

EQUIVALENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN CON LA EXISTENCIA DE BASES
DE HAMEL.

KAREN DANIELA ARANA ROMERO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

EQUIVALENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN CON LA EXISTENCIA DE BASES
DE HAMEL.

KAREN DANIELA ARANA ROMERO

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director:
Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2019

DEDICATORIA

A mis padres.

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos:

- ★ A Dios por haberme permitido estudiar esta carrera.
- ★ Al profesor Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin, director de este proyecto, por su paciencia, compromiso con este y por todos su aportes en el transcurso de la carrera.
- ★ A mis padres.
- ★ A mis amigos que siempre estuvieron apoyándome en los buenos y malos momentos.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. PRELIMINARES	17
1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS	17
1.2. CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA ABSTRACTA	22
1.2.1. ANILLO DE POLINOMIOS	22
1.2.2. CUERPO DE FRACCIONES	28
1.3. CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL	30
2. EL i-GRADO HOMOGÉNEO DE POLINOMIOS Y FRACCIONES	34
2.1. EL IDÓNEO CUERPO DE ESCALARES	34
2.2. El i -GRADO	34
2.3. CUERPO DE FRACCIONES DE i -GRADO HOMOGÉNEO 0	42
3. BASE DE HAMEL Y EL AXIOMA DE ELECCIÓN	45
3.1. CARDINALIDAD DE LAS BASES	53
3.2. OTRAS EQUIVALENCIAS DEL AXIOMA DE ELECCIÓN	61
BIBLIOGRAFÍA	63

RESUMEN

TÍTULO: EQUIVALENCIA DEL AXIOMA DE ELECCIÓN CON LA EXISTENCIA DE BASES DE HAMEL. *

AUTOR: KAREN DANIELA ARANA ROMERO **

PALABRAS CLAVE: AXIOMA DE ELECCIÓN, AXIOMA DE ELECCIÓN MÚLTIPLE, BASE DE HAMEL, LEMA DE ZORN, CUERPO DE FRACCIONES, FAMILIA CASI DISJUNTA.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo principal de este trabajo es estudiar precisamente el rol que el axioma de elección juega en el álgebra lineal, especialmente en lo que se refiere a la existencia de bases para espacios vectoriales. Estudiaremos la demostración de que el axioma de elección es equivalente a que todo espacio vectorial admita una base expuesta en el libro *Axiom of Choice* de Horst Herrlich ¹. Esta prueba se divide en 2 partes.

En la primera parte para probar la existencia de base para cualquier espacio vectorial se usa una equivalencia del axioma de elección: el Lema de Kuratowski-Zorn, el cual afirma que todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal.

En la segunda parte, para probar que el axioma de elección se deduce a partir de la afirmación de que todo espacio vectorial admite una base, se parte de una familia de conjuntos no vacíos $(X_i)_{i \in I}$ y se considera el anillo de polinomios $\mathbb{K}[X]$ y el cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(X)$, siendo $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. También definimos el i -grado para cada $i \in I$ y se muestra que el conjunto $\mathbb{K}(X)$ sobre el subcuerpo de fracciones de i -grado homogéneo 0, es un espacio

* Trabajo de grado

** Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

¹ H. HERRLICH. *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*. Bremen, Alemania: Springer, 2006.

vectorial y por tanto existe una base. Sobre esta base definimos una función de elección de manera explícita deduciendo así el axioma de elección múltiple, el cual es una equivalencia del axioma de elección.

Finalmente, usando el concepto de familias casi disjuntas, se muestra que cualquier base para el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ necesariamente es no numerable.

ABSTRACT

TITLE: EQUIVALENCE OF THE AXIOM OF CHOICE WITH THE EXISTENCE OF HAMEL BASIS *

AUTHOR: KAREN DANIELA ARANA ROMERO. **

KEYWORDS: AXIOM OF CHOICE, AXIOM OF MULTIPLE CHOICE, HAMEL BASIS, ZORN'S LEMMA, FIELD OF FRACTIONS, FAMILY ALMOST DISJOINT.

DESCRIPTION:

The main objective of this work is to study precisely the role that the axiom of choice plays in linear algebra, especially in regard to the existence of bases for vector spaces. We will study the demonstration that the axiom of choice is equivalent to every vector space admitting a base set forth in Horst Herrlich's Axiom of Choice book (HERRLICH, *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*. Theorem 4.44). This proof is divided into 2 parts.

In the first part to prove the existence of a basis for any vector space, an equivalence of the axiom of choice is used: the Kuratowski-Zorn's Lemma, which states that every partially ordered set is not empty in which every chain (totally ordered subset) It has an upper bound, it contains at least one maximal element.

In the second part, to prove that the axiom of choice is deduced from the claim that every vector space admits a base, it starts from a family of non-empty sets $(X_i)_{i \in I}$ and is considered the polynomial ring $\mathbb{K}[X]$ and the field of fractions $\mathbb{K}(X)$, where $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. We also define the i -grade for every $i \in I$ and it is shown that the set $\mathbb{K}(X)$ on the subset of fractions of i -homogeneous grade 0, It is a vector space and therefore there is a base. On this basis we define an choice function explicitly deducing the axiom of multiple choice, which is an equivalence of the axiom of choice.

* Bachelor Thesis

** Mathematics School. Sciences Faculty. Universidad Industrial de Santander. Director: Carlos Enrique Uzcátegui Aylwin.

Finally, using the concept of family almost disjoint, it's shown that any basis for the \mathbb{R} - vector space $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is necessarily not countable.

INTRODUCCIÓN

El axioma de elección, de manera informal, afirma que para cada familia de conjuntos no vacíos, es posible elegir algún elemento de cada conjunto de la familia, es decir, existe una función f que asigna a cada conjunto de la familia un elemento de éste. Puede parecer un resultado matemático “obvio” o intuitivo, pero cuando hablamos de conjuntos arbitrarios, cuyo cardinal puede ser infinito, lo obvio a veces no es tan obvio. Sin embargo, aunque hoy en día la gran mayoría de matemáticos aceptan la utilización del axioma de elección, existe una corriente matemática denominada «Intuicionismo» donde se rechaza el uso del axioma de elección, pues éste es un axioma no constructivo, en el sentido de que afirma la existencia de un objeto sin determinarlo de forma explícita. Esta corriente afirma que todas las pruebas de existencia deberían ser completamente explícitas, ya que si existe algo, debe ser posible construirlo, describirlo o al menos presentar un procedimiento para hallarlo.

Sin embargo, el solo hecho de que se haya usado el axioma de elección para demostrar la existencia de un conjunto no significa que no pueda ser construido por otros métodos.

Ernst Zermelo lo formuló en 1904 para probar el Teorema de buena ordenación que afirma que todo conjunto puede ser bien ordenado ¹. Así mismo, permite demostrar, por ejemplo en topología, el Teorema de Tychonoff que afirma que todo producto de espacios compactos es compacto. Gödel, en los años 30 en su trabajo titulado “Consistencia del axioma de elección y la hipótesis del continuo generalizada con los axiomas de la Teoría de Conjuntos”, probó que los axiomas de la teoría de conjuntos propuestos por Zermelo y Fraenkel (conocidos como los axiomas ZF) son consis-

¹ A. ORAYEN. *Filosofía de la lógica*. Madrid, España: Editorial Trotta, 2004.

tentes con el axioma de elección, lo cual generó la pregunta: ¿implica esto que el axioma de elección pueda ser demostrado a partir de los otros axiomas de ZF, es decir, que es un teorema de ZF? Paul J. Cohen, en los años 60, mostró que no, es decir, el axioma de elección es independiente. Cohen obtuvo una medalla Fields gracias a ese resultado.

Se podría contar más del axioma de elección pues tiene una historia larga y muy interesante; no obstante, la cuestión que nos interesa en este trabajo es su relación con el álgebra lineal y en particular con el concepto de base para espacios vectoriales. Un resultado bien conocido es que todo espacio vectorial tiene una base y la demostración de este hecho hace uso del Lema de Kuratowski-Zorn, el cual afirma que todo conjunto parcialmente ordenado no vacío en el que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior, contiene al menos un elemento maximal. Lo más interesante es que su recíproca también es cierta, es decir, el axioma de elección se puede deducir a partir de la afirmación de que todo espacio vectorial tiene una base. Para probar esto, se parte de una familia de conjuntos no vacíos $(X_i)_{i \in I}$ y se considera el anillo de polinomios $\mathbb{K}[X]$ y el cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(X)$, siendo $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Luego se le asocia a la familia un espacio vectorial sobre un cuerpo especial de tal manera que a partir de una base (que por hipótesis existe) se defina explícitamente una función de elección que permita deducir el axioma de elección múltiple, el cual es una equivalencia del axioma de elección y que de manera informal afirma que para cada familia de conjuntos no vacíos, es posible elegir un subconjunto finito de cada conjunto de la familia. Por esta razón este trabajo se titula la equivalencia del axioma de elección con la existencia de bases de Hamel en cada espacio vectorial sobre un cuerpo arbitrario.

En 1964 James D. Halpern ² trabajó en una teoría más débil que ZF, llamada WZF,

² J. HALPERN. "Bases for vector spaces and the axiom of choice." En: *Proceedings of the Ameri-*

y dedujo el axioma de elección de la afirmación que dice que, en cada espacio vectorial, cada conjunto que lo genera contiene una base. Él conjeturó que el axioma de elección no puede ser deducido de la afirmación débil, que dice que cada espacio vectorial admite una base, incluso si se hace la suposición adicional de que todas las bases tienen el mismo cardinal.

En 1984 Andreas Blass ³ presentó una refutación parcial de esta conjetura. Fue un resultado parcial, ya que no trabajó en WZF, si no en ZF. Uno de los objetivos principales de esta tesis es presentar ese resultado de Blass siguiendo el libro *Axiom of Choice* de Horst Herrlich ¹.

En el primer capítulo definimos las nociones básicas de la teoría de conjuntos donde presentamos algunas equivalencias del axioma de elección, tales como el axioma de elección múltiple (ver Lema 1.1.4) y el Lema de Zorn (ver Lema 1.1.10). También definimos algunas nociones referentes al anillo de polinomios $\mathbb{K}[X]$ y al cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(X)$ y por último, revisamos, entre otras cosas, conceptos básicos de los espacios vectoriales: combinación lineal e independencia lineal. Todo esto con el propósito de exponer la prueba formal de la existencia de una base para cualquier espacio vectorial.

El segundo capítulo es crucial en el trabajo pues encontramos un conjunto que es fundamental en la prueba de que el axioma de elección se deduce a partir de la existencia de una base para cualquier espacio vectorial. Iniciamos el proceso definiendo el i -grado homogéneo para algunos polinomios y para algunas fracciones en $\mathbb{K}(X)$, también se define el conjunto de factores en X_i de un monomio y el conjunto de variables en X_i que aparecen en un polinomio. Se muestra la relación entre el i -grado con estos dos conjuntos. Por su importancia, se le dedica la Sección 2.3

can Mathematical Society. 17 (1966), págs. 670-673.

³ A. BLASS. "Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary Mathematics*." En: *American Mathematical Society* 31 (1984), 31–33.

al conjunto de fracciones de i -grado homogéneo 0, que es un subcuerpo de $\mathbb{K}(X)$. El tercer capítulo contiene la parte central de este trabajo. En él se muestra que el axioma de elección es necesario y suficiente para garantizar la existencia de base para cualquier espacio vectorial (ver Teorema 3.0.2). Además se examina la dimensión de las bases de Hamel para el anillo de polinomios $K[X]$, donde X es el conjunto de variables, y también se prueba, usando como herramienta el concepto de familias casi disjuntas, el hecho de que cualquier base para el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ necesariamente es no numerable (ver Teorema 3.1.12). Y por último, a manera de información y para complementar el tópico, se mencionan otras dos aplicaciones del axioma de elección en espacios vectoriales (ver Teorema 3.2.2 y Teorema 3.2.3).

1. PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es precisar y organizar los elementos de este trabajo, concretando los conocimientos existentes y estableciendo la notación básica de cada teoría.

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

Georg Ludwig Philipp Cantor, alrededor del año 1870, fue el inventor más importante de la teoría de conjuntos. Según la definición de conjunto que Cantor propuso, éste es una colección de objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento. Esta idea sencilla y tan intuitiva resulta ser también ingenua porque produce contradicciones, por ejemplo, la paradoja de Russell: ¿Existe el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos? (1903). Pero pronto la teoría axiomática de Zermelo (1908) y refinamientos de ésta debidos a Fraenkel (1922), Skolem (1923), Von Neuman (1925) y otros sentaron las bases para la teoría de conjuntos actual ⁴.

La teoría de conjuntos constituye parte fundamental en el desarrollo de cualquier rama de las matemáticas. Particularmente en álgebra, las relaciones, funciones, operaciones entre conjuntos, clases, etc. son un soporte indiscutible para la construcción de conceptos que son útiles en el siguiente capítulo.

De manera natural se tiene la siguiente definición para el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos no vacíos.

⁴ M. HUERTAS A. & MANZANO. *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*. Cataluña, España: Editorial de la Universitat Oberta de Catalunya, 2002.

Definición 1.1.1. Sea $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacía. **El producto cartesiano** de la familia $(X_i)_{i \in I}$ está dado por el conjunto

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \text{para cada } i \in I, f(i) \in X_i \right\}.$$

Si $X_i = X$ para cada $i \in I$, denotamos al producto cartesiano simplemente por X^I , que por definición representa la familia de funciones de I en X . Llamamos a las funciones pertenecientes al producto cartesiano como **funciones de elección**.

Un ejemplo importante y muy usado en análisis real de producto cartesiano es la familia de sucesiones de números reales, denotada por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ las cuales son funciones de \mathbb{N} en \mathbb{R} .

El axioma de elección fue formulado explícitamente por primera vez en 1904 por **Ernst Zermelo**, matemático y lógico alemán, del que hizo uso para probar una conjetura de Cantor la cual afirmaba que todo conjunto puede ser bien ordenado ¹. Esto fue fundamental tanto para el desarrollo de la teoría de conjuntos, como para el de otras ramas de las matemáticas. Sin embargo, el axioma propuesto por Zermelo recibió muchas críticas y, célebres colegas como Borel, Baire y Lebesgue se opusieron a ese principio, ya que este establece la existencia de una cierta función sin dar una definición explícita de la misma, algo inadmisibles para muchos en aquel momento.

A continuación mostraremos su respectiva definición.

Definición 1.1.2. El axioma de elección (AE) establece que para cada conjunto I no vacío y cada familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, su producto cartesiano es diferente de vacío.

Existen varias equivalencias del axioma de elección como las que presentamos a continuación.

Definición 1.1.3. El axioma de elección múltiple (AEM) establece que para cada familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, existe una familia $(Y_i)_{i \in I}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que $Y_i \subseteq X_i$, para cada $i \in I$.

Lema 1.1.4. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) AE.
- II) AEM.

Una demostración de este teorema puede verse en el libro Axiom of Choice de Horst Herrlich ¹.

Antes de presentar el principio de buen ordenamiento, el principio de Hausdorff y el Lema de Kuratowski-Zorn es necesario enunciar las siguientes definiciones de relaciones de orden.

Definición 1.1.5. Una relación de orden sobre X , es una relación binaria \leq que cumple las siguientes propiedades:

- **O1)** Es reflexiva: Si $x \in X$ entonces $x \leq x$;
- **O2)** Es antisimétrica: Si $x, y \in X$ entonces $x \leq y$ e $y \leq x$ implica que $x = y$;
- **O3)** Es transitiva: Si $x, y, z \in X$ y si simultáneamente se cumple que $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Si además la relación \leq cumple:

- **O4)** Si $x, y \in X$ entonces $x \leq y$ ó $y \leq x$

entonces hablamos de una relación de **orden lineal (o total)**.

A veces, para insistir que un orden \leq puede no satisfacer la propiedad **O4)**, es decir que puede que no todo par de elementos son comparables, hablamos de **orden parcial**. Si (X, \leq) es un conjunto ordenado e $Y \subseteq X$, la relación inducida en Y es

claramente también una relación de orden. Cuando consideremos a Y como un conjunto ordenado, salvo que digamos lo contrario, siempre es con el orden inducido. Las siguientes definiciones son de utilidad más adelante en este capítulo.

Definición 1.1.6. Sea el par ordenado (X, \leq) donde X es un conjunto no vacío y \leq es una **relación de orden parcial** en X .

- $Y \subseteq X$ es una **cadena** en (X, \leq) si la restricción del orden \leq en Y es un orden total; es decir, que también cumple la propiedad **(O4)** de la Definición 1.1.5;
- Sea $Y \subseteq X$ una cadena con $Y \neq \emptyset$, decimos que $a \in X$ es **cota inferior** (respectivamente, **cota superior**) de Y , si para cada $y \in Y$ tenemos que $a \leq y$ (respectivamente, $y \leq a$);
- $\bar{x} \in X$ es **mínimo** (respectivamente, **máximo**) de X , si para cada $x \in X$ tenemos que $\bar{x} \leq x$ (respectivamente, $x \leq \bar{x}$). Observamos que si existen dichos elementos, entonces son únicos.

A continuación introducimos conceptos semejantes.

Definición 1.1.7. Sea el par ordenado (X, \leq) donde X es un conjunto no vacío y \leq es una relación de orden parcial bajo X . Decimos que $x \in X$ es **minimal** (respectivamente, **maximal**) si para cada $y \in X$ tal que $y \leq x$ (respectivamente, $x \leq y$), tenemos que $x = y$.

No hay que confundir un elemento **minimal** con el elemento **mínimo** para conjuntos parcialmente ordenados. Un elemento mínimo, si existe, es siempre comparable con todos los otros elementos del conjunto X (y es inferior), mientras que un elemento minimal es inferior sólo a aquellos elementos de X con los cuales podemos comparar.

Si X dispone un elemento mínimo, entonces este es único. Pero si el orden sobre X no es total, y si no existe un mínimo, entonces X puede disponer varios elementos minimales.

La misma discusión podemos repetir para elementos **maximales** y el elemento **máximo** de un conjunto.

Definición 1.1.8. Sea el par ordenado (X, \leq) donde X es un conjunto no vacío y \leq es una relación de orden parcial en X . Decimos que X es un **conjunto bien ordenado** si todos los subconjuntos no vacíos de X tienen mínimo.

Lema 1.1.9. (Zermelo) **Principio de buen ordenamiento.** Todo conjunto admite un buen orden.

Lema 1.1.10. Lema de Kuratowski-Zorn. Todo conjunto parcialmente ordenado diferente de vacío en el que toda cadena tiene cota superior contiene al menos un elemento maximal.

Teorema 1.1.11. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) AE.
- II) Lema de Kuratowski-Zorn.

Una demostración de este teorema puede verse en el libro *Axiom of Choice* de Horst Herrlich ¹.

Definición 1.1.12. Principio de Hausdorff. En un conjunto parcialmente ordenado, cualquier subconjunto totalmente ordenado está contenido en un subconjunto maximal (respecto a la propiedad de ser totalmente ordenado).

El subconjunto maximal no es único en general; puede haber varios subconjuntos maximales totalmente ordenados que contienen a un subconjunto totalmente ordenado dado.

1.2. CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA ABSTRACTA

Se exponen algunos términos e ideas claves del álgebra abstracta y lineal necesarios para el desarrollo de esta tesis. Cada detalle juega un papel muy importante en la obtención de resultados para conducirnos a la deducción del axioma de elección a partir de la existencia de bases en los espacios vectoriales.

1.2.1. ANILLO DE POLINOMIOS Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos,

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

y un cuerpo \mathbb{K} tal que $\mathbb{K} \cap X = \emptyset$. El **conjunto de polinomios de X** , denotado por $\mathbb{K}[X]$, está constituido por todas las sumas finitas de expresiones de la forma

$$P = \alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r},$$

donde $\alpha \in \mathbb{K}$, $x_j \in X$ son las variables y $n_j \in \mathbb{N}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$. El polinomio $P \in \mathbb{K}[X]$ es llamado **monomio**. Note que por definición, un monomio es un producto finito de variables por una constante. Por definición para toda $x \in X$, $x^0 = 1$ donde 1 es el elemento neutro del producto de \mathbb{K} .

Un **polinomio es constante** si pertenece al conjunto de coeficientes, en este caso, si pertenece al cuerpo \mathbb{K} .

El proceso para sumar, restar y multiplicar polinomios con más de una variable es bastante similar al conocido en polinomios con una variable.

Dos monomios P, Q se llaman **semejantes** si

$$P = \alpha Q,$$

donde $\alpha \in \mathbb{K}$. Por ejemplo, los monomios $P = 5x_1^3x_6^2$ y

$Q = -x_1^3x_6^2$ con $x_1, x_6 \in X$ son semejantes. Por definición $P + Q$ se expresa como

$$5x_1^3x_6^2 + (-x_1^3x_6^2) = (5 - 1)x_1^3x_6^2 = 4x_1^3x_6^2.$$

El proceso para sumar dos polinomios P, Q es sumar los monomios que los conforman, agrupando y sumando los semejantes para dejar intactos los demás monomios. En consecuencia se reduce la expresión. Por ejemplo, tomando los polinomios $P = -x_1^4x_2^3 + 3x_4^2x_5^6x_6^2$ y $Q = x_1^4 + 3x_1^4x_2^3$, entonces $P + Q$ es

$$\left(-x_1^4x_2^3 + 3x_4^2x_5^6x_6^2\right) + \left(x_1^4 + 3x_1^4x_2^3\right) = \underline{2x_1^4x_2^3} + 3x_4^2x_5^6x_6^2 + x_1^4.$$

La suma en $\mathbb{K}[X]$ cumple las siguientes propiedades:

1. Es asociativa: Si $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ entonces $(P + Q) + R = P + (Q + R)$;
2. Es conmutativa: Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ entonces $P + Q = Q + P$;

3. Existencia del neutro: $0 \in \mathbb{K}[X]$, pues $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$;

4. Cada polinomio tiene un opuesto: Si $P \in \mathbb{K}[X]$ entonces $-P \in \mathbb{K}[X]$.

Por otro lado, la multiplicación entre monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias que tengan la misma base; es decir, sumando los exponentes. Por ejemplo, tomando los monomios $P = 7x_1^3x_2^2$ y $Q = 5x_1x_2^2$, entonces $P \cdot Q$ es

$$7x_1^3x_2^2 \cdot 5x_1x_2^2 = 35x_1^4x_2^4.$$

En la multiplicación de un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio. Por ejemplo, tomando al monomio $P = -x_2^2x_3^2$ y al polinomio $Q = -x_1 + 3x_2^2 + 6$, entonces $P \cdot Q$ es

$$-x_2^2x_3^2 \cdot (-x_1 + 6) = (-x_2^2x_3^2 \cdot -x_1) + (-x_2^2x_3^2 \cdot 6) = x_1x_2^2x_3^2 - 6x_2^2x_3^2.$$

La multiplicación entre polinomios es análoga, por ejemplo, para los polinomios $P = P_1 + P_2$ y $Q = Q_1 + Q_2$ donde P_1, P_2, Q_1, Q_2 son monomios, entonces $P \cdot Q$ es

$$(P_1 + P_2) \cdot (Q_1 + Q_2) = (P_1 + P_2) \cdot Q_1 + (P_1 + P_2) \cdot Q_2 = P_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_1 + P_1 \cdot Q_2 + P_2 \cdot Q_2.$$

El producto en $\mathbb{K}[X]$ cumple las siguientes propiedades:

1. Es asociativa: Si $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ entonces $(P \cdot Q) \cdot R = P \cdot (Q \cdot R)$;

2. Es conmutativa: Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ entonces $P \cdot Q = Q \cdot P$;

3. Existencia del neutro: $1 \in \mathbb{K}[X]$, pues $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$;

4. Se cumple la ley distributiva del producto respecto de la suma:

$$\text{Si } P, Q, R \in \mathbb{K}[X], \text{ entonces } (P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R.$$

Esto es, el conjunto $\mathbb{K}[X]$ con las dos operaciones definidas, suma "+" y producto ".", es un anillo conmutativo que se llama anillo de polinomios en X con coeficientes en \mathbb{K} .

Vamos ahora a estudiar la factorización en el anillo $\mathbb{K}[X]$, pero antes introduciremos algunas definiciones para anillos conmutativos que tienen la siguiente propiedad: para cualesquier par de elementos a, b tenemos que

$$\text{Si } ab = 0, \text{ entonces } a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Este tipo de anillos son llamados **dominios enteros** (DE). De aquí en adelante consideraremos a D como un DE.

Definición 1.2.1. Sean dos elementos no nulos $p, q \in D$. Si existe $r \in D$ tal que

$$q = rp,$$

entonces diremos que p **divide a** q (o p es **factor de** q) y se denota por $p \mid q$.

Definición 1.2.2. Un elemento $u \in D$ es **unidad** si u divide a 1.

El conjunto de las unidades de D se denota como $U(D)$.

Observación 1.2.3. Note que las unidades de cualquier anillo de polinomios de la forma $\mathbb{K}[S]$, donde \mathbb{K} es cuerpo y $S \subseteq X$, son las constantes no nulas, es decir

$$U(\mathbb{K}[S]) = \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Definición 1.2.4. Un elemento no nulo $p \in D$ que no es unidad, es un **elemento irreducible** si toda factorización

$$p = qr$$

en D tiene la propiedad que q o r es unidad.

Definición 1.2.5. Los elementos $p, q \in D$ son **asociados** si

$$p = uq,$$

donde u es una unidad en D . Si p y q son asociados escribimos $p \sim q$.

Lema 1.2.6. Sean $p, q, r \in D$. Se tienen las siguientes afirmaciones:

1. Si $p \mid q$ y $q \mid r$ entonces $p \mid r$,
2. Si $p \mid q$ y $p \mid r$ entonces $p \mid q \pm r$,
3. Si $p \mid q$ entonces $p \mid rq$, para cada $r \in D$,
4. Si $p \mid q$ y $q \mid p$ entonces p es asociado de q .

Demostración. **1), 2) y 3)** son inmediatos de las definiciones. Para **4)**: como $p \mid q$ y $q \mid p$ entonces $q = up$ y $p = vq$ con $u, v \in D$. Por tanto, $p = vq = vup$, y como $p \neq 0$, y D es un dominio entero, entonces cancelando al elemento p , tenemos que $1 = vu$; es decir, u y v son unidades.

Por otro lado, si q es un elemento asociado de un elemento irreducible p , entonces q también es un elemento irreducible, pues $p = qu$, con u unidad, esto es, por definición de elementos asociados. Por lo tanto, cualquier factorización de q proporciona una factorización de p .

□

Definición 1.2.7. Un elemento no nulo $p \in D$ que no es unidad, es un **elemento primo** si cuando $p \mid qr$, entonces $p \mid q$ o $p \mid r$ para todos los elementos $q, r \in D$.

Definición 1.2.8. D es un **dominio de factorización única** (DFU) si satisface que:

1. Todo elemento no nulo de D que no es unidad tiene descomposición factorial por irreducibles; es decir, puede ser factorizado por el producto de un número finito de elementos irreducibles en D .

2. La descomposición factorial por irreducibles es única salvo asociaciones, es decir, si $p_1 p_2 \dots p_r$ y $q_1 q_2 \dots q_s$ son dos descomposiciones factoriales por irreducibles del mismo elemento en D , entonces $r = s$ y existe una reenumeración ϕ tal que p_i y $q_{\phi(i)}$ son asociados para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

El siguiente resultado lo enunciaremos sin demostración y lo utilizaremos para probar un teorema que nos ayuda a demostrar que $\mathbb{K}[X]$ es DFU. Una prueba de esta afirmación la podemos revisar en el Corolario 45.30 del libro de John B. Fraleigh ⁵.

Teorema 1.2.9. Si \mathbb{K} es un cuerpo y $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, entonces $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es DFU.

Lema 1.2.10. Si \mathbb{K} es un cuerpo y $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, entonces todo irreducible en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es también irreducible en $\mathbb{K}[X]$.

Demostración. Sea P un irreducible en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Si $P = P_1 P_2$, necesariamente $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Como P es irreducible en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, se sigue que P_1 o P_2 es unidad en $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, esto es, P_1 o P_2 está en $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ (ver la Observación 1.2.3). Se concluye así que P es un irreducible en $\mathbb{K}[X]$. \square

Corolario 1.2.11. El anillo $\mathbb{K}[X]$ es DFU.

Demostración. Sea $P \in \mathbb{K}[X]$ un polinomio no constante, entonces existen variables $x_1, x_2, \dots, x_r \in X$ tales que

$$P = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_1^{n_{i1}} x_2^{n_{i2}} \dots x_r^{n_{ir}}.$$

Como $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ es un DFU (ver Teorema 1.2.9), entonces P admite una descomposición única (salvo asociaciones) como producto de irreducibles en

⁵ J. FRALEIGH. *First Course in Abstract Algebra. 7th ed.* Harlow, Reino Unido: Pearson Education Canada, 2003.

$\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, digamos

$$P = P_1^{m_1} P_2^{m_2} \dots P_{n'}^{m_{n'}}.$$

Por el Lema 1.2.10, P_i es irreducible en $\mathbb{K}[X]$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n'\}$, entonces P admite una descomposición única (salvo asociaciones) como producto de irreducibles en $\mathbb{K}[X]$.

Dado que el polinomio P fue tomado de forma arbitraria, entonces el anillo $\mathbb{K}[X]$ es DFU.

□

Definición 1.2.12. Dos elementos P, Q son **coprimos** en $\mathbb{K}[X]$, si alguno de los dos es un polinomio constante o en sus factorizaciones no comparten polinomios irreducibles.

1.2.2. CUERPO DE FRACCIONES Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos,

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

y un cuerpo \mathbb{K} tal que $\mathbb{K} \cap X = \emptyset$. El **conjunto de fracciones de X** , denotado por $\mathbb{K}(X)$, se define como

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q} : P, Q \in \mathbb{K}[X], Q \neq 0 \right\}.$$

La construcción formal de $\mathbb{K}(X)$ es análoga a la ya conocida construcción del cuerpo de los fracciones \mathbb{Q} , donde el anillo es \mathbb{Z} . Así como en \mathbb{Q} , decimos que dos fracciones $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$ son equivalentes si $P \cdot Q' = P' \cdot Q$.

La suma y el producto de fracciones con variables en X se definen de la misma

forma a la conocida, esto es, para $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}$ fracciones tenemos que

$$\frac{P}{Q} + \frac{P'}{Q'} = \frac{P \cdot Q' + Q \cdot P'}{Q \cdot Q'} \quad \text{y} \quad \frac{P}{Q} \cdot \frac{P'}{Q'} = \frac{P \cdot P'}{Q \cdot Q'}$$

La suma y el producto en $\mathbb{K}(X)$ cumplen las siguientes propiedades:

1. Cerradura: Si $P, Q \in \mathbb{K}(X)$ entonces $P + Q \in \mathbb{K}(X)$ y $P \cdot Q \in \mathbb{K}(X)$;
2. Conmutatividad: Si $P, Q \in \mathbb{K}(X)$ entonces $P + Q = Q + P$ y $P \cdot Q = Q \cdot P$;
3. Existen los neutros respectivos: tenemos que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$ y como $\frac{P}{1} = P$ para cada $P \in \mathbb{K}[X]$, entonces $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}(X)$. Por transitividad $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(X)$. Lo cual significa que $0, 1 \in \mathbb{K}(X)$;
4. Cada polinomio tiene un opuesto y un inverso: Si $P \in \mathbb{K}(X)$ entonces $-P \in \mathbb{K}(X)$ y si $P \neq 0$ entonces $\frac{1}{P} \in \mathbb{K}(X)$;
5. Se cumple la ley distributiva del producto respecto de la suma: Si $F, G, H \in \mathbb{K}(X)$ entonces $(F + G) \cdot H = F \cdot H + G \cdot H$.

Por tanto, el conjunto $\mathbb{K}(X)$ con las dos operaciones definidas, la suma "+" y el producto ".", es un cuerpo.

Definición 1.2.13. Un elemento no nulo $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ es una fracción irreducible si P y Q son polinomios coprimos.

Teorema 1.2.14. Cada elemento no nulo $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ que no es unidad tiene una fracción irreducible equivalente $\frac{P'}{Q'} \in \mathbb{K}(X)$, la cual es única salvo asociaciones entre los respectivos numeradores y denominadores.

Demostración. Por el Corolario 1.2.11, el cual afirma que el anillo $\mathbb{K}[X]$ es DFU, podemos descomponer todos los polinomios P y Q en factores irreducibles y luego cancelando los factores comunes entre estas factorizaciones se obtiene una fracción

irreducible equivalente. Como la descomposición del numerador y la del denominador es única salvo asociaciones entonces la fracción irreducible equivalente también es única salvo asociaciones entre los numeradores y los denominadores. Es decir, si $\frac{P'}{Q'}$ y $\frac{P''}{Q''}$ son dos fracciones irreducibles equivalentes a $\frac{P}{Q}$, entonces P' es asociado a P'' y Q' es asociado a Q'' . \square

Veamos un ejemplo. Tomando la fracción perteneciente a $\mathbb{Q}(\{x, y\})$:

$$\frac{-2x^2y^2 - x^2y}{-xy - x}$$

y las siguientes descomposiciones en factores irreducibles del denominador y del numerador, respectivamente $-2x^2y^2 - x^2y = (-1)2x^2y(y+1) = (-2)x^2y(y+1)$ y $-xy - x = (-1)x(y+1)$, notamos que efectivamente se generan 2 fracciones irreducibles equivalentes:

$$\frac{(-1)2x^2y(y+1)}{(-1)x(y+1)} = \frac{2xy}{1},$$

$$\frac{(-2)x^2y(y+1)}{(-1)x(y+1)} = \frac{-2xy}{-1}.$$

Donde los respectivos numeradores y denominadores de estas 2 fracciones irreducibles equivalentes son asociados.

1.3. CONCEPTOS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

En esta sección se revisa, entre otras cosas, conceptos básicos de los espacios vectoriales: combinación lineal e independencia lineal. Todo esto con el propósito de exponer la prueba formal de la existencia de una base para cualquier \mathbb{K} -espacio vectorial a partir del axioma de elección.

Definición 1.3.1. Sean V un conjunto y \mathbb{K} un cuerpo arbitrario (los elementos de \mathbb{K} se llaman escalares). Decimos que V es un \mathbb{K} -**espacio vectorial** si está dotado de

dos operaciones, la suma (denotada por $x + y$ con $x, y \in V$) y la multiplicación por un escalar (denotada por $\alpha \cdot x$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$) que satisfacen:

- **E1)** Cerradura en la suma: Si $x, y \in V$, entonces $(x + y) \in V$;
- **E2)** La suma es asociativa: Si $x, y, z \in V$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$;
- **E3)** La suma es conmutativa: Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$;
- **E4)** Existencia del neutro: Existe $0 \in V$ tal que para toda $x \in V$ tenemos que $x + 0 = x$;
- **E5)** Existencia del elemento inverso aditivo: Si $x \in V$, entonces existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$;
- **E6)** Cerradura en la multiplicación por un escalar: Si $x \in V$ y α es un escalar entonces $\alpha \cdot x \in V$;
- **E7)** Primera ley distributiva: Si $x, y \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
- **E8)** Segunda ley distributiva: Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
- **E9)** Ley asociativa de la multiplicación por escalares: Si $x \in V$ y α, β son escalares, entonces $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
- **E10)** Para cada elemento $x \in V$, $1 \cdot x = x$.

En particular, todo cuerpo es espacio vectorial sobre sí mismo y además es espacio vectorial sobre cualquier subcuerpo.

Antes de presentar la definición de base para un \mathbb{K} -espacio vectorial es necesario enunciar las siguientes definiciones.

Definición 1.3.2. Sean x_1, x_2, \dots, x_n elementos de un \mathbb{K} -espacio vectorial V . Entonces cualquier expresión de la forma

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son escalares, se denomina **combinación lineal** de x_1, \dots, x_n .

Diremos que un elemento v es combinación lineal de vectores del \mathbb{K} -espacio vectorial V si podemos expresarlo como una suma de productos por escalar de una cantidad finita de elementos de V .

Este concepto da lugar a otras definiciones y herramientas importantes, como son los conceptos de independencia lineal y base para un espacio vectorial.

Definición 1.3.3. Sean un \mathbb{K} -espacio vectorial V y $\mathcal{G} \subseteq V$. Entonces decimos que \mathcal{G} es **conjunto generador** de V si para cada $v \in V$ existe $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathcal{G}$ subconjunto finito tal que v es combinación lineal del mismo; es decir, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Si \mathcal{G} es conjunto generador de V decimos que \mathcal{G} genera a V y además si \mathcal{G} es finito, decimos que V es **finitamente generado**. De otra manera, si no existe conjunto finito generador decimos que V es infinitamente generado.

Definición 1.3.4. Sean un \mathbb{K} -espacio vectorial V y $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq V$. Decimos que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es **linealmente dependiente** (LD) si existen n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ no todos cero tales que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \tag{1}$$

Si el conjunto de elementos no es LD, decimos que es **linealmente independiente**

(L.I). Es decir, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es L.I si la ecuación (1) se cumple únicamente para $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Si $A \subseteq V$ es un conjunto infinito de vectores, entonces decimos que es L.I si todo subconjunto finito $B \subseteq A$ es L.I.

Ejemplo 1.3.5. Sea el \mathbb{R} -espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : x_i \in \mathbb{R} \forall i \in \mathbb{N}\}$, con las operaciones:

- Suma: $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) + (y_1, \dots, y_n, \dots) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$;
- Producto por escalar: $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n, \dots)$.

Note que el subconjunto infinito

$$L = \{(1, 0, 0, 0, \dots), (1, 1, 0, 0, \dots), (1, 1, 1, 0, \dots), \dots\}$$

de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es L.I.

Definición 1.3.6. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Decimos que $\mathcal{B} \subseteq V$ es **base** (o base algebraica) para V si:

- **B1)** Todo subconjunto finito de \mathcal{B} es L.I;
- **B2)** \mathcal{B} genera a V .

Una base para un \mathbb{K} -espacio vectorial es conocida como **Base de Hamel**.

El espacio vectorial nulo no tiene base de Hamel, si nos ajustamos a la definición dada anteriormente. Vamos a convenir en este caso que la base de Hamel es el conjunto vacío.

Un espacio vectorial puede tener diferentes bases, por ejemplo, en el caso del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , cualesquiera tres vectores L.I. forman una base.

2. EL i -GRADO HOMOGÉNEO DE POLINOMIOS Y FRACCIONES

2.1. EL IDÓNEO CUERPO DE ESCALARES

Como se afirma en la introducción, uno de los objetivos más importantes de este trabajo es estudiar una demostración de la afirmación que dice que el axioma de elección se puede deducir a partir de la hipótesis de la existencia de bases de Hamel en cada espacio vectorial expuesta en el libro *Axiom of Choice* de Horst Herrlich ¹. Esta demostración consiste en que, a partir una familia $\mathbb{X} = \{X_i : i \in I\}$ de conjuntos no vacíos, se necesita un ingrediente muy importante: asociarle a \mathbb{X} un espacio vectorial sobre un cuerpo. Es decir, necesitamos un cuerpo de escalares y un espacio vectorial sobre ese cuerpo de tal manera que a partir de una base (que por hipótesis existe) sea posible obtener una función f que asigna a cada conjunto de la familia \mathbb{X} un representante de éste.

De hecho, este capítulo está dedicado principalmente a especificar un cuerpo de escalares conveniente de tal forma que al ser asociado con el espacio de fracciones $\mathbb{K}(X)$, que será nuestro conjunto de vectores, éste tenga estructura de espacio vectorial.

2.2. EL i -GRADO

Definiremos la noción de i -grado de un monomio, el cual juega un papel importante en el trabajo. Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos,

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

y un cuerpo \mathbb{K} tal que $\mathbb{K} \cap X = \emptyset$.

Definición 2.2.1. Sea $P = \alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} \in \mathbb{K}[X]$ un monomio no nulo. Para cada $i \in I$, el i -**grado del monomio** se define como:

$$d(i, P) = \sum_{x_k \in X_i} n_k.$$

Ejemplo 2.2.2. Sea $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \{v, w\}$, $X_2 = \{x, y\}$ y $X_3 = \{z\}$. Observe que $I = \{1, 2, 3\}$. Sea $Q = -v^2 wxy \in \mathbb{K}[X]$. A continuación se calculan todos los i -grados del monomio Q :

- $d(1, -v^2 wxy) = 2 + 1 = 3$, pues $v, w \in X_1$;
- $d(2, -v^2 wxy) = 1 + 1 = 2$, pues $x, y \in X_2$;
- $d(3, -v^2 wxy) = 0$, pues ningún elemento de X_3 aparece en Q .

El ejemplo anterior ilustra una propiedad de los i -grados que enunciamos a continuación.

Lema 2.2.3. Sean $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ monomios no nulos. Entonces para cada $i \in I$

$$d(i, PQ) = d(i, P) + d(i, Q).$$

Demostración. Tenemos que $P = \alpha x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_{r-1}^{n_{r-1}} x_r^{n_r}$ y $Q = \beta y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_{t-1}^{m_{t-1}} y_t^{m_t}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$; $x_j, y_s \in X$ y $n_j, m_s \in \mathbb{N}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ y cada $s \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Por tanto

$$d(i, PQ) = d(i, \alpha \beta x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_t^{m_t}) = \sum_{x_j, y_s \in X_i} n_j + m_s.$$

Lo cual significa que:

$$d(i, PQ) = \sum_{x_j \in X_i} n_j + \sum_{y_s \in X_i} m_s = d(i, P) + d(i, Q).$$

□

Definición 2.2.4. Sean $P \in \mathbb{K}[X]$ un monomio no nulo e $i \in I$. **El conjunto de factores en X_i del monomio P** se denota por

$$F_i(P) = \{y \in X_i \mid \text{existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tal que } P = yQ\}.$$

La demostración de las siguientes propiedades es por consecuencia inmediata de la Definición 2.2.4.

Proposición 2.2.5. Sean $P \in \mathbb{K}[X]$ un monomio no nulo. Se tiene las siguientes afirmaciones:

1. Si P y Q son monomios asociados, entonces para todo $i \in I$, $F_i(P) = F_i(Q)$.
2. P es constante sí y sólo si $F_i(P) = \emptyset$ para cada $i \in I$;
3. $|F_i| \leq d(i, P)$ para cada $i \in I$.

Estas propiedades son de uso en la demostración de la Proposición 2.2.12.

A continuación se define el concepto de i -grado homogéneo de un polinomio a partir de la Definición 2.2.1.

Definición 2.2.6. Sean $P = \sum_{k=1}^m P_k$ un polinomio no nulo e $i \in I$. Decimos que el i -**grado homogéneo del polinomio P** es $a_i \in \mathbb{N}$, si

$$a_i = d(i, P_k) \text{ para toda } k \in \{1, \dots, m\}.$$

En otras palabras, P tiene i -grado homogéneo cuando todos los monomios en su composición tengan el mismo i -grado.

En el siguiente ejemplo se muestra un polinomio que no tiene i -grado homogéneo para ningún $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 2.2.7. Sea el conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \{v, w\}$, $X_2 = \{x, y\}$ y $X_3 = \{z\}$ y sea el polinomio $R = 2 + vwx^2yz - \pi y^3z \in \mathbb{R}[X]$.

- R no tiene 1–grado homogéneo, pues

$$d(1, 2) = 0 \neq 2 = d(1, vwx^2yz).$$

- R no tiene 2–grado homogéneo, pues

$$d(2, 2) = 0 \neq 3 = d(2, -\pi y^3z).$$

- R no tiene 3–grado homogéneo, pues

$$d(3, 2) = 0 \neq 1 = d(3, vwx^2yz).$$

En el siguiente ejemplo veremos un polinomio que tiene i –grado homogéneo igual a 2, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 2.2.8. Sea el conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$, $X_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ y $X_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Supongamos que los conjuntos X_1, X_2, X_3 y \mathbb{R} son disjuntos dos a dos.

Sea $P = 7v_1^2x_1^2z_2z_9 - \frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5 \in \mathbb{R}[X]$.

- El 1–grado homogéneo de P es 2, pues

$$d(1, 7v_1^2x_1^2z_2z_9) = d(1, -\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = 2.$$

- El 2–grado homogéneo de P es 2, pues

$$d(2, 7v_1^2x_1^2z_2z_9) = d(2, -\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = 2.$$

- El 3–grado homogéneo de P es 2, pues

$$d(3, 7v_1^2x_1^2z_2z_9) = d(3, -\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = 2.$$

La siguiente propiedad es consecuencia inmediata de la definición de ser polinomios asociados.

Proposición 2.2.9. Si $P, P' \in \mathbb{K}[X]$ tales que P y P' son asociados, entonces $d(i, P) = d(i, P')$ para cada $i \in I$.

A continuación extenderemos la Definición 2.2.4, describiendo el conjunto de elementos en X_i que aparecen en un polinomio con el objetivo de probar el axioma de elección, pues esta es la manera en que seleccionaremos los subconjuntos finitos de X_i .

Definición 2.2.10. Sea $P = \sum_{k=1}^m P_k$ un elemento no nulo de $\mathbb{K}[X]$, donde cada P_k es un monomio, e $i \in I$. El **conjunto de variables en X_i que aparecen en el polinomio P** , se define por

$$E_i(P) = \bigcup_{k=1}^m F_i(P_k),$$

donde $F_i(P_k)$ es el conjunto de factores en X_i del monomio P_k , para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ y cada $i \in I$.

Ejemplo 2.2.11. Sea el polinomio $P = 7v_1^2x_1^2z_2z_9 - \frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5 \in \mathbb{R}[X]$ definido en el Ejemplo 2.2.8, entonces:

- Para $i = 1$.
 - $F_1(7v_1^2x_1^2z_2z_9) = \{v_1\}$;
 - $F_1(-\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = \{v_6, v_8\}$.

Por tanto, $E_1(P) = \{v_1, v_6, v_8\}$.

■ Para $i = 2$.

- $F_2(7v_1^2x_1^2z_2z_9) = \{x_1\}$;
- $F_2(-\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = \{x_7\}$.

Por tanto, $E_2(P) = \{x_1, x_7\}$.

■ Para $i = 3$.

- $F_3(7v_1^2x_1^2z_2z_9) = \{z_2, z_9\}$;
- $F_3(-\frac{2}{3}v_6v_8x_7^2z_9z_5) = \{z_9, z_5\}$.

Por tanto, $E_3(P) = \{z_2, z_9, z_5\}$.

Las propiedades que enunciamos en la siguiente proposición son muy importantes porque son de uso en la demostración del teorema principal de este proyecto. La demostración es consecuencia de la Definición 2.2.10 junto con la Proposición 2.2.5.

Proposición 2.2.12. Sean dos polinomios $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ no nulos. Se tiene las siguientes afirmaciones:

1. Si P y Q son asociados, entonces para cada $i \in I$: $E_i(P) = E_i(Q)$.
2. P es constante sí y sólo si $E_i(P) = \emptyset$ para cada $i \in I$.
3. $|E_i(P)| \leq \sum_{k=1}^m d(i, P_k)$ para cada $i \in I$.

A partir de las definición del i -grado de un monomio y del i -grado homogéneo de un polinomio, se define a continuación el i -grado homogéneo de una fracción.

Definición 2.2.13. Sean $F = \frac{\sum_{k=1}^m P_k}{\sum_{j=1}^n Q_j}$ un elemento no nulo de $\mathbb{K}(X)$ e $i \in I$.

Decimos que la fracción F tiene i -**grado homogéneo** $d_i \in \mathbb{Z}$, si $d_i = a_i - b_i$. Donde el i -grado homogéneo del numerador es a_i y el i -grado homogéneo del denominador es b_i ; es decir,

- $a_i = d(i, P_k)$ para cada $k \in \{1, 2, \dots, m\}$;
- $b_i = d(i, Q_j)$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

A continuación mostraremos una fracción cuyo i -grado homogéneo es igual a 2 para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 2.2.14. Sea el conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \{v, w\}$, $X_2 = \{x, y\}$ y $X_3 = \{z\}$ y sea la fracción $E = \frac{vwx^2z^2 - v^2xyz^2 + 3w^2y^2z^2}{5} \in \mathbb{R}(X)$.

- El 1-grado homogéneo del numerador de E es $a_1 = 2$, pues

$$d(1, vwx^2z^2) = d(1, -v^2xyz^2) = d(1, 3w^2y^2z^2) = 2.$$

El 1-grado homogéneo del denominador de E es $b_1 = 0$, entonces el 1-grado homogéneo de E es $d_1 = a_1 - b_1 = 2$.

- El 2-grado homogéneo del numerador de E es $a_2 = 2$, pues

$$d(2, vwx^2z^2) = d(2, -v^2xyz^2) = d(2, 3w^2y^2z^2) = 2.$$

El 2-grado homogéneo del denominador de E es $b_2 = 0$, entonces el 2-grado homogéneo de E es $d_2 = 2$.

- El 3-grado homogéneo del numerador de E es $a_3 = 2$, pues

$$d(3, vwx^2z^2) = d(3, -v^2xyz^2) = d(3, 3w^2y^2z^2) = 2.$$

El 3-grado homogéneo del denominador de E es $b_3 = 0$, entonces el 3-grado homogéneo de E es $d_3 = 2$.

Se concluye así que la fracción $E = \frac{vwx^2z^2 - v^2xyz^2 + 3w^2y^2z^2}{5}$ tiene i -grado homogéneo 2 para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

En el siguiente ejemplo mostraremos una fracción que no tiene i -grado homogéneo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

Ejemplo 2.2.15. Sea el conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ donde $X_1 = \{v, w\}$, $X_2 = \{x, y\}$ y $X_3 = \{z\}$. Sea la fracción

$$G = \frac{\frac{5}{2}x^3z - 3vzx - \sqrt{2}}{-v^2x^2y^2 - vwx^3y + w^2y^4} \in \mathbb{R}(X)$$

Note que el numerador de G no tiene i -grado homogéneo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, pues

$$d(1, -3vx^3z) = 1 \neq 0 = d(1, -\sqrt{2});$$

$$d(2, -3vx^3z) = 1 \neq 0 = d(2, -\sqrt{2});$$

$$d(3, -3vx^3z) = 1 \neq 0 = d(3, -\sqrt{2}).$$

Entonces G no tiene i -grado homogéneo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

En el siguiente ejemplo veremos que si una fracción es el cociente de dos monomios no nulos, entonces siempre tiene i -grado homogéneo para cada $i \in I$.

Ejemplo 2.2.16. Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos,

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

y un cuerpo \mathbb{K} tal que $\mathbb{K} \cap X = \emptyset$. Sea la fracción $F = \frac{P}{Q}$ con P y Q monomios (Q no nulo).

Sea $i \in I$. Por definición, el i -grado homogéneo del numerador de F es $a_i = d(i, P)$ y el i -grado homogéneo del denominador de F es $b_i = d(i, Q)$. Entonces el i -grado homogéneo de F es $d_i = a_i - b_i$.

La siguiente proposición se usa en la demostración de que el axioma de elección es equivalente a la existencia de bases, lo cual es nuestro objetivo principal.

Proposición 2.2.17. Si $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'} \in \mathbb{K}(X)$ son dos fracciones irreducibles y equivalentes, entonces $d(i, P) = d(i, P')$ y $d(i, Q) = d(i, Q')$ para cada $i \in I$.

Demostración. Por el Teorema 1.2.14, tenemos que P es asociado de P' y Q es asociado de Q' , y por la Proposición 2.2.9 se concluye que $d(i, P) = d(i, P')$ y $d(i, Q) = d(i, Q')$ para cada $i \in I$. \square

2.3. CUERPO DE FRACCIONES DE i -GRADO HOMOGÉNEO 0

Sea $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ el conjunto de fracciones con variables en X que tienen i -grado homogéneo 0 para cada $i \in I$; es decir,

$$\widehat{\mathbb{K}}(X) = \left\{ \frac{\sum_{k=1}^m P_k}{\sum_{j=1}^n Q_j} \in \mathbb{K}(X) : d(i, P_k) = d(i, Q_j), \forall i \in I \forall k \in \{1, 2, \dots, m\} \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Veremos en seguida que $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ es un cuerpo y en consecuencia $\mathbb{K}(X)$ es un espacio vectorial sobre ese cuerpo. Esto es la parte fundamental en la prueba de que el axioma de elección se deduce a partir de la existencia de una base para $\mathbb{K}(X)$.

Para ver que la suma y el producto en $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ cumplen la definición de cuerpo algebraico, basta probar que $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ es un subcuerpo de $\mathbb{K}(X)$.

Sean $\frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j}, \frac{\sum_{r=1}^{n_2} R_r}{\sum_{s=1}^{m_2} T_s} \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$, con $\sum_{r=1}^{n_2} R_r \neq 0$.

Veamos que $\left(\frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j} - \frac{\sum_{r=1}^{n_2} R_r}{\sum_{s=1}^{m_2} T_s} \right), \frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j} \left(\frac{\sum_{r=1}^{n_2} R_r}{\sum_{s=1}^{m_2} T_s} \right)^{-1} \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$.

I) Si $R = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j} - \frac{\sum_{r=1}^{n_2} R_r}{\sum_{s=1}^{m_2} T_s}$, entonces por propiedades de la sumatoria,

$$R = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{m_2} P_k T_s - \sum_{r=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{m_1} R_r Q_j}{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{s=1}^{m_2} Q_j T_s}.$$

Para cada $i \in I$, mostraremos que el i -grado de cualquier monomio que compone al numerador de R es igual al i -grado de cualquier monomio que compone al denominador de R .

Fijemos $i \in I$. Por hipótesis: $d(i, P_k) = d(i, Q_j)$ y $d(i, R_r) = d(i, T_s)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ y cada $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$.

Por el Lema 2.2.3, $d(i, P_k T_s) = d(i, P_k) + d(i, T_s)$, $d(i, R_r Q_j) = d(i, R_r) + d(i, Q_j)$ y $d(i, Q_j T_s) = d(i, Q_j) + d(i, T_s)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ y cada $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$.

Por transitividad: $d(i, P_k T_s) = d(i, R_r Q_j) = d(i, Q_j T_s)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ y toda $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$.

Hemos mostrado que R pertenece a $\widehat{\mathbb{K}}(X)$.

II) Si $M = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j} \left(\frac{\sum_{r=1}^{n_2} R_r}{\sum_{s=1}^{m_2} T_s} \right)^{-1}$, entonces por propiedades de la sumatoria,

$$M = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} P_k}{\sum_{j=1}^{m_1} Q_j} \cdot \frac{\sum_{s=1}^{m_2} T_s}{\sum_{r=1}^{n_2} R_r} = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{m_2} P_k T_s}{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{r=1}^{n_2} Q_j R_r}.$$

Para cada $i \in I$, mostraremos que el i -grado de cualquier monomio que compone al numerador de M es igual al i -grado de cualquier monomio que compone al denominador de M .

Fijemos $i \in I$. Por hipótesis $d(i, P_k) = d(i, Q_j)$ y $d(i, R_r) = d(i, T_s)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$, cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$ y cada $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$.

Por el Lema 2.2.3, $d(i, P_k T_s) = d(i, P_k) + d(i, T_s)$ y $d(i, Q_j R_r) = d(i, Q_j) + d(i, R_r)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ y cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$.

Por transitividad: $d(i, P_k T_s) = d(i, Q_j R_r)$, para cada $k \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, cada $s \in \{1, 2, \dots, m_2\}$, cada $j \in \{1, 2, \dots, m_1\}$ y cada $r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$.

Con esto hemos mostrado que M pertenece a $\widehat{\mathbb{K}}(X)$.

Por tanto, el conjunto $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ con las dos operaciones definidas, la suma "+" y el producto ".", es un subcuerpo de $\mathbb{K}(X)$.

Como todo cuerpo es un espacio vectorial sobre cualquier subcuerpo, usando como producto por escalar el producto del cuerpo, entonces consideraremos a $\mathbb{K}(X)$ como espacio vectorial sobre $\widehat{\mathbb{K}}(X)$.

3. BASE DE HAMEL Y EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Georg Hamel, matemático alemán, es conocido por sus estudios en mecánica y también sobre los fundamentos y la historia de las matemáticas, pero su nombre está vinculado principalmente a las bases que llevan su nombre pues en 1905 usó explícitamente el axioma de elección para construir una base para los números reales como un espacio vectorial sobre los números racionales ⁶.

El objetivo de este capítulo, como se mencionó en la introducción, es estudiar el uso del axioma de elección en la teoría de espacios vectoriales. Los resultados más importantes a estudiar son la equivalencia del axioma de elección con la existencia de base de Hamel en todo espacio vectorial y demostrar que cualquier base de Hamel para el \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es no numerable. Además para complementar el tópico, se mencionan otras dos aplicaciones del axioma de elección en espacios vectoriales (ver Teorema 3.2.2 y Teorema 3.2.3).

Con el siguiente teorema se muestra que el axioma de elección es necesario y suficiente para garantizar la existencia de base para cualquier espacio vectorial. La demostración no da idea de como encontrar una base explícitamente, de hecho, el problema de encontrar una base de Hamel explícita no es, por lo general, sencillo de resolver.

Por otra parte, si se tiene un conjunto \mathcal{G} finito que genera a un \mathbb{K} -espacio vectorial V y que no contiene al elemento nulo de V , entonces podemos obtener recursivamente una base. El proceso consiste en eliminar uno por uno los vectores que sean combinación lineal del resto. Si en cierto paso no hay más vectores que sean

⁶ G. HAMEL. "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: $f(x+y) = f(x) + f(y)$." En: *Mathematische Annalen*. Band 60 (1905), págs. 459-461.

combinación lineal del resto, entonces se habrá construido un subconjunto \mathcal{B} del conjunto generador, que sigue generando a V y que por construcción es L.I.; es decir, \mathcal{B} es base para V . Este proceso es finito, pues el sistema generador inicial es finito. Además, \mathcal{B} es finito por ser subconjunto de \mathcal{G} . Sin embargo, si V no es finitamente generado el proceso de encontrar una base es más complejo como veremos más adelante.

Por otro lado, si suponemos que el espacio vectorial $\mathbb{K}(X)$ sobre el conjunto de escalares $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ admite una base \mathcal{B} , entonces por definición para toda $x \in X$ existe $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}$ conjunto finito tal que x puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}(x)$; es decir, para cada $b \in \mathcal{B}(x)$ existe $\lambda_b(x) \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$ tales que

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \lambda_b(x) \cdot b$$

y además $\lambda_b(x)$ no es nulo, para cada $b \in \mathcal{B}(x)$.

El siguiente lema es fundamental para la prueba de que el axioma de elección se deduce a partir de la existencia de una base para cualquier espacio vectorial.

Lema 3.0.1. Si \mathcal{B} es una base para el espacio vectorial $\mathbb{K}(X)$ sobre el conjunto de escalares $\widehat{\mathbb{K}}(X)$, entonces para cualquier $i \in I$ y cualquier par de variables $x, y \in X_i$, se tienen las siguientes afirmaciones:

1. $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(y)$
2. $\frac{\lambda_b(x)}{x} = \frac{\lambda_b(y)}{y}$, para cada $b \in \mathcal{B}(x)$.

Demostración. Sean $i \in I$ y $x, y \in X_i$ arbitrarios. Veamos que vale la afirmación 1). Como x y y son monomios no nulos en $\mathbb{K}(X)$, entonces existen $\mathcal{B}(x), \mathcal{B}(y)$ subconjuntos finitos de \mathcal{B} tales que para cada $b \in \mathcal{B}(x)$ existe $\lambda_b(x) \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$ tales que

$$x = \sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \lambda_b(x) \cdot b \quad (2)$$

y además $\lambda_b(x)$ no es nulo, para cada $b \in \mathcal{B}(x)$. Análogamente, para cada $b \in \mathcal{B}(y)$ existe $\lambda_b(y) \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$ tales que

$$y = \sum_{b \in \mathcal{B}(y)} \lambda_b(y) \cdot b \quad (3)$$

y además $\lambda_b(y)$ no es nulo, para cada $b \in \mathcal{B}(y)$.

Multiplicando por y/x a la ecuación (2) e igualando este producto con la ecuación (3), tenemos:

$$\sum_{b \in \mathcal{B}(y)} \lambda_b(y) \cdot b = y = \frac{y}{x} \cdot x = \sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \frac{y}{x} \lambda_b(x) \cdot b.$$

En efecto,

$$\sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \frac{y}{x} \lambda_b(x) \cdot b - \sum_{b \in \mathcal{B}(y)} \lambda_b(y) \cdot b = 0.$$

Note que

$$\sum_{b \in \mathcal{B}(x)} \frac{y}{x} \lambda_b(x) \cdot b - \sum_{b \in \mathcal{B}(y)} \lambda_b(y) \cdot b = \sum_{b \in \mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y)} \lambda_b \cdot b,$$

$$\text{donde } \lambda_b = \begin{cases} \frac{y}{x} \lambda_b(x) & \text{si } b \in \mathcal{B}(x) \setminus \mathcal{B}(y) \\ \frac{y}{x} \lambda_b(x) - \lambda_b(y) & \text{si } b \in \mathcal{B}(x) \cap \mathcal{B}(y) \\ -\lambda_b(y) & \text{si } b \in \mathcal{B}(y) \setminus \mathcal{B}(x) \end{cases} .$$

Por transitividad

$$\sum_{b \in \mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y)} \lambda_b \cdot b = 0. \quad (4)$$

Como \mathcal{B} es base, entonces $\mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y) \subseteq \mathcal{B}$ es L.I. De la ecuación 4 se concluye que $\lambda_b = 0$ para cada $b \in \mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y)$. Como $\lambda_b(x) \neq 0$ para cada $b \in \mathcal{B}(x)$, entonces

$\mathcal{B}(x) \setminus \mathcal{B}(y) = \emptyset$. Análogamente, como $\lambda_b(y) \neq 0$ para toda $b \in \mathcal{B}(y)$, entonces $\mathcal{B}(y) \setminus \mathcal{B}(x) = \emptyset$. Por tanto $\mathcal{B}(x) \cap \mathcal{B}(y) = \mathcal{B}(x) \cup \mathcal{B}(y)$, y esto implica que $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(y)$. La afirmación 2) del Lema 3.0.1 se cumple, pues por definición de λ_b :

$$\frac{y}{x} \lambda_b(x) - \lambda_b(y) = 0$$

para cada $b \in \mathcal{B}(x)$. Esto es, $\frac{\lambda_b(x)}{x} = \frac{\lambda_b(y)}{y}$ para cada $b \in \mathcal{B}(x)$. □

El siguiente resultado es el teorema central del trabajo. Observe que I implica II es el Teorema 2 de Blass ³ y II implica I es el bien conocido Teorema de Hamel.

Teorema 3.0.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) Todo \mathbb{K} -espacio vectorial tiene una base, para cualquier cuerpo \mathbb{K} .
- II) AE.

Demostración. I \Rightarrow II Por el Lema 1.1.4, si se demuestra AEM entonces queda demostrado AE. Sea I un conjunto no vacío y una familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Veamos que existe una familia $(Y_i)_{i \in I}$ de conjuntos finitos no vacíos tal que $Y_i \subseteq X_i$, para cada $i \in I$. Sean

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i$$

y un cuerpo \mathbb{K} tal que $\mathbb{K} \cap X = \emptyset$.

Consideremos el anillo de funciones polinomiales $\mathbb{K}[X]$, el cuerpo de fracciones $\mathbb{K}(X)$ y el cuerpo $\widehat{\mathbb{K}}(X)$ de fracciones que tienen i -grado homogéneo 0 para cada $i \in I$.

Fijemos $i \in I$. Por el Lema 3.0.1, dado $x \in X_i$, el conjunto $\mathcal{B}(x)$ y el elemento $\frac{\lambda_b(x)}{x}$ dependen sólo de i . Como consecuencia los denotaremos como

$$\mathcal{B}_i := \mathcal{B}(x) \tag{5}$$

y

$$\alpha(i, b) := \frac{\lambda_b(x)}{x},$$

para cada $b \in \mathcal{B}_i$ y cada $x \in X_i$.

Como $\lambda_b(x) \in \widehat{\mathbb{K}}(X)$, entonces $\lambda_b(x)$ es de i -grado homogéneo 0. Por tanto, $\alpha(i, b)$ es de i -grado homogéneo -1, para cada $b \in \mathcal{B}_i$.

Ahora definiremos una función auxiliar que usaremos para definir la función de elec-

ción. Sea $\varphi : I \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por

$$\varphi(i, b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } b \notin \mathcal{B}_i, \\ E_i(Q(i, b)) & \text{si } b \in \mathcal{B}_i, \end{cases}$$

donde $Q(i, b)$ es el denominador de $\frac{P(i, b)}{Q(i, b)}$, una fracción irreducible equivalente a $\alpha(i, b)$, para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$ (ver el Teorema 1.2.14).

- Veamos que $E_i(Q(i, b))$ es finito y no vacío, para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$. Sean $i \in I$ y $b \in \mathcal{B}_i$. Como $\frac{P(i, b)}{Q(i, b)}$ es de i -grado homogéneo -1 , por la Definición 2.2.13 el i -grado homogéneo del numerador es l y el i -grado homogéneo del denominador es $l + 1$, para algún $l \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.2.17, queda claro que esos i -grados homogéneos solo dependen de $\alpha(i, b)$ y no de la forma irreducible escogida. En particular, el i -grado homogéneo de $Q(i, b)$ no es cero y por lo tanto no es constante. Por la Proposición 2.2.12 se concluye que el conjunto $E_i(Q(i, b))$ es finito y no vacío, para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$.
- Veamos que $\varphi(i, b)$ no depende de la fracción irreducible escogida, para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$. En efecto, el Teorema 1.2.14 y la Propiedad 2.2.12 garantizan que los elementos que aparecen en el denominador de cualquier fracción irreducible equivalente de $\alpha(i, b)$ son los mismos, para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$.

Considere la función $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$, dada por

$$f(i) = \bigcup_{b \in \mathcal{B}_i} \varphi(i, b).$$

Veamos que f es una función de elección múltiple.

Debemos mostrar que $f(i)$ es un subconjunto finito y no vacío de X_i . En efecto, tenemos que $\varphi(i, b) \subseteq X_i$ es un conjunto finito no vacío para cada $i \in I$ y cada $b \in \mathcal{B}_i$. De la definición de \mathcal{B}_i (5) se concluye que \mathcal{B}_i es un conjunto finito no vacío

para cada $i \in I$. Por tanto $\bigcup_{b \in B_i} \varphi(i, b) \subseteq X_i$ es finito y no vacío, pues es la unión finita de conjuntos finitos no vacíos.

Se concluye AEM. Por tanto, AE.

II \Rightarrow **I** Usaremos el Lema de Zorn para probar la existencia de bases de Hamel (ver el Teorema 1.1.11).

Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial no vacío. Considere el conjunto

$$\mathbb{P} = \{A \subseteq V : A \text{ es L. I.}\}$$

ordenado por \subseteq .

Note que $\mathbb{P} \neq \emptyset$, pues $\{v\} \in \mathbb{P}$ para cada $v \in V$ no nulo. Sea $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}$ una \subseteq -cadena y sea

$$X = \bigcup_{A \in \mathbb{C}} A.$$

Por definición, X es una cota superior de \mathbb{C} en $\mathcal{P}(V)$. Para que sea cota superior de \mathbb{C} en \mathbb{P} , basta demostrar que X es L.I.

Sea un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $A_j \in \mathbb{C}$ tal que $x_j \in A_j$. Como \mathbb{C} es una cadena, existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $A_j \subseteq A_{j_0}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por transitividad $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq A_{j_0}$.

Como $A_{j_0} \in \mathbb{P}$, entonces $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es L.I. Como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fue tomado arbitrariamente, por definición X es L.I., es decir $X \in \mathbb{P}$.

Hemos demostrado que toda cadena en \mathbb{P} tiene una cota superior en \mathbb{P} . Por el Lema de Zorn existe \mathcal{B} elemento maximal de \mathbb{P} .

Por definición de elemento maximal, $\mathcal{B} \in \mathbb{P}$; es decir, \mathcal{B} es L.I.

Veamos que \mathcal{B} genera a V . Sea $v \in V \setminus \mathcal{B}$ no nulo. Como \mathcal{B} es maximal de \mathbb{P} , entonces $\mathcal{B} \cup \{v\}$ es L.D. Por tanto, existen $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathcal{B}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{K}$ no todos ceros tales que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j b_j + \alpha v = 0.$$

Note que $\alpha \neq 0$ ya que si no fuera así, se tendría que $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es L.D. Por tanto, \mathcal{B} sería L.D. Esto contradice que \mathcal{B} es base.

Ahora bien, como $\alpha \neq 0$, entonces

$$v = \sum_{j=1}^n \frac{-\alpha_j}{\alpha} b_j.$$

Hemos mostrado que \mathcal{B} genera a V , y como \mathcal{B} es L.I., entonces es una base para V .

□

A continuación se muestran dos conocidos ejemplos.

Ejemplo 3.0.3. Sea $\mathbb{R}[x]$ el \mathbb{R} –espacio vectorial de las funciones polinomiales.

Note que el subconjunto

$$\mathcal{B} = \{ \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\} : n \in \mathbb{N} \}$$

de $\mathbb{R}[x]$ es base de Hamel para $\mathbb{R}[X]$ y además \mathcal{B} es numerable.

Ejemplo 3.0.4. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el \mathbb{R} –espacio vectorial de las sucesiones de reales. Es tentador pensar que el conjunto de sucesiones

$$\mathcal{J} = \{(1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots), \dots\}$$

es una base para el espacio vectorial, pero no, ya que la sucesión constante $x = (1, 1, 1, \dots)$ no es una combinación lineal de elementos de \mathcal{J} . Lo mismo ocurre con la familia L del Ejemplo 1.3.5, que aunque al igual que \mathcal{J} es L.I, x tampoco es combinación lineal de L . Sin embargo, el Teorema 3.0.2 afirma la existencia de una base de Hamel para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3.1. CARDINALIDAD DE LAS BASES

G. Cantor fue el primer matemático en darse cuenta y demostrar que existen conjuntos que no son numerables. Esta sección está dedicada a estudiar la cardinalidad de las bases de Hamel y veremos que cualquier base para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ necesariamente no es numerable.

Para lograr el objetivo se usa el concepto de las familias casi disjuntas a fin de construir un subconjunto L.I no numerable de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Se enuncian a continuación algunas definiciones y teoremas que son importantes para el desarrollo de la prueba considerando siempre la existencia de bases en

cualquier espacio vectorial.

El siguiente resultado lo enunciaremos sin demostración y lo utilizaremos para introducir el concepto de dimensión de tal manera que sea consistente. La prueba de esta afirmación la podemos revisar en el Teorema 2 de la Lección 5 del curso de Álgebra lineal de Oswaldo Lezama .

Teorema 3.1.1. Si B_1 y B_2 son bases de un \mathbb{K} -espacio vectorial V , entonces tienen el mismo cardinal.

Definición 3.1.2. La **dimensión** de un \mathbb{K} -espacio vectorial V es igual a la cardinalidad de cualquier base para V . Si V tiene una base finita, entonces decimos que V tiene dimensión finita. De otra manera, V se denomina espacio vectorial de dimensión infinita.

El siguiente lema nos sirve para probar que se puede completar un conjunto L.I. de un espacio vectorial, de tal forma que este nuevo conjunto sea base para el espacio.

Lema 3.1.3. Si X es un subconjunto L.I. propio de un \mathbb{K} espacio vectorial V y $a \in V \setminus \langle X \rangle$, donde $\langle X \rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de X , entonces $X \cup \{a\}$ es también L.I.

Demostración. Sea $a \in V \setminus \langle X \rangle$ y tomemos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$. Veamos que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{a\}$ es L.I. en V . Entonces, en la igualdad vectorial

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha a = 0, \tag{6}$$

el escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ debe ser cero.

Si no, podemos despejar $a = -\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} x_n$, y obtener el absurdo de que $a \in \langle X \rangle$.

Ahora bien, como $\alpha = 0$, la ecuación 6 se reduce a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ y en consecuencia, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, α_i es cero pues el conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es L.I.

Como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ fue tomado arbitrariamente, concluimos que $X \cup \{a\}$ es L.I. □

Teorema 3.1.4. Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial. Si $X \subseteq V$ es L.I, entonces existe $X^* \subseteq V$, tal que $X \cup X^*$ es base para V .

Demostración. Si $\langle X \rangle = V$, tome $X^* = \emptyset$. Si no, considere el conjunto

$$\mathbb{P} = \{A \subseteq V : X \cup A \text{ es L. I.}\}$$

ordenado por \subseteq .

Como $\langle X \rangle \neq V$, existe $a \in V \setminus \langle X \rangle$. Por Lema 3.1.3, $X \cup \{a\}$ es L.I y por tanto $\mathbb{P} \neq \emptyset$. Sea $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{P}$ una \subseteq -cadena y sea

$$Y = \bigcup_{C \in \mathbb{C}} C.$$

Por definición, Y es una cota superior de \mathbb{C} en $\mathcal{P}(V)$. Para que sea cota superior de \mathbb{C} en \mathbb{P} , basta demostrar que Y es L.I.

Sea un subconjunto finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq Y$. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $C_j \in \mathbb{C}$ tal que $y_j \in C_j$. Como \mathbb{C} es una cadena, existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $C_j \subseteq C_{j_0}$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por transitividad $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subseteq C_{j_0}$.

Como $C_{j_0} \in \mathbb{P}$, entonces C_{j_0} es L.I y por tanto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ también es L.I. Como $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ fue tomado arbitrariamente, por definición Y es L.I, es decir $Y \in \mathbb{P}$.

Hemos demostrado que toda cadena en \mathbb{P} tiene una cota superior en \mathbb{P} . Por el Lema de Zorn existe X^* elemento maximal de \mathbb{P} .

Por definición de elemento maximal, $X^* \in \mathbb{P}$; es decir, $X \cup X^*$ es L.I.

Veamos que $X \cup X^*$ genera a V . Sea $v \in V \setminus \langle X \cup X^* \rangle$ no nulo.

Como X^* es maximal de \mathbb{P} , entonces $X \cup (X^* \cup \{v\})$ es L.D. Por tanto, existe

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in X \cup X^*$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{K}$ no todos ceros tales que

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + \alpha v = 0.$$

Note que $\alpha \neq 0$ ya que si no fuera así, se tendría que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es L.D. Por tanto, $X \cup X^*$ sería L.D.

Llegamos a una contradicción, por lo cual $\alpha \neq 0$, entonces

$$v = \sum_{j=1}^n \frac{-\alpha_j}{\alpha} x_j.$$

Hemos mostrado que $X \cup X^*$ genera a V , y como $X \cup X^*$ es L.I, entonces es una base para V .

□

Observe que la demostración del anterior teorema es análoga a la del Teorema de Hamel 3.0.2 (II implica I).

Definición 3.1.5. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una familia **casi disjunta** si cualesquiera dos conjuntos en \mathcal{A} tienen intersección finita.

Esta noción no es reciente, el matemático Sierpiński, en 1928, abordó este concepto a través de la teoría de potencias y familias de conjuntos ⁷ y también el matemático S. Mrówka usó una familia de esta naturaleza para construir un espacio no compacto, completamente regular y pseudocompacto alrededor de los años 50's ⁸.

Ejemplo 3.1.6. Sea $\mathcal{A} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$. Claramente \mathcal{A} es una familia casi disjunta.

Ejemplo 3.1.7. Sea \mathbb{P} el conjunto de todos los números primos. Ahora formemos los siguientes conjuntos de números naturales:

$$A_2 = \{2^k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_3 = \{3^k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$A_5 = \{5^k : k \in \mathbb{N}\},$$

.

.

.

$$A_{p_i} = \{p_i^k : k \in \mathbb{N} \text{ y } p_i \text{ es el } i - \text{ésimo número primo}\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \{A_{p_i} : p_i \in \mathbb{P}\}$. Note que \mathcal{A} es una familia casi disjunta pues $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, y además $p_i^k \neq p_j^l$ para cualesquier $k, l \in \mathbb{N}$. Es decir, si $i \neq j$, entonces $A_{p_i} \cap A_{p_j} = \emptyset$.

A continuación mostraremos una familia no numerable casi disjunta, en este caso, esa familia no puede ser disjunta.

Ejemplo 3.1.8. Para cada $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, existe una sucesión de racionales $(x_n^r)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a r . Defina

$$A_r = \{x_n^r : n \in \mathbb{N}\}.$$

⁷ W. SIERPINKI. "Sur une decomposition d'ensembles. Monatshefte für Mathematik und Physik." En: *Springer*. 35 (1928), págs. 239-242.

⁸ S. MROWKA. "On completely regular spaces." En: *Fundamenta Mathematicae*. 41.1 (1954), págs. 105-106.

Observe que A_r es infinito, para cada r irracional. Veamos que si dos irracionales r, r' son diferentes, entonces el conjunto $A_r \cap A_{r'}$ es finito.

Para $\varepsilon = \frac{|r-r'|}{2} > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \in \mathbb{N}$ y $n > n_0$, entonces

$$|x_n^r - r| < \frac{|r - r'|}{2} \text{ y } |x_n^{r'} - r'| < \frac{|r - r'|}{2}.$$

Sumando ambas desigualdades

$$|x_n^r - r| + |x_n^{r'} - r'| < |r - r'|, \quad (7)$$

y por desigualdad triangular

$$\left| x_n^r - r + (r' - x_n^{r'}) \right| \leq |x_n^r - r| + |x_n^{r'} - r'|. \quad (8)$$

Por transitividad de las Ecuaciones (7) y (8), se concluye que

$$\left| x_n^r - r + (r' - x_n^{r'}) \right| < |r - r'|.$$

Así si $x_n^r = x_n^{r'}$ para algún $n > n_0$, se obtendría la contradicción:

$$|r' - r| = \left| x_n^r - r + (r' - x_n^{r'}) \right| < |r - r'|.$$

Ahora bien, como $x_n^r \neq x_n^{r'}$ para todo $n > n_0$, entonces el conjunto $A_r \cap A_{r'}$ tiene a lo sumo n_0 elementos.

Sea $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ una función biyectiva.

La familia $\mathcal{A}_f = \{f[A_r] : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ es casi disjunta como consecuencia de $\{A_r : r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ ser casi disjunta y también por propiedades de las funciones biyectivas. Ya que $|f[A_r \cap A_{r'}]| = |A_r \cap A_{r'}|$ y además $f[A_r] \cap f[A_{r'}] = f[A_r \cap A_{r'}]$ para cualesquier r, r' irracionales.

Note además que la familia \mathcal{A}_f tiene tantos elementos como irracionales, es decir, \mathcal{A}_f no es numerable.

Definición 3.1.9. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, se define la función característica $X_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ como sigue:

$$X_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A, \end{cases}$$

Observación 3.1.10. Note que si $A, B \subseteq \mathbb{N}$ con $A \neq B$, entonces $X_A \neq X_B$.

Teorema 3.1.11. Si \mathcal{A} es una familia casi disjunta de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} , entonces $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ es L.I en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Veamos que $\{X_{A_1}, X_{A_2}, \dots, X_{A_n}\}$ es L.I, es decir, que la única solución posible de la ecuación:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i X_{A_i}(k_j) = 0, \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \quad (9)$$

es $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$k_i \in A_i \setminus \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n A_j. \quad (10)$$

Si no, entonces $A_i \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n A_j$. Por tanto A_i es un conjunto finito, pues está contenido en un conjunto finito (intersección finita de conjuntos finitos):

$$A_i \subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (A_i \cap A_j).$$

Llegamos a una contradicción, por lo cual para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que $X_{A_i}(k_i) = 1$ y si $j \neq i$, $X_{A_i}(k_j) = 0$. Por la ecuación 9 y evaluando en k_j con

$$j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\alpha_1 X_{A_1}(k_j) + \alpha_2 X_{A_2}(k_j) + \dots + \alpha_n X_{A_n}(k_j) = \alpha_j = 0$$

Esto es, la familia $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ es L.I en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

Teorema 3.1.12. Las bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no son numerables.

Demostración. En el ejemplo 3.1.8, mostramos una familia particular \mathcal{A} casi disjunta no numerable de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} . Por el Teorema 3.1.11, el conjunto $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ es L.I en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Como consecuencia de que la familia \mathcal{A} no es numerable, el conjunto $\{X_A : A \in \mathcal{A}\}$ tampoco es numerable.

Por el Teorema 3.1.4, existe un $X^* \subseteq V$ tal que $\{X_A : A \in \mathcal{A}\} \cup X^*$ es base para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Teniendo en cuenta que la cardinalidad de las bases es la misma (ver Teorema 3.1.1), concluimos que cualquier base para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ no es numerable. □

3.2. OTRAS EQUIVALENCIAS DEL AXIOMA DE ELECCIÓN

Esta sección está dedicada a mencionar otras dos aplicaciones del AE en espacios vectoriales.

Definición 3.2.1. Sean \mathbb{K} un cuerpo, V un \mathbb{K} -espacio vectorial y M, N dos \mathbb{K} -subespacios vectoriales de V . Si $M + N = V$ y $N \cap M = \{0\}$, entonces diremos que N es el **complemento lineal (o directo)** de M (y viceversa).

A manera de información y para complementar este tópico se enuncian los siguientes dos teoremas:

Teorema 3.2.2. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) Cada subespacio S de un \mathbb{K} -espacio vectorial V tiene un complemento lineal S' .
- II) AE.

La demostración de este teorema puede verse en HERRLICH, *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*.

Teorema 3.2.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- I) En cualquier \mathbb{Q} -espacio vectorial, cada conjunto generador contiene una base.
- II) AE.

La clave para demostrar el teorema anterior es el siguiente resultado.

Lema 3.2.4. Sea \mathbb{K} un cuerpo. Si para cada \mathbb{K} -espacio vectorial V todos los conjuntos generadores contienen una base, entonces para cada familia $(V_i)_{i \in I}$ de \mathbb{K} -espacios vectoriales y cada familia $(G_i)_{i \in I}$ de conjuntos generadores G_i de V_i existe una familia $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ de bases respectivas tal que $\mathcal{B}_i \subseteq G_i$ para cada $i \in I$.

La demostración de este lema puede verse en el libro de Herrlich, Axiom of Choice.

.

BIBLIOGRAFÍA

- BLASS, A. "Existence of bases implies the axiom of choice. Contemporary Mathematics." En: *American Mathematical Society* 31 (1984), 31–33 (vid. págs. 15, 48).
- FRALEIGH, J. *First Course in Abstract Algebra. 7th ed.* Harlow, Reino Unido: Pearson Education Canada, 2003 (vid. pág. 27).
- HALPERN, J. "Bases for vector spaces and the axiom of choice." En: *Proceedings of the American Mathematical Society*. 17 (1966), págs. 670-673 (vid. pág. 14).
- HAMEL, G. "Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$." En: *Mathematische Annalen*. Band 60 (1905), págs. 459-461 (vid. pág. 45).
- HERRLICH, H. *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*. Bremen, Alemania: Springer, 2006 (vid. págs. 9, 11, 15, 19, 22, 34, 61).
- HUERTAS A. & MANZANO, M. *Axiom of Choice. Lecture Notes in Mathematics*. Cataluña, España: Editorial de la Universitat Oberta de Catalunya, 2002 (vid. pág. 17).
- MROWKA, S. "On completely regular spaces." En: *Fundamenta Mathematicae*. 41.1 (1954), págs. 105-106 (vid. pág. 57).
- ORAYEN, A. *Filosofía de la lógica*. Madrid, España: Editorial Trotta, 2004 (vid. págs. 13, 18).

SIERPINKI, W. "Sur une decomposition d'ensembles. Monatshefte für Mathematik und Physik." En: *Springer*. 35 (1928), págs. 239-242 (vid. pág. 57).