relación de existencia de eigenvalores y eigenvectores entorno al campo sobre el cuál se toman los escalares del espacio vectorial.

5. Sea $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal tal que: $G[1,0,0] = [3,0,0], G[0,1,0] = [-2,2,0]$ y $G[0,0,1] = [1,5,1]$.
   a) Determine la representación matricial de G respecto a la base canónica.
   b) ¿Cuáles son los eigenvalores del operador lineal G?
   c) Sea $T: V \to V$ un operador lineal y λ un eigenvalor , el **eigenespacio $\boldsymbol{E_\lambda}$** asociado al eigenvalor λ se define como: $E_\lambda = \{v \in V: T(v) = \lambda v\}$. Determine los eigenespacios asociados a los respectivos eigenvalores de G.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Los ítems presentados en las tareas anteriores muestran una secuencia de preguntas donde se busca orientar la construcción del concepto de eigenvalor por parte del estudiante. En la medida que el estudiante pase de depender de indicaciones externas, puede enfrentar problemas o situaciones más complejas. En esta tarea se define el operador lineal a partir de las imágenes de los vectores de la base, esto con el propósito de motivar el estudio de eigenvalores y eigenvectores mediante diferentes representaciones de un operador lineal. En el ítem a). los estudiantes pueden encontrar una representación matricial del operador lineal dado y usar dicha representación en el ítem b). para estudiar cuáles son los eigenvalores de G. Aunque en las tareas anteriores los estudiantes pueden haber pensado en todos los eigenvectores asociados a un eigenvector, es en esta tarea donde se nombra al conjunto solución de la ecuación $T(v) = \lambda_0 v$ como el eigenespacio asociado al eigenvalor λ_0, conjunto que contiene todo los eigenvectores asociados a λ_0 incluyendo el vector cero.

Las preguntas incluidas en esta tarea son similares a las encontradas en los libros de textos, sin embargo, por la instrucción realiza utilizando las tareas anteriores y las construcciones mentales que puedan emergen en los estudiantes, las preguntas no buscan repetir un algoritmo, al contrario, tener evidencias que los estudiantes puedan comprender y argumentar sus razonamientos. También, se espera motivar la discusión con los estudiantes sobre los eigenvalores y eigenvectores de representaciones matriciales triangulares.

Algunas actividades específicas del taller

1. Sea M la matriz de un operador lineal definida en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tal que

$M = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. $v_1 = [-12,10], v_2 = [-2,-2], v_3 = [1,3]$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Explique de forma geométrica si los vectores dados son eigenvalores de M. ¿Qué significa geométricamente que un eigenvector tiene por eigenvalor $-\frac{1}{2}$?

Esta pregunta del taller pretende motivar la reflexión de los estudiantes sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector en el contexto geométrico. Entender porque la colinealidad entre un vector w y su imagen $F(w)$ bajo el operador lineal F definido como $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, muestra que w es un eigenvector de F. Por otra parte, busca que el estudiante reconozca una interpretación geométrica adecuada de la expresión: "el eigenvector w de F tiene por eigenvalor asociado a λ_0". Lo anterior implica entender que: la norma del vector $F(w)$ es múltiplo escalar de la norma del vector w y el factor de escala es $|\lambda_0|$.

2. Considere la matriz $D = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $Dv = -2v$? ¿-2 es un eigenvalor de D? ¿Existen otros eigenvalores para D? Si es así, ¿Cuáles son?

Las dos primeras preguntas de este punto pretenden motivar la reflexión del estudiante sobre la relación entre encontrar las soluciones de la ecuación de la forma $Du = \lambda_0 u$, donde la matriz D y el escalar λ_0 son conocidos, con analizar si el escalar λ_0 es un eigenvalor de D. Consideramos que la evolución en la construcción del concepto de interés se relaciona con la capacidad del estudiante de poder establecer equivalencias entre ciertas situaciones o expresiones y tener un control interno de ciertas Acciones. Cuestionar la existencia de otros eigenvalores pretende fomentar la construcción sobre la totalidad de los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal.

3. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por $F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y+z \\ 2y+2z \\ 3z \end{bmatrix}$

a) ¿3 es un eigenvalor de F?

b) Encuentre las raíces del polinomio característico de la matriz asociada a F respecto a la base canónica. ¿Cuáles son sus multiplicidades?

c) Encuentre todos los eigenespacios asociados a los respectivos eigenvectores de F. ¿Los eigenespacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

d). ¿Cuáles serán los eigenvalores de una matriz 3×3 que sea triangular inferior?

La búsqueda de eigenvalores y eigenvectores de diferentes operadores lineales permite centrar la atención en ciertos operadores lineales donde se conoce una representación matricial triangular. Los estudiantes pueden haber trabajado con este tipo de representaciones matriciales y no haber reflexionado sobre la relación entre las entradas de la diagonal principal y los eigenvalores del operador. La reflexión a partir de las preguntas de esta situación propuesta pretende que los estudiantes puedan interiorizar la Acción de determinar soluciones a la ecuación de la forma $Fv = \lambda_0 v$, donde F y λ_0 son conocidos.

Los estudiantes pueden haber encontrado el conjunto solución de ecuaciones de la forma $Fv = \lambda_0 v$, sin embargo, no pueden haber identificado la estructura de dicho conjunto. Se espera mediante el ítem c). motivar la reflexión para reconocer a los eigenespacios asociados a determinados eigenvalores como subespacios vectoriales del espacio vectorial sobre el cuál se define el operador lineal F.

4. Sea $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

a) Analice la matriz M y sin hacer operaciones explique si la matriz tiene por eigenvalor al cero. **Justifique su respuesta**

b) Analice la siguiente ecuación $Mx = x$, ¿Es válido afirmar que el conjunto solución de la ecuación es infinito? **Justifique su respuesta**

Este punto fue diseñado con el propósito de enfrentar a los estudiantes a situaciones donde se requieren Acciones interiorizadas y la coordinación de algunos procesos. El ítem a). puede involucrar realizar justificaciones que no proviene de un procedimiento calculatorio. Los estudiantes pueden analizar los vectores columna o renglón que componen la matriz para describir parte de la transformación que sufren algunos vectores del domino de la transformación sin la necesidad de realizar los cálculos. Argumentos relacionados con la dependencia entre los vectores columna o renglón de la matriz pueden ser utilizados para explicar que existen soluciones no nulas de la ecuación $Mv = 0$. Este tipo de razonamientos puede ser característico de una concepción Proceso de eigenvalores y eigenvectores. Algunos estudiantes pueden interpretar el enunciado mediante la ecuación $Mv = 0$ con el espacio nulo de la matriz M. En el ítem b). se espera que el estudiante pueda reconocer que la pregunta equivale a determinar si 1 es un eigenvector de M.

4.4.3 Consideraciones para la implementación de la enseñanza. La implementación de la enseñanza implica la puesta en marcha de las respectivas actividades diseñadas, planificando los momentos de cada una y las respectivas estrategias pedagógicas.

La Tabla 2 muestra la planeación de cada una de las sesiones programadas para la intervención en el aula. Mediante la negociación con la profesora encargada del curso, fue posible al investigador garantizar una organización del curso como se ha mencionado en 4.4.1 para introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector en un primer curso de álgebra lineal. Por otra parte, la negociación facilitó la intervención del investigador para desarrollar algunas actividades específicas relacionadas con los conocimientos previos.

Tabla 2: Organización y programación de la implementación de la enseñanza.

#	Fecha	Instrumentos y materiales	Objetivo	Doc.[4]
1	###	Tareas específicas sobre construcciones previas.	Promover las construcciones identificadas en la DG como necesarias para iniciar la construcción de Eigenvalores y Eigenvectores.	Guía 1
2	###	Tareas complementarias sobre construcciones previas	Como espacio complementario, profundizar en construcciones necesarias como: base, matriz de transformación, espacio nulo.	Taller 1
3	###	Problema de Modelación - GeoGebra	Introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector mediante un problema desde la perspectiva de modelos y modelación.	Prob. 1
4	###	Tareas específicas sobre construcciones necesarias parte 1	Promover la realización de las Acciones consideradas necesarias en la DG.	Guía 2
5	###	Tareas específicas sobre construcciones necesarias parte 2	Reflexionar sobre las Acciones consideradas necesarias en la DG y promover las diferentes construcciones	Guía 2
6	###	Tareas específicas con preguntas abiertas que demanden diferentes estrategias de solución parte 1	Propiciar la reflexión y las respectivas interiorizaciones y coordinaciones	Taller 2
7	###	Tareas específicas con preguntas abiertas que demanden diferentes estrategias de solución parte 1	Propiciar la reflexión y las respectivas interiorizaciones y coordinaciones	Taller 2

[4] Estos documentos se presentan en los Apéndices A-E.

La teoría APOE cuenta con un componente pedagógico que orienta la implementación de la enseñanza tal como se describió en la sección 2.3.1. Un aspecto implícito en el componente pedagógico propuesto por la teoría APOE es el rol protagónico del estudiante. Se considera que, mediante la reflexión del estudiante sobre las actividades o situaciones diseñadas por el profesor y las discusiones entre compañeros y profesor es que construye su propio conocimiento. Dubinsky (1997) considera que es importante que el estudiante tenga el tiempo para analizar y reflexionar sobre situaciones que le permitan tener claridad y avanzar en la comprensión de un concepto matemático.

4.4 Entrevista didáctica

Otro instrumento de investigación considerado fue la entrevista didáctica. Este tipo de entrevista es considerada por Oktaç (2019) como una entrevista que brinda información detallada sobre el proceso de aprendizaje. Más precisamente, permite que cuando un estudiante se atasca en una situación o problema o no proporciona una respuesta razonable a una pregunta, podemos dar pistas para provocar el progreso en la construcción de conceptos y motivar conexiones entre diferentes nociones.

A continuación, presentamos las situaciones diseñadas para la entrevista didáctica (Ver Apéndice F) acompañadas por el análisis a priori.

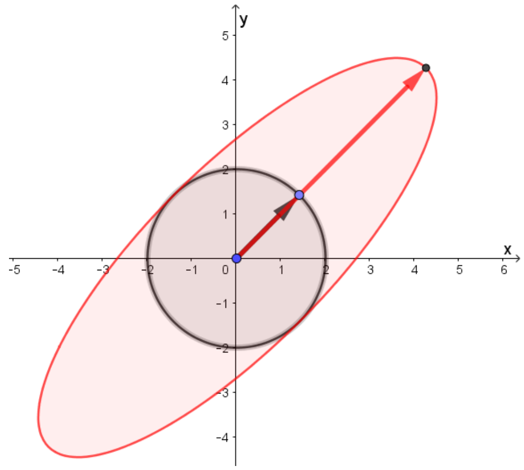


Figura 24: Transformación de un círculo bajo la matriz B

1. Un círculo es deformado mediante un operador lineal representado por la matriz simétrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ convirtiéndolo en una elipse girada. La Figura (24) muestra como es deformado particularmente el vector negro.

   a) ¿El eje principal de la elipse está sobre el generado de un eigenvector de B? **Justifique su respuesta.**

   b) ¿Cuál es la longitud del eje mayor de la elipse? **Justifique su respuesta.**

   c) ¿Es válido afirmar que el eje menor de la elipse está sobre el espacio generado de otro eigenvector de B? **Justifique su respuesta.**

   d) ¿2 es un eigenvalor de B? Si la respuesta es SI, justifique. Si es NO, explique si pueden existir otros eigenvalores diferentes a los encontrados.

Esta pregunta o situación fue diseñada para investigar el pensamiento de los estudiantes sobre el concepto de eigenvector y eigenvalor donde se requieran hacer Acciones e interpretaciones tanto geométricas como algebraicas. El propósito de elegir una matriz simétrica es para garantizar que los eigenvectores correspondan con los ejes de la elipse. Consideramos que este problema con los 4 ítems propuestos corresponde a un problema no rutinario en un libro de texto. Según las concepciones mostradas por el estudiante podemos identificar el avance y profundidad en la comprensión de dicho concepto matemático.

Un estudiante que está transitando a una concepción Proceso de eigenvectores y eigenvalores puede reconocer mediante la relación geométrica de colinealidad que el vector dibujado es una eigenvector del operador B dado que existe un escalar que verifica la igualdad entre los vectores. Si dicha relación y justificación no puede ser evidenciada el estudiante tiene una concepción acción del concepto. Los ítems b). y c). proponen al estudiante realizar acciones geométricas que le permitan reconocer eigenvectores y eigenvalores. Si el estudiante no requiere realizar Acciones para conocer directamente las coordenadas del vector representado y de esta forma conocer la longitud del eje mayor de la elipse, las evidencias mostradas dan cuenta de un tránsito hacia una concepción Proceso.

En el punto d). el estudiante puede aplicar Acciones sobre un nuevo operador $B - 2I$ para analizar su espacio nulo y justificar la existencia de vectores no nulos para probar que realmente 2 es o no un eigenvalor de B. Sin embargo un estudiante que ha desarrollado o evidencia una concepción Proceso, entiende que dado que se tiene una matriz 2×2 y se conocen dos eigenvalores, ya no existen otros; a lo más el polinomio característico tiene dos raíces distintas.

2. Sea

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Una matriz 2×2 tal que la entrada $a_{11} = \alpha$, cualquier número real y las otras entradas los números indicados en la matriz.

a) ¿Qué valor debe tomar α para que la matriz C tenga por eigenvalor a 3? **Justifique su respuesta.**

b) Para el valor de α encontrado, ¿La matriz C tiene otros eigenvalores diferentes a 3? **Justifique su respuesta.**

Esta situación fue propuesta para investigar las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector especialmente en el contexto algebraico. Se diseñó con el propósito de obtener evidencias de una concepción Proceso de dicho concepto. En el ítem a). mediante la estructura Proceso de eigenvalor y eigenvector se puede reconocer que 3 debe ser un eigenvalor de la matriz C y por lo tanto existe un eigenvector no nulo tal que $Cw = 3w$ se verifica. Un estudiante con una concepción Proceso estable puede recurrir a los Procesos que dieron origen al Proceso de eigenvalor y eigenvector, reconocer o establecer condiciones involucrando el espacio nulo o el determinante de $C - 3I$ para garantizar la existencia de 3 como eigenvalor. Las evidencias encontradas pueden proporcionar información o ayudar a explicar las estructuras mentales involucradas en la construcción de Proceso de eigenvalor y eigenvector.

La pregunta del ítem a). es una situación no rutinaria en los libros de textos, al mismo tiempo, novedosa para los estudiantes, pues su diseño difiere de las preguntas o tareas propuestas en la instrucción. Consideramos que esta pregunta puede ofrecer datos relevantes en relación a una concepción Proceso estable, dado que podría involucrar la reversión de ciertos Procesos.

El ítem b). fue incluido con el propósito de buscar evidencias sobre cómo los estudiantes pueden pensar en la totalidad de los eigenvectores y eigenvalores de un operador lineal y qué argumentan al respecto.

3. Sea

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Explique si la matriz D tiene por eigenvalor al 0. Si la respuesta es afirmativa, indique qué características tienen los eigenvectores asociados. Si la respuesta es negativa, justifique.

b) Explique si los vectores $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ son eigenvectores de la matriz D.

c) ¿El vector $w + u$ es un eigenvector de la matriz D? **Justifique su respuesta.**

d) ¿Cuántos eigenvalores tiene la matriz D y cuáles son?

e) ¿Existe una base para $\mathbb{R}^3$ formada por eigenvectores? Escriba su razonamiento.

Aunque en la instrucción no se abordó la estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector, el diseño de estas preguntas pretenden ser un instrumento para obtener información que permita analizar algunas facetas en el tránsito de una estructura Proceso a una Objeto. Esta situación al igual que la anterior involucran principalmente un contexto algebraico, sin embargo, el diseño de las preguntas son diferentes y pueden involucrar otras estructuras mentales.

Los ítems a). y b). se diseñaron para tener más evidencias de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. En el análisis a priori del primer punto de la entrevista se mencionó la necesidad de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector en el contexto geométrico. En el segundo, nos referimos a una concepción Proceso en el contexto algebraico, en el sentido que implica pensar en un eigenvector w arbitrario asociado al eigenvalor 3. Sin embargo, para el ítem a). del punto 3 ahora se necesita argumentar que 0 es un eigenvalor y dar la característica de los eigenvectores asociados. El ítem b). fue pensado para verificar que el estudiante puede hacer algo más que un procedimiento algorítmico, interpretar o reconocer si vectores específicos verifican la condición de ser eigenvectores asociados al eigenvalor 0.

La pregunta por la suma de dos eigenvectores de la matriz D en el ítem c). puede requerir más que una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. El estudiante requiere reconocer que el nuevo vector tiene las mismas características que los dos dados y están relacionados con el mismo eigenvalor, es decir, puede determinar un nuevo objeto de la misma naturaleza mediante la aplicación de ciertas acciones. Según, las repuestas del estudiante se espera plantear preguntas con otros vectores de tal manera que el vector resultante no sea un eigenvector, esto con el propósito de tener información sobre las acciones que el estudiante puede realizar y sus argumentaciones al respecto. En relación a lo anterior el ítem d). se propuso para determinar si el estudiante puede pensar en la totalidad de los eigenvalores y cuestionarle sobre la acción de sumar eigenvectores asociados a diferentes eigenvectores.

Las Acciones sobre el Objeto eigenvalor y eigenvector parecen ser muy complejas por la naturaleza misma del concepto. En el ítem e). la pregunta parece involucrar solo los eigenvectores y la necesidad actuar sobre estos para analizar si forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Se espera identificar en la entrevista o preguntar si el estudiante puede pensar en los eigenvalores asociados con los eigenvectores que conforman dicha base. Aunque no se está preguntando si la matriz es diagonalizable, el determinar una base de eigenvectores para un espacio vectorial de dimensión finita es el problema matemático para abordar la diagonalización.

4.6 Implementación de la enseñanza

La implementación de la enseñanza se realizó en el primer semestre académico del año 2019 en un curso regular de álgebra lineal en la Universidad Industrial de Santander entre los meses de julio y agosto. La cantidad de estudiantes del curso fue de 30 con una intensidad horaria por semana de 4 horas.

La implementación de las actividades diseñadas se desarrolló en 7 sesiones de clase. Las tres primeras sesiones se dedicaron a las construcciones previas y las 4 sesiones restantes a las construcciones necesarias para el concepto de eigenvalor y eigenvector. Las dos sesiones de clase dedicadas al problema de modelación se realizaron en una sala de computo donde cada estudiante disponía de un computador equipado con el software GeoGebra y el archivo prepara por el investigador.

En cada sesión de clase el investigador recolectaba las hojas de trabajo de los estudiantes. Mediante videograbación recolectaba las discusiones que emergían de las discusiones generales de los estudiantes, la profesora y el mismo investigador. Así mismo, mientras los estudiantes trabajan en pequeños grupos en el salón de clase e interactuaban con la profesora y el investigador pasaba por cada grupo con sus notas de campo para registrar los progresos, estancamiento o dificultades que evidenciaban los estudiantes. Finalizada cada sesión el investigador y la profesora discutían al respecto y el investigador rastreaba en las hojas de trabajo de cada sesión evidencias sobre las construcciones o mecanismos mentales movilizados por los estudiantes. Para efectos de la descripción del análisis en los siguientes capítulos se usan las etiquetas E1, E2, …, E30 para referirnos a los estudiantes del curso.

Finalizada la implementación de la enseñanza y tras revisar las producciones de los estudiantes en cada sesión el investigador decide entrevistar a dos estudiantes. Ambos estudiantes se caracterizan por producciones escritas y verbales que brindan bastante información sobre su forma de pensamiento y las construcciones internas que están realizando. Sin embargo, uno de los estudiantes ha mostrado evidencias de tener dificultades con algunas construcciones mientras que el otro estudiante ha mostrado evidencias de construcciones previas sólidas.

5. Análisis de la actividad de modelación relacionada con eigenvalores y eigenvectores

Este capítulo se ha dedicado al análisis de las construcciones mentales emergentes en los estudiantes mediante el trabajo con la actividad de modelación y las discusiones con sus compañeros, profesora e investigador desde la perspectiva de la teoría APOE.

El trabajo de los estudiantes con las actividades que provocan modelos pueden incluir diferentes ciclos de modelado. Estos se caracterizan por las formas de pensar de los estudiantes respecto a la situación propuesta (Lesh y Doerr, 2003). Las formas de pensar de los estudiantes en relación a la actividad de modelación pueden describirse en términos de la teoría APOE a través de las estructuras mentales. La habilidad de los estudiantes para determinar la pertinencia de usar conceptos matemáticos en una situación determinada se refiere a la coherencia de un esquema (Arnon et al., 2014).

En los siguientes párrafos se analizan los ciclos de modelación identificados en la actividad de diseño de un nuevo reloj, estos son: i) reconocimiento de las condiciones como vectores; ii) aproximación al modelo; iii) necesidad de exactitud y validez del modelo; iv) reconociendo y estableciendo condiciones.

5.1 Reconocimiento de las condiciones como vectores en $\mathbb{R}^2$

La actividad de modelación se desarrolló en dos sesiones de clase de dos horas. Los estudiantes trabajaron en grupos de dos o tres. Durante los primeros 30 minutos discuten en cada grupo sobre la situación propuesta. El investigador se acerca a los diferentes grupos, escucha y observa las formas de pensar de los estudiantes e interactúa con los estudiantes y profesora.

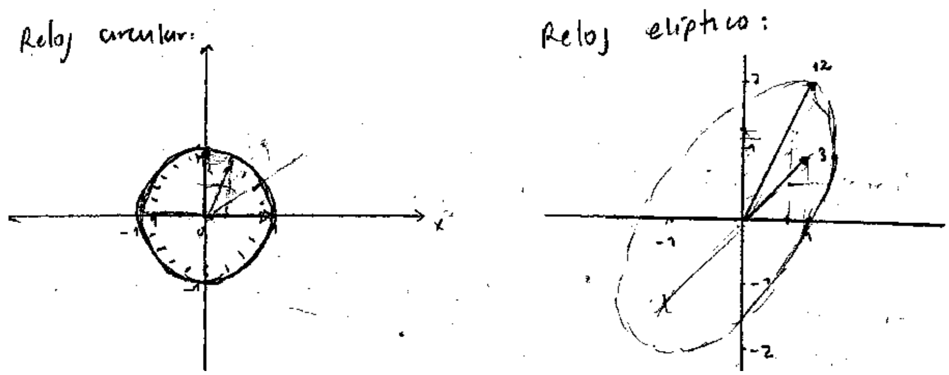


Figura 25: Representación gráfica del diseño de los relojes por E4

En cada grupo los estudiantes expresan sus ideas y posibles estrategias para abordar la situación planteada. El investigador identifica en algunos grupos que los estudiantes hacen un dibujo del reloj circular y un dibujo para el nuevo diseño. La Figura 25 muestra un ejemplo de los dibujos realizados por el estudiante E4. Traza planos cartesianos y ubica en cada caso los dos diseños de reloj utilizando las condiciones establecidas en la actividad, pero sin referirse directamente a vectores numéricos de $\mathbb{R}^2$. Los estudiantes del grupo de E4 realizan el dibujo con el propósito de reconocer visualmente las manecillas del nuevo reloj y cómo son en las posiciones de las 12:00 y las 3:15. Cuando los estudiantes identifican la posición de los minuteros con coordenadas del plano cartesiano pasan de centrar su mirada en el cambio de ubicación de las flechas como representaciones de los minuteros al cambio o transformación de las coordenadas numéricas.

La Figura 26 corresponde a una de las hojas de trabajo del estudiante E1 del grupo 4. El párrafo que escribe E1 describe su razonamiento y el plan que considera viable para encontrar el modelo del nuevo diseño de reloj.

> “*Partimos de que el reloj circular tiene un radio de 1 decímetro, graficamos las horas dadas y comenzamos a ubicar las coordenadas de la posición del minutero en el nuevo reloj a partir de las condiciones dadas. Observamos que tomamos los vectores canónicos de* $\mathbb{R}^2$ *y los transformábamos, por lo que podemos tomar estas coordenadas como las columnas de lo que será nuestra matriz de transformación”.*

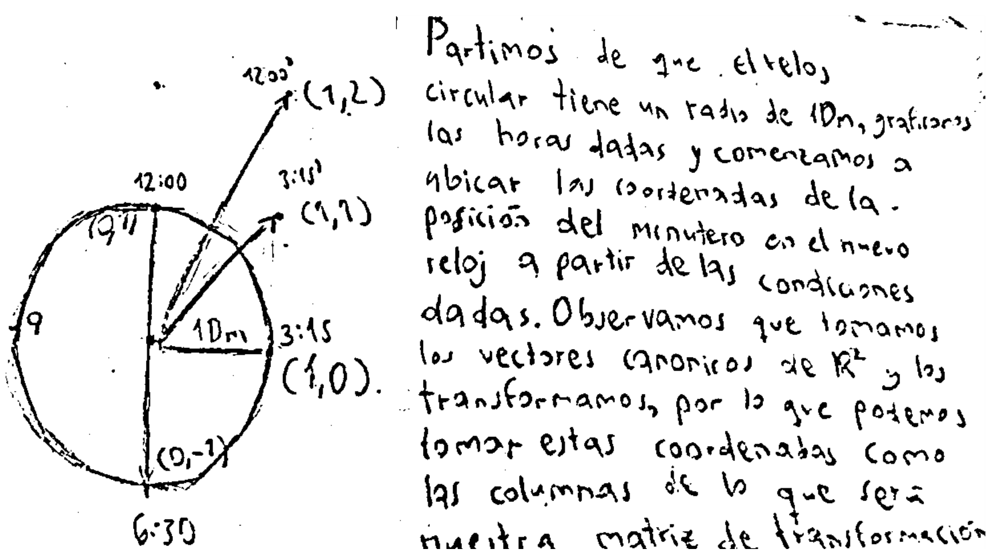


Figura 26: interpretación por E1 sobre las condiciones del problema en términos de vectores que son transformados.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

El gráfico que se muestra al lado izquierdo del párrafo muestra que la atención del estudiante está centrada en las coordenadas numéricas del minutero para el reloj circular y el nuevo diseño. Al escribir las coordenadas de los minuteros puede observar que las coordenadas para el reloj circular corresponden a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ los cuales son transformados en otros vectores para el nuevo diseño. El investigador registra en sus notas de campo "*los estudiantes que no pueden reconocer las condiciones a). y b). como vectores numéricos no logran establecer un plan o avanzar en su trabajo por encontrar el modelo".* Los grupos de estudiantes que transforman la información dada en términos de vectores muestran usar su Esquema de base y transformación lineal en la mayoría de los casos al mismo tiempo, es decir, una vez identifican la base canónica relacionan cada vector de la base con su imagen y muestran evidencia de reconocer que ese cambio puede describirse o ser ocasionado por una transformación lineal. Sin embargo, en algunos grupos de trabajo el investigador identifica que los estudiantes pueden reconocer las condiciones de la situación como vectores y pensar en una transformación lineal, pero, tienen dificultades para determinar la transformación o una representación matricial de esta.

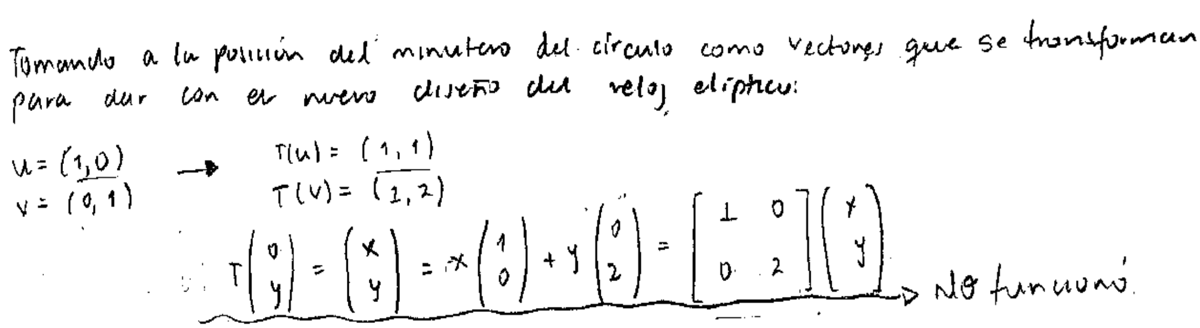


Figura 27: Producción de E12 para encontrar la transformación lineal del nuevo modelo

La Figura 27 corresponde a producciones en las hojas de trabajo de E12 en el grupo 8. E12 reconoce los vectores y la existencia de una transformación lineal tal que $T(u) = [1,1]$ y $T[v] = [1,2]$. En los intentos por determinar la transformación lineal se identifica que no puede coordinar los Procesos de base y transformación lineal. Lo anterior, no le permite reconocer la matriz asociada a la transformación lineal ni usar la base con las propiedades de linealidad de la transformación lineal para determinar una expresión algebraica de esta.

E12 usa otra estrategia para determinar la matriz asociada a la transformación lineal. El conocimiento sobre sistemas de ecuaciones lineales le permite encontrar los valores de las respectivas entradas de la matriz; multiplica los vectores canónicos con una matriz general $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e iguala el vector resultante con las imágenes asociadas a los vectores de la base canónica. (ver Figura 28)

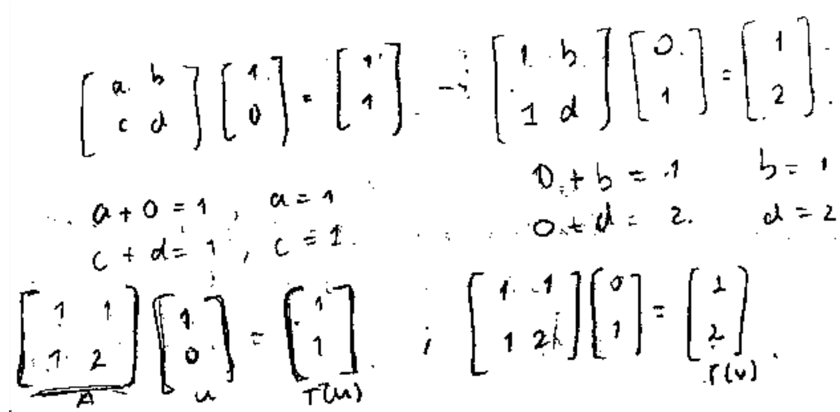


Figura 28: Procedimiento de E12 para determinar la matriz asociada a la transformación

5.2 Aproximación al modelo

Las discusiones en cada grupo de trabajo cambian a una discusión general que incluye todos los estudiantes, la profesora y el investigador. E7 pasa al tablero y muestra el trabajo de su grupo,

grupo 7. La Figura 29 corresponde al dibujo realizado por E7. Se puede reconocer que interpreta toda la información de la situación en términos matemáticos: círculo, elipse, vectores numéricos, base, transformación lineal y matriz asociada. En el siguiente diálogo se puede evidenciar el razonamiento del estudiante y su plan de trabajo con el modelo.

E7: […] nosotros pensamos en un círculo de un decímetro, pero lo expresamos en centímetros porque quedaba muy pequeñito […] a las doce decía que debía estar una unidad hacia arriba, o sea 20 centímetros. Luego que se desplazaba otra unidad hacia la derecha […] entonces se llegaba hasta 10 en x y se proyectaba esa distancia perpendicular y también en 20, entonces ahí quedaba la coordenada […] el otro dato que nos daban era como un radio menor de la elipse.

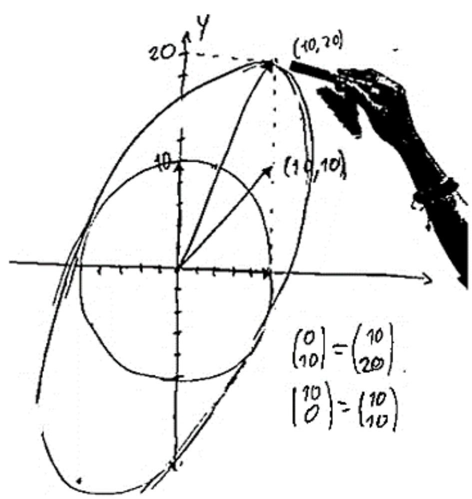


Figura 29: Producción de E7 sobre las condiciones del problema de modelación

[…] sin embargo, cuando lo ubicamos parecía que no. Nosotros trazamos una elipse que rozara al círculo […] Otra cosa que hicimos fue asignar también coordenadas o vectores a estos (señala las posiciones del minutero a las 12:00 y 3:15) este punto tenemos que es [10,0] y el otro $[0{,}10]$. Identificamos que esto era como transformaciones lineales. Vemos que $[10{,}0]$ y $[0{,}10]$ es como una base [...] nosotros relacionamos estos vectores con su transformación. Para $[0{,}10]$ la transformación era $[10{,}20]$ y para $[10, 0]$ era $[10{,}10]$. Pero eso es como si fuera una canónica al final se puede colocar como $\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ como la transformación lineal del reloj elipse.

En su explicación a todos sus compañeros, la profesora y el investigador, E7 muestra bastantes detalles sobre el proceso que desarrolló para presentar su avance del modelo. El estudiante no solo reconoce los datos como vectores en $\mathbb{R}^2$, puede identificar que los vectores $[10{,}0]$ y $[0, 10]$ son una base para $\mathbb{R}^2$ pero, reconoce que puede referirse en términos de la base canónica para determinar de forma directa la matriz asociada a la transformación lineal. E7 muestra evidencia de haber construido el concepto de matriz asociada y es consciente de la relación entre la transformación y su representación matricial mediante la base. Por lo anterior, consideramos que la interacción entre el Esquema de base y transformación lineal le permitió a E7 construir un modelo preliminar para el diseño del nuevo reloj.

Después de la explicación presentada anteriormente E7 adiciona una idea que ha hablado en su grupo para seguir trabajando sobre el modelo. El siguiente diálogo presenta más detalles del razonamiento en el grupo de E7, las preguntas y comentarios que agregan sus compañeros contribuyen a la reflexión sobre la exactitud del modelo.

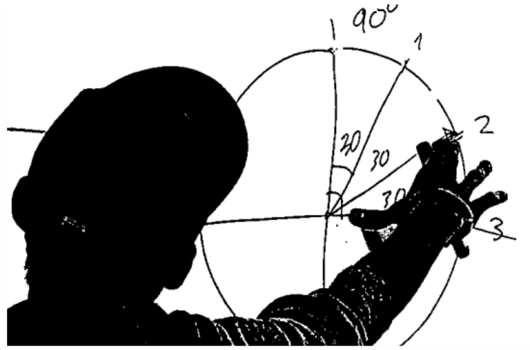


Figura 30: Razonamiento de E7 para relacionar ángulos con posiciones del minutero

E7: […] para lo de los diez minutos lo estábamos relacionando con ángulos […] Si dividimos este cuadrante (Primer cuadrante) que tiene 90° en sectores de 30° entonces nos van a quedar una hora, dos horas y tres horas […] en el uno vamos a tener 5 minutos y en el dos 10 minutos.

E8: No entiendo lo de los ángulos (E7 pasa al tablero y muestra la Figura 30)

E7: […] lo que estábamos mirando era que en esta parte (señala en el reloj circular las 3:15) para que en el nuevo diseño sean las 3:15 iba a estar prácticamente como acá (traza una recta indicando 20 minutos, ver Figura 31) como 5 minutos corridos hacia abajo […] no es que esté atrasado es que si lo comparamos con el círculo eso sería la relación.

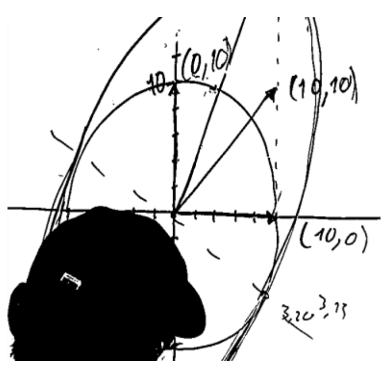


Figura 13: Comparación entre los dos diseños de reloj cuando marcan 20 minutos por E7

E2: […] yo estaba mirando si usted al dividir ese cuarto de circunferencia para formar ángulos de 30° podría utilizar alguna identidad trigonométrica para relacionar los lados […] otra cosa que yo creo es que la elipse debe ser como más achatada. Que la circunferencia quede un poco por fuera.

E11:[…] cuando yo le metí el vector $[1,1]$ me da un vector que está como fuera de esa elipse.

E7: Yo pensaría que esto solo es un bosquejo (señala el trazo de la elipse)

E2: nosotros encontramos las transformaciones de todos los extremos de la circunferencia y trazamos que la elipse que pase por los extremos de esos vectores.

E7 considera la condición c). del problema propuesto. El análisis sobre este ítem permite que los estudiantes reflexionen sobre el modelo encontrado con el propósito de refinarlo y decidir si se satisface la condición establecida para el minutero cuando indica 10 minutos. La necesidad de conocer con exactitud el vector cuando son 10 minutos y su transformación en el nuevo diseño le permite a E7 relacionar los minutos con grados en el plano cartesiano. Aunque en su grupo no sabían cómo iban a utilizar posteriormente esa relación, E2 reconoce que puede utilizar trigonometría.

La intervención de E11 sobre el vector $[1,1]$ es un cuestionamiento a la validez del modelo. Aunque el estudiante no reconoce que el vector no pertenece a la circunferencia unitaria, su pregunta hace pensar a los demás compañeros sobre la validez del modelo. Por otra parte, E2 muestra que ha encontrado no solo las imágenes de los vectores $[1,0]$ y $[0,1]$ sino también de los vectores $[-1,0]$ y $[0,-1]$. Por la información que ha obtenido al ubicar los cuatro vectores y hacer el trazo de la elipse sabe que la relación presentada por E7 entre la circunferencia y la elipse no es correcta.

En este momento los estudiantes pueden reconocer el avance en el desarrollo del modelo, pero, son conscientes que existen aspectos por mejorar. Los razonamientos que han desarrollado han involucrado conceptos matemáticos de álgebra lineal, trigonometría, entre otros.

La primera sesión de trabajo con el modelo finaliza cuestionando la validez del modelo o la necesidad de refinarlo. La profesora solicita a los estudiantes continuar reflexionando sobre el modelo y en la siguiente sesión presentar su análisis y comentarios.

5.3 Una necesidad de exactitud y validez del modelo

La segunda sesión de trabajo con el modelo inicia con una discusión general donde los estudiantes muestran el trabajo realizado sobre el modelo después de la primera sesión. El siguiente diálogo se desarrolla a partir de una pregunta del investigador al estudiante E1, quien comparte sus ideas en el tablero.

I: Explíquenos, ¿cómo aparece esa matriz?

E1: […] esta matriz la podemos armar así porque tenemos los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, entonces los ordenamos de esa forma.

I: ¿Cuál vector ubico en la primera columna y por qué?

E1: [1,0], porque es por orden de x, y. Entonces este (señala el vector [1,0]) es el correspondiente en x y el otro en y. Es como encontrar la matriz asociada.

I: ¿Está matriz me describe que pasa con el nuevo diseño? ¿Por qué?

E12: […] en la transformación lineal nos podemos fijar en los vectores de la base. En este caso los vectores son la base canónica de $\mathbb{R}^2$ […] cualquier transformación que se le aplique a esa base me va a dar también para todo $\mathbb{R}^2$.

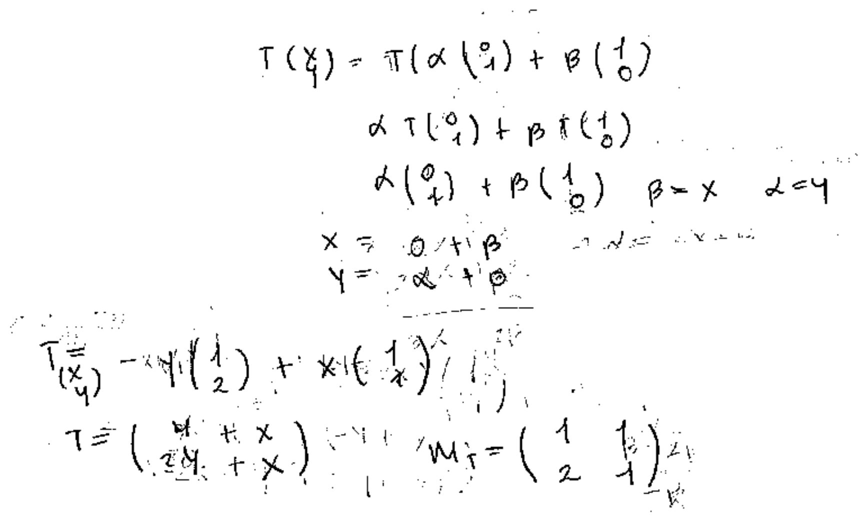


Figura 32: Razonamiento de E12 que involucran las condiciones de linealidad de una transformación lineal y el concepto de base

La respuesta del estudiante E1 muestra reconocer que la matriz asociada de una transformación lineal se relaciona con las imágenes de los vectores de la base. La pregunta del investigador busca tener evidencias sobre el papel que los estudiantes le asocian a la base en relación a la validez del modelo para todo el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. E12 quien en la sesión anterior mostraba tener dificultades con el concepto de base ahora muestra un argumento usando como elemento principal la base. Afirma que al aplicar una transformación a los vectores de la base se conoce como actúa sobre todo $\mathbb{R}^2$. En este caso, el concepto de base como el mínimo conjunto generador permite reconocer a los estudiantes que la deformación de cualquier posición del minutero para el nuevo diseño puede ser descrita en términos de las imágenes de los vectores de la base canónica. En las producciones de los estudiantes se evidenció que pueden generalizar el modelo para todo vector de $\mathbb{R}^2$ gracias a la coordinación del Proceso de base y de transformación lineal, de esta manera, pueden aplicar las propiedades de linealidad conociendo las imágenes de los vectores de la base. En la Figura 32 se muestra las producciones de E12.

El diálogo entre el investigador y los estudiantes continua. Ahora E1 muestra cómo se puede complementar o refinar el modelo al relacionar cada posición del minutero con ángulos.

I: (E1), ¿Por qué estabas haciendo esa partición en el círculo?

E1:[…] yo puedo colocar cualquier punto sobre este reloj circular en ese modelo y transformarlo a lo que me piden […] por la partición vemos que se forman triángulos rectángulos con un ángulo θ […] tenemos que ver cómo serían las coordenadas de cada punto según ese triangulito […] puedo relacionar mi coordenada en x con $\mathrm{Cos}(\theta)$ y y con $\mathrm{Sen}(\theta)$ y pues el valor de θ lo puedo ir relacionando con lo del círculo (Ver Figura 33)

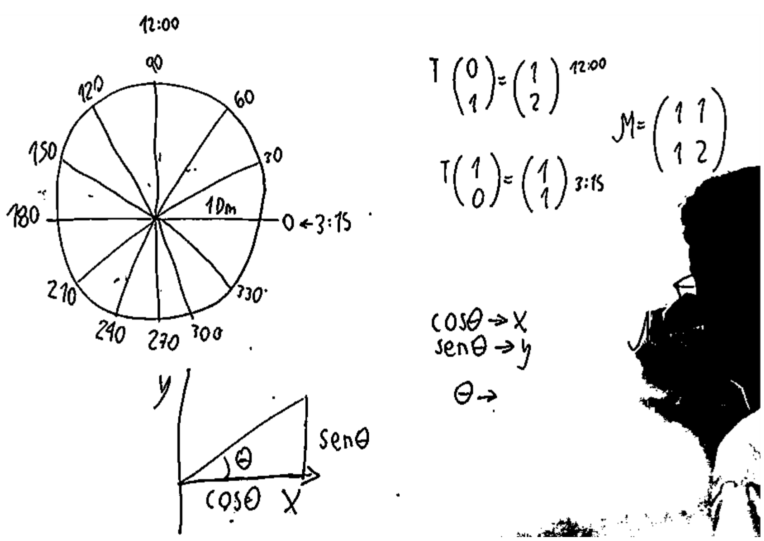


Figura 33: Razonamiento de E1 para refinar el modelo del diseño del nuevo reloj.

E12: y eso ¿Para qué?

E1: […] puedo relacionar eso con lo que ya sabíamos. Si queremos conocer cómo se transforma cualquier punto [x, y] pues lo podemos multiplicar por la matriz. Pero ahora podemos remplazar esto (señala la relación entre las coordenadas de un punto y las funciones trigonométricas, Ver Figura 34)

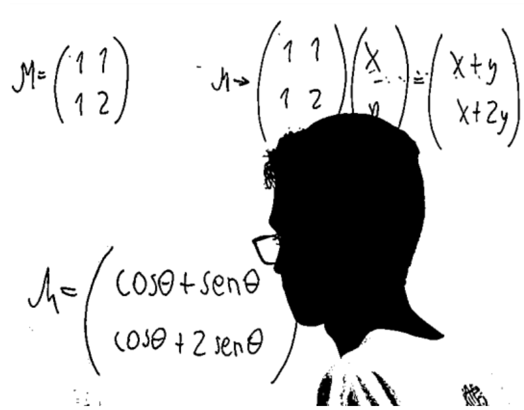


Figura 34: Composición de dos transformaciones lineales como modelo refinado para describir el nuevo diseño de reloj por parte de E1

E20: ¿Entonces podemos utilizar esto para mirar en los 10 minutos?

E1: […] Sí. En los diez minutos, observan que sería como treinta grados, ¿Sí los ven? […] entonces es insertar el valor acá y ya.

I: Entonces, ¿Cuál sería las coordenadas en el reloj circular y en el nuevo diseño?

E1: bueno pues sería hacer las cuentas (les pide a los compañeros que le digan cuál es el resultado, Ver Figura 35)

$$10\text{min} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos 30 \\ \sin 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore h(10\text{min}) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right)$$

Figura 35: Vector de coordenadas para 10 minutos en el nuevo diseño de reloj encontrado por E1

E7: Sólo están para cada cinco minutos

E1: […] Simplemente tenemos los ángulos de treinta en treinta […] entonces básicamente lo que hice fue dividir cada pedazo en cuatro ¿Si me entiende? […] entonces al partirlo en cuatro nos van a dar para cada minuto […] me daría una equivalencia de $\frac{15}{2}$.

El modelo para el nuevo diseño de reloj en términos de la transformación lineal, como lo expresa E1, implica conocer el vector de coordenadas del minutero, asociar las posiciones del minutero con ángulos y establecer una relación mediante las funciones trigonométricas $sen(\theta)$ y $\cos(\theta)$. Aunque al principio identifica la relación para cada 5 minutos (ver Figura 33) al relacionar el sector circular de 5 minutos con un ángulo de 30°, posteriormente reconoce que puede hacer otra partición de cada sector circular y obtener la medida del ángulo para cada minuto. En la Figura 34 se observa que el estudiante hace una composición de las dos funciones que ha encontrado. Una es un operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ y la otra una función entre un ángulo θ y las coordenadas en el plano cartesiano. El modelo ahora es más útil y pertinente, los estudiantes reconocen que es más fácil asociar un ángulo a una posición del minutero y utilizar las relaciones encontradas para determinar las coordenadas en el diseño circular y el elíptico.

La atención de los estudiantes ahora se centra en determinar si existen posiciones donde los minuteros se superponen. Después de analizar algunas posiciones con el modelo que han encontrado los estudiantes usan el archivo que se ha preparado en GeoGebra.

5.4 Reconociendo y estableciendo condiciones

La exploración en Geogebra les permite a los estudiantes validar y ampliar sus ideas sobre el modelo propuesto. Por ejemplo, varios estudiantes afirman que "*la elipse es más achatada de lo que había dibujado E7"*. También identifican que existe más de una posición donde los vectores se superponen: "*son cuatro, dos y dos corresponden como a direcciones opuestas. Aquí (señala 5 minutos) hay uno y el opuesto de este sería este (señala 35 minutos) estos dos parecen estirarse de igual forma cuando se deforman para el nuevo diseño*".

La profesora y el investigador se acercan a diferentes estudiantes y les realizan preguntas con el propósito que los estudiantes puedan describir cómo es la transformación en las cuatro posiciones del minutero. Los estudiantes se refieren a estos casos como: "*están sobre la misma recta*", "*mediante una reducción o ampliación*". El trabajo con el archivo de GeoGebra provoca que los estudiantes pasen de centrar su atención del modelo particular a analizar los posibles diseños en los cuales existirán posiciones donde los minuteros se superponen. En el diálogo que sigue los estudiantes reflexionan sobre el papel de la base y cómo podría definirse otros diseños.

E22: […] la forma del nuevo reloj podemos cambiarle sus dimensiones, perdón su tamaño al mover el vector (se refiere al punto P sobre la circunferencia, ver Figura 36).

E1: cambia la transformación.

I: ¿Qué es lo que está cambiando ahí?

E11: cambia como el plano.

E10: […] está modificando sus vectores base […] y los vectores base modifican la transformación […] y eso hace que cambie el reloj.

La exploración y análisis de los estudiantes en las dos *Vistas gráficas* de GeoGebra les permite continuar reflexionando sobre el concepto de base y transformación lineal. En la ventana derecha de la Figura 36 se muestran los vectores de la base y sus respectivas imágenes.

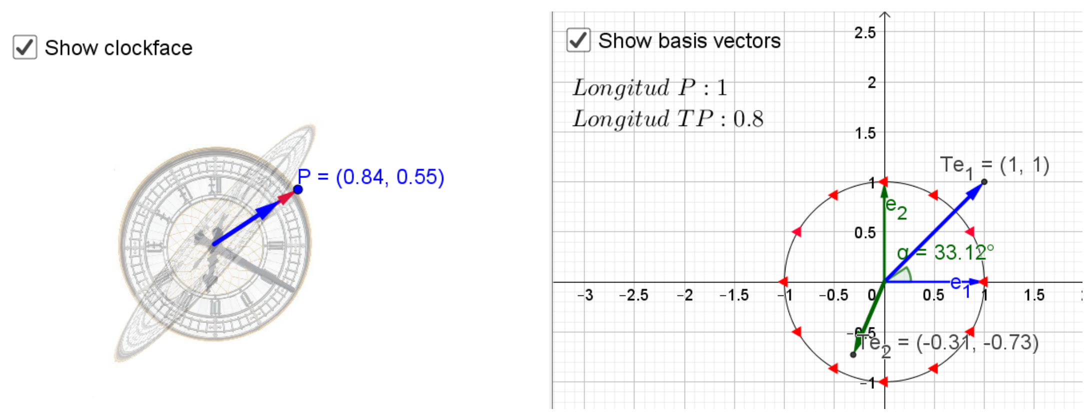


Figura 36: Vistas graficas de exploración en GeoGebra sobre el problema de modelación.

En la exploración los estudiantes pueden variar las imágenes de los vectores de la base, observar en la ventana izquierda la deformación resultante del reloj circular. Al variar el punto *P* sobre la circunferencia determinan que existen posiciones donde los vectores quedan superpuestos. En el diálogo anterior dos estudiantes identifican un cambio en el "*plano*" o "*las dimensiones de la figura*", sin embargo, E10 reconoce que el cambio en las imágenes de los vectores de la base genera una transformación lineal diferente. En este caso, E10 muestra evidencia de estar pensado en conceptos matemáticos más allá de los elementos visuales que se perciben en las vistas gráficas.

En el trabajo con el archivo de GeoGebra la profesora y el investigador buscaban que los estudiantes reconocieran operadores lineales en los cuales no existen posiciones donde los vectores se superpongan. Después de analizar modelos al variar las imágenes de los vectores de la base los estudiantes identifican varios modelos de los cuáles destacamos 3. Estos modelos corresponden a ejemplos donde: i). los vectores se superponen en algunos casos; ii). nunca se superponen; iii). todo vector del plano es transformado en otro que está sobre la misma recta, pero con dirección opuesta.

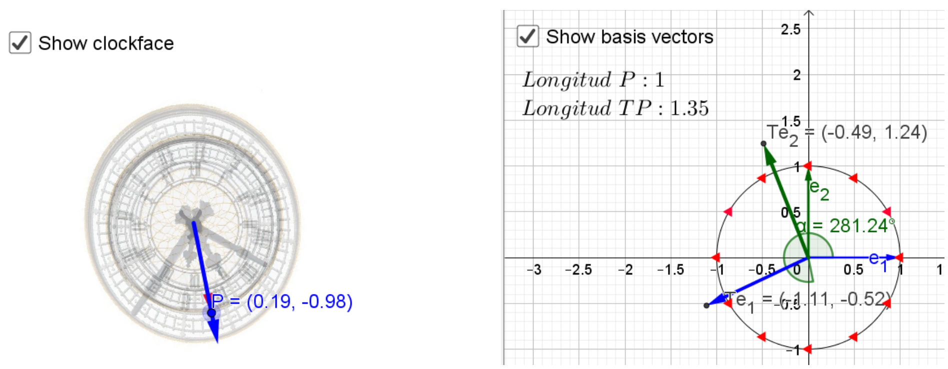


Figura 37: Ejemplo proporcionado por E16 donde existen posiciones para los minuteros de lo diseños de relojes que se sobreponen.

I: ¿Alguien encontró algo diferente?

E16: […] Aquí la forma del reloj queda como la misma […] y podemos ver que los minuteros se superponen […] en este caso los vectores quedan sobre la misma recta (ver Figura 37) […] pero si colocamos la imagen de e_2 por acá (coloca el vector en el tercer cuadrante) ya las manecillas del reloj no se sobreponen […] sin importar en qué dirección vayan los vectores no los puedes poner sobre una misma recta (ver Figura 38).

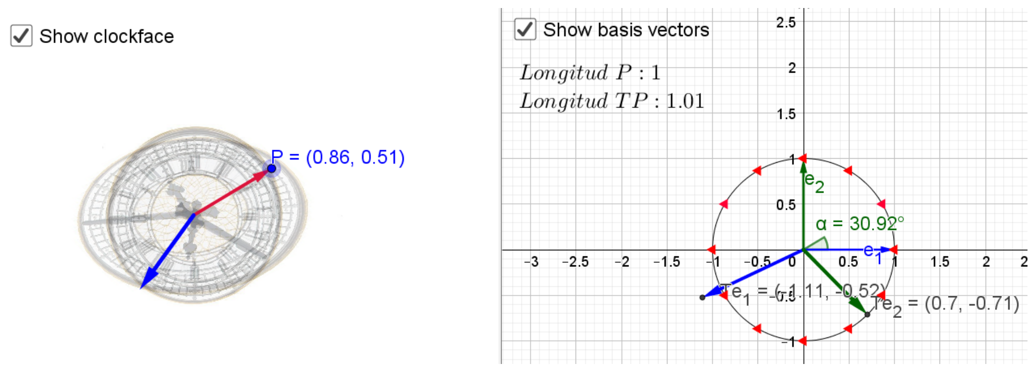


Figura 38: Ejemplo proporcionado por E16 donde no existen posiciones de los minuteros en los diseños de relojes que se sobrepongan.

E21: ¿No existe una donde queden formando un ángulo de 180° siempre?

E16: Espere, creo que yo había encontrado algo así (ver Figura 39)

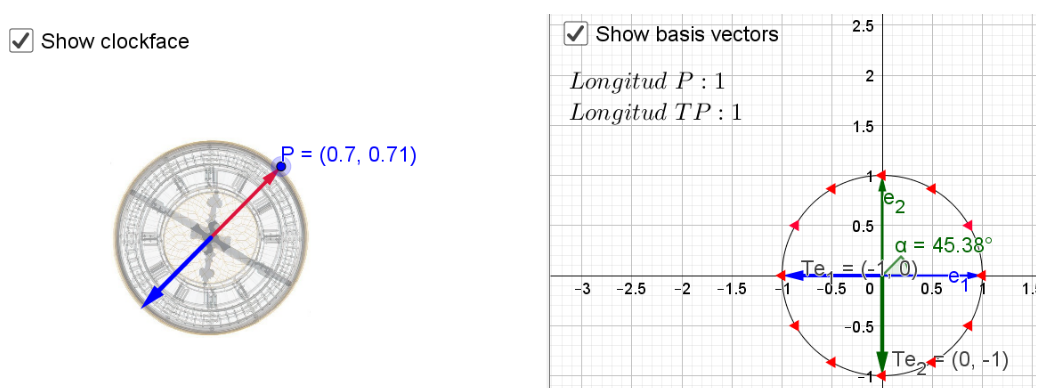


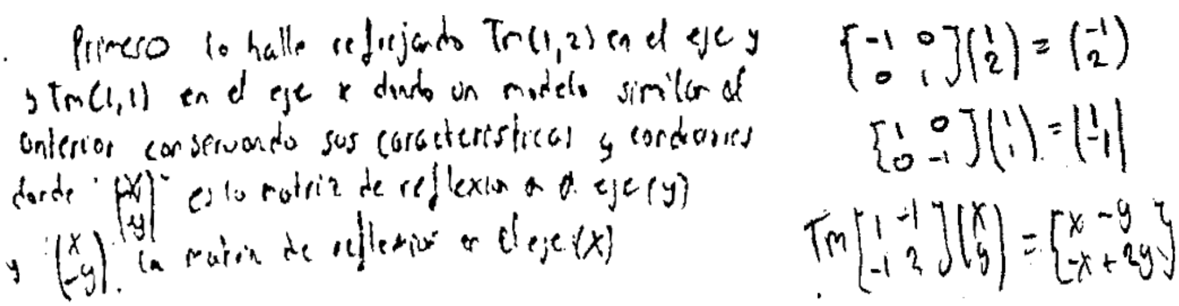
Figura 39: Ejemplo proporcionado por E16 donde existen posiciones de los minuteros para los diseños de relojes que está rotados 180°.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

El trabajo de los estudiantes con el archivo preparado en GeoGebra favorece un espacio de reflexión; validan, reconstruyen o construyen ideas sobre el modelo. Por otra parte, formulan nuevas preguntas y relaciones entre conceptos matemáticos. Las tres situaciones presentadas en el diálogo anterior fueron socializadas y discutidas con todos los estudiantes. La profesora se apoyó en esos tres ejemplos y reflexiona con los estudiantes sobre cómo actúa una transformación en el espacio vectorial dominio, es decir, existen transformaciones que tienen un efecto “especial” para algunos vectores, otras que transforman todos los vectores bajo el mismo “efecto”.

La segunda sesión de clase sobre la actividad de modelación finaliza con solicitud de la profesora a los estudiantes para continuar el trabajo con la situación propuesta, de tal manera que puedan mostrar ilustraciones, describir características y condiciones para que en los nuevos modelos de reloj existan posiciones donde los minuteros se superpongan.

> *“Primero lo halle reflejando $T_m(1,2)$ en el eje y y $T_m(1,1)$ en el eje x dando un modelo similar al anterior, conservando sus características y condiciones donde $\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ es la matriz de reflexión en el eje y y $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ la matriz de reflexión en el eje x”*


Primero lo halle reflejando Tm(1,2) en el eje y
y Tm(1,1) en el eje x dando un modelo similar al
anterior conservando sus caracteristicas y condiciones
donde $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ es la matriz de reflexion en el eje (y)
y $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ la matriz de reflexion en el eje (x)

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

$Tm\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{bmatrix}$

Figura 40: estrategia de E20 para construir otros modelos de reloj donde existan posiciones para los minuteros en las que se sobrepongan.

En las producciones escritas algunos estudiantes muestran otros modelos usando la transformación lineal para referirse a casos donde los minuteros de los dos diseños de reloj pueden sobreponerse. La Figura 40 muestra la estrategia de E20 para construir otro modelo transformando las condiciones iniciales del problema usando la reflexión de los vectores respecto a los ejes x y y. E20 reconoce las matrices de rotación y multiplica cada vector por la respectiva matriz, de tal manera que el vector $[1,2]$ lo refleja respecto al eje y y $[1,1]$ respecto al eje x. El modelo propuesto puede ser descrito mediante la transformación lineal $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ -x + 2y \end{bmatrix}$.

"*Puntos donde los vectores se sobreponen son los mismos que los del primer modelo, pero con diferentes magnitudes. Los vectores son múltiplos escalares".*

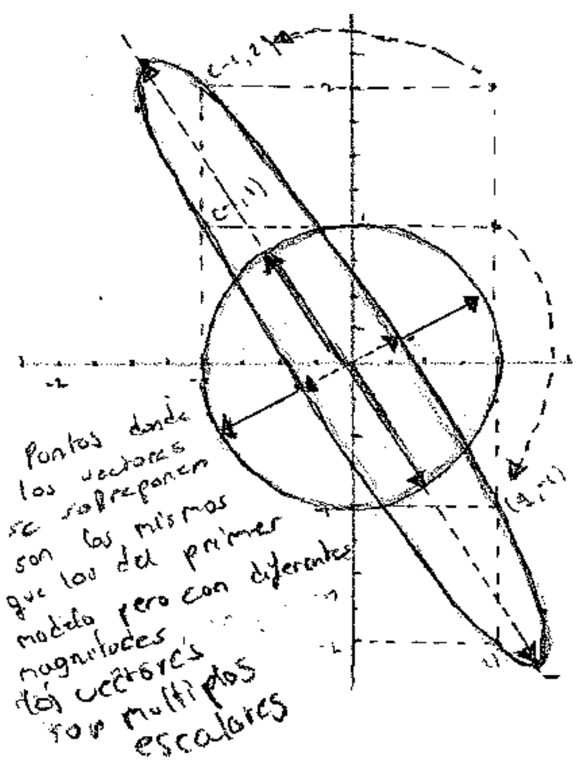


Figura 41: Ilustración de los eigenvalores y eigenvectores del modelo propuesto por E20.

La ilustración del estudiante se presenta en la Figura 41, en esta muestra las posiciones en las cuales los minuteros se sobreponen. La matriz asociada a la transformación lineal dada por el estudiante es una matriz simétrica, los vectores que señala corresponde a los ejes mayor y menor de la elipse. En la nota escrita al lado de la figura por E20 "*los mismos(vectores) del primer modelo, pero con diferente magnitud*" no es correcta, dado que los vectores son diferentes.

En el problema de modelación presentado a los estudiantes el minutero del reloj circular y el del nuevo diseño se sobreponían en: 5, 20, 35 y 50 minutos, en el modelo propuesto por el estudiante esto ocurren en: 10, 25, 40 y 55 minutos. Lo que es válido afirmar es que en ambos modelos los escalares (eigenvalores) son iguales. Sin embargo, la última frase "*los vectores son múltiplos por un escalar*" muestra que el estudiante puede describir cómo actúa la transformación sobre los vectores que ha dibujado.

"Cuando la transformación afecta solo a un eje los vectores coinciden en los puntos del eje x y del eje y, de la forma $\binom{nx}{y}$ para el eje x y $\binom{x}{ny}$ para el eje y".

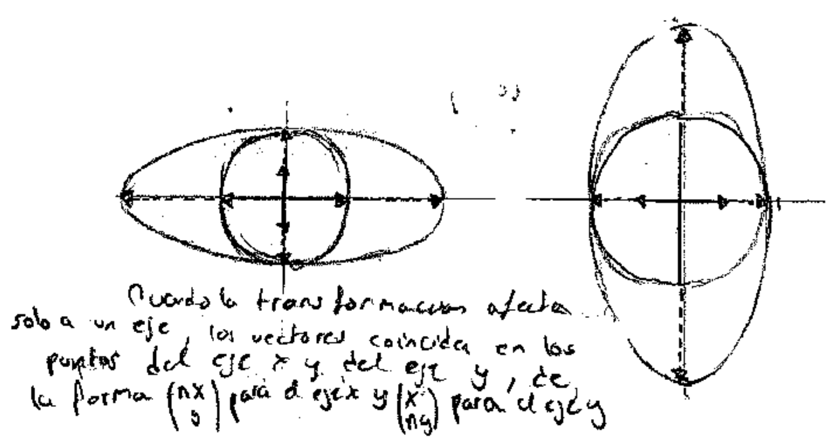


Figura 42: Familia de modelos de relojes donde existen vectores que se sobreponen en ambos diseños propuesta por E20

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Algunos estudiantes pueden reconocer una familia de modelos en los cuales se verifica la condición que existen posiciones donde los minuteros de los relojes circular y elíptico se superponen.

La Figura 42 junto con el texto escrito por el estudiante, muestra que está pensando en dos familias de modelos. El estudiante afirma que esto se genera cuando "*la transformación afecta solo a un eje*", es decir, un caso es si el vector $[1,0]$ es transformado en $[n,0]$ y $[0,1]$ es transformado en sí mismo, el otro ocurre si $[1,0]$ es transformado en sí mismo y $[0,1]$ es enviado a $[0,n]$. El estudiante muestra que puede reconocer la forma funcional de las dos familias de transformaciones: i). $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} nx \\ y \end{bmatrix}$; ii). $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ ny \end{bmatrix}$. También indica en el dibujo que los vectores que están sobre los ejes x y y son las posiciones donde los minuteros se van a superponer.

Después de haber trabajado con la actividad de modelación la profesora interviene para institucionalizar los términos de eigenvalor y eigenvector. La definición que en ese momento se relaciona con los hallazgos de los estudiantes sobre la transformación de algunos vectores v del dominio del operador lineal en un múltiplo escalar (λv), sin embargo, no se presenta la condición de $v \neq 0$ registrada en las definiciones proporcionadas por libros de texto. Es mediante las discusiones en clase entorno a las actividades específicas propuestas que los estudiantes identifican la necesidad de establecer dicha condición. Al respecto nos referimos en el siguiente capítulo.

6. Análisis de las construcciones mentales de los estudiantes sobre eigevalores y eigenvectores

En esta etapa las siguientes preguntas fueron claves y guiaron el análisis: "¿Los estudiantes desarrollaron las construcciones mentales previstas por el análisis teórico?, ¿Qué nivel de comprensión lograron del contenido matemático?" (Arnon et al., 2014, p. 94). Mediante la descomposición genética, los datos obtenidos por los diferentes instrumentos y las interpretaciones negociadas por los investigadores se triangularon los datos. Como resultado del análisis se realizaron ajustes a la primera componente del ciclo de investigación con el propósito de presentar un modelo cognitivo refinado.

Este capítulo de análisis presenta evidencia empírica sobre las construcciones y mecanismos mentales movilizados por los estudiantes que participaron en el curso donde se desarrolló la instrucción y los dos estudiantes entrevistados. Los datos provienen de la implementación de la enseñanza y la entrevista didáctica; el análisis del trabajo realizado con el problema de modelación se discutió en el capítulo anterior.

6.1 Datos obtenidos de la implementación de la enseñanza

El seguimiento a un curso regular de álgebra lineal para la implementación de la enseñanza, permitió recolectar datos sobre cómo fue emergiendo y construyéndose el concepto de eigenvalor y eigenvector en los estudiantes del curso. De esta manera, fue posible tener evidencia de los progresos, dificultades y otras construcciones mentales que no se habían considerado en el análisis teórico.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

En las secciones 6.1.1, 6.1.2 y 6.1.3 se presenta evidencias sobre la necesidad de construcciones mentales que no se habían considerado, se discute sobre la importancia de una concepción Proceso estable de transformación lineal y se analiza los Procesos subyacentes a la concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector.

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, un operador lineal definido por: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - 2y \\ -2x - 2y \end{bmatrix}$.

a) Considere los vectores $u_1 = [2, -1]; u_2 = [-3, 3]; u_3 = [1, 1]$. Encuentre los vectores $T(u_1); T(u_2); T(u_3)$.

b) Ubique en planos cartesianos cada vector u_i con su respectiva imagen bajo T. ¿Qué relación geométrica se tiene con cada par de vectores u_i y $T(u_i)$? ¿Cuál(es) vector(es) es (son) Eigenvector(es) de T?

$u_3 = [1, 1]$

$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(1) - 2(1) \\ -2(1) - 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

• u_3

$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

u_3 es un eigenvector de T ya que existe un $\lambda = -4$ que cumple la igualdad $T(u_3) = \lambda u_3$

Figura 43: Producción de E1 en tarea 1 de la Guía 2

6.1.1 Construcción del cero vector como no eigenvector de un operador lineal. En las discusiones desarrolladas sobre la primera tarea de la Guía 2 los estudiantes analizan si el escalar cero y el vector cero pueden ser un eigenvalor y eigenvector de un operador lineal respectivamente. En el diseño de instrucción se consideró proponer un operador lineal con eigenvalor cero para motivar la discusión al respecto. Los cuestionamientos sobre el eigenvalor cero y el no eigenvector cero emergieron entre los grupos de estudiantes. En el siguiente episodio se presenta un fragmento de los razonamientos que los estudiantes desarrollaron respecto a estos cuestionamientos cuando analizaban la tarea presentada en la Figura 43.

E1: […] a partir de la ecuación por simple inspección encontré los escalares. Pero ehh, me surgió una pregunta que tambien la tiene más de uno. ¿Puedo tomar el escalar cero para operar eigenvectores? […] pues no se, yo me pongo a pensar que si puedo tomar el escalar cero entonces, puedo tomar cualquier vector de acá y volverlo un eigenvector.

I: […] ¿Si tomo cualquier vector y encuentro su imagen será el vector cero?

E1: A ok. Pues no necesariamente. Pero si es cero, ¿el eigenvector sería cero?

E20: Bueno yo tengo otra pregunta. ¿Si tomamos la transformación lineal en $[0{,}0]$ siempre será $[0{,}0]$? […] entonces deciamos que para el vector $[0{,}0]$ el escalar por el que multiplicabamos podia ser cualquiera. Porque cero por el vector cero sería igual a su transformación, al igual que uno por el vector cero y tambien para cualquier número. Entonces decíamos que el vector cero podía ser un eigenvector y cualquier escalar como su eigenvalor […]

I: […] Entonces, ¿El vector cero es un eigenvector de la transformación T? ¿Cuál sería el eigenvalor?

Estudiantes: Cualquier número.

E11: Ese si no sería un eigenvector porque tendría muchos valores de λ que cumplen.

P: y ¿No pueden haber muchos λ?

E4: Profesora, no pueden haber muchos c para un mismo eigenvector. No puedo tener $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$ para un mismo vector de la transformación porque entraría en una inconsistencia. 2 por un vector no puede ser igual que 4 por el mismo vector.

E8: Pero λ se puede repetir para varios eigenvectores y no genera ninguna inconsistencia […].

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

E1 empieza preguntándose sobre el cero como eigenvalor e incluye la situación sobre el cero como eigenvector. En su intervención el estudiante parece centrar su atención en el producto de vectores por el escalar cero. Al no coordinar el Proceso de transformación lineal con el Proceso de producto por un escalar mediante la igualdad, su razonamiento de tomar cualquier vector y convertirlo en un eigenvector usando el escalar cero es incorrecto. En ese momento el estudiante no piensa en la imagen del vector bajo la transformación o parece asumir que la imagen de cualquier vector bajo la transformación lineal es cero. E20 muestra aceptar que el vector cero puede ser un eigenvector con eigenvalor cero o cualquier otro escalar. Esto parece que se debe a la falta de una concepción Proceso de transformación lineal sólida que le permita pensar en las implicaciones de sus razonamientos sobre el dominio y la imagen de la transformación. Los estudiantes E1 y E20 muestran evidencia de no coordinar los Procesos de transformación lineal y producto por un escalar y esto parece causarles dificultades en la construcción del vector cero como no eigenvector de un operador lineal.

E4 considera los razonamientos presentados por E20 más allá del vector cero. Pensando en otros vectores del dominio de la transformación identifica una inconsistencia al permitir que existan muchos eigenvalores asociados a un mismo eigenvector. La inconsistencia aparece al considerar las siguientes igualdades $T(v) = 2v = 4v$. E4 no escribe explicitamente las igualdades anteriores, sin embargo, parece usar la igualdad $2v = 4v$ para explicar la inconsistencia que se produce.

E8 ha trabajado en equipo con E4 y parece que están construyendo la unicidad del eigenvalor asociado a un respectivo eigenvector. Aunque no realizan una demostración explicita para probar la unicidad del eigenvalor, parece que la coordinación de los Procesos de transformación lineal y producto por un escalar les permite argumentar sobre dicha unicidad y utilizarla para explicar que el vector cero no puede ser un eigenvector.

Los estudiantes que muestran haber reflexionado sobre la Acción de comparación entre $T(v_0)$ y $\lambda_0 v_0$ mediante la igualdad y dan evidencias de haber interiorizado dicha Acción pueden justitifcar que el vector cero no es eigenvector de un operador lineal. En sus explicaciones al considerar otros vectores diferentes de cero pueden pensar en la inconsistencia que se produce al tener eigenvectores con más de un eigenvalor asociado.

La comprensión de que el cero vector no es un eigenvector se evidencia como una construcción necesaria para una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. La Acción de determinar soluciones de ecuaciones vectorial de la forma $T(v) = \lambda_0 v$ puede interiorizarse en un Proceso en el cuál el estudiante puede pensar en todas las soluciones, más allá de la solución trivial, $v = 0$. Sin embargo, justificar la existencia de soluciones no nulas a dicha ecuación y entenderlas como eigenvectores asociados al escalar λ_0 requiere haber construido previamente que el cero vector no es eigenvector de un operador lineal.

En la Figura 44 se presenta las producciones de E2 en el item e). de la tarea anterior en donde se solicita justificar si 2 es un eigenvector del operador lineal dado. A partir los razonamientos presentados en la hoja de trabajo, E2 puede mostrar que solo existe la solución trivial y por lo tanto 2 no es un eigenvalor, es decir, la estudiante puede decidir que el vector cero que es solución a la ecuación no es un eigenvector. Lo anterior nos permite pensar que la construcción del cero vector como no eigenvector es necesaria e indispensable para la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. La estudiante podría haber encontrar el conjunto solución de dicha ecuación vectorial y considerar que la solución que existe, el vector cero, es el respectivo eigenvector. Sin embargo, su respuesta sería incorrecta.

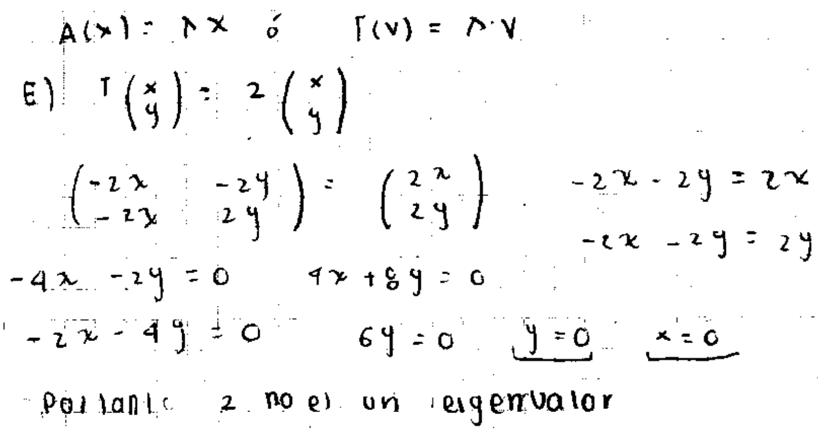


Figura 44: Producciones de E2 en el ítem e) de tarea 1 en la Guía 2.

6.1.2 La necesidad de una estructura Proceso de transformación lineal estable en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. En la implementación de la enseñanza, mientras se discutía la tarea 1 de la Guía 2 se identificó que algunos estudiantes asociaban los eigenvalores con operadores lineales de forma exclusiva. Después de finalizar la discusión sobre el cero vector como no eigenvector, E24, E23 y E26 que integraban un grupo de trabajo consideran que se debe especificar el eigenvalor para cada transformación lineal con el propósito de no asociar tales eigenvalores a otras transformaciones. El siguiente diálogo muestra la intervención del estudiante E24.

E24: El eigenvalor se ve que se debe especificar para cada transformación sino dejaría de ser eigenvalor para otra transformación.

I: […] ¿Se puede encontrar otra transformación lineal que tenga por eigenvalor el cero?

E24: yo pienso que si en esta ya encontramos que el cero es un eigenvalor otras no lo pueden tener.

I: entonces, ¿el eigenvalor cero solo es para esta?

E24: umm tal vez sii

I: bueno, analicemos este caso usando el operador lineal del siguiente punto.

La intervención de E24 no proviene explícitamente de una pregunta presentada en la tarea. Ni si quiera en el diseño de las preguntas habíamos considerado dicha situación. Al revisar sus hojas de trabajo no encontramos producciones escritas con referencias al respecto. Tanto para el investigador como la profesora fue una situación no esperada. El diálogo al respecto fue breve y solo el investigador regresa a este aspecto en la tarea 2. A continuación, mostramos el fragmento de diálogo en la tarea 2.

I: Vemos que 0 es un eigenvalor del operador P al igual que el punto anterior, sin embargo, este operador está definido sobre $\mathbb{R}^3$.

E24: umm entonces, ¿el cero puede ser eigenvalor de otros operadores?

I: ¿qué dicen los demás compañeros?

E26: Si […]

En la tarea 1 de la Guía 2 había un operador lineal dado y algunos vectores específicos. La primera parte de la tarea consistió en analizar si los vectores dados eran eigenvectores. Los estudiantes determinan que 0 y -4 son eigenvalores del operador pues verificaban la igualdad $T(u) = \lambda_0 u$. Para E24 y sus compañeros del grupo de trabajo, la tripla (T, λ_0, v_0) es importante de especificar, de tal manera que para otro operador lineal, λ_0 no pueda ser un eigenvalor. Aunque especificar que un escalar es eigenvalor de un operador lineal es válido e importante, lo erróneo es restringir cada eigenvalor para un único operador. Lo anterior pone de manifiesto un aspecto relevante en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector relacionado con concepciones de transformación lineal, específicamente con la idea de cómo actúa una transformación lineal sobre los espacios vectoriales dominio y rango. Para el caso de los operadores lineales, corresponde a entender cómo actúan funciones definidas sobre el mismo espacio vectorial que cumplen con las propiedades de linealidad.

Descartamos que la forma de pensar de E24 provenga de un obstáculo generado por el término “valor propio” y “vector propio”; en la implementación de la enseñanza se utilizó la referencia como eigenvalor y eigenvector. Al revisar las respuestas de este estudiante a tareas relacionadas con transformaciones lineales en sesiones anteriores encontramos dificultades con la construcción de transformación lineal.

En la Figura 45 se muestra las producciones de E24 respecto a la tarea 3 de la Guía 1 la cual estaba relacionada con transformaciones lineales. La tarea demanda del estudiante una concepción Proceso de transformación lineal; debe determinar cómo cualquier punto del dominio es transformado para producir la deformación de la figura.

Se evidencia que el estudiante se apoya en sus conocimientos sobre ecuaciones lineales o un algoritmo que recuerda usando una matriz general 2×2 de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Después de resolver unas ecuaciones usando dos vectores especificos del dominio de la transformación con sus imágenes, el estudiante no puede concluir de forma correcta cuál es el operador lineal o matriz asociada que describe la deformación de la figura. Lo anterior es producto de una mala elección de uno de los vectores con su respectiva imagen; en la figura no se tiene información de la imagen del vector $[0,5]$. Por la forma de razonar del estudiante, se tiene evidencia de no haber construido una concepción Proceso de transformación lineal.

3. Un **operador lineal** K es una transformación lineal definida sobre el mismo espacio vectorial, es decir, $K : V \to V$.

A la figura 1 se le ha aplicado el operador lineal P para obtener la figura 2.

$a)$ Encuentre el operador lineal $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que describe la deformación del niño en su bicicleta.

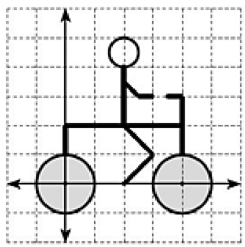


Figura 1.

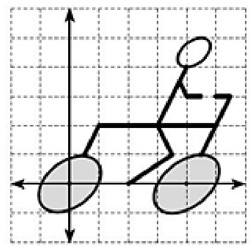


Figura 2.

3 a) $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a.5 + 0c = 5$

$a = 5$

$b.5 + d.0 = 0$

$b = 0$

$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 5 & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

$5.0 + c.5 = 0$

$c = 0$

$0.0 + d.5 = \frac{11}{2}$

$d = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{5}{1}} = \frac{11}{10}$

Figura 45: Producciones de E24 sobre tarea 3 de Guía 1.

En otra situación presentada en sesiones previas al estudio del concepto de eigenvalor y eigenvector como se presenta en la Figura 46, E24 se limita a justificar mediante algunos ejemplos. Una estructura Proceso de transformación lineal se caracteriza por la capacidad de pensar o imaginar cómo actúa una transformación sobre un conjunto de vectores o la capacidad de determinar transformaciones que verifiquen ciertas condiciones. Aunque la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ no es invertible, el estudiante no explica por qué, más bien considera otra matriz 2×2 y muestra que esta si tiene inversa.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Al revisar las producciones de E24 en otras tareas relacionadas con transformaciones lineales, se encontró que este estudiante no ha construido una concepción Proceso de transformación lineal estable, es decir, frente a situaciones diferentes que involucraban la transformación lineal el estudiante no fue capaz de responder de forma correcta y argumentar al respecto. En particular, no pudo determinar el operador lineal que describe la deformación de la imagen de la Figura 45.

2.Proponga una matriz A asociada a un operador lineal $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que no sea invertible. **Justifique su respuesta**.

2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

• $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figura 46: Producciones de E24 a situación complementaria sobre transformaciones lineales y matrices.

Por lo tanto, los aspectos presentados y discutidos en este apartado nos permiten pensar que una concepción Proceso de transformación lineal es indispensable para entender que existen diferentes transformaciones lineales que deforman de igual manera a un conjunto de vectores, sin embargo, pueden ser diferentes. Una transformación lineal no solo se caracteriza por la relación de transformación, sino por la relación de transformación establecida entre elementos de espacios vectoriales. Además, una concepción Proceso de transformación lineal estable le permite al estudiante reflexionar sobre la posibilidad de que existan “diferentes” transformaciones definidas sobre el mismo espacio vectorial que transforman de manera especial ciertos vectores (eigenvectores) y tal transformación puede describirse mediante la multiplicación por un escalar (eigenvalores).

2. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un operador lineal cuya representación matricial está dada por la matriz A.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine $Nul(P)$ y $det(P)$.

b) ¿Existe una relación entre $Nul(P)$ y $det(P)$?

c) Seleccione vectores w en el espacio nulo de P, ¿w es un Eigenvector de P? Si es así, ¿Cuál es el Eigenvalor asociado? **Justifique su respuesta**

$$\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \xrightarrow[f_2+f_3]{-2f_2+f_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} X - 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} X = 3z \\ y = -2z \end{matrix}$$

$$Nul(P) = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : X = 3z \wedge Y = -2z \right\}$$

Figura 47: Producciones de E10 respecto a la tarea 2 de Guía 2.

6.1.3 Coordinación de Procesos subyacentes en la concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. En el desarrollo de la enseñanza los estudiantes trabajaron con algunas tareas en el salón de clase y continuaban reflexionando con otras entregadas en un espacio extra clase. Después de revisar las producciones de los estudiantes en dichas tareas, seleccionamos algunas producciones con el propósito de mostrar evidencia empírica sobre la coordinación de procesos cognitivos subyacentes en la construcción del Proceso de eigenvalor y eigenvector.

En la Figura 47 se presenta las producciones de E10 respecto a la tarea 2 de la guía 2. El estudiante determina el espacio nulo del operador lineal P y puede expresar el conjunto solución estableciendo la condición sobre los vectores en $\mathbb{R}^3$ que pertenecen al espacio nulo de P. Al desarrollar su explicación en el tablero la profesora interviene y pregunta a E10 por una base para el espacio nulo. E10 puede proporcionar una base para el espacio nulo de P, como se puede evidenciar en la Figura 48.

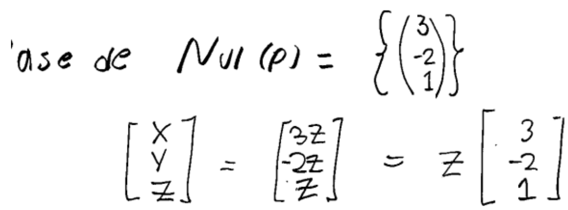


Figura 48: Una base para el espacio nulo de P en tarea 2 de Guía 2 propuesta por E10.

En ese contexto se desarrolla un diálogo entre los estudiantes, la profesora y el investigador. En la discusión los estudiantes intentan usar una estrategia para mostrar que todo vector no nulo del espacio nulo de P es un eigenvalor de dicho operador lineal.

E4: […] los vectores que estamos tomando aquí son del espacio nulo. En el anterior el cero era eigenvalor, pero no sé si tiene que ver eso siempre con el espacio nulo.

I: ¿Qué pueden decir si tenemos otro operador lineal y elegimos un vector no nulo de su espacio nulo? ¿Es un eigenvector?

E2: […] Pues yo encontré en este que el espacio nulo es una recta […] lo que me va hacer el eigenvalor es comprimirlo y estirarlo en esa misma recta. Entonces creo que todo vector diferente del vector cero es un eigenvector […].

E11: […] podemos escoger vectores en el espacio nulo y mostrar que son eigenvectores. Pues yo lo que hice fue tomar el vector general de la base y aplicarle la transformación para luego encontrar el respectivo eigenvalor (ver Figura 49).

$$T(w) = c(w)$$

$$0 = c(w)$$

$$T\begin{pmatrix} 3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 3z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{luego } c = 0 \text{ eigenvalor}$$

$$0 = c\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Figura 49: Razonamiento de E11 para justificar que todo vector no nulo del espacio nulo es un eigenvector

E20: No entiendo lo que estas mostrando.

E10: Pues yo lo veo de la forma en que [...] cualquier vector que tomemos del espacio nulo al aplicarle la transformación va a dar cero [...] podemos ver que el escalar que sirve para multiplicar cualquier vector w del espacio nulo y que de el vector cero es el escalar 0.

Las reflexiones de los estudiantes y la profesora se enfocan en analizar vectores del espacio nulo. E4 muestra estar reflexionando respecto a los vectores del espacio nulo de P y los eigenvectores con eigenvalor 0. Aunque lo menciona con cierta duda, de forma anticipada muestra tener una conjetura al respecto. Por su parte, E2 muestra que puede interpretar geométricamente el espacio nulo como una recta en el espacio tridimensional y considerar que los vectores que están sobre dicha recta son transformados comprimiéndolos o estirándolos mediante el eigenvalor. Respecto a esto, la idea de E2 se muestra en construcción y aunque parte de su afirmación no es válida, pues, todos los vectores son escalados en el vector cero, E2 expresa que el eigenvalor asociado a dichos eigenvectores es el cero.

5. Sea $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

a) Analice la matriz M y sin hacer operaciones explique si la matriz tiene por Eigenvalor al cero. **Justifique sus respuestas.**

b) Analice la siguiente ecuación $Mx = x$, ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación? ¿1 es un Eigenvalor de M?

a). Si cero es un eigenvalor $Mx = 0x$
es como si $Mx = 0$ que es como mirar
el espacio nulo de M.

Nul(M) : ?

Veo que la matriz tiene vectores que son
linealmente dependientes el determinante de
esta matriz será cero y ya con eso se
que el espacio nulo es diferente de cero.

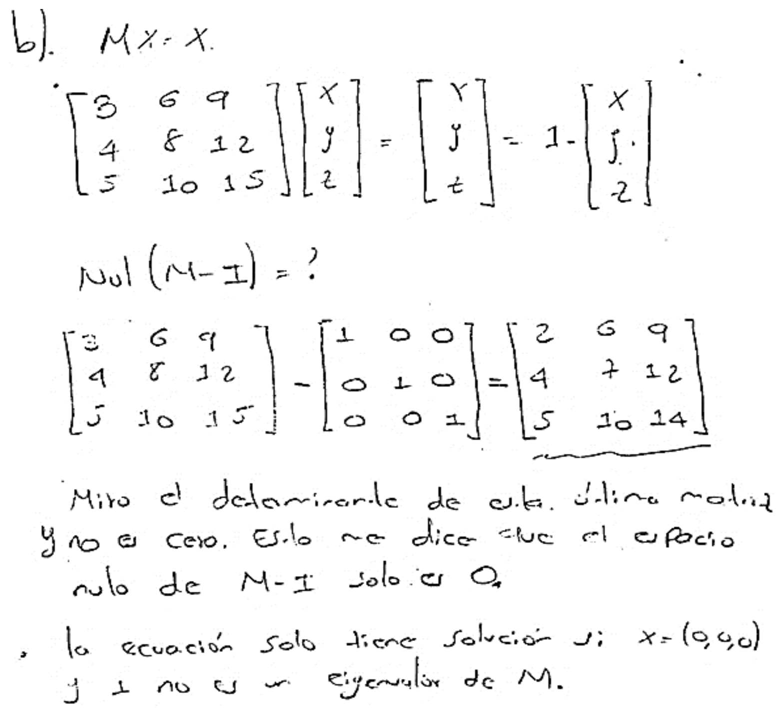
como $Nul(M) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$Mx = 0$
$\downarrow$
existen vectores diferentes de cero

Figura 50: Producciones de E10 en el ítem a) de la tarea 5 en Taller 2.

En la discusión anterior los estudiantes analizan una relación de contenencia entre dos conjuntos, es decir, seleccionan vectores que pertenecen al espacio nulo de P y muestran que también pertenecen al conjunto de eigenvectores con eigenvalor cero. La estrategia de E11 muestra como el determinar una base del subespacio nulo de P permite usar el vector de la base como un representante de dicho conjunto y a partir de esto mostrar cómo todos lo demás vectores son deformados. Mediante el análisis de dicha relación de contenencia los estudiantes empiezan a realizar una coordinación entre el Proceso conjunto solución de la ecuación vectorial de la forma

$T(u) = \lambda_0 u$ y el Proceso espacio nulo de $T - \lambda_0 I$. Esto se puede ver con más claridad en las producciones de algunos estudiantes respecto a la tarea 5 del Taller 2.



b). $Mx = x$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\text{Nul}(M - I) = ?$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 12 \\ 5 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Miro el determinante de esta última matriz y no es cero. Esto me dice que el espacio nulo de M-I solo es 0.

la ecuación solo tiene solución si $x = (0,0,0)$ y 1 no es un eigenvalor de M.

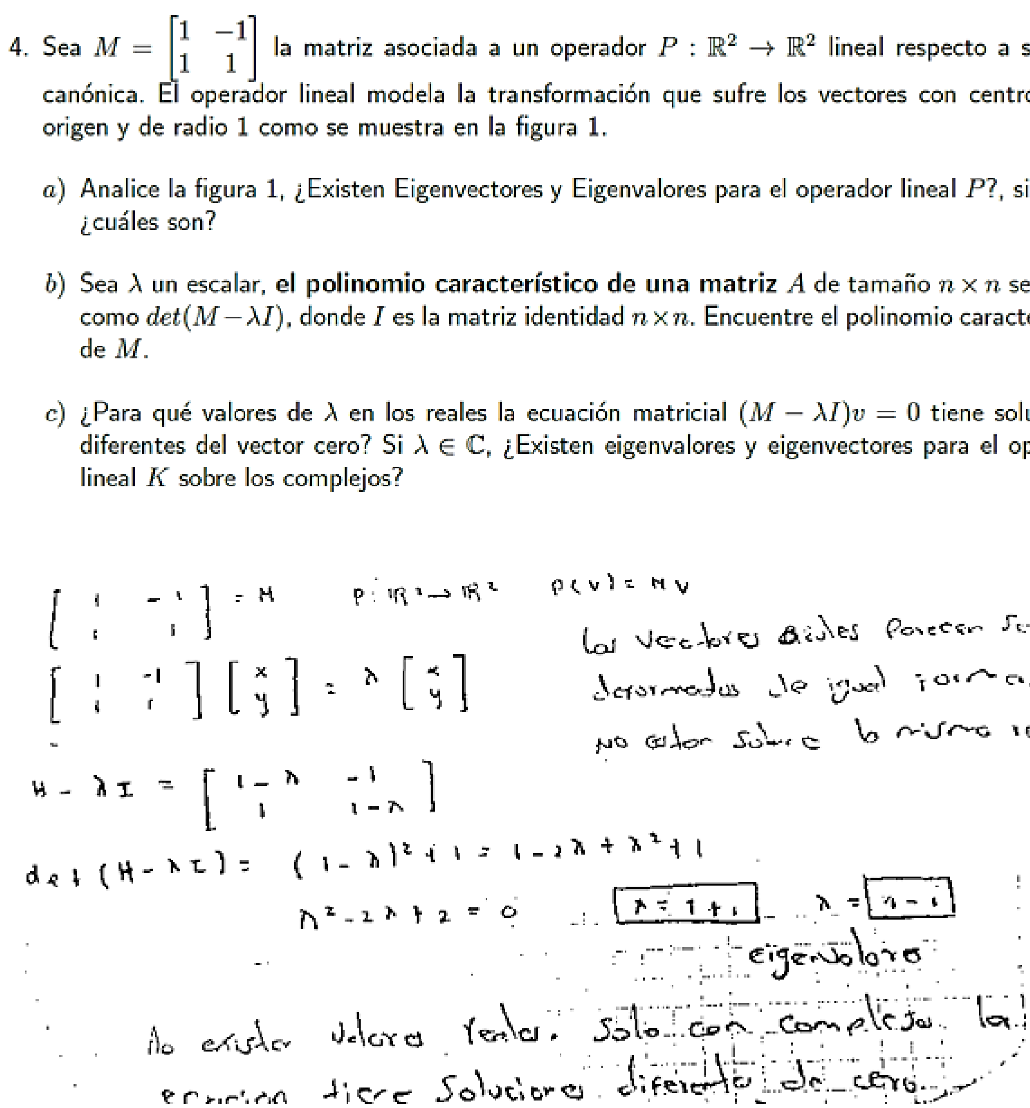
Figura 51: Producciones de E10 del ítem b) de tarea 5 en Taller 2.

Las respuestas del item b). de esta tarea (ver Figura 51), muestra que el estudiante puede reconocer dichas relaciones en otro contexto. Este item cuestiona el conjunto solución de la ecuación vectorial $Mx = x$, al mismo tiempo que pregunta si 1 es un eigenvalor de la matriz M.

Las respuestas de E10, muestran evidencia de haber interiorizado la Acción de determinar el conjunto solución de ecuaciones vectoriales de la forma $Ax = \lambda_0 x$. Además, como se mostró en discusiones anteriores, puede coordinar dicha Acción interiorizada con el Proceso de espacio nulo mediante la contenencia de los vectores del conjunto solución de la ecuación vectorial $Mx = x$ y el espacio nulo de $M - I$.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

El razonamiento del estudiante en este item, al igual que en el anterior, es analizar los vectores columna o renglón de la matriz $M - I$. Al no poder evidenciar facilmente si los vectores son linealmente dependientes o independientes y justificar, utiliza un argumento que incluye el determinante; $\det(M - I) \neq 0$. A partir de esto concluye que el espacio nulo contiene solo el vector cero y por tanto, el escalar 1 no es un eigenvalor de la matriz M.



4. Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a un operador $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal respecto a su base canónica. El operador lineal modela la transformación que sufre los vectores con centro en el origen y de radio 1 como se muestra en la figura 1.

   a) Analice la figura 1, ¿Existen Eigenvectores y Eigenvalores para el operador lineal P?, si es así, ¿cuáles son?

   b) Sea λ un escalar, **el polinomio característico de una matriz** A de tamaño $n \times n$ se define como $det(M - \lambda I)$, donde I es la matriz identidad $n \times n$. Encuentre el polinomio característico de M.

   c) ¿Para qué valores de λ en los reales la ecuación matricial $(M - \lambda I)v = 0$ tiene soluciones diferentes del vector cero? Si $\lambda \in \mathbb{C}$, ¿Existen eigenvalores y eigenvectores para el operador lineal K sobre los complejos?

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M \qquad P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad P(v) = Mv$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Los vectores azules parecen ser deformados de igual forma. no estan sobre la misma recta

$M - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$det(M - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 1 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \qquad \boxed{\lambda = 1+i} \qquad \lambda = \boxed{1-i}$

eigenvalores

No existen valores reales. Solo con complejos la ecuacion tiene soluciones diferentes de cero.

Figura 52: Producciones de E2 a tarea 4 de Guía 2.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

El concepto de determinante parece ser utilizado por E10 con el propósito de establecer condiciones o decidir respecto a los elementos del espacio nulo de $M - I$. Aunque en las respuestas presentadas no se conoce como encuentra el determinante de $M - I$, identificamos en su razonamiento una posible coordinación del Proceso de determinante con el Proceso resultante de igualdad entre el conjunto solución de la ecuación vectorial de la forma $Mx = x$ y el espacio nulo de $M - I$.

En la Figura 52 se muestra las respuestas de E2 a la tarea 4 de la Guía 2. El propósito es aportar más evidencia empírica respecto a las coordinaciones subyacentes en la construcción del Proceso de eigenvalor y eigenvector. La situación propuesta en la tarea 4 permite evidenciar que E2 ha construido el Proceso de eigenvalor y eigenvector y esto se debe a que ha coordinado el Proceso de conjunto solución de la ecuación vectorial $Hx = \lambda x$ y el Proceso de espacio nulo de $H - \lambda I$.

Dicha coordinación le permite entender la igualdad entre los dos conjunto y escoger el conjunto con el cuál puede establecer condiciones. En la Figura 52 se observa que el Proceso resultante lo coordina con el Proceso de determinante. Lo anterior le permite a E2 entiender que los eigenvalores y eigenvectores de la matriz M estan condicionados a $\det(M - \lambda I) = 0$. Reconoce tal ecuación como las raíces del polinomio característico y utiliza tal argumento para pensar en los eigenvalores asociados a M. Aunque la pregunta solicitaba los eigenvalores y eigenvectores, las respuestas de E2 se refieren solo a la no existencia de eigenvalores como un argumento suficiente para explicar que no existen eigevalores y eigenvectores en los reales.

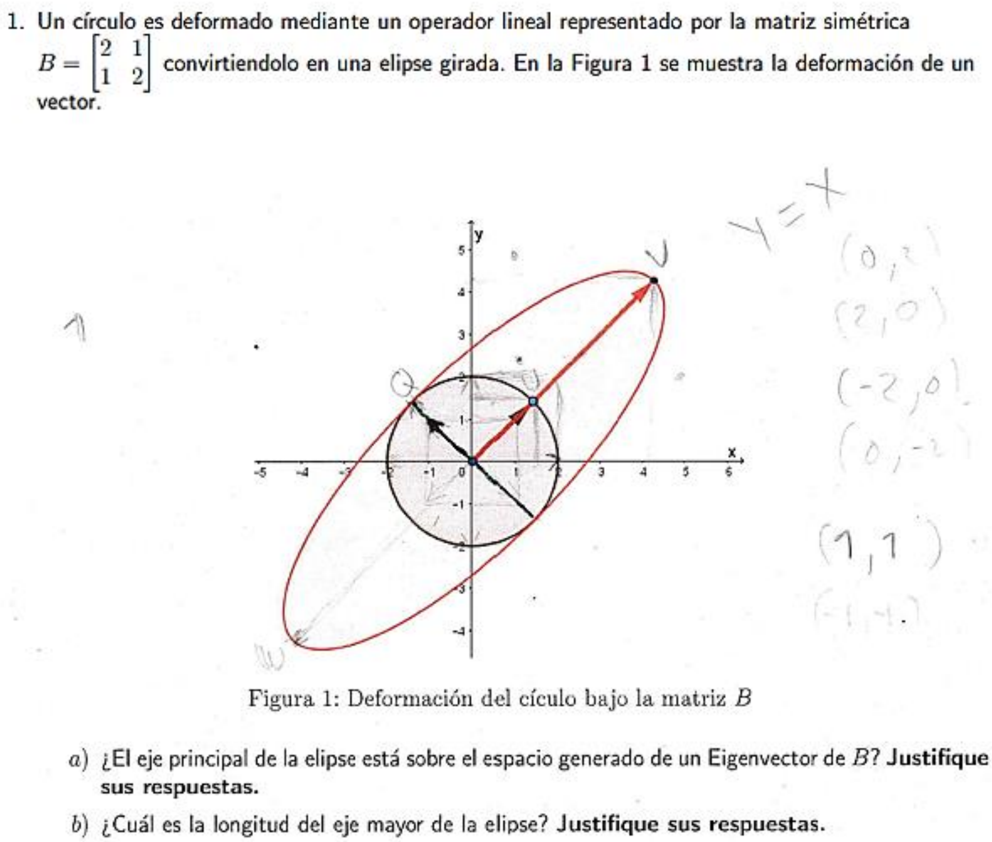

1. Un círculo es deformado mediante un operador lineal representado por la matriz simétrica $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ convirtiendolo en una elipse girada. En la Figura 1 se muestra la deformación de un vector.

Figura 1: Deformación del cículo bajo la matriz B

a) ¿El eje principal de la elipse está sobre el espacio generado de un Eigenvector de B? **Justifique sus respuestas.**

b) ¿Cuál es la longitud del eje mayor de la elipse? **Justifique sus respuestas.**

Figura 53: Interpretaciones de E11 a la figura presentada en la primera situación de la entrevista

6.2 Datos obtenidos de las entrevistas

El análisis de las entrevistas didácticas nos permitió obtener datos diferentes a los que provenían de la implementación de la enseñanza. Las preguntas realizadas en la entrevista se caracterizaron por tener un diseño novedoso respecto a las tareas desarrolladas en la instrucción. Los datos obtenidos mediante el desarrollo de la entrevista didáctica permitieron conocer información importante sobre las construcciones mentales estables del concepto de eigenvalor y eigenvector, así como los momentos donde los estudiantes cambiaban su forma de pensar y movilizaban mecanismos mentales. A continuación, se presenta un análisis de los datos proporcionados por las dos entrevistas didácticas.

6.2.1 Sobre la interpretación geométrica de eigenvalores y eigenvectores. En la descomposición genética preliminar se consideró algunos aspectos geométricos de eigenvalores y eigenvectores, específicamente respecto a la Acción de comparación entre los vectores $T(v_0)$ y $\lambda_0 v_0$ mediante la igualdad. La situación 1 de la entrevista involucraba elementos geométricos. Durante la realización de las dos entrevistas identificamos interpretaciones que los estudiantes estaban o habían construido sobre eigenvalor y eigenvector. El carácter dual de este concepto, asociado a características de elementos de un espacio vectorial y elementos de un campo permite que los estudiantes puedan asociar interpretaciones propias de dichos objetos en relación a la naturaleza de estos. A continuación, se presenta un fragmento sobre la situación 1 de la entrevista con E11 y las acciones realizadas por este estudiante sobre la figura presentada (ver Figura 53).

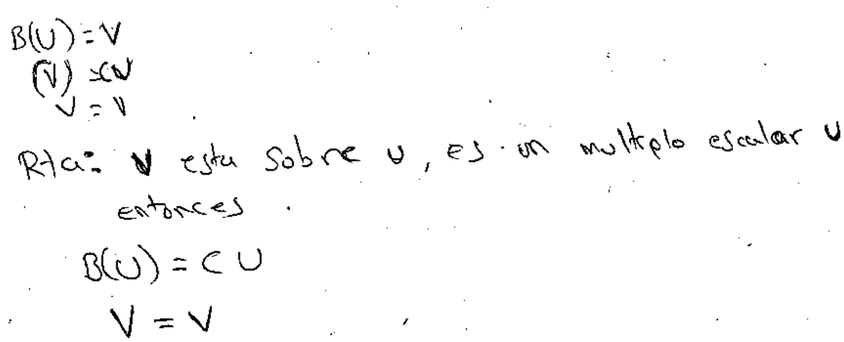


Figura 54: Condiciones de eigenvalor y eigenvector establecida por E11 en primera situación de la entrevista.

E11: […] este vector u sería $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ […] es como para darle un valor y poder saber qué valor tiene la transformación también.

I: Y, ¿Por qué hace eso?

E11: Para poder conocer el vector transformado y sin transformar y poder determinar cuál es el eigenvalor […] si encuentro un eigenvalor así asegurar que si está sobre un eigenvector.

I: ¿Cómo puede justificar lo del eigenvalor?

E11: […] gráficamente (momento de silencio) diría que sí porque u esta sobre v. Lo que me dice que es un múltiplo escalar de u. Entonces eso me garantiza que si existe un eigenvalor[…] (Ver Figura 54)

I: entonces, ¿Puede afirmar que u es un eigenvector de B?

E11: si porque ya sé que existe un eigenvalor.

I: ¿Cuáles otros vectores diferentes de u son eigenvectores de B?

E11: yo creería que $(-2,0)$ y (0, -2) (ver Figura 53) […] sin embargo, debo multiplicarlos por la matriz (ver Figura 55) […] yo pienso que los vectores $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son posibles eigenvectores porque están sobre u […] hace un momento garanticé que existe un eigenvalor para u […] para estos que escribí como posibles tambien están sobre u y también existe un eigenvalor.

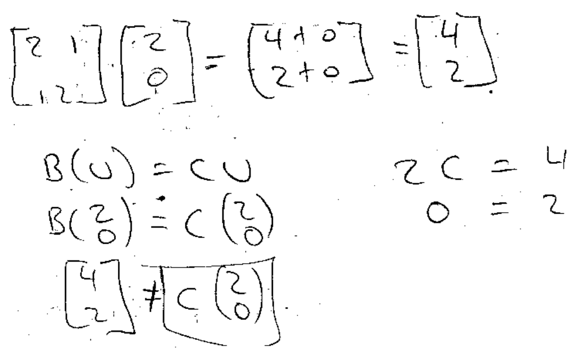


Figura 55: Procedimiento de E11 para justificar que $[2,0]$ no es un eigenvector de B en la primera situación de la entrevista.

E11 aborda la pregunta considerando el vector u sobre el eje mayor de la elipse. El estudiante parece reconocer la transformación del vector negro como el vector rojo, sin embargo, expresa que es necesario conocer el vector "sin transformar" y "transformado" para averiguar por el escalar que los iguala. Saber las coordenadas numéricas de los vectores u y v le da seguridad al estudiante para determinar el escalar que los relaciona. Cuando reconoce la relación geométrica de colinealidad entre los vectores u y v resultado de la transformación sobre u afirma que tal vector es un eigenvector, pues, se garantiza la existencia de un escalar que iguala u y $T(u)$. Su argumento de "u esta sobre v, es un múltiplo escalar de u" parece mostrar evidencia de haber interiorizado la Acción de comparar u y $T(u)$ de forma geométrica mediante la igualdad. En los argumentos del estudiante se encuentra la colinealidad y el producto por un escalar, características asociadas a vectores y escalares respectivamente. En razonamientos posteriores expresa que los vectores $[1,1]$ y $[-1,-1]$ son posibles eigenvectores de B porque están sobre u. Sin embargo, para determinar la longitud del eje mayor de la elipse el estudiante no considera lo anterior como una estrategia. Lo anterior puede ocurrir debido a que su concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector está en construcción o no es estable. Aunque reconoce que múltiplos escalares de u son eigenvectores de B muestra duda si tienen el mismo eigenvalor asociado. (más adelante en la entrevista expresa que todos los que esten sobre la recta del eigenvector son eigenvectores)

E11: […] para hallar la longitud puedo usar la distancia entre puntos o dos veces la longitud de v […].

I: Usted había dicho que el vector $(1,1)$ es un posible eigenvector, ¿Por qué?

E11: […] (realiza los cálculos, ver Figura 56) tiene 3 por eigenvalor […] (se queda pensando unos minutos) ahh todos los vectores que están sobre $(1,1)$ van a tener el mismo eigenvalor […] ¿Estoy bien o estoy mal?

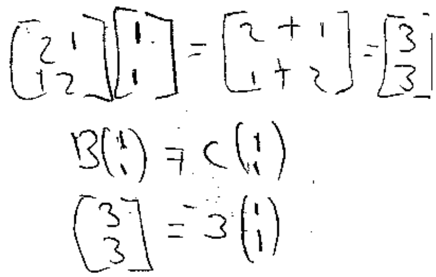


Figura 56: Procedimiento de E11 para mostrar que $[1,1]$ tiene por eigenvalor a 3 en situación 1 de la entrevista.

I: ¿Por qué cree […]? (se queda pensando) ¿Cuál sería el eigenvalor para el vector $(-1,-1)$?

E11: También sería 3 […]

I: ¿Si tomo otros que estén sobre la misma recta que $[1,1]$?

E11: También sería 3.

I: ¿Esto podría servirle para responder la pregunta?

E11: siii (se queda pensando)

I: Entonces, ¿Qué significa que el eigenvalor de u sea 3?

E11: […] la magnitud de v es tres veces la magnitud de u […] lo va a multiplicar por 3.

I: esto, ¿Lo había considerado para encontrar la longitud del eje mayor?

E11: […] esto sería otra estrategia (trabaja en la hoja, ver Figura 57) […]

$3|U| = |V|$ y $2|V| =$ longitud del eje mayor

$6|U| = 2|V| =$ longitud del eje mayor.

Figura 14: Razonamiento de E11 para justificar cuál es la longitud del eje mayor de la elipse en situación 1 de la entrevista.

Después que E11 entiende que todo vector colineal a u tienen el mismo eigenvalor asociado y mediante la reflexión orientada por el investigador, puede utilizar esto como una estrategia para encontrar la longitud del eje mayor de la elipse. Lo anterior, requiere una concepción Proceso geométrica estable de eigenvalor y eigenvector para interpretar que el eigenvalor de los vectores colineales u y [1,1] es el mismo y es 3. A partir de una comprensión de lo anterior, E11 longitud puede relacionar con el escalar 3 la longitud de los vectores u y v mediante la igualdad $3||u|| = ||v||$, es decir, $T(u) = 3u$. Al revisar las respuestas del otro estudiante entrevistado, E7, respecto a este punto se encontró lo siguiente:

> E7: […] para hallar la longitud del eje mayor podría encontrar la norma del vector rojo […] lo que veo es que no tengo las coordenadas del vector […] bueno, los vectores rojo y negro están sobre la recta. Voy a mirar que pasa con el vector $(1,1)$.
>
> I: ¿Qué vas a mirar con el vector $(1,1)$?
>
> E7: […] con esto puedo saber cuál es el eigenvalor de este vector [señala el vector $(1,1)$] y saber cuál escalar que iguala los vectores […] establecer relaciones entre los vectores […] en este caso voy a relacionar las longitudes de los vectores. Ahhh, 3 veces la longitud del vector negro es el vector rojo.

E7 muestra no solamente coordinar la colinealidad entre los vectores u y v con la ponderación por un escalar mediante la igualdad, también puede pensar en otros vectores colineales a u para determinar el eigenvalor asociado y utilizar dicha información para averiguar la longitud del eje mayor de la elipse. La evidencia que proporcionan estos datos nos muestra que una concepción Proceso geométrica de eigenvalores y eigenvectores está relacionada con la coordinación de otros Procesos geométricos, particularmente se han identificado la colinealidad y el producto por un escalar.

6.2.2 Transito entre concepción Acción y concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. Una concepción Acción para algún concepto matemático suele relacionarse con la aplicación de un algoritmo, sin embargo, dicha concepción no se refiere exclusivamente a esto, más bien corresponde a una dependencia del estudiante de pautas externas, ya sean a partir de una expresión matemática, una guía de instrucción o el mismo docente. Los datos obtenidos de las entrevistas nos permitieron identificar algunas características en el tránsito de una concepción Acción a Proceso. Las evidencias al respecto ayudan a entender las estructuras Acción y Proceso en relación a las formas de pensamiento que las caracterizan. A continuación, se presenta un diálogo entre el investigador y E11 entorno al ítem d). de la pregunta 1 en la entrevista. La respuesta del estudiante parece poco segura y no puede sustentar su argumento, al respecto el investigador plantea otra pregunta donde se muestra la incapacidad de explicar o razonar.

> E11: tomo la matriz (se queda pensando) […] No puede ser un eigenvalor […] ya tengo todos los eigenvectores que están sobre el eje mayor y menor con eigenvalor diferente de 2 [..] todas las combinaciones lineales de Q van a tener eigenvalor 1 y, todas las combinaciones lineales de u van a tener por eigenvalor 3.

I: y, ¿Qué tal existan otros eigenvectores que aún no conocemos?

E11: habría que averiguarlo … (se queda pensando) tomo un vector $[x, y]$ lo multiplico por la matriz y pues ahora no sé muy bien que tengo que hacer. Pero, si creería que solo tiene a 1 y a 3.

I: ¿Por qué tiene certeza que los eigenvalores solo son 1 y 3?

E11: [..] un eigenvalor puede tener muchos eigenvectores, pero, dos eigenvectores no pueden tener el mismo eigenvalor […]

I: ¿Una matriz 2×2 puede tener tres eigenvalores?

E11: […] creo que eso puede ir relacionado con el número de filas y columnas.

La conversación anterior muestra que E11 no puede dar explicaciones contundentes respecto a si 2 es un eigenvalor de la matriz B. Como se mostró en el primer diálogo de la sección anterior, el estudiante reconoce que para ser un eigenvector debe tener un eigenvalor asociado, también en la Figura 55 se mostró que puede justificar porque [2,0] no es un eigenvector, sin embargo, ante la pregunta del ítem d). no puede justificar que el escalar 2 no tiene eigenvectores asociados. El estudiante intenta abordar la solución de la ecuación vectorial $Bu = 2u$ pero no puede seguir el razonamiento. Mostrar que la única solución de la ecuación es el vector [0,0] fue una forma de pensamiento que no evocó el estudiante. Su aparente seguridad que la matriz B solo tiene por eigenvalores 1 y 3 se sustenta en algo que recuerda en relación al número de filas o renglones de la matriz. La imposibilidad de explicar si una matriz 2×2 puede tener 3 eigenvalores da evidencias de no poder totalizar el Proceso de eigenvalor y eigenvector dado que aún no lo ha construido. En la sección 6.2.4 nos referimos a datos que muestran información sobre la totalidad de este Proceso.

3. Sea

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Explique si la matriz D tiene por Eigenvalor al 0. Si la respuesta es afirmativa, indique qué carácteristicas tienen los Eigenvectores asociados. Si la respuesta es negativa, justifique.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x+z = 0 \\ 3x-3z = 0 \\ x-z = 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Nul}(0) : \{(x,y,z) \mid x = z\}$$

Figura 58: Razonamiento de E11 sobre l ítem a) de la situación 3 de la entrevista.

El investigador decide presentarle al estudiante la situación 3 de la entrevista, dado que era pertinente para continuar la discusión. Mientras el estudiante trabajaba sobre los ítems de dicha pregunta al menos en dos ocasiones se remite a cuestionamientos abiertos que tiene pendiente sobre la situación 1. A continuación, presentamos un fragmento de la entrevista respecto a la situación 3 y el momento donde el estudiante regresa a la primera. Al aborda la situación 3, E11 decide encontrar el espacio nulo, después de hacer el procedimiento (ver Figura 58) el investigador y el estudiante tienen el siguiente diálogo.

I: ¿Cuál sería un vector del espacio nulo de la matriz?

E11: el vector (1,0,1) está en el espacio nulo […] el producto debe ser cero.

I: ¿Cuál sería el eigenvalor?

E11: umm sería el cero (se queda pensando)

I: tiene dudas sobre el eigenvalor.

E11: sí. Es que estaba pensado si era el eigenvalor el que no podía ser cero o era el eigenvector. Pero ya. El eigenvector es el que no puede ser cero. Un eigenvalor puede tener muchos eigenvectores, pero un eigenvector tiene solo un eigenvalor.

I: Sino no hubiera calculado el espacio nulo puede justificar de otra forma que cero es un eigenvalor.

E11: (Se queda pensando) bueno y si en el punto anterior le encontraba el espacio nulo quizás podría mostrar que el eigenvalor es cero.

I: ¿Los vectores del espacio nulo de la matriz B son eigenvectores ?

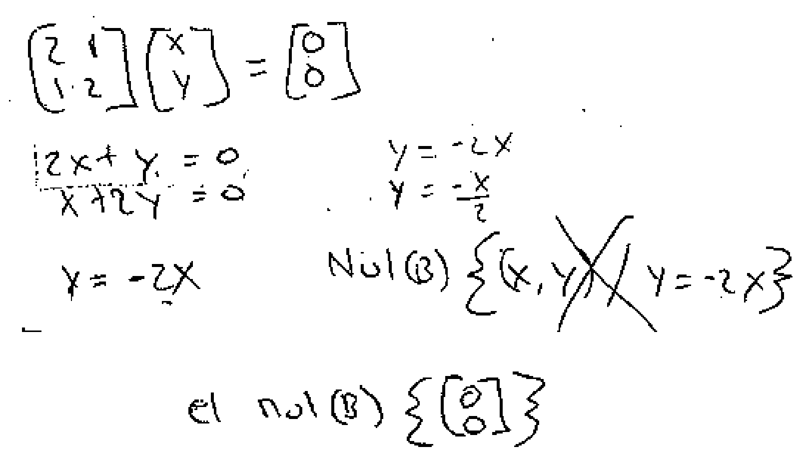


Figura 59: Procedimiento de E11 para encontrar el espacio nulo de la matriz B de la situación 1 de la entrevista

E11: tomo este vector y al multiplicarlo por la matriz voy a mirar que vectores me dan el vector cero […] ahh espere me equivoque, solo está el vector cero (Ver Figura 59)[…] (se queda pensando) el cero no es un eigenvector de la matriz B. Eso apoya la idea que la matriz no tiene más de dos eigenvalores.

El estudiante muestra tener una concepción Proceso de espacio nulo. Puede determinar las características de los vectores que pertenecen a tal subespacio y dar ejemplos específicos. Se identifican varios momentos donde el estudiante reflexiona sobre las acciones realizadas y muestra inquietud respecto al cero como posible eigenvalor del operador lineal de la pregunta 1. La reflexión del estudiante respecto la solución de la ecuación vectorial $Bu = 0$ le permite reconocerla como el espacio nulo de la matriz B y entender que tiene única solución y es la trivial. El Proceso de comparar vectores $T(v_0)$ y $\lambda_0 v_0$ mediante la igualdad le permite reconocer que el vector [0,0] aunque es solución de la ecuación $Bu = 0$ y pertenece al espacio nulo de B no es un eigenvector de B, concluyendo que 0 no es un eigenvalor de B.

En este fragmento de la entrevista se evidenció que, aunque el estudiante tiene una concepción Proceso de espacio nulo no ha construido una concepción Proceso estable de eigenvalor y eigenvector. Debe recurrir a procedimientos mediante indicaciones externas para dar respuesta al ítem a). de la pregunta 3. En la siguiente sección se muestra otros fragmentos de la entrevista sobre el razonamiento del estudiante cuando muestra haber interiorizado ciertas Acciones y coordinado Procesos necesarios en la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector.

6.2.3 Concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. La construcción de conceptos matemáticos puede desarrollarse de formas diferentes en un grupo de estudiantes, sin embargo, en el dinamismo de la enseñanza y el aprendizaje es indispensable comprender el concepto de forma adecuada. La construcción de un Proceso adecuado es transcendental en la construcción de un Objeto. Mediante la evidencia empírica encontrada en esta investigación proveniente de la implementación de la enseñanza y las entrevistas didácticas nos permiten reconocer la estructura Proceso de eigenvalor y eigenvector. Dicha estructura proviene de la coordinación de ciertos Procesos, lo anterior ayuda a explicar la complejidad cognitiva que envuelve dicho concepto. Tales

Procesos subyacentes se muestran como fundamentales para una concepción Proceso estable de eigenvalor y eigenvector para posteriormente ser encapsulado en un Objeto.

En la sección anterior se presentó algunos fragmentos de la entrevista con E11 respecto a la situación 3. Nos referimos a la interpretación por parte de E11: "si 0 es un eigenvalor de la matriz D es como el espacio nulo de la matriz, $Dx = 0$". Aunque E11 tiene una concepción Proceso de espacio nulo, su construcción del cero vector como no eigenvector está en progreso. Mediante la reflexión motivada por el investigador el estudiante parece coordinar el Proceso 1 con el Proceso de espacio nulo. El Proceso resultante le permite ser consciente que el conjunto $Nul(D)$ debe tener infinitos elementos, este Proceso luego es coordinado con el Proceso de determinante.

I: ¿Qué pasa si tengo otra matriz que tiene por espacio nulo solo el vector cero?

E11: […] bueno es que mirando las filas de esta matriz y las del otro punto, en la matriz B sus filas o columnas son linealmente independientes. Esto pasaría si tengo otra matriz que tiene solo el vector cero en el espacio nulo. Y por eso me va a dar que el determinante es diferente de cero […]

I: ¿Eso está relacionado con el espacio nulo de la matriz?

E11: siempre que el determinante sea diferente de cero solo va a tener en el espacio nulo al vector cero.

I: piense en esto y mire nuevamente la primera pregunta del otro punto (ítem a). de la pregunta 3). ¿Qué explicación puede dar ahora?

E11: la matriz tiene una columna de ceros por lo que tiene determinante cero. Pero también veo que la columna uno y la columna 3 una es múltiplo escalar de la otra lo cual me indica que su determinante también es cero. Por eso el espacio nulo tiene infinitos vectores.

I: entonces, ¿Puede utilizar esto para justificar que la matriz tiene eigenvalor cero?

Si la matriz tiene como determinante el 0 entonces tendrá como eigenvalor al 0

Figura 60: Razonamiento de E11 sobre matrices que tienen por determinante cero.

Una de las preguntas del investigador que motiva la reflexión de E11 es "¿Qué pasa si tengo otra matriz que tiene por espacio nulo solo el vector cero?". Esta pregunta se añade entorno al tópico de discusión sobre el 0 como eigenvector de la matriz C. La pregunta que ahora analiza E11 es sobre cualquier matriz cuadrada. Como resultado de las reflexiones que ha realizado puede reconocer características de los vectores que conforman la matriz, relacionarlo con el espacio nulo y el determinante (ver Figura, 60) Considerando el episodio de la sección anterior, 6.2.2 y la presente sección se muestra evidencia que E11 puede pensar en el conjunto solución de la ecuación vectorial, reconocer que el vector cero no es un eigenvector, identificar el conjunto solución de la ecuación vectorial como el espacio nulo y establecer condiciones usando el determinante. Tales elementos se muestran como indispensables en la estructura Proceso.

Con el propósito de añadir más evidencia empírica a lo anterior, a continuación, presentamos un fragmento de la entrevista con E7 sobre la situación 2 de la entrevista.

2. Sea

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Una matriz 2×2 tal que la entrada $a_{11} = \alpha$, cualquier número real y las otras entradas son los números indicados en la matriz.

a) ¿Qué valor debe tomar α para que la matriz C tenga por Eigenvalor a 3? **Justifique su respuesta.**

b) Para el valor de α encontrado, ¿La matriz C tiene otros Eigenvalores diferentes a 3? **Justifique su respuesta.**

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x_1 - x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha x_1 - x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 3x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - 3)x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Figura 61: Razonamiento de E7 a situación de la entrevista.

E7: se debe garantizar que 3 sea un eigenvalor

I: Puedes decirme qué está haciendo…

E7: eehh, tengo algunas cosas que no conozco. Ese valor de α y los eigenvectores de 3. Pero los puse así general.

I: ¿Por qué está igualando eso?

E7: bueno, esa es la condición de que sea un eigenvector. Si 3 es un eigenvalor deben existir vectores (x_1, x_2) y se cumple esta igualdad (se refiere a $Cx = 3x$, Ver Figura 61). Lo que veo es mirar el sistema que me resulta.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

I: ahh ok. Y ¿Qué vas a mirar en el sistema? ¿Por qué el sistema?

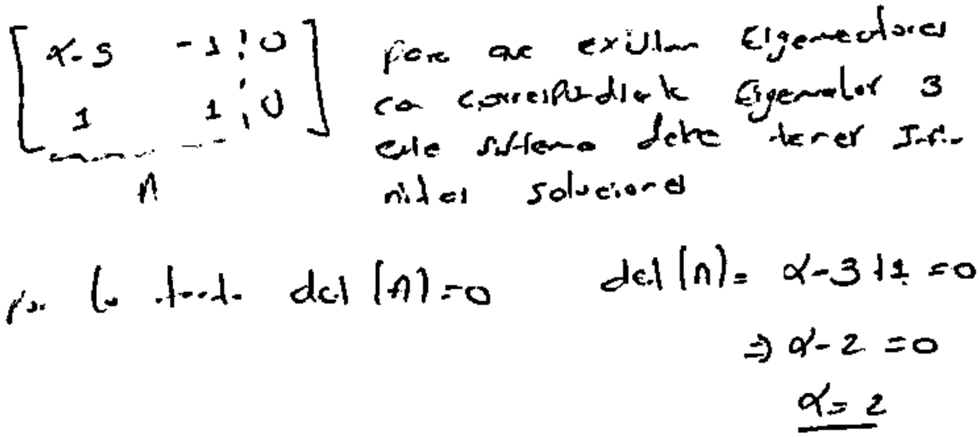


Figura 62: Razonamiento de E7 para encontrar el valor de α en situación 2 de la entrevista.

E7: bueno estaba mirando ese sistema pero ehh (momento de silencio) [...] bueno este sistema lo puedo expresar como esto (señala la matriz aumentada de la Figura 62) y pues ahí ya solo está el α. Ahora, lo del sistema es porque según la solución del sistema se cumple o no que 3 sea eigenvalor.

I: entonces según la solución 3 es o no es un eigenvalor…

E7: Exacto. Si el sistema tiene soluciones infinitas entonces 3 es un eigenvalor de la matriz.

I: ¿Por qué debe tener infinitas soluciones?

E7: Es como hallar el espacio nulo de esa matriz (se refiere a la aumentada, ver Figura 62). Debe tener infinitos vectores ese espacio nulo porque el cero no es un eigenvector [...] entonces para que tenga infinitas soluciones el determinante debe ser cero. Ahh pues ya puedo tener información sobre α.

I: ok. Analice entonces cuales son…

E7: listo. El valor es 2 y se cumple que tiene por eigenvalor a 3.

El razonamiento que presenta E7 permite identificar en otro contexto los Procesos cognitivos evidenciados por E11 y sobre los cuales nos hemos referido anteriormente. E7 muestra comprender que para que 3 sea un eigenvalor es porque existen eigenvectores asociados no nulos. Puede pensar en vectores generales como correspondientes eigenvectores del eigenvalor 3. Determinar que el valor de α está asociado con encontrar un operador lineal especifico en una familia de operadores lineales mediante la representación matricial. La situación a la que se enfrenta E7 en esta pregunta puede corresponder a una reversión del Proceso de eigenvalor y eigenvector. E7 necesita reconocer la existencia de eigenvectores dado que 3 es un eigenvalor, por otra parte, requiere establecer condiciones para determinar una representación matricial del operador lineal que cumpla tales características.

En la situación 2 de la entrevista no se requiere justificar la existencia de soluciones no nulas de la ecuación $Cx = 3x$. Se debe asumir como hipótesis que el conjunto solución es infinito y establecer condiciones para encontrar el valor α. En el razonamiento de E7 se encuentra evidencia de haber construido los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector y poderlos coordinar. Además del estudiante reconocer la relación existencial entre eigenvalores y eigenvectores y ha construido el vector cero como no eigenvector de cualquier operador lineal. Estos dos Procesos cognitivos están involucrados al momento de interpretar el problema con determinar condiciones para que el sistema tenga soluciones infinitas. Al reconocer la matriz $C - 3I$ piensa en el espacio nulo de tal matriz en términos del determinante. Sí el determinante es igual a cero, entonces el espacio nulo tiene infinitos vectores.

Los elementos mencionados anteriormente se han identificado en tres situaciones diferentes: i). implementación de la enseñanza (sección 6.1.3); ii). entrevista con E11 (sección 6.2.3); iii).

Entrevista con E7 (sección 6.2.3). Por lo anterior, consideramos que los Procesos subyacentes a la estructura Proceso de eigenvalor y eigenvector son: Proceso de cero vector como no eigenvector; Proceso de conjunto solución de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$; Proceso de espacio nulo y Proceso de determinante.

6.2.4 Proceso de polinomio característico en la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector. La totalidad de un Proceso se relaciona con la capacidad de ver el Proceso como un todo. Tal atributo hace parte de las características que se le atribuyen a la estructura Objeto. Para el caso del concepto de eigenvalor y eigenvector parece estar relacionado con la capacidad de argumentar sobre todos los eigenvalores y eigenvectores asociados a un operador lineal. Lo anterior está estrechamente relacionada con la dimensión del espacio vectorial sobre el cuál se define el operador lineal. Para los espacios vectoriales de dimensión finita el total de eigenvalores de un operador corresponde a una cantidad finita, mientras que los eigenvectores corresponden a una cantidad infinita.

Al revisar los datos provenientes de la entrevista, identificamos un fragmento de la entrevista con E7 sobre el ítem d). de la situación 1 donde reflexiona sobre el polinomio característico para ver la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector.

E7: […] dos dos (momento de silencio). Ya sabemos que 3 y 1 son eigenvectores.

I: exacto, ¿Qué dices acerca de 2?

E7: la matriz es de tamaño 2×2, el polinomio característico de esta matriz es de grado 2, no puede tener más de dos raíces. Umm diría que no puede ser un eigenvalor de B.

I: entonces, ¿3 y 1 son raíces del polinomio característico de la matriz B?

E7: […] el polinomio característico me da información sobre todos los eigenvectores posibles de la matriz. Bueno, ambos escalares son eigenvalores porque tienen eigenvectores asociados. Si son raíces del polinomio. Mi argumento sería que ese polinomio no puede tener otras raíces, 2 no puede ser otra raíz.

El ítem d). de la situación 1 de la entrevista cuestionaba al estudiante si 2 era un eigenvalor de B. Aunque la pregunta parece no incluir directamente ver la totalidad de los eigenvalores del operador, implícitamente lo hace, dado que ya se conoce dos eigenvalores y se pregunta por un tercero. El razonamiento que usa E7 corresponde al polinomio característico, sin embargo, no necesita determinar sus raíces mediante su cálculo directo. Al asociar las raíces del polinomio con eigenvalores puede argumentar que 2 no puede ser otra raíz dado que el polinomio es grado 2, ya que 1 y 3 deben ser raíces. El argumento del estudiante se fundamenta principalmente en su concepción Proceso de polinomio característico y esto parece estar relacionado con ver la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector.

En la situación 3 de la entrevista con E11, se identificó que después de reflexionar sobre las situaciones 1 y 2, reconoce que la existencia de eigenvalores y eigenvectores está condicionado con la existencia de raíces del polinomio característico. E11 y el investigador han discutido sobre el 0 como eigenvalor de la matriz D. Después de preguntas del investigador a E11 sobre todos eigenvalores de la matriz D se desarrolla el siguiente diálogo:

E11: […] Sería hacer el determinante con ese escalar general […] ahh esto creo que es como el polinomio característico.

I: entonces, ¿Ya puedes saber cuáles son los eigenvalores?

E11: Sí, creo que si. Umm pues el polinomio característico me podría dar información si lo igualo a cero.

I: ¿Por qué igualarlo a cero?

E11: para garantizar que el escalar que obtenga en realidad tenga eigenvectores asociados, o que sea un eigenvalor (trabaja en la hoja, ver Figura 63)

I: ¿Esos son los posibles eigenvalores o son?

E11: tengo que mirar cuáles son sus eigenvectores (trabaja en la hoja, ver Figura 64).

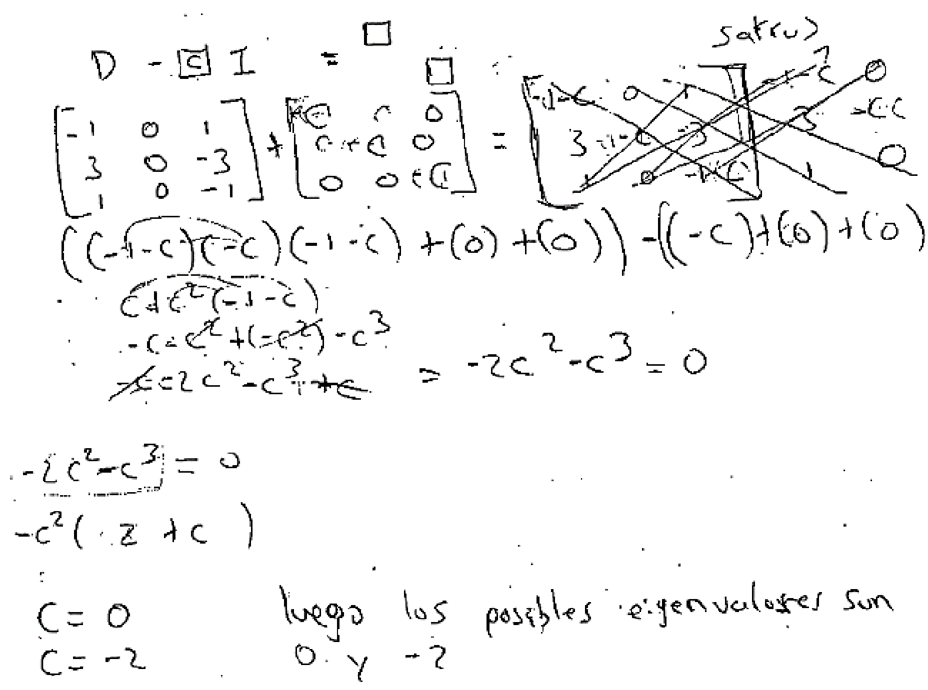


Figura 63: Razonamiento de E11 para determinar los eigenvalores de *D* en situación 3 de la entrevista

En el fragmento anterior E11 está reflexionando sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector. Cuando puede relacionar las raíces del polinomio característico con los eigenvalores de un operador lineal manifiesta cierta incertidumbre. Después de estar atascado con la situación 1 de la entrevista, ahora parece estar construyendo y movilizando las estructuras y mecanismos mentales que le permiten pensar sobre la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector.

La estructura Proceso del concepto en cuestión se relaciona con la capacidad de reconocer y argumentar la existencia de subespacios de un espacio vectorial que al ser transformados por un operador lineal su efecto puede ser descrito mediante el producto por un escalar. Ver la totalidad de este Proceso, implica ver que un operador lineal puede ser caracterizado por los conjuntos de eigenvectores y sus respectivos eigenvalores. Lo anterior, parece estar en relación con un entendimiento de la cantidad de eigenvalores de un operador lineal. De manera que una concepción Proceso de polinomio característico le permite explicar y ser consciente de dicha totalidad.

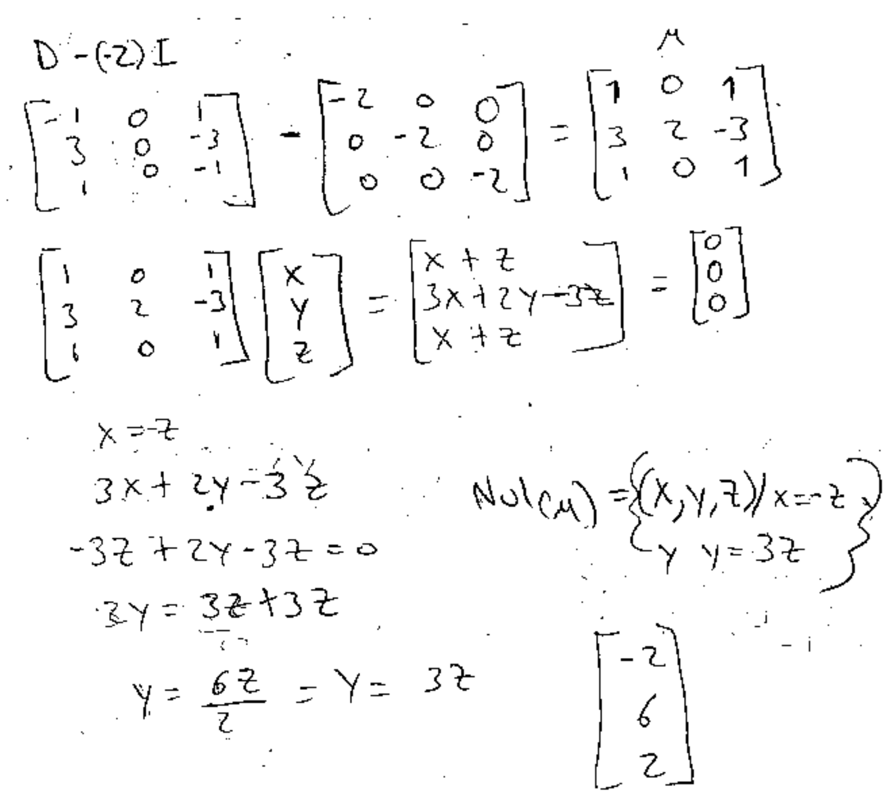


Figura 64: Razonamiento de E11 para determinar los eigenvectores asociado al eigenvalor -2 en situación 3 de entrevista.

6.2.5 Reflexiones sobre la estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector. La encapsulación de un Proceso para construir un Objeto se caracteriza por la capacidad de ver la totalidad del Proceso y realizar Acciones sobre esta. En la sección anterior se mencionaron algunos aspectos involucrados en la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector. La reflexión de E11 continua, particularmente, el ítem e). cuestionaba sobre la existencia de una base conformada por eigenvectores. Al respecto el diálogo entre el investigador y E11 continua.

E11: […] voy a tomar los vectores $[3,1,3]$ y estos que ya tenía ($[0,3,0]$ y $[4,0,4]$) y los pongo en un matriz para hallar el determinante.

I: ¿Para que el determinante?

E11: Es para mirar si son linealmente dependientes o independientes (realiza los cálculos).

I: ¿Por qué tomó esos tres vectores?

E11: porque son eigenvectores y necesito tres para encontrar una base.

I: ¿cuántos vectores necesita como máximo o mínimo para la base?

E11: umm, son tres en realidad. Por eso tomé estos tres, pero ya veo que uno es combinación lineal de los otros. Solo los vectores $[0,3,0]$ y $[4,0,4]$ son linealmente dependientes. No se puede tener una base con esos vectores.

I: ¿No puede encontrar otro tal que sean linealmente independientes?

E11: Si tomo otro que sea de la forma $x = z$ este será combinación lineal de otros.

I: ¿Hay un conjunto de vectores que generan el espacio nulo de D?

E11: si es como una base lo que me pregunta […] sería $[1,0,1]$ y $[0, 1,0]$ que tambien cumplen la condición de que $x = z$.

I: ¿Ya descartó con todos los eigenvectores de la matriz D?

E11: bueno, no había pensado en los eigenvectores asociados a -2 [...] voy mirar con $[-1, 3,1]$

I: ¿Por qué considera ese?

E11: ese vector cumple la condición que $x = -z$ y $y = 3x$ para pertenecer al nulo de $D + 2I$.

I: ¿Este vector puede ser combinación lineal de [1,0,1] y [0,1,0]?

E11: (piensa unos minutos) si $[-1,3,1]$ estuviera en el nulo de D tendría la forma de $x = z$ y podría ser combinación lineal (trabaja en la hoja, ver Figura 65)

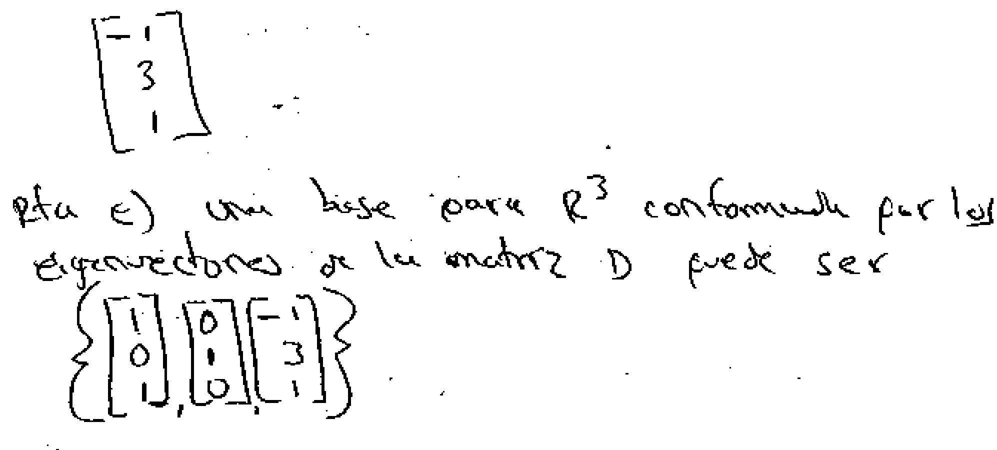


Figura 65: Conclusión de E11 sobre ítem e) de situación 3 en la entrevista

En el dialogo anterior notamos que E11 mediante la reflexión orientada por el investigador empieza a pensar en todos los "posibles" eigenvalores de la matriz D mediante un razonamiento que involucra el polinomio característico. Desde el principio de la entrevista didáctica, E11 expresa en reiteradas ocasiones la relación de existencia entre los eigenvalores y eigenvectores. Aunque considera que 0 y -2 son "posibles eigenvalores" y parece no estar completamente seguro, todo parece relacionarse con una necesidad que siente de especificar cuáles son los eigenvectores asociados a estos eigenvalores para completar la certeza de su argumento.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Después de encontrar los respectivos eigenespacios de 0 y -2 la reflexión de E11 se orienta a reconocer características de linealidad de los eigenvectores que conoce. En un momento su atención parece enfocarse solo en los eigenvectores asociados a 0, al seleccionar 3 eigenvectores del eigenespacio asociado a 0 reconoce que siempre un vector será una combinación lineal de los otros dos. Cuando puede ver cada eigenespacio descrito por los vectores de una base, reflexiona sobre el conjunto de vectores que contiene los eigenvectores de la base para cada eigenespacio. Mediante su concepción Proceso de base y las construcciones mentales que han estado evolucionando en el transcurso de la entrevista puede argumentar que los vectores $[1,0,1]; [0,1,0]; [-1,3,1]$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Argumentar sobre lo anterior involucra pensar en la totalidad del Proceso y realizar la Acción de determinar si el conjunto de eigenvectores es una base.

Esta investigación no ha investigado a profundidad la estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector, sin embargo, mediante las reflexiones presentadas a partir de la entrevista didáctica con E11 podemos considerar que la encapsulación del Proceso en el Objeto implica haber reflexionado sobre cómo los eigenvalores y eigenvectores caracterizan o describen la forma en que actúa un operador lineal sobre un espacio vectorial. En el episodio presentado con E11 la discusión involucraba caracterizar el operador lineal mediante una base formada por eigenvectores –eigenbase-. La encapsulación parece envolver la pareja (λ, v) como un solo objeto sobre el cuál se pueden aplicar Acciones. Sin embargo, por su carácter dual se requiere tener la capacidad de poner en relación características de elementos de naturaleza distinta: multiplicidad de una raíz del polinomio característico y la dimensión del eigenespacio.

7. Conclusiones

En este capítulo presentamos las conclusiones generales de la investigación descrita en este documento. El paradigma propuesto por la teoría APOE orientó el desarrollo de cada etapa y momento de la investigación. Mediante el análisis de los datos empíricos presentamos nuestra descomposición genética refinada para el concepto de eigenvalor y eigenvector. En las reflexiones sobre la enseñanza incluimos algunos aspectos que consideramos importantes en la instrucción después de haber implementado el problema de modelación y las tareas específicas. Finalmente, presentamos las preguntas que surgen al desarrollar la investigación o aquellas que aún continúan abiertas.

7.1 Descomposición genética refinada

El interés de este estudio, como se ha especificado en la sección 1.3, corresponde a las estructuras y mecanismos mentales que permiten la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. Después de haber analizado los datos empíricos y reflexionar en relación a la descomposición genética hipotética propuesta, consideramos que la evidencia empírica sustenta gran parte las hipótesis consideradas. Sin embargo, los datos analizados nos han permitido un mejor entendimiento sobre el modelo cognitivo que describe el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. A continuación, presentamos la versión refinada del modelo cognitivo.

Podemos afirmar que la interacción entre los Esquemas de transformación lineal y espacio vectorial son indispensables para la construcción del concepto, así como una estructura Proceso de factorización de un polinomio sobre un campo K. El nivel *inter* de los dos Esquema es necesario para la interacción entre tales Esquemas. Consideramos que una estructura Proceso de base motiva esta interacción entre los esquemas.

En la descomposición genética se había considerado la Acción de comparación entre $T(v_0)$ y $\lambda_0 v_0$, sin embargo, la evidencia proporcionada en los datos nos permitió determinar que tal comparación ocurre mediante el mecanismo de coordinación entre los Procesos de múltiplo escalar y transformación lineal. Mediante una estructura Proceso estable de transformación lineal y bajo la coordinación mencionada los estudiantes pueden construir al cero vector como no eigenvector. En la implementación de la enseñanza encontramos evidencias que esta construcción es importante y se requiere para avanzar a una estructura Proceso de eigenvalor y eigenvector.

La Acción de determinar soluciones de una ecuación vectorial de la forma $T(v) = \lambda_0 v$ requiere de una estructura Objeto de vector. Consideramos que esta Acción debe desarrollarse en las tres representaciones de una transformación lineal, lo anterior es un relevante para avanzar a una comprensión matemática más profunda del concepto. Particularmente, entre la representación funcional y matricial las demandas cognitivas son diferentes, como lo expresa Campos (2017) en la representación matricial se requiere una concepción Objeto de vector y matriz, sin embargo, en la funcional una concepción Objeto de vector y Proceso de transformación lineal. La interiorización de la Acción sobre la ecuación $Av = \lambda_0 v$ o $T(v) = \lambda_0 v$ motiva a interpretar tales ecuaciones con la existencia de vectores que al ser transformados su efecto puede describirse mediante un múltiplo escalar. Este punto de vista respalda lo propuesto por Larson y Zandieh (2013) Andrews-Larson, Wawro y Zandieh (2017) sobre la interpretación de la ecuación $Ax = b$ como una transformación.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

En la descomposición hipotética a través del análisis de los datos empíricos pueden describirse ahora con mayor claridad. Se ha encontrado evidencia que explica los mecanismos mentales involucrados y la razón que motiva las respectivas construcciones. A continuación, mencionamos una descripción precisa sobre de la descomposición genética que se ilustra en la Figura 66.

La construcción inicia cuando el estudiante ha reflexionado sobre la transformación lineal y el proceso por un escalar. Una estructura Proceso de transformación lineal y múltiplo por un escalar le permite entender el efecto de aplicar estos Procesos a vectores de un espacio vectorial V.

Los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector que había sido considerados

Mediante el mecanismo de coordinación motivado bajo la comparación de igualdad, el estudiante puede reflexionar sobre la existencia de escalares para vectores específicos del espacio vectorial cuyo efecto de transformación puede describirse mediante un múltiplo escalar. La reflexión sobre realizar tal comparación para diferentes vectores que para todos los vectores diferentes de cero cuando el efecto de transformación equivale a un múltiplo escalar solo existe un escalar que describe tal efecto, sin embargo, para el cero vector existen muchos escalares. Al respecto el estudiante puede construir que el cero vector no es un eigenvector (Proceso 1). Así mismo, puede entender que si un vector es un eigenvector entonces tiene asociado un único eigenvalor.

La reflexión sobre la Acción 1, determinar soluciones a la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$ le permite interiorizarla en un Proceso (Proceso 2). Esto implica reconocer que el vector cero siempre es solución, pero, puede argumentar es la única solución o existen infinitas. Mediante la coordinación de los Procesos 1 y 2 el estudiante puede entender que un escalar λ_0 es un eigenvalor cuando el conjunto de soluciones de $T(v) = \lambda_0 v$ es infinito (Proceso 3).

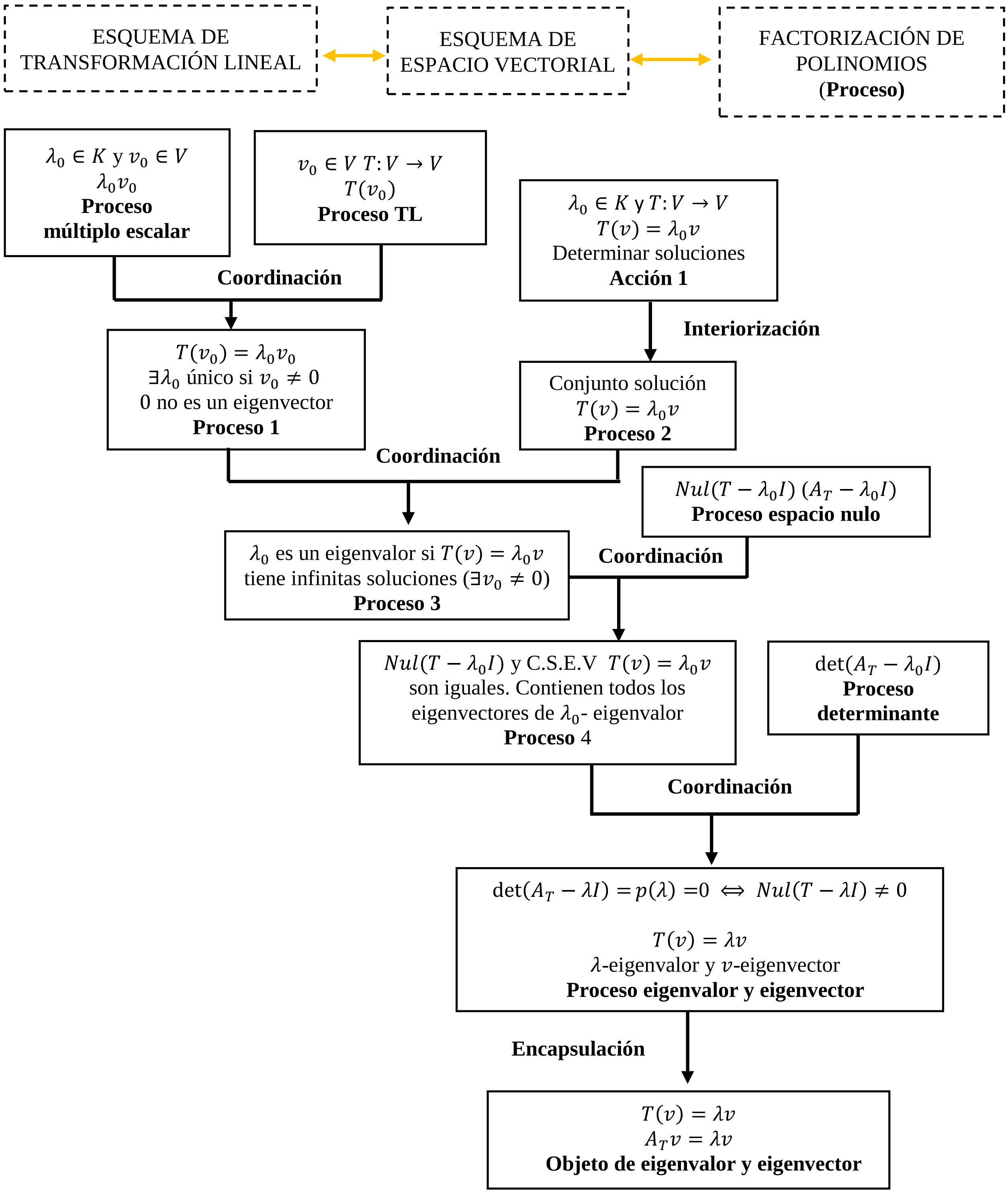


Figura 66: Descomposición genética final.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

La coordinación entre el Proceso 3 y el Proceso de espacio nulo mediante la contenencia de tales conjuntos vectoriales da paso a un entendimiento del conjunto solución de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$ en términos de un subespacio vectorial, eigenespacio (Proceso 4). La reflexión sobre tal contenencia favorece un entendimiento de una equivalencia entre las ecuaciones $T(v) = \lambda_0 v$ y $(T - \lambda_0 I)v = 0$ mediante la igualdad entre los conjuntos de solución de cada una. Gracias a tales mecanismos mentales y construcciones mentales el estudiante puede reconocer y establecer el eigenespacio asociado a un eigenvalor.

El Proceso 4 es coordinado con el Proceso de determinante con el propósito de caracterizar los valores escalares que corresponde como eigenvalores λ_0 de un operador lineal To matriz asociada A_T y garantizan que $T - \lambda_0 I$ o $A_T - \lambda_0 I$ sea invertible. Como resultado de la coordinación de los Procesos subyacentes descritos anteriormente se construye una concepción Proceso, la cual no solo permite ser consciente de la existencia de vectores v que bajo un operador lineal T su efecto de transformación corresponde a la multiplicación por un escalar λ, también incluye la capacidad de justificar el porqué de la existencia de las eigenparejas (λ, v).

En la medida que el estudiante reflexiona sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector y puede darse cuenta de la totalidad que actúa sobre este, reconoce todos los eigenvalores y eigenvectores correspondientes que tiene un operador lineal. Aplicar Acciones sobre dicha totalidad implica poder caracterizar a un operador lineal mediante sus eigenvalores y eigenvectores. Tal caracterización está estrechamente relacionada con un entendimiento del isomorfismo entre las matrices cuadradas y operadores lineales. Comprender que estudiar los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal equivale a estudiar tal concepto sobre alguna representación matricial. En especial, la Acción de actuar sobre la totalidad para comparar las multiplicidades algebraicas y geométricas de los eigenvalores de un operador lineal permite argumentar la existencia de una eigenbase, en otras palabras, si el operador es diagonalizable o no. Consideramos que una Acción sobre eigenvalores y eigenvectores es diagonalizar el operador lineal. Lo anterior nos hace pensar que se requiere una estructura Objeto de transformación lineal para construir una estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector.

7.2 Reflexiones para la enseñanza

En esta investigación se elaboró un diseño de clase a partir de la descomposición genética hipotética que involucraba problemas de modelación y actividades específicas. Las reflexiones a partir de la implementación de la enseñanza nos permiten afirmar que un diseño desde esta perspectiva ofrece situaciones y espacios para que los estudiantes realicen sus propias reflexiones y construcciones. Una situación en particular que destacamos fue en la sección 6.1.1 donde los estudiantes mediante la reflexión orientada por la profesora y el investigador construyeron el cero vector como no eigenvector.

La instrucción en los cursos de álgebra lineal debe favorecer espacios para las discusiones entre los estudiantes y brindar situaciones retadoras que provoquen la construcción de nuevos objetos matemáticos. Por ejemplo, el problema de modelación propuesto y analizado en esta investigación permitió evidenciar que mediante situaciones de esta perspectiva los estudiantes pueden movilizar diferentes conceptos matemáticos y articularlos con el propósito de construir nuevos. Lo anterior moviliza a los estudiantes de una forma de pensamiento centrada en los algoritmos a una forma de pensamiento enfocada en la comprensión conceptual. El problema de modelación utilizado para introducir el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores en esta investigación involucra una situación basa en la vida real que no demanda conceptos complejos de otras ciencias. Al contrario, involucra gran parte de los elementos considerados como conocimientos previos y motiva la interacción entre el esquema de transformación lineal y espacio vectorial.

En el análisis de los datos de esta investigación mostró que es necesaria e importante una concepción Proceso de transformación lineal. Recomendamos que en la medida que se trabajen y analicen conceptos como la ecuación vectorial $Ax = b$ en los cursos de álgebra lineal I, se pueda orientar a los estudiantes a reconocerla como una transformación. Así mismo, en el desarrollo de la instrucción alrededor de la transformación lineal se debe dirigir a los estudiantes a reconocer que una transformación líneal no "deforma" de la misma manera a todos los vectores del espacio vectorial dominio. Una situación al respecto se reporta en Oktaç (2019) donde se le pregunta que le ocurre a un vector especifico cuando se le aplica una matriz dada. La situación está dada para que el estudiante argumente si es una rotación o reflexión. En ese problema la matriz dada es una matriz de rotación, sin embargo, de manera particular al vector dado es rotado $270°$ y al mismo tiempo es una reflexión sobre el eje x. Situaciones de este tipo puede favorecer por una parte una concepción Proceso de transformación líneal, al mismo tiempo que proporciona oportunidades para reconocer que existen vectores "especiales" que al ser transformados dicho efecto puede describirse mediante un múltiplo escalar.

La reflexión sobre el diseño de clase implementado nos muestra la importancia de proponer preguntas o situaciones que promuevan la coordinación de los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvalor. Cuando un diseño de instrucción no favorece el uso de tales coordinaciones la instrucción puede enfocarse en repetir un algoritmo y no motivar la reflexión y construcción propia del estudiante. Consideramos que en general la instrucción de un curso de álgebra lineal debe buscar desde el inicio un enfoque hacia la comprensión conceptual por encima de la comprensión procedimental.

Un aspecto muy importante como en la instrucción del concepto es el diseño de actividades que promuevan las diferentes representaciones de la transformación lineal. Consideramos que en $\mathbb{R}^2$ la estrategia propuesta por Schonefeld (1995) de “eigenpicture” para representar geométricamente como son transformados varios vectores bajo un operador lineal, favorece un entendimiento de los eigenvectores como vectores cuya imagen está sobre la misma recta. La representación matricial por otra parte permite herramientas calculatorias y estimula una comprensión más profunda del concepto. Por ejemplo, la condición $\det(A_T - \lambda I) = 0$ se hace sobre una representación matricial del operador y por consiguiente el polinomio característico. En la medida que la construcción del concepto avanza, se puede conceptualizar el polinomio característico de un operador como el polinomio asociado a alguna representación matricial.

Con el diseño realizado en esta investigación buscamos que los profesores que orientan los cursos de álgebra lineal puedan reflexionar sobre el diseño de instrucción propuesto. Consideramos que el diseño no es acabado se requiere la retroalimentación y hacer los respectivos reajustes después de las implementaciones de enseñanza.

En particular el diseño que presentamos muestra cómo podría abordarse el concepto de eigenvalor y eigenvector en un primer curso de álgebra lineal.

7.3 Reflexiones para futuras investigaciones

La investigación sobre el concepto de eigenvalor y eigenevctor desde la perspectiva considerada en este estudio es escasa. Gran parte de las investigaciones que hacen uso de la teoría no realizan un diseño de instrucción. Consideramos que esta investigación y la reportada por Salgado y Trigueros (2015) proporcionan evidencia sobre cómo se realiza un diseño de instrucción a la luz de una descomposición genética. Sin duda los resultados de esta investigación pueden motivar al rediseño o diseño un modelo de clase para la instrucción del concepto considerando nuevas evidencias empíricas sobre las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la construcción. Tal vez de esta manera se puede ganar más claridad sobre la estructura Proceso del concepto de eigenvalor y eigenvector

Durante el desarrollo de esta investigación detectamos los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvalor. Lo anterior ayuda a explicar y comprender la complejidad cognitiva que involucra el aprendizaje de este concepto. Además, se hizo referencia a ver la totalidad de este Proceso. En relacion a esto se identificó que una concepción Proceso de polinomio característico parece ayudar a un estudiante a ser consciente de la totalidad del Proceso de eigenvalores y eigenvectores. Sin embargo, consideramos que varias preguntas quedan abiertas al respecto: ¿Qué significa ver la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector? ¿La estructura Proceso de polinomio caraterístico es una estructura mental subyacente al Proceso de eigenvalor y eigenvector?, ¿Qué tipo de Acciones se pueden hacer sobre la totalidad de eigenvalor y eigenvector?

Tambien consideramos importante estudiar la estructura Objeto de eigenvalores y eigenvectores. En este estudio no se proporciona evidencia empírica sobre cómo ocurre la encapsulacion del Proceso en un Objeto y qué Acciones son admisibles. En investigaciones futuras se puede realizar un diseño de instrucción en implementarlo en un segundo curso de álgebra lineal con el propósito de tener evidencia empírica sobre cómo los estudiantes construyen tal Objeto. Así mismo, como un estudio más amplio y profundo se puede investigar por el esquema de eigenvalor y eigenvector. ¿Cómo interactua el esquema de eigenvalor y eigenvector con el esquema de transformación lineal o esquema de espacio vectorial?

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Por otra parte, se puede considerar un estudio desde la perspectiva de Trigueros (2019), esto es, estudiar el esquema que desarrollan los estudiantes después de un primer curso de álgebra lineal analizando cómo se van acomodando diferentes tipos de relaciones a través del curso para construir un esquema de eigenvalor y eigenvector.

Referencias bibliográficas

Alves-Diaz, M & Artigue, M. (1995). Ariticulation problems between different system of symbolic representations in linear algebra, In *proccedings of the 19th annual meeting of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* Universidade Federal de Pemambuco, Recife, Brésil, V. 3 (34-41).

Andrews-Larson, C., Wawro, M & Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, DOI:10.1080/0020739X.2016.1276225.

Arnon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. New York: Springer Netherlands. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Belloch, C. (2013). Diseño Instruccional. Unidad de Tecnología Educativa (UTE). Universidad de Valencia http://cmapspublic.ihmc.us/rid=1MXBYRSF8-1Y2JTP7-RM/EVA4.pdf

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior,* 40, 131-153

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R2 en R2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia.

Campos, V. (2017). *Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE*. Instituto Politecnico Nacional, Ciudad de México, México. DOI: 10.13140/RG.2.2.33372.08325

Carlson, D., Johnson, C., Lay, D & Porter, D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the course in linear algebra, *College Mathematics Journal*. 24(1) 41-46.

Cook, J. P. & Stewart, S. (2014). Presentation of matrix multiplication in introductory linear algebra textbooks. En T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 518-522). Denver, Colorado. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/RUME17.pdf.

Del Valle, J. (2011). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias*. Mc Graw-Hill.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 1–81). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. MAA, 85-106. Recuperado de http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf

Durand-Guerrier, V., Hausberger, T., et Spitalas, C. (2015). Définitions et exemples: prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES,* 20, (pp. 101 – 148). Strasbourg, Francia.

González-Rojas, D. E., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Godino, J. (2009). Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática. Colección Digital Eudoxus, (8).

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra*. (pp. 191–207). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K., & Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. PRENTICE-HALL HISPANOAMERICA, S.A.

Gol, S. (2012). Dynamic geometric representation of eigenvector. En S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle y M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th anual conference on research in undergraduate mathematics education* (pp. 53 –58). Portland: RUME.

Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: the evolution of school mathematics textbooks. In Jones, et al., (Eds) *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT-2014) (pp.3-11). Southampton: University of Southampton.

Klasa, J., & Klasa, S. (2002). Linear transformations and eigenvectors with Cabri II via Maple V. *The* 2^{nd} *International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level).* Recuperado de http://server.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap256.pdf.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Larson, C., Rasmussen, C., Zandieh, M., Smith, M., & Nelipovich, J. (2007). *Modeling perspectives in linear algebra: a look at eigen-thinking*. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/larson-rasmussen-zandieh-smith-nelipovich.pdf.

Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2008). A trip through eigen land: Where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. *Proceedings of the* 11^{th}*Annual*

Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education. SIGMA ON RUME. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2008/Proceedings/Larson%20SHORT.pdf

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: A Models & Modelling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving*. New Hampshire: Lawrence Erlbaum Associates

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In Kelly, A & Lesh, R (Eds.) *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Routledge Handbooks Online. Recuperado de https://www.routledgehandbooks.com/doi/10.4324/9781410602725.ch21

McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate mathematics education IV. CBMS issues in mathematics education (Vol. 8, pp. 77–102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Morphett, A., Gunn, S., & Maillardet, R. (2015). Developing interactive applets with GeoGebra: processes, technologies. In 10th Southern Hemisphere Conference on the Teaching and Learning of Undergraduate Mathematics and Statistics, 22 (pp. 110-132).

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM Mathematics Education, 51,* 1043–1054. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9.

Orozco, J., Cuevas, A., Madrid, H., & Trouche, L. (2018). A proposal of instrumental orchestration to introduce eigenvalues and eigenvectors in a first course of linear algebra for engineering students. In *Actes Re(s)source 2018 international conference ENS,* (pp. 320-323).

Parraguez, M., & Oktac¸, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.

Plaxco, D., Zandieh, M &Wawro, M. (2018) Stretch Directions and Stretch Factors: A Sequence Intended to Support Guided Reinvention of Eigenvector and Eigenvalue. (pp. 175-192) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal una introducción moderna.* CENGAGE Learning

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140. doi:10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H. (2015). *El papel de la modelación en la enseñanza de conceptos abstractos del álgebra lineal*. Instituto Politecnico Nacional, Mexico. DOI: 10.13140/RG.2.1.3617.8642

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Schonefeld, S. (1995). Eigenpictures: Picturing the Eigenvector Problem. *The College Mathematics Journal*. 26 (4), 316-319.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.

Sinclair N., Jackiw N. (2010) Modeling Practices with The Geometer's Sketchpad. In: Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer, Boston, MA

Soto, J. L., & Garcia, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in R^2 and R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Recuperado de http://mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf

Stake, R., (2010). Investigación con estudio de casos, 5ª Ed., Morata, Madrid, España.

Stewart, S., & Thomas, M. (2007). Eigenvalues and eigenvectors: Formal, symbolic, and embodied thinking. *The* 10^{th} *Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME) (pp. 275-296). Estados Unidos. RUME

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.). (2018). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Springer.

Thomas, M. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. 23, 275 - 296. Versión electrónica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9 (46), 75-87.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., & Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Educación matemática*, 27(2), 95-124.

Trigueros, M. (2019). The development of a linear algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM Mathematics Education,* 51, 1055–1068 https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 43-55.

Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education* 51, 1111–1123.https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Yañez, A. (2015*). Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en* $\mathbb{R}^2$*y* $\mathbb{R}^3$*, desde la teoría APOE*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso, Chile.

Zandieh, M; Wawro, M & Rasmussen, C. (2016) An Example of Inquiry in Linear Algebra: The Roles of Symbolizing and Brokering, *PRIMUS*, 1-29. DOI:10.1080/10511970.2016.119961.

Apéndice A. Guía 1: Transformaciones lineales y relacionados

1. Considere la siguiente función P definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

   mediante la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ donde P se define como $P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a) Determine si P es una transformación lineal. **Justifique su respuesta.**

b) Considere $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $A_{n\times m}$ una matriz. ¿ $F(v) = Av$ define una transformación lineal? **Justifique su respuesta**

2. Sea $M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $B = \{[1,0],[0,1]\}$ la base canónica para $\mathbb{R}^2$. M es una transformación lineal tal que $M[1,0] = [1,1]$ y $M[0,1] = [1,-1]$.

a) Determine $M[2,3]$ y $M[-3,1]$. ¿Es posible determinar la imagen de cualquier otro vector en $\mathbb{R}^2$? **Justifique su respuesta**

b) Encuentre una representación matricial para M.

c) Encuentre $M[x,y]$. ¿Existe otra transformación lineal M, diferente a la encontrada, que satisface las mismas condiciones mencionadas? **Justifique su respuesta.**

3. Un Operador lineal $\boldsymbol{k}$ es una transformación lineal definida sobre el mismo espacio vectorial, es decir. $\boldsymbol{k}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{V}$. A la figura 1 se le ha aplicado el operador lineal $\boldsymbol{P}$ para obtener la figura 2.

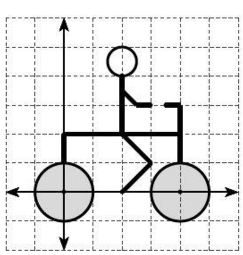


Figura 1.

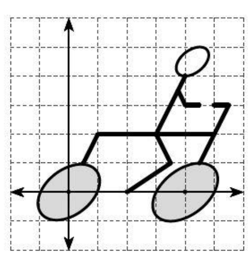


Figura 2.

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

a) Encuentre el operador lineal $\boldsymbol{P}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ que describe la deformación del niño en su bicicleta.

b) El espacio nulo de una transformación lineal $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \rightarrow \boldsymbol{W}$, denotado por $\boldsymbol{Nul}\,(\boldsymbol{T})$ se define como: $\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{T}) = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}: \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$. ¿Cuál es el espacio nulo de $\boldsymbol{P}$?

c) Determine la representación $\boldsymbol{A_C}$ relativa a la base canónica del operador lineal $\boldsymbol{P}$ y encuentre el espacio nulo. ¿Qué relación existe entre $\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{A_C})$ y $\boldsymbol{Nul}(\boldsymbol{P})$?

d) Considere un nuevo operador lineal $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\lambda I}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$, con $\boldsymbol{\lambda}$ un número real. ¿Para qué valor(es) de $\boldsymbol{\lambda}$ el espacio nulo es diferente de $\{\boldsymbol{0}\}$?

e) El determinante de un operador lineal se define como el determinante de alguna representación matricial relativa a una base. ¿Cuál es el determinante de $\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\lambda I}$ para el(los) valor(es) de $\boldsymbol{\lambda}$ del item anterior?

Apéndice B. Taller 1: Transformaciones lineales y relacionados

1. Sea M la matriz de una transformación lineal definida en el espacio $\mathbb{R}^2$ tal que $M = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 15 & 12-k \end{bmatrix}$, donde k es un número real.
   a) ¿Para qué valor(es) de k los vectores renglón son linealmente dependientes? **Justifique su respuesta.**
   b) ¿Cuál es el determinante de M para el(los) valor(es) del ítem anterior? **Justifique sus respuestas.**
   c) ¿Cuál es el espacio nulo de M para el(los) valor(es) de k tal que el determinante es cero? ¿Cuál es el espacio nulo para los demás valores? **Justifique sus respuestas.**

2. Un paralelepípedo es deformado por un operador lineal cuya representación matricial es la matriz D. ¿Existen valores de α tal que la deformación del paralelepípedo termine en una figura plana?, Si es así, encuentre la ecuación del plano en el cuál es deformado.

$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$, con α un número real.

3. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por $F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y-3z \\ 2x+2y-2z \\ 4x-y+z \end{bmatrix}$
   a) Determine el espacio nulo de F.
   b) Considere el operador lineal $F-kI: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde k es un número real. Encuentre el determinante de $F-kI$.
   c) ¿Existe(n) valor(es) de k tal que $Nulidad(F-kI) > 0$? **Justifique sus respuestas.**

4. Sea $H: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal tal que:

$$H\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{bmatrix};\ H\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\3 & -2\end{bmatrix};\ \ H\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix};\ \ H\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}w & u\\v & y\end{bmatrix};$$

Encuentre condiciones sobre w, u, v, y tal que $Nul(H)$ sea diferente del vector cero.

5. Analice las siguientes preguntas y justifique sus respuestas

a) ¿Puede una matriz 5×8 tener un espacio nulo de dimensión 2?

b) ¿Una matriz $n \times n$ invertible puede tener nulidad mayor que cero?

c) Sea A una matriz invertible, ¿$A - kI$ es invertible para todo k en los reales?

d) Si A es una matriz invertible, ¿Existen valores de k talque $Nul(A - kI) \neq 0$?

Apéndice C. Problema de modelación: Diseño de un nuevo reloj

Una empresa está interesada en crear nuevos diseños de relojes. A usted le han solicitado diseñar un nuevo modelo de reloj cuyo contorno es en forma de elipse a partir de otro circular con 1 decímetro de radio. Si se considera el centro del reloj circular como el origen de un plano de coordenadas los requisitos exigidos para el nuevo diseño serían los siguientes:

a). Si son las 12:00, la ubicación del extremo superior del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba y otra a la derecha respecto al extremo del minutero del reloj circular.

b). Si son las 3:15, la ubicación del extremo derecho del minutero en el nuevo diseño deberá estar una unidad hacia arriba respecto al extremo derecho del minutero del reloj circular.

c). Si en el reloj circular se indica 10 minutos, los minuteros de los dos diseños no pueden estar superpuestos.

La empresa se comunicará con usted cuando lo considere necesario. El trabajo que usted debe realizar es:

1. Encontrar un modelo para el nuevo diseño que describa como es transformado cualquier punto del reloj circular y si es el caso, explicar en qué posiciones los minuteros se superponen y que relación guardan.
2. Proponer otros modelos de reloj en forma de elipse tal que existan posiciones donde los minuteros se superpongan. Mostrar ilustraciones, describir características y condiciones para que esto ocurra.

Apéndice D. Guía 2: Eigenvalores y Eigenvectores

1. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un operador lineal definido por: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x-2y \\ -2x-2y \end{bmatrix}$.

a). Considere los vectores $u_1 = [2,-1]; u_2 = [-3,3]; u_3 = [1,1]$. Encuentre los vectores $T(u_1); T(u_2); T(u_3)$.

b). ubique en planos cartesianos cada vector $u_i$con su respectiva imagen bajo T. ¿Qué relación geométrica se tiene con cada par de vectores u_i y $T(u_i)$? ¿Cuál(es) vector(es) es(son) Eigenvector(es) de T?

c). ¿Existen otros eigenvectores para el operador lineal T? Si es así, ¿Cuáles son? **Justifique su respuesta.**

d). ¿2 es otro eigenvalor para el operador lineal T?, Si es así, ¿Cuáles son los eigenvectores asociados?

2. Sea $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal cuya representación matricial respecto a la base canónica está dada por la matriz C.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a). Determine $Nul(C)$ y $\det(C)$.

b). ¿Existe una relación entre $Nul(C)$ y $\det(C)$?

c). Seleccione vectores $w \in Nul(C)$, ¿w es un eigenvalor de C?

d). Suponga que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un operador lineal cuya representación matricial respecto a una base es la matriz M. ¿Todo vector diferente de cero en el espacio nulo de M es un eigenvector?

3. Considere el operador lineal $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$.

a). Sea $E = \{[x, y]: x = -y; x, y \in \mathbb{R}\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^2$. ¿Todo vector $w \in E$ es un eigenvector de H? **Justifique su respuesta**

b). Sea $u = [3,3]$, ¿Existe un escalar λ tal que $H(u) = \lambda u$? ¿u es un eigenvector? **Justifique su respuesta**

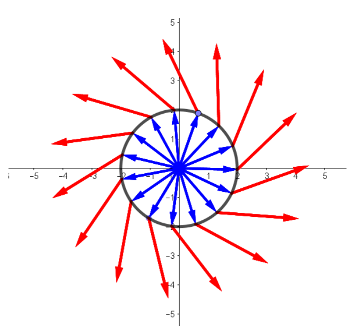
c). ¿cualquier múltiplo escalar de u es un eigenvector de H? Si es así, ¿Cuál(es) es(son) el(los) eigenvalor (es) asociado(s)? **Justifique su respuesta**

d). Considere el operador lineal $H - 5I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, I el operador identidad. Encuentre $Nul(H - 5I)$ y $\det(H - 5I)$. ¿Existe una relación entre $Nul(H - 5I)$ y $\det(H - 5I)$?

e). ¿Todo vector del espacio nulo de $H - 5I$ es un eigenvector de H? **Justifique su respuesta**

f). Considere ahora $H - 4I: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ¿4 es un eigenvalor de H? **Justifique su respuesta**

4. Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada a un operador lineal $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a su base canónica. El operador lineal modela la transformación que sufre los vectores con centro en el origen y de radio 1. En la figura se muestra la transformación de algunos vectores, la imagen de cada vector azul v se ha ubicado en el punto final de este.



d) Analice la figura, ¿Existen eigenvectores y eigenvalor es para el operador lineal K? Si es así, ¿Cuáles son?

e) Sea λ un escalar, el **polinomio característico de una matriz** $A_{n\times n}$ se define como $\det(M-\lambda I)$, donde I es la matriz identidad $n\times n$. Encuentre el polinomio característico de M.

f) ¿Para qué valores de λ en los reales la ecuación matricial $(M-\lambda I)v=0$ tiene soluciones diferentes del vector cero? Si $\lambda\in\mathbb{C}$, ¿Existen eigenvalor es y eigenvectores para el operador lineal K sobre los complejos?

5. Sea $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un operador lineal tal que: $G[1,0,0]=[3,0,0], G[0,1,0]=[-2,2,0]$ y $G[0,0,1]=[1,5,1]$.

a) Determine la representación matricial de G respecto a la base canónica.

b) ¿Cuáles son los eigenvalor es del operador lineal G?

c) Sea $T:V\to V$ un operador lineal y λ un eigenvalor , el **eigenespacio** $\boldsymbol{E_\lambda}$ asociado al eigenvalor λ se define como: $E_\lambda=\{v\in V: T(v)=\lambda v\}$. Determine los eigenespacios asociados a los respectivos eigenvalor es de G

Apéndice E. Taller 2: Eigenvalores y Eigenvectores

1. Sea M la matriz de un operador lineal definida en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ tal que $M = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. $v_1 = [-12,10], v_2 = [-2,-2], v_3 = [1,3]$ vectores en $\mathbb{R}^2$. Explique de forma geométrica si los vectores dados son eigenvalores de M. ¿Qué significa geométricamente que un eigenvector tiene por eigenvalor $-\frac{1}{2}$?

2. Considere la matriz $D = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $Dv = -2v$? ¿-2 es un eigenvalor de D? ¿Existen otros eigenvalores para D? Si es así, ¿Cuáles son?

3. Sea $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un operador lineal definido por $F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y + z \\ 2y + 2z \\ 3z \end{bmatrix}$

a) ¿3 es un eigenvalor de F?

b) Encuentre las raíces del polinomio característico de la matriz asociada a F respecto a la base canónica. ¿Cuáles son sus multiplicidades?

c) Encuentre todos los eigenespacios asociados a los respectivos eigenvectores de F. ¿Los eigenespacios son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$?

d). ¿Cuáles serán los eigenvalores de una matriz 3×3 que sea triangular inferior?

4. Una matriz puede estar definida sobre diferentes campos, por ejemplo $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_p, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Para las siguientes matrices según se indique, si existen encuentre los eigenvalores y respectivos eigenespacios, de los contrario explique por qué no existen.

i). $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, en $\mathbb{R}$; ii). $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, en $\mathbb{Z}_5$; iii). $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$, en $\mathbb{C}$

5. Sea $M = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$

   a) Analice la matriz M y sin hacer operaciones explique si la matriz tiene por eigenvalor al cero. **Justifique su respuesta**

   b) Analice la siguiente ecuación $Mx = x$, ¿Es válido afirmar que el conjunto solución de la ecuación es infinito? **Justifique su respuesta**

6. Encuentre un operador lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que a cada vector $v \in \mathbb{R}^2$ lo proyecta sobre el eje x. ¿El operador lineal T tiene eigenvalores y eigenvectores sobre $\mathbb{R}$? ¿Cuáles son? **Justifique sus respuestas.**

7. El operador lineal G definido por la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ se usa como un modelo base para la deformación de una figura.

   a) Encuentre los eigenvalores y una respectiva base $\{v_1, v_2\}$ para cada eigenespacio.

   b) Pruebe o justifique si $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.

   c) A medida que calculan potencias de la matriz A se obtienen variantes de la deformaciones de la figura. Se desea conocer la deformación que sufre el vector $x = [5,1]$ en la potencia decima de A. Encuentre una forma más rápida de calcular $A^{10}x$.

8. Sea B la matriz asociada a un operador lineal definido sobre $\mathbb{R}^3$ tal que $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son eigenvectores de B con correspondientes eigenvalores $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = 1$. Si $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encuentre $B^{20}x$. ¿Qué sucede con B^k conforme k se hace más grande?

9. Considere el operador lineal $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido de la siguiente manera $H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x - \alpha y \\ \alpha x + \alpha y \end{bmatrix}$ con α un número real positivo.

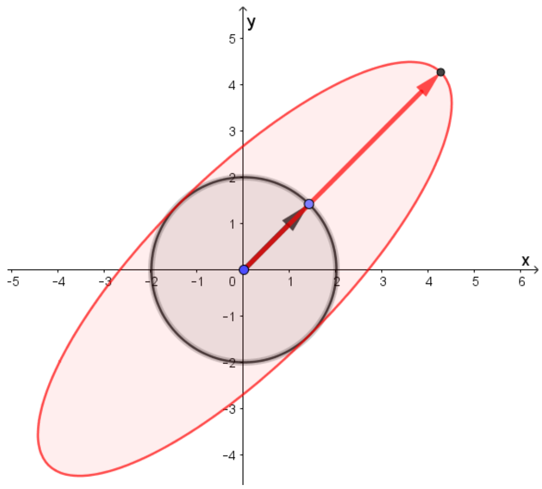
   a) ¿Para qué valores de α el operador lineal tiene eigenvalores y eigenvectores en $\mathbb{R}$? ¿Qué efecto geométrico se describe para el(los) valor(es) anterior(es)?
   b) ¿Existen eigenvalores de H en $\mathbb{C}$? **Justifique sus respuestas.**

10. Defina un operador lineal sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ que tenga por eigenvalores los escalares $-1, 3, -5$. Explique el razonamiento que utilizó para construir dicho operador.

Apéndice F. Entrevista Didáctica

1. Un círculo es deformado mediante un operador lineal representado por la matriz simétrica

   $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ convirtiéndolo en una elipse girada (ver figura)



a). ¿El eje principal de la elipse está sobre el generado de un eigenvector de B?

Justifique su respuesta.

b). ¿Cuál es la longitud del eje mayor de la elipse? **Justifique su respuesta.**

c). ¿Es válido afirmar que el eje menor de la elipse está sobre el espacio generado de otro eigenvector de B? **Justifique su respuesta.**

d). ¿2 es un eigenvalor de B? Si la respuesta es SI, justifique. Si es NO, explique si pueden existir otros eigenvalores diferentes a los encontrados.

2. Sea

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO EIGENVALOR Y EIGENVECTOR

Una matriz 2×2 tal que la entrada $a_{11} = \alpha$, cualquier número real y las otras entradas los números indicados en la matriz.

a) ¿Qué valor debe tomar α para que la matriz C tenga por eigenvalor a 3? **Justifique su respuesta.**

b) Para el valor de α encontrado, ¿La matriz C tiene otros eigenvalores diferentes a 3? **Justifique su respuesta.**

3. Sea

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Explique si la matriz D tiene por eigenvalor al 0. Si la respuesta es afirmativa, indique qué características tienen los eigenvectores asociados. Si la respuesta es negativa, justifique.

b) Explique si los vectores $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ son eigenvectores de la matriz D.

c) ¿El vector $w + u$ es un eigenvector de la matriz D? **Justifique su respuesta.**

d) ¿Cuántos eigenvalores tiene la matriz D y cuáles son?

e) ¿Existe una base para $\mathbb{R}^3$ formada por eigenvectores? Escriba su razonamiento.