El Proceso de Generalización: Una Perspectiva Apoyada en el Uso de Material Concreto

Julio César Porras Rueda

Tesis Para Optar el Título de Magister en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Educación Matematicas

Universidad Industrial De Santander

Facultad De Ciencias

Escuela De Matemáticas

Bucaramanga

2018

Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Apéndices

RESUMEN

TÍTULO: EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN: UNA PERSPECTIVA APOYADA EN EL USO DE MATERIAL CONCRETO*

AUTOR: JULIO CÉSAR PORRAS RUEDA**

PALABRAS CLAVE: PROCESO DE GENERALIZACIÓN, SECUENCIAS, TIPOS DE SIMILITUDES, GENERALIZACIÓN EXACTA, GENERALIZACIÓN APROXIMADA.

DESCRIPCIÓN:

Para nadie es desconocido que el inicio del pensamiento variacional genera múltiples inconvenientes para los estudiantes, debido a múltiples situaciones. A partir de esta problemática surge la necesidad de investigar alguna manera de poder atacar esta situación. Diferentes perspectivas teóricas y metodológicas muestran que el desarrollo del pensamiento algebraico es poco desarrollado en edades tempranas. En esta investigación se propone potenciar dicho pensamiento a través del desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de 3° (7-9 años); en particular cuando desarrollan tareas que se pueden presentar a través de tres formas: numérica, sensibilidad a la forma y propiedades figurativas, presentadas en material concreto. Además las diversas generalizaciones que pueden plantear los estudiantes para encontrar formas de expresar el patrón que genera los términos de una secuencia. Para ellos se trabajan 3 fases de intervención con todo el grupo (20 estudiantes), antes de estas 3 fases se aplica un diagnóstico inicial con la intención de conocer las ideas previas que tienen los estudiantes con este tipo de tareas, al final las intervenciones se aplicara un diagnóstico final, con la intención de comparar las respuestas planteadas a comparación del diagnóstico inicial tomando como referencia los elementos teóricos. Centrando nuestro análisis teórico principalmente el proceso que desarrollan los estudiantes duran las 3 fases de intervención cuando se enfrentan a resolver estos tres tipos de secuencias

---

* Tesis de maestría

** Facultad de ciencias básicas, escuela de matemáticas Director: Dora Solange Roa Fuentes doctora en educación matemática.

ABSTRACT

TITLE: THE PROCESS OF GENERALIZATION: A PERSPECTIVE SUPPORTED IN THE USE OF CONCRETE MATERIAL [*]

AUTHOR: JULIO CÉSAR PORRAS RUEDA[**]

KEY WORDS: PROCESS OF GENERALIZATION, SEQUENCES, TYPES OF SIMILARITIES, EXACT GENERALIZATION, APPROXIMATE GENERALIZATION.

DESCRIPTION:

It is unknown to anyone that the beginning of variational thinking generates multiple inconveniences for students, due to multiple situations. From this problem arises the need to investigate some way to attack this situation. Different theoretical and methodological perspectives show that the development of algebraic thinking is little developed at an early age. In this research it is proposed to promote this thought through the development of the process of generalization in students of 3 ° (7-9 years); particularly when they develop tasks that can be presented in three ways: numerical, sensitivity to form and figurative properties, presented in concrete material. In addition, the various generalizations students can make to find ways to express the pattern that generates the terms of a sequence. For them three phases of intervention are worked on with the whole group (20 students), before these 3 phases an initial diagnosis is applied with the intention of knowing the previous ideas that students have with this type of tasks, in the end the interventions are apply a final diagnosis, with the intention of comparing the answers proposed compared to the initial diagnosis taking as reference the theoretical elements. Focusing our theoretical analysis mainly the process that students develop during the 3 phases of intervention when they face to solve these three types of sequences.

[*] Master Thesis

[**] Facultad de ciencias básicas, escuela de matemáticas Director: Dora Solange Roa Fuentes doctora en educación matemática.

Introducción

El desarrollo del pensamiento variacional es un tema de gran importancia en el contexto de la Educación Matemática, este ha generado múltiples investigaciones desde diferentes perspectivas teóricas. En particular el desarrollo del proceso de generalización se ha considerado como fundamental para potenciar pensamiento variacional desde edades tempranas. Para nadie es desconocido que el inicio del pensamiento variacional genera múltiples inconvenientes para los estudiantes. Una razón que puede generar este hecho es el poco trabajo en actividades que desarrollan este pensamiento en los grados de básica primaria. Como se problematiza en este documento, el desarrollo temprano del pensamiento algebraico podría ayudar a los estudiantes a comprender de mejor manera, conceptos y nociones que se encuentran en grados superiores, que resultan fundamentales en general, para el desarrollo de pensamiento matemático.

A partir de dicha situación surge esta investigación, que busca potenciar de manera sistemática el pensamiento algebraico en estudiantes de tercer grado de primaria. Para esto se toma como elemento principal el proceso de generalización que surge al abordar tareas de patrones presentadas con material concreto. Esto con el fin de construir en los estudiantes fundamentos conceptuales básicos que desarrollen el proceso de generalización gracias a su experiencia con problemas cada vez más complejos.

Por ello, surge la necesidad de realizar una serie de consultas para buscar información que permita ampliar la perspectiva relacionada con la problemática expuesta. Por tanto, se presenta en este documento en el capítulo de Antecedentes tres grandes posturas que ayudan a estructurar la investigación: inicialmente estarán los referentes políticos, que harán referencia aquellos lineamientos y fundamentos que sustenta el trabajo en el aula; la segunda y tercera están enfocadas al proceso de generalización y al uso del material concreto, respectivamente.

Luego aparece el Marco Referencial que se basa en las investigaciones de Rivera (2010) quien muestran cómo potenciar en estudiantes de primaria el desarrollo del pensamiento algebraico a través del proceso de generalización cuando se enfrentan a tareas de patrones (numéricos, de forma y figúrales) y las categorías de análisis que cada de esas tareas amerita.

Además, se presenta el Diseño Metodológico que guía el desarrollo de la investigación, se muestra inicialmente el contexto donde se desarrolla; así como la puesta en escena de las Fases que sustentan el desarrollo de la investigación. La primera fase parte de la aplicación de una prueba diagnóstica, que da lugar a una fase de intervención con el grupo y finaliza con un diagnóstico final.

Enseguida, se muestran los análisis a priori de las tareas que se van a trabajar con los estudiantes durante todo el proceso de análisis realizado desde la perspectiva teórica mostrada, destacando las posibles soluciones que el estudiante puede mostrar cuando se enfrenta a dichas tareas.

En un capítulo posterior, se presentan los resultados más destacados basados en el marco referencial presentado, que evidencia el trabajo realizado por los estudiantes, así como su progreso durante la intervención realizada, cumpliendo así con los objetivos planteados en la investigación.

Se finaliza el documento con la presentación del capítulo de conclusiones generales de la investigación. Dichas conclusiones se dividen en dos apartados, mostrando inicialmente unas conclusiones a partir de los objetivos planteados, y en la segunda parte respecto aquellos resultados que se pudieron evidenciar en el trabajo realizado por los estudiantes.

1. Antecedentes

No cabe duda que en Educación Matemática existen múltiples temas de interés que deben ser investigados. En particular al pensar en los contextos de variación y cambio, se hace referencia a la forma de ver las expresiones algebraicas en diversas situaciones como resultado de un proceso de generalización. Por tanto, se considera el estudio y análisis de dicho proceso como fundamental en la construcción y desarrollo de pensamiento matemático. Esto genera la necesidad de desarrollar un panorama más amplio para estudiar los patrones, las regularidades y el cambio. El estudio de patrones se considera como el medio fundamental para desarrollar el proceso de generalización, así es posible reconocer, ampliar y construir modelos de situaciones que involucren procesos de variación. A continuación, se exponen diferentes perspectivas que discuten la importancia del desarrollo del pensamiento variacional y el rol que juega el estudio de patrones en matemáticas. Desde la perspectiva de lineamientos y estándares curriculares hasta una visión desde la investigación en Educación Matemática.

1.1 Lineamientos, Principios y Estándares

En los lineamientos curriculares de matemáticas presentados por el Ministerio de Educación Nacional se propone a la comunidad educativa el desarrollo de actividades que permitan analizar cómo aumenta o disminuye, cómo cambia o se mantiene constante la forma en el estudio de secuencias numéricas o geométricas respectivamente. Esto busca provocar en los estudiantes el planteamiento de conjeturas, la predicción de términos cercanos y la construcción de expresiones sobre la forma de términos lejanos, con el objetivo de que los estudiantes logren explicar el patrón que genera, por ejemplo, los términos de una secuencia.

“Otra herramienta necesaria para iniciar el estudio de la variación desde la primaria la constituye el estudio de los patrones” (MEN, 1998). El ministerio es claro dando pautas para el desarrollo temprano del pensamiento variacional en los grados de básica primario, puede que no sean muy explícitos pero dichas políticas muestran que tienen la intención de desarrollar dicho pensamiento. Surge entonces interesante por qué se presentan tantas falencias en grados superiores relacionadas con las bases que deben ser creadas en primaria, y considero que puede estar relacionada al desconocimiento del profesor, pero este ya sería un problema institucional, el cual es que en un gran porcentaje de docentes que enseñan matemáticas en grados de primaria, no cuentan con la preparación adecuada debido a que no son profesionales como tal en el área.

Respecto al uso de la generalización de patrones estos lineamientos lo consideran como una herramienta clave para iniciar el estudio de la variación debido a las múltiples habilidades que pueden desarrollar los estudiantes cuando se enfrentan con este tipo de actividades, pues empiezan a comprender conceptos tales como variable, sus múltiples significados y las diversas maneras en que puede estar representado. “Se considera que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio” (MEN, 1998). Dando indicios de que una buena manera de empezar a trabajar el pensamiento variacional es a través del estudio de patrones

Dentro de los cinco procesos generales de toda actividad matemática que nos presenta el ministerio (formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos), el proceso de generalización se encuentra inmerso en el de la modelaciones de procesos, porque ahí los estudiantes puede descubrir ciertas relaciones, pueden formular diversas formas de solución de la secuencia, transformar situaciones de contexto a problemas netamente matemáticos, y al tener ya este tipo de problemas, ellos pueden hacer uso de todas sus herramientas matemáticas que tienen hasta el momento. Es ahí donde “La generalización se puede ver como el nivel más alto de la modelación” (MEN, 1998)

Otro documento de nuestros interés, son los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) construido por un grupo de profesores de matemáticas de Estados Unidos apoya el uso de situaciones que involucren el estudio de patrones a temprana edad, que debe extenderse hasta los grados superiores.

Entendiendo lo que significan los términos que dan nombre al documento citado se tiene que: los principios, hacen referencia a aquellas características que podrían tener una buena educación matemática, mientras los estándares categorizan los contenidos que cada estudiante debe aprender en un grado en específico, al juntarlos se convierten en una gran ayuda para los educadores con la intención de mejorar sus procesos de enseñanza y de esta manera mejorar el sistema educativo.

Estos estándares muestran lo que se debería valorar en la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de construir una sociedad que desarrolle la capacidad de pensar y razonar matemáticamente. Para esto se proponen cinco estándares conocimientos básicos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad; y cinco estándares de procesos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación.

En particular el Estándar de Álgebra propone que los estudiantes deben estar en capacidad de descubrir, predecir y crear diferentes y variadas situaciones relacionadas con el estudio de patrones. Además se propone relacionarlos con diferentes representaciones (tablas, gráficas, entre otras), para que los estudiantes logren ver cómo influye cierto cambio de una magnitud respecto a otra, y utilicen esta información para resolver situaciones problema. Además, dicho estándar expone un conjunto amplio y coherente de objetivos para las matemáticas, desde pre-kínder hasta nivel 12, para todos los estudiantes. Estos con el fin de orientar esfuerzos relativos al currículo, a la enseñanza y a la evaluación.

Como se ha venido discutiendo el enfoque de esta investigación, el estándar de Álgebra es el que centra nuestro interés, donde propone que los todos los métodos de enseñanza en todos los nivelen deberían capacitar a todos los estudiantes para: i) comprender patrones, relaciones y funciones; ii) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; iii) usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas y iv) analizar el cambio en diversos contextos.

El primer estándar es el de mayor interés para esta investigación, cabe destacar que es muy significativo para los niños desde edades tempranas clasificar, ordenar y notar secuencias; que intenten buscar la forma que tiene cada sucesión de objetos expuesta y predecir un término especifico. Pueden por ejemplo estudiar secuencias numéricas como 1, 3, 5, 7,… centrándose en cómo se construye cada término a partir del anterior. En este caso adicionando 2, es aquí donde se empieza el desarrollo del pensamiento variacional, que más adelante da paso a la construcción de la noción de variable.

Ahora se centra la atención en los estándares y expectativas que presentan estos lineamientos para cada conjunto de grados en Álgebra. Empezando con la etapa pre-K-2, en esta etapa el estándar de mayor interés es comprender patrones, relaciones y funciones. El planteamiento de buenas preguntas por parte del profesor permitirá a los estudiantes plantear mejores generalizaciones, preguntas tales como ¿Cómo se podría describir un patrón? o ¿Cómo podría repetirse o ampliarse? Cabe destacar que los patrones constituyen en los niños una forma de reconocer, ordenar y organizar su mundo. En estas etapas se deben proporcionar experiencias a los alumnos para que aprendan a usar diagramas y tablas para registrar y organizar la información en distintos formatos. Por ejemplo, considere las siguientes situaciones:

1. “Azul, Azul, Rojo, Azul, Azul, Rojo”

Figura 1. Ejemplo de secuencias de Colores (NCTM, 2003, p.94)

¿Cómo se podría describir este patrón?, ¿Cómo puede repetirse o ampliarse?

2. Emparejando números naturales con un patrón por repetición de objetos.

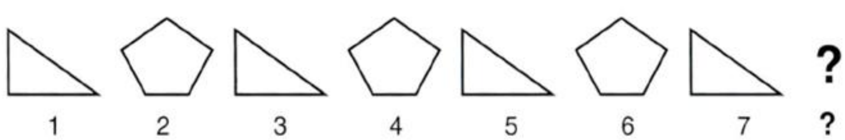


Figura 2. Emparejamiento con un patrón por repetición (NCTM 2003, p. 96)

¿Qué es la segunda figura?

Al continuar el patrón, ¿Qué figura es la próxima?

¿Qué número sigue cuando cuentas?

¿Qué tienes que decir respecto de los números que están debajo de los triángulos?

¿Qué figura debe corresponder al 14?

3. Resolver problemas identificando procesos específicos.

Tabla 1.

Una tabla vertical para registrar y organizar información (NCTM, 2003, p.97)

Número de globos	Coste de los globos en Centavos
1	20
2	40
3	60
4	80
5	?
6	?
7	?

En el caso de la situación presentada en la tabla 1, para calcular cuánto hay que pagar por siete globos si uno cuesta 20 centavos, se espera que los estudiantes puedan notar la relación que existe entre el costo y el número de globos; entre más más globos quieran comprar, más dinero les costará.

Otro estándar propuesto para Álgebra es: Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos. En este caso se propone que los estudiantes deberían generalizar a partir de observaciones sobre los números y las operaciones, potenciando el desarrollo de pensamiento algebraico. Se propone que los profesores deberían estimular el estudio de determinadas observaciones y conjeturas para que los estudiantes analicen si son válidas para todos los casos.

En la etapa de 3-5, el álgebra es entendida como un conjunto de conceptos y técnicas ligadas con diversos métodos de representación; aunque también puede ser considerado como un estilo de pensamiento matemático para la formalización de patrones, funciones y generalizaciones. Estos estándares plantean que los cimientos de los conceptos algebraicos deberían emerger cuando los estudiantes identifican o construyen patrones numéricos y geométricos; pues ellos deberán detallar patrones verbalmente y representarlos de otra manera; se espera que busquen y apliquen relaciones entre cantidades que varían para hacer conjeturas; y así empiecen a utilizar terminología matemática para platear posibles generalizaciones.

En esta etapa los estudiantes deben ser capaces de desarrollar tareas de patrones numéricos y geométricos, analizar su estructura, ver cómo cambia cada término de la sucesión y tener la habilidad de plantear posibles generalizaciones. Por ejemplo, se considera la siguiente situación:

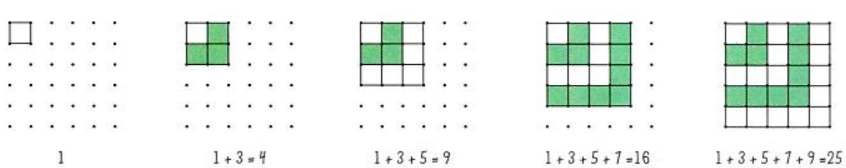
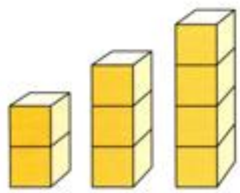


Figura 3. Representación cuadrados crecientes (NCTM, 2003, p.163)

En el ejemplo presentado en la imagen 4, un estudiante podría argumentar que el área varía de tal manera que se puede predecir, el siguiente número impar en cada nuevo al cuadrado; otro podría expresar que cada cuadrado anterior encaja en el siguiente. En la siguiente sección se analizan algunos resultados de investigación que incluyen el estudio de patrones como el expuesto en la figura 4.



Número de cubos (N)	Área en unidades cuadradas (S)
1	6
2	10
3	14
4	18

Figura 4. Ejercicio torres crecientes (NCTM, 2003, p.164)

Otro ejemplo de gran interés (imagen 5), los estudiantes deben intentar representar la información en una tabla; así pueden determinar la secuencia y el patrón que la genera. Para estudiantes de quinto grado se podría esperar que llegaran a conclusiones de cómo que el área es siempre cuatro veces el número de cubo más dos, y deberían explicar el por qué. Después de establecer bien clara la relación, el profesor puede plantear preguntas como: ¿Cuál es el área de una torre de cincuenta cubos? ¿Cuántos cubos forman una torre de 242 unidades cuadradas?

El cambio es un concepto fundamental del estudio de la matemática, que puede ser analizado y estudiado a partir de las herramientas fundamentales del álgebra. En el ejemplo presentado en la imagen 5 un estudiante podría concluir, al principio la altura de tu planta será cero, pero a medida que el tiempo va transcurriendo su altura va creciendo, es decir, puede ir creando conocimiento implícitamente de funciones, tema que profundizara en grados superiores.

Tiempo (días)	Altura (cm)	Cambio (cm)
0	0	
2	0	0
4	0	0
6	1	1
8	2	1
10	4	2
12	6	2
14	7.5	1.5
16	8.5	1
18	8.5	0
20	9	0.5

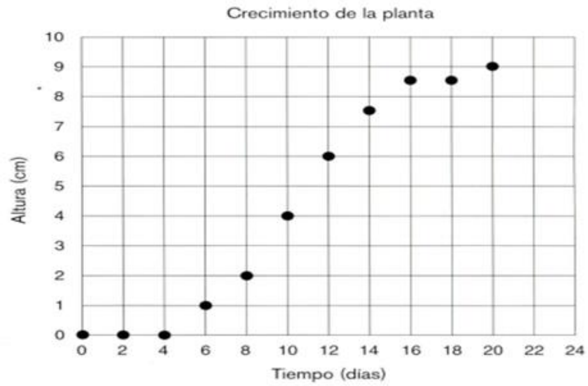


Figura 5. Tabla y gráfica del crecimiento de una planta (NCTM, 2003, p. 167)

Con base en el estudio de esta propuesta referente a los estándares de contenido de Álgebra, surge la necesidad de consultar otras fuentes con el fin de ampliar y profundizar sobre los aspectos expuestos.

Enfocándonos ahora en nuestros estándares, edificados por el ministerio de educación cuya intención primordial es mostrar a toda la comunidad educativa aquellos niveles de educación que tienen derecho todos los estudiantes en nuestro país a partir de un grado de escolaridad que se encuentre, permitiendo identificar si los estudiantes e instituciones educativas están cumpliendo con las expectativas planteadas desde el ministerio.

Centrándonos en el pensamiento de interés, estos estándares presentan la importancia que tiene el pensamiento variacional en el desarrollo del pensamiento matemático, comentando que se puede hacer desde le educación básica primaria, proponiendo ejemplos tales como:

- Crecimiento de una planta durante un mes
- Cambio de temperatura durante el día
- Flujo de vehículos frente a la institución.

Dichos ejemplos son muestra clara de situaciones de contexto donde se evidencia una variación, y son situaciones que a nivel de estudiantes de primaria se podrían estar trabajando, con la intención de ir creando esas primeras bases de conceptos tales como función, dependencia, variable, entre otros.

Otro ítem que se destaca en dichos estándares, son los diversos sistemas de representación que están ligados a la variación, entre los cuales están representaciones gestuales, en lenguaje cotidiano de estudiantes, numéricas, tablas, diagramas incluso dibujos. Tomando de referencia uno de los ejemplos anteriormente mostrado, si se tomara un cierto grupo de estudiantes de tercer grado y se le pidiera que, a partir de la situación dada, explicaran el comportamiento, seguramente se podrían observar varias representaciones de las descritas en este párrafo.

"Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización"(MEN, 2006, pág. 67). Dichas palabras planteadas por el ministerio son clara muestra de que existe al menos una forma para ir trabajando desde primaria sistemas algebraicos, no con la formalidad de grados superiores, pero si con estructuras al nivel de los estudiantes. Es aquí donde toma importancia esta investigación debido a la profundidad que tiene en esta estrategia planteada por el ministerio, y afirmando nuestra concepción que a través del estudio de patrones se puede ir desarrollando el pensamiento variacional.

Esto debido a que cuando los estudiantes trabajan con patrones, ellos empiezan a determinar términos inicialmente de dependencia e independencia, pues empiezan a notar que una situación depende algo, por ejemplo, tomando el ejemplo del flujo de carros, notará que, dependiendo la hora, existirá más flujo de carros en comparación a otra hora del día. Además a partir de ahí pueden ir creando expresiones algebraicas a través de la manera que ellos comprendan el patrón de secuencia, y a partir de ahí crear términos siguientes tomando como base los términos precedentes.

Por último, que se puede tomar de nuestros estándares, es la relación inminente que tiene el pensamiento variacional con los demás pensamientos, desde el numérico hasta el de sistemas de datos. Un claro ejemplo de la variación en el pensamiento numérico, es desde el análisis de las propiedades, además en el geométrico donde a partir de que varían las dimensiones de un sólido, también modificaría su volumen, incluso ahí mismo puede existir la variación en medidas (sistema métrico) al pasar todas las medidas a la misma unidad. Y respecto al pensamiento estadístico, también podría existir variación, identificando cuando en algún evento surja la relación de dependencia o no para determinar alguna probabilidad en dicho experimento. Es decir encontramos la relación de la variación con los demás pensamientos.

Además, en los estándares básicos de matemáticas de 1-3 grado que nos presenta dicho documento, se destacan los pertinentes a nuestra investigación

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros). (Pensamiento variacional)

- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas. (Pensamiento variacional)

- Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto. (Pensamiento métrico)

De manera general podemos concluir que, a pesar de revisar diferentes entes institucionales, existen muchas ideas en común, que demuestran o reafirman la importancia que tiene el estudio de patrones en el desarrollo del pensamiento variacional, enfocándonos en los grados de básica primaria, dando así un buen indicio de la importancia que tiene seguir investigar en dicha situación.

1.2 El pensamiento algebraico temprano

Como se pudo ver en la sección anterior, el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años escolares no es una iniciativa nueva. Sin embargo, las exploraciones recientes muestran que existe una gran brecha entre las propuestas y resultados de diferentes investigaciones y la realidad del aula de matemáticas.

Butto y Rojano (2010) por ejemplo, proponen para estudiantes de primaria dos rutas de acceso al pensamiento algebraico: una a partir de la proporcionalidad y otra dependiente del desarrollo del proceso de generalización (ver figura 7). Los autores realizaron su trabajo enfatizándose en la segunda ruta, apoyados en el software LOGO y actividades con lápiz y papel. Además de esto, Butto y Rojano (2010) mencionan que el uso de dicho software les permitía a los estudiantes:

- Trabajar en diferentes ambientes: numérico, geométrico y algebraico.
- Corroborar conjeturas y posibles patrones.
- Estudiar relaciones entre aspectos geométricos, numéricos y variacionales.

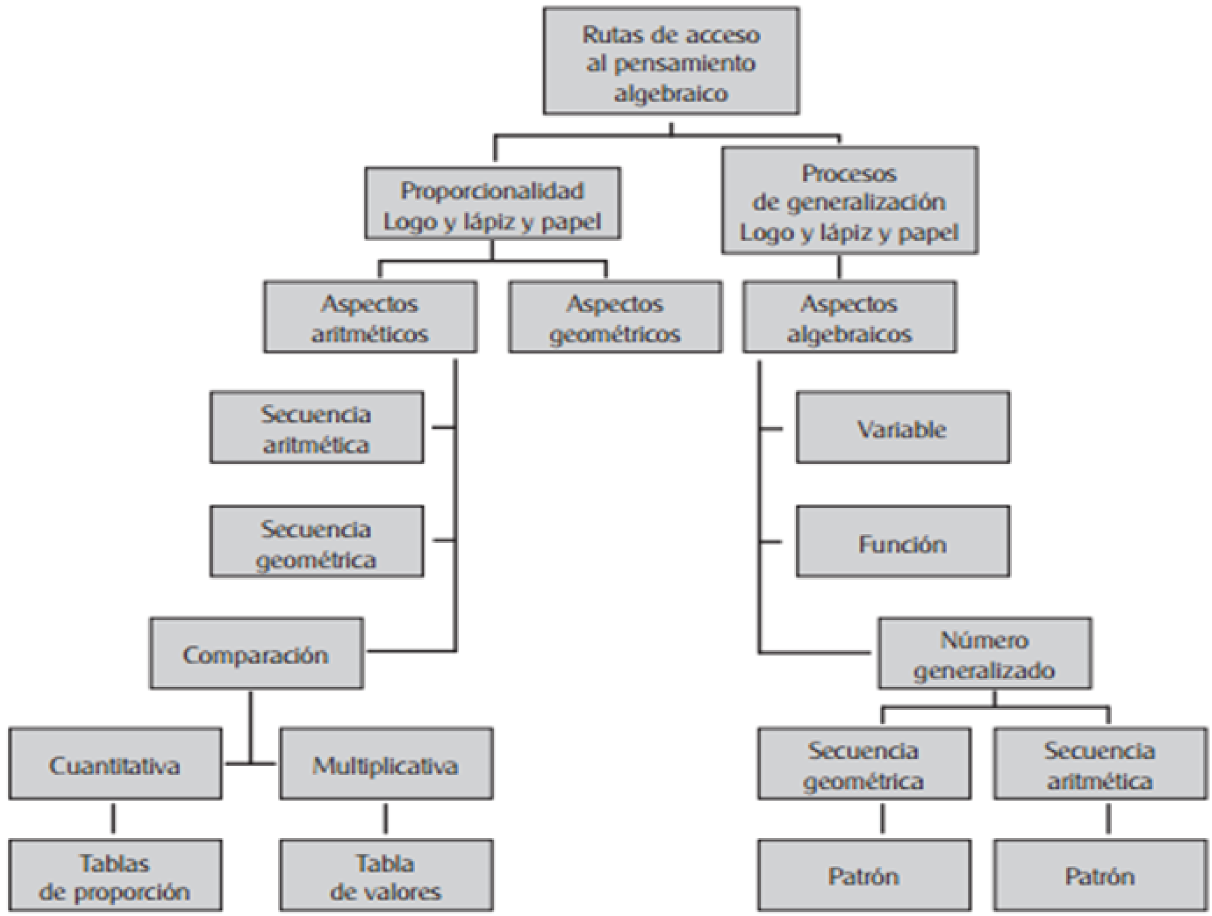


Figura 6. Rutas de acceso al pensamiento algebraico (Butto y Rojano, 2010, p.60

Butto y Rojano centraron su estudio en el Modelo Teórico Local (MTL) desarrollado por Filloy (1999) y Filloy, Rojano y Puig (2008); este modelo está formada por cuatro mecanismos que se relacionan entre ellos:

1. Modelo de enseñanza.
2. Modelo de los procesos cognoscitivos.
3. Modelo de competencia formal.
4. Modelos de comunicación.

Un ejemplo que sintetiza el trabajo presentado por Butto y Rojano (2010) es el siguiente:

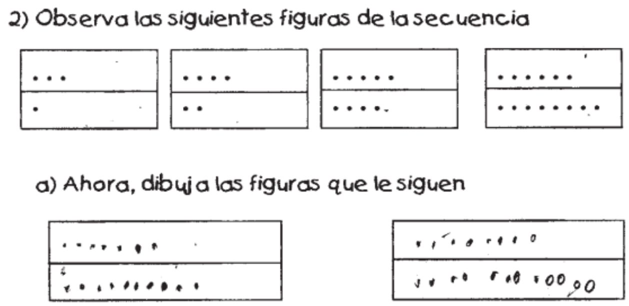


Figura 7. Secuencias mostradas en el cuestionario inicial (Butto y Rojano, 2010, p. 71

Es de gran interés este ejemplo, pues varios estudiantes plantearon que se resolvía siguiendo un patrón aditivo, sin darse cuenta que el segundo renglón de cada término de la secuencia representa la cantidad de puntos en el anterior, multiplicado por dos. En este caso se refleja la dificultad que afrontan los estudiantes a la hora de encontrar alguna regla o relación que les permita definir algún término específico de la secuencia. De manera general los resultados de esta investigación, avalan la idea inicial de Butto y Rojano, pues notaron cierto desarrollo de los estudiantes sobre nociones básicas del álgebra a través de las actividades planteadas sobre el estudio de patrones. Tanto la generalización como la simbolización formal son aspectos fundamentales del álgebra y, en este sentido, los resultados de la investigación apuntan hacia el surgimiento de un acceso temprano al pensamiento algebraico.

Por otra parte, Bernardz, Kieran y Lee (1996) plantean que existen cuatro posturas sobre la enseñanza del álgebra mediante: la generalización de patrones numéricos y geométricos; la modelización de situaciones matemáticas y situaciones concretas, mediante el estudio de situaciones funcionales y a partir de la resolución de problemas y ecuaciones; la modelización, sobre todo en situaciones concretas es fundamental dentro del proceso de generalización. Esta última postura es de gran relevancia para el desarrollo temprano del álgebra, pues a partir del desarrollo de tareas de generalización de patrones, el estudiante podrá ir estableciendo relaciones, conjeturas, demostraciones que le permitirán crear nociones de temas que desarrollará a medida que profundice en conceptos fundamentales de las matemáticas. Para ello debemos tener bien claro a lo que hace referencia el proceso de generalización.

Respecto al proceso de generalización, Mason (1985) propone que:

> La generalización en álgebra es el punto de partida hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar; así al percibir un patrón o una regularidad, puede intentar expresarlo y comunicárselo a alguien. Existen cuatro etapas para trabajar la generalidad en el salón de clases: percepción de un patrón, expresión de un patrón; registro de un patrón; prueba de la validez de las formulas. (Mason, 1985, p. 67 tomado de Butto y Rojano, 2011).

Se cita lo expuesto por Mason, debido a la gran importancia que tienen sus ideas a la hora de entender una posible forma de introducir en los estudiantes el lenguaje algebraico, pues su naturaleza siempre es dificultosa para los estudiantes, y es ahí donde el estudio de patrones se convierte como una alternativa para dar inicio con este complejo concepto matemático. Formando situaciones de patrones donde el estudiante debe percibir el comportamiento de la secuencia, y a partir de ahí poder plantear una expresión, y que a medida que el estudiante avance en su nivel académico será más próxima a una expresión algebraica.

Por último, descubrir patrones según Durán Ponce (1999, pág. 68) nos dice que requiere el trabajo de tres procesos: (i) experimentar actividades con patrones numéricos; (ii) expresar las reglas que caracterizan patrones numéricos y particulares mediante oraciones, involucrando a los estudiantes en aclaraciones y precisiones; y, (iii) propiciar que los estudiantes expresen dichas reglas de manera abreviada. Siendo esta la más compleja para ellos, debido a que confunden la característica del patrón con la manera de crear algún termino en específico, pues logran identificar por ejemplo que cada término de la secuencia tiene 3 más que el anterior, pero cuando se le pregunta cuantos elementos tendrá algún término en específico, a lo mejor no podrían dar respuesta exacta, o se limitarían a decir que tiene 3 más que el anterior, respondiendo así con la característica de la secuencia y no con el número exacto de elementos de ese término.

1.3 El uso de material concreto

Diversos autores en diferentes momentos de la historia han opinado respecto a la importancia que tiene el uso del material concreto en el desarrollo del pensamiento matemático.

Basándonos en las ideas de Godino, Batanero y Font, (2003) los materiales didácticos pueden ser de dos tipos: los primeros son aquellos que juegan parte funcional del profesor, por ejemplo, programas tutoriales, libros de ejercicios, pruebas de apoyo etc. Los segundos se denominan materiales manipulables y son los que más interesan en nuestro caso. Estos hacen referencia aquellos materiales que potencian el razonamiento matemático. Son objetos físicos, adaptados del medio y preparados o acomodados especialmente con la intención de lograr algunos objetivos. Pero en estos materiales manipulables encontramos dos grandes divisiones, los manipulativos gráfico-textuales-verbales, estos juegan un rol importante la percepción visual y auditiva, acá encontramos materiales como gráficas, tablas, símbolos etc. Mientras que en la otra división encontramos la manipulativos tangibles, que son aquellos que ponen en juego la percepción táctil, en este grupo se encuentran materiales como: regletas, balanzas, pepitas, entre otros. Por otra parte, existen materiales tangibles que también pueden desempeñar funciones simbólicas, por ejemplo, algún niño podría usar muchas pepitas para figurar el conjunto de los números naturales.

Gattegno en la década de los 60, expone que la utilización de material concreto permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento matemático, además Castelnuovo (1970) asegura que el manejo de material concreto permite una noción dinámica del aprendizaje. Mientras que Pestalozzi (1988), propone el uso de material manipulativo para el aprendizaje de las matemáticas.

Las múltiples ventajas del uso de material manipulable hacen que estos sean necesarios en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sobre todo en los primeros niveles de escolaridad. “El material didáctico manipulable es un complemento, no un sustituto de otras representaciones” (Báez y Hernández, 2002). Algunos currículos sugieren el uso de materiales manipulables como un elemento fundamental para mejorar la enseñanza, en los que destacan materiales como: tangram, ábacos, dados, fichas, geoplano etc.

Teixidor (2010) expone que no basta con sólo utilizar material concreto generará un aprendizaje, sino se deben tener una buena intención y preparación por parte del maestro para poder generar realmente un aprendizaje.

Pero a medida que el tiempo ha avanzado, la tecnología se ha convertido en algo de vital importancia en nuestra cotidianidad, y no podría ser la excepción el campo de la educación. Mínguez (2012) presenta algunas experiencias que intentan digitalizar el material concreto, es decir, que no se están usando tantas actividades con material concreto, sino que se intentan mostrar a través de algunos softwares. Respecto a este tema, existen cientos de investigaciones y publicaciones y todas recalcan lo positivo que se ha convertido el uso de la tecnología en la educación, pero nos enfocaremos en las relacionadas con el uso de material concreto.

2. Problema de Investigación

2.1 Pregunta de Investigación

Tomando como fundamento los elementos descritos en el apartado anterior, y la problemática existente en el desarrollo temprano del pensamiento variacional, se plantea esta investigación, con el fin de conocer una estrategia para mejorar dicha situación enfocada en el estudio de patrones que serán trabajados con material concreto.

Por tanto, se da lugar a la pregunta de investigación:

¿Cómo desarrollar el pensamiento variacional a través del proceso de generalización en estudiantes de 7 a 9 años cuando abordan tareas de patrones apoyadas en el uso de material concreto?

2.2 Objetivos

2.2.1 Objetivo general. Potenciar el desarrollo del pensamiento variacional a través del proceso de generalización en estudiantes de 3º (7 - 9 años) al resolver actividades que incluyen el estudio de secuencias con diferentes tipos de similitudes, presentadas en material concreto.

2.2.2 Objetivos específicos

- Diseñar y analizar tareas que involucren el estudio de diversos tipos de secuencias (numéricas, figurativas y de forma) para fomentar el desarrollo del proceso de generalización.

- Analizar las generalizaciones (exactas y aproximadas) que desarrollan los estudiantes cuando abordan el estudio de secuencias presentadas en material concreto.

- Caracterizar el proceso de generalización que logran desarrollar los estudiantes después de su participación en diferentes actividades asociadas con el análisis de secuencias con diferentes tipos de similitudes.

3. Marco Referencial

Para analizar el proceso de generalización que desarrollan estudiantes de tercer grado, se toman como referencia los elementos teóricos expuestos por Rivera (2010) relacionados con el estudio de la generalización de patrones. Este marco caracteriza los patrones en dos grandes categorías: Generalización Exacta (GE) y Generalización Aproximada (GA). Esto lo hace a través de tres dimensiones: conocimiento del número, sensibilidad a la forma y las propiedades figurativas. Estas son, las que los estudiantes de primaria usan a menudo y permiten capturar sus estructuras emergentes y generalizaciones incipientes, que incluyen formas: gestual, pictóricas, verbales y numéricas (Rivera, 2010).

Se parte de la diferencia que existe entre la GE y GA; la primera hace referencia a aquellas generalidades consistentes que realizan los estudiantes con estructura emergente. Mientras las segundas, las aproximadas son generalidades confusas también con estructura emergente.

Un ejemplo de una generalización aproximada, es cuando aquella hipótesis planteada por el estudiante posee algún tipo de coherencia y permite determinar al menos una condición de la secuencia, mientras que la exacta, permite determinar con exactitud los elementos que tendrá algún término en específico. Cabe destacar que habrá situaciones donde el estudiante no presente ni siquiera una aproximada, esto sería cuando aquella solución carece de todo sentido en el contexto de la secuencia.

En los estudiantes de primaria, el proceso de generalización de patrones ordenados conlleva al menos a tres implicaciones de tipo cognitivo:

- (Implícitamente) Escoger entre una generalización aproximada y una exacta es un proceso que depende de la tarea asignada. Puede basarse en la tarea, la cual es presentada de manera potencial dadas las etapas de la secuencia.

- Las opciones entre una GE o una GA son decisiones innatas en cada sistema de procesamiento individual del estudiante. Mientras un sistema estable refleja conexiones fuertes alrededor de las generalizaciones exactas, un portador de factores relevantes como la novedad de una tarea, poco conocimiento previo y la disposición del estudiante durante su procesamiento puede producir generalizaciones aproximadas.

- Cabe destacar que existen diferentes niveles de generalización aproximada, que pueden ser diferenciadas de acuerdo con las competencias conceptuales en las tres categorías: numérica, de forma o propiedades figurativas. (Rivera, 2010)

El siguiente esquema sintetiza la información aquí presentada, donde se muestran las relacionan que fundamentan este marco referencial que servirá para desarrollar esta investigación:

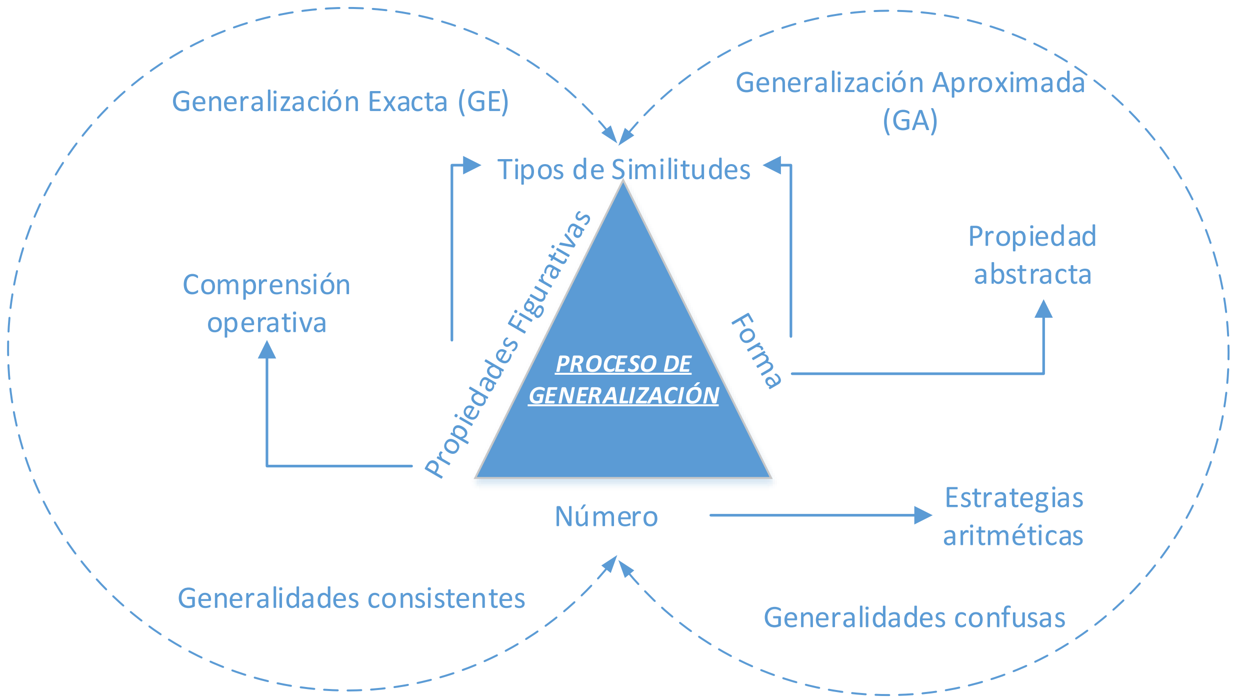


Figura 8. Relaciones de categorías del proceso de generalización.

3.1 Construcción de patrones numéricos

Partamos de la idea que para los estudiantes existen diversas maneras de concebir la palabra número a este nivel de escolaridad, cuando se nombra a los estudiantes algún número, la idea de algunos de ellos es escribir en letra (cinco), otros realizan el símbolo (5) y otros lo relacionan con algún tipo de operación matemática. Dicha falencia se va corrigiendo a medida que su desarrollo con el mundo exterior va siendo mayor, debido a situaciones de contexto que irán viviendo.

El desarrollo de este tipo de tareas, permite a los estudiantes utilizar diferentes estrategias aritméticas, que tiene un papel significativo en el proceso de generalización de patrones; sobre todo en los niveles de primaria porque es ahí donde los números son considerados como unidades básicas en toda la actividad matemática. Por ejemplo, Rivera (2010) muestra que el uso predominante de la estrategia de contar uno por uno, evitó que la mayoría de los estudiantes estableciera otras relaciones estructurales significativas.

Se presenta ahora un ejemplo de una secuencia de tipo numérico:

Número de bolitas de helado. Se considera el caso donde un cono de helado tiene dos bolitas de helados, a partir de esta situación de contexto, se plantean preguntas tales como:

i. ¿Cuántas bolitas de helado habrán en 4 conos? ¿Cómo lo sabes? ¿Puedes decir cómo lo pensaste?

ii. ¿Cuántas bolitas de helado habrán en 5 conos? ¿Puedes decir cómo lo supiste?

iii. ¿Cuántas bolitas de helado habrán en 10 conos? ¿Puedes decir o escribir en la hoja como lo resolviste?

iv. ¿Cuántos conos hay si tenemos ahora un total de 21 bolitas de helado? ¿Puedes decir la estrategia utilizada para resolverlo?

Esta tarea incluía inicialmente términos cercanos, después 1 o 2 términos lejanos y un problema de inversión (determinar el número del término conociendo su forma o resultado).

El análisis realizado por Rivera (2010) muestra que los estudiantes necesitan entrenamiento en el conteo mediante agrupación. Por ejemplo, cuando se entrevistó a una estudiante y se le pidió que explicara la estrategia que utilizó para construir un término cercano, y luego cuando le pidió a la estudiante que hiciera la tarea términos lejanos, cambió su estrategia aritmética y empleó estrategias combinadas que incluían otros tipos de conteo, uno por uno y conteo por agrupación. Esto le permitió a la estudiante obtener los resultados con valores correctos sin necesidad de tener en cuenta las posibles relaciones matemáticas que la estudiante podría haber deducido de sus estrategias. Los resultados analizados por Rivera (2010) muestran que los estudiantes no emplearon la misma estrategia aritmética de manera consistente, esto generó dificultades a la hora de desarrollar preguntas relacionadas con términos lejanos.

Otra idea que pudo observar Rivera (2010) con este tipo de tareas, es la dependencia de conocer el término anterior, es decir, ellos podrán determinar la operación correcta, por ejemplo, sumar dos (+2), pero les surge intrigante cuando se le pregunta por un término lejano, porque ¿a qué valor le van a sumar esa cantidad?, tendrían que tener la cantidad que va tener el término anterior a ese término lejano. Poniendo una situación precisa, y tomando el ejemplo anteriormente expuesto, el estudiante logró identificar que cada cono va teniendo 2 bolitas de helado más que el anterior, si se le da le suministra la información que un helado tiene 2 bolitas, entonces él puede determinar que 2 conos tendrán 2+2 bolitas de helados, con esta información podría determinar que 3 conos tendrán 2+ (2+2) bolitas de helados. La dificultad seria, si se le plantea cuantas bolitas van a tener 10 conos, pues él sabrá que tendrá que sumar 2 a la cantidad que hay en 9 conos, pero esta información es desconocida para él, entonces esto generaría en él algún tipo de dificultad para lograr completar el interrogante planteado.

Rivera (2010) propone que mientras los estudiantes mostraron claramente un procesamiento de distribución paralela en cada tarea de generalización de patrones, la presencia de diferentes opciones (y conexiones) y la ausencia de estrategias meta cognitivas como agilidad perceptual y la necesidad de permanecer consistente de una sub-tarea a otra en el proceso aritmético, no les permitió a los estudiantes establecer generalizaciones iniciales significativas que podrían haber servido para completar exitosamente las tareas de generalización lejana. La *agilidad perceptual* en la generalización de patrones incluye "considerar muchos patrones y una necesidad de dejar aquellos que muestran que no son útiles (por ejemplo, aquellos que no llevan a una fórmula directa)" (Lee, 1996, p. 95 tomado de Rivera, 2010).

Como el tipo de tareas presentada en el ejemplo, son claros ejemplos generalizaciones basadas en multiplicación que expresaran relaciones proporcionales, al uso de expresiones que reflejan la estructura de una función lineal general $f(x) = 2x$ donde se expresará la cantidad de bolitas de helados en función de la cantidad de conos. Dichas estructuras a este nivel no tendrán tanto formalismo como la expresada anteriormente, pero de fondo cada expresión que los estudiantes pueden plantear con esta naturaleza podría ser considerada como una expresión ligada a la función, en este caso la lineal. Posibles expresiones que pudieran generar algún estudiante, sería tipo: Multiplicar por dos la cantidad de conos, dos por la cantidad de conos.

3.2 Sensibilidad a la forma

Rivera (2010) con base en los planteamientos de Pizlo, Sawada, Li Kropatsch y Steinman (2010) propone que la forma no es una propiedad inherente, sino abstracta de un objeto matemático o físico. Por tanto, para reconocerla dentro de una secuencia cada estudiante debe realizar un proceso deductivo y uno inductivo donde sus experiencias personales toman un papel fundamental. El análisis de la forma por tanto, está determinado por la habilidad perceptual intrínseca a cada individuo.

La generalización de patrones figúrales, son básicamente tareas que incluyen una forma; "esos patrones se enfrentan al concepto de similitud y, especialmente, al rol fijo de la similitud en una organización de formas emergentes relativas a un patrón" (Gal & Linchrevski, 2010, tomado de Rivera, 2010). Asimismo, dependiendo de la naturaleza de la secuencia o patrón expresados a través de los términos, la similitud se entiende como aquellos detalles relevantes que deben ser correspondientes o proporcionales y deben seguir alguna regla, lo que se mantiene constate en una situación (Rivera, 2010).

Cabe destacar que algunas secuencias de objetos figurativos que tienen el mismo tamaño y forma se denominan secuencias congruentes. El patrón de unidades cuadradas, es un ejemplo de este tipo de secuencias; allí el número del término determina el número de unidades cuadradas congruentes que generan cada término de la secuencia. En este caso, la figura uniforme expresa que otros atributos del patrón son más relevantes para su generalización, que la misma forma que toma la figura.

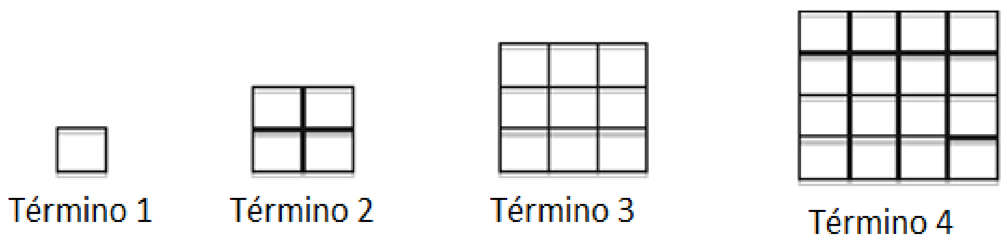


Figura 9. Patrón de cuadrados crecientes (Rivera 2010, p. 129)

Rivera (2010) para analizar el trabajo realizado por los estudiantes se interesa más por las generalizaciones lejanas y decide centrar su análisis en categorizar diferentes tipos de similitudes que oscilan entre: no tener similitud, una similitud parcial y una similitud total. Por tanto propone tres categorías dentro de las secuencias de Formas: (i) un patrón figurativo que es completamente similar; con esto se refiere a que hay una figura consistente e interpretada (que se mantiene constante) que se conserva y se comparte a través de los términos y extensiones del patrón; (ii) un patrón parcialmente similar, que implica al menos una inconsistencia notable en algunas de las figuras construidas, esto a pesar de la percepción de una característica compartida o común a través de los términos de la secuencia. Las inconsistencias se deben a factores que distorsionan las relaciones de similitud percibidas (por ejemplo, Poca atención sobre ángulos relevantes o etapas dibujadas de la misma figura con características desproporcionadas); (iii) un patrón figurativo con ninguna similitud implica que no hay una figura constante que organice las etapas del patrón de alguna manera.

Esta categorización es fundamental para analizar tanto tareas de identificación de forma como de modo figurativo. Para el apartado en el que nos encontramos, Rivera (2010) presenta la siguiente tarea:

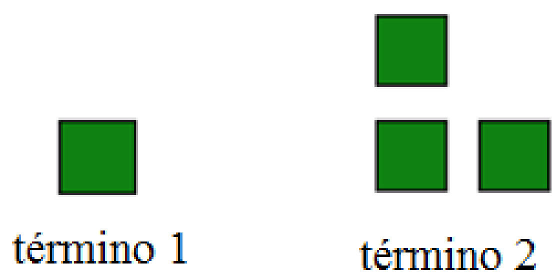


Figura 10. Patrón de cuadrados crecientes (Rivera 2010, p. 129)

Vamos a empezar con un cuadrado en el paso 1. Imagina que el paso 2 luce como se ve en la figura.

A. ¿Cómo crees que sea el paso 3? Muéstrame con los bloques.

B. Muéstrame los pasos 4 y 5. ¿Cuántos cuadrados vez?

C. Imagina que no tenemos más bloques y supón que nos saltamos algunos pasos. Si alguien te pregunta, ¿cómo luciría el paso 10, cómo responderías? ¿Puedes describirlo o dibujarlo? (Rivera, 2010, p.129)

Rivera muestra que dos estudiantes lograron obtener un tipo de similitud parcial. Uno de ellos concluyó "la figura igual", es decir en forma de L, pero era inconsistente en términos del número de cuadrados que debía tener tanto el lado horizontal como el vertical. Rivera muestra que otro estudiante también dedujo la misma figura en forma de L, pero hacía referencia a la siguiente secuencia: {1, 2 + 1, 3 + 2, 4 + 1, 5 + 2, 6 + 1, 7 + 2, 8 + 1}, dicho estudiante fue incapaz de encontrar el término 10 de la secuencia.

La siguiente tabla muestra un consolidado del trabajo realizado por los estudiantes, dividendo los resultados en las categorías anteriormente expuestas. Cabe destacar que la población era la misma, a la que se aplicó la tarea de secuencia numérica.

Tabla 2.

Resultados de patrón de generalización tarea de forma (Rivera 2010, p. 130)

	No similitud (NS)	Similitud parcial (SP)	Similitud Total (ST)
Término 3	18	2	1
Término 4	18	2	1
Término 5	16	2	1
Término 10	2	0	0

En resumen, la Tabla 2 indica que alrededor del 80% de los estudiantes no construyeron ninguna relación de similitud constante durante la construcción de las etapas de la secuencia siguiendo el patrón. Además, ninguno de ellos estableció algún tipo de generalización incipiente con éxito. Rivera señala que algunas de las soluciones más comunes muestran que varios de los estudiantes simplemente añadieron de uno a tres cuadrados sin más explicación lo que se convirtió en regla para su patrón emergente, además se pudo observar que a medida que el término es más lejano, los estudiantes ni siquiera hacen el intento de realizar algún dibujo referente a dicho término.

3.3 Propiedades figurativas

En este apartado, se centra la vista en las propiedades figurativas. Éstas toman fundamento en la comprensión operativa. Una comprensión operativa de un objeto involucra generar y construir interpretativamente propiedades estables, por ejemplo: partes, características, componentes, configuraciones, entre otras que caracterizan y organizan una estructura procedente relativa al objeto percibido (Duval 1999, presentado en Rivera, 2010). Investigaciones realizadas con infantes y niños indican una habilidad natural (y aproximada) para reconocer, categorizar y organizar objetos (Bhatt y Quinn, 2011; Goldstone, Son, y Byrge, 2011; Schyns, Goldstone, y Thibaut, 1998 tomado de Rivera 2010). Sin embargo, en tareas de patrones el problema principal es que los estudiantes deben tener una alta habilidad de comprensión, al punto en que los estudiantes sean capaces de diferenciar propiedades que produzcan estructuras de un tipo particular, es decir produzcan por ejemplo, generalizaciones algebraicamente útiles (Rivera, 2010).

Los niños de primaria que no tienen experiencias formales con patrones tienden a establecer propiedades basadas en las similitudes obtenidas a través de la apariencia, características externas.

Rivera (2010) propone que establecer propiedades estables de figuras (comunes y repetitivas) a través de las etapas dadas en un patrón es también un fenómeno de ordenamiento constructivo. Con un entrenamiento formal, los estudiantes pueden empezar a percibir aquellas propiedades en términos de funciones o reglas que aparecen como resultado de formas de razonamiento abductivo, inductivo y deductivo.

El siguiente ejemplo, propuesto por Rivera (2010) como una secuencia que responde a un patrón generado por propiedades figurativas.

Figura 11. Tarea de patrón de casas (Rivera 2010, p. 133)

A. ¿Puedes mostrarme con los bloques qué sigue después? ¿Cómo luciría para ti la etapa 4? Y qué me dices de la etapa 5?

B. Vamos a saltarnos algunas etapas. ¿Puedes dibujar o describir en palabras cómo luciría la etapa 10? ¿Cómo lo sabes? (Rivera, 2010, p.133)

Tabla 3.

Respuestas de la tarea de patrón de casas n=20 (Rivera, 2010, p.138)

	No similitud (NS)	**Similitud parcial (SP)**	**Similitud Total (ST)**
Término 3	1	6	18
Término 4	1	6	18
Término 5	1	6	18

Categorizando los resultados generales de los estudiantes, en relación a la tarea de propiedades figúrales, se puede observar que esta tarea arrojo figuras más similares a otras tareas planteadas, esto debido a que los estudiantes ya habían realizado otras tareas de secuencias. Pero cabe resaltar que a excepción de un estudiante que todas las tareas planteadas produjeron figuras con similitud total, el desempeño de los demás estudiantes durante todo el proceso muestra un buen comportamiento con tareas de generalización de patrones.

Otra idea que nos presenta Rivera (2010) es la relación que existe entre los tipos de similitud y las generalizaciones que pueden plantear los estudiantes, siendo una causa importante para poder plantear una generalización exacta es crear un término con similitud total, es decir, si el estudiante logra crear los términos solicitados con similitud total, dará indicios que el estudiante logró entender el comportamiento de la secuencia y esto le permitirá poder plantear con más facilidad una generalización exacta de dicha secuencia. Pero también, que no es causa determinista, es decir no todo el que realice los términos con similitud total lograra plantear una generalización exacta. Además, se puede presentar la situación donde el estudiante realice los términos con similitud parcial o incluso sin similitud, y podrían determinar una generalización exacta de la secuencia planteada.

4. Método

Esta investigación es de tipo cualitativo, por lo que busca describir con el mayor detalle el proceso de generalización que pueden evidenciar un grupo de estudiantes después de un proceso de intervención en al aula. Dentro del desarrollo de la investigación se mostrarán situaciones como una forma de sustentar con mayor detalle los análisis logrados durante las Fases de desarrollo de la investigación.

4.1 Contexto de la investigación

Esta investigación se desarrolla con un grupo de 20 estudiantes de tercer grado, con edades comprendidas entre siete y nueve años, del colegio campestre Goyavier, ubicado en el municipio de Floridablanca en Santander. Esta comunidad educativa es de carácter privado con la mayoría de su población en niveles socioeconómicos medio-alto (4, 5, 6). Esta institución cuenta con formación en preescolar, básica primaria, secundaria y media.

Cabe resaltar que el énfasis de la institución son las bellas artes, pues desde la básica primaria reciben orientación en diversos campos artísticos (Baile, teatro, música, pintura) con el fin de aportar a la sociedad aparte de ciudadanos con un gran intelecto académico, ciudadanos con gran respeto y admiración por las expresiones artísticas.

4.2 Fases de la investigación

El Método de la investigación se basa en el desarrollo de cuatro pasos. Primero se diseña las Tareas que se aplican en el aula; luego sigue la implementación de dichas Tareas en el aula; seguido de la recolección y selección de datos y, por último, del análisis e interpretación de dichos datos. A continuación, se explica cada una de ellas.

4.2.1 Diseño de actividades para el aula de clase. En este paso se incluye el diseño de un diagnóstico inicial, una serie de tareas para tres intervenciones en el aula y un diagnóstico final.

El diagnóstico inicial consto de 4 tareas dos de tipo numérica, una de forma y la ultima de propiedades figurativas. Además, cada intervención constaba también de 4 tareas, donde siempre cada una de ellas constaba con los tres tipos de secuencia que trabajamos. Y el diagnóstico final, tuvo 3 tareas, uno por cada tipo de secuencia, 3 debido a que el nivel de exigencia era mayor. Algunas de las tareas ahí presentadas fueron adaptadas de las planteadas por Rivera (2010), mientras que otras si fueron creación original del investigador.

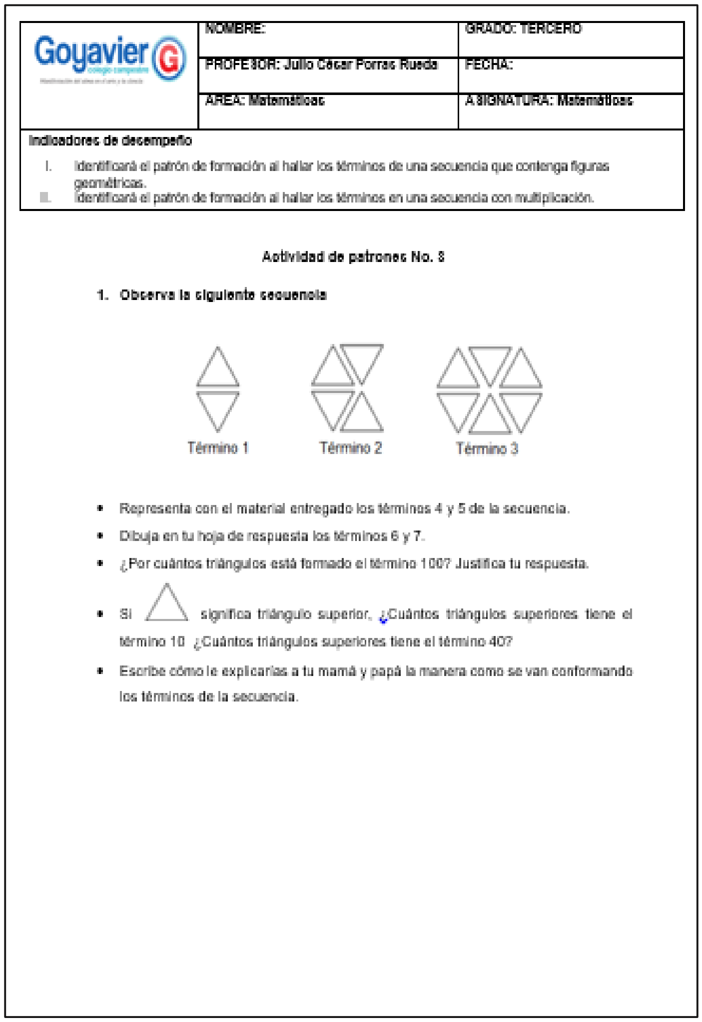
En este proceso de diseño de estructuras de las tareas se siguen las recomendaciones que plantean Radford y Sabena (2015), entre las que se destacan: (i) tener en cuenta los conocimientos previos que tienen los estudiantes; (ii) la elaboración muy detallada de las preguntas de cada tarea; y, (iii) organizar las tareas de tal forma que las primeras preguntas sean asequibles para los estudiantes, con la idea de irlos involucrando en la actividad y poco a poco ir aumento su dificultad, además generar espacios de reflexión e interacción con todos los miembros del salón.

4.2.2 Implementación de actividades en el aula. Los diagnósticos fueron contestados por los estudiantes de manera individual. Para el inicial cada estudiante contaba con su hoja de trabajo, donde ahí mismo debía plantear las soluciones y realizar cualquier operación que necesitara, para dicho diagnostico los estudiantes tuvieron 80 minutos para realizarlo y se realizó en el salón de clases. Cabe destacar que cuando se realizó este diagnóstico los estudiantes no tenían conocimiento del mismo, y además el profesor investigador no resolvió ningún tipo de pregunta que pudieran realizar los estudiantes.

Respecto al diagnóstico final, se realizó una semana después de ver realizado la tercera intervención, al igual que el inicial, fue de manera individual, cada estudiante tenía su hoja de trabajo y contaron con 80 minutos y también se aplicó en el salón de clases.

Las intervenciones fueron implementadas a través del uso de material concreto y analizadas por los estudiantes de manera grupal. Cada sesión constaba de 80 minutos, donde se debían realizar las cuatro tareas planteadas. La metodología acá desarrollada fue que cada 15 minutos se le iba entregando una hoja nueva a cada grupo y recogiendo la anterior, es decir al inicio de cada intervención se le entregó a cada grupo una bolsa con el material concreto, que constaba de círculos, cuadrados, triángulos y palillos, además de una hoja de trabajo con la primera tarea, 15 minutos después se recogía esa hoja y se entregaba la tarea dos, de igual forma con las 4 tareas. Al final de cada intervención quedaban algunos minutos para debatir, donde estudiantes pasaban y explicaban la estrategia utilizada para resolver alguna secuencia en específico.

A continuación, se presenta ahora un modelo de una tarea presentada en la fase de intervención, además observando apéndices al final del documento, donde se presenta el modelo de todas las pruebas aplicadas a los estudiantes.



Goyavier	NOMBRE:	GRADO: TERCERO
	PROFESOR: Julio César Porras Rueda	FECHA:
	AREA: Matemáticas	ASIGNATURA: Matemáticas

Indicadores de desempeño

I. Identificará el patrón de formación al hallar los términos de una secuencia que contenga figuras geométricas.
II. Identificará el patrón de formación al hallar los términos en una secuencia con multiplicación.

Actividad de patrones No. 3

1. Observa la siguiente secuencia

- Representa con el material entregado los términos 4 y 5 de la secuencia.
- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7.
- ¿Por cuántos triángulos está formado el término 100? Justifica tu respuesta.
- Si △ significa triángulo superior, ¿Cuántos triángulos superiores tiene el término 10 ¿Cuántos triángulos superiores tiene el término 40?
- Escribe cómo le explicarías a tu mamá y papá la manera como se van conformando los términos de la secuencia.

Figura 12. Formato de tareas para los estudiantes en fase de intervención

4.2.3 Recolección de datos. En los diagnósticos los datos recolectados son las hojas de trabajo. En cambio, en las intervenciones aparte de las hojas de trabajo también se recolectó información a través de grabaciones y videos del trabajo realizado por los estudiantes. Se iba pasando por cada grupo de trabajo, observando e indagando que están haciendo, por qué lo estaban haciendo, con la intención de comprender mejor las soluciones que planteaban en la hoja de trabajo, y así poder hacer un mejor análisis e interpretación de esos datos.

4.2.4 Interpretación de datos. Se analiza los diagnósticos de manera comparativa del inicial respecto al final, para ver posibles avances. Además, en las intervenciones las soluciones que merezcan ser destacadas a criterio de los investigadores.

En las tareas de forma y propiedades figurativas, se categorizaran en los 3 tipos de similitudes explicados en el marco referencial, esto será de manera general con todas las hojas de trabajo en los diagnósticos con todos los estudiantes y en las intervenciones con todos los grupos, a partir de ahí se mostrara un ejemplo de cada uno de los tipos de similitud y se analizara la forma en que cada grupo o estudiante realizo dicha situación. Mientras que, en las secuencias de tipo numérico, se analizarán las diversas estrategias aritméticas que utilizan los estudiantes para dar solución a cada una de las secuencias planteadas.

Además, se interpretará y analizará las generalizaciones que planten los estudiantes, diferenciándolas entre exactas y aproximadas, y a partir de la recolección de datos obtenidas, centrar nuestra atención en el porqué de plantear dicha generalización tomando como referencia los elementos del marco referencial.

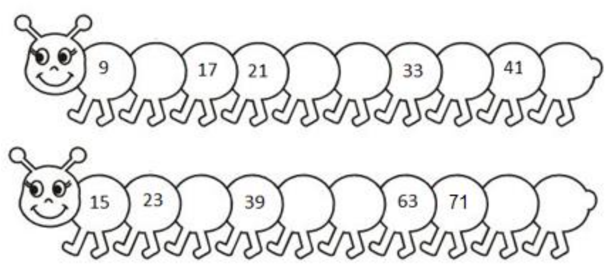
5. Análisis A Priori

A continuación, se muestran las posibles maneras en que los estudiantes pueden resolver cada una de estas tareas, presentado dos tipos de soluciones: solución normativa y teórica. La primera haciendo referencia a la solución matemática de la secuencia, mientras la segunda es planteada basada en las posibles estrategias de solución que se analizan desde la perspectiva del marco referencial.

5.1 Diagnóstico inicial

Se presentan las cuatro tareas aplicadas en la prueba inicial denominada diagnóstico inicial, dicha prueba fue de manera individual, sin previo aviso y el profesor investigador no resolvió ninguna clase de pregunta mientras se aplicaba.

1. Observa cuidadosamente los valores que aparecen ubicados en cada parte del ciempiés y completa los que hacen falta. Escribe qué tienes en cuenta para colocar los números faltantes.



Solución normativa: En esta Tarea la intención inicial es que los estudiantes identifiquen el patrón. Pueden notar que la forma del ciempiés, o la figura no es relevante. Es decir, lo que realmente importa es el número que está dentro de cada círculo, que en este caso representa cada parte del cuerpo del ciempiés.

En el caso del primer animal, se observa que hay un espacio vacío entre el 9 y el 17, eso puede indicarle al estudiante que el número faltante puede ser 10, 11, 12, 13, 14, 15 o 16. Es ahí donde el tercer y cuarto número juega un papel fundamental en la actividad, se espera que los estudiantes encuentren la relación que existe entre el 17 y 21. Es decir, que centren su atención en cómo se da paso del 17 al 21. Pueden concluir en este caso que “al sumar 4 a 17 da 21” y construir los términos faltantes tal como aparece en la figura. Este proceso lo pueden desarrollar los estudiantes de manera similar en el segundo ciempiés.

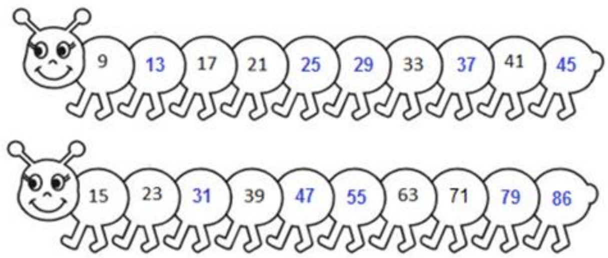


Figura 13. Solución a la tarea uno diagnóstico inicial

Solución teórica: Una forma de abordar la tarea que puede surgir del trabajo de los estudiantes es una "construcción particionada". Es decir, definir diferentes formas de encontrar los números faltantes en la secuencia por partes. Esto puede definirse como una Generalización Aproximada, pues los estudiantes hacen generalizaciones confusas que surgen debido a que trabajan la secuencia por partes y no logran verla como un todo. Un ejemplo de este tipo es el que aparece a continuación (los números de color representa una posible solución):

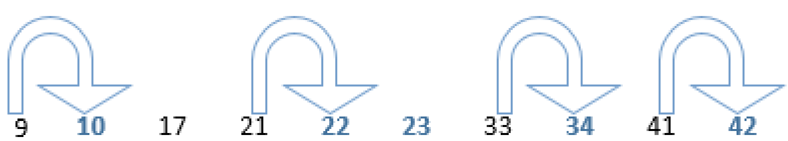
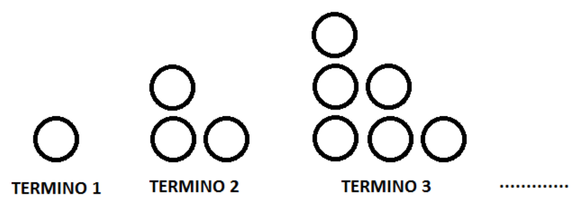


Figura 14. Posible solución a la tarea 1, diagnóstico inicial

Otra forma de solución que pueden evidenciar los estudiantes es determinar que siempre se debe mantener constante el patrón de formación; en este caso si la secuencia inicia sumando 1, siempre se sumará 1; si se multiplica por dos, siempre se multiplicará por 2. Esto es, que exista cierta consistencia en cada uno de los elementos de la secuencia. Encontrar esa relación de consistencia según Rivera (2010) le permitirá al estudiante utilizar diversas estrategias aritméticas, diversos cálculos para poder encontrar el patrón de formación. En el caso de la secuencia del ciempiés la consistencia puede darse gracias a la fijación del trabajo de los estudiantes en las partes tres y cuatro del primer ciempiés. Después de encontrar el patrón de formación, en este caso un patrón de crecimiento que se genera "sumando 4" los estudiantes podrán encontrar los valores faltantes. Por ejemplo, sumando 4 al primero, o restándolo al tercero. Dado que previamente los estudiantes han determinado que el número que va ahí es mayor que 9 y menor que 17 podrán determinar que el número que va en la segunda parte del cuerpo es 13. Se espera que los estudiantes utilicen la misma estrategia para encontrar los demás números que van en el resto del cuerpo del ciempiés y den solución al problema inicialmente planteado.

2. A continuación aparecen los primeros tres términos de una secuencia.



Siguiendo la secuencia dibuja el término 4 y 5.

a. ¿Cuántos círculos forman el término 4? Y ¿el término 5?

b. ¿Por cuántos círculos está formado el término 10?

c. Escribe cómo le explicarías a tu mamá el número de círculos que necesitas para construir el término 50.

Solución normativa:

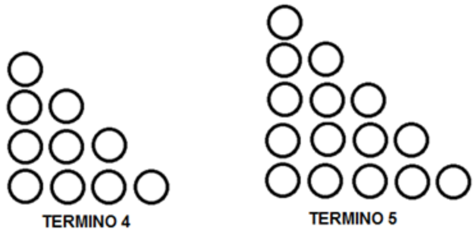


Figura 15. Solución a la tarea dos, diagnóstico inicial

Una forma de generar el patrón de la secuencia presentada en la Tarea 2 es incluir una nueva columna vertical a cada término e ir agregando un círculo a cada uno de esas columnas. Es decir para pasar del término 3 al 4, es necesario crear una columna más. En este caso el término 4 tendrá las tres columnas del término tres más una nueva que se debe agregar. Con base en ello se debe dibujar un círculo adicional en cada una de esas 4 columnas. Además, la cantidad total de círculos estará dada por la fórmula:

$$f(t) = \frac{t(t+1)}{2}$$

Donde t indica el número del término.

Solución teórica: Al enfrentarse a esta tarea, el estudiante notará una diferencia clara en comparación de la tarea anterior. Dado que en este caso los términos de la secuencia son formas geométricas ordenadas, es decir no estamos hablando de una generalización numérica sino de una que depende de la forma (Rivera, 2010). El estudiante puede notar que cada término va teniendo una forma específica, es decir, en este caso puede determinar qué partes de la figura que aparece en cada término se mantienen constantes y cuáles no.

La construcción del término 4 puede consistir en agregar un círculo a cada columna y crear una nueva; el término 5 se construye de la misma manera tomando como referencia el 4; esto es tomar dependencia del término inmediatamente anterior.

En otros casos los estudiantes podrán establecer que el término 4 es solo agregar un círculo arriba al inicio y otro abajo. Pues pueden pensar que el número del término indica la cantidad de círculos que tiene la base y altura, sin percatarse de la importancia que tienen los círculos del "interior".

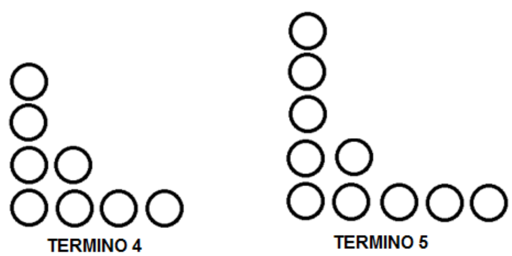


Figura 16. Posible solución a la tarea dos, diagnóstico inicial

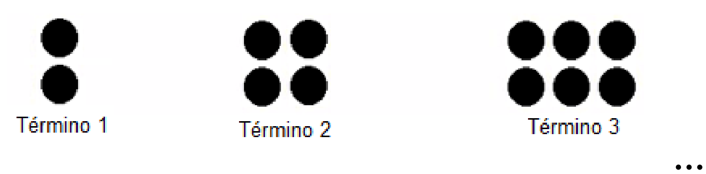
Esto puede ser construido a partir de las relaciones que los estudiantes logren identificar de los términos anteriores. Estas características del trabajo de los estudiantes están sujetas a la habilidad perceptual innata de cada estudiante (Rivera, 2010). Gracias a dicha habilidad perceptuales los estudiantes pueden acudir a diferentes estructuras emergentes pictóricas en este caso para determinar una generalización incipiente que da paso a la construcción de cualquier término de la secuencia.

Para la siguiente pregunta, encontrar cuantos círculos tendrá el término 10, se espera que la mayoría de los estudiantes realicen los términos 6, 7, 8, 9 hasta encontrar el término 10;

dependiendo de la estrategia que utilicen para crear los términos 4 y 5, podrán o no obtener el término 10 según el patrón establecido en la secuencia. Aunque algún estudiante por evitar realizar todos los términos que hacen falta entre el 5 y el 10, podrán intentar inventarse alguna forma de conteo para encontrar la cantidad de círculos sin necesidad de dibujar los demás términos.

La última pregunta, la más compleja puede generar múltiples respuestas, algunos creerán que deberán hacer todos los términos hasta poder llegar al 50 y contar cuántos círculos tiene. Otros pensarán que debe existir alguna forma de encontrar esa cantidad sin necesidad de realizar todos los términos que existen en el medio. Esto dependerá de la experiencia que tengan los estudiantes a la hora de enfrentarse a este tipo de tareas; es decir la experiencia puede jugar un papel fundamental, pero como es una prueba diagnóstica, donde los estudiantes han tenido poca relación con el estudio de patrones, es posible que ningún estudiante logre plantear una generalización exacta que le permita en este caso determinar el número de círculos del término 50.

3. Observa la siguiente secuencia:



a. Siguiendo la secuencia dibuja el término 4 y 5.

b. ¿Cuántos círculos forman el término 4? Y ¿el término 5?

c. ¿Por cuántos círculos está formado el término 10?

d. Escribe cómo le explicarías a tu mamá el número de círculos que necesitas para construir el término 50.

Solución normativa

Figura 17. Solución a la tarea dos, diagnóstico inicial

Cada término consiste en crear dos filas de puntos negros, donde el número del término indicara la cantidad de puntos negros que irá en cada fila, es decir que, para calcular la cantidad total de puntos en determinado término, se obtendría de la siguiente fórmula:

$$f(t) = 2t$$

Donde t determina el número del término.

Solución teórica: Esta secuencia incluye la ayuda tabular, que asigna una posición a cada figura que se va generando. A comparación de la tarea anterior, los estudiantes deberán notar cierta consistencia entre cada termino, es decir permanecen más cosas constantes a diferencia de la tarea pasada. Además, los estudiantes pueden notar que es repetitivo, es decir que tanto la primera como la segunda fila son iguales. A partir de los términos encontrados los estudiantes podrán inferir que el número de la figura indica la cantidad de puntos negros que hay horizontalmente en cada fila.

Basados en esto se espera que los estudiantes construyan fácilmente los términos 4 y 5, además que respondan que tienen 8 y 10 puntos negros respectivamente. Es posible que para determinar cuántos puntos tiene la figura 10, algunos estudiantes construyan las figuras 6, 7, 8, y 9 y concluyan que la figura está formada por 20 círculos. Otros estudiantes otros podrán utilizar diversas estrategias,

En general se espera que los estudiantes logren establecer que hay 20 puntos sin necesidad de hacer todas las figuras. Que noten que existen dos filas iguales, y como es la figura 10, habrá 10 puntos negros, pero como ambas figuras son iguales, entonces habrá 10 puntos de la primera fila, y 10 puntos en la segunda fila. Es decir que, para calcular el total, deberán sumar 10+10 y llegar a la conclusión que en la figura 10 hay 20 puntos.

En esta tarea se espera que los estudiantes lleguen a determinar la similitud de forma exacta de tal manera que establezcan cuántos puntos negros tiene una figura lejana. Es decir, logren hacer establecer una Generalización Exacta, una generalización consiste que le permita determinar la cantidad de puntos negros tiene cualquier término de la secuencia. Además, se espera que los estudiantes logren expresar (de manera oral o escrita) cómo llegar al resultado, que puedan explicar la estrategia utilizada para llegar a la solución de esta tarea.

4. Completa la siguiente tabla

Tabla 4.

Tarea número cuatro, diagnóstico inicial

Número de conos	**1**	**2**	**3**		**5**			**8**	**9**			**….**	**K**
Bolitas de helado	2	4		8		12	14	16	18	20	22	….	

a. Si fueran a comprar 20 conos, ¿Cuántas bolitas de helado se necesitarían?

b. Si cada integrante de una familia con 5 integrantes se quiere comer dos conos cada uno ¿Cuántas bolitas de helado serán necesarias?

Solución normativa: Como cada cono tiene 2 bolitas de helado, para calcular la cantidad de bolitas que va tener cierta de cantidad de conos, basta con multiplicar la cantidad de cono por dos.

Tabla 5.

Solución a la tarea 4, prueba diagnóstico

Número de conos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**….**	**K**
Bolitas de helado	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	….	2k

Donde k representa la cantidad de helados.

Solución teórica: Esta tarea puede que sea la más fácil para el estudiante, pues es muy relacionada a situaciones que pueden ser familiares. Completando la tabla no se generan mayores problemas para ellos, pues notaran que va aumentando de dos en dos, pero al final de la tabla colocamos una "K" con la intención de generar en los estudiantes un cuestionamiento, tal vez para la mayoría sea raro ver una letra ahí, y pensaran que es un error del profesor, o de impresión, pocos notaran o sabrán que N representara al igual que en las casillas anteriores una cantidad de conos, lo único que deberán hacer es multiplicarla por dos, se espera que algunos estudiantes logren realizar este razonamiento y puedan color en esa casilla expresiones como N x 2, 2N, N2, o 2 x N.

En la otra pregunta, que serán 20 conos, se espera que los estudiantes sepan que se necesitaran 40 bolitas de helado, pues el problema se reduce a una simple multiplicación, 20 x 2 = 40 bolitas. La última pregunta también tiene un contenido especial, pues ya no se está preguntando directamente cuantas bolitas se necesitan para cierta cantidad de helados, sino que se presenta una situación, donde deberán analizar qué operación (es) deben realizar, pues cada uno de las 5 personas se comerán 2 conos. Se espera que gran mayoría pueda lograr esta tarea, pues si 5 personas se comen 2 conos cada uno, significa que en total se deberán preparar 10 conos, y ya sabiendo la cantidad de conos y que cada uno tiene 2 bolitas, se podrá calcular la cantidad total de bolitas para todos los conos.

5.2 Intervención 1

Para iniciar el proceso de intervención, en la primera de ellas se plantean cuatro tareas; las cuales se presentan a continuación, de igual forma se construye una solución normativa y una teórica.

1. Un atleta recorre dos vueltas a la cancha pequeña en tres minutos. Teniendo en cuenta esta información completa la siguiente tabla y al final responde.

Tabla 6.

Tarea número uno, intervención 1

Número de vueltas	Tiempo en minutos
2	3
4	
6	
8	
10	

Continuación tabla 6.

Número de vueltas	Tiempo en minutos
20	
30	
50	

- Explica de qué manera determinas los números que faltan en la tabla.

- Si el atleta recorriera vueltas por 120 minutos seguidos. ¿Cuántas vueltas crees que el atleta recorrio? Justifica tu respuesta

Solución normativa: La solución de este problema, se reduce a encontrar la constante de variación es decir, determinar el número que permite encontrar los valores faltantes en la tabla. En esta caso el número es 3, pues el problema dice que el atleta recorre dos vueltas en 3 minutos. Como se observa el número de vueltas que aparece en la tabla se incrementa de dos en dos, entonces el problema se reduce a multiplicar el numero de vueltas dadas por 3 y dividir entre 2. Por tanto los datos de la tabla se definen como aparencen en la siguiente tabla:

Tabla 7.

Solución a la tarea 1, intervención 1

Número de vueltas	Tiempo en minutos
2	3
4	6
6	9
8	12

Continuacion tabla 7

Número de vueltas	Tiempo en minutos
10	15
20	30
30	45
50	75

Solución teorica: Para completar la tabla los estudiantes pueden utilizar diversas formas para llegar a la solución. Una de ellas es ver la tabla por partes, es decir, concentrarse en uno por uno de los items sin tomar de referencia los anteriores, solo tomando de base el valor inicial. Esto se define como una generalización aproximada, dado que las generalizaciones que realizan son ambiguas y no dan solución total al problema sino una solución particular.

En este caso, los estudiantes pueden calcular el tiempo empleado de cuatro vueltas, partiendo del hecho de que, si en dos vueltas se gastó tres minutos, podrían sumar dos vueltas a las iniciales y como se están sumando dos vueltas, se deberá sumar tres minutos que es lo que se demora el atleta en recorrer dos vueltas; de esta manera pueden determinar que cuatro vueltas las recorre el atleta en seis minutos.

Tabla 8. Posible estrategia de solución tarea uno, intervención 1

Número de vueltas	**Tiempo en minutos**
2 + 2 vueltas (porque son las que me faltan para completar las pedidas).	3 Debo sumarle el tiempo que gasta en esas dos que se agregan.

Continuacion tabla 8.

Número de vueltas	**Tiempo en minutos**
Entonces sería 2 vueltas (iniciales) + 2 vueltas (que me faltan para completar el interrogante)	Entonces sería 3 (De los 2 iniciales) + 3 (de los 2 añadidas)
Obtenemos:	Obtenemos:
4	6

Luego como el siguiente número de vueltas es seis, entonces los estudiantes podrían sumar lo que gastaron en dos y lo que gastaron en cuatro. De igual forma encontrarían los demáss valores solicitados. Esta forma de solución no puede ser considerada errónea, pues independientemente de la estrategia utilizada los estudiantes llegaron a la solución del problema. Esta es una estrategia muy predonimante que utilizan los estudiantes a la hora de resolver este tipo de patrones numéricos, sin embargo esto evita que los estudiantes puedan establecer relaciones estructurales más significativas (Rivera, 2010).

Otros estudiantes podrán notar diferentes relaciones, relaciones más significativas y llegar a proponer generalizaciones exactas. Es decir los estudiantes pueden encontrar siempre el tiempo que se gasta el atleta recorriendo un número particular de vueltas. Para esto pueden partir del hecho que en dos vueltas se gasta tres minutos, ahora que se le pide el tiempo en cuatro vueltas, el estudiante sabrá que la clave están en los dos términos dados inicialmente. Entonces los estudiantes pueden plantear conjeturas, es decir, empezar a utilizar diversas estrategias aritméticas.

Una de esas estrategias aritméticas puede surgir de los tres valores iniciales dados. Los estudiantes podrían concentrarse por parejas horizontales y empezar a establecer relaciones entre esos dos números, en este caso la pareja inicial indicaría el patrón que se repetiría en los demás casos, es decir ellos se plantearían la pregunta de qué relación existiría del 2 para llegar a convertirse en 3, y como en esta etapa de escolaridad para ellos la matemática gira alrededor de las 4 operaciones, empezarían a buscar una operación que le permita identificar esta relación, y la más sencilla para ellos sería sumar 1. A partir de esta idea completarían la tabla, omitiendo el contexto del problema.

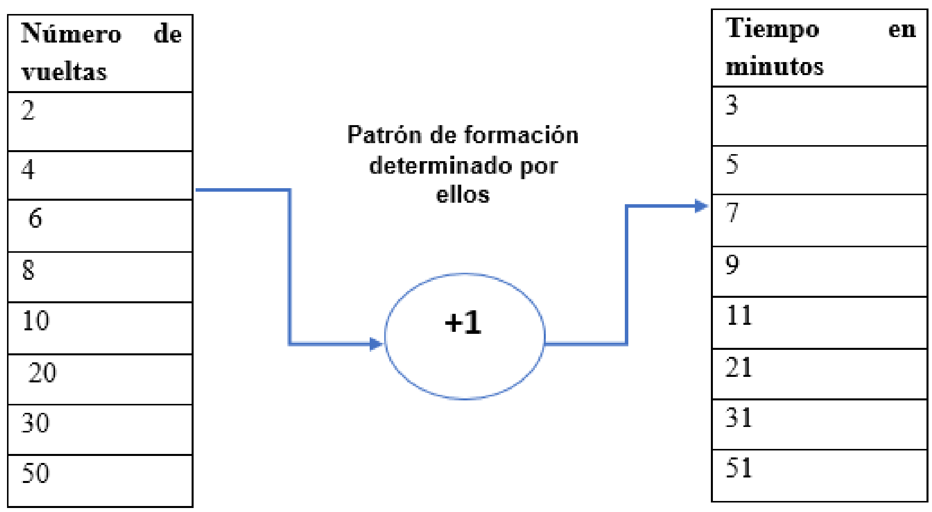


Figura 18. Posible patrón tarea uno, intervención 1

Los estudiantes pueden realizar diversas operaciones con estos tres números, similares a la anteriormente mostrada, hasta llegar a definir alguna que tenga sentido para ellos.

Se espera que como el número de vueltas aumenta, noten que el tiempo también debe aumentar, y ese aumento debe ser proporcional; es decir en términos de los estudiantes debe ser “equitativo”. Además haciendo las operaciones respectivas las unidades de la respuesta deben ser minutos, es decir, es decir los estudiantes deben buscar de alguna manera cancelar o anular las unidades de vueltas. Algún estudiante puede multiplicar 4 vueltas por 3 minutos, esto resultaría en 12 minutos vueltas, es decir los estudiantes podrán determinar que el tiempo aumentó, pero podrán notar que ese aumento es muy grande, entonces es ahí donde utilizaran el otro valor dado, el 2, algunos podrían restarlo a los 12 que ya obtuvieron de la multiplicación; es decir, que podrían decir que tardaran 10 minutos en recorrer las 4 vueltas. Pero otros podrán notar que no se puede restar por que las unidades no cuadran, entonces dividirán pues saben que ese 12 inicialmente encontrado podrá ser convertido en un numero mas pequeño, además las unidades irán teniendo mas sentido y concordancia para poder encontrar el tiempo solicitado.

$$4\ vueltas\ \times 3\ minutos = 12\ vueltasminutos$$

$$12\ vueltasminutos\ \div 2\ vueltas$$

$$= 6\ minutos$$

Entonces los estudiantes pueden utilizar el mismo razonamiento para encontrar los otros valores solicitados en la tabla.

2. Observa y responde

Figura 19. Tarea número dos, intervención 1

- Dibuja los términos 4 y 5 en tu hoja de respuesta.

    - Con ayuda del material entregado representa los términos 4 y 5.

    - ¿Cuántos palillos tendría el término 10? ¿Por qué? ¿Y el 20?

Solución normativa: Se observa que cada figura de cada término de la secuencia consta de tres filas, una horizontal y dos verticales. Las verticales serán iguales y tendrán siempre un palillo, mientras que la horizontal tendrá la cantidad de palillos que indique el número del término. Basados en esto la fórmula que expresa la cantidad total de palillos es:

$$P(t) = 2 + t \qquad donde\ t\ indica\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: Se espera que la mayoría de los estudiantes logren identificar la forma que tendrán todos los términos de la secuencia. En este caso la forma seria rectangular teniendo en cuenta que lado de abajo se omite. Teniendo clara esta idea, una solución posible de los estudiantes sería colocar palillos horizontalmente sin notar que el número del término inicia la cantidad que deben colocar, con base a esto algunas soluciones del término 4 serían:

Término 4

Figura 20. Posible solución a la tarea 2, intervención 1

En este caso se podrá evidenciar una forma de similitud parcial, pues la figura tendría parte de la forma que viene siguiendo la secuencia, pero los estudiantes estarían omitiendo otras características que el patrón está teniendo.

Se espera que la mayoría de los estudiantes logre ver que la cantidad de palillos horizontales es igual al número del término a partir de ahí logran una generalización exacta, aunque algunos podrían omitir los dos palillos verticales que siempre aparecen en todos los términos de la secuencia.

3. Dada la siguiente secuencia

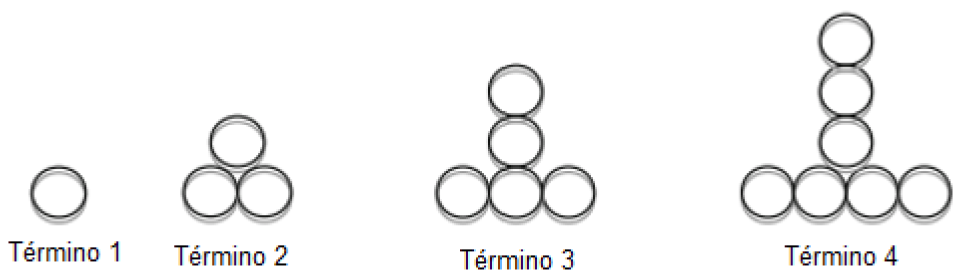


Figura 21. Tarea número tres, intervención 1

- Con ayuda del material entregado realiza los términos 5 y 6.

  - ¿Cuántos círculos tendrá el término 15?

  - Podrías calcular el número de círculos del término 50, 100. Justifica tu respuesta.

Solución normativa: Se parte del hecho del que existen dos filas, una horizontal y una vertical, donde en la horizontal habrá el número de círculos que indique el término, mientras que la fila vertical tendrá el número anterior al término.

Es conclusión, en total habrá en el término “n”, “n”círculos de la fila horizontal más “$n-1$” círculos de la fila vertical, es decir, en total hay “$2n-1$” círculos en el término “n.”

Solución teórica: El objetivo primordial de esta tarea, es que los estudiantes empiecen a dar ideas intuitivas de lo que consiste generalizar, y que a medida que avancen las tareas, puedan llegar a generalizaciones exactas, no se descarta que alguno puede plantear generalizaciones exactas en esta tarea, se espera que la mayoría pueda lograr al menos generalizaciones aproximadas.

Una primera característica que deben tener los estudiantes y que se basa en la percepción visual, es notar que existen solamente dos filas una horizontal y otra vertical, ahí pueden existir la primera dificultad para ellos, pues no logran saber cuál es la horizontal y cuál es la vertical, generará dificultades a la hora de escribir una posible solución.

Ya después de a ver identificado las dos filas, el estudiante se concentrará en la cantidad de círculos de cada fila, y podrá apoyarse de una ayuda tabular para poder ver más clara esa relación. Una representación se muestra a continuación:

Tabla 9.

Ayuda tabular, tarea 3, intervención 1

	Fila horizontal	**Fila vertical**	**Total**
Término 1	1	0	1
Término 2	2	1	3
Término 3	3	2	5
Término 4	4	3	7

Esta primera ayuda tabular, le permitirá al estudiante formular hipótesis que a medida que avanza puede ir validando si son ciertas o no. Puede plantear ideas, como por ejemplo, "cada término va aumentando de dos en dos", "el número de la fila horizontal y el número del término son iguales entre otras", entre otras.

A continuación de plantean estas ideas que el estudiante puede representar con el material concreto los términos siguientes, y así poder validarlas; analizando si en todos los términos cumplen con las propiedades de forma de los términos dados. Algunos de los dibujos que podrían hacer serian:

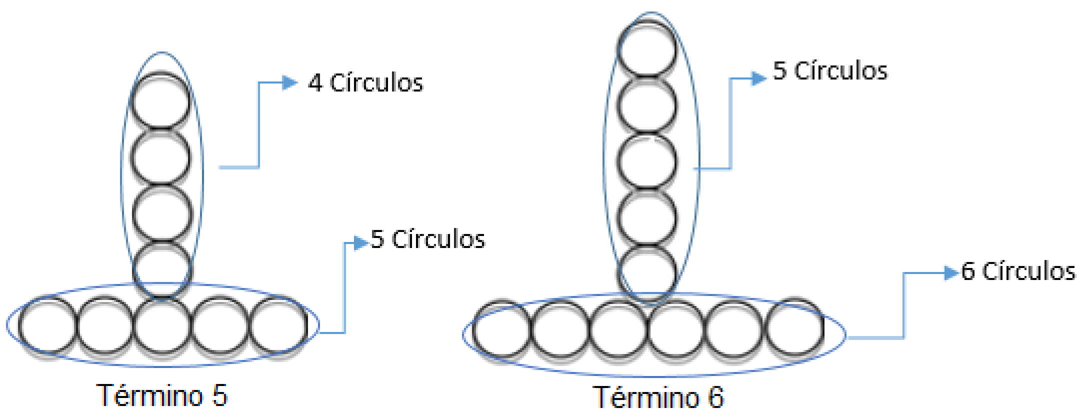


Figura 22. Posible análisis tarea número tres, intervención 1

El estudiante puede comprobar que cada término que construye tiene la misma forma que los términos dados; de manera tal que pueden concluir que sus hipótesis son verdaderas. Se considera que esto puede permitirle proponer algún tipo de generalización exacta. Por ejemplo, expresando que la cantidad total que tiene cualquier término es la suma de ese número con su respectivo antecesor.

Otros estudiantes pueden tener dificultades a la hora de contar los círculos, y más específicamente en el término 3, pues es donde coincide un circulo dela fila horizontal con la fila vertical, y al realizar el conteo respectivo podrían contarlos dos veces y esto puede generar confusiones a la hora de expresar la cantidad total de círculos que tendrá cada término y a la postre a la hora de representarlos.

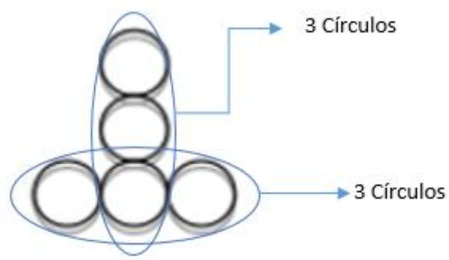


Figura 23. Otro posible análisis tarea número tres, intervención 1

Al realizar este tipo de análisis el estudiante podría plantear hipótesis como. “ambas filas tendrán igual cantidad de círculos”, otros podrían plantear que esto solo sucederá en los términos cuyo número sea impar, o incluso otros podrían plantear que esta tarea no tendrá solución debido a que en algunos términos coindice en un círculo y en otros no.

4. Dada la siguiente secuencia

Figura 24. Tarea número cuatro, intervención 1

- Dibuja en tu hoja de respuesta los terminos 4 y 5

  - Con ayuda del material entregado construye los términos 4 y 5

  - ¿Cuántos cuadrados en total tendrá el término 10?

  - Si tuviera 144 cuadrados, ¿Qué término de la secuencia seria? ¿Por qué? Explica tu respuesta

Solución normativa: Para dar solución al problema planteado se cuenta la cantidad de cuadrados que tiene cada término tanto vertical como horizontal y se observa que en los tres términos dados es igual, es decir, en cada término de la secuencia se tiene igual cantidad de cuadrados horizontal y verticalmente; y esa cantidad corresponde al número del término. Entonces para calcular la cantidad total de cuadrados en cualquier término se deberá multiplicar el número del término por sí mismo.

Solución teórica: Una posible estrategia de solución que pueden desarrollar los estudiantes es el conteo de cuadrados que hay en cada término. Incluso podrían hacer conteos parciales de cada figura, y podrían tabular esos datos para de ahí plantear hipótesis sobre cómo es el patrón de formación. Un ejemplo de esta situación se plantea a continuación:

Tabla 10.

Ayuda tabular, tarea 4, intervención 1

Número de cuadros	Vertical	Horizontal	Total
Término 1	1	1	1
Término 2	2	2	4
Término 3	3	3	9

A partir de esta ayuda tabular, los estudiantes podrían expresar ideas aritméticas, que dependerían de la capacidad de análisis que tenga cada uno. Algunos podrían sumar, multiplicar o realizar otro cálculo. Se espera que la gran mayoría de los estudiantes logren identificar la relación principal que existe entre la cantidad de cuadrados que hay horizontal y verticalmente y el número del término. Es decir, que el número del término indicaría la cantidad de cuadros que hay horizontal y verticalmente. Pero entender eso no daría solución al problema, algunos estudiantes que noten está sola propiedad de la secuencia, podrían hacer dibujos del término 4 como los siguientes ejemplos:

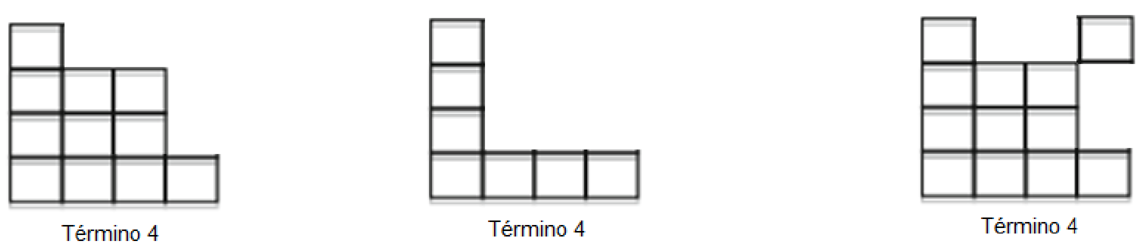


Figura 25. Posibles soluciones de los estudiantes tarea 4, intervención 1

Estos ejemplos dan clara constancia de generalizaciones aproximadas, pues estas son aquellas ideas incipientes que surgen a partir de una o algunas características que tiene la secuencia pero que no todas las que posee. Es decir que tienen una generalización confusa y no permiten encontrar la cantidad total en este caso de cuadrados en cada término.

Se espera en un alto porcentaje de los estudiantes logre llegar a una generalización exacta y en el término lejano exista en la mayoría una similitud total. Es decir que puedan ver que como tanto horizontal y verticalmente hay la misma cantidad de cuadrados, la cantidad total seria multiplicar esos números, pero como es igual, puedan escribir o expresar verbalmente ideas como: “para calcular el número total de cualquier término es multiplicar ese número por sí mismo”.

5.3 Intervención 2

Una semana después, de aplicar la intervención 1, se lleva a cabo esta segunda intervención, manteniendo los grupos, consta también de 4 tareas, las cuales son:

1. Un carro normalmente tiene 4 llantas, si en un garaje tenemos muchos carros normales, ayudados a completar la siguiente tabla

Tabla 11.

Tarea número uno, intervención 2

Número de carros	2	3	5	8	10	500	840
Número de llantas	8						

- ¿Cómo podrias explicar cómo hiciste para poder completar la tabla?

- Si un señor contó que habían 176 llantas ¿De cuántos carros hara referencia esa cantidad de llantas? Justifica tu respuesta

- ¿Cómo podrías encontrar la cantidad de llantas que hay en cualquier garaje con cualquier cantidad de carros?

Solución normativa: Para dar solución a este problema, se reduce a multiplicar la cantidad de carros que tenga por 4, pues cada uno de ellos tiene 4 llantas, y así se encontraría la cantidad total de llantas que tengas esos carros.

Solución teórica: El contexto del carro se utiliza para que el problema sea más familiar y llamativo para el estudiante, pero en realidad se reduce a un patrón de tipo numérico. Para encontrar cuantas llantas tienen 3 carros, el estudiante podría dibujar o hacer la representación de 3 carros y contarlos, es decir podrían hacerlo a través de sumas, sumar las 4 de un carro, más las 4 del otro más las 4 del tercer carro, y notar que son 12 llantas.

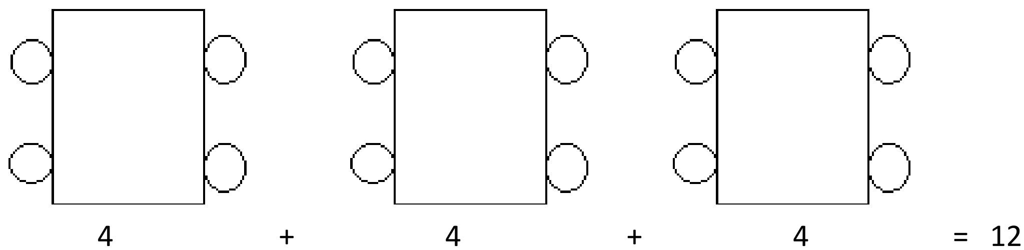


Figura 26. Posible representación tarea 1, intervención 2

Teniendo más valores, la ayuda tabular les permitirá a los estudiantes encontrar de manera más eficiente la forma que se construye esta secuencia, pues pueden notar que va creciendo de 4 en 4, o podrían expresar que están los números de la tabla del 4.

Lo interesante de esta tarea es el problema de inversión, pues se las da la cantidad total de llantas y deberán encontrar la cantidad de carros, se espera que utilicen diversas estrategias, relacionadas con algoritmos numéricos con el fin de llegar a la respuesta.

En esta tarea se espera que los estudiantes lleguen a una generalización exacta, que puedan expresar de forma verbal o escrita que para encontrar la cantidad de llantas que tiene cierto grupo de carros, debemos multiplicar la cantidad de carros por 4.

2. Observa la siguiente secuencia

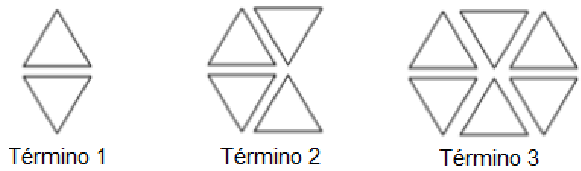
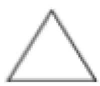


Figura 27. Tarea número dos, intervención 2

- Representa con el material entregado los términos 4 y 5 de la secuencia.

- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7.

- ¿Por cuántos triángulos está formado el término 100? Justifica tu respuesta.

- Si  significa triángulo superior, ¿Cuántos triángulos superiores tiene el término 10 ¿Cuántos triángulos superiores tiene el término 40?

- Escribe cómo le explicarías a tu mamá y papá la manera como se van conformando los términos de la secuencia.

Solución normativa: La cantidad total de triángulos de las figuras que conforman la secuencia depende del número del término o "posición" que ocupe dentro de la secuencia. Esta relación puede establecerse a través de la ecuación

$$Total\ (t) = 2t$$

Donde t indica el número del término.

Además, se observa que el número del término indica la cantidad de triángulos superiores que hay en cada uno, y esta cantidad es igual a la cantidad de triángulos inferiores, es decir en el término “t” tiene “t” triángulos superiores y “t” triángulos inferiores.

Solución teórica: Inicialmente el estudiante deberá notar que existen dos filas en cada término de la secuencia, y ahí se podría presentar la primera dificultad a la hora de representar los términos siguientes. Este error puede existir debido a que el estudiante parcializa cada término y no trabaja todos los elementos de cada término de manera conjunta, es decir sólo se concentran en algunas partes del término, descuidando las otras o sin tenerlas en cuentas para realizar los otros términos. Un ejemplo de esto seria.

Figurar 28. Solución tarea 2, intervención 2

Al notar que existen siempre dos filas horizontales, los estudiantes centraran su atención en la cantidad de triángulos que tiene cada una de esas filas, para establecer ciertas relaciones, los estudiantes podrían apoyarse a la hora de realizar el conteo en otro tipo de representación, como por ejemplo.

Tabla 12.

Ayuda tabular, tarea dos, intervención 2

	Fila 1	**Fila 2**	**Total**
Término 1	1	1	2
Término 2	2	2	4
Término 3	3	3	6

Al realizar este tipo de representación los estudiantes notarán que ambas filas siempre tienen la misma cantidad de triángulos y que para calcular el total se debe sumar esos dos números, pero como son los mismos, deberán multiplicar por dos. Se espera que todos los estudiantes logren estructurar esa característica fundamental, incluso algunos podrían notarla sin necesidad de la ayuda tabular.

Teniendo claro la cantidad total de triángulos que debe tener cada fila de cada uno de los términos de la secuencia, un error que se puede evidenciar en el trabajo de los estudiantes es que no logren diferenciar la posición o sentido que tiene cada uno de los triángulos con respecto a otro. Es decir, al término siguiente podrían agregar dos, pero los agregaría igual a cada fila, sin notar que la forma va intercalada. En términos de Rivera (2010) los estudiantes no estarían identificado aquellos detalles relevantes que deber ser correspondidos mediante alguna regla, en este caso asociada con la posición. Además, este tipo de tareas donde los objetos figurativos tienen el mismo tamaño y forma se denominan secuencias congruentes.

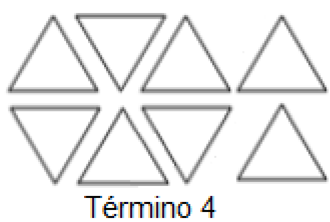


Figura 29. Posible solución a la tarea dos, intervención 2

En este caso diremos que los estudiantes lograron una similitud parcial, pues existe al menos una fragilidad sobresaliente en algunos de los términos construidos, pues en este caso el estudiante puede evidenciar que identifica la cantidad total de triángulos, pero a la hora de representarlos muestra una inconsistencia notable respecto a los demás términos de la secuencia.

Se espera que otros estudiantes si logren tener similitud total, es decir que puedan notar esos detalles notables en cada término, en este caso: la cantidad de triángulos, la posición de ellos y poder mantenerlo constante en cada uno de los términos. No se descarta que incluso algunos estudiantes no presenten ningún tipo de similitud, es decir no logren identificar ninguna característica constante de la secuencia.

3. Observa la siguiente secuencia

Figura 30. Tarea número tres, intervención 2

- Dibuja en tu hoja de respuesta el término 4 y el término 5

- Con ayuda del material entregado construye los términos 4 y 5

- ¿Cuántos circulos en total tendrá el término 10?

- Podrias explicar de alguna manera la forma para encontrar la cantidad de circulo sin importar el numero del término

Solución normativa: Se observa que en la posición 1, 3 y 5 de la fila horizontal, el número del término indica la cantidad de círculos se colocan en esas posiciones verticalmente, adicionado a eso, siempre habrán dos círculos fijos en todos los términos, los de las posiciones 2 y 4. Basado en esto, la fórmula alfanumérica para encontrar la cantidad de círculos seria:

$$C(t) = 3t + 2 \qquad\qquad donde\ t\ indica\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: Algunos estudiantes pueden notar que la diferencia entre la cantidad de círculos que tiene el término 1 a comparación del término 2 son 3 círculos. De igual forma que la diferencia del término 3 respecto al término 2 también es igual; en este caso esa diferencia es 3. De ahí en adelante los estudiantes podrían ir sumando de 3 en 3, es decir podrían empezar a utilizar diversos algoritmos numéricos hasta encontrar los términos solicitados. Pueden utilizar esta estrategia y así encontrar términos cercanos, pero cuando el término es lejano y los estudiantes notaron que aumenta de 3 en tres, lo que podrían intentar hacer es dado el número del término, multiplicarlo por tres y así encontrar la cantidad de círculos que tiene ese término. Entonces según esta hipótesis, el termino 10 tendría 30 círculos, sin percatarse que existen otros elementos fijos en cada término de la secuencia.

Otra forma de solución que pueden desarrollar los estudiantes, es ver cada término por partes e ir observando aquellos detalles relevantes que deben ser correspondidos o proporcionales y que deben seguir alguna regla o patrón de formación. El primer detalle que se espera que todos pueden ver, es que siempre la forma de cada término será igual. Es decir, en este caso todos los términos de la secuencia tendrán forma de “E acostada”, donde siempre en la base horizontal habrá 5 círculos, y en la posición 1, 3 y 5 de los círculos horizontales ira aumento la cantidad de círculos hacia arriba. Es ahí donde podrán identificar otro detalle de la secuencia, pues a medida que el número del término aumenta, aumenta la cantidad de círculos que hay verticalmente en cada una de las tres filas nombradas. Pero ese aumento debe ser proporcional, y es ahí donde notaran que siempre en cada fila vertical tendrán siempre igual cantidad de círculos como indique el número del término, y que están tres filas siempre serán igual.

Figura 31. Análisis tarea número tres, intervención 2

Después que los estudiantes noten este detalle, podrán notar otra característica importante de la secuencia, y es que siempre habrá dos círculos fijos que actúan como conectores entre las tres filas largas verticales:

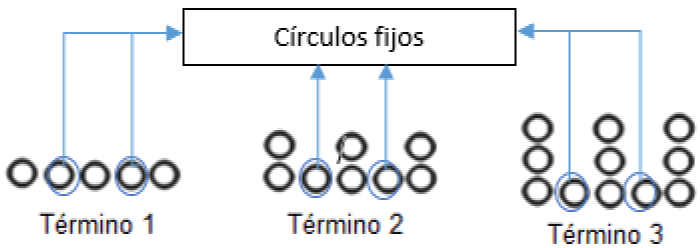


Figura 32. Partes fijas, tarea número tres, intervención 2

Teniendo clara estas dos ideas, se espera que la mayoría de los estudiantes logren estructurar una similitud total cuando se les pida el término 10. Además de eso, que un gran porcentaje de ellos llegue a plantear una generalización exacta, es decir que pueda escribir o decir la forma correcta de encontrar la cantidad de círculos que hay en cualquier término.

4. Observa la siguiente secuencia

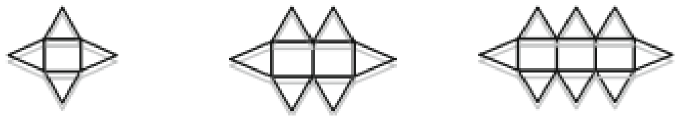


Figura 33. Tarea número cuatro, intervención 2

- Construye con el material entregado los términos 4 y 5 de la secuencia dada.

  - Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7
  - ¿Cuántos triángulos tendrá el termino 10? Justifica tu respuesta.
  - Explica cómo encontrar la cantidad exacta de triángulos de cualquier término.
  - Si tengo 74 triángulos, ¿a qué término de la secuencia corresponde?

Solución normativa: La cantidad de cuadrados es igual al número del término que se indique, mientras que la cantidad de triángulos será dos veces esa cantidad más los dos triángulos que están en los extremos. Las formulas serán:

$$Cantidad\ de\ Cuadrados(t) = t \qquad donde\ t\ es\ el\ número\ del\ término$$

$$Cantidad\ de\ Triángulos\ (t) = 2t + 2 \qquad donde\ t\ es\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: Los estudiantes deben notar aquellos elementos que se mantiene constante en cada uno de los términos de la secuencia, podrán establecer relaciones como: “a cada cuadrado le corresponde un triángulo arriba y otro abajo”. Es aquí donde el uso de material concreto toma gran importancia, pues el estudiante al construir los términos de la secuencia en papel podrá hacer cuadrados con el lado mayor respecto a la base de cada triángulo. Esto puede generar confusiones en los estudiantes a la hora de realizar el conteo, pues al rellenar el espacio es posible que dibujen más triángulos y eso hará que el cálculo final no sea el correcto.

Por otra parte el uso del material concreto (muy bien preparado para que correspondan las longitudes del lado del cuadrado con el lado del triángulo), puede motivar a partir de la construcción de los términos 4 y 5, que los estudiantes identifiquen aquellas características que se mantienen estables. En esta tarea se podrán observar estudiantes en los tres tipos de similitudes, pero se espera que la mayoría evidencie un tipo de similitud total; dado que al ser la actividad número 4, se espera que los estudiantes hayan logrado cierta experiencia en este tipo de actividades. Pues como propone Rivera (2010) las experiencias formales que tengan los estudiantes a la hora de enfrentar este tipo de tareas relacionadas con los patrones, juega un papel fundamental en el éxito de cada una de estas.

Para la secuencia presentada los estudiantes podrán notar que cada término de la secuencia siempre tiene dos triángulos fijos, uno “al inicio” y uno “al final”. Además, existen dos filas que tienen la misma cantidad de triángulos y cada una de esas filas tendrá igual cantidad de triángulos como de cuadrados; a partir de estas características los estudiantes podrían construir los siguientes términos.

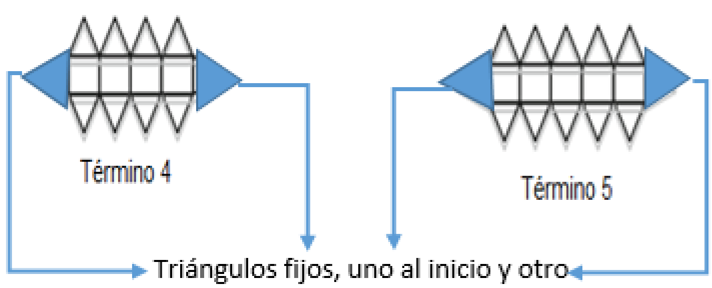


Figura 34. Análisis tarea número cuatro, intervención 2

Algunos estudiantes puede que no logren ver esas características de la secuencia, puede que solo logren ver los triángulos constantes al inicio y final, y en el centro del término agregar cuadrados y triángulos a doquier. A continuación se presentan algunos ejemplos de la situación descrita.

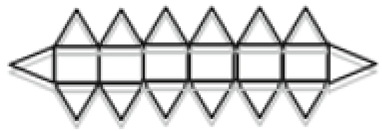


Figura 35. Posible solución tarea número cuatro, intervención 2

Este sería un ejemplo de una similitud parcial, pues el estudiante logro identificar algunas características de cada término de la secuencia, pero demuestra claramente una inconsistencia en el término dibujado. No se descarta que incluso algunos estudiantes no logren establecer ningún tipo de similitud.

Se espera que la mayoría de los estudiantes logren llegar a una generalización exacta, es decir, que puedan expresar cómo podrían encontrar cualquier cantidad de triángulos que componen cualquier término de la secuencia.

5.4 Intervención 3

Esta tercera intervención, al igual que la anterior se aplicó una semana después, son los grupos de trabajo se mantuvieron igual, las 4 tareas trabajadas fueron:

1. Un vehículo recorre 5 km en 20 minutos, si el conductor no varía la velocidad, ayuda a completar la siguiente tabla:

Tabla 13.

Tarea número uno, intervención 3

Distancia (km)	**5**	**8**	**12**	**15**	**100**
Tiempo (minutos)	20				

- Explica cómo completaste la tabla.

- Si el conductor maneja su automovil por 72 minutos seguidos ¿Cuántos Kms habra recorrido? Justifica tu respuesta

- Puedes encontrar la cantidad de tiempo gastado en cualquier cantidad de kilómetros recorridos?

Solución normativa: La solución de este problema, se reduce a encontrar la constante de variación es decir, determinar el número que permite encontrar los valores faltantes en la tabla. Como las magnitudes son directamente proporcionales, a partir de los valores datos, la constante de variación sería 4. Por tanto los datos de la tabla se definen como aparencen en la siguiente tabla:

Tabla 14.

Solución tarea 1, intervención 3

Distancia (km)	**5**	**8**	**12**	**15**	**100**
Tiempo (minutos)	20	32	48	60	400

Solución teórica: El estudiante lo primero que debe notar que los valores que deben ir en la fila del tiempo deben ir en aumento, es decir a mayor distancia gastará más tiempo. Entonces sabrá que enseguida del 20, deberá ir un número mayor, en la celda de la derecha otro mayor y así con las celdas de la tabla. Se espera que la mayoría de los estudiantes logre percibir esta característica de este patrón numérico.

Para encontrar los números que siguen en la tabla, los estudiantes podrían realizar ciertos algoritmos matemáticos con el fin de encontrar esos números, debido que para ellos las operaciones básicas son el centro de toda actividad matemática. El primer algoritmo que ellos pueden realizar sería una suma, pues es la operación más práctica y sencilla, y podrían establecer cuanto le falta al 5 para llegar al 20. Entonces notarían que es 15, y ya conociendo ese valor sumara este 15 a los demás valores de la fila de los kilómetros, con esto la tabla quedaría:

Distancia (kms)	5	8	12	15	100

+15

Tiempo (minutos)	20	23	27	30	115

Figura 36. Posible patrón tarea número uno, intervención 3

Otra estrategia que pueden utilizar los estudiantes para completar la celda correspondiente de 8 km, el estudiante contará con tres números el 5, 20 y el 8. Un posible algoritmo que ellos pudieran hacer seria multiplicar todos los términos de la fila por 5, pues es el primer número que aparece en esa fila. En este orden de ideas, la tabla quedaría de la siguiente manera:

Por ser el primero, se deberá multiplicar por 8, 12, 15 y 100, así saldrán los resultados de la fila del tiempo

Distancia (kms)	5	8	12	15	100
Tiempo (minutos)	20	40	60	75	500

Figura 37. Otro posible patrón tarea número uno, intervención 3

Algunos estudiantes podrían afirmar que dieron solución al problema, pues completaron la tabla y todos los valores cumplen con la idea anteriormente detallada

Otros estudiantes pueden pensar de manera similar a la presentada pero al analizar la tabla pueden corroborar que no siempre se cumple lo que estarían afirmando. Pues si todos los números de la fila de distancia de multiplican por 5, ese mismo 5 también se debe multiplicar por 5, por ende en la celda correspondiente al número 5 debería ir el 25, pero no es así, el número dado para ese celda es el 20. Es decir realizar esta posible solución, le permitirá al estudiante determinar otras propiedades que tiene la secuencia que inicialmente no había notado. Con esto él se concentrara en establecer una relación entre el 5 y 20, ¿de qué manera convierto un 5 en 20? Y al utilizar anteriormente mente la multiplicación, va pensar que se deberá multiplicar ese 5 por 4, pues 5x4=20. Esta seria una estrategia de relacion estructural muy significativa que se espera que puedan plantear algunos estudiantes, pues le permitió encontrar el patrón de crecimiento de la secuencia.

2. Observa la siguiente secuencia de palillos

Figura 38. Tarea número dos, intervención 3

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
    - Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7
    - ¿Cuántos palillos tendrá el termino 10? Justifica tu respuesta
    - Si tengo 79 palillos, ¿a qué termino hará referencia esa cantidad de palillos?
    - Como podría encontrar la cantidad de palillos en cualquier término de la secuencia

Solución normativa: Cada término va creciendo de tres en tres respecto al anterior, pero el término 1 tiene un palillo fijo e inicial y a partir de ahí si se van agregando de 3 en 3 a medida que el término vaya aumentando, basado en esta idea, la cantidad total de palillos estaría definida por la fórmula:

$$P\ (t) = 3(t) + 1\ , \quad donde\ t\ indica\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: El primer análisis que debe realizar el estudiante es contar la cantidad de palillos que tiene cada cuadrado, como es un cuadrado, tiene 4 lados, es decir cada cuadrado de cada término tiene 4 palillos.

Una posible solución de los estudiantes es ver que en cada número del término indica la cantidad de cuadrados que van ahí, sin notar que ciertos lados de esos cuadrados se repiten, la solución más rápida para ellos podría ser:

Figura 39. Posible solución tarea número dos, intervención 3

Pero al realizar con el material concreto los términos solicitados le permitirá al estudiante ir determinando de qué manera ser comporta el patrón, analizando detalles de la forma que va creciendo el patrón, podrá ver que cada termino consiste en colocar 3 palillos más que el término anterior, así que él podría dar una idea de generalización diciendo que el número de palillos que tiene cada término será el producto de multiplica 3 por el número del término, es decir que el término 4 tendrá 12 palillos.

Figura 40. Otra posible solución tarea número dos, intervención 3

Pero al trabajar con los 12 palillos, notaran que les faltó un palillo, para que la figura presente similitud total, a partir de ahí podrían plantear hipótesis como que para encontrar la cantidad total de palillos en algún término deberán multiplicar por 3 y sumarle uno, y podrían comprobarlo realizando el término 5.

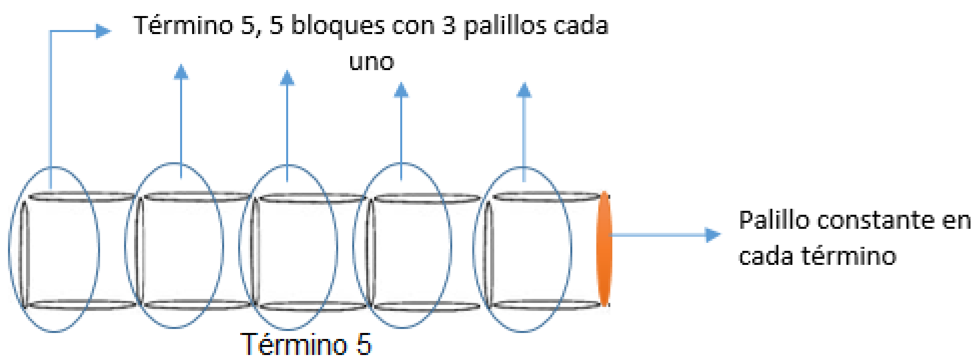


Figura 41. Análisis tarea número dos, intervención 3

Al realizar esta representación y notar similitud parcial, se espera que algunos estudiantes puedan dar expresiones de generalizaciones exactas. Cabe destacar que puede haber algunos estudiantes que evidencien similitud parcial o incluso sin similitud.

3. Observa la siguiente secuencia

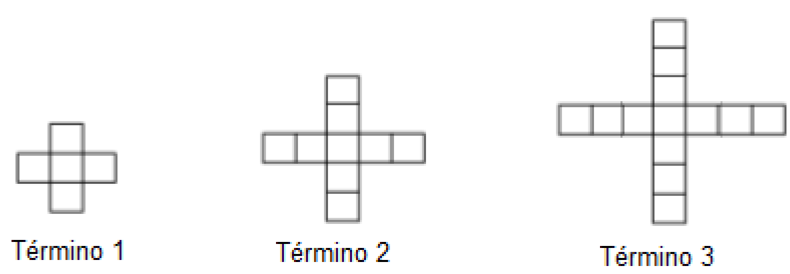


Figura 42. Tarea número tres, intervención 3

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5

- ¿Cuántos cuadrados tendrá el termino 10? ¿Por qué?

- Si tengo 49 cuadrados, ¿a qué término correspondería?

- Explica la forma de encontrar la cantidad de cuadrados de cualquier término de la secuencia

Solución normativa: El número del término indica la cantidad de cuadrados que están formando cada término hacia cada dirección, arriba, izquierda, derecha y abajo, y a esos, se debe sumar el cuadrado del centro que los une, basado en esto, para calcular la cantidad de cuadrados que tiene cualquier término se define la fórmula:

$$C(t) = 4t + 1 \qquad donde\ t\ indica\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: El estudiante debe notar inicialmente la consistencia que existe entre cada uno de los lados de la cruz, notar que hacia todos los lados hay igual cantidad de cuadrados, y todos se unen en el centro. Algunos estudiantes podrán notar otras relaciones, es decir, podrán tener ciertos rasgos constantes en cada término, pero a la hora de dibujar un nuevo término podrá generar confusiones que harán que obtenga una similitud parcial, por ejemplo sabrán que el cuarto término tendrá 4 cuadrados más respecto al termino 3, pero los distribuirán de dos en dos, colocándolos en cualquier posición:

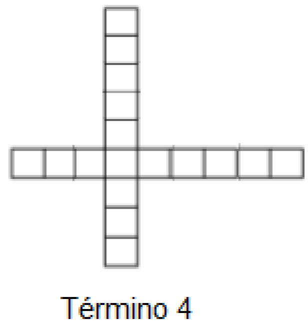


Figura 43. Posible solución tarea 3, intervención 3

Otros estudiantes podrían notar cierta similitud parcial, pues solo añadirían cuadrados a algunos lados del término y no a todos como se espera.

Los estudiantes también podrían determinar que en cada término aumenta en 4 cuadrados respecto al anterior, y basados en eso proponer que para encontrar la cantidad total de cuadrados que forma cualquier término basta con multiplicar por 4 sin tener en cuenta el cuadrado que une las 4 filas.

El estudiante que logre similitud total, puede entender que hacia todos los lados del término irá la misma cantidad de cuadrados, y en el centro estará otro que es el que une todos los anteriores.

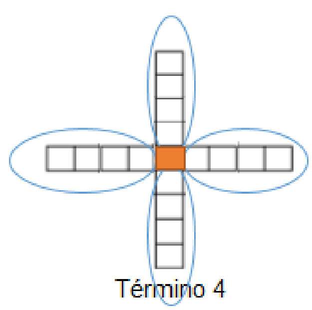


Figura 44. Análisis tarea número tres, intervención 3

En esta representación se observa que en el término 4 se tiene 4 filas de 4 cuadrados cada una, más un cuadrado del centro (color naranja), es decir habrá 4x4 +1, en total 17 cuadrados.

En esta tarea se espera que los estudiantes logren una generalización exacta, es decir una generalización consiste, que les permita plantear de alguna forma la manera correcta de encontrar la cantidad de cuadrados en cualquier término. Por ejemplo, algún estudiante puede plantear ideas como que, para encontrar la cantidad total de algún término, debemos multiplicar el número de ese término por 4 y luego sumarle uno.

4. Observa la siguiente secuencia

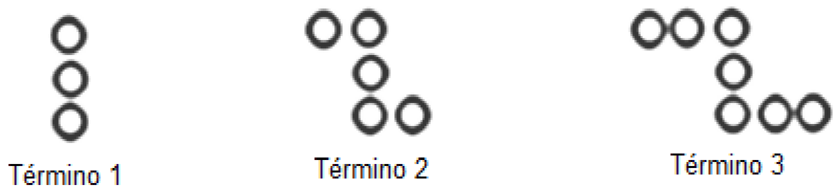


Figura 45. Tarea número cuatro, intervención 3

- Dibuja en tu hoja de respuesta el término 4 y el término 5.

- Con ayuda del material entregado construye los términos 4, 5, 6 y 7.

- ¿Cuántos circulos en total tendrá el término 10? Y ¿el término 20?

- Explica cómo puedes encontrar la cantidad de círculos para cualquier término de la secuencia.

Solución normativa: Para lograr la solución de esta tarea, se toma como base el círculo del centro, y de ahí se deben crear dos filas horizontales iguales; donde en cada una de ellas va tener la cantidad de círculos que indique el número del término. Basado en esto, la cantidad total de círculos está dada por la fórmula:

$$C(t) = 1 + 2t \qquad donde\ t\ indica\ el\ número\ del\ término$$

Solución teórica: El estudiante al enfrentarse a esta tarea podrá identificar aquellos detalles que se mantienen fijos; podría expresar en primera instancia que en todos los términos de la secuencia los círculos que componen los términos forman una zeta (Z). A partir de esta idea algunos estudiantes podrían hacer dibujos de los términos siguientes concentrándose únicamente, en que la figura tengo forma de Z sin preocuparse de la cantidad de círculos. Por ejemplo, podrían estructurar dibujos del cuarto término como los que se presentan a continuación:

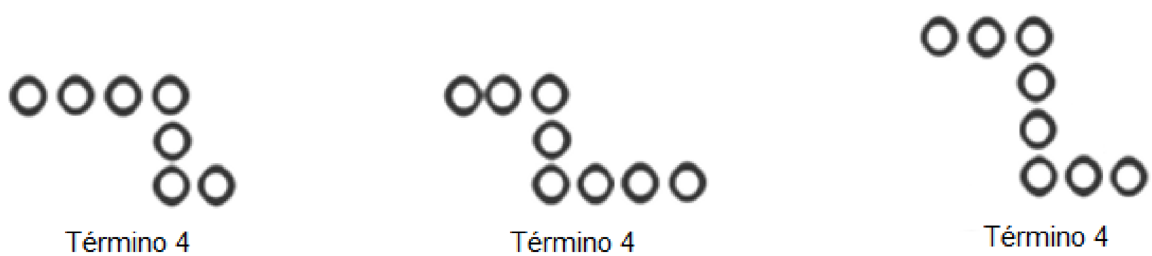


Figura 46. Posibles soluciones, tarea número cuatro, intervención 3

Esto puede suceder dado que los estudiantes no construyen el término siguiente teniendo en cuenta todas las partes, componentes o propiedades figurativas que generan los términos de la secuencia, sino que centran su atención en una sola de esas propiedades, lo que da a entender que su comprensión operativa no es completa sino parcial.

Otros estudiantes podrán notar que la parte vertical que compone cada término siempre va tener 3 círculos, y a medida que va aumentando el término se agregan dos círculos más, uno en la fila de arriba y otro en la fila de abajo. Puede suceder que al preguntarle a un estudiante sobre cuántos círculos tiene en un determinado término de la secuencia no podrá expresar la cantidad total. En este caso se dice que el estudiante está logrando es una generalización aproximada, pues la idea planteada no le permite encontrar la cantidad total de círculos de un término fijo.

Una estrategia de solución que podría plantear un estudiante es analizar la cantidad de círculos que tiene tanto la fila horizontal como la vertical y pensar que "siempre van a ser iguales"; además puede determinar que cada fila siempre tiene la cantidad de círculos que indique el número del término. Además, para terminar de estructurar el patrón el estudiante debe determinar que en cada término hay un círculo que se mantiene constante; éste es el que une las dos filas descritas. Teniendo en cuenta, una representación hecha por un estudiante se tiene:

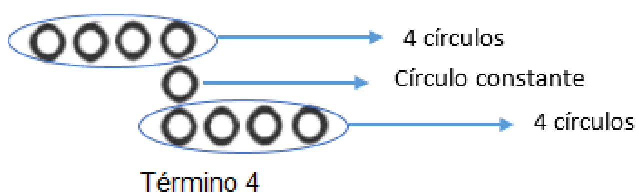


Figura 47. Análisis tarea número cuatro, intervención 3

Estos estudiantes podrán ver entonces, que el término 4 tendrá 2 filas de 4 círculos cada una, más el círculo del centro. Es decir, podrán determinar que 4 + 4 + 1 = 9 círculos. Se espera que a partir de este análisis los estudiantes puedan llegar a una generalización exacta expresando que para encontrar la cantidad total de círculos que tiene cierto término de la secuencia "se debe multiplicar ese número por dos y sumarle uno" o "el número del término se suma dos veces y se le suma uno".

5.5 Diagnóstico Final

Dicho diagnóstico fue aplicado una semana después de finalizar las 3 etapas de intervención, se aplicaron 3 tareas que a criterio del profesor investigador tenían más nivel de exigencia respecto al diagnóstico inicial.

1. Observa la siguiente secuencia

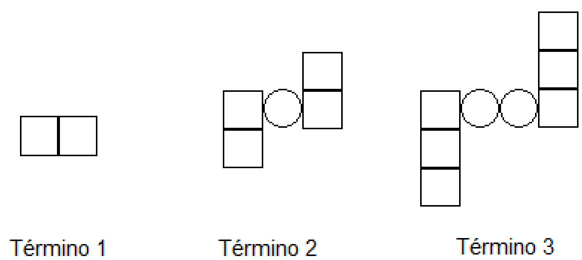


Figura 48. Tarea número uno, diagnóstico final

- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 4 y 5

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5

- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.

- Explica cómo encontrar la cantidad exacta de cuadrados y de círculos en cualquier término.

Solución normativa: Se observa que en cada término el número indicará la cantidad de cuadrados que tendrá cada una de las filas, y la cantidad de los círculos siempre será uno menos al del término. A partir de esto la fórmula para encontrar la cantidad de cuadrados y círculos es:

$$Cuadrados(t) = 2t$$

$$Círculos(t) = t - 1$$

Solución teórica: Los estudiantes se enfrentan a este tipo de tarea que contiene dos formas distintas en el material, pues se presentan cuadrados y círculos, y deberán encontrar dos relaciones que pueden estar relacionadas entre ellas.

La primera duda que les puede surgir a los estudiantes es porque en el término 1, no hay círculos, y podrían pensar que existe algún error, pues ellos consideran que debe haber siempre en todos los términos cuadrados y círculos.

Los estudiantes inicialmente podrían plantear la relación de cuadrados respecto al número del término, una forma de determinar dicha relación seria a través de una ayuda tabular, es decir los estudiantes podrían empezar hacer tablas como la siguiente:

Tabla 15.

Posible relación, tarea número uno, diagnóstico final

Número del término	Cantidad de cuadrados
1	2
2	4
3	6

A partir de dicha representación, el estudiante puede plantear diversas hipótesis, en este momento, la secuencia con propiedades figurativas pasaría a ser una secuencia netamente numérica, pues ahora consistiría en encontrar la relación existe entre cada pareja de valores que se presentan ahí en la tabla. Se espera que los estudiantes logren identificar que la cantidad de cuadrados será el doble del número del término.

De igual forma el estudiante que piense en tabular la cantidad de cuadrados, podría aplicar la misma estrategia tabulando respecto a la cantidad de círculos, y así podría determinar la relación existente, en este caso sería que siempre la cantidad de círculos es el número del término anterior.

Otra manera en que el estudiante se puede enfrentar a la tarea es analizando la secuencia por partes, es decir primero analizaría qué características tiene la fila que va hacia abajo, y cuales la otra fila, luego empezar a determinar qué relaciones puede establecer entre ellas.

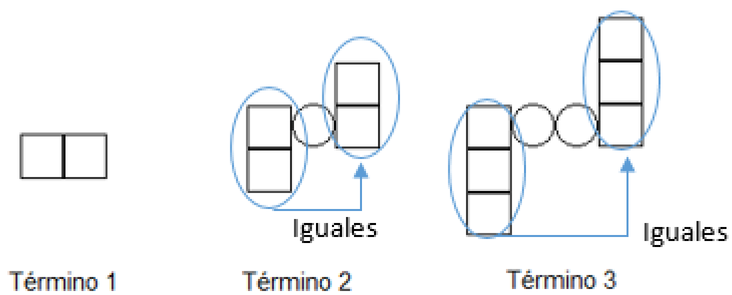


Figura 49. Análisis tarea número uno, diagnóstico final

El estudiante podría centrar su atención en las filas, y observar que siempre serán iguales, a partir de ahí ya tendría una característica, la cual sería que en cada término siempre tendrá dos filas, y que estas, a su vez, serán iguales. Cabe destacar que no todos los estudiantes podrían observar dicha característica, pues depende de la percepción visual que tiene cada estudiante.

Ahora el estudiante deberá ver qué relación existe entre la cantidad de cuadrados que tiene una fila y el número del término, y podrá ver que son iguales, es decir, el número del término está indicando la cantidad de cuadrados que tendrá cada fila. Y a partir de ahí podrá encontrar la cantidad total de cuadrados que tendrá cada término. Después de determinar la relación que existe entre el número del término y el total de los cuadrados, el estudiante deberá centrar su atención en la cantidad de círculos, y podrá observar que siempre habrá un circulo de menos a comparación de una fila de los cuadrados, y basados en eso, él sabrá que la cantidad de círculos será uno menos a comparación de la cantidad de cuadrados que tiene una fila, y si la fila está determinada por el número del termino entonces, los círculos siempre será uno menos a comparación del número del término.

1. En el supermercado "Helado" el valor de 7 helados es $2450. Con esta información completa la siguiente tabla.

Tabla 16.

Tarea número dos, diagnóstico final

Cantidad de Helados	**Precio**
7	2450
8	
10	
12	
15	
20	

- Explica cómo encontraste los valores de la tabla

- ¿Cómo podrías explicar el precio total de cualquier cantidad de helados?

Solución normativa: El problema se reduce a encontrar el valor de un solo helado, ya conociéndolo, simplemente se debe multiplicar ese valor por la cantidad de helados que se desean comprar.

Solución teórica: En el diagnóstico inicial se presentó un ejercicio similar, pero donde el énfasis de ese ejercicio era encontrar la cantidad de bolitas respecto a la cantidad de helados, en este caso, el interés se va concentrar en el precio, al igual que ese hay dos variables precio y cantidad de helados.

Lo primero que debe identificar el estudiante es que a medida que se compren más helados, pues el valor a pagar aumentará, esta idea la pueden concluir debido a la naturalidad del problema, pues es un contexto muy significativo para ellos, además, la situación de compra de helados puede ser muy familiar para ellos. Se espera que la mayoría de los estudiantes logren ver esta primera gran característica de esta secuencia.

La primera cantidad que deberán calcular es el precio de 8 helados, para ello deberán partir del hecho de que 7 cuestan 2450, para encontrar ese valor, el estudiante podrá implementar diversas estrategias netamente numéricas, es decir, empezara a realizar con estos tres números algunas operaciones matemáticas con el fin de ir analizando y corroborando cuales de esos algoritmos pueden tener sentido en el problema.

Una idea que puede pensar el estudiante es conocer el precio de un solo helado, pues a partir de ahí podría determinar el costo de cualquier cantidad de helados, pero les surge complicado determinar ese costo. Es ahí donde la habilidad y destreza que puede poseer el estudiante a la hora de enfrentar este tipo de tareas toma más importancia, pues si comprende bien los conceptos matemáticos en este caso división y multiplicación, puede comprender que a partir de un total y cierta cantidad puede encontrar el valor de exacto de uno de dicha cantidad, y es lo que se necesite en el contexto del problema.

Es aquí donde se vuelve más relevante este tipo de tareas, pues demuestra la relación existente en entre el pensamiento variacional y el numérico, pues a partir de una situación de cambio, los estudiantes pueden plantear diversas estrategias numéricas para dar solución del mismo.

Si el estudiante logra asimilar dicha relación podría determinar el precio de un helado, después de dividir el total dado cuando se compraron 7, y de ahí determinar que el precio de uno solo es $350. Y ya conociendo este valor determinar el precio de las otras cantidades solicitadas.

Puede que pocos estudiantes piensen en determinar el precio de un solo helado, debido a que en la tabla dada no está dicha cantidad, entonces lo que harán es empezar a determinar y crear hipótesis con los números dados, que en este caso son mayores. Entonces el primer valor solicitado es 8, con ese número y los dos dados inicialmente (7 y 2350) el estudiante puede empezar a realizar operaciones de tal forma que los relacione sin tener el criterio para analizar y saber si lo que está haciendo tiene sentido con el contexto del problema o no. Entre las operaciones que podría ser, sería una suma, sumando los tres valores, o podría empezar a realizar multiplicaciones y determinar una a conveniencia y seria su posible respuesta. Cabe destacar que todo depende de la agilidad perceptual que tenga cada individuo, y esta se logra desarrollar a medida que los estudiantes se enfrenten a este tipo de tareas.

Otra manera de enfrentarse a la tarea, es cuando los estudiantes intentan plantear una relación de manera vertical, es decir, buscan la relación que puede existir entre los números dados en este el número de helados y replicarlo para la fila que se les está solicitando. O sea, determinar la manera de llegar de un valor al otro de manera vertical, y aplicar la misma estrategia en la fila de precios. Se presenta a continuación lo anteriormente explicado.

	Cantidad de Helados	Precio
	7	2450
+1	8	2451
+3	10	2453
+5	12	2455
+8	15	2458
+13	20	2463

Figura 50. Análisis tarea número dos, diagnóstico final

Se puede notar que el estudiante en esta situación lo único que realiza es replicar la forma que se obtienen los valores (dados) en la cantidad de helados en la fila del precio. Es decir, olvida por completo el contexto del problema y se concentra solamente en determinar unos valores a partir de las relaciones establecidas. No se descarta que algunos estudiantes realicen esto, pero al analizar los valores obtenidos en la fila del precio, y ver que no tienen sentido en relación de una situación así en la vida real, puede que intenten cambiar de estrategia.

1. Observa la siguiente secuencia

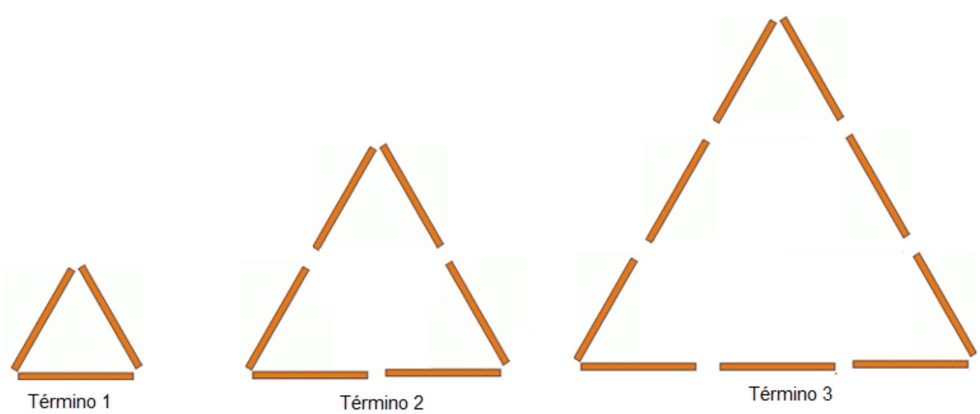


Figura 51. Tarea número tres, diagnóstico final

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5

    - Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.

    - Si tengo 207 palillos, ¿a qué término hará referencia esa cantidad de palillos?

    - Como podría encontrar la cantidad de palillos en cualquier término de la secuencia

Solución normativa: Como cada lado de triángulo siempre tendrá la cantidad del término entonces la cantidad total de palillos está definida por:

$$Palillos(t) = 3t$$

Solución teórica: Una manera de enfrentar dicha secuencia es concentrarse únicamente en un solo lado el triángulo y mirar qué relación existe con el número del término, y después de establecer dicha relación observar que pasa con los demás lados del triángulo. Al notar la relación existente entre el número de palillos que tiene un sólo lado y el número del término, podrá observar que dicho número es igual, es decir, el número del término indicaría la cantidad de palillos que tendrá el lado, y a partir de la percepción visual que tenga el estudiante podrá determinar de una vez la cantidad exacta de palillos que tendrá cada término. Cabe destacar, que alguna posible respuesta que el estudiante podría dar, cuando se le pregunte por ejemplo cuántos palillos tendrá el término 10, y note que la relación anterior sería: el término 10 tendrá 10 palillos a cada lado.

Dicha respuesta no se considera como evidencia de una generalización exacta, dado que el estudiante solo está identificado la característica fundamental de la secuencia, mas no está determinado una estrategia concisa que permita determinar con exactitud la cantidad de palillos que tendrá dicho término. Es de gran relevancia destacar la diferencia entre plantear una generalización exacta y exponer el comportamiento de la secuencia, pues esta última consiste en describir cómo será la forma de un término específico, pero no permitirá saber la cantidad, en este caso de palillos.

Otro estudiante podría empezar a plantear relaciones a partir del total de palillos, es decir contar no solo en un lado, sino en total cuantos palillos tendrá cada uno de los términos dados y empezar a plantear una posible relación entre dichos valores. Una forma seria ayudándose de una forma tabular, que sería así:

Tabla 17.

1Ayuda tabular, tarea número tres, diagnóstico final

Número del término	**Total de palillos**
1	3
2	6
3	9

Después de plantear dicha tabulación, el estudiante debe buscar alguna estrategia que le permita a partir del número del término llegar al total de palillos, y es ahí donde sus conocimientos previos toman papel relevante. Pues si identifica ciertas características de los triángulos, y tiene buen conocimiento en completar las tablas, y como es su comportamiento, podría deducir ciertas cosas, tales como observar que siempre en el total de palillos habrá un múltiplo de 3, y que ese múltiplo está definido a partir del número del término, y basado en eso podrá determinar que se deberá multiplicar por 3 el número del término.

De igual forma se espera que a partir de la relación anteriormente expuesta, el estudiante sea capaz de identificar el proceso inverso, es decir que basados en cierta cantidad de palillos determinar el número del término, aplicando en este caso la operación inversa a la que utilizaron para determinar la cantidad total de palillos, es decir deberán dividir la cantidad total entre 3 y ahí determinar a qué término hará referencia.

6. Resultados

Los diagnósticos aplicados fueron realizados de manera individual, el inicial constaba de 4 tareas mientras que el final de 3, cada uno de ellos se realizó en un tiempo aproximado de 80 minutos. El inicial fue tres semanas antes de ejecución de la primera intervención, y el final fue una semana después de la tercera intervención.

Para las fases de intervención, se conforman siete grupos con el fin de promover el trabajo en equipo, donde cada estudiante pueda expresar su punto de vista y entre los integrantes del grupo llegar a un conceso. Es importante que el profesor esté atento a la interacción que realizan los estudiantes con el fin que todos participen y aparten ideas para la solución de las tareas. Además de la guía impresa se entrega a cada grupo material concreto que puede ser usado para representar las secuencias presentadas.

En las tres sesiones de trabajo desarrolladas se mantuvieron los grupos; sólo hubo modificaciones si se ausentaban varios estudiantes, pero siempre se trataban de mantener la organización inicial del curso. Cada grupo estaba conformado por un estudiante sobresaliente, un estudiante promedio y un estudiante que no se desenvuelve muy bien en el área, todo esto a criterio del profesor investigador.

Los grupos conformados se presentan a continuación, a cada estudiante se asigna un código con el fin de guardar su identidad y realizar un registro más sistemático de su participación. La abreviatura G#L hace referencia al Grupo; los números de 1 a 7 a los grupos conformados y la Letra a un estudiante particular de cada grupo.

Grupo 1:

G1J:

G1E:

G1S:

Grupo 2:

G2T:

G2V:

G2N:

Grupo 3:

G3A:

G3G:

G3M:

Grupo 4:

G4S:

G4C:

G4G:

Grupo 5:

G5S:

G5A:

G5G:

Grupo 6:

G6M:

G6S:

G6A:

Grupo 7:

G7I:

G7J:

Las Tareas desarrolladas son de tres tipos: patrones numéricos, de forma y de propiedades figurativas; para cada uno de ellos aparecen las tareas desarrolladas en cada una de las tres intervenciones con su respectivo análisis. Dicho análisis estará centrado en mostrar aquellas situaciones que reafirmen o refuten los elementos expuestos en el marco referencial.

6.1 Diagnóstico inicial

Cabe destacar que los estudiantes nunca habían trabajo ejercicios sobre patrones ni secuencias. En este diagnóstico, el profesor investigador no realizó ninguna explicación de lo que deberían desarrollar, ni participó en el proceso que los estudiantes realizaban, es decir no contestó preguntas, ni resolvió dudas durante la intervención.

Respecto a la primera actividad presentada, que consistía en encontrar los números siguiendo una regla o patrón faltantes en el cuerpo de un ciempiés. La intención de esta actividad era analizar y ver que estrategias podían desarrollar los estudiantes a la hora de enfrentar este tipo de tareas, cabe notar que esta secuencia es de tipo numérico, pues la actividad central de esta tarea es encontrar ese número que será en este caso el patrón de formación y a partir de ahí realizar operaciones para completar dicha tarea.

De manera general se observó que la mayoría de los estudiantes lograron analizar que en ambas situaciones la secuencia iba en aumento, es decir, cada número que se colocara debería ser mayor al anterior. Para ello se muestra la siguiente tabla donde se logra resumir inicialmente las generalizaciones mostradas por los estudiantes en esta tarea. Categorizando según los referentes teóricos en tres categorías, siendo "GE" generalización exacta, estas son aquellas generalizaciones consistentes donde se logra evidenciar en todos los pasos o términos las mismas características. "GA" generalización aproximada, que hacen referencias aquellas generalizaciones confusas que no siempre logran mantener las características de las secuencias constantemente. Y también se define una nueva categoría que sería "NG" donde no se logra ver ningún tipo de generalización en este caso en los números presentados por algún estudiante.

Tabla 18.

Resultados sobre generalizaciones, tarea uno, diagnóstico inicial

	CIEMPIES 1	**CIEMPIES 2**
GE	8	6
GA	4	6
NG	3	3

G1S un estudiante participante da claro ejemplo de una generalización aproximada, pues notan que la secuencia es creciente y colocar aquellos valores correspondientes que crecen respecto a los números dados. Pues ellos no trabajan teniendo en cuenta todos los términos de la secuencia, sino que centran su atención en los valores dados, y a partir de ahí colocan el número siguiente al dado, es decir logro identificar que la secuencia va en aumento y que el patrón de formación era 1 en ambos ciempiés, como se logra ver a continuación.

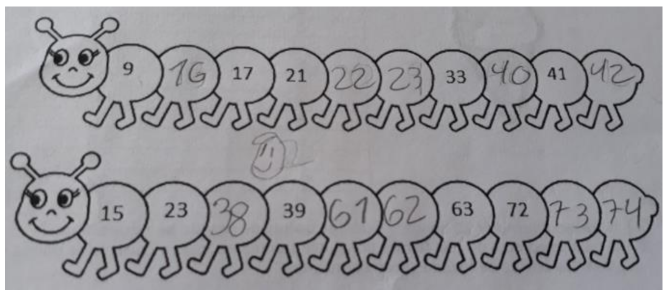


Figura 52. Solución de G1S, tarea número uno, diagnóstico inicial

El estudiante G4S en el ciempiés 1, partió de colocar el siguiente del 9, es decir, colocó el 10 y a partir de ahí cada término iba aumentando en 7, sin argumentar el por qué, y este patrón de formación lo colocó de ahí en adelante en todas las partes que estaba libre, sin notar que no existía ningún tipo correspondencia según su análisis en los dos términos consecutivos dados, el 17 y el 21. Mientras que en el ciempiés 2 logró establecer una mejor relación, pues encontró la mayoría de los términos bien, y al parecer noto que se incrementaba de 8 en 8, tal vez cometió errores a la hora de realizar los cálculos correspondientes. Claros ejemplos de generalizaciones aproximadas.

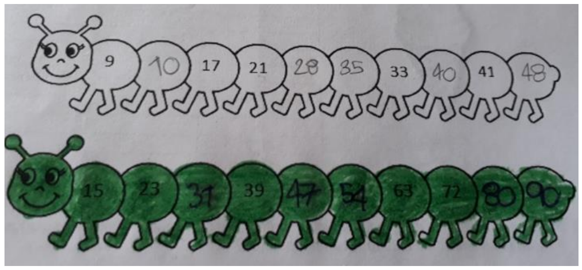


Figura 53. Solución de G4S tarea número uno, diagnóstico inicial

G3A después de ver en su hoja de trabajo múltiples ensayos de algoritmos matemáticos, evidencia en ambos ciempiés una generalización exacta. Se destaca colocar en el ciempiés 2 la expresión +8, dando a entender que cada término se le debe sumar 8 para colocar el siguiente número.

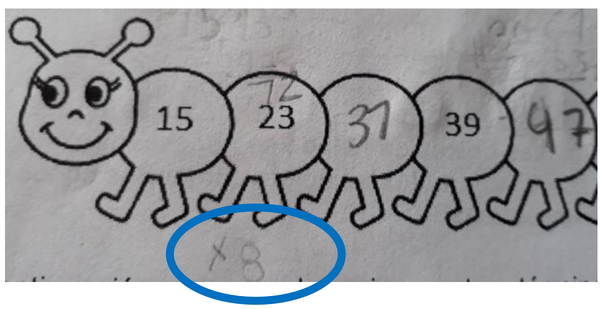


Figura 54. Solución G3A, tarea número uno, diagnóstico inicial

Cabe notar que los 3 estudiantes que no tuvieron ningún tipo de generalización en el ciempiés 1, tampoco lograron establecer ningún tipo de generalización en el ciempiés 2. A continuación se presenta un ejemplo de ningún tipo de generalización, realizado por G2V.

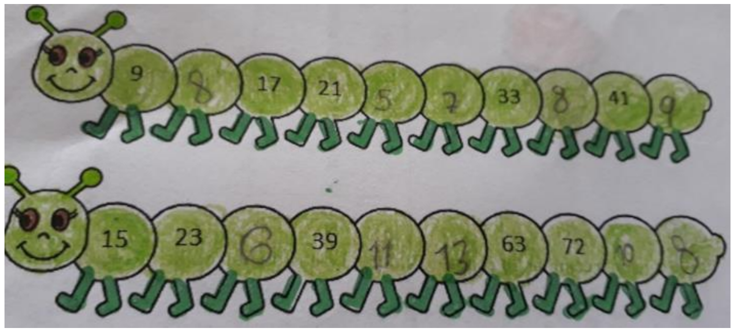


Figura 55. Respuestas sin ningún tipo de generalización, tarea número uno, diagnóstico

Enfocándonos en la tarea planteada número 2, tal vez la de mayor nivel a nuestra consideración. El objetivo de dicha tarea es determinar cómo los estudiantes analizan y utilizan diversas estrategias para resolver este tipo de tareas, que a comparación de la anterior tienes más elementos en juego, como lo son algunas propiedades figurativas y la forma en cómo se organizan los elementos en cada término. Como se mencionó anteriormente estos estudiantes nunca se habían enfrentado a tareas de este tipo, tal vez por eso se vio en los resultados pocos aspectos para analizar, las cuales se presentan a continuación.

De modo general se categoriza en tres categorías expuestas en el marco referencial, que es respecto a los tipos de similitud que se pueden evidenciar en cada uno de los términos dibujados por los estudiantes. A continuación, se muestra los resultados arrojados en esta tarea, respecto a esta categoría de análisis.

Tabla 19.

Resultados tipos de similitud, tarea dos diagnóstico inicial

	No similitud (NS)	**Similitud parcial (SP)**	**Similitud Total (ST)**
Término 4	6	5	4

Continuación tabla 19.

	No similitud (NS)	Similitud parcial (SP)	Similitud Total (ST)
Término 5	6	5	4
Término 10	13	0	2
Término 50	15	0	0

Como afirma Rivera (2010) no habrá tanto cambio respecto al tipo de similitudes en términos cercanos, se evidenciará mayor diferencia en términos lejanos.

Podemos decir entonces que el poco manejo que tienen los estudiantes a la hora de enfrentarse en este tipo de tareas afirma los resultados obtenidos, donde se logra ver que en los términos cercanos buena recepción y entendimiento por parte de la mayoría de los estudiantes; mientras que en términos lejanos se evidencia no tener claro las habilidades necesarias para enfrentar este tipo de tareas. Incluso con el hecho de evadirlas o ni siquiera intentarlas realizar, a excepción de algunos casos que se mostraran después.

Respecto a los términos cercanos, tenemos a G6S y G3A, quienes realizan una similitud parcial, pues es notable una inconsistencia en el término dibujado, a pesar de la percepción de las características que debe mantener la secuencia. A continuación, se presenta el dibujo de los términos construidos por ellos

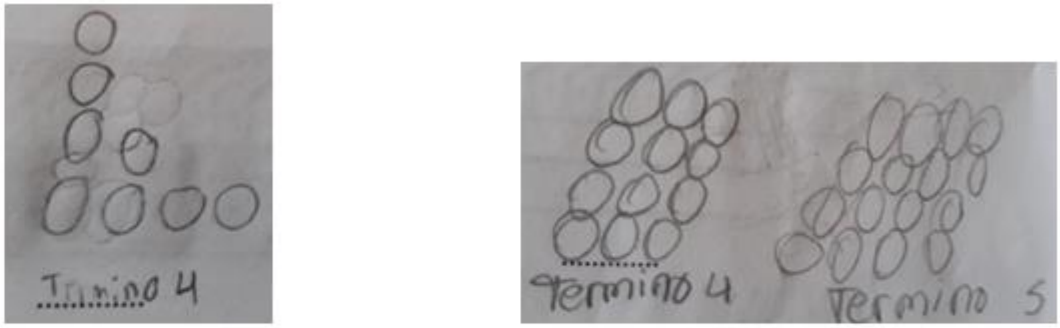


Figura 56. Término 4 construido por G6S y G3A, tarea número dos, diagnóstico inicial

G4S quien fue uno de los que pudo evidenciar en sus procedimientos un tipo de similitud total en los términos cercanos, pues se logra ver que en cada uno de los términos dibujados se mantiene constante las características originales que están presentes en los términos dados. Por tanto, el estudiante logra responder los interrogantes planteados contando uno por uno los círculos que tienen cada término, 10 y 15 respectivamente.

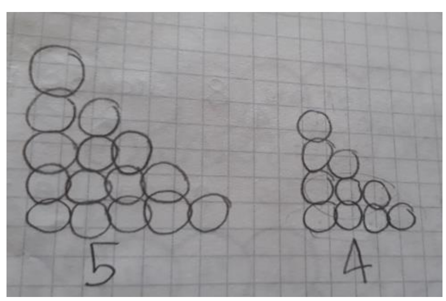
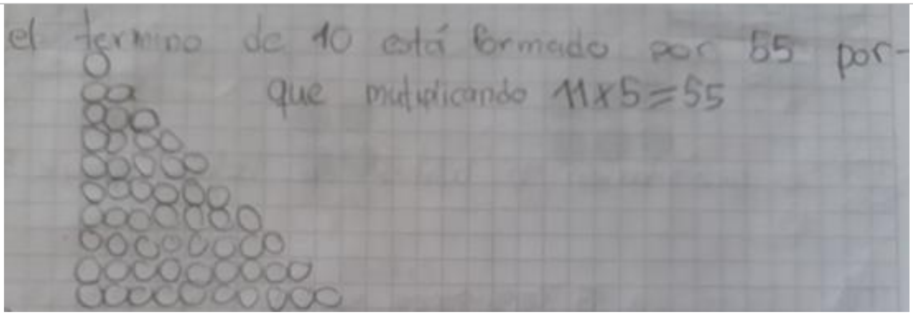


Figura 57. Similitud total términos 4 y 5, tarea número dos, diagnóstico inicial

Respecto a los términos lejanos, él pudo establecer similitud total en el término 10, sin necesidad de realizar los términos intermedios como lo realizaron otros estudiantes. Pero es de destacar la estrategia que utilizó para saber la cantidad total de círculos que había en es termino. A continuación, se presenta el dibujo del término 10 y la justificación que expone:

Tabla 20.

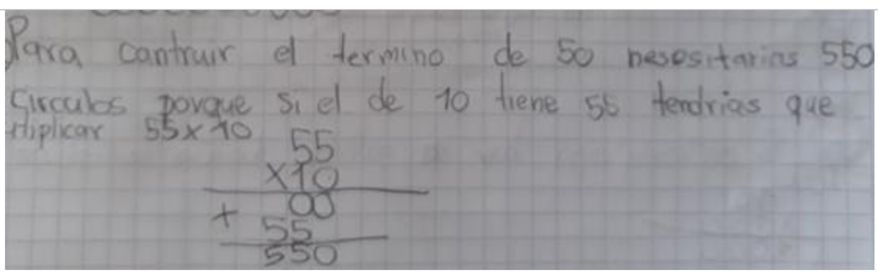
Término 10, tarea número dos, diagnóstico inicial

Construcción realizada por un estudiante	
Transcripción	"El termino de 10 está formado por 55 porque multiplicando 11 x 5 = 55"

Lo particular de esta estrategia, es que réplica para calcular la cantidad total de círculos del termino 50, sin tener éxito.

Tabla 21.

Justificación término 50, tarea número dos, diagnóstico inicial

Construcción realizada por un estudiante	
Transcripción	"Para construir el término de 50 necesitarías 550 círculos porque si el de 10 tiene 55 tendrías que multiplicar 55 x 10 = 550"

La tercera tarea, tiene objetivo analizar cómo los estudiantes se enfrentan a una tarea de patrón según la forma, donde las características a analizar en cada termino son más sencillos que en otras tareas. En conclusión, los datos obtenidos de las categorías nombradas se presentan a continuación

Tabla 22.2

Resultados tipos de similitud, tarea número tres, diagnóstico inicial

	No similitud	**Similitud parcial**	**Similitud Total**
Término 4	3	3	9
Término 5	4	2	9
Término 10	11	0	4

G3A una estudiante que logro alcanzar similitud total en los términos 4,5 y 10. Pero a la hora de un término lejano, es decir lograr poder plantear una generalización, ella se confunde y no puede lograrlo, ella coloca que en él termino 50 habrán sesenta círculos, pero no argumenta el por qué.

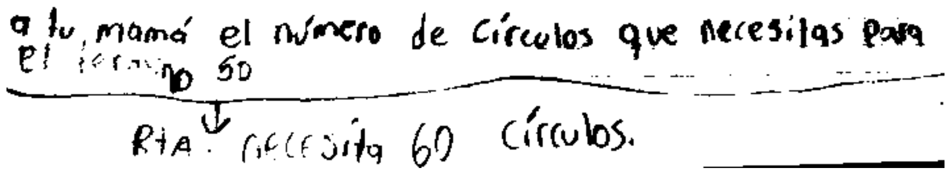


Figura 58. Justificación término 50 por G3A, tarea número tres, diagnóstico inicial

A continuación, se presenta el dibujo realizado por G7I de los términos 4 y 5, donde se logra ver que para ella debido a que en el término 3 que fue dado, se debía mantener constante toda la figura y a partir del término siguiente en este caso 4, se le debería añadir otra fila igual a las anteriores, de igual forma para el término 5, añadir una nueva fila igual respecto a las filas del término 4. Para destacar que utilizó esta misma estrategia para el término 10, con lo que concluye que en ese término hay 27 círculos.

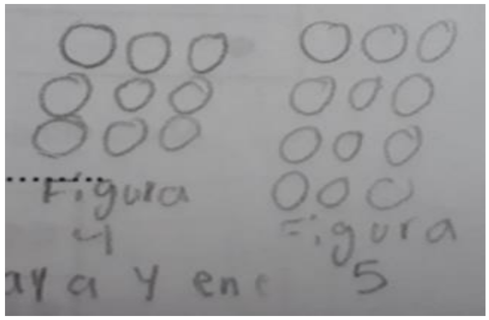


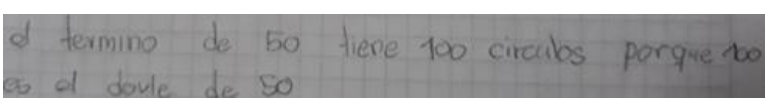
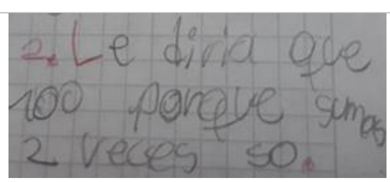
Figura 59. Término 4 y 5 de G7I, tarea número tres, diagnóstico inicial

Esto que realizó G7I, se debe a que ella no trabaja conjuntamente la secuencia, es decir no se concentra en todos los términos de la secuencia, sino que centra su atención solamente en el último, en este caso en el término 3; a partir de ahí intenta definir un patrón relacionado con las propiedades y características que puede determinar en ese exclusivo término. Omitiendo los demás términos dados, con el fin de que pueda plantear las correspondencias entre las características de cada uno de ellos que se mantendrán constantes en cada uno de los términos de la secuencia.

Se presentan ahora dos generalizaciones exactas con su respectiva justificación, planteadas por G4C y G2T, donde ambos plantean una manera de encontrar la cantidad de círculos que hay en el término 50, siendo estas diferentes.

Tabla 23.

Justificaciones de G4C y G2T, tarea número dos, diagnóstico inicial

	
“el término de 50 tiene 100 círculos porque 100 es el doble de 50”	“2. Le diría que 100 porque sumas 2 veces 100”

La ultima tarea mostrada, corresponde a una secuencia de patrón numérica expresada mediante una tabla. Para la mayoría de los estudiantes fue un ejercicio complejo, pues no estaban familiarizados con este tipo de tareas y menos expresadas de esta forma. Se presenta una tabulación con la cantidad de estudiantes que pudieron realizar cada una de los ítems planteados en dicha tarea

Tabla 24.

Resultados tarea número 4 diagnóstico inicial

Ítem	Cantidad total
Completaron bien la tabla	13
Problema N	0
Problema de 20 helados	2
Problema de los 5 integrantes	1

Se presentan a continuación las tablas de los 2 estudiantes (G2T y G5G) que no lograron completarla de manera correcta. Donde se observa más coherencia en la de G2T, sino que él mezcla dos patrones de formación de la secuencia, a veces suma de 1 o en ocasiones 2, es decir no logra mantener constante el patrón de formación. Mientras que la tabla de G5G carece de toda lógica y sentido, pues sus valores no están relacionados de ninguna forma entre ellos o con algunos de ellos.

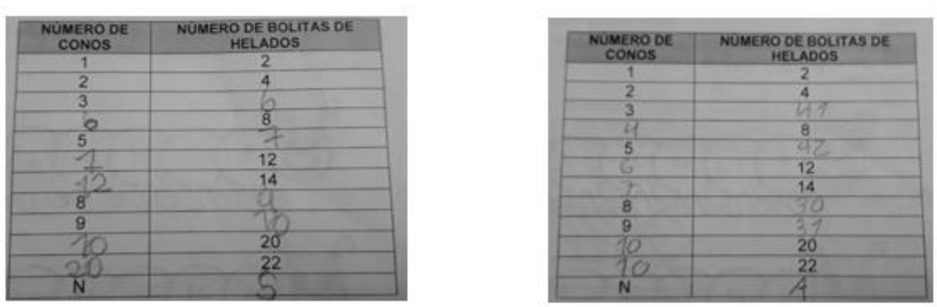
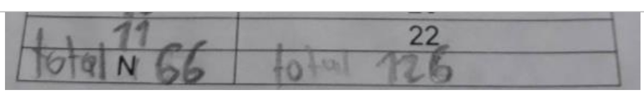


Figura 60. Soluciones de G2T y G5G tarea número cuatro, diagnóstico inicial

De dicha tabulación es posible concluir: la poca familiaridad de los estudiantes en este tipo de tareas genera que muy pocos logren terminar con éxito todos los interrogantes planteados. Además, como en la pregunta que se plantea con la intención que ellos puedan generalizar ninguno logra realizarla, pues generó múltiples confusiones. Algunos estudiantes pensaron que esa “N” colocada en la última fila de la columna de número de conos, hacía referencia al total de conos, es decir sumaron todos los números anterior a N y lo colocaron ahí, de igual forma su valor correspondiente en la columna de número de bolitas de helado. Otros estudiantes pensaron que debía seguir la secuencia y como el valor anterior a la N es 11, dedujeron que N haría referencia a 12 por ser el siguiente, otros simplemente se limitaron a dejarla vacía, o colocar N también en la otra columna.

Tabla 25.

Soluciones presentadas tarea número 4, diagnóstico inicial



Respecto a la última pregunta planteada en esta tarea, en la que se pedía encontrar la cantidad de bolitas de helados para una familia de 5 integrantes sabiendo que cada uno se come dos helados, muchos estudiantes omitieron el hecho de que cada integrante se comía dos conos; pues la mayoría de los estudiantes solo tuvieron en cuenta la cantidad de integrantes (5) y como cada cono tiene dos bolitas de helado, justificaron que se necesitaban 10 bolitas, basándose en el hecho de que 5 x 2 = 10, omitiendo el hecho ya nombrado. Solo una estudiante pudo dar la respuesta correcta, G7I, argumentando que la respuesta era 20 debido a que como cada uno se come 2 helados, entonces cada uno se comerá 4 bolitas y como son 5 integrantes, 4 x 5 = 20.

6.2 Secuencias Numéricas

Entre las tareas de secuencias numéricas planteadas, se destaca la siguiente, que se aplicó en la primera fase de intervención.

Tabla 26.

Tarea número uno, intervención 1

Número de vueltas	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**	**30**	**50**
Tiempo en minutos	3							

Desde la perspectiva de esta investigación es de interés analizar cómo los estudiantes afrontan secuencias de tipo numérico, dada la poca familiaridad que tienen con ellas. Sin embargo, estas resultan fundamentales en su nivel de escolaridad, dado que para ellos toda actividad matemática gira entorno de las 4 operaciones básicas.

Se presenta entonces la solución planteada por el grupo 2:

Tabla 27.

Solución planteada grupo 2, tarea número uno, intervención 1

<table>
<tr><th>Respuesta</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Numero de vueltas</th><th>Tiempo en minutos</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>9</td></tr>
<tr><td>8</td><td>15</td></tr>
<tr><td>10</td><td>23</td></tr>
<tr><td>20</td><td>33</td></tr>
<tr><td>30</td><td>53</td></tr>
<tr><td>50</td><td>83</td></tr>
</table>
</td><td>Sumamos el resultado de arriba y lo colocamos abajo.</td></tr>
</table>

Se destaca dicha solución debido a la relación que plantea el grupo, pues los estudiantes logran crear una forma de resolver la secuencia tomando como base los valores dados, sin determinar si lo que están planteando tienen algún sentido con el contexto del problema. Pues se ve en la justificación que realizan los estudiantes (sumas) sin saber qué es lo que están sumando, pues siguiendo la estrategia que ellos plantean estarían sumando número de vueltas con minutos, operación que no tendría sentido. A pesar que cuya estrategia no fue la correcta, el grupo pudo mantenerla constante y determinar los demás valores de la tabla empleando la misma estrategia.

Otra respuesta que genera un análisis especial es la presentada por el grupo 3, pues ellos buscaron establecer una relación lógica a partir de los dos valores inicialmente dados en cada una de las magnitudes dadas, pues a partir del 2 y 3 buscaron un camino que condujera que iniciando del 2 llegaron al 3, y basados en eso pensaron que si debería sumar 1 para llegar a la respuesta, pues el camino que ellos observaron fue que si le sumo uno al 2 obtendría el 3 que está en la otra columna, y con esta idea completaron todos los demás valores solicitados.

Tabla 28.

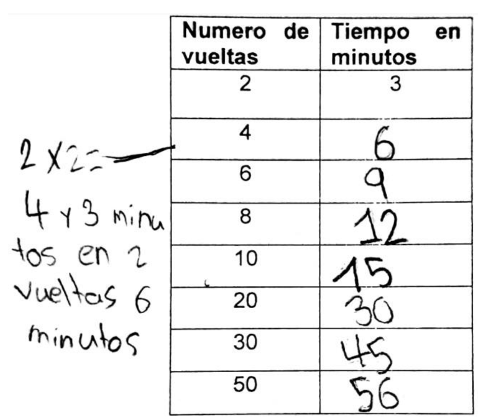
Solución planteada grupo 3 tarea número uno, intervención 1

<table>
<tr><th>Respuesta</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><th>Numero de vueltas</th><th>Tiempo en minutos</th></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>20</td><td>21</td></tr>
<tr><td>30</td><td>31</td></tr>
<tr><td>50</td><td>51</td></tr>
</table>
</td><td>Sumando 1 contodos los números</td></tr>
</table>

Esto puede suceder debido al afán que posee el estudiante por completar la tabla, buscar establecer de cualquier manera una relación entre los valores dados, sin detenerse a pensar si lo que están proponiendo tiene sentido en el contexto del problema. Buscando el patrón que determinaría el comportamiento de la secuencia, siendo en este caso (+1). Además, se destaca cómo el grupo utiliza este mismo razonamiento para resolver la otra pregunta, el problema de inversión, el cual consistía en determinar el número de vueltas, conociendo que el tiempo empleado fue 180 minutos.

Entonces como los estudiantes ya conocían el tiempo gastado, entonces se regresan, es decir buscan ese número que al sumar con 1 me diera 180, implícitamente plantear una ecuación, solucionándola y sabiendo que serían 179 vueltas. Se destaca el proceso correcto pues a pesar que la idea original no era la correcta para solucionar la secuencia, pudieron mantenerla bien clara y consiste para poderla emplear de manera contraria, es decir poder resolver el problema de inversión.

Es interesante la respuesta planteada por el grupo 6, pues plantean una solución con estructura diferente respecto a los demás, siendo la más exacta, pues lograron establecer una relación coherente relacionando inicialmente 3 valores. Es decir, redujeron toda la tabla en sólo concentrarse en calcular la pareja correspondiente a 4 vueltas, pues si podrían determinar esa pareja, utilizarían la misma estrategia para calcular los demás valores. Entonces partieron de esos 3 valores, 2,4 vueltas y 3 minutos, y se preguntaron qué operación podrían realizar para determinar el valor correspondiente. Lo que justifican ellas es que buscaron una operación que permitiera a partir del 2 llegar al 4, con el fin que existiera cierta relación en cada uno de los valores, es ahí donde descubren que una manera para lograr esto, que sería multiplicado por 2, y basados en esta hipótesis, lo que hicieron fue aplicar dicha operación en la fila tiempo



2 x 2 =
4 y 3 minutos en 2 vueltas 6 minutos

Numero de vueltas	Tiempo en minutos
2	3
4	6
6	9
8	12
10	15
20	30
30	45
50	56

Figura 61. Solución G6 tarea número uno, intervención 1

Además, basados en esa hipótesis, completaron la tabla, es decir empezaron a establecer la relación que existirá a partir del 2 hasta la cantidad de vueltas solicitadas, es decir como a partir del 2 llego a cada uno de esos valores, y conociendo ese camino, replicar dicha estrategia en la fila del tiempo partiendo del 3, para completar los valores correspondientes.

La otra tarea numérica planteada en una situación contextualizada y muy familiar para ellos, al igual que la anterior presenta un interrogante de inversión, esta tarea se aplicó en la segunda fase de intervención, la tarea fue:

Tabla 29.

Tarea número uno, intervención 2

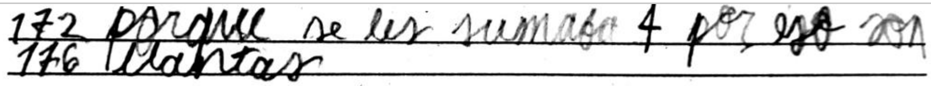
Número de carros	2	3	5	8	10	500	840
Número de llantas	8						

Al analizar se observa que el 100% de los grupos pudo completar la tabla sin mayores dificultades, pues todos entienden en el contexto que viven que normalmente un carro tiene 4 llantas. Surge entonces interesante en esta tarea analizar las formas que utilizaron para resolver el interrogante de inversión a partir de tener cierta cantidad de llantas encontrar el número de carros, debido que solo 3 grupos pudieron completar de manera correcta.

Se presenta la respuesta del grupo 3, la cual es:

Tabla 30.

Solución tarea número uno, intervención 2

Solución planteada	
Transcripción	"172 porque se les sumaba 4 por eso son 176 llantas"

Se analiza, porque el grupo presenta dicha respuesta, cabe destacar que el grupo pudo completar de manera correcta la tabla, incluso plantean una generalización exacta (G2: "porque se multiplica por 4"). Es decir, a pesar de plantear una buena manera para determinar la cantidad exacta de llantas cualesquiera fuera la cantidad de carros, por qué no lograron identificar dicha relación para plantear una forma y determinar en este caso la cantidad de carros. Analizando lo que expresa el grupo se logra ver la relación que plantean a partir de identificar que cada carro tiene 4 llantas, entonces la estrategia utilizada era buscar un número que al multiplicar por 4 nos diese 176, es decir realizar la operación inversa a la multiplicación. Pero este grupo no logró plantear esta relación, pues la relación que ellos plantearon fue a través de una suma, buscaron un número que al sumar con 4 diese la cantidad de llantas dadas, y dicho número seria 172.

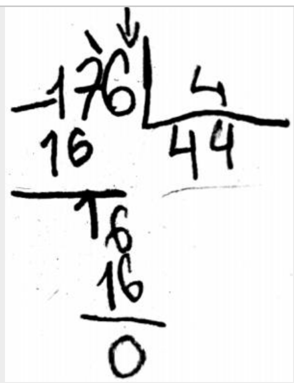
Este tipo de solución da entender como el grupo logra identificar el comportamiento de la secuencia hacia un solo lado, en este caso sería a medida que se conozca la cantidad de carros podrían calcular la cantidad de llantas, pero en el caso contrario donde se conozca las llantas identificar cuantos carros serian, les contaría entender este comportamiento. Es aquí donde la experiencia con operaciones matemáticas toma el rol central de la secuencia, porque si los estudiantes comprendieran bien el concepto y la relación que existe entre la multiplicación y división, podrían entender que, si hacia un sentido de la secuencia se debe multiplicar, en caso contrario se debería realizar la operación contraria a la multiplicación, en caso sería la división.

El grupo 6, a diferencia del grupo 3, la estrategia que plantean para resolver el interrogante es más lejana a la estrategia adecuada o carece de más sentido, debido a que lo que propone este grupo es multiplicar dicha cantidad de llantas por 4, es decir estarían aplicando la misma estrategia para encontrar la cantidad de llantas como para encontrar la cantidad de carros, y esto es algo ilógico porque son cantidades opuestas. Además, surge algo poco real sabiendo que si hay 176 llantas, aplicando esta estrategia obtendríamos 704 carros, lo cual carece de todo sentido debido que es imposible que si hay tantos carros, la cantidad de las llantas sea menor.

Se presenta ahora la solución del grupo 4, donde se evidencia el proceso que realizaron para dar con la solución del problema. Se destaca debido a que lograron entender de manera perfecta el comportamiento de la secuencia hacia ambos lados, y pudieron plantear en ambos casos las operaciones indicadas, además pudieron sustentar y defender su estrategia cuando se les preguntó porque habían realizado dicho proceso.

Tabla 31.

Solución del G4 problema de inversión tarea número uno, intervención 2

Respuesta	**Proceso**
44 carros se necesian para que hayan 176 llantas	
Justificación	
G4C: “como un carro tiene 4 llantas, tenemos que buscar un número que al multiplicado por 4 nos de 176” **Profesor: ¿Qué operación sería?** **G4C: “Una división”**	

Se presenta ahora la última tarea de tipo numérico, que se aplicó en la tercera fase de intervención, considerada a nuestro criterio la más compleja para los estudiantes. Dicha tarea era completar la tabla que se presenta a continuación, explicar la manera de encontrar la cantidad de tiempo gastado en cualquier cantidad de km y un problema de inversión.

Tabla 32.

Tarea número uno, intervención 3

Distancia (km)	**5**	**8**	**12**	**15**	**100**
Tiempo (minutos)	20				

De manera global se observa que 3 grupos completaron de manera adecuada la tabla, además ningún grupo intento resolver el problema de inversión, debido a que centraron su tiempo en resolver exclusivamente la tabla, y argumentar la manera en que lo hicieron. Surge interesante analizar las respuestas de ciertos grupos que no pudieron llegar a la solución, como la que presenta el grupo 2, la cual es:

Tabla 33.

Justificación grupo 2 tarea número uno, intervención 3

Respuesta

Distancia (km)	5	8	12	15	100
Tiempo (minutos)	20	35			

Justificación

Contando sen 5

Es interesante la relación planteada por el grupo, pues observaron que entre el 5 y el 8, valores de kilómetros dado, existe un 3 de diferencia, y a partir de ese 3 pudieron plantear cuanto tiempo se gastaría recorriendo dicha distancia, y como el valor inicial son 5 km, es ahí donde ellos determinan que se debe aumentar de 5 en 5, y como la diferencia entre el 5 y el 8 son 3, entonces obtiene que serían 15 minutos, y con los 20 inicial, obtienen que en 8 km se gastarían 35 minutos.

Esto surge de la necesidad que tiene el estudiante de relacionar todos los valores suministrados y empezar a operarlos de cualquier forma hasta obtener alguna respuesta que para ellos tenga significado. Al igual que el grupo 3, que a diferencia del grupo 2, su estrategia consiste en realizar más operaciones, pero parten del mismo indicio que el anterior grupo, buscar alguna operación que me permita relacionar los valores dados.

Este grupo se considera su respuesta más interesante, debido a los múltiples intentos que hicieron para poder plantear dicha estrategia, pues se observó la insistencia al realizar muchas operaciones (incluso esto es notorio en la hoja de respuesta), hasta que pudieron determinar una manera propia de que a partir del 5 se llegase al 20, pareja de valores iniciales en el problema, dicha estrategia fue:

Tabla 34.

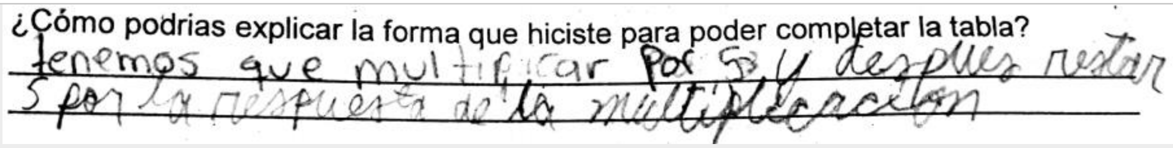
Justificación grupo 3 tarea número uno, intervención 3

Respuesta

Distancia (km)	5	8	12	15	100
Tiempo (minutos)	20	35	55	80	450

Justificación

Continuación tabla 35.

Respuesta
 ¿Cómo podrias explicar la forma que hiciste para poder completar la tabla? tenemos que multiplicar por 5 y despues restar. 5 por la respuesta de la multiplicacion
Transcripción
Tenemos que multiplicar por 5 y después restar **5 por la respuesta de la multiplicación**

Es atractivo como el grupo plantea dos operaciones para determinar cierta relación entre el 5 y el 20, omitiendo el contexto del problema y sin comprender si dichas operaciones tendrían sentido para la situación que se está trabajando. Esto pasa debido a que el grupo se olvida del problema y lo convierte en un problema netamente numérico, pues se traduce en buscar alguna manera de llegar al 20 desde el 5, sin analizar todo el comportamiento de la secuencia.

Cuando se le preguntó al grupo que explicaran su estrategia esto fue lo que dijeron:

G3G: "tenemos que multiplicar el número de la distancia por 5 lo mismo, y después hay que restarlo por 5 la respuesta de la multiplicación por 5 y da la respuesta porque 5 por 5 da 25 y si ves que es 20 es porque se le resto 5"

Como se puede observar, la estrategia planteada por el grupo fue multiplicar por 5 la cantidad de km y a dicho resultado restarle 5, y efectivamente en el caso dado se está cumpliendo su hipótesis, y debido a que se cumplió, el grupo realizo las mismas operaciones con las demás distancias solicitadas y de esta manera completaron la tabla, a excepción de los dos últimos valores, que al parecer realizar más una operación, pero la estrategia es la misma. Y deciden multiplicarlo por 5, debido a que el valor que ahí aparece, esto se confirma con la explicación de G3G pues cuando él dice “lo mismo” señala el 5 que se está dando al inicio del problema.

El profesor investigador no dice nada al grupo con el fin que el grupo presente dicha estrategia en el debate final de intervención y junto con el grupo puedan debatir si esta estrategia es correcta o no.

El grupo 5, al igual que los grupos anteriores intenta buscar la relación existe entre la pareja de valores dados, 5 y 20, pero a diferencia del grupo 3, este grupo solo plantea una operación, dicha tabla y justificación se presentan a continuación:

Tabla 35.

Justificación realizada por G5 tarea número uno, intervención 3

Respuesta

Distancia (km)	5	8	12	15	100
Tiempo (minutos)	20	32	48	60	400

Justificación

Multiplicando por 4 cada numero de arriba

Se observa que este grupo encontró una relación entre dichos valores de una manera más simple, o directa, pues determinaron que a partir de una multiplicar 5 por 4 obtendríamos 20, entonces aplicaron la misma estrategia y completaron la tabla. Pero, ¿cómo supo el grupo que aquel valor era 4?, a lo cual G5S responde:

G5S: “yo iba multiplicando por 4 cada número que nos daban porque al principio estaba el 5 y debajo el 20 entonces 5 por 4 20”

Después de conocer dichas soluciones, se disponer el grupo para realizar un debate general, donde se traería a colación las respuestas que los grupos plantearon y debatir entre todos para llegar a una respuesta única y correcta.

A la hora de iniciar el debate, el profesor investigador planteó la primera pregunta:

G4C:

G7I: “hay que multiplicar 4 para que nos de 20”

Profesor: ¿Algún otro grupo encontró otra estrategia?

G4S: “yo también hice lo mismo que G7I”

G3G: “nosotros hicimos multiplicar siempre por 5 ese número de los kilómetros y la respuesta se resta con 5”

A partir de esto, el profesor presenta en el tablero ambas respuestas, las cuales quedarías así:

Estrategia de G7I					
D	5	8	12	15	100
T	20	32	48	60	400

Estrategia de G3G					
D	5	8	12	15	100
T	20	35	55	70	495

Después de presentar las dos estrategias de solución, el profesor plantea:

Profesor: ¿Cuál de los dos grupos tiene la razón? ¿Por qué?

G4C: “el de G7I porque es justo”

Profesor: ¿Justo?

G4C: “si porque da directamente 20 sin restar”

G4S: “pero el de G3G también da 20”

Al observar que el grupo creía que ambas podrían ser soluciones para el problema, pues algunos estudiantes se inclinaban más con la de G7I pero no daban razones justas para desmeritar la de G3G, entonces el profesor planteo un nuevo interrogante.

Profesor: ¿Qué pasará si la distancia recorrida es 1km?

G5S: “¿4?

Profesor: G7I aplicando su estrategia, ¿cuánto daría?

G7I: “4 minutos”

Profesor: Y G3G aplicando su razonamiento

G3G: “cero”

Profesor: ¿Es posible que me cero?

Grupo general: “no”

Profesor: “¿por qué?

G4C: “porque si se mueve un km es imposible que me de cero”

G4S: “tiene que dar al menos un segundo”

Profesor: entonces que podríamos concluir

G5S: “que la manera correcta es multiplicando por 4 el número de kilómetros”

Se puede concluir respecto a esa fase de debate, la capacidad de algunos estudiantes a la hora de confrontarlos, lo que permite que razonen respecto a la solución que otro grupo plantea y analicen si dicha solución tiene o no sentido en el contexto del problema. Además, se pudo evidenciar como a partir de las preguntas que se estaban realizando iba generando en los estudiantes ideas que les permitían entender cuál de las dos estrategias presentadas en este caso iban a ser la correcta.

6.3 Secuencias de forma

Respecto a las tareas planteadas respecto a la forma, a continuación, se presenta las diversas maneras en que los estudiantes enfrentaron cada una de estas tareas y que merecen ser destacadas porque aportan a nuestra investigación

La primera tarea a analizar se presenta a continuación:

Figura 62. Tarea número dos, intervención 1

De manera global se sintetiza el trabajo realizado por parte de los estudiantes en cada uno de los términos que deben construir, en 3 de las categorías mostradas en el marco referencial, relacionadas con los diversos tipos de similitudes. La siguiente tabla muestra dichos resultados

Tabla 36.

Resultados obtenidos tipos de similitud, tarea dos, intervención 1

	No similitud	Similitud parcial	Similitud total
Término 4			7
Término 5		1	6
Término 10	2		5

Se puede observar la gran acogida y entendimiento que lograron los estudiantes en esta tarea, pues el 100% de ellos logró crear de manera perfecta el término 4; mientras que el término 5 logró construirlo correctamente el 86% de los estudiantes. Cabe destacar que en el término lejano el porcentaje también fue alto, no obstante, dos grupos no dibujaron nada en este término. Esto se debe a la naturaleza de la secuencia, debido a que no presenta características relevantes en cada uno de los términos que la componen, es decir la concentración de los estudiantes debe ser mínima para determinar qué varía en cada uno de los términos dados, y así dibujar acertadamente los demás términos.

A continuación, se presenta el dibujo realizado por el G4, este es un claro ejemplo de una construcción que presenta similitud total. Se destaca ya que además de dibujar el término correctamente, este grupo puede describir con sus propias palabras, la estrategia utilizada para dibujar dicho término.

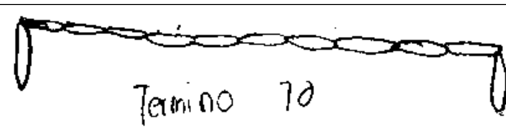
Construcción	
Justificación	Porque el numero de el que es el termino se pone de lado
Transcripción	G4: Porque el número de él que es el término se pone de lado.

Figura 63. Justificación tarea número dos, intervención 1

Además, esta misma tarea permitió analizar las generalizaciones planteadas por cada grupo, se observó en múltiples grupos la incertidumbre para poder plantear una manera de expresar la cantidad de palillos que tendría cualquier término. Es decir, siempre los estudiantes intentaban dar un valor numérico a ese “cualquier término”. Por ejemplo, el G3 propuso:

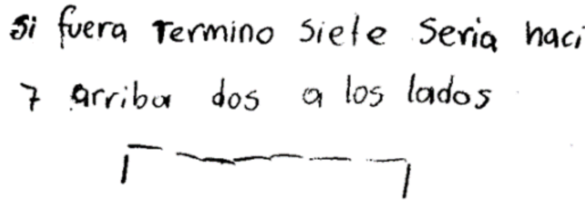


Figura 64. Justificación G7, tarea número dos, intervención 1

Además, cuando se les preguntó para que respondieran oralmente, una integrante del grupo la estudiante G3A respondió:

G3A: "si es el término 6 hay 6 arriba y dos abajo"

Donde abajo hace referencia a los palillos verticales, pero donde reafirma que ellos se preocupan en establecer un número fijo para ese término lejano. Pues inicialmente los estudiantes proponen que ese término es seis, luego cuando el profesor investigador les dice que replanten esa respuesta, que no necesariamente tiene que ser el término 6, sino cualquier término; los estudiantes de este grupo en su hoja de respuesta colocaron que ese cualquier término iba a ser el 7.

Se podría considerar como una generalización exacta pues el grupo logro notar la relación que existía entre el número del término y la cantidad de palillos, pero siempre en casos particulares. En cambio, el G5 propone una generalización consiste que permitirá determinar con exactitud la cantidad de palillos en cualquier término, es decir un claro ejemplo de una generalización exacta

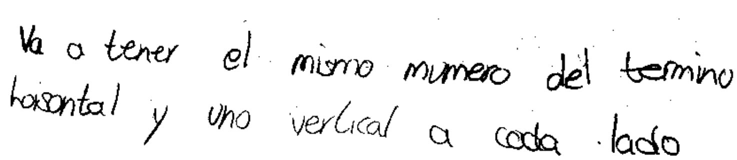


Figura 65. Generalización G5, tarea número dos, intervención 1

En esta actividad se plantea otra secuencia, que se presenta a continuación:

Figura 66. Tarea número cuatro, intervención 1

En esta tarea se plantea un nuevo interrogante en comparación a la tarea anterior, pues aparece un problema de inversión. Esto con el objetivo que los estudiantes a partir de la posible construcción de los términos solicitados con similitud total puedan identificar las características constantes de la secuencia y les permita a partir de conocer la cantidad total de cuadrados, determinar el número del término, realizando un proceso inverso a comparación de la manera que obtuvieron la cantidad de cuadrados conociendo el número del término.

Respecto a la tarea anterior, esta tarea resultó más compleja para los estudiantes, esto refleja los resultados respecto a los tipos de similitudes que se presentan a continuación:

Tabla 37.

Resultados obtenidos tipos de similitud tarea número cuatro, intervención 1.

	No similitud	**Similitud parcial**	**Similitud total**
Término 4	1	2	4
Término 5	2	2	3
Término 10	4	1	2

Ahora se analizan que a criterio del profesor investigador merecen ser mostradas, el G6, presenta una situación de los términos 4 y 5 de tener similitud parcial. Estos estudiantes logran establecer una nueva secuencia a partir de la observación de los términos dados pero se enfocan más en el término 3, pues se nota que basados en él, establecieron relaciones que se evidencian en los términos dibujados.

Figura 67. Términos 5 y 6 tarea número cuatro, intervención 1

Ahí se evidencia que los estudiantes lograron mantener la forma esencial de los términos de la secuencia, que consistía en tener forma rectangular, pero dichos términos no cumplen con las demás propiedades de la secuencia; esto es con el tamaño que debía tener esa forma rectangular. Aunque este grupo no escribió su estrategia para resolver esta tarea, se logra ver que para ellos la secuencia consiste en que cada término debe tener 3 cuadrados de ancho, mientras que el número del término puede indicar la cantidad que tuviera de largo. Esto puede deberse a que el grupo no logró centrarse en todos los términos dados, sino en uno solo; los estudiantes se enfocaron en establecer relaciones en función del término 3, pues ahí donde se empiezan a ver en los términos dibujados por ellos cumplen con las condiciones de similitud total pero solamente con el término 3, mas no con todos los demás términos de la secuencia.

Esto generó dificultades cuando los estudiantes intentaron generalizar el patrón que da lugar a los términos de la secuencia. Dado que partieron de una “la secuencia iba aumentando de tres en tres”, esto les impidió plantear una mejor generalización. Se considera que su generalización no es acorde a una exacta, ni siquiera podría considerarse aproximada debido a que no presenta al menos una característica constante que permita determinar de manera correcta la cantidad de cuadrados que tendrá cualquier término, además de ser confusa y poco entendible.

Tabla 38.

Justificación tarea cuatro, intervención 1

Solución planteada	• Porque es de 3 en y en cada término próximo es el doble de 3 pero le restamos 1.
Transcripción	Porque es de 3 en y en cada término próximo es doble de 3 pero le restamos 1.

El G2 logra establecer constante tanto la forma como el tamaño en cada uno de los términos dibujados, es decir estos estudiantes fueron capaces de conservar la misma imagen en el transcurso de los términos de le secuencia. Basados en esto se considera que las representaciones de este grupo hacen referencia a similitud total.

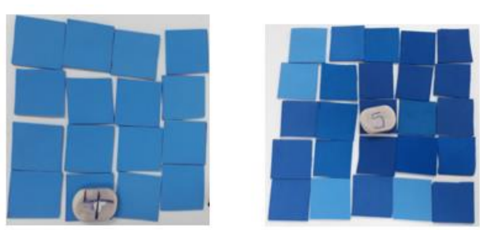
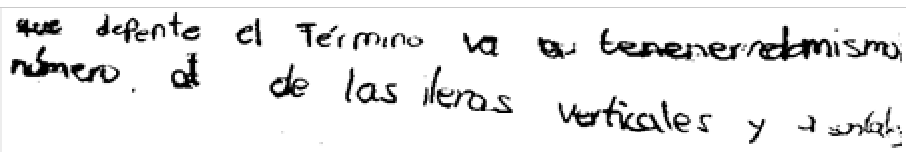


Figura 68. Término 4 y 5 representados en el material G2

Además, este grupo a partir de estos ejemplos de similitud total, pudo lograr y expresar una generalización exacta, pues logran establecer una idea concisa y precisa del patrón que tiene la secuencia, y así poder determinar con exactitud la cantidad total de cuadrados que tendrá cada término de la misma.

Tabla 39.

Generalización tarea número cuatro, intervención 1

Solución planteada	**Transcripción**
	Que depende el término va a tener el mismo número de las hileras verticales y horizontales.

Cuando se cuestiona sobre el trabajo realizado en cada uno de los grupos, se destaca el G4, respecto a la manera que está resolviendo esta tarea. A continuación, se presenta una transcripción de los diálogos sostenidos.

Profesor: ¿Podrían explicar lo que acabaron de hacer?

G4S: Si es el término 6, colocamos 6 para arriba y 6 hacia el lado, 6 hacia el lado, 6 hacia el lado.

Profesor: ¿Cuántos tendrá entonces el término 6?

G4S: 36.

Profesor: ¿Por qué?

G4S y G4G: Porque 6 × 6 es 36.

Figura 69. Término 6 realizado por G4

Es de destacar este grupo dado que fue el único que logró establecer una operación que permitiera encontrar la cantidad de cuadrados que tiene un término específico, en este caso el 6.

Esta tarea a criterio de la investigación, mereció realizar una discusión de manera colectiva respecto al trabajo realizado por cada grupo, con la intención de que cada grupo pudiera exponer y defender sus ideas, esta discusión era moderada por el profesor y tuvo una duración de 15 minutos, al fin de la sesión.

Inicialmente el estudiante G3G pasa a explicar lo que su grupo había entendido de la tarea:

> G3G: "Se multiplica por el mismo número, porque $2 \times 2 = 4\ \ 3 \times 3 = 9$" señalando cuando hace referencia al $2 \times 2 = 4$ al término 2 y el caso siguiente al término 3.

A partir de esta idea expresada por G3G, el profesor plantea una pregunta con un término más lejano; con la intención de que ese mismo estudiante pudiera resolverla basado en la idea que había propuesto, dicha pregunta fue: ¿Cuántos cuadrados tendrá el término 100?

A la cual G3G no da respuesta positiva, a pesar de que antes había evidenciado la característica fundamental de la secuencia. Al realizar esta pregunta varios grupos empezaron a pensar en ella y el G4S quiso participar, expresando:

G4S: “lo que dijo G3G es cierto porque $2 \times 2 = 4$ $3 \times 3 = 9$, entonces el termino 4 seria 16, porque al multiplicar por el mismo número que está ahí, seria $4 \times 4 = 16$.

Profesor: ¿Y el término 100?

G4S: Multiplicando por el mismo número.

Profesor: ¿Entonces cuántos tendrá?

A lo cual G4S responde escribiendo:

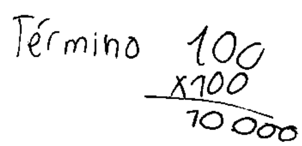


Figura 70. Justificación cantidad de cuadrados del término 100 G4S

En el procedimiento realizado por el estudiante se evidencia que logró entender en plenitud el comportamiento de la secuencia, aunque se preguntó por un término lejano, el estudiante pudo resolverlo sin dificultad. Esto nos indica que logró establecer una muy buena estrategia de solución que al final le permitió plantear una generalización exacta.

En la intervención 2, la tarea que concierne respecto a la forma es:

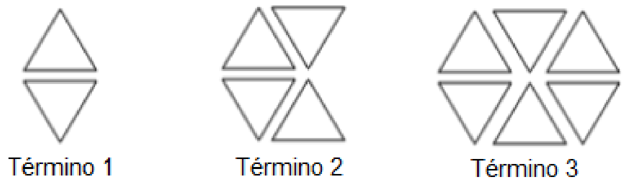


Figura 71. Tarea número dos, Intervención 2

Todos los resultados de los términos dibujados por cada grupo, se sintetizan en la siguiente tabla:

Tabla 40.

Resultados obtenidos tipos de similitud tarea número dos, intervención 2

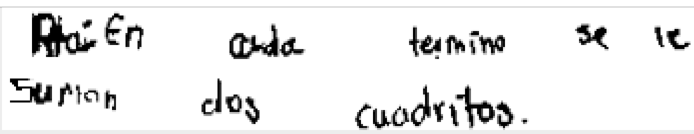
	No similitud	**Similitud parcial**	**Similitud total**
Término 5		1	6
Término 6	1	1	5
Término 10	1	1	5

Se puede notar la buena receptividad por parte del grupo, pues en cada uno de los términos más del 80% lo pudo realizar de manera correcta. Dado que esta es la tercera intervención después del diagnóstico y la primera actividad, se logra ver que se están familiarizando cada vez más con este tipo de tareas, esto se refleja en las hojas de respuesta y en la construcción de los términos con el material.

El G1, es uno de los grupos que logró establecer similitud total en los términos 5 y 6, pero al indagarlos respeto al término 10, no lograron dar una respuesta clara. Esto dado que los estudiantes lograron establecer relaciones término a término, y no relaciones con el número del término y la cantidad de triángulos que debe tener ese término. Por lo tanto no lograron construir el término 10, pues según su estrategia necesitarían el término 9, ya que lo que los estudiantes identificaron es que los términos de la secuencia van en aumento de 2 en 2. Pero no lograron establecer que siempre iba a ser el doble de número del término, esto se refleja en su hipótesis de generalización, pues es aproximada debido que es confusa y no permite encontrar con veracidad la cantidad de triángulos que tendrá cualquier término, solo expresa que este tendrá 2 más que el término anterior.

Tabla 41.

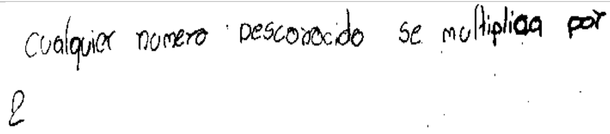
Justificación tarea número dos, intervención 2

Solución planteada	**Transcripción**
 Rta: En cada termino se le sumon dos cuadritos.	Rta: En cada término se le suman dos cuadritos.

Se presenta ahora la generalización exacta realizada por el G6, al observar el trabajo que cada grupo iba realizando este grupo fue el primero en establecer el patrón de la secuencia. Además, en la manera de expresar dicho patrón, debido a que plantean de inmediato una operación que les permitiera resolver la secuencia. Cuando se revisa la hoja de respuesta, coincide con la explicación verbal que realizaron integrantes del G6 cuando se les preguntó cómo sería la manera correcta de encontrar las respuestas.

Tabla 42.

Generalización planteada por el grupo 6, tarea número dos, intervención 2

 Cualquier numero desconocido se multiplica por 2	**Cualquier número desconocido se multiplica por 2.**

G2S: Es como si lo estuviéramos multiplicando 2 por la cantidad del término porque 2x2=4.

G2M: Cualquier número desconocido lo multiplicamos por 2 y ese es el resultado.

La última tarea que hace referencia a la forma fue aplicada en la tercera intervención; a continuación, se propone:

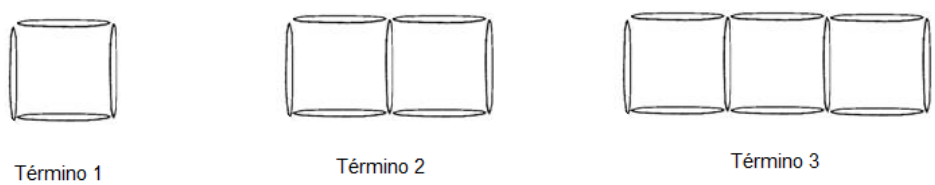


Figura 72. Tarea número tres, intervención 3

En esta tarea se puede observar de manera general múltiples avances, pues se logró ver varias respuestas que a nuestra consideración merecen ser destacadas. Al estar familiarizados con este tipo de tareas, los estudiantes mostraron un mayor grado de profundidad en sus análisis.

Por ejemplo, cuando se pregunta al estudiante G6M respecto al patrón que genera los términos de la secuencia, contestó:

G6M: Se multiplica por 4 pero hay algo raro porque 4, 4x2 no es 7.

A partir de esta respuesta, se logra ver como G6M y su grupo no tienen claro cómo se comporta la secuencia, pues logran ver una característica primordial: cada cuadrado tendrá 4 palillos, y basados en esa idea planten que existe alguna anomalía ya que al contar los palillos en el término 2, se encuentran que no hay 8 como ellos creen, sino que hay 7.

Después de dar un tiempo para que los estudiantes siguieran trabajando, siguieron experimentando con los palillos para lograr tener alguna otra idea del compartimiento de la secuencia, cuando el profesor se acercó para continuar con la discusión, otro integrante del grupo añadió:

G6S: Un palillo está sosteniendo las 3 partecitas de cada cuadrado.

Basados en esta conclusión el grupo represento los términos 4 y 5, obteniendo similitudes totales, es decir fueron términos construidos con todas las propiedades que tiene la secuencia, se presenta ahora el término 5 dibujado por este grupo:

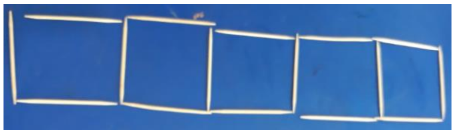


Figura 73. Término 5 construido con el material por el G6

Se esperaba que a partir de las ideas anteriormente nombradas por este grupo los estudiantes lograron sin mayores dificultades los demás interrogantes planteados. Pues lograron identificar dos características fundamentales de la secuencia, pero les costaba relacionarlas con los términos más lejanos. Es decir, el grupo identifica características basados en un término dado, y a partir de esa identificación lograr construir el término que sigue a ese término dado, pero cuando ya se les solicitó dibujar un término más lejano, en este caso el 10, la estrategia que ellos utilizaron fue:

G6M: el término 10 es como si tuviéramos dos términos 5, y si el término 5 tiene 16, entonces el término 10 va tener 32.

Con esta idea que propuso el grupo, se logra ver cómo intentan llegar al término solicitado basándose y utilizando solamente los términos que ya conocen. En este caso los estudiantes buscan construir el término 10 utilizando los que ya habían determinado. Como habían construido el término 4 y 5 de manera correcta, buscaron una relación que les permitiera involucrar o involucrarlos para crear el término 10. Como 10 es el doble de 5, conjeturaron que al realizar dos veces el término 5, encontraban el término 10. Además, como cada uno tenía 16, los estudiantes proponen que al juntarlos iban a obtener el término10 y este iba a tener 32 palillos. Cuando el profesor separó 32 palillos, se los entregó al grupo y les pidió que construyeran dicho término 10.

Figura 74. Construcción término 10, tarea número tres, intervención 3

Vaya sorpresa se llevó el grupo, cuando al construir el término 10 con los 32 palillos les sobró uno. Lo primero que los estudiantes pensaron fue que realizaron algo mal, es decir, justificaron ese palillo que sobró pensando que no lo habían colocado en alguna parte. Pero al revisar minuciosamente el término construido notaron que estaba bien, y al contar los palillos que colocaron notaron que había 31 palillos. Cuando el profesor les pregunto por qué había sobrado un palillo, el grupo no supo cómo responder, el profesor se fue y los dejo solos con la intención de que descubrieran y pudieran determinar dónde está el error.

Después de unos minutos, el grupo manifiesta:

G6: Si tuviéramos dos términos 5 pero por separado, pero como es el 10, es 5 y 5 y están pegados, habría un palillo que sostendría este cuadradito y el otro. Entonces digamos que este palillo termina el término 5, entonces en vez de poner otro de que empiece el otro 5, seguimos con este y seguimos con la secuencia.

Esto evidencia que el grupo logró encontrar el error que estaban cometiendo, al notar que al juntar dos términos 5 como era su idea original iba a llegar un punto donde iba a coincidir un palillo, que al a final era el palillo que les sobro cuando lo representaron el material.

En conclusión, se puede ver como los estudiantes a pesar de que logran identificar propiedades de la secuencia término a término, no son capaces de mantenerlas constantes a términos lejanos, y siempre van a intentar construir algún término desconocido utilizando o tomando como referencia los términos ya conocidos.

6.4 Secuencias de propiedades figurativas

Respecto a este tipo de secuencias, se implementaron 5 durante las 3 fases de intervención, a partir de los resultados obtenidos se reseltan las secuencias que a criterio del investigador merecen ser destacadas, debido a que contirbuyen con el objetivo de la investigación.

La primera de ellas, presentada en la primera intervención es, la que hacia referencia a la siguiente secuencia:

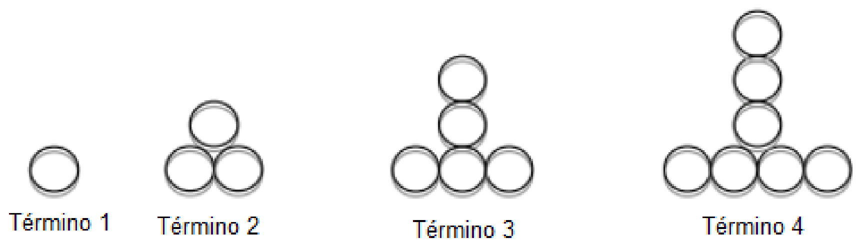


Figura 75. Tarea número tres, intervención 1

La siguiente tabla muestra de manera general el trabajo desarrollado por cada grupo de estudiantes en cada uno de los términos dibujados, respecto a las categorías de análisis mencionadas en el marco referencial:

Tabla 43.

Resultados obtenidos tarea número tres, intervención 1

	No similitud	**Similitud parcial**	**Similitud total**
Término 5		2	5
Término 6		2	5
Término 7	1	1	5

Cabe aclarar que en no similitud del término 7 de un grupo, hace referencia a que el grupo no realizó ninguna representación del término.

Se destaca la similitud parcial que evidencia el grupo 3, dado que identifica la característica primordial de la secuencia. Pero en el momento de la representación omiten la condición de que la fila vertical y horizontal son independientes; es decir no comparten ningún círculo.

A continuación, se presenta el término 5 y 6 realizado por este grupo.

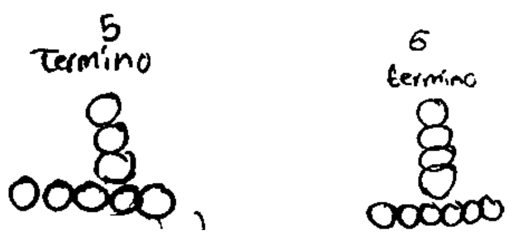


Figura 76. Términos 5 y 6 construidos por G3

Se observa que los estudiantes del grupo trabajaron operativamente dado que logran construir los términos con la característica fundamental. Solo que fallaron a la hora de percibir la cantidad de círculos de las filas, pues notaron que la fila vertical iba tener un círculo menos a comparación de la horizontal, pero contaron en la fila vertical el círculo que coincide con la fila horizontal, por tanto, no logran construir un término con similitud total.

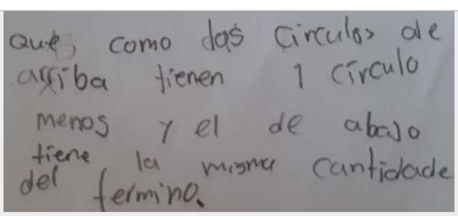
Este análisis se basa teniendo en cuenta las respuestas expresadas por el grupo en otros ítems de la tarea, pues logran tener respuestas exactas. Donde se evidencia las operaciones realizadas de manera ideal, lo que da a entender un buen análisis del comportamiento de la secuencia, pero aclarando su falta de percepción a la hora de dibujarlos. Se muestran ahora las respuestas del grupo.

Figura 77. Justificación término 100 por G3

Entre las generalizaciones presentadas por los grupos, traemos a colación la expuesta por el grupo 6. Esta se considera generalización exacta a pesar que los estudiantes no plantean una operación, si dan claro indicio de conocer la naturaleza del patrón y su comportamiento constante para generar los términos de la secuencia. Esto permite encontrar la cantidad de círculos que tendrá cada término de la secuencia. Se considera que debido a la poca familiaridad de los estudiantes con este tipo de interrogantes es que ellos llegan a plantear este tipo de generalizaciones.

Tabla 44.

Justificación tare número cuatro, intervención 1

Solución planteada	**Transcripción**
	"Que como los círculos de arriba tiene 1 círculo menos y el de abajo tiene la misma cantidad del término."

En cambio, la generalización presentada por el grupo 4, se considera generalización aproximada debido a que particularizan el término lejano; es decir le dan un valor específico a ese cualquier término, y a partir de que le asignan ese valor. En este caso para el grupo se traduce en el término 13, y basados en ello, lo representan y calculan la cantidad de círculos que tiene ese término. A continuación, se muestra dicha situación.

Figura 78. Generalización planteada por G4

Otra tarea planteada, que surgió interesante analizar se presenta a continuación

Figura 79. Tarea número tres, intervención 2

Se sintetiza de manera general el trabajo realizado por los estudiantes en cada uno de los términos solicitados respecto a tipo de similitud que presentaba cada uno.

Tabla 45.

Resultados obtenidos tipos de similitud, tarea número tres, intervención 2

	No similitud	**Similitud parcial**	**Similitud total**
Término 4	2	1	4
Término 5	2	1	4
Término 10	2	1	4

Desde la perspectiva de este trabajo es de gran interés analizar las representaciones, ya que a través de ellas se puede analizar el tipo de similitud que evidencian los estudiantes, a partir de un tipo de representación.

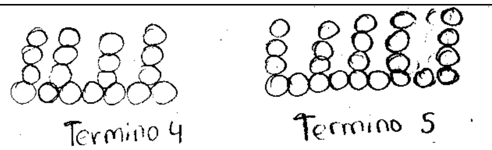
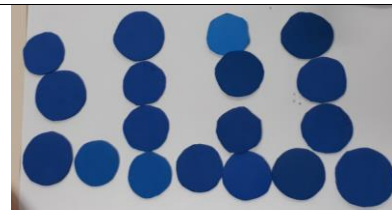
Construcción en hoja de trabajo	Construcción material concreto
	

Figura 80. Términos 4 y 5, tarea número tres, intervención 2

El dibujo anterior hace referencia a los términos 4 y 5 de la secuencia realizados por el grupo 3; allí se logra ver que los estudiantes no evidencian ningún tipo de similitud dentro de los términos de la secuencia. Lo realizado por el grupo se basa fundamentalmente en que no trabajaron la secuencia de manera conjunta es decir, construyeron el término 4 de tal forma que cumpliera las características identificadas en el término 3 de la secuencia, omitiendo los términos 1 y 2. Trabajar de esta forma es desarrollar la secuencia de manera parcial, solo basándose en el término inmediatamente anterior para construir el término siguiente, sin tener en cuentas todas las propiedades figurativas del patrón que genera la secuencia.

Los estudiantes del grupo 3, consideraron que la secuencia iba tener la cantidad de filas que indicara el número del término; por tanto, proponen que en el término 4 hay 4 filas, y en el 5, 5 filas. Sin notar que dicho comportamiento no se está cumpliendo en los términos 1 y 2 de la secuencia.

Respecto al otro dibujo que no presenta ninguna similitud, cuesta trabajo entender dicha representación, pues el dibujo realizado no presenta ninguna coherencia con los términos dados. En este caso el grupo no logró identificar al menos una propiedad de la secuencia, y construyó términos a consideración propia. Esto puede suceder debido a la poca percepción visual que ellos tienen, pues no logran seleccionar configuraciones relevantes que les permita entender el comportamiento de la secuencia. Se presenta a continuación los términos dibujados por este grupo.

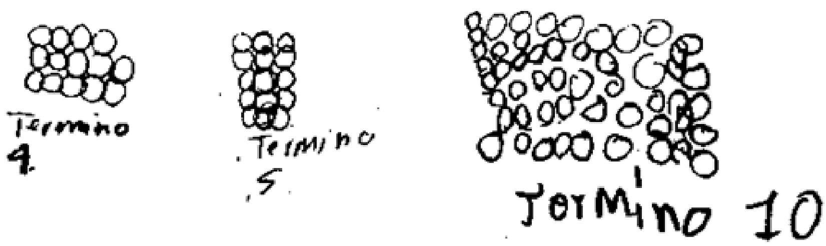


Figura 81. Términos 4, 5 y 10 que no presentan ningún tipo de similitud

Incluso cuando se le preguntó al grupo, que explicaran lo realizado esto dijo una integrante:

G2E: es que acá primero tenemos el 5, y acá después digamos que le sumamos 3, y acá después 2 y acá después 4, y acá 3, y acá otros 3 y luego acá otros 3 ”

A partir de esta justificación se logra entender un poco mejor lo realizado por el grupo, y la forma del por qué completaron cada término con tantos círculos.

Es de destacar la generalización exacta presentada por el grupo 5, pues lograron plantear una manera exacta planteando operaciones para encontrar la cantidad de círculos en cada uno de los términos de la secuencia; esto es evidencia de un tipo siendo una generalización consiste, pues lograron determinar que las 3 filas siempre iban a ser iguales y que iban a tener círculos como indica el término de la secuencia, agregándole los dos círculos constantes que unían dichas filas Se presenta a continuación dicha generalización.

Solución planteada	Multiplicamos el numero del termino por tres y se le suman 2
Transcripción	Multiplicamos el número de término por tres y se le suman 2

Figura 82. Generalización tarea número tres, intervención 2

Cuando se interrogo al grupo, que explicaron dicha solución, esto se obtuvo:

G5: "Depende del número del término si le iban agregando círculos de manera vertical y los dos fijos."

Esta justificación da muestras claras de las grandes habildades que tiene el grupo para plantaer la generalización, debido a que logran plasmar una manera consisa y clara la relacion existente entre el número del término y la cantidad exacta de circulos que tendrá, es decir logran plantear la cantidad de circulos en funcion del término.

Otra de las tareas que surge interesante analizar es la que se presenta a continuación:

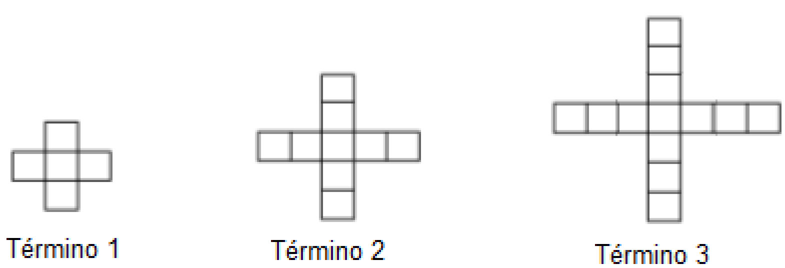


Figura 83. Tarea número uno, intervención 3

Respecto a esta tarea, surge de gran interés el ítem relacionado al problema de inversión, pues surgen diversas respuestas que merecen ser destacadas. Como la que presenta el grupo 1, que se presenta a continuación:

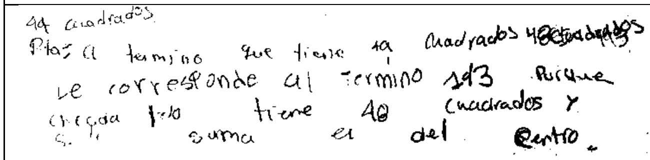
Solución planteada	Transcripción
	49 cuadrados El término que tiene 49 cuadrados 48 cuadrados le corresponde al término 193 porque en cada lado tiene 48 cuadrados y se le suma el del centro.

Figura 84. Problema de inversión, tarea número uno, intervención 3

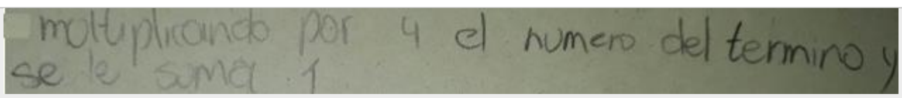
Se puede observar el poco análisis que tiene el grupo para comprender lo que se estaba solicitando, pues el enunciado planteaba que había 49 cuadrados en total, lo que ellos entendieron era que debían realizar el término 49. Es interesante que a pesar que los estudiantes del grupo realizaron otra cosa diferente a la solicitada, lo que hicieron corresponde a la cantidad de círculos que tendrá el término 49; es decir implícitamente emplearon una generalización exacta. Centrándonos nuevamente en el caso de inversión es de gran relevancia notar cómo el grupo se contradice a la hora de justificar dicha respuesta, pues al inicio afirma que tendrá 49 cuadrados, y al final dicen que 48 tendrá cada lado, lo cual contradice lo que afirman al inicio.

Se destaca ahora el trabajo realizado por el grupo 5, respecto a dos situaciones. La primera hace referencia a que fueron el único grupo que desarrolló de manera correcta la tarea, y surge interesante pues lograron llegar a ello después de plantear una generalización exacta, muy clara y consiste que les permitió entender la naturaleza de la secuencia y así determinar que término iba tener esa cantidad exacta de círculos, pues sus argumentos expresan que: “es 12, porque se multiplica 12 por 4 más 1”.

La otra situación por la que se destaca el grupo 5 es la manera que plantea la generalización exacta, expresándola de manera de general que podría considerarse como una función, temática desconocida para el grupo por el nivel de escolaridad donde se encuentran. En ella se logra evidenciar cómo pudieron elevar al máximo su percepción visual que les permitió notar todas las características de la secuencia, en las que se destaca que siempre habrá 4 filas iguales, una a cada lado, y que la cantidad de cuadrados que tenga una de ellas dependerá del número del término, sumándole la del centro que permanecerá fija. Dicha generalización se presenta a continuación:

Tabla 46.

Generalización tarea número uno, intervención 3

Solución planteada	**Transcripción**
 multiplicando por 4 el numero del termino y se le suma 1	Multiplicando por 4 el número del término y se le suma 1

Cuando se le preguntó que explicaran lo ahí expuesto, esto respondió G5S:

G5S: “Va tener la misma cantidad de cuadrados a cada lado según el número del término y uno del centro, el del centro nunca va cambiar”

La ultima secuencia que presenta interés, respecto a esta categoría, es la que se presenta a continuación:

Figura 85. Tarea número cuatro, intervención 3

Surge de gran interés el avanza significativo de los estudiantes, pues 6 de los siete grupos pudieron realizar un dibujo de los términos solicitados con similitud total, es ahí donde la familiaridad con este tipo de tareas toma un papel fundamental pues al ser esta una tarea de la tercera intervención se ven los resultados favorables después de un proceso que contaba con las dos fases previas, se ve que en esta última fase, los estudiantes lograron mejores representaciones, y sus generalizaciones fueron más consistentes y solidas respecto a las que planteaban al inicio del proceso. Se presenta por ejemplo la generalización planteada por el grupo 3.

Tabla 47.

Generalización tarea número cuatro, intervención 3

Solución planteada	los Circulos de arriba y abajo sera la cantidad del term... y la base siempre sera el circulo de la mitad
Transcripción	Los círculos de arriba y abajo serán la cantidad del termine y la base siempre será el circulo de la mitad

En esta generalización se destaca cómo el grupo pudo plantearla a partir de identificar una condición necesaria en cada término de la secuencia. En este caso el círculo que une las dos filas; los estudiantes logran generalizar y expresar cómo es el comportamiento de la secuencia. Incluso utilizando una expresión fundamental que da entender el razonamiento que lograron los estudiantes respecto a las características del patrón, dicha expresión es “base”, pues es a partir de ahí que pudieron establecer las demás propiedades figurativas que iba a tener dicha secuencia, y basados en eso poder plantear dicha generalización.

6.5 Diagnóstico final

La primera tarea que se analiza es la siguiente:

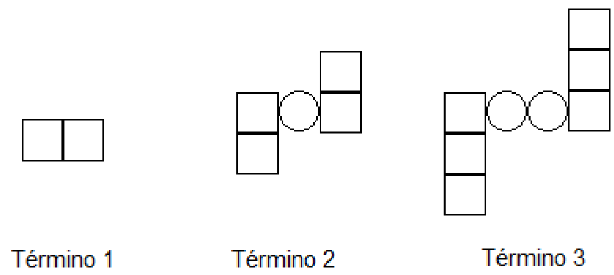


Figura 86. Tarea número uno, diagnóstico final

Los resultados de la actividad fueron en general bastante positivos, dado que en promedio el 72% de los estudiantes dieron descripciones del patrón que mostraban una comprensión de tipo de Similitud total para todos los términos de la secuencia.

Tabla 48.

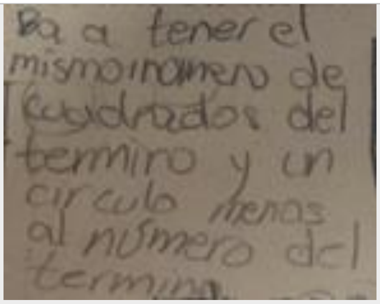
Resultados obtenidos tipos de similitud, tarea número uno, diagnóstico final

	No Similitud	**Similitud Parcial**	**Similitud Total**
Término 4	2	1	16
Término 5	1	2	16
Término 10	5	2	12

En cuanto a la descripción del comportamiento de la secuencia, se observó que gran parte de los estudiantes pudieron observar que la cantidad de cuadrados dependía del número del término. Se destaca así la presentada por G5S

Tabla 49.

Características tarea número uno, diagnóstico final

Solución planteada	**Transcripción**
	Va tener el mismo número de cuadrados del término y un círculo menos al número del término (G5S).

Sin embargo, también hubo soluciones que no presentaban ninguna similitud, como G3M que afirmó que para el término 10 habrían 10 círculos, es decir no logró encontrar la relación existente entre la cantidad de círculos y el número del término. Además, G4G cuando se le pregunto que explicara la manera para encontrar la cantidad de cuadrados que tendrá cada término respondió:

G4G:“contando la cantidad del termino de cuadros y contar cuantos faltan en los círculos.”

Asimismo, el trabajo de G2V se observa que al pasar del término 5 al término 10 dibujó que solo aumentaba un círculo, es decir omitiendo los términos intermedios; no obstante, obtuvo la cantidad de cuadrados laterales correcta. Es decir, su construcción del termino 10, respecto a la cantidad de cuadrados presenta similitud total, pero respecto a la cantidad de círculos, se observa que no logro establecer la relación existe, pues solo dibujo cinco círculos, debido a que tomo de referencia el término y este, tenía sólo cuatro. De lo que podemos deducir que la relación de los cuadrados con el término de la secuencia pudo entenderla, pero no fue lo mismo para los círculos, a pesar de que el patrón de los círculos era muy parecido.

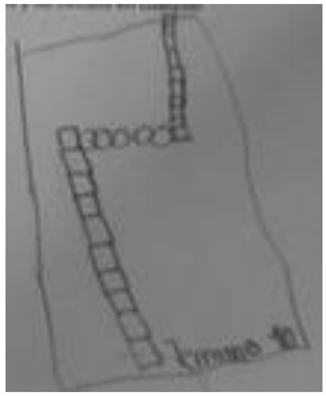


Figura 87. Término 10, tarea número uno, diagnóstico final

Las situaciones de los tres anteriores estudiantes, evidencia cosas tales como que el nivel de comprensión frente a este tipo de tareas para los estudiantes no progreso de manera igual, pues estos casos demostraron falencias fundamentales en este tipo de actividades. Además, fueron estudiantes que durante el proceso se evidencia poca insistencia a la hora de resolver las tareas que se plantearon.

Se presenta ahora la solución planteada por G3G que encontró el patrón correcto respecto a la cantidad de cuadrados y círculos, pero desestimo las características geométricas de los términos. Particularmente el posicionamiento de las columnas de cuadrados, siendo que en sus construcciones ubicó siempre la fila de círculos en el medio de ambas columnas de cuadrados (en forma de H mayúscula), es decir distorsionó la forma de los términos de la secuencia, y esto es una de las posibles razones para no poder plantear una generalización exacta. Se presenta a continuación los términos 5 y 10 construidos por este estudiante.

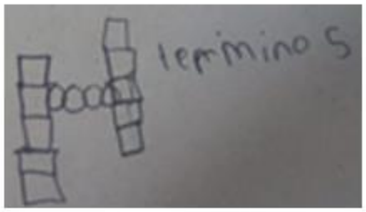


Figura 88. Construcciones tarea número uno, diagnóstico final

Otro elemento destacable de las respuestas obtenidas fue que las soluciones dadas por los alumnos que evidenciaban ser de tipo **ST** no mostraban diferencias destacables con respecto a las otras. Es decir, no había descripciones alternas del patrón que dedujeron los estudiantes. Además, la manera en la que describían dicho patrón tampoco difería bastante en referencia que ellos lo plantearon. Sin embargo, esto puede ser considerado positivo pues se ve demostrado que esa cantidad de estudiantes hubo cierto progreso en su manera de enfrentar este tipo de tareas después de los proceso de intervención.

La tarea de secuencia numérica trabajada en este diagnóstico es la que se presenta en la siguiente tabla:

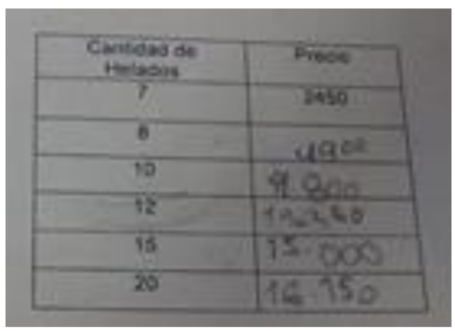
Tabla 50.

Tarea planteada número dos, diagnóstico final

Cantidad de Helados	**Precio**
7	2450
8	
10	
12	
15	
20	

Los resultados para esta actividad fueron totalmente contrarios a los de la actividad anterior, siendo que la mayoría de los alumnos no logró el objetivo de la actividad en ninguna cantidad solicitada, a pesar de ser una situación familiar para ellos.

Podemos ejemplificar usando las razones que daban los alumnos para sus resultados obtenidos, por ejemplo, cuando se le preguntó a G1J sobre cómo halló los valores de su tabla respondió: “Al número anterior se le iba sumando 2450.” En este caso podemos evidenciar un desconocimiento bastante grande por parte del estudiante en su capacidad de analizar dicha situación, pues a pesar de que esta situación sea de carácter cotidiano el estudiante debería saber que los valores de 7 helados y 8 helados no deberían diferir tanto. Replico dicha estrategia para completar la tabla con cada uno de la cantidad de helados suministrados.



Cantidad de Helados	Precio
7	2450
8	4900
10	[illegible]
12	[illegible]
15	15.000
20	[illegible]

Figura 89. Solución planteada, tarea número dos, diagnóstico final

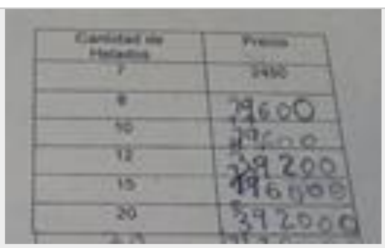
Otra respuesta que surge interesante analizar es la que presenta G2T que afirma que para encontrar los valores de la tabla se debe multiplicar dicha cantidad por el precio dado, omitiendo que el precio dado hacía referencia a 7 helados. Este tipo de respuesta reafirma lo observado durante el proceso de intervención, a pesar de que se disminuyó este tipo de estrategias a comparación de la fases anteriores, sigue siendo una estrategia muy repetitiva en los estudiantes, pues con el afán de operar con los términos dados, ellos realizan cualquier tipo de algoritmo matemático para poder plantear alguna respuesta, sin detenerse a analizar y pensar si dicho algoritmo tiene o no sentido para determinar una respuesta coherente en el contexto del problema.

Además, es interesante considerar cómo este estudiante cuando se le pregunta por un término lejano, lo particulariza diciendo que esa cualquier cantidad de helados en el contexto del problema, seria 30 helados, y replica dicha estrategia y da la solución para dicha cantidad de helados. Esto sucede debido a que el estudiante no comprende bien la relación término lejano, pues para él, cualquier término seria identificado con un número. Se presenta a continuación dichas respuestas del estudiante.

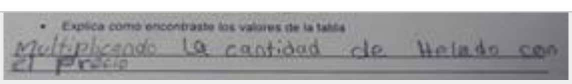
Tabla 51.

Solución planteada por G2T, tarea número 2 diagnóstico final

Solución planteada



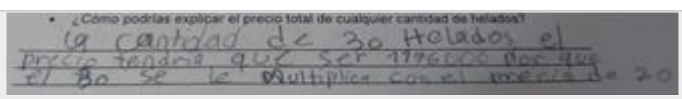
Justificación valores de la tabla



Explica como encontraste los valores de la tabla

Multiplicando la cantidad de Helado con el precio

Generalización



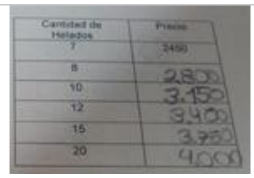
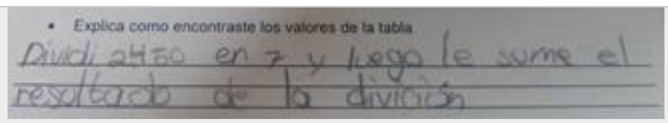
¿Como podrías explicar el precio total de cualquier cantidad de helados?

la cantidad de 30 Helados el precio tendria que ser 1176000 por que el 30 se le Multiplica con el precio de 20

Se destaca ahora la respuesta planteada por G5S pues fue la única que logró determinar una estrategia diferente a los demás estudiantes, siendo la más concisa para dar solución al problema. Ella pudo obtener a partir de conocer el precio de 7 helados, el valor correspondiente para uno solo, mediante una división, pero cometió el error de multiplicar dicho valor unitaria ya encontrado por la cantidad de helados solicitados, solo se puso a sumar en la columna de precio cada resultado con el valor de un solo helado. Es decir, pensó que la cantidad de helados era progresiva de uno en uno, sin percatarse que en algunos casos el aumento era de dos o de más helados.

Tabla 52.

Generalización tarea número dos, diagnóstico final

<table>
<tr><th>Solución planteada</th><td>
<table>
<tr><th>Cantidad de Helados</th><th>Precio</th></tr>
<tr><td>7</td><td>2450</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2.800</td></tr>
<tr><td>10</td><td>3.150</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3.400</td></tr>
<tr><td>15</td><td>3.750</td></tr>
<tr><td>20</td><td>4.000</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><th>Justificación</th><td>
• Explica como encontraste los valores de la tabla
Dividí 2450 en 7 y luego le sume el resultado de la división</td></tr>
</table>

Se destaca dicha estudiante por ser una de las que durante todo el proceso pudo determinar ideas muy relevantes que permiten demostrar cierto avance en el desarrollo del pensamiento algebraico, siendo esta una de ellas. G5S es una de las pocas que durante todas las fases de intervención siempre planteada generalizaciones muy consistentes, demostrando el avance que tuvo durante todas la investigación, cumpliendo así con uno de los objetivos planteados inicialmente.

La ultima tarea presentada en este diagnóstico final, fue la siguiente:

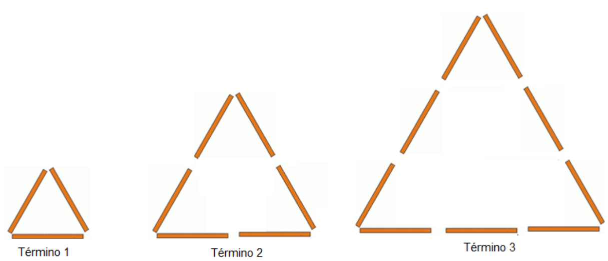


Figura 90. Tarea número tres, diagnóstico final

De manera general se sintetizan los resultados obteniendo por todos los estudiantes respecto al tipo de similitud que presentaba cada uno de los términos solicitados. Dichos resultados se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 53.

Resultados obtenidos tipos de similitud, tarea número tres, diagnóstico final

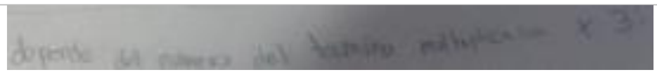
	No Similitud	Similitud Parcial	Similitud Total
Término 4	1	0	17
Término 5	1	0	17
Término 10	3	1	14

Se destaca cómo cierta cantidad de estudiantes logran analizar la naturaleza de la secuencia pero no son capaces de plantear o llegar a una generalización exacta, es decir saben cómo podría estar determinado cualquier término pero no plantean una manera exacta para determinar la cantidad exacta de palillos. Pudieron analizar que siempre el triángulo formado iba tener la cantidad de palillos a cada lado según el número del término, es decir cuando se les preguntaba la cantidad en un término conocido, por ejemplo, cuando se les pregunto por el término 10, algunos concluyeron que iba tener 10 a cada lado, explicando cómo sería el término, mas no determinado la cantidad exacta de palillos. Cabe destacar que algunos comentaron que la cantidad del término era la cantidad total de palillos.

Se presenta ahora la generalización exacta planteada por G4S, pues planteada una generalización muy acorde y precisa que permite determinar con exactitud la cantidad de palillos que tendrá cualquier termino. Pues logró determinar la relación que existe entre los tres lados, la cual es que siempre serán iguales, y notó que la cantidad de palillos está definida por el número del término.

Tabla 54.

Generalización tarea número tres, diagnóstico final

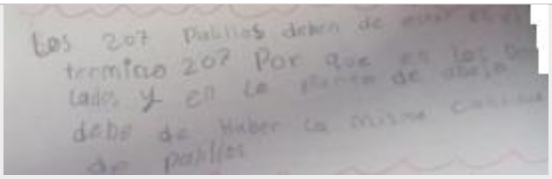
Solución planteada	
Transcripción	Depende del número del término multiplicarlo por 3

Cabe destacar que este estudiante se ve reflejado cierto avance en su habilidad para desarrollar este tipo de tareas, pues al inicio no podía plantear una generalización debido a su falta de manejo con estas actividades, pero después de las intervenciones se evidencia una mejor manera de plantear y solucionar este tipo de tareas.

Se presenta ahora una estrategia de solución al problema de inversión, pues pocos estudiantes se animaron a realizarlo, G5A, plantea que el los 207 palillos dados corresponden al término 207 debido a que el término indica la cantidad de palillos. Esto debido a que el estudiante no logró identificar la secuencia de manera completa, es decir centró su mirada en un solo lado el triángulo y partir de ahí logro determinar una posible relación, la cual es que es el lado tendrá la misma cantidad que indique el número del término.

Tabla 55.

Problema de inversión tarea número tres, diagnóstico final

Solución planteada	**Transcripción**
	Los 207 palillos deben estar en el término 207 porque en los dos lados y en la punta de abajo debe de haber la misma cantidad de palillos

De manera general se puede observar que a pesar de las intervenciones, a los estudiantes aún les queda demasiado trabajo resolver los problemas de inversión, una de las posibles causas es que ellos no logran identificar de manera inversa el comportamiento de las secuencias, logran identificar la secuencia hacia una sola dirección, solo logran verla de manera progresiva respecto al número del término, sería interesante profundizar en este grupo de estudiantes para crear más habilidades en este tipo de tareas y seguir desarrollando el pensamiento algebraico como se vio aquí reflejado.

6.6 Comparativos

En esta sección, analizaremos de manera comparativa los resultados obtenidos en los dos diagnósticos, aclarando que el diagnóstico final fue después de 3 intervenciones.

Respecto a las tareas de secuencias de forma, y propiedades figurativas respeto a las 3 categorías de análisis sobre los diferentes tipos de similitudes, se observa de manera general un cierto avance respecto del diagnóstico inicial, donde los resultados reflejaron como conocimiento en este tipo de tareas.

Se presenta a continuación una tabla comparativa respecto al tipo de secuencia de forma.

Tabla 56.

Comparativa diagnósticos tarea de forma según tipos de similitud

	No similitud		**Similitud Parcial**		**Similitud Total**	
	D.I.	D.F	D.I.	D.F.	D.I.	D.F.
Término 4	3	1	3	0	9	17
Término 5	4	1	2	0	9	17
Término 10	11	3	0	1	4	14

Siendo esta la tarea de forma, comparando las tareas planteadas se observa cierta similitud que evidentemente debe tener por ser del mismo tipo, pero también su nivel de complejidad, pues en el inicial la tarea era más concisa y se representaba de manera de línea recta, debido a que los círculos se iban agregando en filas de manera horizontal, mientras que, en el final, ya apareció la figura de triángulo y las propiedades inmersas que esta figura tiene.

Tabla 57.

Comparativa diagnósticos tarea de propiedades figurativas

	No similitud		**Similitud Parcial**		**Similitud Total**	
	D.I.	D.F	D.I.	D.F.	D.I.	D.F.
Término 4	6	2	5	1	4	15
Término 5	6	1	5	2	4	15
Término 10	13	5	0	1	2	12

Los resultados anteriormente mostrados muestras los resultados respecto a la tarea de secuencia con propiedades figurativas, ambas tareas, fueron las que más se vieron complejas para los estudiantes, debido a su alto nivel de rigor, pues en ambas tareas existían ciertas propiedades que los estudiantes debían identificar y las cuales generaban inconvenientes para ellos.

Cabe destacar que en el diagnóstico inicial participaron 15 mientras que en el final lo hicieron 18. De comparar estos dos tipos de tareas y analizando los resultados anteriormente categorizados podemos deducir ciertas cosas, tales como:

- La manera de construir los términos se ve ampliamente mejorada, es decir a la hora de presentar la construcción de algún término de los solicitados, los estudiantes entienden la importancia que tiene un buen dibujo para que se cumpla con la secuencia. Las construcciones realizadas en el diagnostico final demuestran que los estudiantes tuvieron más en cuenta cada uno de esos detalles que poseía la secuencia, mientras que en el inicial se observan dibujos más intuitivos, más apresurados que en ocasiones generan no lograr un mejor tipo de similitud

- Se vio de manera diferente la manera en que los estudiantes se enfrentaron al termino lejano, pues en el diagnóstico inicial la idea naciente de ellos era construir los términos uno por uno hasta llegar al término solicitado, es decir, para dibujar el término 10, algunos estudiantes lo que realizaron fue hacer desde el término 6 hasta poder llegar con dicho término. O incluso en algunos casos lo hacen o buscan establecer una manera para llegar hasta el término 50, como se presenta a continuación con el caso de G7I que en la tarea dos del diagnóstico inicial realizo lo siguiente:

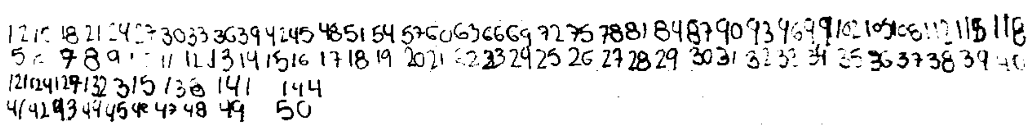


Figura 91. Estrategia utilizada para encontrar un término lejano

Independientemente si el estudiante logro encontrar de manera correcta la cantidad de bolitas en cada término, lo que se destaca es la estrategia utilizada para encontrarlo, pues se tomó la tarea de realizarlo desde el término 5 que era junto al 4 los primeros en ser solicitados hasta el 50 que era el término más lejano que debían construir.

De manera general se observa que 6 estudiantes intentaron replicar esta estrategia en el diagnóstico inicial, buscar la construcción del término lejano a partir de la elaboración de todos los términos inmediatamente anteriores. Esto sucede debido a la poca familiaridad que tenían los estudiantes a la hora de enfrentar este tipo de tareas, además porque no tenían las suficientes destrezas y habilidades para poder representar un término lejano, o alguna estrategia diferente para encontrarlo sin tener que realizar todos los términos anteriores.

En cambio, en el diagnóstico final no se evidencio ningún caso donde se aplicará dicha estrategia, al contrario se observó que los estudiantes intentaron representar el termino lejano con base a los términos dados, estableciendo relaciones y así poder representar dicho término, donde en algunos casos tuvo similitud total y en otros no.

- También se evidencia como el problema de inversión sigue siendo complejo para los estudiantes, pues en ambos diagnósticos se observa que un porcentaje muy bajo de ellos puede resolverlo de manera correcta, demostrando así poca comprensión operativa para entender la naturaleza de la secuencia, pues solo la estarían entiendo de manera progresiva, sin entender que de manera desciende también deberá cumplirse que se tratase de forma ascendente.

- Respecto a las generalizaciones planteadas, se pudo observar que las del diagnóstico final fueron más estructuradas y claras respecto a las del diagnóstico inicial, incluso se observó situaciones que expresan las generalizaciones en función del número del término, demostrando así como esos estudiantes están logrando crear bases importantes de comprensión de conceptos fundamentales del pensamiento variacional que en grados superiores serán mayormente profundizados.

Después de analizar dichos diagnósticos, podemos concluir como el proceso de intervención ayudo a generar en los estudiantes mejores ideas relacionadas con el estudio de la variación pues se observa una mejoría en los resultados analizados y en la manera en que ellos desarrollan este tipo de tareas. Reafirmando así la postura de Rivera (2010) donde asegura que después de que los estudiantes están habituados a enfrentarse a este tipo de tareas sus resultados van a ser cada día mejores, además este tipo de tareas crea en los estudiantes relaciones más sólidas respecto a la variación y el cambio, y se logra ver como ellos identifican que el cambio que posee cada figura a medida que el número del término va cambiando, además que dicho cambio debe cumplir unas condiciones o cumplir un patrón, es decir dicho cambio debe ser proporcional.

Esto reafirma que las intenciones iniciales y los objetivos de la investigación han sido completados, pues se evidencia como se desarrolló el pensamiento variacional durante todo el proceso investigativo, pues se logra ver como los estudiantes en cada tarea van potenciando sus ideas relacionadas con el pensamiento variacional, porque cada vez que se les exigía en una nueva tarea más compleja a la anterior, la mayoría de los estudiantes lograba asimilar lo que tenía que realizar y esto le permitía dar solución a las tareas planteadas.

Se espera a largo plazo que los estudiantes que participaron de dicha investigación, cuando empiecen a profundizar en su plan de estudios temáticas centradas al pensamiento variacional, dichas nociones aquí cimentadas les permita desenvolverse de la mejor manera con esas temáticas, y así re afirmar que los objetivos planteados si se lograron cumplir.

7. Conclusiones

En este capítulo se presentan conclusiones relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. La identificación de los aspectos que lograron y descubrieron durante el proceso investigativo respecto al proceso de generalización en cada una de las tareas desarrolladas. El análisis se realizar con base en la actividad reflejada por los estudiantes durante el desarrollo de todas las fases metodológicas pues es de nuestro interés mostrar el desarrollo que los estudiantes lograron durante dicha investigación. Para esto se divide esta apartado en dos, la primera parte hace referencia respecto a los objetivos planteados, y la segunda conclusiones generales de la investigación

7.1 Respecto a los objetivos planteados

El objetivo general de la investigación es "Potenciar el desarrollo del proceso de generalización en estudiantes de 3º (7 - 9 años) al resolver actividades que incluyen el estudio de secuencias con diferentes tipos de similitudes, presentadas en material concreto". Se considera que gran parte de este objetivo se cumplió, ya que se vio reflejado en las diversas tareas planteadas maneras muy consistentes que realizaron los estudiantes respecto a las actividades planteadas. Dando un buen indicio de la buena comprensión y análisis en su parte de análisis para entender razones de cambio, nociones de funciones que hacen parte fundamental del pensamiento algebraico. Como se habla de desarrollo, de ese cambió constante en la manera de razonar matemáticamente, sería interesante seguir desarrollándolo para crear en los estudiantes bases más sólidas para que en grados superiores y en situaciones de la cotidianidad se desenvuelvan de una mejor manera.

A partir de dicho objetivo, se plantearon los siguientes específicos:

Diseñar y analizar tareas que involucren el estudio de secuencias con diferentes similitudes (numéricas, figúrales y de forma) para fomentar el desarrollo del proceso de generalización. Para cumplir dicho objetivo se crearon cinco pruebas, dos diagnósticos (inicial y final) y tres pruebas de intervención. Siendo cada una de ellas, pruebas muy bien elaborados con el fin que nos permitiera observar ciertas acciones que podrían realizar los estudiantes, tareas variadas, en cada una de las pruebas, hubo tareas de los tres tipos.

Analizar las generalizaciones exactas y aproximadas que desarrollan los estudiantes cuando abordan el estudio de secuencias presentadas en material concreto. Para dicho objetivo siempre un interrogante planteado era, que ellos debían exponer de alguna manera la estrategia que les permitiera encontrar cualquier término desconocido, observando cierto avance en las generalizaciones que presentaban al inicio respecto a las que presentaron en las tareas finales. Además de esto, tareas que se podrían representar en material concreto, con el fin de que los estudiantes a través del material pudieran explorar de mejor manera el comportamiento de las secuencias y poder plantear mejores generalizaciones.

Caracterizar el proceso de generalización que logran desarrollar los estudiantes después de su participación en diferentes actividades asociadas con el análisis de secuencias con diferentes tipos de similitudes. Para este objetivo, se realizó un estricto control en cada una de las tareas que se podían considerar con esta categoría de análisis, pues en todas ellas se observó y analizó todos los dibujos que realizaron los estudiantes en cada de las tareas, centrando nuestra atención en aquella que merecieran un análisis más profundo.

7.2 Conclusiones Generales

De manera general se pudieron observar diversas deducciones, respecto al campo investigativo, educativo y personal. Además, surgen diversos interrogantes que serían interesantes analizarlos en futuras investigaciones.

En los resultados se puede observar cómo los estudiantes logran identificar y estudiar las diferentes propiedades fundamentales que componen las estructuras de las secuencias. Esto debido a que observaron las diferentes relaciones que se pueden establecer a partir de unos términos dados, y las características de similitud y diferencia de cada una de estos términos que componen la secuencia. Una fortaleza evidenciada, fue como la mayor parte de los estudiantes lograron reconocer con cierta pericia el comportamiento de las secuencias numéricas, estructuras que generan un desarrollo en el proceso matemático y fortalecen los contenidos aritméticos. Siendo esto importante para fortalecer el pensamiento numérico.

Otros sistemas de representación de las secuencias, como la ayuda tabular, les permitieron a los estudiantes establecer relaciones de cambio con respecto a la posición, en este caso con el número del término. Favoreciendo la creación de posibles generalizaciones y los términos solicitados con similitud total.

Se observa el proceso de ciertos estudiantes a la hora de desarrollar este tipo de tareas, y el avance significativo que tuvieron a medida que las fases de intervención iban pasando, representando términos con mejores características de similitud, y planteando cada vez mejor posibles generalizaciones. Observando como los estudiantes que logran construir términos con similitud total, tienden a plantear generalizaciones más consistentes, es decir que para poder plantear generalizaciones exactas se debe partir de crear términos que cumplan las condiciones de tener similitud total.

La función que cumple en este tipo de tareas el material concreto, pues se evidenció en varias situaciones que permiten confrontar las hipótesis que plantean los estudiantes a la hora de definir el comportamiento de una secuencia. Además, les permitió que ellos mismos pudieron identificar las falencias que podían estar presentado. Incluso, el material concreto sirvió como medio exploratorio para que los estudiantes pudieran simular algunos términos, predecir algunos compartimientos de la secuencia, y a partir de ahí poder conjeturar posibles generalizaciones.

Se logró ver también, como los estudiantes de tercer grado se enfrentan a temáticas de grados más superiores, y muestran respuestas o maneras muy coherentes de desarrollarlas. Entre las que se destacan, problemas de regla de 3, inclusive nociones de funciones lineales y cuadráticas. Dando a entender que es posible desarrollar el pensamiento algebraico desde edades tempranas, para crear bases más sólidas del razonamiento matemático de los estudiantes.

De manera personal, fue muy interesante observar el potencial que pueden tener los estudiantes a estas edades tempranas, pero debido a múltiples factores no siempre es desarrollado de buena manera. Pues observe como a medida que se ponen tareas diferentes a los estudiantes, ellos pueden desarrollar y demostrar que tienen condiciones para exigirles cada vez más, descartando la posibilidad de que por ser "pequeños" no se les puede trabajar o enfatizar en ciertas temáticas de la matemática. Sería interesante continuar con este grupo de estudiantes en niveles académicos más avanzados, profundizando con ejercicios similares de mayor complejidad, para que potencien las nociones aquí construidas, y reafirmen lo anteriormente descrito.

Se espera generar otras investigaciones relacionadas con este trabajo, investigaciones que revaliden las Tareas propuestas. Este análisis muestra a los investigadores en Educación

Matemática las principales dificultades y habilidades que presentan los estudiantes al momento de identificar patrones en el proceso de generalización. Pues esta investigación muestra el desarrollo del razonamiento algebraico que los estudiantes lograron en el grado tercero de primaria al abordar las tareas propuestas, confirmando lo que plantean los estándares curriculares nacionales.

Referencias

Báez, M. D. J., & Hernández, S. (2002). El Uso de Material Concreto para la Enseñanza de la Matemática. *Taller de Matemáticas del Centro de Ciencia de Sinaloa. Obtenido Noviembre*, *13*, 2007.

Bednarz, N., C. Kieran y L. Lee (1996), *Approaches to Algebra*: *Perspectives for Research and Teaching*, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Butto, Z., Cristianne Rojano Ceballos, Teresa. Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación matemática*, 22 (3), 55-86.

Castelnuovo Emma 1970. Didáctica de la matemática Moderna. Madrid: Trillas.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning.

Durán Ponce, R. (1999), *Reconocimiento de patrones en secuencias numéricas y de figuras por alumnos de sexto grado de primaria*, tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav (México).

Filloy, E. (1999), "Modelos Teóricos Locales (MTL): Un Marco teórico y metodológico para la observación experimental educativa", en *Aspectos teóricos del algebra educativa*, Grupo Editorial Iberoamericana, cap. 1.

Filloy, E., T. Rojano y L. Puig (2008), *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*, Berlín, Heidelberg y Nueva York, Springer.

Gattegno, C. (1967). La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático. In *El material para la enseñanza de las matemáticas* (pp. 3-12). Aguilar.

Godino, J. D., Batanero, C., & Vicenç, F. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Mason, J., A. Graham, D. Pimm y N. Gower (1985), *Routes of Roots of Algebra*, Gran Bretaña, The Open University Press.

MEN, C. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. *Magisterio, Bogotá*

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional

Mínguez, R. T. (2012). Materiales educativos digitales para la intervención en estudiantes con dificultades de aprendizaje en matemáticas. *DIM: Didáctica, Innovación y Multimedia*, (23), 1-10.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pestalozzi, J. H. (1988). *Cartas sobre educación infantil* (No. 372 P4y).

Pizlo, Z., Sawada, T., Li, Y., Kropatsch, W. G., & Steinman, R. M. (2010). New approach to the perception of 3D shape based on veridicality, complexity, symmetry and volume. *Vision research*, *50*(1), 1-11.

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The Question of method in a Vygotskian Semiotic Approach. Dordrecht: *Springer, Advances in Mathematics Education, 157-182*

Rivera, F. (2010). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics: Psychological and Pedagogical Considerations*. Dordrecht, Holanda: Springer.

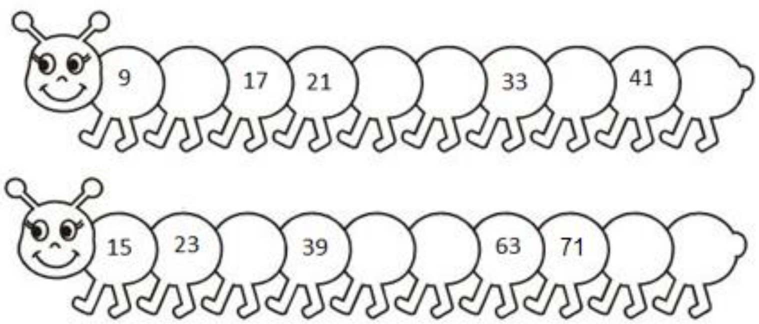
Teixidor, E. (2010). Pajifiguri: un material manipulativo y cuento interactivo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *74*, 75-92.

.

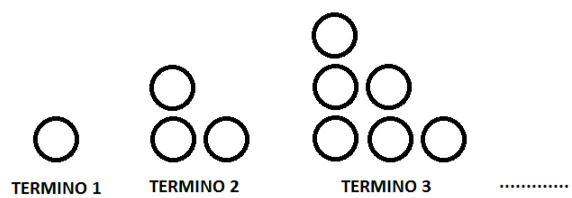
Apéndices

Apéndice A. Prueba diagnóstico inicial

1. Observa cuidadosamente los valores que aparecen ubicados en cada parte del ciempiés y completa los que hacen falta. Escribe qué tienes en cuenta para colocar los números faltantes.



2. A continuación aparecen los primeros tres términos de una secuencia.



Siguiendo la secuencia dibuja el término 4 y 5.

i. ¿Cuántos círculos forman el término 4? Y ¿el término 5?

ii. ¿Por cuántos círculos está formado el término 10?

iii. Escribe cómo le explicarías a tu mamá el número de círculos que necesitas para construir el término 50.

3. Observa la siguiente secuencia:

…

Siguiendo la secuencia.

i. ¿Cuántos círculos forman el término 4? Y ¿el término 5?

ii. ¿Por cuántos círculos está formado el término 10?

iii. Escribe cómo le explicarías a tu mamá el número de círculos que necesitas para construir el término 50.

4. Completa las siguientes tablas

Número de conos	NUMERO DE BOLITAS DE HELADOS
1	2
2	4
3	
	8
5	
	12
	14
8	
9	

	20
	22
N	

i. Si fueran a comprar 20 conos, ¿Cuántas bolitas de helado se necesitarían?

ii. Si cada integrante de una familia con 5 integrantes se quiere comer dos conos cada uno ¿Cuántas bolitas de helado serán necesarias?

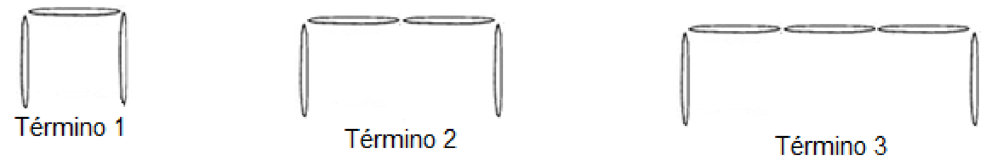
Apéndice B. Intervención 1

1. Un atleta recorre 2 vueltas a la cancha pequeña en 3 minutos. Teniendo en cuenta esta información completa la siguiente tabla y responde las preguntas.

Numero de vueltas	**Tiempo en minutos**
2	3
4	
6	
8	
10	
20	
30	
50	

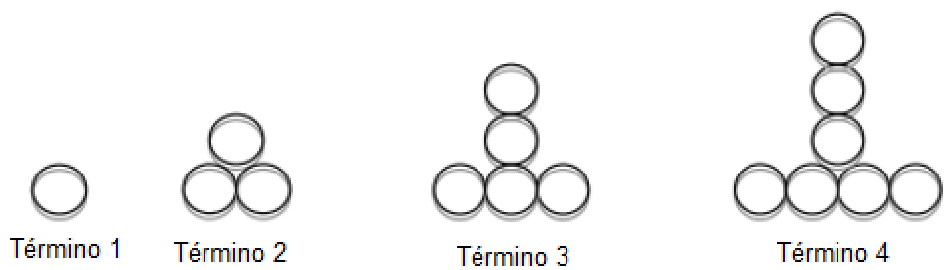
- Explica cómo completaste los términos de la tabla.
- Si el atleta diera vueltas en 180 minutos. ¿Cuántas vueltas crees que recorrió? Justifica tu respuesta.

2. Observa y responde



- Dibuja los términos 4 y 5 en tu hoja de respuesta
- Con ayuda del material entregado representa los términos 4 y 5.
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Explica cómo podrías encontrar la cantidad de palillos que hay en cualquier término de la secuencia

3. Dada la siguiente secuencia



- Dibuja las figuras de los términos 5, 6 y 7 de la secuencia.
- Construye con el material dado los términos de la secuencia 5, 6, 7 y 8.
- ¿Cuántos círculos tiene el término 15?
- Podrías calcular el número de círculos del término 50, 100. Justifica tu respuesta.
- Escribe la estrategia que te permite encontrar los círculos que conforman cualquier término de la secuencia.

4. Dada la siguiente secuencia:

- Con ayuda del material entregado construye los términos 4, 5, 6.
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Si tuviera una figura de la secuencia tiene 144 cuadrados, ¿Qué término de la secuencia sería? Explica tu respuesta.
- Explica cómo podrías encontrar la cantidad de cuadrados que hay en cualquier término de la secuencia .

Apéndice C. Intervención 2

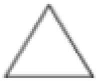
Número de carros	2	3	5	8	10	500	840
Número de llantas	8						

1. Un carro normalmente tiene 4 llantas, si en un garaje tenemos muchos carros normales, ayudanos a completar la siguiente tabla

- ¿Cómo podrias explicar la forma que hiciste para poder completar la tabla?
- Si un señor contó que habían 176 llantas ¿De cuántos carros hara referencia esa cantidad de llantas? Justifica tu respuesta
- ¿Cómo podrías encontrar la cantidad de llantas que hay en cualquier garaje con cualquier cantidad de carros?

2. Observa la siguiente secuencia

- Representa con el material entregado los términos 4 y 5
- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7

- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Explica cómo podrías encontrar la cantidad de triángulos que hay en cualquier término de la secuencia
- Si  significa triángulo superior, ¿Cuántos triángulos superiores tendrá el termino 25? ¿Por qué?

3. Observa la siguiente secuencia:

- Dibuja en tu hoja de respuesta el término 4 y el término 5.
- Con ayuda del material entregado construye los términos 4, 5, 6 y 7.
- Puedes dibujar o describir en palabras cómo sería el término 10? ¿Cómo lo supiste? Y ¿el término 20?
- Explica cómo puedes encontrar la cantidad de círculos para cualquier término de la secuencia.

4. Observa la siguiente secuencia

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 6 y 7
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Explica cómo encontrar la cantidad exacta de triángulos y de cuadrados en cualquier término.
- Si tengo 74 triángulos, ¿a qué termino hará referencia esa cantidad de triángulos?

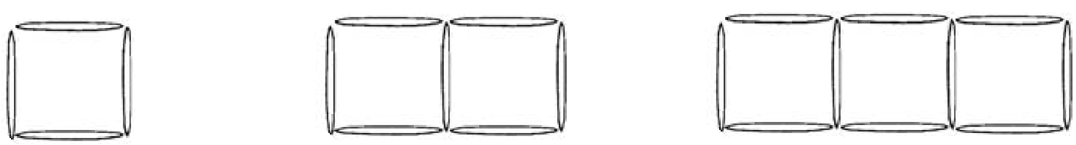
Apéndice D. Intervención 3

1. Un vehículo recorre 5 km en 20 minutos, si el conductor no varía la velocidad, ayuda a completar la siguiente tabla:

Distancia (km)	5	8	12	15	100
Tiempo (minutos)	20				

- ¿Cómo podrias explicar la forma que hiciste para poder completar la tabla?
- Si el conductor maneja su automovil por 72 minutos seguidos ¿Cuántos Km habrá recorrido? Justifica tu respuesta
- Como podrias encontrar la cantidad de tiempo gastado en cualquier cantidad de Km recorrido?

2. Observa la siguiente secuencia de palillos

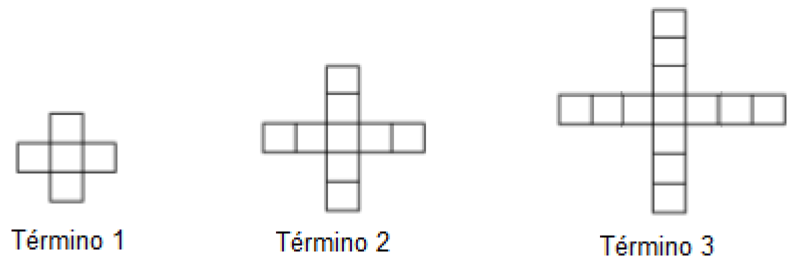


Término 1 Término 2 Término 3

- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
- Puedes dibujar o describir con palabras, ¿cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Si tengo 79 palillos, ¿a qué termino hará referencia esa cantidad de palillos?

- Como podrías encontrar la cantidad de palillos en cualquier término de la secuencia

3. Observa la siguiente secuencia



- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Si tengo 49 cuadrados, ¿a qué término correspondería?
- Explica la forma de encontrar la cantidad de cuadrados de cualquier término de la secuencia.

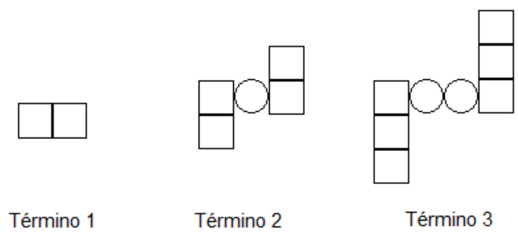
4. Observa la siguiente secuencia

- Dibuja en tu hoja de respuesta el término 4 y el término 5.
- Con ayuda del material entregado construye los términos 4, 5, 6.

- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Explica cómo puedes encontrar la cantidad de círculos para cualquier término de la secuencia.

Apéndice E. Prueba diagnostico final

1. Observa la siguiente secuencia



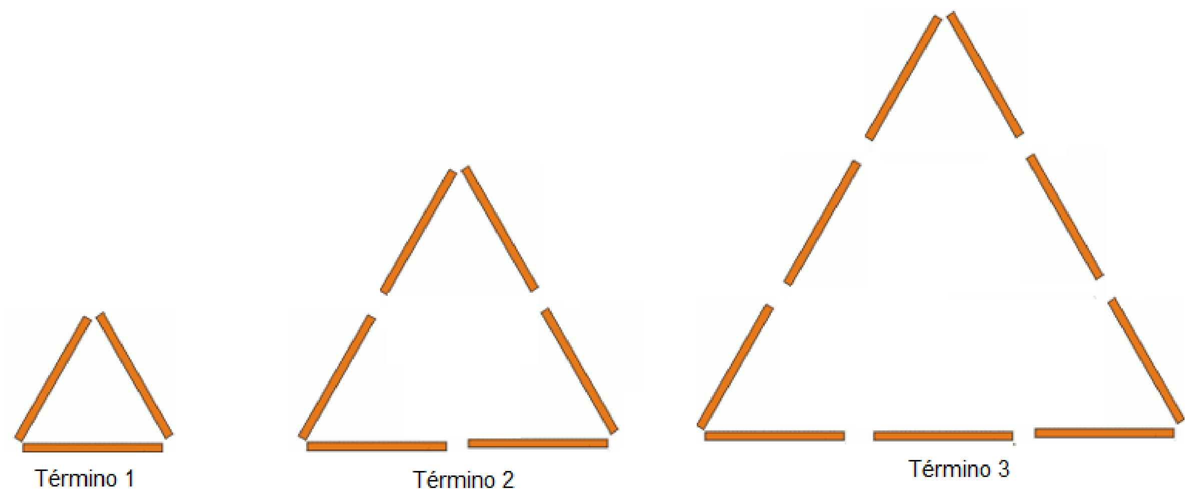
- Dibuja en tu hoja de respuesta los términos 4 y 5
- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Explica cómo encontrar la cantidad exacta de cuadrados y de círculos en cualquier término.

2. En el supermercado “HELADO” el valor de 7 helados es $2450. Con esta información completa la siguiente tabla.

Cantidad de Helados	Precio
7	2450
8	
10	
12	
15	
20	

- Explica como encontraste los valores de la tabla
- ¿Cómo podrías explicar el precio total de cualquier cantidad de helados?

3. Observa la siguiente secuencia



- Representa en el material entregado los términos 4 y 5
- Puedes dibujar o describir con palabras cómo sería el término 10? Explica tu respuesta.
- Si tengo 207 palillos, ¿a qué término hará referencia esa cantidad de palillos?
- Como podría encontrar la cantidad de palillos en cualquier término de la secuencia