

MIGRACIÓN/INVERSIÓN 2D  
EN LA APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE ONDAS  
POR HACES GAUSSIANOS

CESAR ALFONSO AGÓN QUINTERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
2009

MIGRACIÓN/INVERSIÓN 2D  
EN LA APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE ONDAS  
POR HACES GAUSSIANOS

CESAR ALFONSO AGÓN QUINTERO

TRABAJO DE GRADO  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR: WILLIAM MAURICIO AGUDELO, PH.D.

CODIRECTOR: FLOR ALBA VIVAS, PH.D.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2009

*A Sara y Raul, mi abuela y mi papá  
quienes hicieron posible que iniciara  
y me mantuviera en esta bella empresa*

## AGRADECIMIENTOS

A Dios por mi vida y la de mis seres queridos.

A mi padre por ser mi consejero, maestro y amigo de toda mi vida.

A mi abuela por su apoyo y amor incondicionales.

A mi mamá por sus valiosas enseñanzas

A el profesor William por su dirección y dedicación y por ser un ejemplo a seguir como persona

A la profesora Flor Alba por su paciente guía, y colaboración, en todos los aspectos de este trabajo, por compartir y permitirme dar el siguiente paso en mi vida profesional.

Al Instituto Colombiano del Petróleo por permitirme ser parte del grupo de investigación de Petrosísmica y a todos los integrantes del mismo por su aportes, sugerencias y por su participación en mi formación académica.

A Ana por su valiosa amistad y por su apoyo en la escritura de este texto

A Beto por su ayuda incondicional en los aspectos técnicos del sistema operativo de mi computador

A Viviana por su amistad, su perseverancia y firmeza de ideales

A Paolo y Juan Felipe por su motivación en la continuación de estudios superiores en Física

---

---

# ÍNDICE GENERAL

---

---

RESUMEN	XI
ABSTRACT	XII
INTRODUCCIÓN	1
<b>1. MIGRACIÓN/INVERSIÓN 2D POR HACES GAUSSIANOS</b>	<b>4</b>
1.1. Teoría de rayos clásica . . . . .	4
1.2. Teoría de rayos con exponentes complejos . . . . .	9
1.3. Función de Green 2D aproximada mediante una suma de haces gaussianos . . . . .	12
1.4. Relación entre la amplitud de la función de Green aproximada mediante haces gaussianos y la teoría de rayos clásica . . . . .	15
1.5. Eliminación de amplitudes infinitas en caústicas . . . . .	16
1.6. Condición de Imagen . . . . .	18
<b>2. MIGRACIÓN POSAPILADO</b>	<b>22</b>
2.1. Migración posapilado (cero offset) . . . . .	22

<b>ÍNDICE GENERAL</b>	<b>x</b>
2.2. Descripción del Algoritmo . . . . .	26
2.2.1. Apilamiento local inclinado . . . . .	27
2.2.2. Trazado del rayo central . . . . .	28
2.2.3. Construcción del haz gaussiano . . . . .	28
2.2.4. Contribución de cada haz a la imagen . . . . .	29
2.2.5. Función principal del programa sumiggbzo . . . . .	32
<b>3. MIGRACIÓN PREAPILADO</b>	<b>34</b>
3.1. Migración preapilado . . . . .	34
3.2. Implementación . . . . .	36
3.3. Inclusión de la fuente . . . . .	37
3.4. Función principal del programa sumigbpre . . . . .	40
<b>4. Experimentos numéricos</b>	<b>41</b>
4.1. Migración posapilado . . . . .	42
4.2. Migración preapilado . . . . .	57
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>62</b>
<b>APÉNDICES</b>	<b>63</b>
A.1. Ecuaciones del rayo . . . . .	63
A.2. Solución de la ecuación de Transporte . . . . .	65
A.3. Función de Green 2D como superposición de haces gaussianos . . . . .	68

A.4. Retropropagación del campo reflejado captado por los geófonos en superficie . . . . .	72
A.5. Representación de las funciones internas del programa sumiggbzo . . . .	75
A.6.1. Función formBeams . . . . .	76
A.6.2. Función makeRay . . . . .	77
A.6.3. Función accBeam . . . . .	78
A.6.4. Función beamData . . . . .	79
A.6.5. Función setCell y cellTimeAmp . . . . .	80
A.6.6. Función accCell . . . . .	81
A.6.7. Función cellBeam . . . . .	82
<b>GLOSARIO</b>	<b>83</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>84</b>

---

---

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

---

1.1. Los ejes coordenados $\hat{\mathbf{e}}_1$ y $\hat{\mathbf{e}}_2$ corresponden a las coordenadas $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ , perpendiculares al rayo. El eje $\hat{\mathbf{t}}$ es tangente al rayo en la dirección de incremento de $\tau$ . . . . .	6
1.2. Representación de un rayo(2D) en coordenadas centradas al rayo.El eje coordenado $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal al rayo y el eje $\hat{\mathbf{t}}$ es el vector unitario tangente al rayo. . . . .	7
1.3. Tomado de Bleistein [3]. Representación de distintos rayos que emanan de una fuente; se toma un punto del espacio en consideración en el cual las gaussianas que contribuyen al campo en aquel punto son representadas.	13
2.1. Representación de una adquisición sísmica en el dominio cero-offset . .	22
3.1. Representación de una adquisición sísmica en el dominio del disparo común, se visualizan los <i>rayos</i> que representan la propagación de ondas emitidas por una única fuente. El campo reflejado se registra en superficie	34
4.1. Representación del modelo de velocidades del marmousi . . . . .	42
4.2. Sección sintética de offset mínimo (200m), extraída del dato sísmico. . .	42
4.3. Migración de una componente de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición, a través de un haz que forma un ángulo inicial de $26,48^0$ con respecto al eje vertical (figura superior) y un haz que forma un ángulo inicial de $-26,48^0$ con la vertical, (figura inferior).	45

4.4. Comparación de las secciones migradas por el método de extrapolación en profundidad con ecuación de onda de sentido único ala derecha y haces gaussianos a la izquierda . . . . .	46
4.5. Migración de una componente de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición, a través de un haz que forma un ángulo inicial de $26,48^{\circ}$ con respecto al eje vertical (figura superior) y un haz que forma un ángulo inicial de $-26,48^{\circ}$ con la vertical, (figura inferior). . . . .	47
4.6. Migración de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición y llevados a profundidad a través de los haces que parten de este punto . . . . .	48
4.7. Representación de las amplitudes de la transformada de Fourier de los datos sísmicos llevada a cabo mediante un comando de transformación de fourier rápida <b>sufft</b> del paquete SU . . . . .	49
4.8. Representación de las secciones correspondientes a distintos valores del ancho inicial de los haces gaussianos. . . . .	52
4.9. Representación de las imágenes obtenidas por migración por haces gaussianos y Kirchhoff posapilado. . . . .	53
4.10. Detalle de parte superior de las imágenes migradas por Kirchhoff y haces gaussianos . . . . .	54
4.11. Detalle de parte inferior de las imágenes migradas por Kirchhoff y haces gaussianos . . . . .	55
4.12. Representación de las secciones correspondientes a la migración preapilado por haces gaussianos(inferior) y Kirchhoff(superior). . . . .	58
4.13. Representación de una parte de la sección correspondiente a la migración preapilado por haces gaussianos y Kirchhoff. . . . .	59
4.14. Representación de las secciones correspondientes a la migración preapilado por haces gaussianos y Kirchhoff. . . . .	60

---

A.1. Tomado de Bleistein [3]. Geometría del campo y de los rayos centrales de haces gaussianos . . . . .	68
A.2. Tomado de Bleistein [6]. Región compuesta por el plano de adquisición el cual parte el espacio en dos mitades una inferior y otra superior; una superficie inferior que junto con el plano encierra la región de interés. .	73
A.3. Representación de la función <b>formBeams</b> . . . . .	76
A.4. Representación de la función <b>makeRay</b> . . . . .	77
A.5. Representación de la función <b>accBeam</b> . . . . .	78
A.6. Representación de la función <b>beamData</b> . . . . .	79
A.7. Representación de la función <b>setCell</b> y <b>cellTimeAmp</b> . . . . .	80
A.8. Representación de la función <b>accCell</b> . . . . .	81
A.9. Representación de la función <b>cellBeam</b> . . . . .	82

---

---

# RESUMEN

---

---

**TÍTULO:** MIGRACIÓN/INVERSIÓN 2D EN LA APROXIMACIÓN DEL CAMPO DE ONDAS POR HACES GAUSSIANOS.\*

**AUTOR:** AGÓN QUINTERO, Cesar Alfonso.†

**PALABRAS CLAVES:** Migración,Haces gaussianos,causticas, multipathing.

**DESCRIPCIÓN:** La migración por haces gaussianos a demostrado ser una herramienta poderosa para la formación de la imagen subsuperficial a partir de datos sísmicos adquiridos en superficie, mediante la cual se han obtenido resultados de precisión comparable con los de métodos de solución de la ecuación de onda completa, con una eficiencia semejante a la de los métodos de migración por trazado de rayos convencional (migración Kirchhoff). La migración por haces gaussianos combina el trazado de rayos convencional y las propiedades de ondas planas en su descripción del campo de onda; gracias a ello puede resolver zonas en presencia de caústicas así como incluir los aportes debidos a las múltiples trayectorias que puede seguir el campo de onda entre dos puntos. En el presente trabajo se realiza un estudio teórico de los fundamentos sobre los que se sustenta la teoría de haces gaussianos, así como su papel dentro de la migración 2D en su formulación más general, a partir de la cual se obtienen los casos específicos de la migración sin amplitudes verdaderas preapilado y posapilado. Se estudia el algoritmo que permite realizar el proceso posapilado y se realizan distintas pruebas a través de experimentos numéricos con datos sintéticos estandar en el área de migración. El programa posapilado pertenece al paquete de procesamiento sísmico Seismic Unix (SU). Haciendo uso de las distintas funciones y estructuras que componen el programa de migración posapilado, se adapta un esquema de migración preapilado por haces gaussianos y se realizan pruebas numéricas que son validadas por comparación con imágenes migradas a través de otras técnicas numéricas.

---

\* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: William M. Agudelo, Ph.D. Codirector: Flor Alba Vivas, Ph.D.

---

---

# ABSTRACT

---

---

**TITLE:** GAUSSIAN BEAMS APPROXIMATION OF THE WAVE FIELD TO 2D MIGRATION/INVERSION.\*

**AUTOR:** AGÓN QUINTERO, Cesar Alfonso.†

**KEY WORDS:** migration, Gaussia beam, caustics, multipathing.

**DESCRIPTION:** Gaussian beam migration is considered an efficient tool to obtain subsurface images from seismic data acquired in the Earth surface. Results using this technique have a similar accuracy as more computing consuming methods as have equation migration, being as fas as conventional migration methods based on ray theory (Kirchhoff migration). Gaussian beam migration comes from combining ray tracing and plane waves properties to describe the wave field. There properties it is capable to obtain images in caustic zones where multiple arrivals can be produced. Multiple arrivals correspond to different trajectories followed by rays from the source to a medium point. This work is composed of two main parts, first, a theoretical study about the principles of Gaussian beam description of a wave field is developed. This part finishes with the expressions for 2D migration in the GB description, either in the pre-stack and post-stack cases not considering true amplitudes. The second part starts with the study of the post-stack Gaussian beam migration algorithm. Same numerical experiments are performed to define the adequate parameters to be used in the migration. This post-stack algorithm is included in the Seismic Unix package (Colorado School of Mines). This algorithm was modified to get a pre-stack Gaussian beam migration code. This code was tested in the Marmousi numerical model. This model exhibits complex velocities with strong lateral and vertical variations. Gaussian beam migration images define deep reflectors and a lower noise level than the Kirchhoff migration. This shows that this migration technique can be applied in complex areas.

---

\* Degree work.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: William M. Agudelo, Ph.D. Codirector: Flor Alva Vivas, Ph.D.

---

---

# INTRODUCCIÓN

---

---

El interés presente en la construcción de imágenes del subsuelo lo más acordes posible con la realidad, para las diversas aplicaciones investigativas e industriales que dichas imágenes proveen, ha motivado el desarrollo de diversas técnicas de migración que con los años se han hecho más fieles al fenómeno de propagación de ondas. Las distintas técnicas surgen como respuesta a diversos problemas presentes en el modelamiento del campo de ondas en regiones geológicas con diverso grado de complejidad en los cuales puede presenciarse lentes de baja velocidad, estructuras con grandes variaciones de velocidad en dirección horizontal o vertical, regiones con bordes pronunciados, estructuras geológicas en las cuales puedan generarse *caústicas* y/o múltiples trayectorias de la energía sísmica (*multipathing*), entre otros; los cuales deben resolverse teniendo en cuenta un criterio de costo computacional versus la resolución requerida en la imagen .

Una de las técnicas de mayor interés en la actualidad, es la llamada migración por haces gaussianos, que consiste en la aproximación de los campos de onda mediante sumas ponderadas de haces gaussianos. Esta aproximación ha mostrado grandes ventajas frente a otras soluciones asintóticas de la ecuación de onda, como las que se obtienen de la teoría clásica de rayos.

En la teoría clásica de rayos, el comportamiento del rayo depende sólo de las heterogeneidades de las propiedades del medio sobre la trayectoria del rayo y sus segundas derivadas, de manera que la solución a lo largo del mismo es insensible al medio que le rodea, cosa que no se observa en los fenómenos de propagación de ondas.

Por otra parte un haz gaussiano es definido sobre una vecindad que delimita un contorno del rayo central, mediante la aproximación de onda plana. Por esto y debido a que la evaluación del campo en un punto (función de Green), se obtiene mediante la suma de los haces gaussianos para los cuales el punto a evaluar se encuentra al interior de su contorno, es que tal representación es sensible al medio que le rodea. Esta diferencia

crucial permite que los haces gaussianos tengan en cuenta las múltiples trayectorias de la energía sísmica entre dos puntos.

Los rayos centrales de los haces gaussianos obedecen las mismas ecuaciones diferenciales asociadas a los rayos de la teoría de rayos clásica, salvo que estos son definidos complejos, al igual que las matrices propagadoras que describen las amplitudes a lo largo de los mismos. Es decir, los haces gaussianos tienen amplitudes complejas, lo cual evita que su amplitud se haga infinita en cercanías de caústicas [7] evitando las complicadas implementaciones requeridas por la teoría de rayos clásica en tales circunstancias.

La solución del tiempo de propagación sobre el rayo central es la misma que en la teoría de rayos clásica, salvo que en puntos fuera del rayo y al interior del contorno del mismo, se le adiciona al tiempo de propagación un término complejo, que es responsable del decaimiento gaussiano en amplitud con la separación del haz y de una corrección debida a la curvatura del frente de onda. La distancia desde el rayo central hasta la superficie del contorno se conoce con el nombre de *skin depth*.

Otra ventaja de la migración por haces gaussianos reside en que cada uno de los haces que compone la función de Green son independientes entre sí, de manera tal, que al interior del subsuelo es permitido el solapamiento de haces, contribuyendo a múltiples arribos del campo de onda en algún punto del subsuelo. Esta situación difiere notablemente de la migración Kirchhoff, en la cual se requieren esfuerzos considerables para incluir en las funciones de Green múltiples caminos de la propagación del campo de ondas.

Cerveny [8], muestra que es posible escoger valores iniciales de las matrices propagadoras que aseguren el decaimiento exponencial con la separación al rayo y una amplitud finita en el haz gaussiano. Dichas condiciones fueron encontradas por Hill [13], quien aplicó por primera vez la teoría de haces gaussianos al problema de migración en el caso posapilado 2D y sentó las bases para su implementación computacional. En 1992, Hale realiza la implementación del código de migración por haces gaussianos posapilado 2D para el software libre SEISMIC UNIX (SU) [20], para lo cual toma las ideas básicas de Hill y resuelve el problema del cómputo de las amplitudes y de los tiempos complejos en la malla imagen y el de los cómputos al interior de cada haz, de manera eficiente [17].

En 2001, Hill [14] presenta la versión preapilado de migración por haces gaussianos en el dominio del offset-comun. En 2005, Samuel Gray [16] presenta una implementa-

ción del algoritmo preapilado del caso de disparo común y Bleistein en 2009 presenta la implementación preapilado 2D y 3D en el dominio del disparo común con preservación de amplitudes.

El objetivo de este trabajo es estudiar la migración/inversión 2D, así como las distintas metodologías de su implementación, siguiendo la teoría general presentada por Bleistein [3] y la implementación realizada por Hale [17] del caso particular de migración posapilado. Esta versión de la migración pospilado se pone a prueba con los datos marmousi, y a partir de este código se desarrolla una implementación preapilado con la cual se obtiene la imagen de los reflectores asociados a los datos sintéticos marmousi.

El trabajo de grado está organizado de la siguiente manera, en el capítulo 1, en la sección 1.1, se presenta un breve resumen de la teoría de rayos clásica y en la sección 1.2 se obtiene el haz gaussiano a partir de una teoría de rayos con exponentes complejos. En las secciones 1.3, 1.4 y 1.5 del mismo capítulo se aproxima la función de Green 2D mediante una integral sobre haces gaussianos, se muestra su relación con la función de Green aproximada mediante el rayo clásico y su ventaja al eliminar amplitudes infinitas. En la sección 1.6, se plantea la condición de imagen [11] y se obtiene una expresión para el campo retropropagado [6] de manera que se obtiene finalmente una expresión general para la migración/inversión 2D.

En el capítulo 2, en la sección 2.1, se plantea la expresión para el caso posapilado de migración por haces gaussianos 2D y se muestra un apilamiento de datos apropiado para la eficiente implementación. De la misma manera en el capítulo 3, se obtiene la expresión preapilado de la migración por haces gaussianos y se describen los cambios efectuados sobre la versión posapilado necesarios para su implementación. Finalmente en el capítulo 4, sección 4.1, se realiza una serie de experimentos numéricos con el programa **sumigbzo**, para corroborar la escogencia explicada por Hill [13] de los distintos parámetros opcionales que presenta el código, y en la sección 4.2 se hace una comparación entre los resultados de la migración preapilado de los datos marmousi llevado a cabo por los métodos Kirchhoff y de haces gaussianos.

# CAPÍTULO 1

---

---

## MIGRACIÓN/INVERSIÓN 2D POR HACES GAUSSIANOS

---

---

### 1.1 Teoría de rayos clásica

La propagación de ondas sísmicas es objeto de estudio de la mecánica de los medios continuos, donde modelos acústicos, elásticos, viscoelásticos y poroviscoelásticos pueden ser utilizados.

En el área de la formación de la imagen sísmica para exploración de grandes áreas, el modelo acústico resulta ser el que requiere de menor información sobre el medio. Por esto solamente un macromodelo de velocidades para la onda P debe ser proporcionado y datos de reflexiones primarias PP.

En el modelo acústico la propagación de ondas sísmicas está gobernada por la ecuación de onda clásica, que en el dominio de la frecuencia se conoce como ecuación de Helmholtz [4], la cual está dada por:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} u = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad \text{con} \\ u = u(\mathbf{x}, \omega), \quad (1.1)$$

en donde  $\mathbf{x}_s$  representa la posición de la fuente de ondas,  $\omega$  la frecuencia,  $v_0(\mathbf{x})$  la velocidad de propagación del campo de ondas y  $u(\mathbf{x}, \omega)$  el campo de ondas en el dominio de la frecuencia. Una representación posible del campo de onda mediante una serie

asintótica de potencias inversas de  $\omega$  es [4]:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n}, \quad (1.2)$$

donde  $\tau(\mathbf{x})$  representa el tiempo de propagación del campo desde la posición de la fuente hasta el punto  $\mathbf{x}$ , el cual es una cantidad real.

Utilizando esta representación para el campo de ondas y aplicándola a la ecuación de Helmholtz; se obtienen las ecuaciones iconal y de transporte, ecuaciones fundamentales de la teoría de rayos clásica [9]<sup>1</sup>, que son respectivamente:

$$(\nabla\tau(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})}, \quad (1.3)$$

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + A_0 \nabla^2 \tau = 0. \quad (1.4)$$

La solución de estas ecuaciones es descrita mediante curvas en el espacio (que son los llamados rayos de la teoría de rayos) a lo largo de los cuales se conoce la amplitud y el tiempo de propagación,<sup>2</sup> que en este caso son las cantidades que representan la evolución de un campo de ondas.

Así mismo, en la teoría de rayos, el campo se describe solo mediante el primer término de la expansión, al considerarse los términos siguientes despreciables, debido al uso de la aproximación de altas frecuencias; es decir, el campo es representado en la aproximación de orden cero de la teoría de rayos, por la ecuación:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \approx A_0(\mathbf{x})e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}. \quad (1.5)$$

La representación de los rayos, requiere de una parametrización y de un sistema coordenado, mediante los cuales pueda describirse el campo en cualquier punto sobre el rayo y su vecindad. Para ello, resulta conveniente el uso de un sistema coordenado centrado al rayo; el cual corresponde a un sistema ortogonal que viaja a lo largo del rayo, de manera que un eje coincide con la tangente al rayo en la dirección de crecimiento de  $\tau$ , y los otros dos se encuentran en el plano ortogonal al rayo en este punto, tal como se muestra en la Figura 1.1

<sup>1</sup>ver la deducción en el apéndice A.1 p.63

<sup>2</sup>ver la deducción en el apéndice A.2 p.65

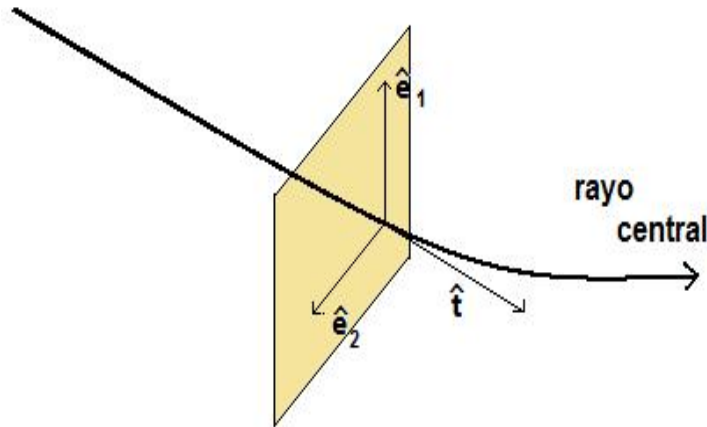


Figura 1.1: Los ejes coordenados  $\hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2$  corresponden a las coordenadas  $\mathbf{q}_1$  y  $\mathbf{q}_2$ , perpendiculares al rayo. El eje  $\hat{\mathbf{t}}$  es tangente al rayo en la dirección de incremento de  $\tau$

Para modelar la evolución de la amplitud a lo largo del rayo se hace un desarrollo partiendo de la ecuación de transporte y la introducción de las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  conocidas como las matrices dinámicas del rayo <sup>3</sup>, las cuales satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + v_0\mathbf{M}^2 + v_0^{-2}\mathbf{V} = 0, \quad \text{con} \quad \mathbf{V} = \left[ \frac{\partial^2 v_0}{\partial q_i \partial q_j} \right], \quad i, j = 1, 2 \quad (1.6)$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = v_0\mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -v_0^{-2}\mathbf{V}\mathbf{Q}, \quad (1.7)$$

a partir de este modelamiento se llega a la expresión <sup>4</sup>

$$A_0(s) = C \left[ \frac{v_0(s)}{\det[\mathbf{Q}(s)]} \right]^{1/2}, \quad (1.8)$$

donde  $C$  es una constante que depende de las condiciones iniciales del rayo y se determina de acuerdo a la función de Green correspondiente, teniendo en cuenta que su representación asintótica debe ser equivalente a la expresión de la ecuación (1.5), donde  $A_0(s)$  corresponde a la amplitud que se calcula sobre el rayo en el punto en el cual la longitud de arco es igual a  $s$ . Por otra parte y para facilitar algunos cálculos en los siguientes desarrollos, esta constante se considerará igual a 1 salvo en los casos en los cuales se requiera aproximar la función de Green.

Así mismo se puede resolver la ecuación iconal a lo largo del rayo, obteniéndose el

<sup>3</sup>ver matrices propagadoras en el apéndice A.2 p.65

<sup>4</sup>ver la deducción en el apéndice A.2 p.65

tiempo de propagación en la forma<sup>5</sup>:

$$\tau(\mathbf{x}(s)) - \tau(\mathbf{x}(s_0)) = \int_{s_0}^s \frac{ds'}{v_0(\mathbf{x}(s'))}. \quad (1.9)$$

Por otra parte, es posible desarrollar la teoría 2D de forma análoga al desarrollo 3D teniendo en cuenta que la posición  $\mathbf{x}$  en este caso representa un vector 2D y que la expansión asintótica sufre una ligera modificación en la que se incluye una potencia adicional de la frecuencia  $\omega$  y se expresa por:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim |\omega|^\alpha e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n}, \quad (1.10)$$

donde  $\alpha$  se especifica de acuerdo a la función de Green particular, de manera que las expresiones obtenidas en la teoría 3D se reducen de manera natural a una geometría 2D, en la cual, las matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$  se convierten en los escalares  $M$ ,  $P$  y  $Q$  y los ejes perpendiculares al rayo, correspondientes al sistema coordenado centrado al rayo se reducen a uno perpendicular a la tangente al rayo, el cual es denotado por  $\hat{\mathbf{n}}$  (vector normal); tal como se muestra en la Figura 1.2.

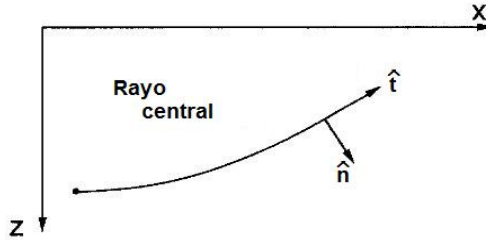


Figura 1.2: Representación de un rayo(2D) en coordenadas centradas al rayo. El eje coordenado  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal al rayo y el eje  $\hat{\mathbf{t}}$  es el vector unitario tangente al rayo.

La aproximación a altas frecuencias permite expresar el campo de ondas por:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim |\omega|^\alpha A_0(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})}, \quad (1.11)$$

y las ecuaciones dinámicas del rayo se convierten en:

$$\frac{dQ}{ds} = v_0 P, \quad \frac{dP}{ds} = -\frac{v_{0,nn}}{v_0^2} Q, \quad (1.12)$$

<sup>5</sup>ver deducción en el apéndice A.1 p.63

en donde los subíndices  $n$  representan derivadas en la coordenada  $n$ , los escalares  $Q$  y  $P$  satisfacen la ecuación de Ricatti ecuación A.20 en 1D, que está dada por:

$$\frac{dM}{ds} + v_0 M^2 + \frac{v_{0,nn}}{v_0} = 0, \quad (1.13)$$

y la amplitud  $A_0$  resulta ser:

$$A_0(s) = C \left[ \frac{v_0(s)}{|Q(s)|} \right]^{1/2}. \quad (1.14)$$

Ahora bien, dado que en el presente trabajo se trata únicamente en el espacio 2D, se hace necesaria la determinación de la constante  $C$ . Que puede obtenerse de manera sencilla para un medio homogéneo correspondiente a un campo descrito mediante la expresión asintótica de la función de Green 2D [4] dada por:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) \sim \frac{\exp\{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/v_0 + i\pi/4\}}{\sqrt{2\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/\pi v_0}}, \quad \omega > 0, \quad (1.15)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el punto inicial de la función de Green.

Así para un medio homogéneo los valores iniciales de los escalares  $P$  y  $Q$  y sus respectivas derivadas deben ser:

$$P(0) = \frac{1}{v_0}, \quad \frac{dP}{ds} = 0, \quad \frac{dQ}{ds} = 1, \quad y \quad Q(0) = 0. \quad (1.16)$$

Las primeras tres condiciones de la ecuación anterior se desprenden de la condición de medio homogéneo y la última se debe al hecho conocido de dispersión geométrica y a la indeterminación en amplitud en el origen  $s = 0$  de la función de Green. Por tanto en un medio homogéneo  $Q(s) = s = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ ; y  $\tau(s)$  se obtiene de la ecuación (1.9) y resulta ser  $\tau(s) = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|/v_0$ , de esta forma, comparando la función de Green y la expresión de la amplitud  $A_0$  según la relación de la ecuación (1.11) se observa que el valor de  $C$  y de  $\alpha$  son:

$$C = \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{2/\pi}} \quad y \quad \alpha = -\frac{1}{2},$$

luego la función de Green en términos del escalar  $Q$  se expresa

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0, \omega) = \frac{\exp\{i\pi/4\}}{\sqrt{2\omega/\pi}} \sqrt{\frac{v_0}{Q(s)}} \exp\{i\omega\tau(s)\} \quad (1.17)$$

y su generalización a un medio heterogéneo es inmediata, pues basta solo con cambiar  $v_0 \rightarrow v(\mathbf{x}_0)$  puesto que  $Q(s)$  evoluciona según la velocidad del medio a lo largo de la

trayectoria del rayo al igual de  $\tau(s)$ .

Tal representación de la función de Green muestra que el campo en un punto, aproximado de esta forma, es sensible a la velocidad y a las primeras y segundas derivadas únicamente a lo largo del rayo; lo cual no corresponde a un comportamiento ondulatorio adecuado ya que el fenómeno de difracción no se haría presente en este caso.

## 1.2 Teoría de rayos con exponentes complejos

Teniendo presente la metodología llevada a cabo en el capítulo anterior para obtener soluciones asintóticas de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, se visualiza la posibilidad de hacer distintas variaciones que van desde tomar otros términos de la serie asintótica, hasta cambiar de dominio a la expresión misma. Así por ejemplo una posibilidad es llevar tanto las amplitudes asociadas a la serie de la ecuación (1.10) como las fases de las mismas al dominio complejo. En tal caso el campo se expresa como:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim e^{i\omega\Phi(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(i\omega)^n}. \quad (1.18)$$

De esta manera, al incluir en la expansión una fase compleja  $\Phi(\mathbf{x})$ , se interpreta a la parte real de la fase como el tiempo de propagación equivalente al término  $\tau(\mathbf{x})$  de la expresión clásica y al término imaginario como a un decaimiento de la amplitud; de manera que los términos de la serie de la ecuación (1.18) expresados como la secuencia asintótica  $\{\phi_0(\omega), \phi_1(\omega), \phi_2(\omega), \dots\}$  tengan la propiedad de que cada uno de ellos tienda a cero más rápidamente que el anterior cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , esta condición se expresa por:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|\phi_{j+1}(\omega)|}{|\phi_j(\omega)|} = 0. \quad (1.19)$$

Ahora bien, al reemplazar tal expansión en la ecuación de Helmholtz escrita en coordenadas centradas al rayo, se obtienen los análogos de las ecuaciones iconal y de transporte del caso anterior (fase real) salvo que en este caso; las cantidades asociadas son complejas.

La solución de estas ecuaciones, siguiendo el procedimiento antes descrito, es un haz gaussiano el cual está dado por

$$u_{GB} = A_0 e^{i\omega\Phi(\mathbf{x})} \quad (1.20)$$

Sin embargo, en el caso de haces gaussianos resulta conveniente que la solución de la fase  $\Phi(\mathbf{x})$  no se limite a la trayectoria del rayo sino que además abarque una vecindad del mismo limitada por la distancia en la cual su amplitud es menor al uno por ciento de la amplitud en el rayo central. Esta distancia se conoce como el *skin depth* del haz gaussiano. Por tanto a la solución obtenida en el capítulo anterior (caso de la teoría de rayos)<sup>6</sup> se debe adicionar un término asociado a la separación del punto al rayo central.

Para ello se parte de la fase en un punto sobre el rayo caracterizado por la longitud de arco  $s$  y se considera que en la vecindad del punto se puede obtener su valor mediante una expansión en series de Taylor tal como sigue:

$$\Phi(q_1, q_2, s) = \tau(s) + \frac{1}{2}[M_{11}q_1^2 + 2M_{12}q_1q_2 + M_{22}q_2^2] \quad (1.21)$$

$$M_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{q_1=q_2=0} \quad i, j = 1, 2, \quad \mathbf{M} = [M_{ij}] \quad (1.22)$$

donde  $M_{ij}$  son las segundas derivadas parciales de la fase con respecto a las coordenadas ortogonales a la tangente al rayo.

El laplaciano de  $\Phi$  se puede expresar en coordenadas centradas al rayo como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_2^2}, \\ &= \left( \frac{1}{v_0} \right)_{,s} + M_{11} + M_{22} = -\frac{v_{0,s}}{v_0^2} + \text{traza}(\mathbf{M}), \end{aligned} \quad (1.23)$$

en donde el subíndice  $s$  representa la derivada respecto a la longitud de arco, de tal forma que al satisfacer la misma ecuación diferencial que la matriz  $\mathbf{M}$  obtenida para  $\tau$  en el caso de teoría de rayos asintótica<sup>7</sup>; su solución se puede expresar en términos de la matriz propagadora compleja  $\mathbf{Q}$  mediante

$$\mathbf{M} = v_0^{-1} \mathbf{Q}_{,s} \mathbf{Q}^{-1}. \quad (1.24)$$

Igualmente la matriz  $\mathbf{Q}$  satisface la ecuación diferencial (A.22)<sup>8</sup> la cual puede llevarse al sistema de ecuaciones (1.7) mediante la definición de las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$  o escalares  $Q$  y  $P$  complejos.

<sup>6</sup>ver solución apéndice A.1 p.63

<sup>7</sup>ver apéndice A.2 p.65

<sup>8</sup>ver apéndice A.2 p.65

La matriz  $\mathbf{M}$  se expresará de acuerdo a lo anterior como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}, \quad (1.25)$$

luego reescribiendo la ecuación 1.21 resulta, para el caso 3D

$$\Phi(\mathbf{x}) = \tau + \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{q}, \quad (1.26)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector que parte del rayo y perpendicular al mismo, llega al punto en consideración  $\mathbf{x}$ .

Para el caso 2D

$$\Phi(\mathbf{x}) = \tau + \frac{(n - n_0)^2 P}{2 Q}, \quad (1.27)$$

donde  $n - n_0$  es la distancia normal del punto  $\mathbf{x}$  al rayo central.

Esto significa que el haz contribuye tanto en amplitud como en fase al campo en los puntos que se encuentran al interior de un tubo cuyo radio es igual al *skin depht* del haz. De esta manera, en la región delimitada por el haz se definen frentes de onda cuya curvatura es determinada por las matrices dinámicas presentes en la fase de las ecuaciones (1.26) y (1.27).

En ambos casos, la escogencia de los valores iniciales para  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  ó  $P$  y  $Q$ , debe ser tal que el segundo término en la fase sea complejo con parte imaginaria positiva; de manera que provea en el campo un decaimiento gaussiano con la separación perpendicular al rayo. Para ello [13] se sugiere la escogencia de los valores iniciales de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ , dados por:

$$\mathbf{Q}(s_0) = \frac{\omega_r \omega_0^2}{v_0(s_0)} \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}(s_0) = \frac{i}{v_0(s_0)} \mathbf{I}, \quad (1.28)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad, que en el caso 2D se vuelve el escalar 1;  $\omega_0$  especifica el ancho inicial del haz, es decir su *skin depht* en alguna frecuencia de referencia  $\omega_r$  la cual conviene tomar como la frecuencia mínima del campo que se propaga a través de los haces. Por otra parte, esta elección inicial de las matrices o escalares propagadoras garantiza que  $\det(\mathbf{Q}) \neq 0$  [8], como se muestra en la sección 1.5, lo cual es necesario para evitar amplitudes infinitas en la vecindad de caústicas.

Una buena escogencia para  $\omega_0$  es

$$\omega_0 = \frac{2\pi V_a}{\omega_r}, \quad (1.29)$$

donde  $V_a$  es el promedio espacial global de las velocidades del modelo. Implicando así, que  $\omega_0 \geq \lambda$ , es decir, tal escogencia garantiza que el ancho del haz sea mayor que cualquiera de las longitudes de onda asociadas al paquete de ondas de la fuente; de manera que este haz pueda experimentar efectos de difracción, tal como sucede en un campo de ondas. Esta, a su vez, es una condición necesaria para evitar el rápido enzanchamiento del haz con la propagación, el cual se debe a que el incremento en la velocidad acelera el cambio de  $Q$ . Ahora bien dada la aproximación de la ecuación (1.21) y la expresión (1.29), se observa que la fase aportada por el haz en su vecindad es imprecisa cuando el modelo geológico presenta fuertes variaciones de velocidad en distancias menores a las longitudes de onda características, implicando que en la migración deben ser utilizados modelos de velocidad suavizados.

Así por ejemplo en un medio homogéneo (tomando como valores iniciales de  $P$  y  $Q$  los sugeridos por Hill [13]) el haz gaussiano 2D correspondiente será:

$$u_{GB}(s, n, \omega) = \left[ \frac{v_0^2}{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 s} \right]^{1/2} \times \exp \left\{ i \omega \left( \frac{s}{v_0} + \frac{s v_0 n^2}{2(\omega_r^2 \omega_0^4 + v_0 s^2)} \right) - \frac{1}{2} \frac{\omega n^2}{(\omega_r \omega_0^2 + v_0^2 s^2 / \omega_r \omega_0^2)} \right\} \quad (1.30)$$

en donde se puede identificar el término de fase, el término gaussiano y su dependencia con los distintos parámetros del haz.

El primer término de la fase exponencial tiene la información de la curvatura asociada a los haces, la cual tal como se describió anteriormente tiende a aumentar con el incremento de  $s$  y parte en  $s = 0$  con una curvatura nula que corresponde a un frente de onda plana. Así mismo, del término de la fase asociada al decaimiento gaussiano se observa que el ancho del haz va aumentando con su propagación y la razón con que este aumenta depende de su valor inicial de tal manera que para anchos muy pequeños el aumento con la propagación se hace significativo.

### **1.3 Función de Green 2D aproximada mediante una suma de haces gaussianos**

Las soluciones de la ecuación de Helmholtz, correspondientes a una fuente puntual, ya sean obtenidas de forma exacta o aproximada, son conocidas con el nombre de funciones de Green. Ahora bien, mediante el uso de haces gaussianos, es posible aproximar

dichas soluciones en un punto mediante una suma finita de tales haces. Los haces que se incluyen en la suma son aquellos haces cuya amplitud en el punto en que se va a aproximar el campo, no sea menor que el uno por ciento de su amplitud máxima, es decir, aquellos que disten del punto en menos de su *skin depth*, puesto que en caso contrario se considera despreciable tal contribución. Cada uno de estos haces se definen sobre distintos rayos que se acercan al punto en consideración.

Dichas contribuciones son ilustradas en la Figura 1.3.

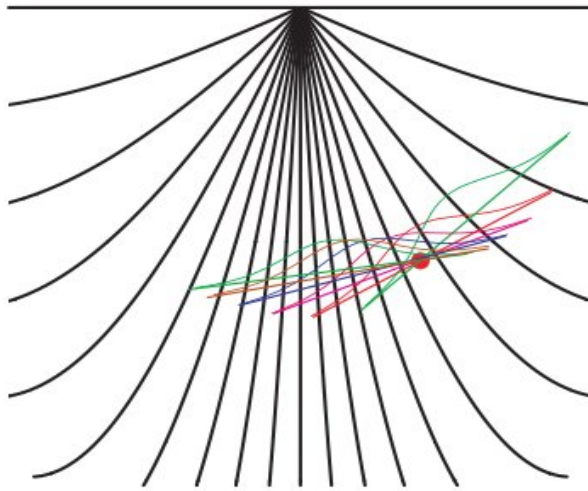


Figura 1.3: Tomado de Bleistein [3]. Representación de distintos rayos que emanan de una fuente; se toma un punto del espacio en consideración en el cual las gaussianas que contribuyen al campo en aquel punto son representadas.

Esto es; el campo incidente puede expresarse como:

$$u_I(\mathbf{x}, \omega) \approx C \sum_m u_{GB}(\mathbf{x}_m'', \mathbf{x}_0, \omega), \quad (1.31)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el punto inicial de los haces gaussianos que pasan en la cercanía de  $\mathbf{x}$  y los puntos  $\mathbf{x}_m''$  corresponden a los puntos finales a lo largo de los haces gaussianos que contribuyen al campo en el punto  $\mathbf{x}$ .

El primer objetivo consiste en expresar la función de Green 2D en un medio heterogéneo, como una superposición de haces gaussianos tal como lo muestra la ecuación (1.31). La manera más sencilla de lograr esto, es considerar un medio homogéneo, y encontrar la constante asociada a ese caso. Luego, se considera como válida la suposición de que la expresión resultante para el caso correspondiente a un medio con velocidad

homogénea es la misma que la expresión asociada a un medio con velocidad variable. De esta manera, con solo cambiar el término de velocidad obtenido en el primer caso, se tendrá el caso más general.

La función de Green 2D está definida por:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} \right] G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = -2\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.32)$$

cuya solución asintótica para medios homogéneos es:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \sim \frac{\exp\{i\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/v_0 + i\pi/4\}}{\sqrt{2\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/\pi v_0}} \quad \text{para } \omega > 0. \quad (1.33)$$

donde  $\mathbf{x}'$  es el punto inicial de la función de Green.

La superposición es considerada inicialmente como una suma sobre un continuo de haces gaussianos (integral), la cual para fines de implementación puede ser discretizada más adelante, tal como se expresó inicialmente en la ecuación (1.31).

Se propone por tanto para  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0$  :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \Psi_0 \int u_{GB}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0, \omega) d\theta = \Psi_0 \int u_{GB}(n, s, \omega) d\theta \quad (1.34)$$

donde  $\mathbf{x}_0$  es el punto inicial de los haces gaussianos y  $\mathbf{x}''$  es el punto final a lo largo del rayo central asociado a un haz gaussiano, que contribuye al campo de la función de Green en  $\mathbf{x}$  y el dominio de integración de la integral de la ecuación (1.34) es un intervalo angular simétrico en  $\theta$  .

Desarrollando la integral de la ecuación (1.34) se obtiene la constante  $\Psi_0$  para el caso en que  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'$ ,<sup>9</sup> pero tal como lo muestra Bleistein [3], el resultado es el mismo para el caso  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}'$ . Sin embargo, la función de Green se ve afectada por la introducción de un término que compensa el cambio de fase del punto  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}'$ ; de tal manera que la función de Green se expresa en el caso más general como [14]:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{i\sqrt{\omega_r\omega_0^2}}{2v_0(\mathbf{x}_0)} \int u_{GB}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0, \omega) \exp\{-i\omega\mathbf{p}''(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0)\} \frac{dp''_x}{p''_z}. \quad (1.35)$$

---

<sup>9</sup>ver la deducción en el apéndice A.3 p.68

## 1.4 Relación entre la amplitud de la función de Green aproximada mediante haces gaussianos y la teoría de rayos clásica

Existe una relación entre las amplitudes de la función de Green derivada de la teoría de rayos asintótica y de la teoría de haces gaussianos, la cual se establece a través de la relación presente entre las matrices dinámicas. Para encontrar tal relación, se parte de las ecuaciones que gobiernan la amplitud en la teoría de rayos asintótica, con sus condiciones iniciales, las cuales están dadas por:

$$\frac{d\mathbf{Q}_{\text{ART}}}{ds} = v_0\mathbf{P}_{\text{ART}}, \quad \mathbf{Q}_{\text{ART}}(s_0) = 0, \quad (1.36a)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{ART}}}{ds} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{Q}_{\text{ART}}}{v_0^2}, \quad \mathbf{P}_{\text{ART}}(s_0) = \frac{\mathbf{I}}{v_0}, \quad (1.36b)$$

en donde el subíndice *ART* indica que tales cantidades corresponden a la teoría asintótica del rayo (*Asymptotic Ray Theory*). Por otra parte, las ecuaciones que gobiernan la amplitud de los haces gaussianos son las mismas ecuaciones anteriores salvo que se definen sobre cantidades complejas y las condiciones iniciales son modificadas. Las ecuaciones quedan determinadas por:

$$\frac{d\mathbf{Q}_{\text{GB}}}{ds} = v_0\mathbf{P}_{\text{GB}}, \quad \mathbf{Q}_{\text{GB}}(s_0) = \frac{\omega_r\omega_0^2}{v_0(\mathbf{x}_0)}\mathbf{I}, \quad (1.37a)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{GB}}}{ds} = -v_0^{-2}\mathbf{V}\mathbf{Q}_{\text{GB}}, \quad \mathbf{P}_{\text{GB}}(s_0) = \frac{i}{v_0}\mathbf{I}, \quad (1.37b)$$

igualmente, las cantidades dinámicas de la ecuación anterior se escriben con subíndice *GB* que indica su correspondencia con los haces gaussianos (*Gaussian Beam*).

Dado que para haces gaussianos las cantidades dinámicas son complejas, estas pueden ser separadas para obtener las respectivas relaciones tanto para su parte real, la cual se denotará con  $\Re$ , como para su parte imaginaria, que se denotará por  $\Im$ .

$$\frac{d\Re\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}\}}{ds} = v_0\Re\{\mathbf{P}_{\text{GB}}\} \quad \Re\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}(s_0)\} = \frac{\omega_r\omega_0^2}{v_0(\mathbf{x}_0)}\mathbf{I}, \quad (1.38a)$$

$$\frac{d\Im\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}\}}{ds} = v_0\Im\{\mathbf{P}_{\text{GB}}\} \quad \Im\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}(s_0)\} = 0, \quad (1.38b)$$

$$\frac{d\Re\{\mathbf{P}_{\text{GB}}\}}{ds} = -v_0^{-2}\mathbf{V}\Re\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}\}, \quad \Re\{\mathbf{P}_{\text{GB}}(s_0)\} = 0, \quad (1.38c)$$

$$\frac{d\Im\{\mathbf{P}_{\text{GB}}\}}{ds} = -v_0^{-2}\mathbf{V}\Im\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}\}, \quad \Im\{\mathbf{P}_{\text{GB}}(s_0)\} = \frac{\mathbf{I}}{v_0}. \quad (1.38d)$$

Se puede observar que tanto las ecuaciones diferenciales como sus condiciones iniciales, para la parte imaginaria de los haces Gaussianos, son idénticas a las del caso de la teoría de rayos asintótica. Por lo tanto se tiene que:

$$\mathbf{Q}_{\text{ART}}(s) = \Im\{\mathbf{Q}_{\text{GB}}(s)\}, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{P}_{\text{ART}}(s) = \Im\{\mathbf{P}_{\text{GB}}(s)\}, \quad (1.40)$$

implicando que la dispersión geométrica, como otros efectos de la matriz dinámica  $\mathbf{Q}$ , de la teoría de rayos clásica, son incluidos en los haces gaussianos a través de la parte imaginaria de los haces gaussianos.

## 1.5 Eliminación de amplitudes infinitas en caústicas

En la teoría de rayos clásica, es posible que  $Q$  sea igual a cero,  $Q = 0$ . Esto ocurre en los puntos de fuente y en puntos con caústicas. En la teoría de haces gaussianos es posible evitar tal comportamiento mediante la escogencia adecuada de los valores iniciales de  $Q$  y  $P$ , de manera que tanto  $Q$  como  $P$  sean distintas de cero en todo el espacio físico.

Especialmente se quiere que  $Q$  sea distinta de cero, puesto que este valor aparece como denominador tanto de la expresión asociada a la fase del haz gaussiano como de la expresión asociada a la amplitud del mismo.

Para obtener las condiciones necesarias se escribe el sistema de ecuaciones (A.23) en forma matricial como:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & v_0 \\ -v_{0,nn}/v_0^2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Tal sistema puede resolverse mediante la introducción de dos soluciones fundamentales de forma que

$$\mathbf{n}^1(s_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}^2(s_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

las cuales satisfacen

$$\frac{d\mathbf{n}^j}{ds} = \mathbf{A}\mathbf{n}^j, \quad j = 1, 2. \quad (1.43)$$

Igualmente se construye a partir de aquellas soluciones la matriz  $\mathbf{W}$ , la cual satisface la misma ecuación diferencial

$$\mathbf{W}(s) = [ \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2 ] . \quad (1.44)$$

El determinante de la matriz  $\mathbf{W}$  se conoce como el wronskiano de las dos soluciones fundamentales, además, un hecho conocido de la teoría de ecuaciones diferenciales es [12]

$$\det[\mathbf{W}(s)] = \det[\mathbf{W}(s_0)] \exp \left\{ \int_{s_0}^s \text{traza} \{ \mathbf{A}(s) \} ds \right\} . \quad (1.45)$$

Así, puesto que la matriz  $\mathbf{W}$ , inicialmente es igual a la matriz identidad, entonces  $\det[\mathbf{W}(s_0)] = 1$ , y dado que la traza de  $\mathbf{A}(s) = 0$ , se tiene por tanto que el wronskiano será constante e igual a uno:

$$\mathbf{W}(s) = 1 \quad (1.46)$$

Esto significa que los dos vectores  $\mathbf{n}^1$  y  $\mathbf{n}^2$  son linealmente independientes. De esta forma, si se toma el valor inicial de  $Q$  real y el valor inicial de  $P$  imaginario, tal como sigue

$$Q(s_0) = a_1, \quad P(s_0) = ia_2 \quad \text{con } a_1, a_2 \text{ reales} \quad (1.47)$$

a partir de las soluciones  $\mathbf{n}^1$  y  $\mathbf{n}^2$  y de las condiciones iniciales anteriores se puede escribir la solución de  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n}(s) = a_1 \mathbf{n}^1 + ia_2 \mathbf{n}^2 \quad \text{donde} \quad \mathbf{n}^1(s_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{n}^2(s_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

y cada componente de la solución de  $\mathbf{n}$  resultan

$$Q(s) = a_1 n_1^1(s) + ia_2 n_1^2(s) \quad P(s) = a_1 n_2^1(s) + ia_2 n_2^2(s) \quad (1.49)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  representan la primera y segunda componentes del vector  $\mathbf{n}$  respectivamente.

Puesto que  $Q$  y  $P$  tienen un término real y otro imaginario, la única manera de que alguno de ellos sea cero, para algún valor de  $s$  es que ambos términos sean cero. Por ejemplo, si  $Q$  fuera cero en algún  $s$  entonces  $n_1^1 = n_2^2 = 0$ .

En tal caso una columna de  $\mathbf{W}(s)$  sería cero y  $\det[\mathbf{W}(s_0)] = 0$  lo cual no puede ocurrir puesto que  $\det[\mathbf{W}] = 1$ , de allí se deduce que  $Q$  no puede ser cero en ningún punto a lo largo de su trayectoria y con ello se demuestra que en la teoría de haces gaussianos no se generan amplitudes infinitas a lo largo de los rayos centrales independientemente de la presencia de zonas que generen caústicas.

## 1.6 Condición de Imagen

La expresión que permite dar cuenta de los reflectores que se encuentran en subsuperficie, corresponde a una condición de deconvolución de los campos incidente  $u_I$  y reflejado  $u_R$ , dada por [11]:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)}{u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)} d\omega, \quad (1.50)$$

la cual es conocida como condición de imagen, donde  $R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta)$  representa las reflectividades de las distintas capas del subsuelo en el punto  $\mathbf{x}$  para la iluminación suministrada por la fuente ubicada en el posición  $\mathbf{x}_s$ .

Esta expresión puede ser deducida a partir de la definición del coeficiente de reflexión, como la razón entre el campo incidente y el campo reflejado en el tiempo en que estos dos campos se encuentran en la superficie reflectora  $t_R$ , así

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{U_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t_R)}{U_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t_R)}, \quad (1.51)$$

esta expresión no puede ser calculada de manera directa, debido a que no se conoce el tiempo de reflexión  $t_R$ , por tanto se plantea una integral sobre esta variable, pensando en el campo incidente como definido únicamente en el tiempo  $t_R$ , lo cual puede lograrse escogiéndolo en la forma de una distribución delta de *dirac* o una función *sinc* de corta duración (*sinc* representa la función seno cardinal). De esta manera y con el fin de evitar la división por cero se toma la expresión:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{1}{|U_I|^2} \int_0^{t_{max}} U_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) U_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) dt, \quad (1.52)$$

En la cual, se ha multiplicado por el campo incidente tanto en el numerador como en el denominador, eliminando con ello la fase en el campo del denominador. La expresión de la ecuación 1.52, puede ser llevada al dominio de la frecuencia expresando cada uno de los campos como transformadas de Fourier, según:

$$U_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) d\omega \quad y \quad (1.53)$$

$$U_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) d\omega, \quad (1.54)$$

donde la segunda igualdad de la ecuación 1.54 corresponde al complejo conjugado del campo incidente, el cual es igual al campo mismo, dado que este es real.

Introduciendo estas igualdades en la ecuación 1.52 se obtiene

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{1}{4\pi^2 |U_I|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) u_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega') \\ \times \int_0^{t_{max}} e^{i(\omega - \omega')t} dt, \quad (1.55)$$

identificando de manera aproximada a la integral en tiempo con la representación integral de la distribución de dirac (mas precisamente de una función sinc muy estrecha), se resuelve una integral en frecuencia y resulta por tanto

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{1}{4\pi^2 |U_I|^2} \int_{-\infty}^{\infty} u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) u_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) d\omega. \quad (1.56)$$

Multiplicando numerador y denominador por el campo incidente en el dominio de la frecuencia se obtiene

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{|u_I|^2}{4\pi^2 |U_I|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)}{u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)} d\omega \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)}{u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)} d\omega, \quad (1.57)$$

que corresponde a la condición de imagen presentada en la ecuación (1.50).

A partir de los datos sísmicos y utilizando el teorema de Green se obtiene [6]

$$u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega) = -2 \int_{x_3=0} \frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega)}{\partial x_3} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) dx_{r_1} dx_{r_2}, \quad (1.58)$$

donde  $\mathbf{x}_r$  es la posición del receptor (geófono),  $\mathbf{x}_s$  es la posición de la fuente,  $D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega)$  es el campo registrado en superficie para el disparo  $\mathbf{x}_s$ ,  $x_3$  es la coordenada normal a la superficie y  $x_3 = 0$  define la superficie de adquisición <sup>10</sup>.

El caso 2D se obtiene como un caso particular del anterior y se describe

$$u_R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega) = -2 \int_{x_3=0} \frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega)}{\partial x_3} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) dx_{r_1}. \quad (1.59)$$

Utilizando la expresión del campo reflejado o disperso  $u_R$  y describiendo su comportamiento asintótico por  $G^* \sim A \exp\{-i\omega\tau\}$ , tenemos que la derivada con respecto a  $x_r$  se puede aproximar por

$$\frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega)}{\partial x_{r_3}} \sim -i\omega p_z G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega). \quad (1.60)$$

---

<sup>10</sup>ver la deducción en el apéndice A.4 p.72

Ahora bien, dado que el campo de ondas incidente  $u_I(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)$ , tiene la misma función de Green propagándose hacia abajo  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega)$ ; entonces, si se sustituye tal equivalencia en la ecuación (1.50), resulta

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{-2i}{2\pi} \int \frac{d\omega}{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)} \int_{x_{r,3}=0} \omega p_z D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) dx_r, \quad (1.61)$$

multiplicando numerador y denominador por  $G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \theta)$  se obtiene

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{-2i}{2\pi} \int \frac{d\omega G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)}{G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega)} \int_{x_{r,3}=0} \omega p_z D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) dx_r. \quad (1.62)$$

El término del denominador se reduce al cuadrado de la amplitud de la función de Green la cual está dada por  $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) = 1/\sqrt{2\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|/\pi v_0} = A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)/\sqrt{|\omega|}$  de manera que

$$G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) \sim \frac{A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)^2}{|\omega|} = \frac{\pi v_0(s)}{2|\omega| |Q_{ART}(s)|}, \quad (1.63)$$

donde  $Q_{ART}(s)$  representa al escalar  $Q$  de la teoría de rayos clásica que se encontró en la ecuación (1.17). De esta manera se logra una expresión para las reflectividades del subsuelo, dada por

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{-i2|Q_{ART}(s)|}{\pi^2 v_0(s)} \int \omega |\omega| d\omega \int_{x_{r,3}=0} dx_r p_{z_r} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) \quad (1.64)$$

En este punto el uso de la aproximación de las funciones de Green en sumas de haces gaussianos, permite que aquellos actúen como propagadores de los datos sísmicos captados en superficie de manera independiente; lo cual facilita el proceso de migración. Así, la expresión resulta

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \theta) = \frac{|Q_{ART}(s)| \omega_r \omega_0^2}{2\pi^2 v_0(s) v(\mathbf{x}_s)} \int i\omega |\omega| d\omega \int_{x_{r,3}=0} dx_r \frac{p_{z_r}}{v(\mathbf{x}_r)} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) \quad (1.65)$$

$$\times \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''} \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s, \omega) \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''}.$$

Esta expresión nos da un mapeo de los reflectores que se encuentran al interior del subsuelo cuando han sido iluminados únicamente con una fuente ubicada en  $\mathbf{x}_s$ . Por lo tanto, la imagen definirá solo una pequeña región de los reflectores; de manera que si se suma esta expresión para muchas fuentes en distintas posiciones se podrá obtener una expresión que ilumine toda la región de interés, así

$$R(\mathbf{x}) = \int dx_s \frac{|Q_{ART}(s)| \omega_r \omega_0^2}{2\pi^2 v_0(s) v(\mathbf{x}_s)} \int i\omega |\omega| d\omega \int_{x_{r,3}=0} dx_r \frac{p_{z_r}}{v(\mathbf{x}_r)} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) \quad (1.66)$$

$$\times \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''} \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s, \omega) \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''},$$

donde la dependencia angular se pierde al incluir la contribución del resto de las fuentes, lo cual genera a su vez un cambio en la interpretación de la función  $R$ , de una función de las reflectividades a una función imagen. La expresión resultante corresponde a la migración por haces gaussianos para adquisición de disparo común preapilado, y a partir de ella se puede obtener la expresión correspondiente a la migración posapilado.

Una expresión más simple que preserve la ubicación de los reflectores aunque pierda la información correcta de las amplitudes, se logra extrayendo el cuadrado de la magnitud de la función de Green del denominador de la ecuación (1.62), resulta

$$I(x, z) = -i \int d\omega \int dx_s G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \omega) \int_{x_{r3}=0} \omega p_z D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) dx_r, \quad (1.67)$$

donde las variables  $(x, z)$  representan las coordenadas del vector  $\mathbf{x}$ . Utilizando la representación por haces gaussianos de la función de Green, se obtiene:

$$I(x, z) = \frac{\omega_r \omega_0^2}{4\pi} \int i\omega d\omega \int \frac{dx_s}{v(x_s)} \int_{x_{r3}=0} dx_r \frac{p_{zr}}{v(\mathbf{x}_r)} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) \\ \times \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''} \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s, \omega) \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''},$$

donde  $I$  en este caso representa únicamente la imagen de los reflectores.

## CAPÍTULO 2

---

---

# MIGRACIÓN POSAPILADO

---

---

### 2.1 Migración posapilado (cero offset)

Una sección sísmica apilada, obtenida a través de un procesamiento sísmico, puede suponerse que corresponde a una sección cero offset, entendida como una adquisición sísmica llevada a cabo de tal manera que fuentes y receptores se encuentren en el mismo sitio, ver Figura 2.1 .

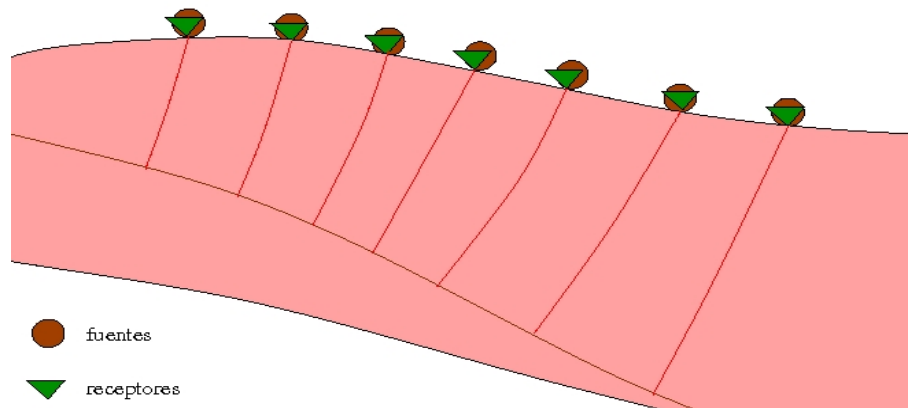


Figura 2.1: Representación de una adquisición sísmica en el dominio cero-offset

En estas condiciones el rayo desde la fuente al reflector coincide en tiempo de propagación y trayectoria con el rayo desde el reflector al receptor, por lo cual está justificado

introducir el conocido modelo del reflector explosivo [10], en el cual se considera que el campo registrado en superficie es equivalente a la propagación de un campo imaginario generado por fuentes ubicadas en las superficies reflectoras, las cuales explotan al mismo tiempo, y se propagan en un medio cuya velocidad es la mitad de la velocidad verdadera del medio. De esta forma, retropropagando el campo captado en superficie hasta el tiempo  $t = 0$  con velocidad  $v/2$ , se obtienen las distintas subsuperficies del subsuelo.

Esto permite que la condición de imagen para el caso de migración posapilada, o de secciones cero offset, se reduzca a:

$$I(x, z) = -i \int d\omega \int_{x_{r3}=0} \omega p_z D(\mathbf{x}_r, \omega) G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) dx_r, \quad (2.1)$$

que con la inclusión de los haces gaussianos se convierte en

$$I(x, z) = -i \int d\omega \int_{x_{r3}=0} dx_r \omega p_z D(\mathbf{x}_r, \omega) \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''}. \quad (2.2)$$

La inclusión de las haces gaussianos en la ecuación anterior se llevó a cabo sin la constante de proporcionalidad requerida, puesto que en esta expresión se busca sólo un acuerdo en la imagen. Por ello se pueden adecuar las constantes apropiadas con el propósito de obtener la expresión utilizada por Hale en su implementación de la migración por haces gaussianos cero offset [18], de esta manera la expresión anterior se puede expresar por

$$I(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \omega d\omega \int_{x_{r3}=0} dx_r p_z D(\mathbf{x}_r, \omega) \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''}. \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3), requiere del computo de haces gaussianos, correspondientes a muchos pares fuente-receptor, lo cual requiere de un costo computacional considerable puesto que se requeriría retropropagar cada dato individual a través de la construcción de haces gaussianos. Tal efecto es reducido mediante un apilamiento local de los datos en superficie, el cual puede llevarse a cabo mediante una partición que permite que cada traza de entrada contribuya a un número de haces centrales con pesos que suman la unidad. Para ello, Hill utiliza la función Gaussiana [13], debido a que logra modular de manera adecuada las contribuciones de las trazas en cada haz. La deducción detallada se encuentra en el apéndice de su artículo [13].

Partiendo de la integral infinita de la función Gaussiana

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{2\gamma^2}\right\} dx' = 1, \quad (2.4)$$

la cual puede ser aproximada mediante una suma discreta por

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}\gamma} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-x_j)^2}{2\gamma^2} \right\} \approx 1, \quad x_j = j\Delta x, \quad \Delta x \leq 2\gamma, \quad (2.5)$$

se obtiene una expresión que permite realizar el proceso de reducción de haces en el computo de la migración. Teniendo en cuenta que la discretización de la suma, así como su truncamiento generan errores en la identidad de esta ecuación. Aún así y para la aplicación requerida, los errores no son suficientes para degradar la calidad de la imagen significativamente. En este sentido, algunas discusiones con respecto a los errores de discretización y truncamiento son tratados en el apéndice E de las notas de Bleistein [3], al igual que la validez de las restricciones tomadas por Hill y que se muestran en la ecuación (2.5).

Por otra parte con el propósito de insertar la identidad anterior en la fórmula de migración se toma

$$\gamma = \omega_0 \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega}}, \quad \text{con} \quad \omega > 0, \quad (2.6)$$

típicamente  $\omega_r \leq \omega \leq 4\omega_r$  por tanto  $\Delta x \leq \omega_0$ .

Ahora se toma la integral en  $x_r$  de la ecuación (2.3) que es

$$I_r = \int_{x_{r3}=0} dx_r p_z D(\mathbf{x}_r, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega). \quad (2.7)$$

En la integral de la ecuación (2.7) se introduce la aproximación de la ecuación (2.5) cambiando  $x$  por  $x_r$  e incluyendo el valor de  $\gamma$ , con lo cual se obtiene

$$I_r \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}\omega_0} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int dx_r \exp \left\{ -\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} \right\} p_{z_r} \times D(\mathbf{x}_r, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega). \quad (2.8)$$

Debido a la reducción de la amplitud de las Gaussianas con la separación al punto central; las integrales en  $x_r$  alrededor de cada punto  $x_j$  pueden limitarse a un rango  $2L$  centrado en cada  $x_j$ , de manera que la Gaussiana se haga despreciable fuera de este rango; es decir que sea menor al 1% de su valor pico.

Esto permite expresar la integral como

$$I_r \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}\omega_0} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp \left\{ -\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} \right\} p_{z_r} \times D(\mathbf{x}_r, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega), \quad (2.9)$$

lo que tiene como efecto separar la integral en una suma de integrales centradas en los puntos  $x_j$ .

Para poder simplificar la expresión; los haces se expresan como sigue:

$$u_{GB}(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) = A(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r) \exp \{i\omega T(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r)\} \quad \text{donde}$$

$$A(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r) = \sqrt{\frac{v_0(\mathbf{x}_r'')}{Q(\mathbf{x}_r)}} \quad \text{y} \quad T(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r) = \int_{s_0}^s \frac{dx(s')}{v_0(s')} + \frac{i\omega n^2 P(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r)}{2 Q(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r)}. \quad (2.10)$$

Según propone Bleistein [3], es válido realizar una aproximación lineal en la variable  $T$  y aproximar la amplitud a su valor en el punto central del intervalo de integración, dado que esta cambia muy poco en distancias menores a una longitud de onda.

$$\begin{aligned} A^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r) &\approx A^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_j), \\ T^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r) &\approx T^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_j) + \left[ \frac{\partial T^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r)}{\partial x_r} \right]_{x_r=x_j} (x_r - x_j), \\ &\approx T^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_j) - p_{x_j} (x_r - x_j), \quad \mathbf{x}_j = (x_j, 0), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $p_{x_j}$  es la componente horizontal del vector lentitud en el plano horizontal, el cual tiene signo negativo debido a que la derivada de  $T^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_j)$  se da respecto a la coordenada inicial  $\mathbf{x}_j$  y no respecto a la coordenada que corre a lo largo del rayo  $\mathbf{x}_r''$  tal como sucede en la definición de  $p$ . Con esta aproximación se incluye el retraso de las trazas con respecto a los puntos centrales  $\mathbf{x}_j$ , luego

$$\begin{aligned} I_r &\approx \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\omega_0}} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{z_r}(\mathbf{x}_j) A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) \exp \{-i\omega T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j)\} \\ &\times \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp \left\{ -\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} - i\omega p_{x_j} (x_r - x_j) \right\} D(\mathbf{x}_r, \omega), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $p_{z_r}$  se toma también en los puntos centrales de integración.

Volviendo a la expresión de la imagen y utilizando las aproximaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} I(x, z) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\omega_0}} \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''} p_{z_r}(\mathbf{x}_j) A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) \int \omega d\omega \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \exp \{-i\omega T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j)\} \\ &\times \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp \left\{ -\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} - i\omega p_{x_j} (x_r - x_j) \right\} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega). \end{aligned} \quad (2.13)$$

La integral en  $p_{x_r}$  es simétrica con respecto a  $p$  luego para cada  $x_j$  se puede aproximar la componente  $p_{z_r}$  al valor correspondiente a la dirección del rayo central  $p$ , lo que permite escribir

$$I(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\omega_0}} dp_{x_r}'' A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) \int \omega d\omega \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \exp \{ -i\omega T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) \} \\ \times \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp \left\{ -\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} - i\omega p_{x_j} (x_r - x_j) \right\} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega). \quad (2.14)$$

La expresión (2.14), representa la migración en la aproximación del campo de ondas por haces gaussianos para datos cero ofset y puede interpretarse de la siguiente manera: La integral en  $dx_r$  realiza un apilamiento de las trazas de los distintos puntos de las vecindades de  $x_j$ , modulados por un ponderador gaussiano y para cada una de las inclinaciones dadas por  $p_{x_j}$ . Las distintas componentes de onda plana  $p_{x_j}$ , introducen retrasos en el tiempo de propagación entre el punto central  $x_j$  y las trazas vecinas correspondientes. La integral en frecuencia representa la condición de imagen que retropropaga los datos hasta el tiempo  $t = 0$ . La integral en  $dp_{x_r}$  realiza la suma de todas las contribuciones a la imagen proporcionada por todos los haces que parten de los puntos  $x_j$  y finalmente la suma sobre  $x_j$  proporciona la imagen final producto de la suma de las contribuciones de todos los datos apilados.

## 2.2 Descripción del Algoritmo

A partir de la expresión de migración obtenida en la ecuación (2.14), y con el propósito de presentar la implementación computacional de esta expresión, resulta práctico reducirla a la expresión siguiente [17]:

$$I(x, z) = \sum_j \int dp_x A_j(p_x, x, z) \tilde{b}_j[\tau = \tau_j(p_x, x, z), p_x], \quad (2.15)$$

donde  $I(x, z)$  denota la imagen en subsuperficie y  $b_j(\tau, p_x)$  denota el apilado local inclinado de los datos registrados en superficie y retropropagados al interior del subsuelo, el cual depende de una función de tiempo  $\tau$  para cada inclinación de reflexión  $p_x$ . Las funciones de tiempo  $\tau(p_x, x, z)$  y amplitud  $A_j(p_x, x, z)$  representan las contribuciones de las funciones  $T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j)$  y  $A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j)$  en el punto imagen  $\mathbf{x} = (x, z)$ , las cuales determinan el mapeo de cada haz local apilado e inclinado sobre la imagen en subsuperficie. La suma sobre los centros de los haces y la suma sobre todas las inclinaciones, acumulan la contribución de cada haz en la imagen migrada total [17].

En este trabajo se utilizó el código que permite realizar la migración posapilado por haces gaussianos proporcionada en el software libre de procesamiento sísmico, conocido como SEISMIC UNIX (SU). A continuación se describen las etapas utilizadas en este algoritmo para realizar la migración descrita en la ecuación 4.9

### 2.2.1. Apilamiento local inclinado

El Apilamiento local inclinado de los datos sísmicos se lleva a cabo a través de la función **formBeams**. Esta función en un primer proceso descompone los datos registrados en superficie  $d(x, t)$  en apilamientos locales inclinados (slant staking) (haces), cada uno de ellos computado a partir de un subconjunto sobrelapado de datos sísmicos. En este proceso aplica sobre los datos asociados a cada haz, la función Gaussiana moduladora, de manera que las contribuciones resultan en:

$$F_j(\omega, x) \equiv e^{-\frac{1}{2}|\frac{\omega}{\omega_r}|\frac{x^2}{\omega_0^2}} F(\omega, x + x_j), \quad (2.16)$$

donde  $x$  representa la separación de cada traza al haz, es decir, en la expresión (2.14) la variable  $x$  corresponde a  $x = x_r - x_j$ ,  $F(\omega, x)$  representa la transformada de fourier de tiempo a frecuencia aplicada a la ventana de datos y el ancho medio de esta ventana se toma como  $L = 3\omega_0\sqrt{|\omega_r/\omega_h|}$ , lo cual garantiza que la contribución de los datos sea al menos del 1% de su valor pico para todas las frecuencias de interés, donde  $\omega_h$  es la frecuencia más alta.

El apilamiento local inclinado se completa con el computo de la integral

$$B_j(\omega, p_x) \equiv C \frac{|\omega|}{2\pi} \int dx e^{-i\omega p_x x} F_j(\omega, x) \quad (2.17)$$

$$= C \frac{|\omega|}{2\pi} f_j(\omega, k_x = \omega p_x), \quad (2.18)$$

donde  $\omega_0$  y  $\omega_r$  tienen el mismo significado que en las secciones anteriores es decir representan el ancho inicial (desviación estandar) del haz gaussiano y la frecuencia mínima de interés. La constante  $C = |\omega/\pi\omega_r|^{1/2}(\Delta x/\omega_0)$  corresponde a la constante obtenida con el apilamiento de la ecuación (2.5) que permite normalizar la suma de las funciones Gaussianas, donde  $\Delta x$  es el espaciado entre haces. Así mismo se escoge  $\Delta x = |2\omega_r/\omega_h|^{1/2}\omega_0$  con el fin de satisfacer las condiciones encontradas por Hill [13] para todas las frecuencias de interés [18]

Para determinar el intervalo de muestreo en  $p_x$  se parte de la definición de  $p_x = k_x/\omega$ , donde  $k$  es el número de onda de manera que  $\Delta p_x = \Delta k_x/\omega$ . El intervalo  $\Delta p_x$  es establecido de manera que se evite el aliasing en el número de onda con respecto al cual está asociado. Así utilizando el criterio de dispersión dado por el ancho espacial de los datos sísmicos  $2L$ , el muestreo en número de onda queda dado por  $\Delta k_x = 2\pi/2L$ , luego el muestreo en  $p_x$  válido para todas las frecuencias es:

$$\Delta p_x = \frac{\pi}{\omega_h L} = \frac{\pi}{3\omega_0 \sqrt{|\omega_r \omega_h|}} \quad (2.19)$$

Ahora bien, con el fin de hacer algunas manipulaciones, la función dada en la ecuación (2.17) es llevada al dominio del tiempo mediante una transformación de Fourier inversa, resultando en la función  $b_j(t, p_x)$  donde  $t$  es real. Es decir, el primer computo asociado a los datos llevado a cabo por el código de migración por haces gaussianos es el de la función  $b_j(t, p_x)$ , el cual es realizado para cada posición inicial de los haces  $x_j$  por la subrutina denominada **formBeams**

### 2.2.2. Trazado del rayo central

En cada posición  $x_j$  se inician los rayos que parten de este punto tomando en cuenta todas las inclinaciones. Sobre cada uno de aquellos rayos se computan las contribuciones a la imagen migrada, esto se logra mediante la siguiente metodología:

Una vez ejecutada la subrutina **formBeams** para un  $x_j$  dado, se empiezan a generar rayos para cada inclinación  $p_x$ . A largo de cada uno de estos rayos se resuelven las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del rayo con exponentes complejos y otras funciones adicionales, obteniendo con ello las matrices propagadoras, el tiempo de propagación a lo largo del rayo, el índice kmah, el ángulo que forma el rayo respecto al eje vertical, las coordenadas  $(x, z)$ , la velocidad y sus derivadas en cada paso  $dt$ . Todo ello es almacenado para cada paso de tiempo en una estructura denominada **raystep** y esto es llevado a cabo por la función **makeray**.

### 2.2.3. Construcción del haz gaussiano

A cada uno de aquellos rayos se le asocia un haz el cual contribuye en los puntos que se encuentran en su alrededor, tales contribuciones son consideradas mediante la

función **accBeam**. La función **accBeam** toma como entrada el rayo construido y la función  $b_j(t, p_x)$  para el  $p_x$  correspondiente. Se definen dos números randómicos con los seudónimos de *live* y *dead* los cuales representan estados distintos de una estructura denominada celda, la cual se define sobre una malla 8 veces más ancha que la malla imagen (dx,dz). De manera que sobre esta malla se evalúan los tiempos real e imaginario y las amplitudes real e imaginarias del haz correspondiente. Por otra parte, mediante la función **beamData** y a partir de  $b_j(t, p_x)$  se realizan las integrales en frecuencia con el exponencial de tiempo complejo, es decir, se realiza el computo de

$$\tilde{b}_j(\tau_R, \tau_I) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega\tau_R + |\omega|\tau_I} B_j(\omega, p_x) \quad (2.20)$$

y se almacena en una matriz de tiempos real e imaginario, la cual se utilizará para computar la contribución de cada haz a la imagen final.

#### 2.2.4. Contribución de cada haz a la imagen

Las contribuciones tanto en amplitud como en tiempo de propagación de los haces gaussianos, requieren del computo para cada punto en consideración de las cantidades dinámicas del rayo central en el punto más cercano sobre el rayo y de la distancia entre este punto y el rayo. Ecuación (1.27). La solución a este problema es presentada por Hale [18] y computada por la función **nearestRayStep**. Por otra parte, los computos de amplitudes y tiempos complejos se calculan en las esquinas de la grilla ancha de la estructura definida como **Cells** y luego se interpolan bilinealmente en la grilla imagen. Tal interpolación se limita sólo a aquellas celdas que tengan amplitud significativa en sus cuatro esquinas, es decir, a aquellos puntos en los cuales el haz contribuye en más del 1 % de su amplitud pico.

Para lograr contornear la vecindad en la que el haz contribuye a la imagen, se utiliza un algoritmo recursivo denominado **setcell**, el cual toma inicialmente la esquina de la celda más cercana al punto inicial del haz y computa la amplitud y el tiempo en la esquina de aquella celda (extremo izquierdo superior) y llama recursivamente a las celdas vecinas, es decir, a las que se encuentran a la derecha, izquierda y debajo de la primera. Si las amplitudes en aquellas celdas vecinas es significativa (esto lo hace mediante el llamado de la función **cellTimeAmp**) computa los tiempos y amplitudes de las vecinas de aquellas y repite este procedimiento hasta que todas los tiempos y amplitudes de las esquinas de las celdas que contribuyen de manera significativa sean computados.

La función **cellTimeAmp** se encarga de calcular para cada celda asociada a un haz particular tanto los tiempos real e imaginario como las amplitudes real e imaginaria, y almacenarlas en dicha celda bajo el seudónimo *live*; que significa que ya ha sido contada; de esta manera se evita la sobreescritura de tales celdas al ser llamadas por recursión. **cellTimeAmp** es una función que retorna dos binarios los cuales permiten la discriminación de las contribuciones despreciables y de aquellas que se salen del dominio temporal, mediante el comando `return(wmin *  $\tau_I > -5$  &&  $\tau_R \leq tmax$ )?1 : 0`, en donde  $\tau_R$  y  $\tau_I$  corresponden a los tiempos real e imaginario respectivamente; de manera que para la respuesta 1 tal cantidad es considerada y para la respuesta 0 no lo es. Ahora bien todas las celdas tipo *live* son tomadas por la función **accCell** la cual marca a cada celda tipo *live* con el seudónimo *dead* recursivamente, de manera que, si en una celda sus cuatro esquinas están marcadas como *dead*, entra a trabajar al interior de esta celda por medio de la función **cellBeam**, la cual interpola bilinealmente los tiempos y amplitudes de las cuatro esquinas a la malla imagen, llamando a los datos apilados inclinados generados por **beamdata** que correspondan a aquellos tiempos  $\tau_I$  y  $\tau_R$  obtenidos. Calculando de esta manera la expresión

$$I_j(x, z) = \int dp_x [A_R \tilde{b}_{Rj}(\tau_R, \tau_I) - A_I \tilde{b}_{Ij}(\tau_R, \tau_I)]. \quad (2.21)$$

La imagen resultante se obtiene con la suma de todas las contribuciones provenientes de todos los puntos iniciales de los haces. Esto es, la expresión final computada por el programa se puede escribir como:

$$I(x, z) = \sum_j \int dp_x [A_R \tilde{b}_{Rj}(\tau_R, \tau_I) - A_I \tilde{b}_{Ij}(\tau_R, \tau_I)]. \quad (2.22)$$

El pseudocódigo presentado por Hale [18] resume estas ideas en la forma

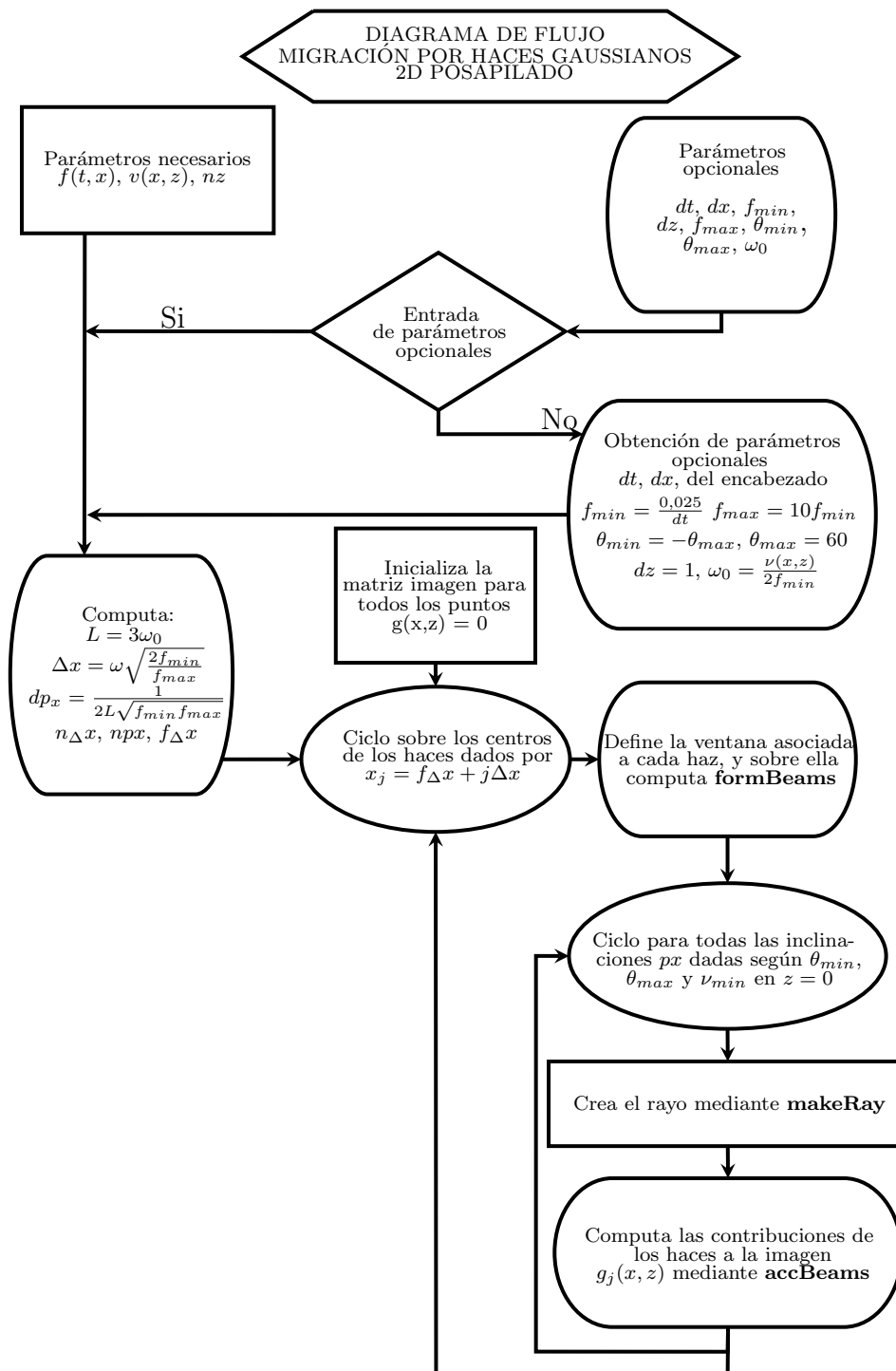
```

para todos los puntos  $(x,z)$ {
   $I(x,z)=0$ ;
}
para todos los  $x_j = j\Delta x$ (todos los centros de los haces){
.   computa  $B_j(\omega, p_x)$  por el corrimiento y modulamiento de  $F(\omega, x)$ 
.   computa el apilado inclinado y filtrado  $b_j(\tau, p_x)$  de  $B_j(\omega, p_x)$ 
.   para todas las  $p_x$ (todas las inclinaciones de reflexión) {
.     para todos los puntos  $(x,z)$  dentro del haz {
.       computa los valores complejos  $\tau_j(p_x, x, z)$  y  $A_j(p_x, x, z)$ 
.       acumula la contribución a  $I(x, z)$  de  $b_j(\tau, p_x)$ 
.     }
.   }
. }

```

A continuación se presenta el diagrama de flujo que representa la función principal del programa sumigbzo de migración por haces gaussianos 2D posapilado.

## 2.2.5. Función principal del programa sumigbzo



En el diagrama anterior los datos sísmicos están representados por  $f(x, t)$ , el número de muestras en el eje horizontal y el eje vertical son respectivamente  $nx$  y  $nz$ , y el modelo de velocidades es representado por  $v(x, z)$ .

Algunos parámetros más específicos representan las siguientes cantidades:

$dt$  la rata de muestreo en tiempo de los datos,  $dx$  la separación espacial entre receptores,  $f_{min}$  y  $f_{max}$  la frecuencia mínima y máxima de los datos sísmicos,  $\theta_{min}$  y  $\theta_{max}$  al ángulo de incidencia mínimo y máximo respectivamente y  $\omega_0$  al ancho del haz gaussiano cuando la frecuencia es igual a la frecuencia de referencia  $\omega_r$ .

El ancho  $\Delta x$  corresponde al espaciamiento entre posiciones iniciales de los haces,  $L$  es el ancho medio de la ventana de datos asociada a cada haz y  $dp_x$  es el intervalo entre muestras en la componente x del parámetro del rayo.

$n_{\Delta x}$ ,  $np_x$  y  $f_{\Delta x}$  corresponden al número de muestras en el eje x, número de muestras de la componente x del parámetro del rayo y a la primera posición inicial de los haces gaussianos respectivamente.

Los diagramas de las funciones más importantes que el programa principal requiere para la ejecución del proceso de migración se muestran en el apéndice de este trabajo<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>apéndice A.5 p.75

## CAPÍTULO 3

---

---

# MIGRACIÓN PREAPILADO

---

---

### 3.1 Migración preapilado

La migración preapilado en el dominio del disparo común, busca reconstruir una imagen de la subsuperficie mediante dos procesos, uno de modelamiento del campo de ondas de la fuente y otro de la retropropagación de los datos registrados en los receptores. Este proceso es repetido para cada disparo obteniéndose una imagen final a través de la superposición de las imágenes parciales de cada disparo, ver Figura 3.1.

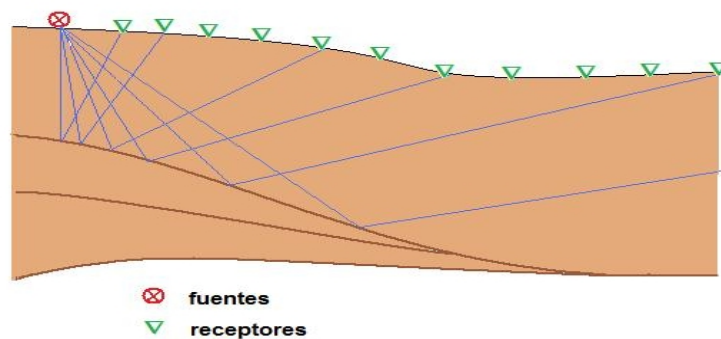


Figura 3.1: Representación de una adquisición sísmica en el dominio del disparo común, se visualizan los *rayos* que representan la propagación de ondas emitidas por una única fuente. El campo reflejado se registra en superficie

La migración por haces gaussianos en el dominio del disparo común se lleva a cabo mediante la expresión (1.68), obtenida en la sección 1.6,

$$I(x, z) = \int i\omega d\omega \int dx_s \int_{x_r=0} dx_r p_{z_r} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) \quad (3.1)$$

$$\times \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega) \frac{dp_{x_r}''}{p_{z_r}''} \int u_{GB}^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s, \omega) \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''},$$

en la cual puede identificarse una integral que corresponde al apilamiento de datos en el caso posapilado

$$I_r = \int_{x_r=0} dx_r p_z D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega) u_{GB}^*(\mathbf{x}_r'', \mathbf{x}_r, \omega), \quad (3.2)$$

es decir, el apilamiento de datos en el caso preapilado se lleva a cabo de manera idéntica al caso posapilado realizado en el capítulo anterior. Luego reemplazando el resultado obtenido en ese caso, se llega a la expresión

$$I(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{x}_s \int \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\omega_0}} dp_{x_r}'' A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) \int \omega d\omega \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \exp\{-i\omega T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j)\}$$

$$\times \int A^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s) \exp\{-i\omega T^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s)\} \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''} \quad (3.3)$$

$$\times \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp\left\{-\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} - i\omega p_{x_j}(x_r - x_j)\right\} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega),$$

en donde se han reescrito los haces gaussianos de manera que queden explícitos los tiempos y amplitudes complejas.

El costo computacional en este tipo de migración es notablemente superior en relación a la migración posapilado, pues cada disparo es migrado como un experimento numérico independiente, donde la función de Green de fuentes y receptores debe ser calculadas.

La expresión de la ecuación (3.3) se diferencia de la expresión de migración posapilado por la presencia de un término de fuente y la integral sobre las posiciones de las fuentes, además puede ser reescrita como sigue:

$$I(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{x}_s \int \frac{dp_{x_s}''}{p_{z_s}''} \int \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi\omega_0}} dp_{x_r}'' A^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) A^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s)$$

$$\times \int \omega d\omega \sqrt{\frac{\omega}{\omega_r}} \exp\{-i\omega[T^*(\mathbf{x}_j'', \mathbf{x}_j) + T^*(\mathbf{x}_s'', \mathbf{x}_s)]\} \quad (3.4)$$

$$\times \int_{x_j-L}^{x_j+L} dx_r \exp\left\{-\omega \frac{(x_r - x_j)^2}{2\omega_r \omega_0^2} - i\omega p_{x_j}(x_r - x_j)\right\} D(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, \omega).$$

La expresión resultante representa la migración en la aproximación del campo de ondas por haces gaussianos para datos de adquisición por disparo común y puede interpretarse de la siguiente manera:

La tercera línea de la integral de la ecuación (3.4) se interpreta como un apilamiento de las trazas de los distintos puntos de las vecindades de  $x_j$  modulados por un ponderador gaussiano y sumados para todas las inclinaciones dadas por  $p_{x_j}$ . La segunda línea provee la migración de los datos propagados por un haz de la fuente y los datos retropropagados de un haz de uno de los puntos  $x_j$ . Finalmente la primera línea modula las contribuciones mediante las amplitudes correspondientes a las funciones de Green de la fuente y los receptores y suma sobre las distintas inclinaciones de los haces tanto de las fuentes y los receptores como de los puntos iniciales de las haces de los receptores y las posiciones de las fuentes, lo cual provee de manera directa la migración de los datos.

En esta última expresión se puede ver la gran analogía con la expresión obtenida en el caso posapilado, salvo las diferencias identificadas en las líneas anteriores. Tal analogía permite hacer uso de la misma estructura funcional sobre la que se implementó el programa posapilado y realizar a través de ella una primera versión de migración preapilado.

## 3.2 Implementación

Con el propósito de facilitar la descripción de la implementación de la ecuación (3.4) esta expresión se escribe de manera compacta

$$I(x, z) = \sum_s \sum_j \int dp_{x_s} \int dp_{x_r} A_j(p_x, x, z) \tilde{b}_j[\tau = \tau_j(p_{x_r}, p_{x_s}, x, z), p_x], \quad (3.5)$$

donde la amplitud  $A(p_{x_r}, p_{x_s}, x, z)$  corresponde al producto de las amplitudes de los haces gaussianos provenientes tanto de los receptores como de la fuente y  $\tau(p_{x_r}, p_{x_s}, x, z)$  es la suma de las contribuciones al tiempo complejo de un par de haces fuente-receptor, así mismo los diferenciales  $dp_{x_s}$  y  $dp_{x_r}$  corresponde a los diferenciales asociados a la componente  $x$  de los parámetros del rayo de la fuente y el receptor respectivamente.

Claramente, la expresión de la ecuación (3.5), la cual construye la imagen de los reflectores, requiere del computo de muchas operaciones adicionales a las requeridas por

el algoritmo posapilado. Sin embargo, hay una gran semejanza entre las operaciones requeridas por ambas implementaciones, por tanto muchas de ellas pueden ser llevadas a cabo a partir de las subrutinas explicadas en el capítulo 2, algunas de ellas con ligeras modificaciones.

En la siguiente sección se explicarán sólo las subrutinas que han sido cambiadas con el propósito de incluir la fuente. La descripción de las subrutinas restantes puede encontrarse en el capítulo 2.

### 3.3 Inclusión de la fuente

Tal como se mostró al inicio de este capítulo el apilamiento inclinado de los datos a migrar para el caso preapilado es idéntico al realizado en el caso posapilado. Por tanto, las funciones **formBeams** y **beamData** en este caso actúan de la misma manera que en el caso preapilado, salvo que deben aplicarse un número de veces igual al número de disparos, a los datos correspondientes a cada disparo.

Como punto de partida se incluye dentro del esquema del programa **sumiggbzo**, las contribuciones de las fuentes de manera que para cada una de ellas se computa la contribución a la imagen migrada y la imagen total se obtiene como la suma de imágenes parciales de cada disparo.

En el esquema computacional se mantiene la estructura básica del programa principal **sumiggbzo** en el cual se incluyen las posiciones de los disparos, de tal manera que para cada disparo se realiza el apilado inclinado de los datos. Una vez se empieza a trazar cada rayo central desde uno de los puntos  $x_j$  asociados a los datos apilados, se procede a realizar el computo de los haces desde el punto de fuente asociado al disparo  $x_s$ , para el cual se computan los tiempos y amplitudes reales e imaginarios dentro de la región definida por cada haz proveniente de aquel punto. Para realizar ese proceso se creó una versión modificada de la función **accBeam**, la cual se denominó **accBeamS**.

La función **accBeamS**, con el propósito de definir el contorno asociado a cada haz, utiliza un algoritmo recursivo denominado **setCells**. Este algoritmo toma como primera celda bajo el seudónimo *source* (que significa que pertenece al haz), a la celda más cercana al punto de fuente y de manera recursiva va considerando a las celdas vecinas

al mismo tiempo que va computando los tiempos y amplitudes complejas en las esquinas superior izquierda de tales celdas mediante la función **cellTimeAmpS**. Las celdas tomadas de esa manera son bautizadas con el seudónimo *source* si sus contribuciones en amplitud son significativas, siguiendo el mismo criterio de la función **cellTimeAmp**.

Toda la información del haz de dicha fuente es almacenada en la estructura **SCcells**, la cual contiene la malla de celdas marcadas como *source*, con sus respectivos tiempos y amplitudes. Esta estructura pasa como entrada a la función **accBeamT** que al igual que la función **accBeam** se encarga de contornear para cada dirección inicial de los rayos centrales provenientes de los puntos  $x_j$ , la región del haz asociado mediante **setCell** y **cellTimeAmp**.

Finalmente, **accBeamT** llama a la función **accCellT** la cual marca con el seudónimo *dead* a las celdas que son *live* y no están en los bordes del modelo de velocidades, con el objetivo de hacer la acumulación de las contribuciones de los datos a la imagen, mediante la función **cellBeamT**. Esta función entra a actuar en cada celda sólo si las cuatro esquinas de las celdas asociadas al haz de la fuente y al haz proveniente del punto  $x_j$  de los receptores son tipo *source* y *dead* respectivamente, en cuyo caso realiza el mismo proceso de la función **cellBeam**, con la diferencia de que en este caso la función toma de las cuatro esquinas de la celda los productos de las amplitudes complejas de la fuente y los receptores, la suma de los tiempos complejos asociados a la fuente y a los receptores como los tiempos y amplitudes de las cuatro esquinas que tomaba en el caso posapilado. A partir de ellas llama a los datos apilados inclinados generados por **beamData** que correspondan a aquellos tiempos  $\tau_R$  y  $\tau_I$  obtenidos. Calculando de esta manera la expresión

$$I_{j,s}(x, z) = dp_{x_r} dp_{x_s} [A_R \tilde{b}_{Rj}(\tau_R, \tau_I) - A_I \tilde{b}_{Ij}(\tau_R, \tau_I)]. \quad (3.6)$$

Este resultado es sumado en todas las direcciones iniciales tanto de la fuente como de la posición  $x_j$  sumado para todas las posiciones  $x_j$  y para todas las posiciones de los disparos  $x_s$ , obteniendo así la imagen final dada por:

$$I(x, z) = \sum_s \sum_j \int dp_{x_s} \int dp_{x_r} [A_R \tilde{b}_{Rj}(\tau_R, \tau_I) - A_I \tilde{b}_{Ij}(\tau_R, \tau_I)]. \quad (3.7)$$

El seudocódigo de la implementación computacional, resume estas ideas en la forma

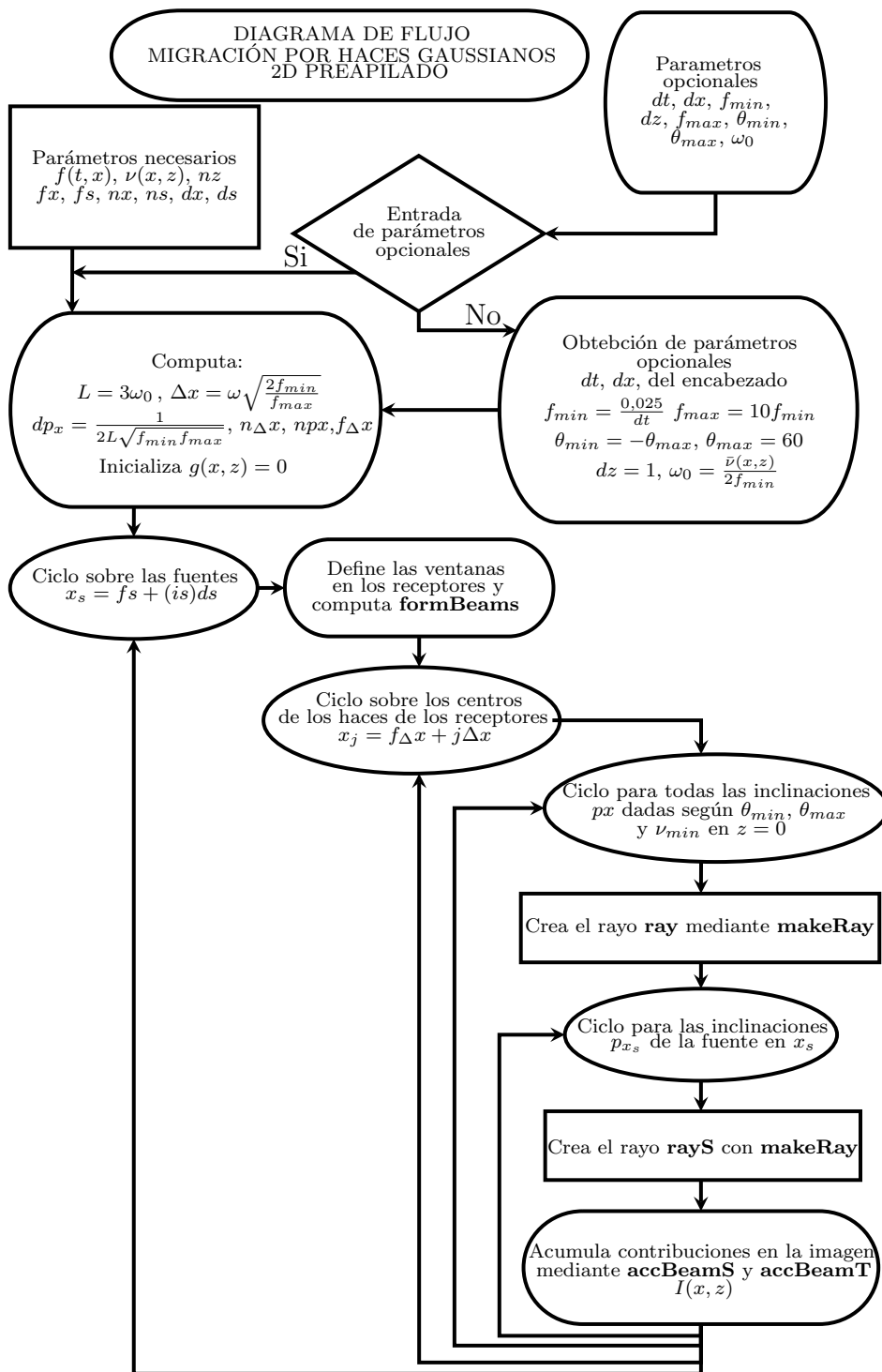
```

para todos los puntos  $(x,z)$ {
   $I(x,z)=0$  }
para todos los disparos  $x_s = fs + ids$  {
  para todos los  $x_j = f_{\Delta}x + j\Delta x$  (todos los centros de los haces){
  .   computa  $B_j(\omega, p_x)$  por el corrimiento y modulamiento de  $F(\omega, x)$ 
  .   computa el apilado inclinado y filtrado  $b_j(\tau, p_x)$  de  $B_j(\omega, p_x)$ 
  .     para todas las  $p_{x_r}$  (todas las inclinaciones de reflexión) {
  .     para todas las  $p_{x_s}$  (todas las inclinaciones de la fuente) {
  .       para todos los puntos  $(x,z)$  dentro del haz de la fuente y de los receptores {
  .         computa los valores complejos  $\tau_j(p_x, x, z)$  y  $A_j(p_x, x, z)$ 
  .         acumula la contribución a  $I(x, z)$  de  $b_j(\tau, p_x)$ 
  .       }
  .     }
  .   }
  . }
  . }
  . }
  . }

```

A continuación se presenta el diagrama de flujo que representa la función principal de la versión preapilada del programa de migración por haces gaussianos 2D, denominado **sumiggbpre**.

## 3.4 Función principal del programa sumigbpre



# CAPÍTULO 4

---

---

## Experimentos numéricos

---

---

En este capítulo se presentan los resultados de experimentos numéricos posapilado y preapilado con un dato sintético conocido como Marmousi. El dato Marmousi es un conjunto de datos sintéticos generados en el Instituto Francés del Petróleo (IFP), cuya geometría está basada en un perfil que atraviesa el norte de Quengula en la cuenca Cuanza [21] del suroeste de África. Los datos sísmicos de este modelo requieren de avanzadas técnicas de procesamiento para obtener una imagen correcta de la tierra debido a su complejidad.

El modelo de velocidades presenta fuertes variaciones laterales y verticales de velocidad, generando múltiples caminos por los cuales se propaga la energía, ver Figura 4.1. Este modelo es utilizado para probar la habilidad para manejar tiempos de propagación multievaluados de diferentes métodos de migración [15], representando una excelente plataforma para la experimentación mediante migración por haces gaussianos, con el fin de evaluar sus propiedades, ventajas y desventajas respecto a otras metodologías, especialmente relacionar los resultados con la migración por trazado de rayos convencional conocida como migración tipo Kirchhoff.

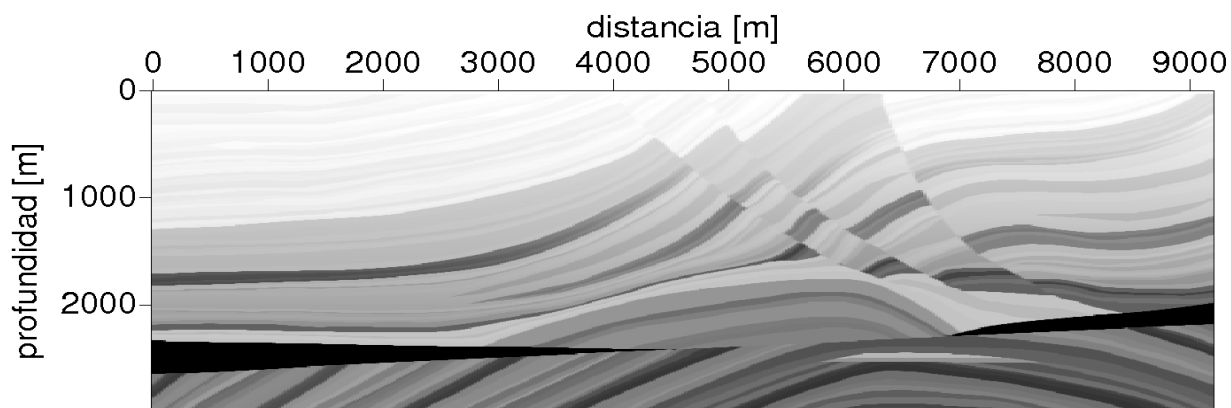


Figura 4.1: Representación del modelo de velocidades del marmousi

## 4.1 Migración posapilado

En la Figura 4.2, se representan los datos sísmicos correspondiente a la sección de offset mínimo extraída del dato sísmico. El dato fue generado mediante un modelamiento preciso por ecuación de onda completa utilizando técnicas de diferencias finitas. Se considera esta sección como una sección cero offset .

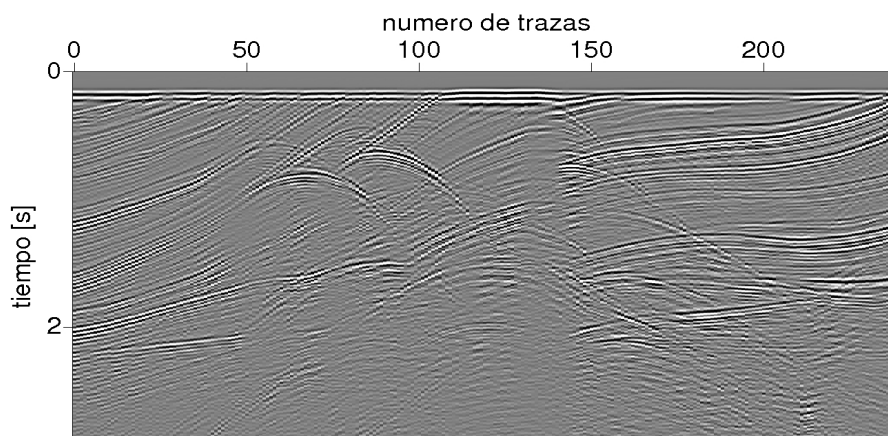


Figura 4.2: Sección sintética de offset mínimo (200m), extraída del dato sísmico.

El modelo de velocidades de la figura 4.1 y los datos sísmicos representan los parámetros de entrada necesarios para realizar migración por haces gaussianos posapilado mediante el código **sumiggbzo**. Ahora bien, dada la complejidad del modelo, caracterizada por las variaciones bruscas de velocidad en ambos ejes, es posible que la trayectoria de los rayos centrales asociadas a los haces gaussianos presenten un comportamiento inadecuado, así como las contribuciones de los haces mismos a la imagen resultante. Por ello y como primer criterio de evaluación se puede migrar la contribución de un haz a la imagen.

Para ello se escoge como punto de partida del rayo asociado a aquel haz, al punto medio de las posiciones iniciales de los haces que parten de la superficie de adquisición. Este punto corresponde a la posición  $X_j = 3025[m]$ . A partir de allí se generan dos haces y son graficados independientemente en la figura 4.3.

El comportamiento de los haces mostrados en la figura 4.3 es muy irregular. Al interior de estos haces se observan regiones en las cuales se pierde por completo su continuidad. El ancho del haz cambia abruptamente a lo largo del rayo como se observa en la sección inferior, y aparecen contribuciones dispersas y alejadas de la vecindad de la trayectoria que sigue el rayo central, como se observa en la figura superior. Esto significa que el modelo de velocidades no es lo suficientemente suave para permitir un trazado de rayos centrales óptimo y un comportamiendo adecuado de la phase compleja al interior del *skin depth* asociado a los haces. Este problema puede ser resuelto si se suaviza el modelo de velocidades hasta lograr un comportamiento adecuado de los haces.

Para suavizar el modelo de velocidades se aplicó de manera sistemática un algoritmo de suavizado del SU denominado **smooth2** con diferentes grados de suavización en cada uno de los ejes, los cuales se hicieron variar desde  $r = 2$  hasta  $r = 20$ , migrando en cada caso los datos y comparándolos con el resultado de la migración por ecuación de onda, hasta lograr el méjor acuerdo posible con la imagen obtenida por aquel método. El mejor resultado se logró para  $r = 4$  en la vertical y  $r = 17$  en la horizontal. El parámetro  $r$  corresponde al grado de suavización aplicado el cual está caracterizado por el ancho del filtro gaussiano utilizado en el proceso de suavizado.

La imagen que sirvió de modelo se obtuvo mediante un proceso de migración llevado a cabo por el código **sumigpspi** del paquete SU que por correponder a uno de los métodos denominados de ecuación de onda completa, el resultado de esta migración puede considerarse como una referencia adecuada para validar el resultado de la mi-

gración por haces gaussiano. La imagen más acorde obtenida por migración de haces gaussianos con el modelo óptimo de velocidades y la respectiva imagen obtenida de la migración por ecuación de onda se muestran en la Figura 4.4.

Algunos de los reflectores de las secciones de la figura 4.4, se pueden identificar entre sí desde el punto de vista de su geometría, pero no todos ellos se identifican espacialmente es decir algunos de ellos se encuentran en posiciones inadecuadas. Especialmente los reflectores más profundos se ubican en posiciones más alejadas de las esperadas.

Para garantizar que el trazado de haces en este modelo de velocidades halla sido apropiado, se repite el computo del trazado de un haz tal como se hizo en la figura 4.3. Y con la intención de comparar los resultados obtenidos con los nuevos resultados se toman las mismas condiciones iniciales (posición y dirección). En este nuevo modelo de velocidades, los haces se definen mejor y se observa continuidad en el ancho del haz y en la región que este abarca contorneando el rayo.

Además se puede observar que el ancho de los haces aumenta con su propagación (con el aumento de la longitud de arco del rayo central asociado). Tal comportamiento debe suceder ya que las haces son soluciones aproximadas de la ecuación de onda (1.1), luego deben presentar el efecto de dispersión geométrica de estas, además el contenido de frecuencia de los datos registrados en superficie decrece con el incremento del tiempo de propagación y el incremento de la velocidad de propagación acelera el cambio en  $\mathbf{Q}(s)$  tal como se deduce de la ecuación (A.23) lo que contribuye igualmente en el incremento del ancho del haz gaussiano.

En la Figura 4.6 se representa la migración obtenida sumando las contribuciones de las trazas en la posición  $x_j = 3025m$  para todos los valores  $p_x$ .

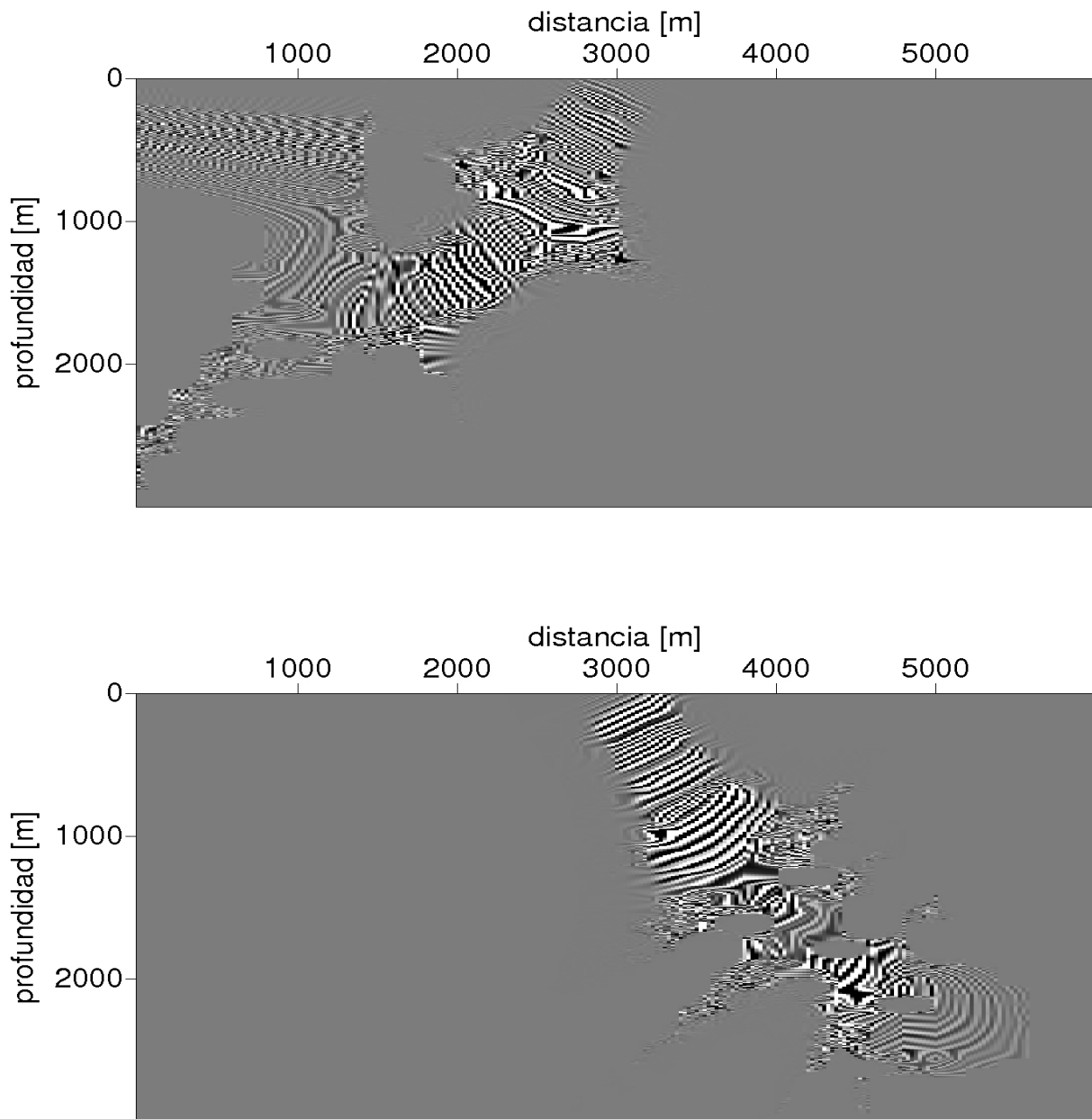


Figura 4.3: Migración de una componente de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición, a través de un haz que forma un ángulo inicial de  $26,48^\circ$  con respecto al eje vertical (figura superior) y un haz que forma un ángulo inicial de  $-26,48^\circ$  con la vertical, (figura inferior).

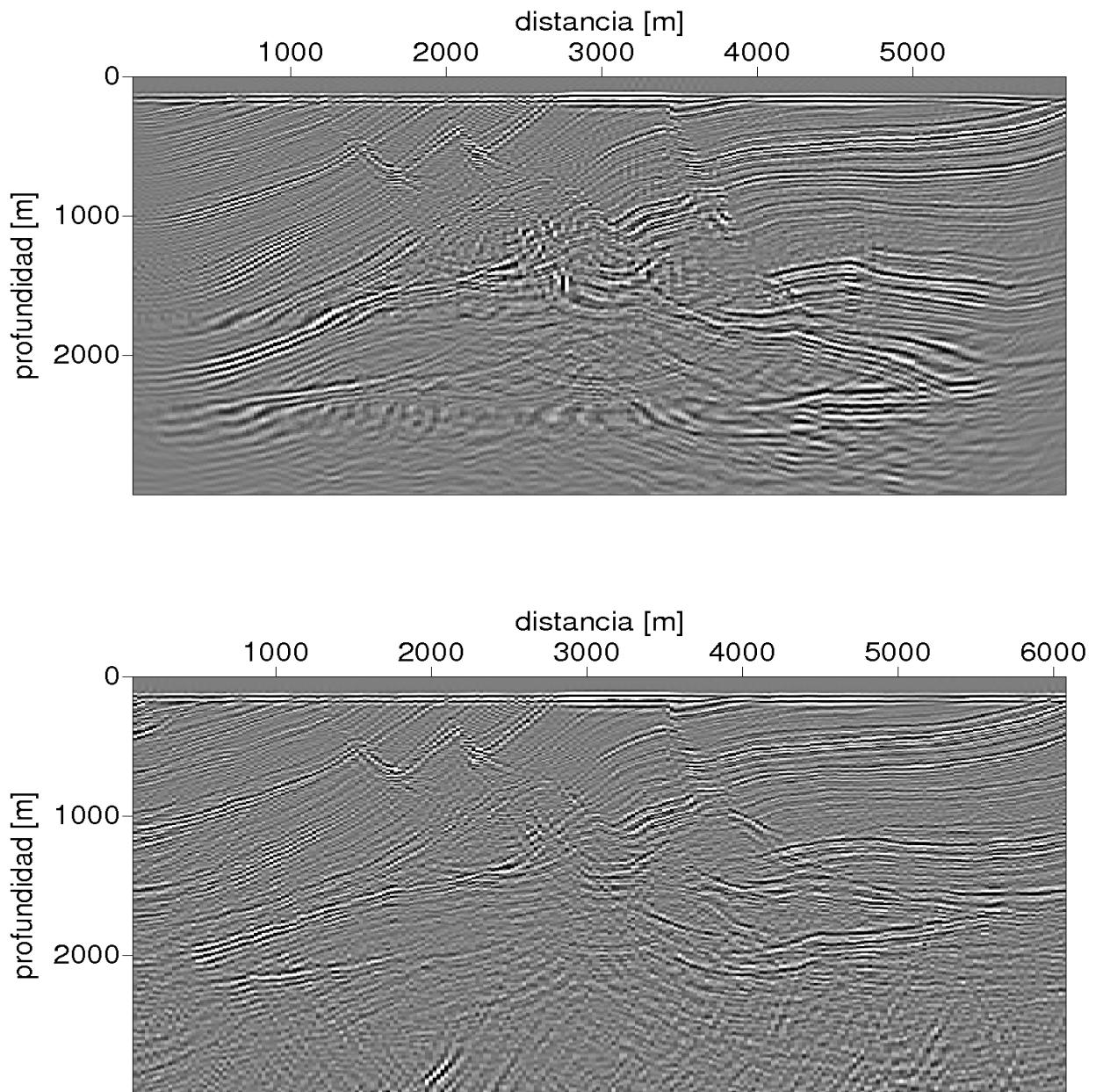


Figura 4.4: Comparación de las secciones migradas por el método de extrapolación en profundidad con ecuación de onda de sentido único ala derecha y haces gaussianos a la izquierda

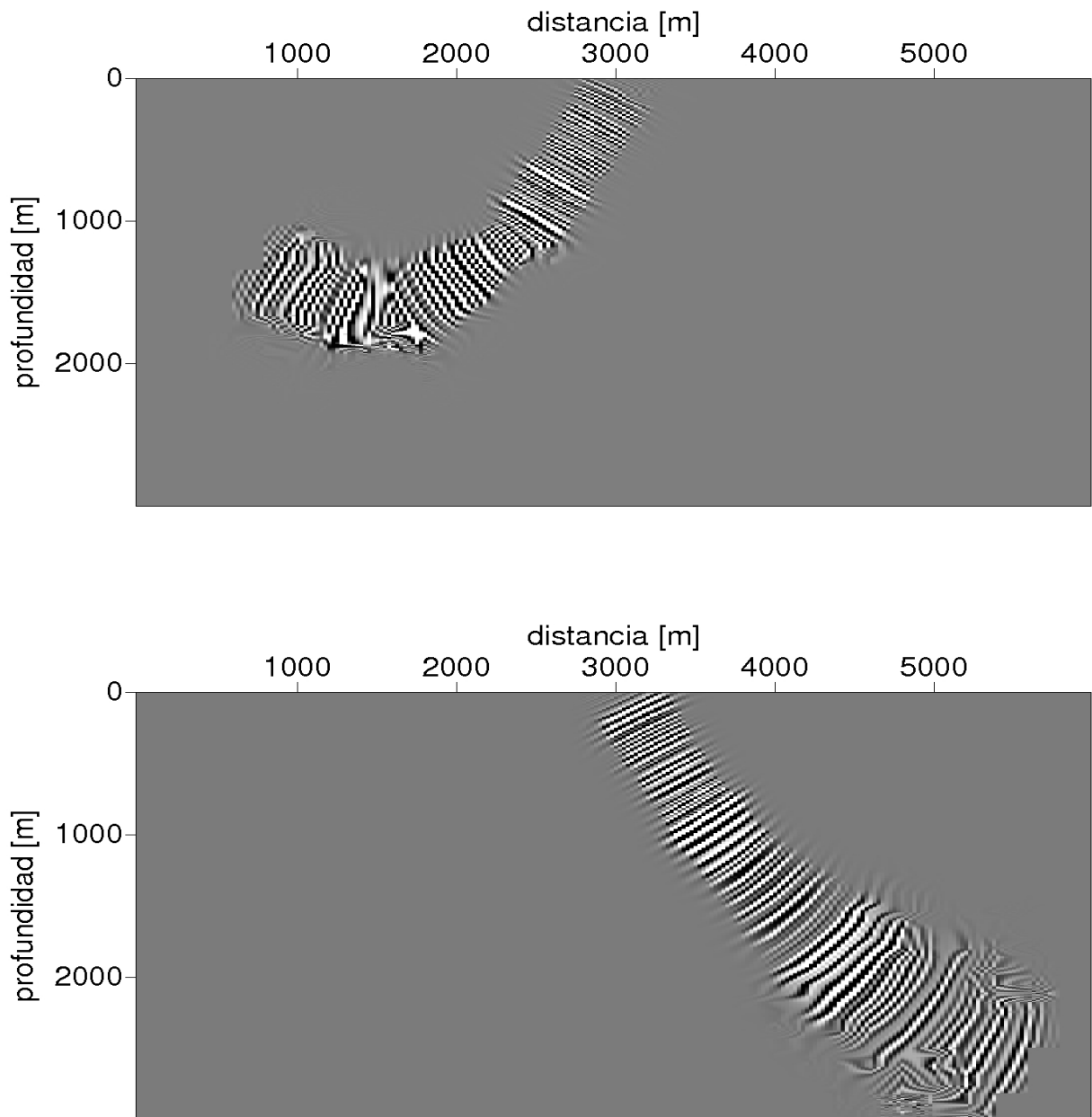


Figura 4.5: Migración de una componente de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición, a través de un haz que forma un ángulo inicial de  $26,48^{\circ}$  con respecto al eje vertical (figura superior) y un haz que forma un ángulo inicial de  $-26,48^{\circ}$  con la vertical, (figura inferior).

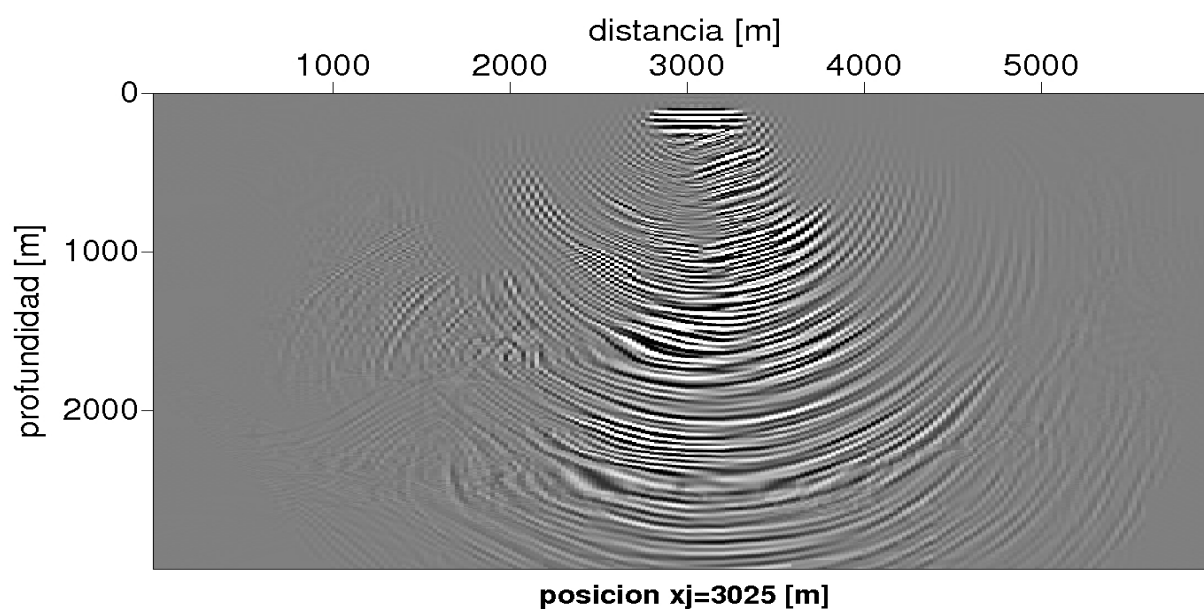


Figura 4.6: Migración de los datos provenientes del punto medio de la superficie de adquisición y llevados a profundidad a través de los haces que parten de este punto

Con el fin de determinar los parámetros óptimos de la migración por haces gaussianos, se lleva a cabo una variación sistemática de los parámetros opcionales presentes en el código con el fin de observar los efectos que ellos ejercen en el resultado de la migración.

Como primer criterio en la selección de los parámetros se considera el rango de frecuencias determinado por  $f_{min}$  y  $f_{max}$ , las cuales actúan dentro del programa de migración posapilado únicamente en la determinación del ancho  $\Delta p$  y  $\Delta x$ , cuyas relaciones con la frecuencia máxima y mínima fueron presentadas en el capítulo 2. Por tanto, la escogencia de estas cantidades no influye en las transformaciones de Fourier que internamente son ejecutadas, así como tampoco en la integral en frecuencia de la fórmula de migración.

Para determinar el rango de frecuencias de interés se lleva a cabo una transformación de Fourier sobre los datos sísmicos, cuyo resultado es presentado en la Figura 4.7.

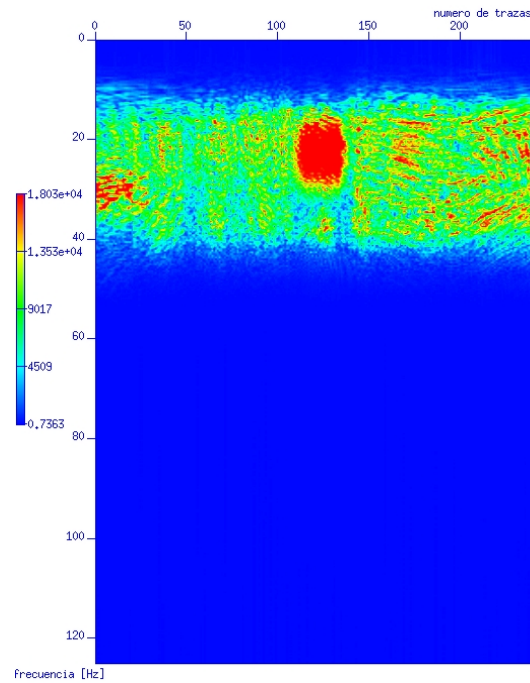


Figura 4.7: Representación de las amplitudes de la transformada de Fourier de los datos sísmicos llevada a cabo mediante un comando de transformación de fourier rápida `sufft` del paquete SU

En la figura 4.7 se observa que el contenido frecuencial más energético está distribuido casi en su totalidad, en el rango de frecuencias que va desde los 6 a los 50 [Hz]. Por lo tanto se toma  $f_{min} = 6[Hz]$  y  $f_{max} = 50[Hz]$  como el rango de frecuencias tentativo para los experimentos que se realicen con aquellos datos.

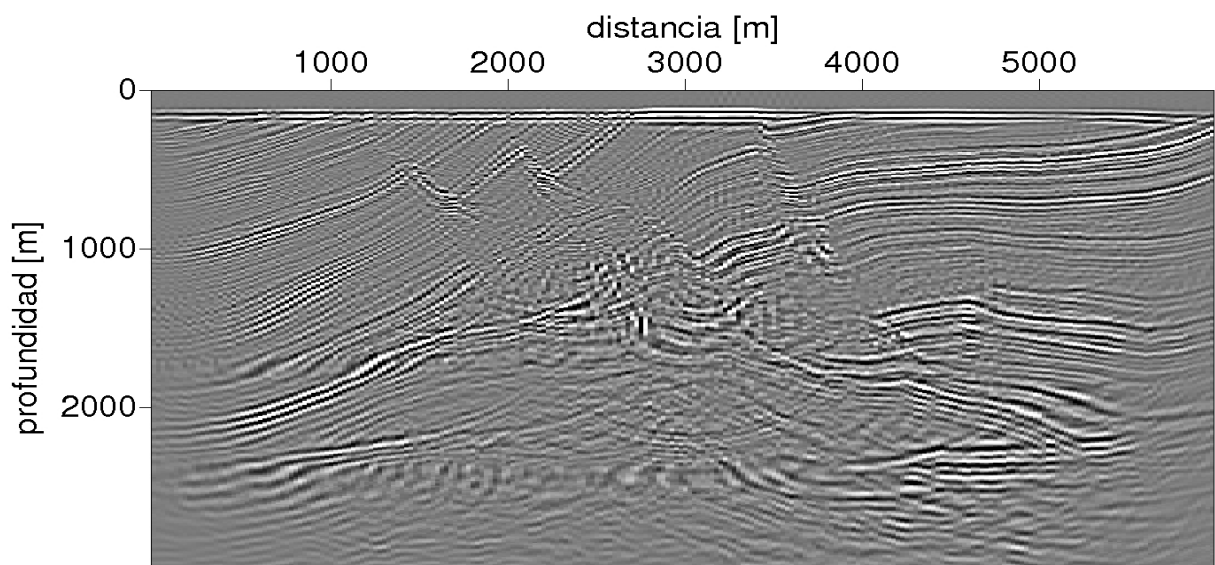
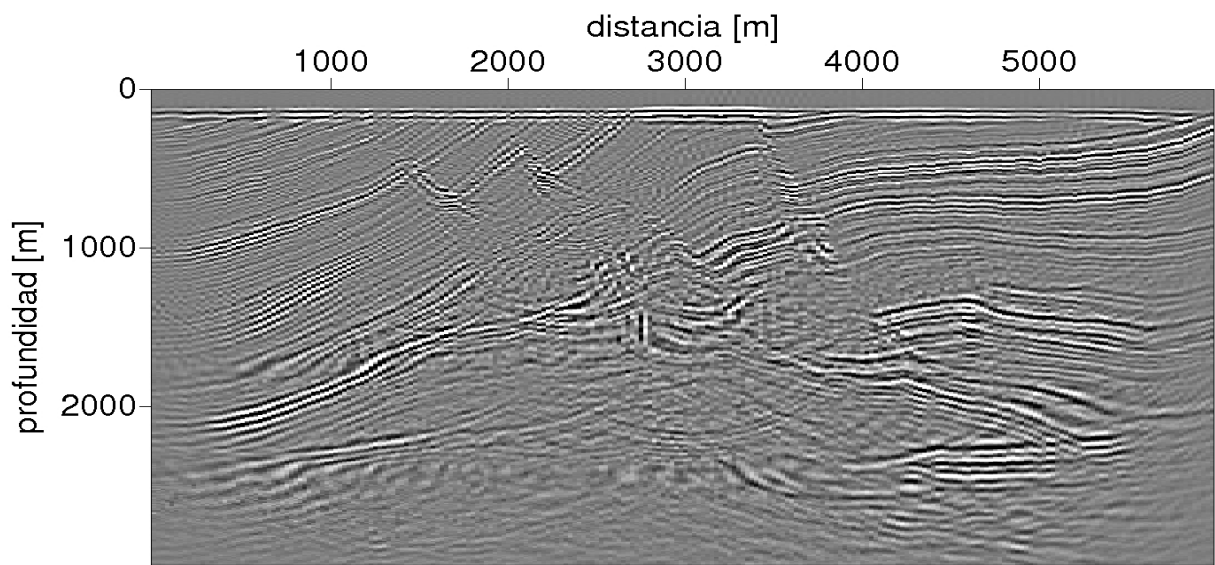
Con el propósito de validar tal elección se llevan a cabo una serie de experimentos en los cuales se varían ambas frecuencias límites, obteniéndose con ello pequeñas variaciones en la imagen resultante dentro de un rango considerable, de manera que solo se observa una degradación en la imagen para frecuencias máximas por debajo de los 10[Hz] y por encima de los 120[Hz] que se deben a efectos de aliasing ocasionados por sus relaciones en la determinación de  $\Delta p_x$  y  $\Delta x$  obteniéndose un resultado adecuado para el rango obtenido por el análisis espectral luego ese intervalo es considerado para las siguientes pruebas.

Otro parámetro importante es el ancho inicial del haz, por tanto para observar el efecto que la variación de este parámetro tiene en la imagen final se migran los datos para distintos anchos iniciales, obteniéndose con ello los resultados mostrados en la Figura 4.8.

Cabe resaltar que en un rango más fino de anchos iniciales de los haces gaussianos, se observa que el resultado de la migración cambia muy poco; de manera que los efectos que se observan en la figura 4.8 empiezan a presentarse para cambios considerables del ancho inicial del haz. Es decir en el rango de valores del ancho inicial del haz entre  $150[m]$  y  $400[m]$  no se alcanzan a observar efectos considerables en la imagen migrada y tanto en anchos superiores a estos como inferiores se empieza a observar una degradación en la imagen.

El efecto de tomar un valor de ancho inicial del haz muy pequeño, genera en los reflectores cercanos a la superficie una leve discontinuidad regular que se debe principalmente a los efectos de curvatura propios de cada haz individual y que debido a su ancho angosto en esas profundidades no alcanza a ser contrastado con el de los haces vecinos, tal efecto se observa en la figura cuyo ancho inicial es de  $100[m]$ . Por otra parte el efecto que tiene tomar anchos muy grandes al inicio, se visualiza en todas las estructuras, las cuales pierden resolución debida a la excesiva superposición de datos provenientes de puntos muy distantes en superficie tal efecto es observado en la figura cuyo ancho inicial es de  $1000[m]$ .

Las contribuciones de los haces a la imagen final se pueden estimar en el ejemplo de la sección migrada mostrada en la figura 4.8, correspondiente a un ancho inicial de los haces igual a  $\omega_0 = 232m$ , el cual es el resultado de la suma de 3720 haces, desde 60 posiciones diferentes en superficie y 62 direcciones distintas muestreadas regularmente en  $p_x$  entre  $\pm 60^\circ$ . El ancho inicial del haz fue de  $\omega_0 = 232m$  para una frecuencia de referencia de  $6,25[Hz]$  (frecuencia mínima) y una frecuencia máxima de  $62,5[Hz]$ . El tiempo de computo estimado en un Athlon X2 de 64 bits y memoria RAM de 1GB fue de 23 s. El conjunto de datos de entrada tiene 240 trazas con un intervalo entre fuentes de 25m. La longitud de las trazas fue de 2.9s y la rata de muestreo de 4ms.



**ancho inicial=100[m]**

**ancho inicial=232[m]**

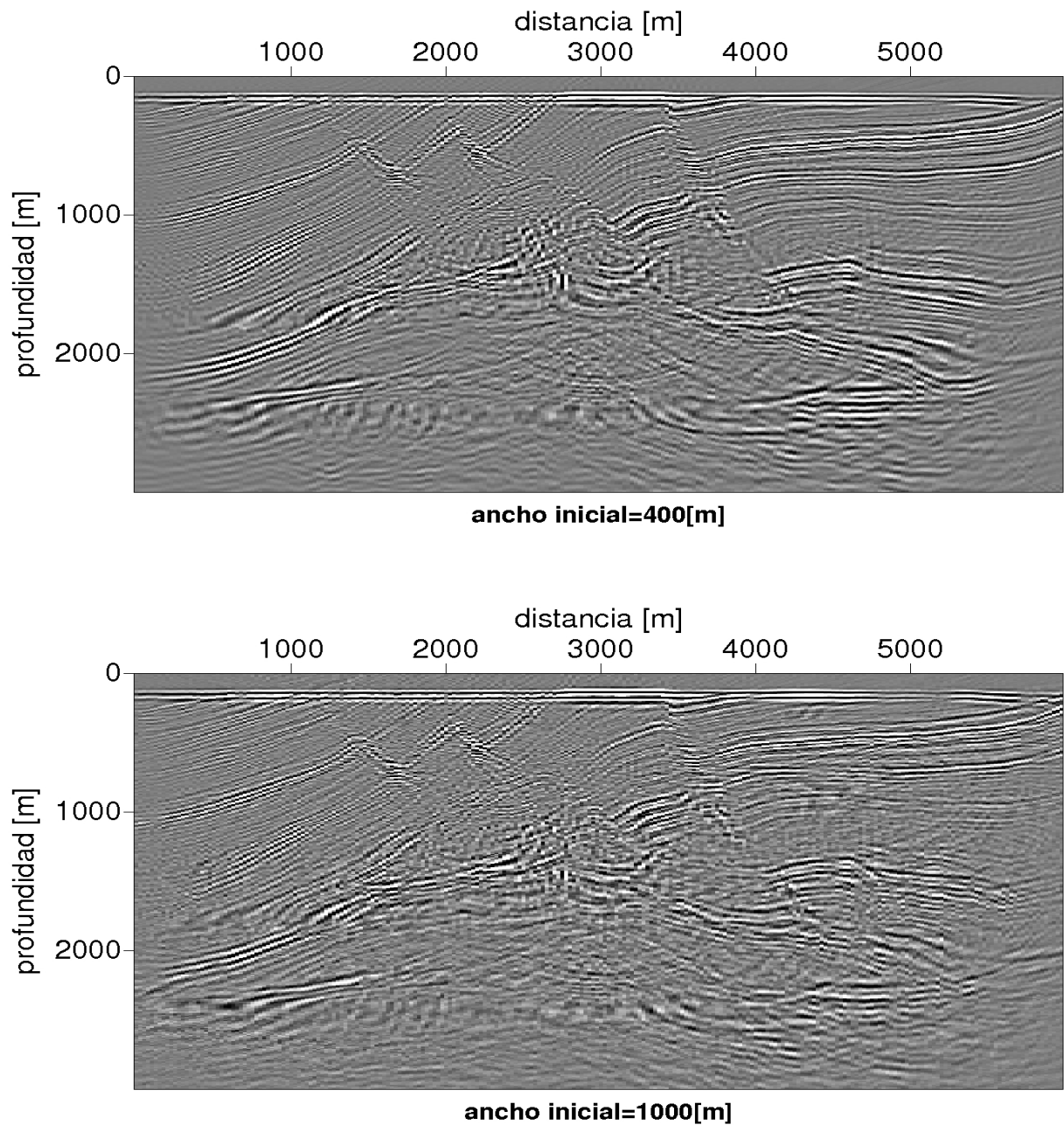
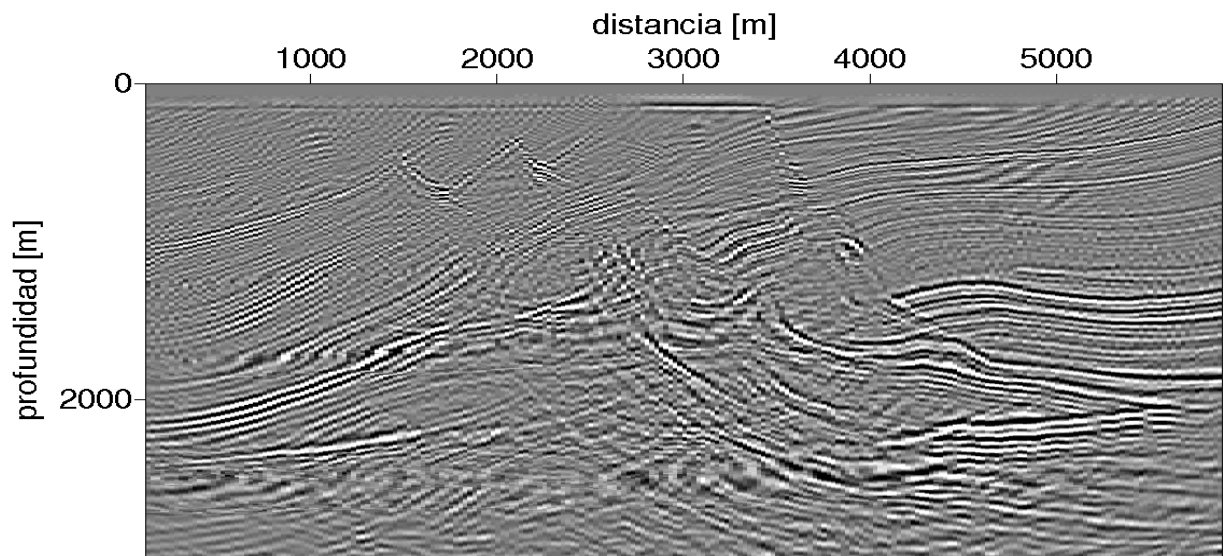
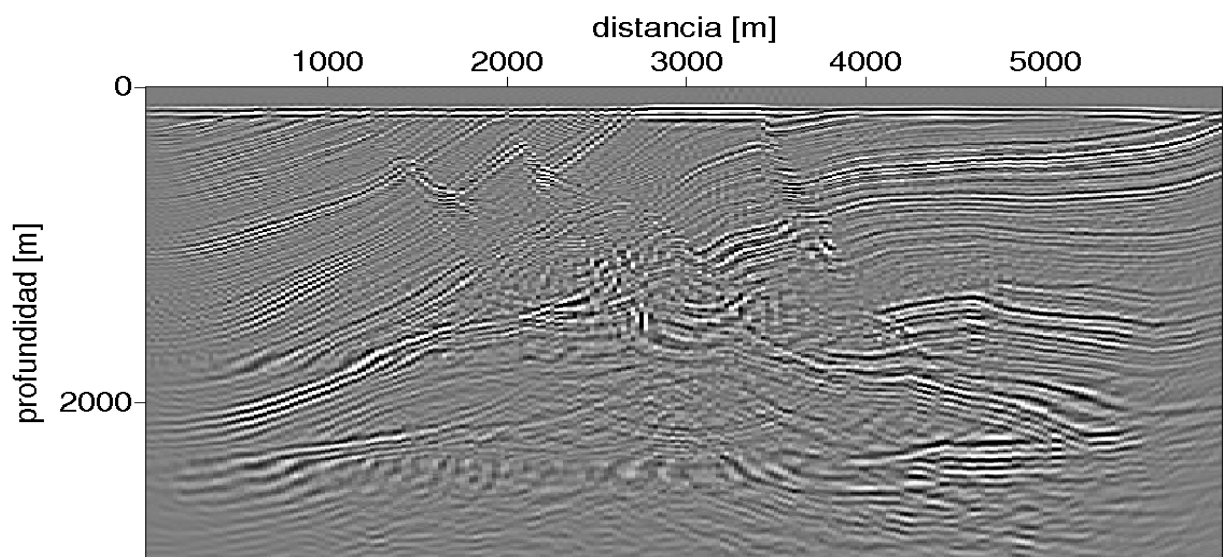


Figura 4.8: Representación de las secciones correspondientes a distintos valores del ancho inicial de los haces gaussianos.

Finalmente el resultado obtenido mediante migración por haces gaussianos es comparado con el resultado de migración Kirchhoff.



**Migracion Kirchhoff posapilado**



**Migracion por haces posapilado**

Figura 4.9: Representación de las imágenes obtenidas por migración por haces gaussianos y Kirchhoff posapilado.

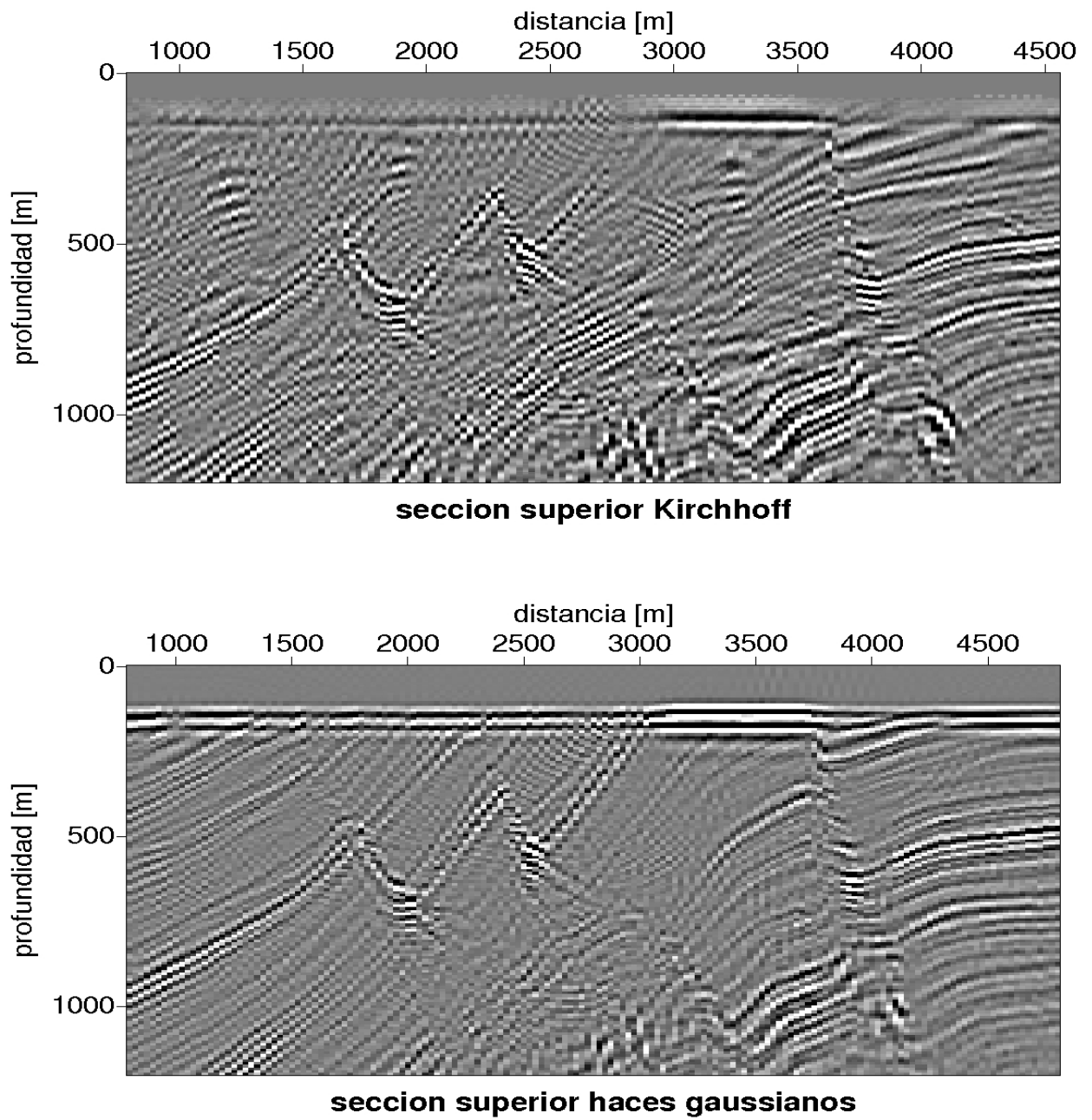


Figura 4.10: Detalle de parte superior de las imágenes migradas por Kirchhoff y haces gaussianos

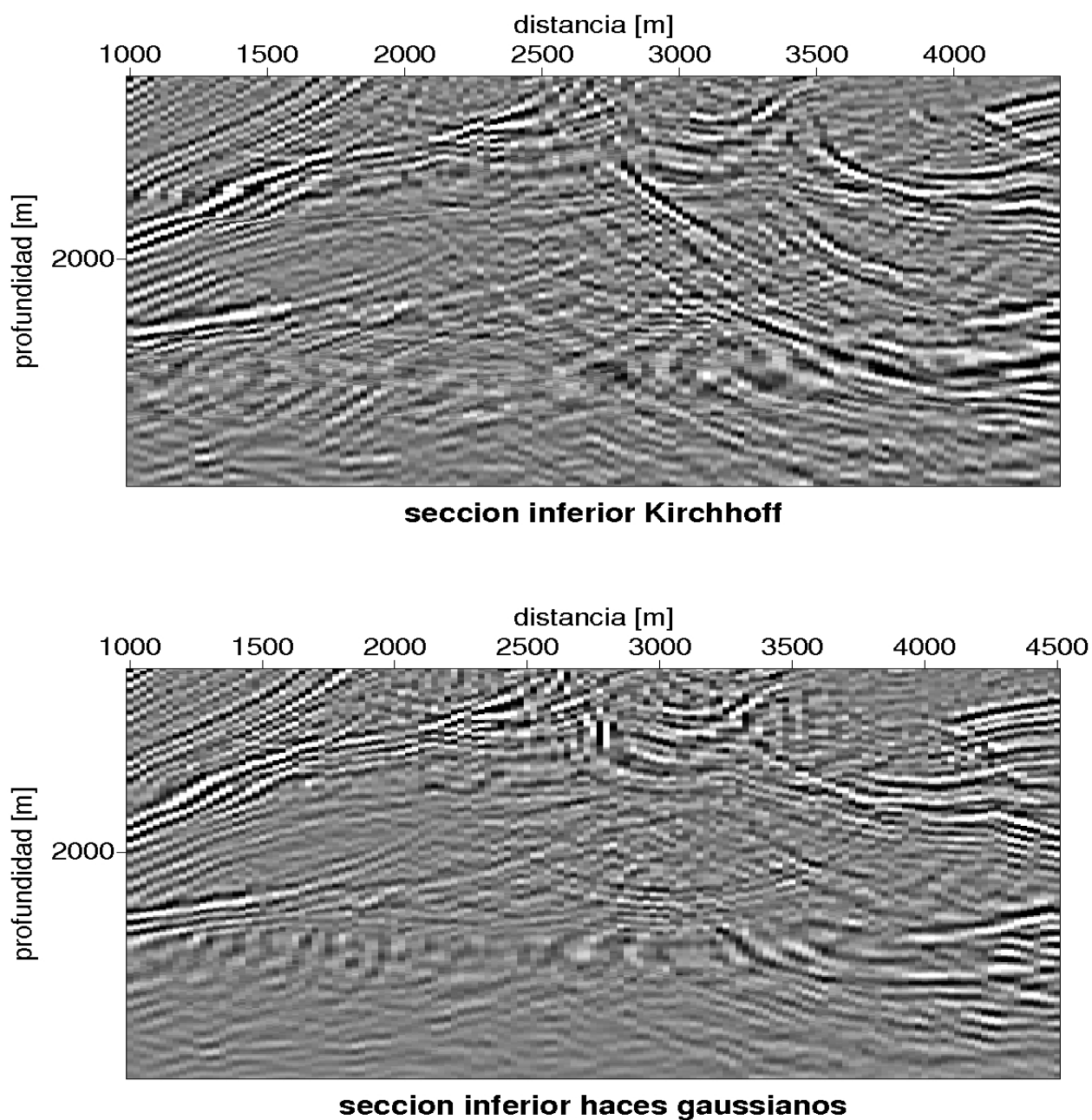


Figura 4.11: Detalle de parte inferior de las imágenes migradas por Kirchhoff y haces gaussianos

En la imagen de la Figura 4.11, se pueden observar algunos reflectores en la imagen obtenida por haces gaussianos que no están bien definidos en la migración Kirchhoff, principalmente las fallas y las primeras capas someras, además de una reducción signifi-

cativa del ruido presente en la imagen Kirchhoff. En la Figura 4.10, se pueden observar reflectores en la imagen Kirchhoff que no concuerdan con el modelo de velocidades, los cuales pueden ser producidos por el excesivo ruido y por la complejidad de esta región lo cual hace que la energía colapse en regiones inexistentes. El más notable se puede observar en la región central de la imagen inferior. Así mismo la imagen por haces gaussianos de la misma figura muestra una reducción significativa del ruido y por ende una mejor definición de los reflectores.

Las Figuras 4.11 y 4.10 muestran que el resultado de la migración por haces Gaussianos mejora en varios aspectos la imagen migrada con respecto al resultado de migración Kirchhoff; aún así se observa que esta última delinea mejor algunos reflectores, especialmente aquellos que se encuentran en las capas profundas de la región comprendida entre los 4000m y 5000m de distancia. Basándose en las mejoras observadas es por tanto justificada la implementación del caso preapilado de migración por haces gaussianos que se lleva a cabo en el capítulo 4.2.

## 4.2 Migración preapilado

Teniendo en cuenta que la migración preapilado se llevó a cabo utilizando todas las funciones de la migración posapilado, y que en la sección 4.1 se determinaron las condiciones propicias de su ejecución óptima; se considera válida la utilización de tales condiciones para la ejecución del algoritmo de migración preapilado.

En la Figura 4.12, se muestran las imágenes migradas del marmousi por los métodos de migración por haces gaussianos y Kirchhoff. La imagen Kirchhoff presenta un comportamiento irregular en la estructura de fallas del modelo y otras estructuras aparecen con trazos muy gruesos, lo cual aumenta la incertidumbre en la posición de los reflectores.

Las Figuras 4.13 y 4.14 permiten observar detalles de la imagen migrada. En la Figura 4.13 se observa que la continuidad de las tres fallas características del modelo, está mejor definida en la imagen obtenida por haces gaussianos que en la Kirchhoff. Además la tercera de estas fallas es completamente delineada por el método de haces gaussianos a pesar de su gran pendiente, esto muestra entre otras cosas la habilidad de la migración por haces gaussianos en tratar modelos con cambio bruscos de velocidad en la horizontal. Las tres fallas son identificadas igualmente por la migración Kirchhoff sólo que en este caso se presenta mayor irregularidad en la continuidad de las mismas, lo cual puede ser explicado, debido a la mala focalización de la energía en el contorno de las fallas lo que también produce pequeñas sombras en la cercanía de estructuras agudas.

En la Figura 4.14, en la región comprendida entre los 6000m y 9000m de distancia se puede observar con mayor claridad que la migración por haces gaussianos delinea mejor las estructuras, además se observan superficies con amplitudes muy grandes y definidas por trazos muy gruesos en la imagen Kirchhoff, las cuales son delineadas por trazos finos y amplitudes moderadas por la migración por haces gaussianos. Entre otras características puede distinguirse la presencia de ruido en la región central inferior de la imagen Kirchhoff el cual es despreciable en la imagen de haces gaussianos.

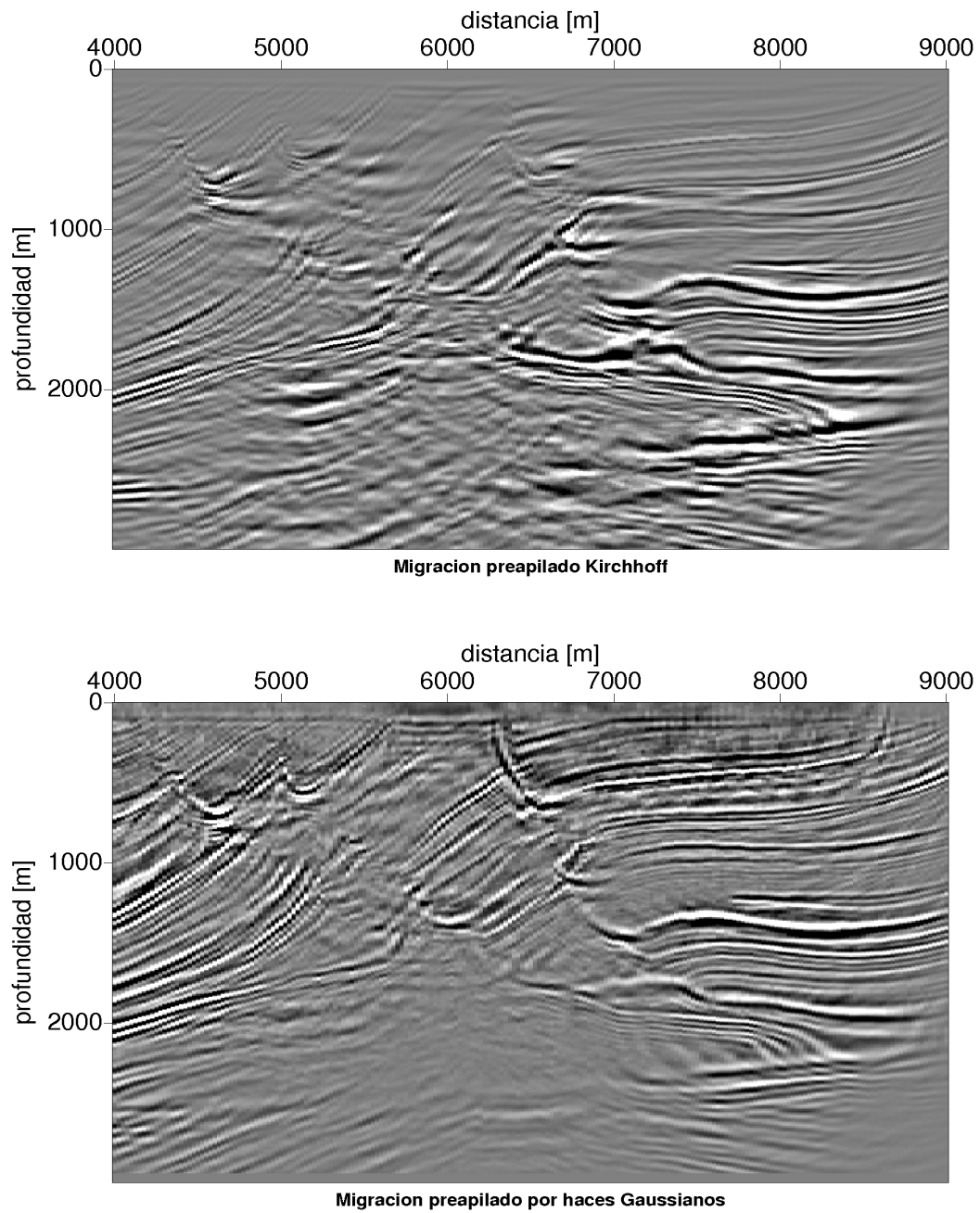


Figura 4.12: Representación de las secciones correspondientes a la migración preapilado por haces gaussianos(inferior) y Kirchhoff(superior).

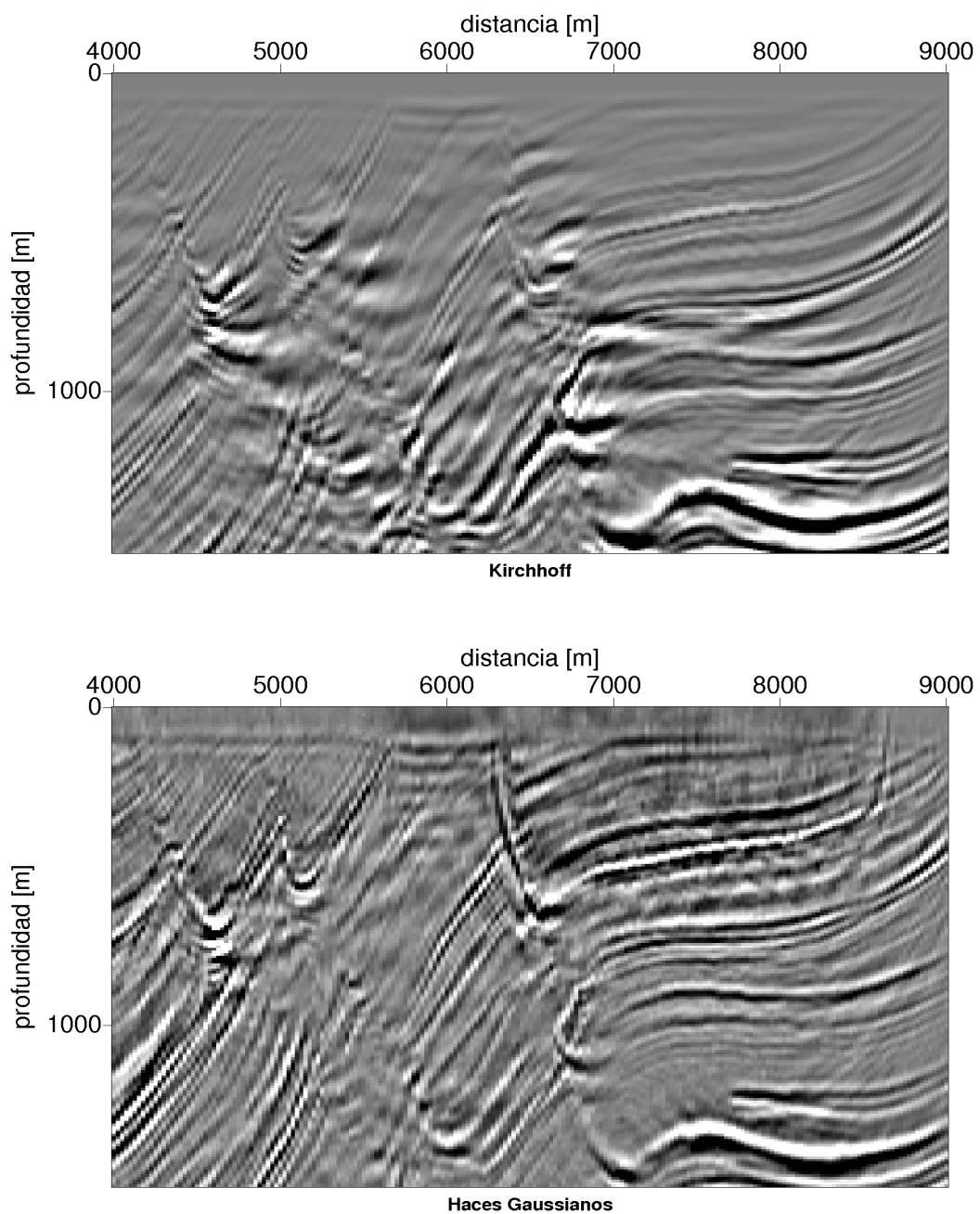


Figura 4.13: Representación de una parte de la sección correspondiente a la migración preapilado por haces gaussianos y Kirchhoff.

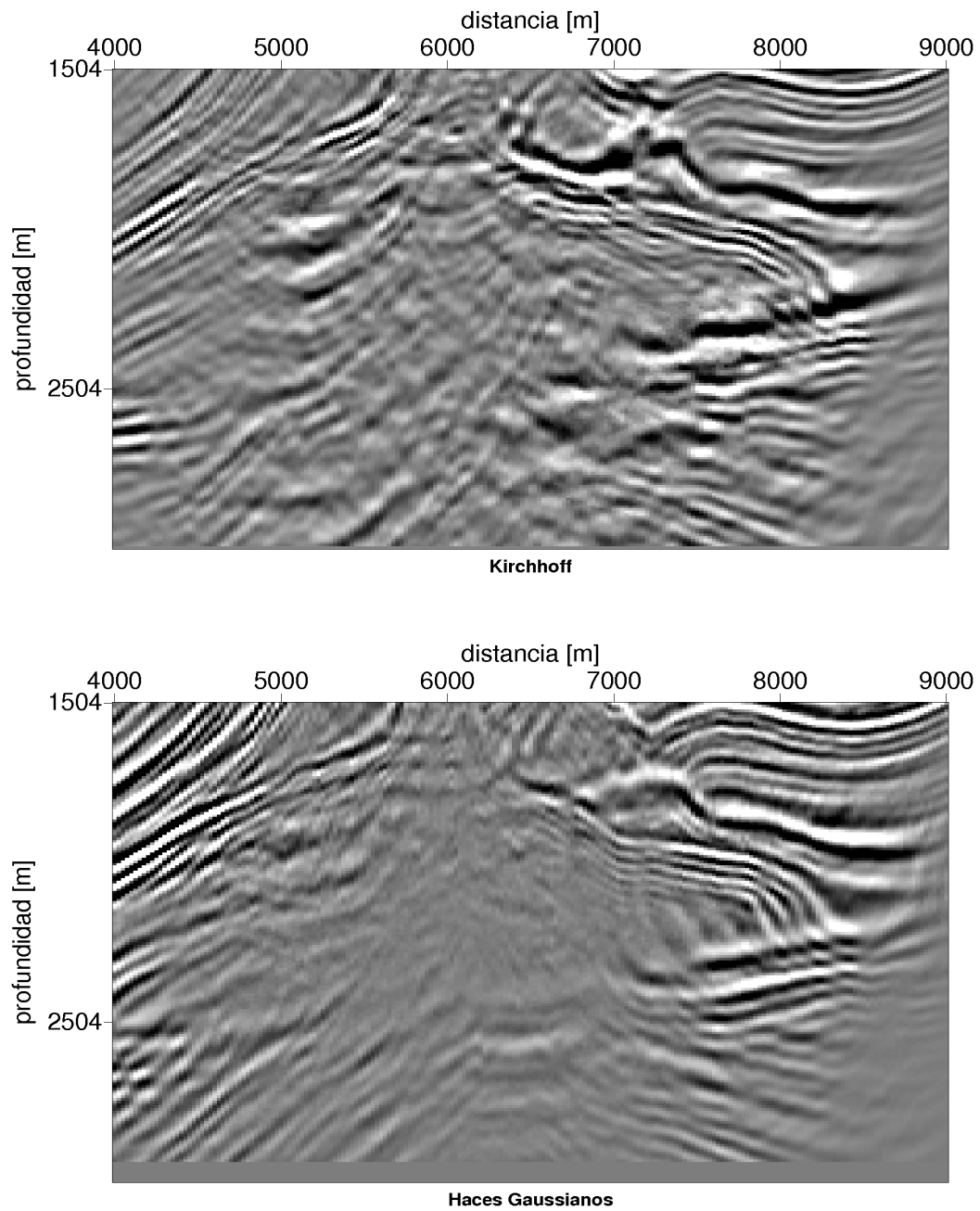


Figura 4.14: Representación de las secciones correspondientes a la migración preapilado por haces gaussianos y Kirchhoff.

La imagen por haces gaussianos presenta un leve ruido en su parte superior el cual pudo ser generado con la inclusión de la fuente, por tanto es necesario una corrección para atenuar tal efecto la cual puede ser llevada a cabo mediante la aplicación de un filtro adecuado en la fórmula de migración implementada ya que este efecto puede ser causado por contribuciones inadecuadas de bajas frecuencias.

La migración de los datos marmousi correspondientes a 240 disparos asociados cada uno de ellos con 96 trazas y un tiempo de adquisición de 2.9s, la cual se llevó a cabo a través del programa implementado requirió, en un procesador Athlon X2 de 64 bits de 1GB de RAM, un tiempo de aproximadamente 20 horas para ser concluida. Esto es un tiempo exagerado que se debe entre otras cosas a la ausencia en la implementación de un mecanismo que permitiera almacenar la información de la fuente para ser utilizada en la migración de cada haz proveniente de los receptores, por tanto queda como trabajo futuro la optimización de este código.

---

---

# CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

---

---

En el presente trabajo se realizó una revisión de la fundamentación teórica de la teoría de haces gaussianos, partiendo de la ecuación de onda acústica y su solución asintótica en el marco de la teoría de rayos clásica. Se mostró las ventajas de la teoría de haces gaussianos sobre la teoría de rayos clásica en la aproximación del campo de onda y en la migración de datos sísmicos para los caso preapilado y posapilado .

En el caso de migración posapilado se llevó a cabo un estudio minucioso del código **sumiggbzo.c**, perteneciente al paquete de procesamiento sísmico SEISMIC UNIX, el cual permitió corroborar la elección sugerida por la teoría, de los parámetros opcionales. Se llevaron a cabo experimentos numéricos con los datos marmousi, obteniéndose imágenes migradas a partir de la variación sistemática de los parámetros definidos en la migración

Se comprobó que la migración por haces gaussianos pospilado es superior a la migración Kirchhoff posapilado, mediante comparación directa de los resultados de la migración de los datos marmousi con offset mínimo obtenidos por ambas metodologías y bajo condiciones semejantes.

Finalmente se implementó una versión del programa de migración por haces gaussianos preapilado, y se observaron las mejoras en la calidad de la imagen sísmica , en relación a la migración Kirchhoff. En esta implementación se presentó una dificultad en relación al almacenamiento de la información de la fuente, lo cual obligó a construir por cada uno de los haces asociados a los receptores por migrar todos los haces de la fuente. Este proceso es innecesario y genera un incremento exorbitante en el tiempo de computo de la migración. Por ello se deja como recomendación y trabajo futuro la optimización del código presentado en este trabajo.

---



---

# APÉNDICES

---



---

## A.1 Ecuaciones del rayo

Las ecuaciones del rayo representan una solución asintótica de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia, ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} u = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad \text{con} \\ u = u(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A.1})$$

en donde  $\mathbf{x}_s$  corresponde a la posición de la fuente de ondas,  $\omega$  la frecuencia,  $v(\mathbf{x})$  la velocidad de propagación del campo de ondas y  $u(\mathbf{x}, \omega)$  el campo de ondas en el dominio de la frecuencia. Para lo cual se plantea una solución asintótica de la forma:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\mathbf{x})}{(i\omega)^n} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\tau$  es el tiempo de propagación de  $\mathbf{x}_s$  a  $\mathbf{x}$ ; la cual, al reemplazar en la ecuación de Helmholtz resulta

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} \right) u = \nabla \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} \{ \nabla(e^{i\omega\tau}) A_n + e^{i\omega\tau} \nabla A_n \} \right] + \\ \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(i\omega)^n} \quad (\text{A.3a})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} \nabla \cdot \{ e^{i\omega\tau} (i\omega) \nabla_{\tau} A_n + e^{i\omega\tau} \nabla A_n \} + \\ \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})} e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{(i\omega)^n} \quad (\text{A.3b})$$

se aplican los operadores diferenciales a los exponenciales y se reagrupan los términos anteriores como

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})}\right) u = e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} \left[ \{(i\omega)^2(\nabla\tau)A_n + (i\omega)\nabla A_n\} \cdot \nabla\tau + (i\omega)A_n\nabla^2\tau + (i\omega)(\nabla\tau) \cdot (\nabla A_n) + \nabla^2 A_n + \frac{\omega^2 A_n}{v_0(\mathbf{x})^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

se empieza a considerar los términos desde el orden más alto en frecuencia resultando

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_0^2(\mathbf{x})}\right) u = e^{i\omega\tau} \left[ \omega^2 \left\{ \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})} - (\nabla\tau)^2 \right\} A_0 + i\omega \left\{ 2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + A_0\nabla^2\tau + \left[ (\nabla\tau)^2 - \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})} \right] A_1 \right\} + \nabla^2 A_0 + A_1\nabla^2\tau + 2\nabla A_1\nabla\tau + \nabla\tau\nabla A_1 + \left( \nabla\tau - \frac{1}{v_0(\mathbf{x})^2} \right) A_2 + \dots \right] \quad (\text{A.5})$$

los siguientes términos corresponden a potencias inversas de  $(i\omega)$ , las cuales pueden despreciarse al aplicar la aproximación a altas frecuencias. Mas aún, se llega a considerar como único término dominante de la expansión (A.2) al término  $n=0$ . Por consiguiente, basta con analizar los primeros términos del desarrollo de la ecuación (A.4) de donde se deduce las siguientes ecuaciones:

$$(\nabla\tau(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{v_0^2(\mathbf{x})} \quad (\text{A.6})$$

$$2\nabla\tau \cdot \nabla A_0 + A_0\nabla^2\tau = 0 \quad (\text{A.7})$$

las cuales son válidas en los puntos donde  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_s$ .

Las ecuaciones (A.6) y (A.7) son conocidas como las ecuaciones iconal y de transporte respectivamente, las cuales se resuelven mediante distintos métodos de solución de ecuaciones diferenciales, de los cuales el más utilizado para la solución de la ecuación iconal, es el método de las características [4]. Mediante este método se obtienen soluciones a lo largo de trayectorias que son las características del sistema, también conocidas como los rayos de la teoría de rayos. Una manera de describir tales curvas es mediante algún parámetro; en este caso, el parámetro utilizado es la longitud de arco ( $s$ ), que representa la longitud de la trayectoria, desde el inicio del rayo y a lo largo del mismo hasta un punto cualquiera sobre el rayo. Tales ecuaciones son conocidas como ecuaciones del rayo y se expresan por

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = v_0(\mathbf{x})\mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla \left( \frac{1}{v_0(\mathbf{x})} \right), \quad \mathbf{p} = \nabla\tau; \quad (\text{A.8})$$

donde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s)$  siendo  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los ángulos iniciales del rayo asociados a un sistema de referencia particular y  $\mathbf{p}$  un vector tangente al rayo, conocido como vector *slowness* cuya magnitud está dada por  $|\mathbf{p}| = v_0^{-1}(\mathbf{x})$ .

Por consiguiente de la definición de  $\mathbf{p}$  y mediante las ecuaciones (A.8) se obtiene

$$\frac{d\tau}{ds} = \left( \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) \cdot \nabla\tau = v_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{v_0} \quad (\text{A.9})$$

en la cual se ha aplicado la regla de la cadena de las derivadas. Resolviendo en  $\tau$  resulta:

$$d\tau = \int \frac{ds}{v_0} \quad \rightarrow \quad \tau(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s)) - \tau(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s_0)) = \int_{s_0}^s \frac{ds'}{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s'))} \quad (\text{A.10})$$

lo cual corresponde al tiempo de propagación desde un punto inicial de fuente, a lo largo del rayo que parte en  $s = s_0$  formando ángulos dados por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es decir se obtiene la solución de la ecuación iconal.

## A.2 Solución de la ecuación de Transporte

A lo largo de las trayectorias que definen las ecuaciones (A.8), es posible obtener una solución de la ecuación de transporte (A.7); la cual dará la amplitud  $A_0$  en cada punto a lo largo del rayo. Para ello, se reemplaza la primera ecuación (A.8) en la ecuación de transporte, lo cual origina:

$$\frac{2}{v_0(\mathbf{x})} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \nabla A + A \nabla^2 \tau = 0 \quad (\text{A.11})$$

en donde se ha escrito  $A$  en lugar de  $A_0$  para facilitar la notación.

El producto punto presente en el primer término de la relación (A.9) mediante la aplicación de la regla de la cadena, se vuelve una derivada sencilla, resultando

$$\frac{2}{v_0(\mathbf{x})} \frac{dA}{ds} + A \nabla^2 \tau = 0 \quad (\text{A.12})$$

y si se multiplica la expresión anterior por  $v(\mathbf{x})$  y por  $A$  se obtiene la relación dada por

$$\frac{dA^2}{ds} + A^2 v_0(\mathbf{x}) \nabla^2 \tau = 0 \quad (\text{A.13})$$

la cual tiene como solución

$$A^2(\gamma_1, \gamma_2, s) = A^2(\gamma_1, \gamma_2, s_0) \exp \left\{ \int_{s_0}^s v_0 \nabla^2 \tau(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s')) ds' \right\} \quad (\text{A.14})$$

Esta ecuación diferencial puede ser escrita en coordenadas centradas al rayo [9], teniendo en cuenta que

$$\nabla^2 \tau = \nabla_q^2 \tau = \frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_2^2} \quad q_1 = q_2 = 0; \quad (\text{A.15})$$

donde el subíndice  $q$  indica que el laplaciano es tomado con respecto a las coordenadas centradas al rayo. Esta expresión indica que el laplaciano en coordenadas centradas al rayo es igual al laplaciano en coordenadas cartesianas .

Además de las ecuaciones del rayo (A.8) se obtiene que

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial s^2} = \left( \frac{1}{v_0} \right)_{,s} \quad (\text{A.16})$$

en donde la matriz  $\mathbf{M}$  se define como

$$\mathbf{M} = [M_{ij}] \quad M_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{q_1=q_2=0} \quad i, j = 1, 2, \quad (\text{A.17})$$

incluyendo tal definición en la ecuación (A.15) resulta

$$\nabla^2 \tau = \left( \frac{1}{v_0} \right)_{,s} + M_{11} + M_{22} = -\frac{v_{0,s}}{v_0^2} + \text{traza}(\mathbf{M}) \quad (\text{A.18})$$

luego, reemplazando en la ecuación (A.12), se obtiene

$$A^2(\gamma_1, \gamma_2, s) = A^2(\gamma_1, \gamma_2, s_0) \frac{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s))}{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s_0))} \exp \left\{ - \int_{s_0}^s v_0 \cdot \text{traza}(\mathbf{M}) ds' \right\} \quad (\text{A.19})$$

La matriz  $\mathbf{M}$  satisface la ecuación diferencial no-lineal

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + v_0 \mathbf{M}^2 + v_0^{-2} \mathbf{V} = 0, \quad \text{con} \quad \mathbf{V} = \left[ \frac{\partial^2 v_0}{\partial q_i \partial q_j} \right] \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{A.20})$$

la cual puede ser linealizada a partir de la teoría de ecuaciones de Riccati mediante la introducción de la transformación

$$\mathbf{M} = v_0^{-1} \mathbf{Q}_{,s} \mathbf{Q}^{-1} \quad (\text{A.21})$$

obteniendo la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2 \mathbf{Q}}{ds^2} - v_{0,s} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} + \mathbf{V} \mathbf{Q} = 0, \quad (\text{A.22})$$

Esta ecuación se separa en dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden acopladas, que son:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{ds} = v_0 \mathbf{P} \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -v_0^{-2} \mathbf{V} \mathbf{Q} \quad (\text{A.23})$$

donde las matrices  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{P}$  se introducen para linealizar y solucionar la ecuación (A.20); y debido a su papel en la solución de la ecuación de transporte son conocidas como matrices propagadoras. El término  $\text{traza}(\mathbf{M})$  puede ser calculado como sigue

$$\text{traza}(\mathbf{M}) = M_{ij} = \text{traza}(v_0^{-1}\mathbf{Q}_{,s}\mathbf{Q}^{-1}) = \text{traza}(v_0^{-1}[Q_{,s}]_{ij}[Q^{-1}]_{jk}) \quad (\text{A.24})$$

acá, índices repetidos indican suma sobre los mismos, los cuales van de 1 a 2. La inversa de la matriz  $\mathbf{Q}$  puede obtenerse a partir de la matriz misma a travez de los cofactores de la matriz traspuesta.

$$[Q^{-1}]_{jk} = \frac{\text{cof}[Q_{kj}]}{\det(\mathbf{Q})} \quad (\text{A.25})$$

en donde  $\text{cof}[Q_{kj}]$  hace referencia al cofactor  $kj^{\text{esimo}}$  de la matriz  $\mathbf{Q}$ . Reemplazando este resultado, en la ecuación (A.23) se obtiene

$$\text{traza}(\mathbf{M}) = v_0^{-1}[Q_{,s}]_{ij}\text{cof}[Q_{ij}]/\det(\mathbf{Q}) \quad (\text{A.26})$$

y dado que [4]

$$[Q_{,s}]_{ij}\text{cof}[Q_{ij}] = \frac{d\det(\mathbf{Q})}{ds} \quad (\text{A.27})$$

la expresión (A.25) para  $\text{traza}(\mathbf{M})$  se transforma en

$$\text{traza}(\mathbf{M}) = \frac{v_0^{-1}}{\det(\mathbf{Q})} \frac{d\det(\mathbf{Q})}{ds} \quad (\text{A.28})$$

Este resultado permite realizar la integración de la ecuación (A.19) la cual se puede expresar como:

$$A^2(\gamma_1, \gamma_2, s) = A^2(\gamma_1, \gamma_2, s_0) \frac{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s))}{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s_0))} \frac{\det[\mathbf{Q}(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s_0))]}{\det[\mathbf{Q}(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s))]} \quad (\text{A.29})$$

Finalmente, agrupando los términos asociados a las condiciones iniciales en una constante, se obtiene la amplitud  $A$  como función de las condiciones iniciales del rayo y del parámetro  $s$ , tal como sigue.

$$A(\gamma_1, \gamma_2, s) = C(\gamma_1, \gamma_2, s_0) \sqrt{\frac{v_0(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s))}{\det[\mathbf{Q}(\mathbf{x}(\gamma_1, \gamma_2, s))]} } \quad (\text{A.30})$$

Entre otras cosas la definición de la matriz  $\mathbf{M}$  está relacionada con la matriz de curvatura  $\mathbf{K}$  asociada al frente de onda la cual se define como:

$$\mathbf{K} = -\mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{x}}}{\partial q_i \partial q_j} \quad \text{con } i, j = 1, 2 \quad (\text{A.31})$$

donde  $\tilde{\mathbf{x}}$  se definen sobre la superficie de fase constante es (frente onda) y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie. Por lo tanto la relación existente entre estas dos matrices esta dada por:

$$v_0 \mathbf{M} = \mathbf{K} \tag{A.32}$$

lo cual significa que la matriz  $\mathbf{M}$  y por consiguiente la matriz  $\mathbf{Q}$  contienen la información de la curvatura del frente de onda en la vecindad del rayo

### A.3 Función de Green 2D como superposición de haces gaussianos

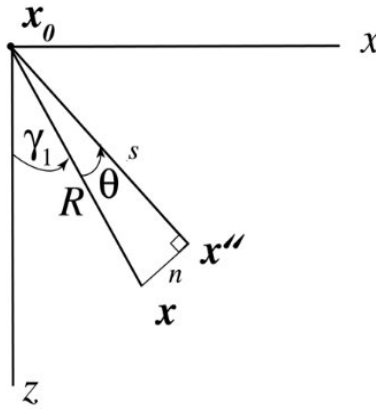


Figura A.1: Tomado de Bleistein [3]. Geometría del campo y de los rayos centrales de haces gaussianos

La función de Green 2D puede ser aproximada mediante una integral de haces gaussianos tal como se muestra en la ecuación (1.34):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \Psi_0 \int u_{GB}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0, \omega) d\theta = \Psi_0 \int u_{GB}(n, s, \omega) d\theta \tag{A.33}$$

La geometría asociada a aquellas contribuciones se representan en la Figura A.1.

El haz gaussiano se define por:

$$u_{GB}(n, s, \omega) = \sqrt{\frac{v_0(s)}{Q(s)}} \exp \left\{ i\omega\tau_0 + i\omega \int_{s_0}^s \frac{ds'}{v_0(s')} + \frac{i\omega n^2 P}{2 Q} \right\} \tag{A.34}$$

donde  $|n|$  es la distancia normal del punto  $\mathbf{x}$  al rayo central del haz.

Para  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}'$  y condiciones iniciales iguales a:

$$\tau = 0, \quad Q = \frac{\omega_r \omega_0^2}{v_0}, \quad P = \frac{i}{v_0}, \quad s = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\text{luego} \quad u_{GB}(s, n, \omega) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 s}} \exp \left\{ i \omega \frac{s}{v_0} - \frac{\omega n^2}{2(\omega_r \omega_0^2 + i v_0 s)} \right\} \quad (\text{A.36})$$

donde  $|n|$  mide la distancia desde  $\mathbf{x}''$  hasta  $\mathbf{x}$  a lo largo de la línea ortogonal al rayo, según esto se tiene:

$$s = R \cos \theta, \quad n = -R \sin \theta, \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (\text{A.37})$$

reemplazando (A.36) y (A.37) en (A.33) resulta:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \Psi_0 \int \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R \cos \theta}} \exp \{-\omega \Psi\} d\theta \quad (\text{A.38})$$

$$\Psi = -i \frac{R \cos \theta}{v_0} + \frac{\omega R^2 \sin^2 \theta}{2(\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R \cos \theta)}$$

Esta integral puede evaluarse mediante el método de descendientes de gran pendiente, el cual consiste en aproximar una integral de la forma:

$$I(\omega) = \int f(z) \exp \{-\omega \Psi(z)\} dz$$

$$\approx f(z_0) e^{-\omega \Psi(z_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2} \Psi''(z_0) [z - z_0]^2 \right\} e^{i \arg\{z - z_0\}} |dz|, \quad (\text{A.39})$$

donde  $\omega$  es un parámetro real cuyo valor es grande, comparado comunmente con la unidad ( aunque en la ecuación (A.38) el parámetro  $\omega$  corresponde a la frecuencia este puede ser normalizada a partir de una frecuencia de referencia diferente de la frecuencia de referencia usada en la migración por haces gaussianos), a una integral compleja, cuyo integrando está dominado por el exponencial en la región para la cual la parte real de la fase adquiere un valor máximo positivo. Esta condición sucede en el punto de silla (o punto estacionario  $z_0$ ) de la fase compleja dado que la parte real de  $\Psi(z)$ ,  $\Re\{\Psi(z)\}$  satisface:

$$\frac{\partial \Re\{\Psi(z)\}}{\partial x} = \frac{\partial \Re\{\Psi(z)\}}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.40})$$

donde  $x$  y  $y$  son las partes real e imaginaria de la variable de integración  $z$  y a partir de las condiciones de Cauchy Riemann [1] se tiene que:

$$\frac{d\Psi(z)}{dz} = 0, \quad (\text{A.41})$$

que es satisfecha para el punto estacionario  $z_0$ .

La trayectoria de integración debe seleccionarse de manera que  $\Re\{\Psi(z)\}$  sea máxima en  $z_0$  y la parte imaginaria de  $\Psi(z)$ ,  $\Im\{\Psi(z)\}$  sea constante, lo cual garantiza que la trayectoria sea un descendiente de gran pendiente.

En la ecuación A.39, la variable de integración se considera compleja y ambas funciones en el integrando son evaluadas complejas.

Para aplicar tal principio a la evaluación de la integral, debemos calcular el punto de silla en el cual  $\Psi' = d\Psi/d\theta = 0$  suponiendo que  $\Psi'' \neq 0$ , por tanto:

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \sin \theta \left[ i \frac{R}{v_0} + \frac{R^2 \cos \theta}{(\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R \cos \theta)} + O(\sin^2 \theta) \right] \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{d\Psi}{d\theta} = \sin \theta \left[ i \frac{\omega_r \omega_0^2 R}{v_0 (\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R \cos \theta)} + O(\sin^2 \theta) \right], \quad (\text{A.43})$$

luego su punto de silla se encuentra en  $\theta = 0$ , así:

$$\Psi(0) = -i \frac{R}{v_0}, \quad \Psi''(0) = \Psi'' = i \frac{\omega_r \omega_0^2 R}{v_0 (\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R)}, \quad (\text{A.44})$$

de manera que :

$$\Psi(\theta) - \Psi(0) \approx \frac{1}{2} \Psi'' [\theta]^2 \quad (\text{A.45})$$

para que  $\Im\{\Psi(z)\}$  sea constante, se requiere que la fase sea real, así:

$$\arg \left\{ \frac{1}{2} \Psi'' [\theta]^2 \right\} = \arg \{ \Psi'' \} + 2 \arg \{ \theta \} = 0, 2\pi, \dots \quad (\text{A.46})$$

$$\arg \{ \theta \} = -\frac{1}{2} \arg \{ \Psi'' \} \quad (\text{A.47})$$

donde  $\arg$  corresponde al ángulo del complejo relativo al eje real positivo. Por tanto  $f(z)$  se evalúa en el punto de silla y se desarrolla la integral del exponencial resultando

así :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \approx \Psi_0 \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2} \Psi''[\theta]^2 \right\} e^{i \arg\{\theta\}} |d\theta|$$

$$\approx \Psi_0 \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |\Psi''|}} \exp \{ -i \arg\{\Psi''\}/2 \} \quad (\text{A.48a})$$

$$\approx \Psi_0 \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} \right\} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \Psi''}} \quad (\text{A.48b})$$

$$\approx \Psi_0 \frac{v_0}{\sqrt{\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} \right\} \sqrt{\frac{2\pi v_0 (\omega_r \omega_0^2 + i v_0 R)}{\omega i \omega_r \omega_0^2 R}} \quad (\text{A.48c})$$

$$\approx \Psi_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \sqrt{\frac{v_0^3}{i \omega_r \omega_0^2 R}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} \right\} \quad (\text{A.48d})$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \approx \Psi_0 v_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_r \omega_0^2 \omega R / v_0}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} - \frac{i\pi}{4} \right\} \quad (\text{A.48e})$$

En la aproximación de la integral de la ecuación (A.48a) se determina la dirección en la cual se efectúa la integral de línea en el plano complejo, que corresponde a  $\theta = 0$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \approx \Psi_0 v_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_r \omega_0^2 \omega R / v_0}} \exp \left\{ \frac{i \omega R}{v_0} - \frac{i\pi}{4} \right\} \quad (\text{A.49})$$

Finalmente comparando esta expresión con la correspondiente a la solución analítica de la función de Green 2D la cual es:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \sim \frac{\exp \{ i \omega |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| / v_0 + i\pi/4 \}}{\sqrt{2\omega |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| / \pi v_0}} \quad \omega > 0 \quad (\text{A.50})$$

se tiene que

$$\Psi_0 = \frac{i \sqrt{\omega_r \omega_0^2}}{2v_0} \quad (\text{A.51})$$

y se puede extender a un medio heterogéneo haciendo  $v_0 \rightarrow v_0(\mathbf{x}_0)$ . De esta manera, la función de Green queda aproximada mediante:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{i \sqrt{\omega_r \omega_0^2}}{2v_0(\mathbf{x}_0)} \int u_{GB}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0, \omega) d\theta \quad (\text{A.52})$$

Por otra parte el dominio de integración se puede cambiar al de  $\mathbf{p}$  el cual coincide con algunas de las variables que componen la fórmula de migración final. Para ello se parte

del vector  $\mathbf{p}''$  el cual corresponde al vector *slowness* del rayo desde  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}''$  y de acuerdo con la representación de la figura A.1. está dado por:

$$\mathbf{p}'' = \frac{1}{v(\mathbf{x}_0)}(\sin(\gamma_1 + \theta), \cos(\gamma_1 + \theta)) \quad (\text{A.53})$$

para la cual:

$$d\mathbf{p}'' = \frac{1}{v(\mathbf{x}_0)}(\cos(\gamma_1 + \theta), -\sin(\gamma_1 + \theta)) \quad y \quad d\theta = \frac{dp''_x}{p''_z} \quad (\text{A.54})$$

utilizando esta equivalencia en la ecuación (A.52) se obtiene

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = \frac{i\sqrt{\omega_r \omega_0^2}}{2v_0(\mathbf{x}_0)} \int u_{GB}(\mathbf{x}'', \mathbf{x}_0, \omega) \frac{dp''_x}{p''_z} \quad (\text{A.55})$$

## A.4 Retropropagación del campo reflejado captado por los geófonos en superficie

La solución de fuente puntual de un campo de ondas se conoce como función de Green, la cual permite modelar el experimento de disparo común y se define por la ecuación:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \right] G(\mathbf{x}, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A.56})$$

en donde  $\mathbf{x}'$  representa el origen de la función de Green,  $\omega$  la frecuencia,  $v(\mathbf{x})$  la velocidad de propagación del campo de ondas y  $G(\mathbf{x}, \omega)$  la función de Green. Esta función debe satisfacer la condición de radiación de Sommerfeld, la cual implica que el flujo de energía sea hacia afuera de la fuente y se establece por la condición, que cuando

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad rG \quad \text{sea acotado y} \quad r \left[ \frac{\partial G}{\partial r} - i \frac{\omega G}{v^2(\mathbf{x})} \right] \rightarrow 0. \quad (\text{A.57})$$

Por medio de esta función es posible conocer el valor de un campo  $u(\mathbf{x}, \omega)$  en un punto al interior de un contorno, conociendo su valor en la frontera.

Usando las identidades:

$$\nabla \cdot (u \nabla G) = u \nabla^2 G + \nabla u \cdot \nabla G \quad (\text{A.58})$$

$$\nabla \cdot (G \nabla u) = G \nabla^2 u + \nabla G \cdot \nabla u \quad (\text{A.59})$$

restando (A.58) y (A.59) e integrando ambos lados de la igualdad en el volumen limitado D resulta

$$\int_D \nabla \cdot [u \nabla G - G \nabla u] dv = \int_D [u \nabla^2 G - G \nabla^2 u] dv \quad (\text{A.60})$$

Aplicando el teorema de Green sobre la primera integral se transforma la integral de volumen  $D$  en la integral sobre la superficie cerrada  $\partial D$  y reescribiendo la segunda integral resulta:

$$\oint_{\partial D} [u\nabla G - G\nabla u] \cdot \hat{n} dS = \int_D \left[ u \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \right) G - G \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \right) u \right] dv \quad (\text{A.61})$$

Si  $u(\mathbf{x}, \omega)$  satisface la ecuación:

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \right] u(\mathbf{x}, \omega) = -f(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A.62})$$

reemplazando en (A.61) se obtiene:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \omega) &= \int_D f(\mathbf{x}', \omega) G(\mathbf{x}', \omega) dv' \\ &- \oint_{\partial D} \left[ u(\mathbf{x}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}', \omega)}{\partial n'} - G(\mathbf{x}', \omega) \frac{\partial u(\mathbf{x}', \omega)}{\partial n'} \right] dS' \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Para aplicar la expresión que nos da las reflectividades al interior del subsuelo, como se observó anteriormente, es necesario utilizar un mecanismo para encontrar el campo reflejado al interior del subsuelo a partir del conocimiento del campo registrado en superficie. Un mecanismo útil para tal propósito se lleva a cabo mediante una función de Green adecuada y usando el resultado de la ecuación (A.63). Para este propósito delimitamos nuestra región de interés de la siguiente manera:

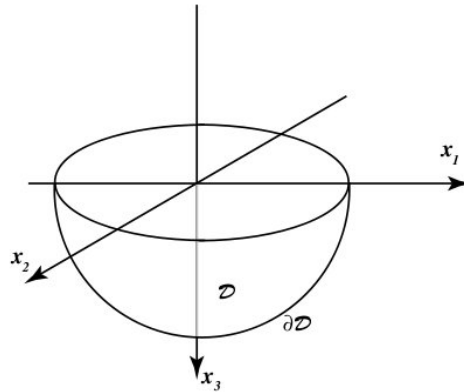


Figura A.2: Tomado de Bleistein [6]. Región compuesta por el plano de adquisición el cual parte el espacio en dos mitades una inferior y otra superior; una superficie inferior que junto con el plano encierra la región de interés.

Se parte de la ecuación de Helmholtz que es

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{x})} \right] u(\mathbf{x}, \omega) = -f(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A.64})$$

donde  $u(\mathbf{x}, \omega)$  es el campo de ondas en la frecuencia  $\omega$  evaluado en el punto  $\mathbf{x}$ ,  $f(\mathbf{x}, \omega)$  es la fuente. Este campo se puede descomponer en dos campos de la siguiente manera:

$$u(\mathbf{x}, \omega) = u_I(\mathbf{x}, \omega) + u_R(\mathbf{x}, \omega) \quad (\text{A.65})$$

donde  $u_I(\mathbf{x}, \omega)$  es un campo que se propaga hacia abajo en el tiempo y  $u_R(\mathbf{x}, \omega)$  es un campo que se propaga hacia arriba en el tiempo. El campo  $u_R(\mathbf{x}, \omega)$  satisface las condiciones de radiación en la parte media inferior de la superficie limitante y puede pensarse como una onda que viene desde el infinito en  $x_3$

Ahora bien volviendo al campo expresado mediante la función de Green, considerando el volumen delimitado por la región mostrada en la Figura A.2, en donde adicionalmente suponemos a la fuente del campo  $u(\mathbf{x}, \omega)$  como fuera de la región, de tal manera que  $f(\mathbf{x}, \omega) = 0$ , y

$$u(\mathbf{x}, \omega) = - \oint_{\partial D} \left[ u(\mathbf{x}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)}{\partial n'} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \frac{\partial u(\mathbf{x}', \omega)}{\partial n'} \right] dS', \quad (\text{A.66})$$

donde la integral sobre la semiesfera inferior tiende a cero cuando  $|R| \rightarrow \infty$  debido a las condiciones de radiación y a que efectivamente en el modelo teórico  $|R|$  se hace tender ha infinito. Esto deja únicamente la integral sobre la superficie plana la cual corresponde a  $x'_3 = 0$ , aquello es:

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \int_{x'_3=0} \left[ u(\mathbf{x}', \omega) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)}{\partial x'_3} - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) \frac{\partial u(\mathbf{x}', \omega)}{\partial x'_3} \right] dx'_1 dx'_2, \quad (\text{A.67})$$

teniendo en cuenta que  $\partial/\partial n' = -\partial/\partial x'_3$  en  $x_3 = 0$

De esta manera considerando que los valores del campo tomados en superficie corresponde a  $u_R(\mathbf{x}, \omega)$  y al ser  $\partial u_R(\mathbf{x}', \omega)/\partial x'_3$  desconocida resulta apropiado la elección de una función de Green tal que en  $x_3 = 0$ ,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) = 0$ . El campo  $u_R(\mathbf{x}, \omega)$  va dirigido hacia la superficie y por tanto no radia hacia  $\infty$  en  $x_3$ .

Adicionalmente la función de Green debe ser una función que se propague hacia atrás en el tiempo, de manera que parta de un tiempo menos infinito y colapse en un tiempo

finito, la cual se representará por  $G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$  que corresponde al complejo conjugado de la representación tradicional. Por otra parte, el campo de ondas  $u_R(\mathbf{x}, \omega)$  va acumulando el tiempo de propagación a medida que se propaga y el interés radica en que al propagarse hacia atrás se reduzca su tiempo de propagación, razón por lo cual se toma aquella función de Green.

$$u_R(\mathbf{x}, \omega) = \int_{x_{r3}=0} \left[ u_R(\mathbf{x}_r, \omega) \frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega)}{\partial x_{r3}} - G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) \frac{\partial u_R(\mathbf{x}_r, \omega)}{\partial x_{r3}'} \right] dx_{r1} dx_{r2} \quad (\text{A.68})$$

donde  $\mathbf{x}'$  se cambió por  $\mathbf{x}_r$  que representa la posición de los receptores.

Para el fin propuesto se escoge una función de Green como la siguiente suma:

$$G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega) = G_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega) - G_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega) \quad (\text{A.69})$$

donde  $\mathbf{x}_r^* = (x_{r1}, x_{r2}, -x_{r3})$  es decir se ubica en la región  $x_3 < 0$  la cual se construye mediante una reflexión de la región  $x_3 > 0$  por el plano  $x_3 = 0$ ; cumpliéndose con ello que :

$$G^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega) = 0 \quad \text{en} \quad x_{r3} = 0 \quad (\text{A.70})$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial G_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega)}{\partial x_{r3}} = - \frac{\partial G_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \omega)}{\partial x_{r3}} \quad (\text{A.71})$$

con la igualdad de la ecuación (A.70) se elimina el segundo término de la integral de la ecuación (A.68) y mediante el uso de (A.71) el primer término de la misma integral se consolida, y la expresión para el campo retropropagado resulta entonces:

$$u_R(\mathbf{x}, \omega) = 2 \int_{x_{r3}=0} u_R(\mathbf{x}_r, \omega) \frac{\partial G_I^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r^*, \omega)}{\partial x_{r3}} dx_{r1} dx_{r2} \quad (\text{A.72})$$

## **A.5 Representación de las funciones internas del programa sumiggbzo**

A.6.1. Función formBeams

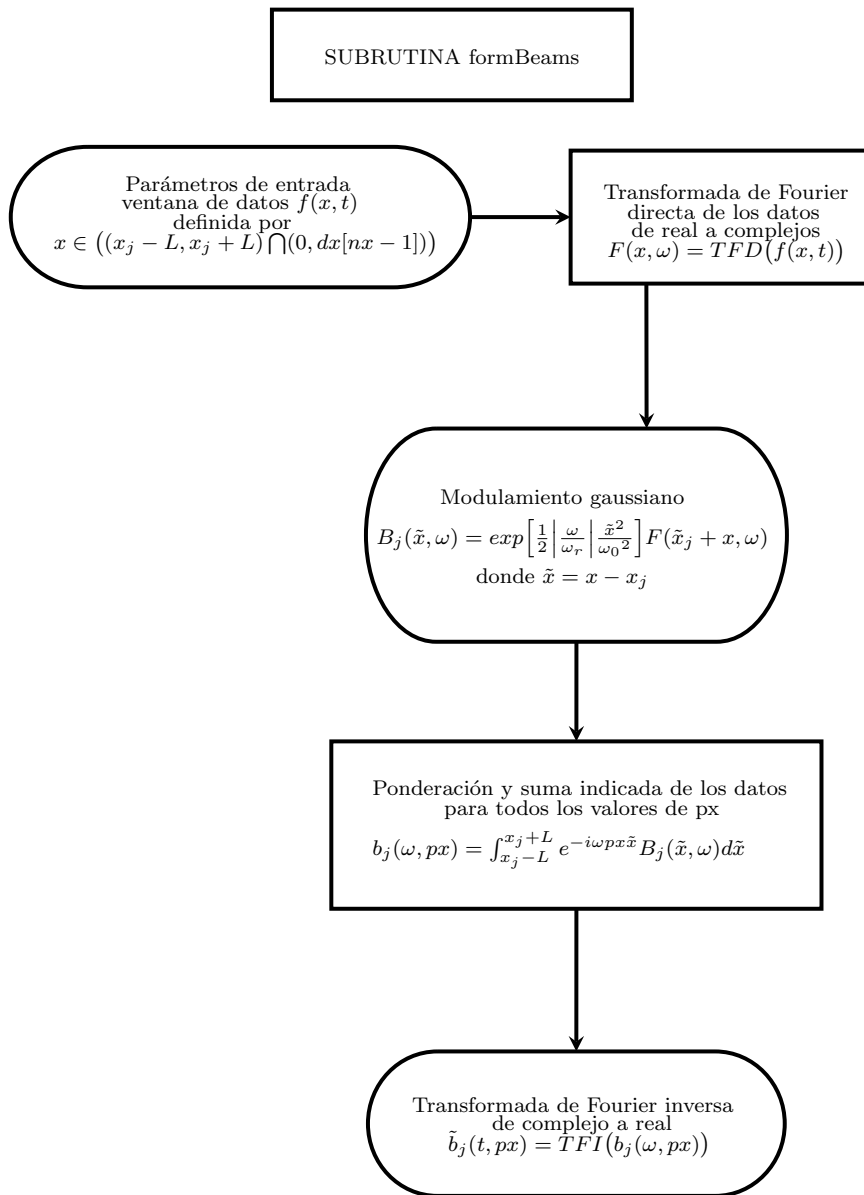


Figura A.3: Representación de la función formBeams

A.6.2. Función makeRay

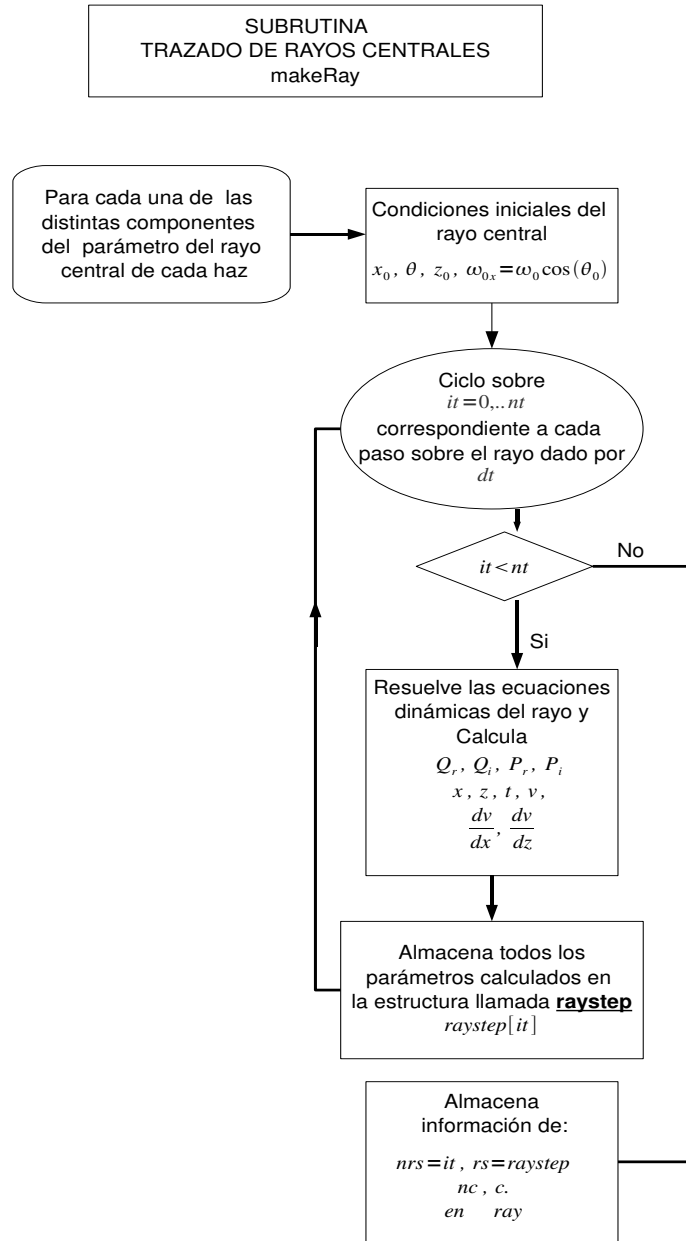


Figura A.4: Representación de la función **makeRay**

### A.6.3. Función accBeam

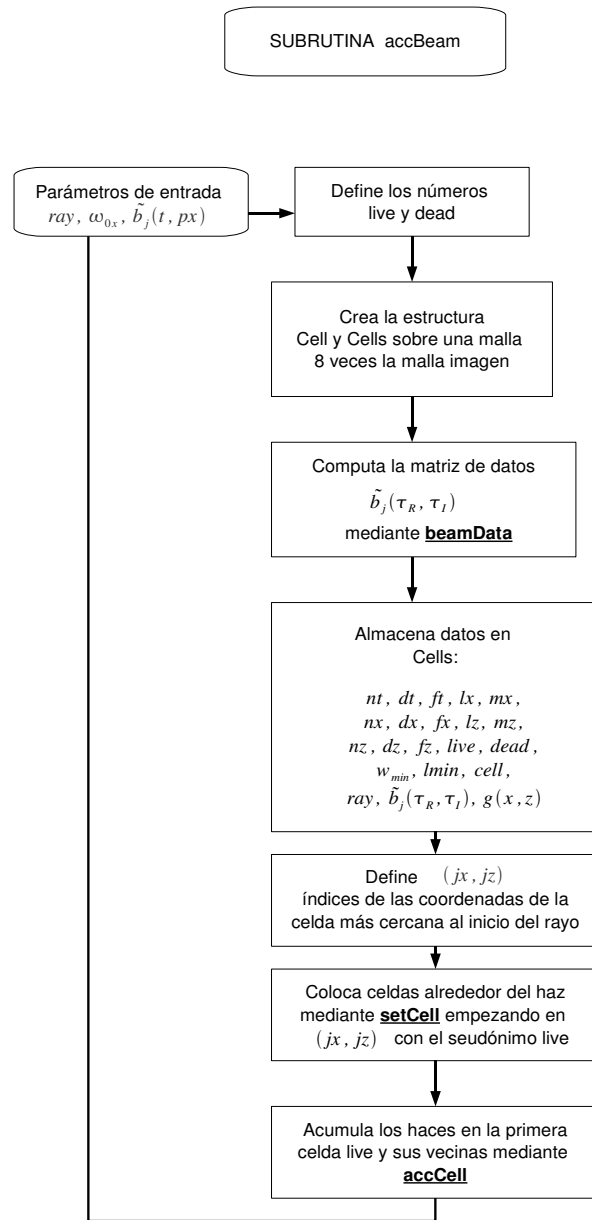


Figura A.5: Representación de la función accBeam

A.6.4. Función beamData

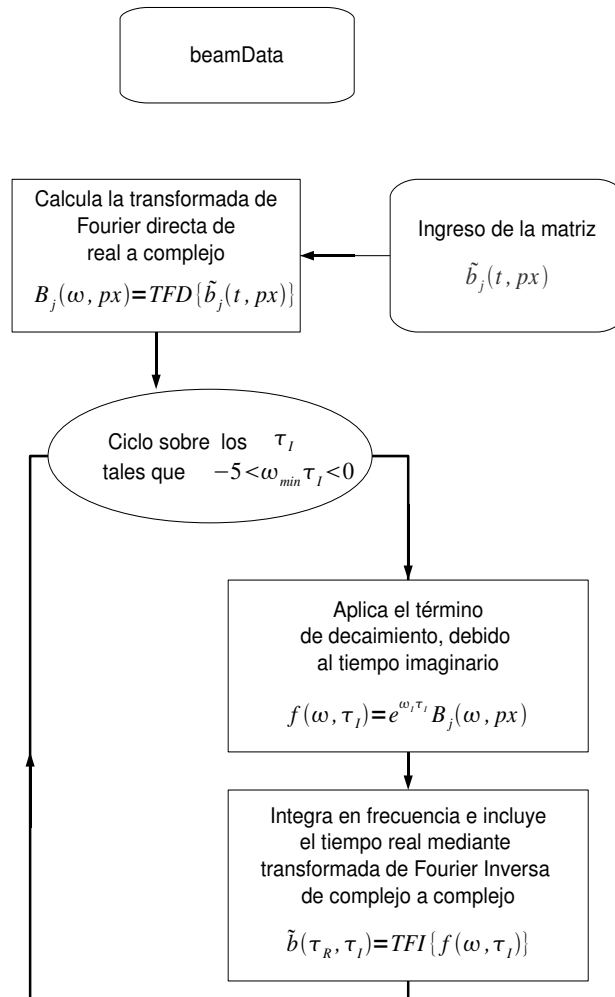


Figura A.6: Representación de la función beamData

A.6.5. Función setCell y cellTimeAmp

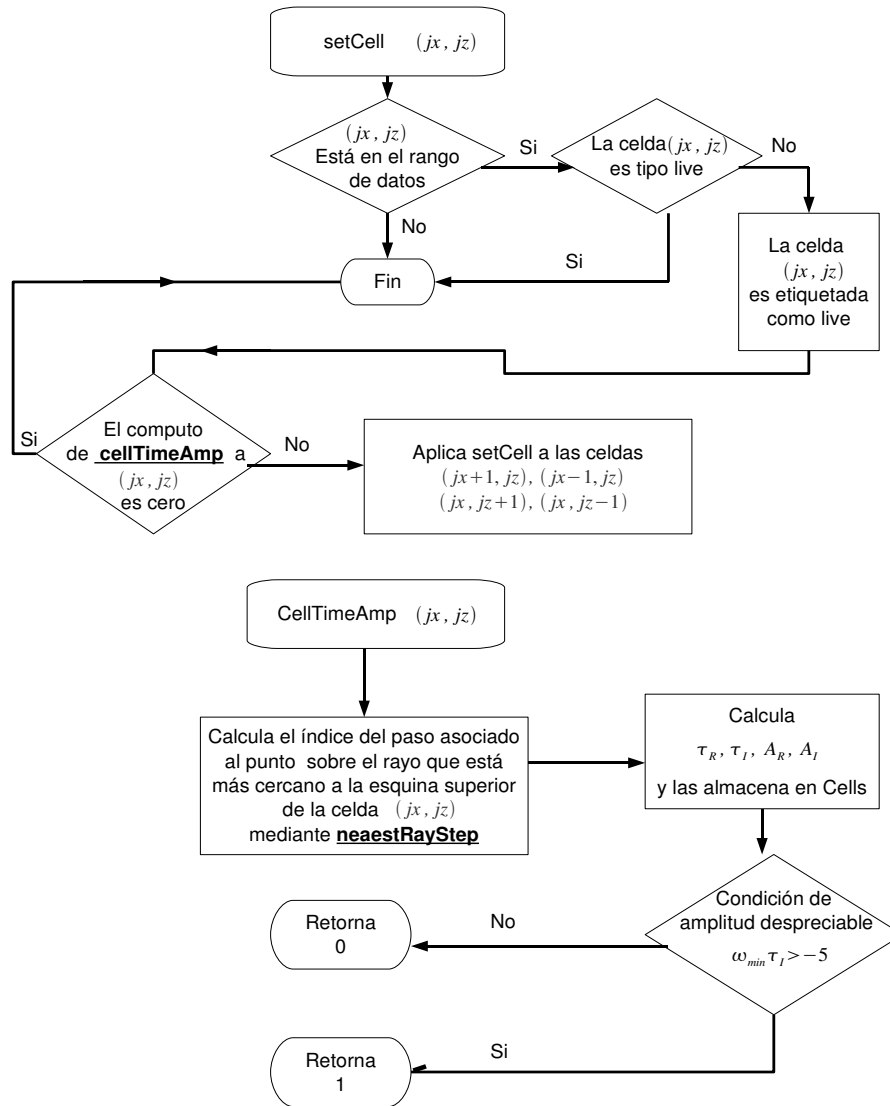


Figura A.7: Representación de la función setCell y cellTimeAmp

A.6.6. Función accCell

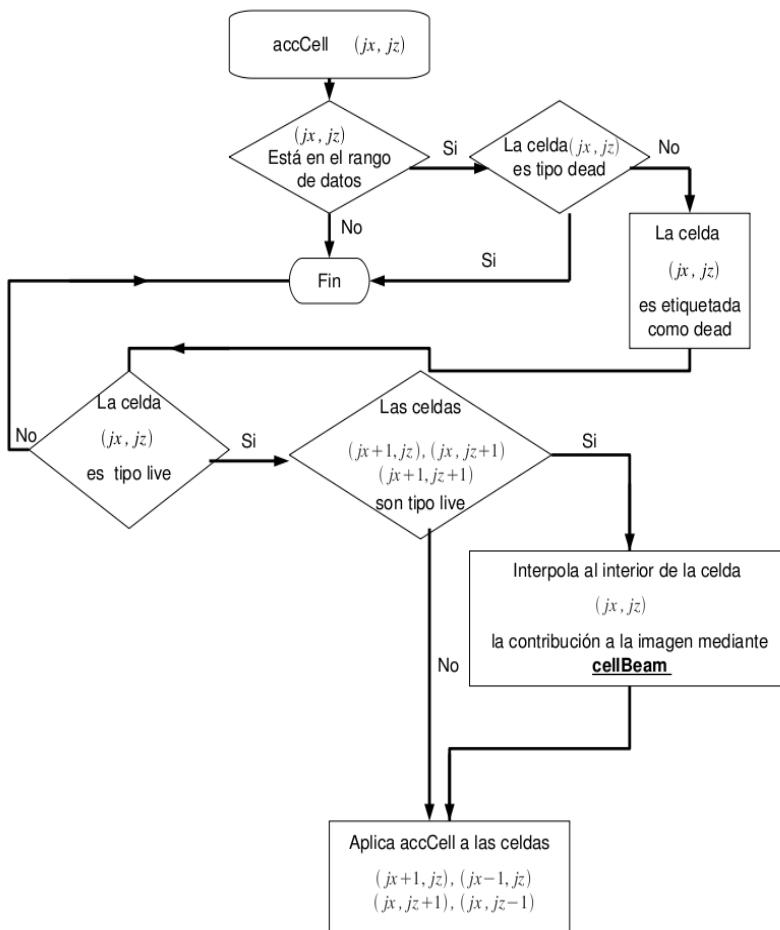


Figura A.8: Representación de la función accCell

### A.6.7. Función cellBeam

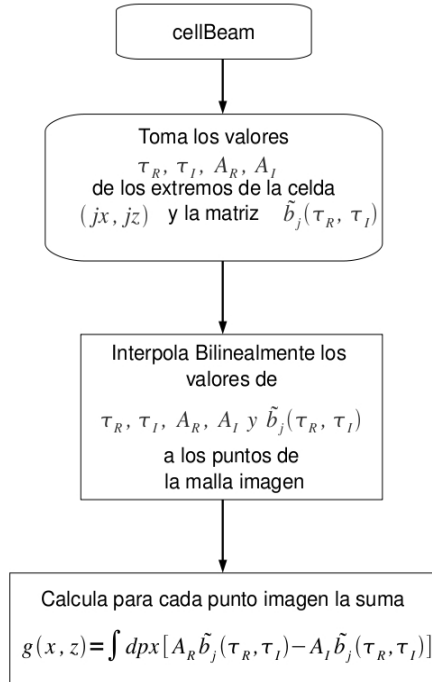


Figura A.9: Representación de la función **cellBeam**

En las Figuras que van de la A.3 a la A.9, se ha utilizado la misma notación presentada en el capítulo 2.2 de este trabajo exepctuando algunas variables adicionales por ejemplo: La variable  $\omega_r$  presente en la función **formBeams**, representa la frecuencia de referencia. Las variables  $Q_i$ ,  $Q_r$ ,  $P_i$  y  $P_r$  corresponden a las matrices dinámicas imaginaria y real del trazado del rayo central [9]<sup>1</sup> presentes en la función **makeRay**.  $\omega_{0,x}$  representa la proyeci ón en el eje x del ancho inicial del haz.

<sup>1</sup>ver la definición en el apéndice A.2 p.65

---

---

# GLOSARIO

---

---

**Migración** : Técnica que permite construir una imagen de la subsuperficie a partir de la información del campo reflejado captada en superficie y de un modelo de velocidades estimado.

**Migración posapilado**: Técnica de migración que parte de datos sísmicos apilados y de un modelo de velocidades para obtener la imagen de los reflectores del subsuelo.

**Migración preapilado**: Corresponde al caso de migración más extenso en el que utiliza la información sísmica anterior al apilado

**datos apilados**: corresponde al resultado de la suma de todos los datos sísmicos que tienen un punto común de reflexión a través de una corrección en tiempo debida a los distintos *offset* característicos de tales contribuciones.

**Offset**: En una adquisición sísmica el término *offset* se refiere a la distancia entre fuente y receptor.

**Caústica** : Fenómeno de convergencia de un campo de onda en una región del espacio. Tal efecto puede ser causado por una lente de baja velocidad, tal como sucede en la óptica geométrica (lente convergente).

---

---

## REFERENCIAS

---

---

- [1] Arfken G., *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 1973)
- [2] Bleistein N., *Mathematical Methods for Wave Phenomena* (Academic Press, New York, 1984)
- [3] Bleistein N., *Mathematics of Modeling Migration and Inversion with Gaussian Beams*, Notas de curso, (2008)
- [4] Bleistein N., Cohen J. K. and Stockwell J. W., *Mathematics of Multidimensional Seismic Imaging, Migration and Inversion*: (Springer-Verlag, New York, 2001)
- [5] Bleistein N., Zhang Y., Xu S., Gray S. H. and Zhang G. "Migration/Inversion: Think Image Point Coordinates, Process in Acquisition Surface Coordinates", *Inverse Problems*, **2**, 1715-1744 (2005)
- [6] Bleistein, N., "Migration/inversion for Incident Waves Synthesized from Common-Shot Data Gathers", *SEG*, (2007)
- [7] Cerveny V., Popov M., y Pšenčík "Computation of wave field in inhomogeneous media-Gaussian beams approach" *GEOPHYSICS*, **70**, 109-128 ( 1982).
- [8] Cerveny V., "Expansion of a plane wave into Gaussian beams" *Studia geoph*, **26**, 120-131 ( 1982).
- [9] Cerveny, V., *Seismic Ray Theory* (Cambridge University Press, 2001)
- [10] Claerbout J., *Imaging the Earth's Interior* (Blackwell Scientific Publications, 1985)
- [11] Claerbout, J. F., "Toward a unified theory of reflector mapping" *GEOPHYSICS*, **36**, 467-481 ( 1971).
- [12] Coddington, E. A., and Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. (McGraw-Hill, 1984)

- 
- [13] Hill, "Gaussian beam migration ", *GEOPHYSICS* ,Vol 55, **11**, 1416-1428 (1990)
- [14] Hill, "Prestack Gaussian-beam depth migration", *GEOPHYSICS*, Vol 66, **4**, 1240-1250 (2001)
- [15] Geoltrain, S., and Brac, J., "Can we image complex structures with first-arrival traveltimes?:" *Geophysics* **35**, 953-956 (1993).
- [16] Gray, S., "Gaussian beam migration of common-shot records", *GEOPHYSICS*, Vol 70, **4**, 71-73 (2005)
- [17] Hale, D., "Computational aspects of Gaussian beam migration" *Colorado School of Mines Center for Wave Phenomena*, **139**,(1992)
- [18] Hale, D., "Migration by the Kirchhoff, slant stack, and Gaussian beam methods" *Colorado School of Mines Center for Wave Phenomena*, **121**,(1992b)
- [19] Hubral, P. "Wavefront curvatures in three-dimensional laterally inhomogeneous media with curved interfaces", *GEOPHYSICS* ,Vol 45, **4**, 905-913 (1980)
- [20] Stockwell J.,Cohen J. *The New SU User's Manual* (Center for Wave Phenomena,2002)
- [21] Versteeg, R. J., "Sensitivity of prestack depth migration to the velocity model:", *GEOPHYSICS*, Vol 58, **6**, 873-882 (1993)