EL QUINCUNX, UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA QUE FAVORECE EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN EL GRADO UNDÉCIMO

JOSE GABRIEL CORREA RODRIGUEZ
ANDRÉS OLMOS SÁNCHEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS - ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

EL QUINCUNX, UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA QUE FAVORECE EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN EL GRADO UNDÉCIMO

JOSE GABRIEL CORREA RODRIGUEZ
ANDRÉS OLMOS SÁNCHEZ

Trabajo para optar al título de
Especialistas en Educación Matemática

Profesor Director
Ph.D. GABRIEL YÁÑEZ CANAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS - ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2008

Dedicatoria

Al Azar ó a Dios, es lo mismo.

A Peque porque es quien me carga en los momentos difíciles y a la vez me permite impulsarme nuevamente para llegar más alto.

Y a Pepito para que nunca deje de sumergirse en el universo de la música y la matemática, ese es el secreto de la felicidad.

Andrés

Agradecimientos

Al Instituto Técnico Santo Tomás, especialmente a su rector y a los estudiantes que participaron de esta experiencia.

Al profesor Gabriel Yáñez por compartir sus ideas generosamente para llevar a cabo este trabajo.

Al Ingeniero Roberto Behar por permitirnos acceder a un Quincunx importado, que fue un referente importante.

A Turupe, por criticar acertadamente los prototipos del Quincunx que se desarrollaron durante el proceso de diseño.

A Claudita por ser diligente y estar al tanto de los procedimientos administrativos.

A Lili por creer en este proyecto.

A Choro por traducir el resumen.

Índice General

Resumen

TÍTULO: EL QUINCUNX, UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA QUE FAVORECE EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL EN EL GRADO UNDÉCIMO.*

AUTORES: CORREA RODRÍGUEZ, José Gabriel; OLMOS SÁNCHEZ, Andrés.**

DESCRIPTORES: Quincunx, Herramienta Didáctica, Aprendizaje, Distribución Discreta, Binomial.

La Educación Estadística cada día gana importancia y ocupa un lugar preponderante en los currículos. Un concepto que a los estudiantes, del Instituto Técnico Santo Tomás del Municipio de Zapatoca (Santander), se les dificulta es la distribución binomial y más aún su aproximación a la normal. Por eso se propuso en este trabajo de grado el identificar las características que debería tener un instrumento didáctico que favoreciera una mejor comprensión de este concepto.

A partir del aparato diseñado por Galton (1872) se hicieron algunas innovaciones acordes con los materiales y condiciones socioeconómicas de la región para proponer y construir esta herramienta que diera respuesta a lo ya expuesto. Las innovaciones hechas en este trabajo produjeron un Quincunx que lo convierten en una herramienta educativa útil, no sólo para la comprensión del concepto de distribución binomial sino también para la enseñanza de otros conceptos como el de variable aleatoria, así mismo permite identificar las intuiciones que sobre aleatoriedad tienen los estudiantes.

Finalmente se diseñó un taller y se desarrolló con seis estudiantes de la institución, después se analizó la información se obtuvieron resultados satisfactorios a partir de este análisis. Una de las conclusiones fue el hecho de que quienes diseñan y fabrican material didáctico deberían trabajar en conjunto con las universidades formadoras de docentes y los docentes con el ánimo de concebir productos funcionales dentro del aula.

*Proyecto de Grado

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gabriel Yáñez Canal.

Abstract

TITLE: THE QUINCUNX, A DIDACTIC INSTRUMENT THAT FAVOR THE LEARNING OF THE BINOMIAL DISTRIBUTION CONCEPT IN THE ELEVENTH GRADE.*

AUTHORS: CORREA RODRÍGUEZ, José Gabriel; OLMOS SÁNCHEZ, Andrés.**

DESCRIBERS: Quincunx, Educational Tool, Learning, Distribución Discreta, Binomial.

Each day the statistical education gains such importance that it occupies a preponderant place in the curricula. The concepts of the binomial distribution and its approximation to the normal distribution becomes difficult for the students of the Instituto Técnico Santo Tomás located in Zapatoca (Santander). Due to this, the main goal of this work is to identify the properties that a didactic instrument must have for improving understanding of these concepts.

According to the materials and social-economic conditions of the region some innovations were made to the apparatus designed by Galton (1872) for its construction. The innovations made in this work produced a Quincunx that becomes in an educational tool useful for improving understanding others concepts as random variable, and permit to identify the intuitions of the students about randomness.

Finally a workshop was designed and developed with six students of the institution. Later, we analyzed the information and we obtained satisfactory results. We conclude that the university, designers of didactic material and teachers would have to work altogether for conceiving functional products within the classroom.

*Thesis

** Science Faculty. Mathematics School. Specialization in Mathematical Education. Director: Gabriel Yáñez Canal.

Presentación

Cada ser humano es producto de una entre 400.000.000 posibilidades, pues esta es la cantidad de espermatozoides que en promedio compiten por fecundar el óvulo, entonces sin temor a equivocarse se podría decir que el ser humano es producto del azar. Después del acto sublime de la fecundación se desprenden otros que también se rigen por el azar, las características físicas y comportamientos de cada individuo se dan a partir de una serie de combinatorias entre dos materiales genéticos que lo hacen irrepetible, y así se llega hasta el último instante de la existencia que no tendría por qué escaparse del azar, entonces la pregunta que se desprende es: ¿Cuántos posibles caminos existían o mejor existen para llegar a ser el individuo que cada uno de nosotros es hoy, en este instante? Pero también hay algo bello, a pesar de lo impredecible de cada suceso, la tendencia de un cúmulo de sucesos, sí se puede denominar así, confluyen y determinan el camino que debemos seguir y no otro, es uno solo.

El propio origen del hombre es el azar, la aleatoriedad y por fortuna existe una ciencia que permite estudiar este fenómeno de la naturaleza desde el rigor y lo sistemático del conocimiento científico, es la Probabilidad y Estadística. No olvidemos que el hombre siempre le ha asignado lo impredecible a Dios, durante muchos años lo hizo y relativamente hasta hace poco tiempo se dio inicio a esta Ciencia, podría decirse que comenzó con el libro sobre juegos de azar de Cardano (1501-1576). Paso poco más de un siglo para que nuevamente Fermat y Pascal se refirieran nuevamente al tema, pero ya con un tratamiento matemático.

Muchos genios más hicieron sus aportes para consolidar la ciencia que hoy conocemos como Probabilidad y Estadística. Sin embargo en comparación con otras ciencias se puede decir que es relativamente joven, y que hasta hace muy poco se empieza a introducir en el currículo escolar.

Además se introduce la globalización como fenómeno social actual, exige a las instituciones educativas en todo nivel, ofrezcan experiencias que favorezcan la formación de ciudadanos competentes estadísticamente, capaces de plantear soluciones pertinentes a los problemas que conlleva el desarrollo de cualquier sociedad, repercutiendo en el mejoramiento continuo de la calidad de vida de todos sus ciudadanos. Este desarrollo establece unas necesidades a las que los diferentes sistemas educativos deben estar atentos, pues son las pautas los lineamientos que deben dirigir su actividad.

Una de estas necesidades que se hace hoy de carácter urgente, es el despertar del pensamiento aleatorio en los estudiantes para que sean competentes y puedan dar solución a una gran variedad de problemas que se están presentando en el ámbito empresarial, y también para interpretar la gran cantidad de información a la que nos vemos enfrentados a través de los diferentes medios de comunicación.

Profundizando un poco más, la enseñanza de la matemática se ha enfocado en trasmitir a los educandos la idea de un mundo gobernado por fenómenos determinísticos, cuando todos sabemos que la realidad es muy diferente. Muchos fenómenos están enmarcados en un contexto totalmente probabilístico, y si no contamos con una educación donde se involucre su enseñanza desafortunadamente no los comprenderemos y mucho menos se podrá dar solución a los problemas que éstos conllevan.

Por eso las últimas tendencias de la política educativa a nivel mundial, muestran un creciente interés por la inclusión de la estadística y la probabilidad en los currículos de todos los niveles de escolaridad. Un referente influyente son los estándares del

National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 2000). En su última edición han incluido el análisis de datos como elemento fundamental de la formación matemática que deben impartir las instituciones educativas de los Estados Unidos. Lo mismo ha sucedido en Colombia como se puede constatar en el documento Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Es decir, la política está dada, el paso siguiente es capacitar a los docentes que se encargarán de enseñar la estadística y probabilidad a los niños y jóvenes en formación. Pero esto implica que la academia también debe cumplir su función y formar a estos docentes, labor compleja, especialmente porque la sociedad exige resultados inmediatos.

Los autores de esta monografía quieren hacer un aporte en términos del material didáctico para la comprensión de conceptos, más aún cuando estos conceptos de esta ciencia aún presentan hoy controversias epistemológicas sobre sus conceptos fundamentales, pero aún así se debe enseñar. Sin embargo, también se ha detectado que para los estudiantes del grado undécimo del Instituto Santo Tomás del Municipio de Zapatoca, Santander, no tienen interés por el aprendizaje de las distribuciones discretas y mucho menos las continuas, pues se convierte en un derrotero de fórmulas sin sentido para ellos.

En ese sentido se indagó por una estrategia para mejorar la motivación de estos estudiantes. Somos conscientes de que esta ciencia no es sencilla y se presentan muchos obstáculos epistemológicos, aún en expertos. Por lo tanto se pensó en que era muy importante trabajar con material real para que a partir de la experiencia del estudiante, haciendo uso de su razonamiento inductivo, adquiriera nociones y corrigiera sus intuiciones erradas de los fenómenos estocásticos.

Por eso fue de nuestro interés encontrar instrumentos didácticos que permitieran un cambio de actitud y evidenciar si los estudiantes se vean motivados por la temática. La mayor sorpresa fue la ausencia total en el mercado nacional de este tipo de instrumentos. Entonces, por fortuna la tecnología lo permite, la búsqueda comenzó a nivel internacional y se llegó al Quincunx o Máquina de Galton, diseñada y construida por primera vez en la segunda mitad del siglo XIX. Así nos planteamos el siguiente cuestionamiento con el ánimo de que al finalizar este trabajo se le diera respuesta: **¿Qué características debe tener el Quincunx para que favorezca el aprendizaje del concepto de distribución binomial en el grado undécimo?**

Entonces por sugerencia del Doctor Yáñez nos desplazamos a la ciudad de Cali para conocer una máquina de éstas, traída por el ingeniero Roberto Behar, profesor titular de la Universidad del Valle. Sabíamos por la información extraída de internet que era una máquina costosa y que actualmente sólo se estaba utilizaba en el nivel de educación superior. De esta manera se hizo una revisión de la única herramienta existente para este fin, y se identificaron algunas de sus características que podrían servir.

Además, se hizo entonces necesario identificar las dificultades del aprendizaje de la distribución binomial que se presentan en los estudiantes. Con base en lo anterior se definieron las características que debía tener este instrumento y se construyó teniendo en cuenta las condiciones en donde se iba a utilizar, además se elaboró una propuesta para su utilización y se aplicó en la institución ya mencionada. Después se hizo un análisis de los resultados para identificar los beneficios y desventajas del instrumento y evaluarlo para mejorarlo y ponerlo a disposición de las instituciones educativas de la región.

1.0 Marco Teórico

Epistemológicamente, el proceso investigativo se va a orientar desde la perspectiva de la teoría del aprendizaje significativo expuesta por Ausubel, donde se comprende la adquisición de nuevos significados, y a la inversa, éstos son producto del aprendizaje significativo. Esto es el surgimiento de nuevos significados, en el alumno refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo.

1.1 Fundamentación pedagógica

Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, esto, porque dominó una perspectiva conductista, de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia.

La experiencia humana no solo implica pensamiento, sino también afectividad y únicamente cuando se consideran en conjunto se capacita al individuo para enriquecer el significado de su experiencia.

Para entender la labor educativa, es necesario tener en consideración tres elementos del proceso: Los profesores y su manera de enseñar; la estructura de los conocimientos que conforman el currículo y el modo en que se produce y el entramado social en que se desarrolla el proceso educativo.

Lo anterior se desarrolla dentro de un marco sicoeducativo, puesto que la sicología educativa trata de explicar la naturaleza del aprendizaje en el salón de clases y los factores que lo influyen. Estos fundamentos sicológicos proporcionan los principios para que los profesores descubran por sí mismos los métodos de enseñanza más eficaces, puesto que intentar descubrir métodos por "ensayo y error" es un procedimiento ciego y, por tanto y necesariamente difícil y antieconómico (Ausubel, 1.983).

En este sentido una "teoría del aprendizaje" ofrece una explicación sistemática, coherente y unitaria del ¿Cómo se aprende?, ¿Cuáles son los límites del aprendizaje?, ¿Por qué se olvida lo aprendido?

Y complementando a las teorías del aprendizaje encontramos a los "principios del aprendizaje", que se ocupan de estudiar los factores que contribuyen a que ocurra el aprendizaje, en los que se fundamentará la labor educativa. En este sentido, si el docente desempeña su labor fundamentándola en principios de aprendizaje bien establecidos, podrá racionalmente elegir nuevas técnicas de enseñanza y mejorar la efectividad de su labor.

La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, ofrece el marco apropiado para el desarrollo de la labor educativa, así como para el diseño de técnicas educativas coherentes con tales principios constituyéndose en un marco teórico que favorecerá dicho proceso.

Teoría de Aprendizaje Significativo

Ausubel (1983) plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información. Debe entenderse por "estructura cognitiva", al conjunto de conceptos, ideas que un individuo posee, en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

En el proceso de orientación del aprendizaje, es de vital importancia conocer la estructura cognitiva del alumno; no solo se trata de saber la cantidad de información que posee, sino cuales son los conceptos y proposiciones que maneja así como de su grado de estabilidad. Los principios de aprendizaje propuestos por Ausubel (Psicología educativa, 1983), ofrece el marco para el diseño de herramientas meta cognitivas que permiten conocer la organización de la estructura cognitiva del educando, lo cual permitirá una mejor orientación de la labor educativa, ésta ya no se verá como una labor que deba desarrollarse con “mentes en blanco” o que el aprendizaje de los alumnos comience en “cero”, pues no es así, sino que los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

Ausubel (Psicología educativa, 1983) resume este hecho de la siguiente manera; “si tuviese que reducir toda la sicología educativa a un solo principio, enunciaría este: el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente”.

Aprendizaje Significativo y Aprendizaje Mecánico

Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. (Ausubel; 1.983, p.18).

Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Este proceso tiene lugar si el educando tiene en su estructura cognitiva conceptos, estos son: Ideas, proposiciones, estables y definidos, con los cuales la nueva información puede interactuar.

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información se conecta con un concepto relevante (subsunsor) preexistente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de anclaje a las primeras.

La característica más importante del aprendizaje significativo es que produce una interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y las nuevas informaciones (no es una simple asociación), de tal modo que estas adquieren un significado y son integradas a la estructura cognitiva de manera no arbitraria y sustancial, favoreciendo la diferenciación, evolución y estabilidad de los subsunsores preexistentes y consecuentemente de toda la estructura cognitiva.

El aprendizaje mecánico, contrariamente al aprendizaje significativo, se produce cuando no existen subsunsores adecuados, de tal forma que la nueva información es almacenada arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos pre-existentes, un ejemplo ello sería el simple aprendizaje de formulas de física, esta nueva información es incorporada a la estructura cognitiva de manera literal y arbitraria puesto que consta de puras asociaciones arbitrarias, “el alumno carece de conocimientos previos relevantes y necesarios para hacer que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativo” (independientemente de la cantidad de significado potencial que la tarea tenga)… (Ausubel; 1.983:37).

Obviamente, el aprendizaje mecánico no se da en un “vacío cognitivo” puesto que debe existir algún tipo de asociación, pero no en el sentido de una interacción como en el aprendizaje significativo. El aprendizaje mecánico puede ser necesario en algunos casos, por ejemplo en la fase inicial de un nuevo cuerpo de conocimientos, cuando no existen conceptos relevantes con los cuales pueda interactuar, no obstante, el aprendizaje significativo debe ser preferido, pues, este facilita la adquisición de significados la retención y transferencia de lo aprendido.

Finalmente Ausubel no establece una distinción entre aprendizaje significativo y mecánico como una dicotomía, sino como un “Continuum”, es más, ambos tipos de aprendizaje pueden ocurrir concomitantemente en la misma tarea de aprendizaje (Ausubel; 1.983). Por ejemplo, la simple memorización de fórmulas se ubicaría en uno de los extremos de ese continuo (aprendizaje mecánico), y el aprendizaje de relaciones entre conceptos podría ubicarse en el otro extremo (aprendizaje significativo).

Aprendizaje por Descubrimiento y Aprendizaje por Recepción

En el aprendizaje por recepción, el contenido o motivo de aprendizaje se presenta al alumno en su forma final, solo se le exige que internalice o incorpore el material que se le presenta de tal modo que pueda recuperarlo o reproducirlo en un momento posterior. En el caso anterior la tarea de aprendizaje no es potencialmente significativa ni tampoco convertida en tal, durante el proceso de internalización, por otra parte el aprendizaje por recepción puede ser significativo si la tarea o material potencialmente significativos son comprendidos e interactúan con los subsunsores existentes en la estructura cognitiva previa del educando.

En el aprendizaje por descubrimiento, lo que va a ser aprendido no se da en su forma final, sino que debe ser re-construido por el alumno antes de ser aprendido e incorporado significativamente en la estructura cognitiva.

El aprendizaje por descubrimiento involucra que el alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognitiva, y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el aprendizaje deseado.

Tanto uno como el otro pueden ser significativo o mecánico, dependiendo de la manera como la nueva información es almacenada en la estructura cognitiva.

Requisitos para el Aprendizaje Significativo

Al respecto Ausubel dice: “El alumno debe manifestar […] una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él, es decir, relacionable con su estructura de conocimiento sobre una base no arbitraria” (Ausubel; 1.983:48).

Lo anterior presupone que el material sea potencialmente significativo, esto implica que el material de aprendizaje pueda relacionarse de manera no arbitraria y sustancial (no al pie de la letra) con alguna estructura cognoscitiva especifica del alumno, la misma que debe poseer “significado lógico” es decir, ser relacionable de forma intencional y sustancial con las ideas correspondientes y pertinentes que se hallan disponibles en la estructura cognitiva del alumno, este significado se refiere a las características inherentes del material que se va a aprender y a su naturaleza.

Cuando el significado potencial se convierte en contenido cognoscitivo nuevo, diferenciado e idiosincrático dentro de un individuo en particular como resultado del aprendizaje significativo, se puede decir que ha adquirido un “significado sicológico” de esta forma el emerger del significado sicológico no solo depende de la representación que el alumno haga del material lógicamente significativo, “sino también que tal alumno posea realmente los antecedentes necesarios en su estructura cognitiva”. (Ausubel, 1.983, p.55)

El que el significado sicológico sea individual no excluye la posibilidad de que existan significados que sean compartidos por diferentes individuos, estos significados de conceptos y proposiciones de diferentes individuos son lo suficientemente homogéneos como para posibilitar la comunicación y el entendimiento entre las personas.

Materiales Didácticos

Definición: Es un dispositivo instrumental que contiene un mensaje educativo, por lo cual el docente lo utiliza para llevar a cabo el proceso de enseñanza---aprendizaje (Castillo).

Para que un material didáctico resulte eficaz en el logro de unos aprendizajes, no basta con que se trate de un “buen material”, ni tampoco es necesario que sea un material de última tecnología. Cuando seleccionamos recursos educativos para utilizar en nuestra labor docente, además de su calidad objetiva hemos de considerar en qué medida sus características específicas (contenidos, actividades, autorización…) están en consonancia con determinados aspectos curriculares de nuestro contexto educativo:

- Los objetivos educativos que pretendemos lograr. Hemos de considerar en qué medida el material nos puede ayudar a ello.

- Los contenidos que se van a tratar utilizando el material, que deben estar en sintonía con los contenidos de la asignatura que estamos trabajando con nuestros alumnos.

- Las características de los estudiantes que los utilizarán: Capacidades, estilos cognitivos, intereses, conocimientos previos, experiencia y habilidades requeridas para el uso de estos materiales. Todo material didáctico requiere que sus usuarios tengan unos determinados prerrequisitos.

- Las características del contexto (físico, curricular…) En el que desarrollamos nuestra docencia y donde pensamos emplear el material didáctico que estamos seleccionando. Tal vez un contexto muy desfavorable puede aconsejar no utilizar un material, por bueno que éste sea.

- Las estrategias didácticas que podemos diseñar considerando la utilización del material. Estas estrategias contemplan: la secuencia de los contenidos, el conjunto de actividades que se puede proponer a los estudiantes, la metodología asociada a cada una, los recursos educativos que se pueden emplear, etc.

Así, la selección de los materiales a utilizar con los estudiantes siempre se realizará contextualizada en el marco del diseño de una intervención educativa concreta, considerando todos estos aspectos y teniendo en cuenta los elementos curriculares particulares que inciden. La cuidadosa revisión de las posibles formas de utilización del material permitirá diseñar actividades de aprendizaje y metodologías didácticas eficientes que aseguren la eficacia en el logro de los aprendizajes previstos.

Cada medio didáctico, según los elementos estructurales, abre determinadas posibilidades de utilización en el marco de unas actividades de aprendizaje que en función del contexto, le pueden permitir ofrecer ventajas significativas frente al uso de otros medios alternativos. Para poder determinar ventajas de un material sobre otro, siempre debemos considerar el contexto de aplicación ya que, por ejemplo un material poco eficaz, produce inconvenientes en su manejo y en el aprendizaje.

Por tanto, creemos que una de las medidas más prometedoras para el mejoramiento del aprendizaje escolar consiste en el perfeccionamiento de los materiales didácticos. Los factores más importantes que influyen en el valor del aprendizaje de los materiales didácticos radican en el grado en que estos materiales facilitan el aprendizaje significativo.

Por otro lado, interesará que el esfuerzo realizado por el profesor al preparar, desarrollar y evaluar las actividades que realicen los estudiantes utilizando el material didáctico no sea desproporcionado a los resultados que se pueden obtener, por ello analizaremos las ventajas, y también el costo y los inconvenientes que implica la utilización de este recurso frente a otros materiales didácticos alternativos.

Tampoco es conveniente que el uso de un determinado recurso educativo condicione los contenidos a tratar o la estrategia didáctica que se va a emplear. Son los materiales los que deben estar subordinados a los demás elementos curriculares y no al revés; los materiales deben contribuir a facilitar los aprendizajes que se pretenden (fracaso escolar, poca motivación, problemas de comprensión, e.t.c) que se puedan tener algunos alumnos.

Los tres apoyos clave para una buena utilización de los materiales didácticos

La utilización de recursos didácticos con los estudiantes siempre supone riesgos: que finalmente no estén todos disponibles, que las máquinas necesarias no funcionen, que no sean tan buenos como nos parecían, que los estudiantes se entusiasman con el material pero lo utilizan solamente de manera lúdica. Por ello, y para reducir estos riesgos, al planificar una intervención educativa y antes de iniciar una sesión de clase en la que pensamos utilizar un recurso educativo conviene que nos aseguremos tres apoyos clave:

-El apoyo tecnológico. Nos aseguraremos de que todo está a punto y funciona: revisaremos todos los materiales que vamos a precisar.

-El apoyo didáctico. Antes de la sesión, haremos una revisión del material y prepararemos actividades adecuadas a nuestros alumnos y al currículo.

-El apoyo organizativo. Nos aseguramos de la disponibilidad de los espacios adecuados y pensaremos la manera en la que distribuiremos a los alumnos, el tiempo que durará la sesión, la metodología que emplearemos (directiva, semidirectiva, uso libre del material).

1.2 Fundamentación Matemática

Distribución de Probabilidades Discretas

Si se considera un experimento aleatorio con un número finito de posibles resultados $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$. Por ejemplo, al lanzar un dado los posibles resultados que corresponden a la cara superior serán 1, 2, 3, 4, 5 y 6; mientras que para el caso de una moneda serán cara (C) ó sello (S).

Es muy útil saber referirse a un resultado de un experimento. Para hacer esto se puede denotar $X_i, i = 1,2,3,4$, para representar los valores de los resultados de los lanzamientos de cuatro dados, y después escribir la siguiente expresión para la suma de los cuatro lanzamientos

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

Entonces se puede decir que las X_i son variables aleatorias, que se definirá como una expresión cuyo valor es el resultado de un experimento.

Sea X una variable aleatoria que representa el resultado del lanzamiento de un dado, se le pueden asignar probabilidades a los posibles resultados de este experimento. Esto se hace asignando un número no negativo $m(\omega_j)$ a cada uno de los posibles resultados de tal manera que se cumpla lo siguiente

$$m(\omega_1) + m(\omega_2) + m(\omega_3) + m(\omega_4) + m(\omega_5) + m(\omega_6) = 1$$

Donde $m(\omega_j)$ se conoce como una función de distribución de una variable aleatoria X. Que para el ejemplo que se está siguiendo se le puede asignar una la misma probabilidad a cada uno de los posibles resultados, que correspondería a $\frac{1}{6}$. Con esta asignación se podría escribir que

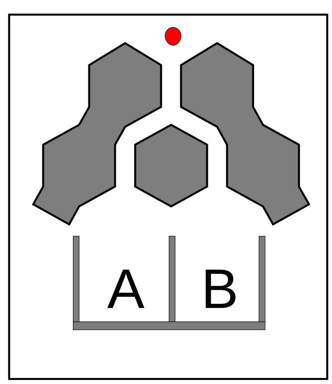
$$P(X \leq 5) = \frac{5}{6}$$

Indicando que existe una probabilidad de $\frac{5}{6}$ de que el resultado al lanzar el dado no sea mayor de 5.

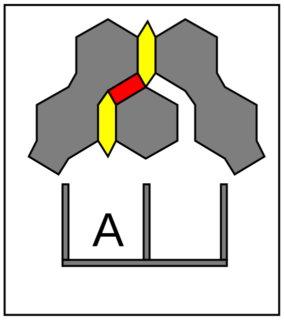
Se define ahora la variable aleatoria Y como el resultado del lanzamiento de una moneda. Los dos posibles resultados para esta variable son cara (C) ó sello (S). Y manteniendo la equiprobabilidad del ejemplo anterior se le asignaría el valor de $\frac{1}{2}$ de probabilidad para cada posible resultado. Sin embargo en la realidad esta condición de equiprobabilidad no se da siempre, algunos fármacos ofrecen $\frac{30}{100}$ de efectividad. Por eso es útil el concepto de probabilidad a partir de la frecuencia. Sea una probabilidad p para que suceda un resultado A, entonces si el experimento se repite varias veces se espera que la fracción de veces que ocurre A está cerca del valor de p.

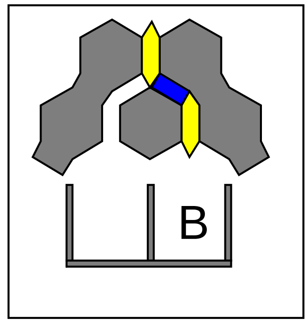
1. Combinatoria

Suponga que se tiene una máquina de Galton como se indica en la figura, a la variable aleatoria X se le asigna el valor A ó B según el compartimento donde se ubique la bola roja después de dejarla caer.



Para este diseño existen dos posibles resultados que son A y B, y que conforman el espacio muestral del experimento. Estos posibles resultados definen dos posibles caminos que conducen a ellos y son los que se presentan en las figuras

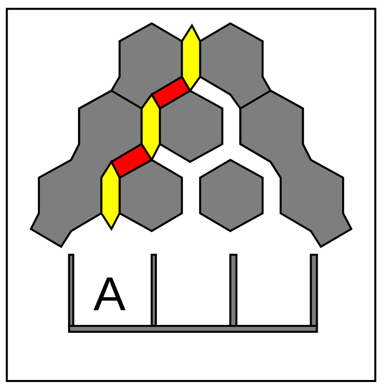




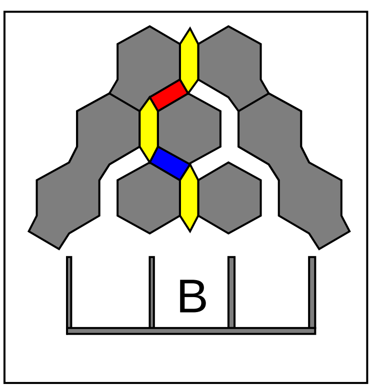
Los posibles caminos para cuando hay dos compartimentos se representan

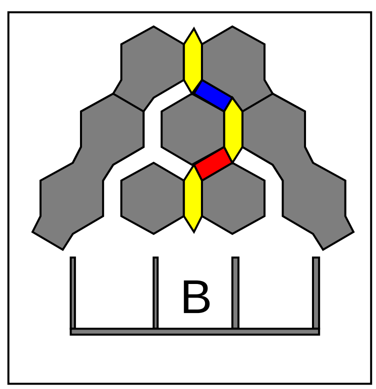
$$1 \quad 1$$

Ahora se suponen tres compartimentos y se encuentran los caminos conducen a A

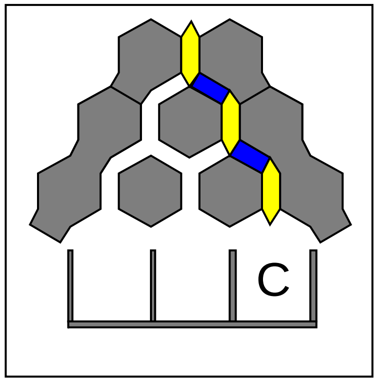


Para el compartimento B existen dos caminos que son





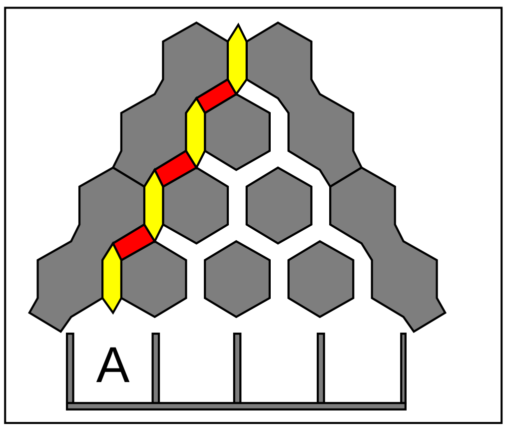
Finalmente para el compartimento C existe un camino que es inverso al de A.



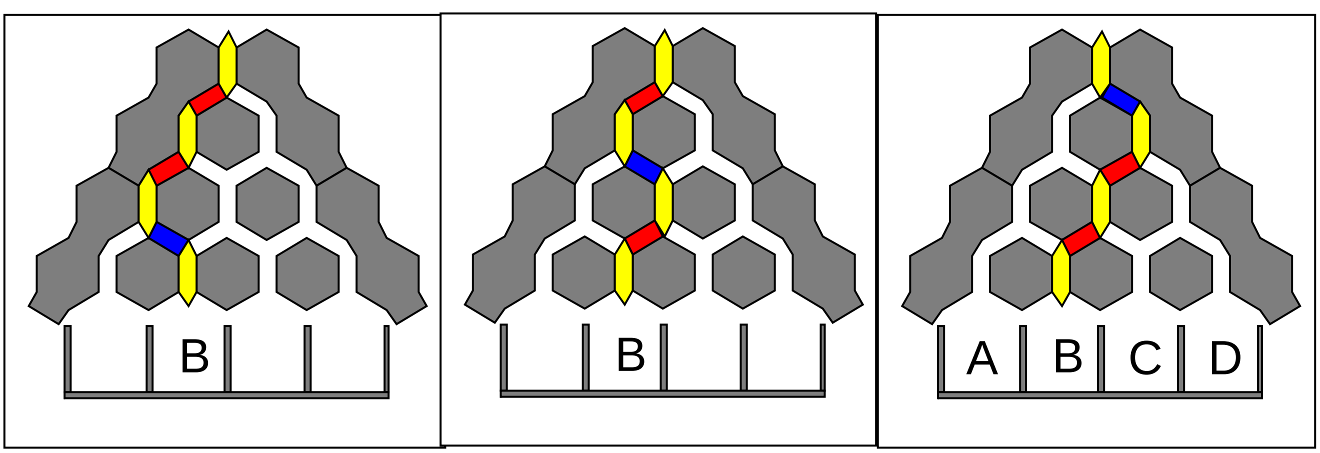
Entonces siguiendo lo hecho para dos compartimentos, se representan los caminos para cada compartimento cuando se tienen tres, así

$$1 \quad 2 \quad 1$$

Siguiendo el análisis para cuatro compartimentos se obtienen los siguientes caminos para A



Ahora para B



Por simetría se tiene que para el compartimento C existen la misma cantidad de caminos que para B, y para$D$ los mismos que para A.
Resumiendo los caminos para cada compartimento son

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

Ahora se generaliza, para dos compartimentos se tienen dos caminos. Uno donde el color rojo indica que tomó la izquierda y el otro simbolizado por el color azul para indicar que tomó la derecha. Aprovechando este ejemplo se representará el hecho de que para dos caminos uno no toma la derecha así $\binom{2}{0}$, y para el camino que sí tomó la derecha se denotará como $\binom{2}{1}$.
Es decir

$$\binom{2}{0} = 1$$

$$\binom{2}{1} = 1$$

Realizando lo mismo para tres compartimentos se tiene que existe un solo camino en el que no toma a la derecha $\binom{3}{0}$. Tres caminos en que toma una vez a la derecha $\binom{3}{1}$, así mismo hay tres caminos en que toma dos a la derecha $\binom{3}{2}$. Y uno en que toma tres veces a la derecha $\binom{3}{3}$. Luego se tiene que

$$\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

Se puede apreciar que

$$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1$$

Que al generalizar se tendría

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

La cantidad de diferentes caminos con j elementos hacia la izquierda (I) que se pueden obtener de una máquina de Galton con n niveles de bifurcación se denota $\binom{n}{j}$, y se lee "combinaciones de n en j" y se llama coeficiente binomial, por su aplicación en el álgebra.

Ahora se debe encontrar la expresión que permita encontrar esta cantidad de caminos o subconjuntos si se trata desde un punto de vista general.

Primero se debe encontrar la cantidad de formas de elegir subconjuntos de j elementos, que para el momento de elegir el primer elemento se cuenta con n opciones, para elegir el segundo existe uno menos, es decir hay $n-1$ opciones, para el tercero $n-2$ opciones, y así sucesivamente.

Es decir se tienen

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-j+1)$$

formas de elegir los j elementos.

Pero como no importa el orden de elección, puesto que en la máquina de Galton no importa si tomó a la derecha en la primera bifurcación ó en la segunda, se deben descartar las formas equivalentes.

Pero se sabe que el número de elecciones equivalentes es igual a las permutaciones de j, que se calcula con $j!$. Por lo tanto el resultado anterior se debe dividir $j!$.

Para finalmente llegar a que

$$\binom{n}{j} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-j+1)}{j!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (j-1) \cdot j}$$

Y multiplicando numerador y denominador por $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-j)$, se obtiene

$$\binom{n}{j} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-j) \cdot (n-j+1) \ldots (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots j)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots (n-j))} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

Con esta expresión se puede construir el conocido triángulo de Pascal y hallar el número de caminos para la máquina de Galton con cualquier cantidad de niveles de bifurcación.

De

	j=0	*j*=1	*j*=2	*j*=3	*j*=4	*j*=5	*j*=6	*j*=7	*j*=8	*j*=9
n=0	1									
n=1	1	1								
n=2	1	2	1							
n=3	1	3	3	1						
n=4	1	4	6	4	1					
n=5	1	5	10	10	5	1				
n=6	1	6	15	20	15	6	1			
n=7	1	7	21	35	35	21	7	1		
n=8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
n=9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

y

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}$$

Ensayos de Bernoulli

El coeficiente binomial es utilizado en un proceso aleatorio conocido como ensayos de Bernoulli y que se define como una secuencia de experimentos aleatorios tales que

1. Cada uno de los experimentos tiene dos posibles resultados, para el caso de la máquina de Galton sería izquierda (I) o derecha (D).
2. La probabilidad p de que tome la izquierda (I) en el experimento es la misma en cada experimento, y la probabilidad no se ve afectada por el conocimiento de los resultados anteriores. Definida la probabilidad de tomar la izquierda (I), queda definida la probabilidad q de que tome la derecha (D) como $q = 1 - p$.

Para el caso que se está trabajando en esta monografía se consideran probabilidades iguales es decir $p = q = \frac{1}{2}$.

Se analiza cómo la máquina de Galton sirve para representar concretamente un proceso aleatorio de ensayos Bernoulli.

Si obtienen la cantidad de caminos que conducen a cada compartimento a partir del triángulo de Pascal, o a la expresión

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

Por ejemplo, si se tiene una máquina de Galton con 12 niveles de bifurcación se pueden obtener los caminos para cada compartimento así:

Número de caminos que contienen 0 decisiones a la izquierda (I), que se denota $\binom{12}{0}$, y al reemplazar $n = 12, j = 0$, se tendría

$$\binom{12}{0} = \frac{12!}{0!\,(12-0)!} = \frac{12!}{1 \cdot 12!} = 1$$

Ahora para caminos con una decisión a la izquierda (I)

$$\binom{12}{1} = \frac{12!}{1!\,(12-1)!} = \frac{12!}{1 \cdot 11!} = 12$$

Sí se continua para los caminos con dos decisiones al izquierda hasta que las doce decisiones sean hacia la izquierda (I), se encuentran las siguientes cantidades

$$1 \quad 12 \quad 66 \quad 220 \quad 495 \quad 792 \quad 924 \quad 495 \quad 220 \quad 66 \quad 12 \quad 1$$

También se sabe que la sumatoria de estos coeficientes debe ser $2^n = 2^{12} = 4096$

Si se define la probabilidad b como la probabilidad de que la bola escoja la ruta donde no hay ninguna decisión hacia la izquierda, y se denota $b(12, \frac{1}{2}, 0)$, se debe encontrar una expresión que permita calcularla.

Una forma es encontrando la fracción de rutas que conducen sin ninguna decisión a la izquierda sobre el total de rutas, esto sería $\frac{1}{4096} = 0{,}000244$ ...

Pero se debe encontrar la expresión general para cualquier ensayo Bernoulli, incluyendo aquellos donde las probabilidades no son iguales.

Se trata de encontrar la sumatoria de las probabilidades de todos los caminos que tienen exactamente j decisiones a la izquierda (I) y $n - j$ decisiones a la derecha (D). Cada uno de estos caminos tiene una probabilidad dada por la expresión

$$p^j q^{n-j}$$

Y la cantidad de caminos ya se ha visto que se obtiene a partir de la expresión $\binom{n}{j}$

Por lo tanto la expresión que permitir calcular la probabilidad binomial b está dada por:

$$b(n,p,j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

Para el caso particular de la máquina de Galton se tiene que $p = q = \frac{1}{2}$ por lo que la anterior expresión sería equivalente a

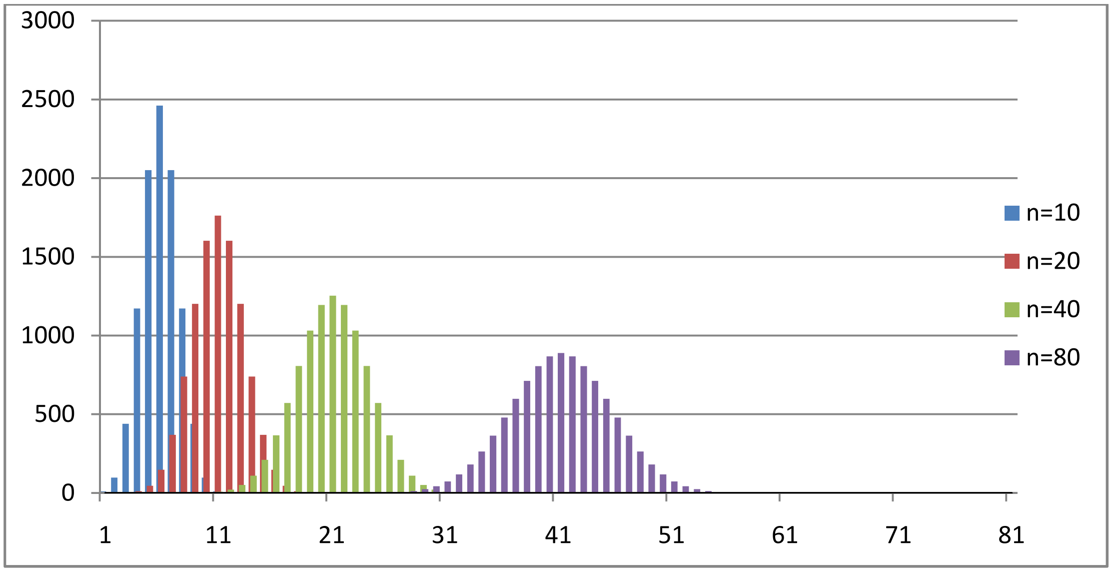
$$b\left(n,\frac{1}{2},j\right) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Distribución Binomial

Ahora se procede a definir la distribución binomial como:

Definición Sea n un entero positivo y sea p un número real que está en el rango entre 0 y 1. Y sea B una variable aleatoria que cuenta la cantidad de éxitos en n repeticiones de un ensayo Bernoulli. Entonces la distribución $b(n,p)$ de B es llamada distribución binomial.

En la siguiente gráfica se presentan distribuciones binomiales para $p = \frac{1}{2}$ pero para valores de n diferentes. El valor de mayor probabilidad está dado por np y se conoce como media o valor esperado, y a medida que n aumenta este valor se hace más pequeño.



Parámetros de la distribución Binomial

Valor Esperado o Media

Sea X una variable aleatoria discreta binomial con parámetros $n\ y\ p$ con una función de densidad $f(x)$, el valor esperado o media se define como

$$E[X] = \mu = \sum_{\forall x} x f(x)$$

La media es un parámetro de localización del centro de los valores de X. Sin embargo no nos da una idea de la variabilidad de los valores, por eso es necesario definir otro parámetro que sí de una idea de esta característica.

Para el caso de la binomial se tiene que $\mu = np$

Varianza

Teniendo la misma variable anterior X con media μ. La varianza que se define como $Var\ X = \sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$

Se dice que mide la variabilidad pues está teniendo en cuenta los valores $X - \mu$. Y se elevan al cuadrado para que los negativos no afecten los positivos. A partir de esta definición se aprecia que a medida que los valores se alejen más de μ entonces la varianza crecerá manteniendo un valor positivo.

Finalmente se puede calcular $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

Para el caso de la binomial se tendría que $\sigma^2 = npq$

Desviación estándar

La varianza es muy útil para comparar dos variables, sin embargo por ser un número con unidades sin significado físico, entonces para que esto no suceda se procede a definir la desviación estándar que sí tiene unidades que nos dan una idea de la magnitud en unidades con un significado físico.

Siendo X una variable aleatoria cuya varianza es σ^2, su desviación estándar está dada por $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Que para la distribución binomial estaría dado por la expresión $\sigma = \sqrt{npq}$

Distribuciones Continuas

Definición Una variable aleatoria es continua sólo si tiene la particularidad de que se le pueda asignar un valor en uno o más intervalos de los números reales y además la probabilidad de que asuma un valor específico sea 0.

Esto implica que se debe encontrar una función que permita calcular la probabilidad para un valor específico, esta función se conoce como de densidad.

Siendo X una variable aleatoria continua, la función en cuestión debe ser tal que

1. $f(x) \geq 0 \; para\ todo\ real$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P[a \leq X \leq b] = \int_{a}^{b} f(x)dx \; donde\ a\ y\ b\ son\ reales$

Parámetros de una distribución continua

Similar a las variables aleatorias discretas los parámetros de las continuas se definen a continuación.

Valor Esperado o Media

Sea X una variable aleatoria se define su media así

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Varianza

Por lo tanto la varianza para el caso continuo será

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Desviación Estándar

Y seguidamente se determina la desviación estándar obteniendo la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}$$

Distribución Normal

Existen muchos tipos de distribución continua pero para este trabajo sólo toma importancia la Normal, por eso en los siguientes párrafos se describirán algunas de sus propiedades.

Fue descrita por primera vez en el año 1733 por De Moivre como el límite de la distribución binomial cuando n tiende a infinito. Medio siglo después Laplace y Gauss mediante sus trabajos de astronomía la retomaron y por eso también toma el nombre de Gaussiana. Muchos fenómenos de la naturaleza siguen esta distribución por eso es fundamental su estudio y aplicación.

En la descripción de la distribución binomial se observa en la figura que a medida que aumenta n la gráfica de la función se va pareciendo a una campana, aún para valores de n relativamente pequeños.

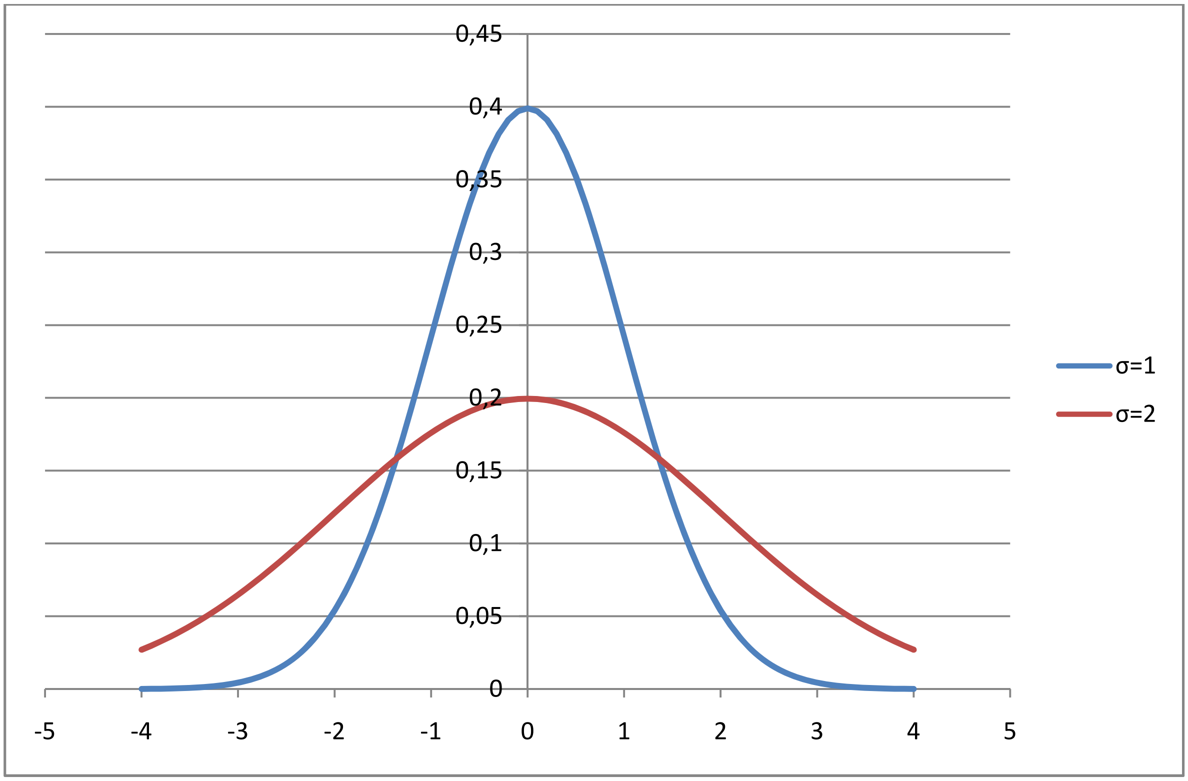
Esto permite pensar que una variable aleatoria que está binomialmente distribuida y que tiene los parámetros $n\ y\ p$ se puede considerar como la suma de n variables aleatorias independientes.

La función de densidad que tiene una distribución normal con parámetros $\mu\ y\ \sigma$ es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}$$

Donde μ representa el centro de la densidad y σ es una medida de la envergadura.

A continuación se aprecian las gráficas de dos funciones de distribución normal para $\mu = 0, \sigma = 1\ y\ \sigma = 2$.



Entonces se tiene que la función de distribución acumulada que es el área bajo la curva hasta un valor x, es dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx$$

La ley de los grandes números

Continuando con la Máquina de Galton, esta ley implica que si se aumentan los niveles o filas de la máquina cada vez más, la probabilidad de que la bola caiga en el compartimento central se acerca a *1*, mientras que la probabilidad de que caiga en los extremos se acerca cada vez más a *0*.

Entonces, desde lo general se diría que si tiene la máquina de Galton con probabilidad de $\frac{1}{2}$ de irse a la izquierda (I), y sea $X_j = 1$ si en el nivel j de bifurcación tomó a la izquierda (I) y $X_j = 0$ si tomó a la derecha (D). Entonces la sumatoria de resultados $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es igual al número de veces que tomó a la izquierda (I) en los n ensayos, y el valor esperado $\mu = E(X_{j)} = \frac{1}{2}$.

Para lo que la Ley de los Grandes Números establece para cualquier $\epsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \epsilon\right) \to 1$$

Esto implica que para cuando $n \to \infty$ se espera que la proporción de decisiones hacia la izquierda (I) esté muy próxima a $\frac{1}{2}$ .Esto demuestra que el modelo matemático de probabilidad es coherente con la interpretación de frecuencia como probabilidad.

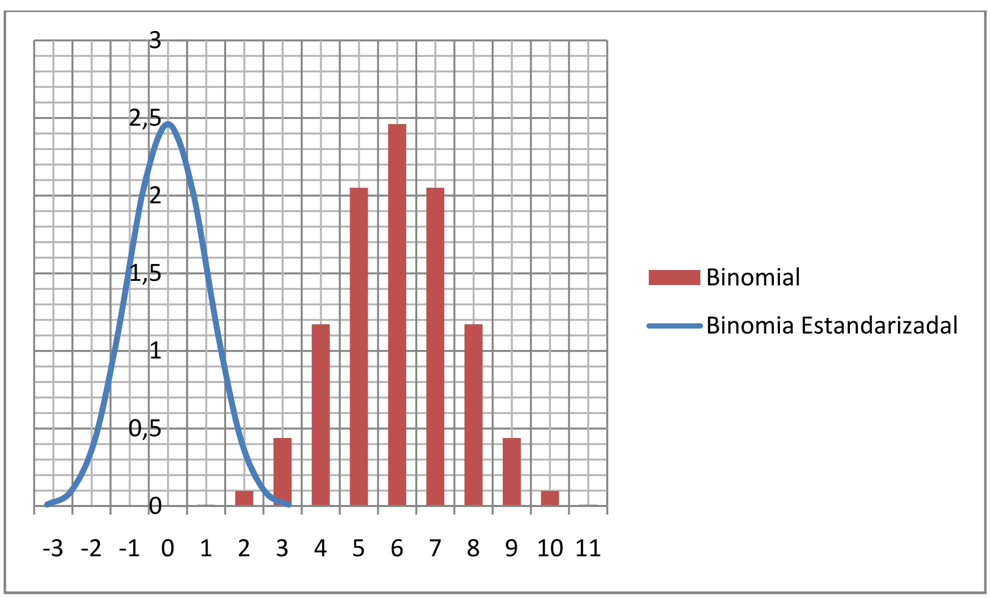
Teorema del Límite Central

Continuando con los supuestos anteriores se sabe que $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene una distribución de probabilidades $b(n, p, j)$. En las gráfica de la página 24 para diferentes valores de n de la distribución binomial se apreciaba que los máximos valores se obtenían cerca de np, y que este último se movía hacia la derecha a medida que n aumenta.

Para evitar que la cresta de la gráfica se mueva a la deriva se utiliza la estandarización de S_n que se define como

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$$

Donde para Z siempre el valor esperado será 0 y la varianza 1. Así los máximos siempre estarán cerca al 0, y se previene el ensanchamiento de la curva.



En la gráfica se presenta un proceso de estandarización para $n = 10, p = q = 0{,}5$.

De esta manera también se hace más fácil comparar diferentes resultados para un análisis que conlleve a la toma de decisiones.

Ahora suponga que dibuja una gráfica con las crestas ubicadas en los posibles valores de $S_n^* = x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde

$$x_j = \frac{j - np}{\sqrt{npq}}$$

Así se hace que la altura en x_j sea igual al valor de distribución $b(n, p, j)$. Sin embargo se presenta el inconveniente de que la altura respecto a la distribución normal estándar es difierente, y lo que se pretende es que sean iguales.

Despejando para j

$$j = (np + x_j\sqrt{npq})$$

Entonces se tiene que para la altura de la cresta en x_j

$$\sqrt{npq}\,b(n, p, j) = \sqrt{npq}\,b(n, p, np + x_j\sqrt{npq})$$

De la anterior expresión se puede decir que para n grande, la altura de la cresta se hace muy cercana a la altura de la distribución normal estándar. Esto en lenguaje matemático sería

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{npq}\,b\big(n, p, np + x\sqrt{npq}\big) = \phi(x)$$

Donde $\phi(x)$ es la función de distribución de una variable normal estándar.

1.3 Los Estándares del MEN y NTCM

A comienzos de 1994, la Ley General de Educación (ley 115), le quita al Ministerio de Educación Nacional la potestad curricular para fijar centralmente los programas de las áreas fundamentales y obligatorias estipuladas en la ley. En los Art. 78 y 148 se estipula que el Ministerio de Educación Nacional debe únicamente expedir ``los lineamientos generales de los procesos curriculares´´ y ``los indicadores de logros para cada grado de los niveles educativos´´ de la educación formal, sin precisar que los indicadores de logros.

Después de dos años de reuniones realizadas en el Ministerio de Educación Nacional bajo la coordinación de Ana Cecilia Castiblanco Paiba, en el año de 1998 se publicaron los Lineamientos Curriculares para el Área de Matemáticas.

En dichos documentos se enfatiza en una potente idea central: el propósito de las matemáticas no es tanto el manejo de muchos sistemas matemáticos conceptuales y simbólicos, sino el desarrollo de cinco tipos fundamentales de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, a través de cinco procesos básicos: formular y resolver problemas, comunicar, razonar, modelar procesos y fenómenos de la realidad, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Un modelo geométrico que describiría mejor las interconexiones de los pensamientos y los procesos se propone en la siguiente figura:

El dominio de los sistemas matemáticos no es pues ya el propósito central del currículo de las matemáticas escolares. Ahora, el propósito central es el desarrollo de los cinco tipos de Pensamiento Matemático enumerados.

El interés de esta monografía se centra en el Pensamiento Aleatorio por eso se considera necesario hacer una breve descripción del mismo.

El Pensamiento Aleatorio

Este tipo de pensamiento es requisito imprescindible para que un estudiante sea matemáticamente competente, pues le permite la toma de decisiones en situaciones gobernadas por la incertidumbre, el azar, el riesgo o falta de información, esto impide predecir con un grado absoluto de certeza.

La teoría de probabilidad y la inferencia estadística está directamente relacionadas con este tipo de pensamiento y permiten, de cierta manera, controlar la incertidumbre.

El azar se refiere a la ausencia o desconocimiento de patrones en la repetición de eventos. Los estudiantes en su vida cotidiana ya se han enfrentado a este tipo de situaciones, por ejemplo en el lanzamiento de los dados en los juegos de mesa, en las loterías, en el lanzamiento de una moneda, y generalmente ha tomado conciencia del carácter impredecible que las caracterizan. Entonces comienzan a intentar predecir sus resultados a partir de la intuición, por eso se hace importante aprovechar esta condición del estudiante para empezar a introducir conceptos de probabilidad.

Además el gran avance tecnológico computacional de las últimas décadas genera un espacio más amplio para la interpretación y el análisis de datos, dejando en un segundo plano el simple cálculo de parámetros y la memorización de fórmulas de la estadística descriptiva.

Cómo favorecer el desarrollo del pensamiento aleatorio en los estudiantes?

Para intentar dar respuesta a esta pregunta es necesario remitirse a los Principio y Estándares para la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics (NTCM), una autoridad en lo que se refiere a la educación matemática.

En la actualidad la abundancia de información y datos es una realidad que en algunos casos hasta se puede convertir en un problema si no se le da un adecuado manejo, que sirve para tomar decisiones en los negocios, la política, la investigación y en la vida cotidiana. Las encuestas sobre el consumo permiten desarrollar y estudiar el mercado de los productos. Las encuestas de intención de voto orientan las estrategias en las campañas políticas. Los experimentos previos valoran la seguridad y eficacia de un tratamiento médico. La manipulación de las estadísticas para sobrevalorar la calidad de un producto o servicio son presentadas por los medios de comunicación todos los días. Por estas y otras razones más los estudiantes requieren saber Analizar Datos y Probabilidad para razonar estadísticamente, para llegar a ser ciudadanos bien informados y consumidores críticos y reflexivos.

El énfasis que se hace al Análisis de Datos se extiende a todos los niveles con el ánimo de que cuando un estudiante termine la secundaria con un sólido conocimiento de estadística elemental y que intuitivamente comprenda algunos conceptos fundamentales de la probabilidad. Para esto se debe contar con materiales para la enseñanza y capacitar a los docentes profesionalmente para su enseñanza y aprendizaje.

Para lograr desarrollar este tipo de pensamiento es muy importante que el estudiante trabaje directamente con datos, desde la misma obtención de los mismos, así mismo se debe procurar establecer conexiones con otras ramas de la matemática, Números, Algebra, Geometría y Medición, como también con las otras asignaturas.

El NTCM sugiere que los programas de enseñanza en todos los niveles deberán capacitar a los estudiantes en los siguientes cuatro aspectos.

1. **Formular preguntas que se puedan abordar con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas**

Los niños tienen una curiosidad innata por conocer el mundo; por eso tienden a realizar preguntas como: ¿cuántos?, ¿cuánto cuesta?, ¿qué clase de?, ¿cuáles de estos?, convirtiéndose en una gran oportunidad para empezar el estudio del Análisis de Datos y la Probabilidad. El docente se debe centrar en la experiencia del niño o joven, sus temas de interés, por ejemplo la pizza preferida, la marca del celular.

Para dar respuesta a éstas preguntas los niños pueden diseñar el formato para el registro de la toma de datos. A medida que se avanza en el nivel se debe planificar más la recogida de los mismos y evaluar el funcionamiento de los métodos, más adelante en los grados de Noveno a Undécimo se debe trabajar con datos de otras fuentes y dedicar más tiempo a comprender los propósitos de las encuestas, los estudios de observación y los experimentos.

En el nivel de Primero a Tercero es importante que los niños tengan claro que los datos pueden ordenarse, y que el producto de este ordenamiento, ya sea un cuadro o una tabla, suministra información sobre el fenómeno observado. De cuarto a quinto debe ser capaz de representar los datos utilizando diagramas de barra, tablas o diagramas de puntos. En esta etapa es fundamental reconocer que algunos números representan los valores de los datos, y otros la frecuencia de esos valores.

Los de Sexto a Noveno deben comparar la eficacia de las diferentes representaciones, aspecto fundamental para comunicar. Es también muy importante representar los datos en gráficos con la ayuda de tecnología para poder centrarse en el análisis de los datos.

2. **Seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos**

Los niños inicialmente, por su egocentrismo, se interesan particularmente por sus datos, por eso el docente debe registrar los datos de todos en un lugar visible para que el niño empiece a comprender la importancia del conjunto de datos como un todo. Esto permite crear la necesidad de nuevas herramientas para describirlos, aquí se introducen las medidas de centralización (media, mediana y moda) y de dispersión (rango, desviación típica), y los atributos sobre la forma de la distribución.

Para comparar estadísticamente, en los niveles Primero a Tercero los niños deben poder decir que un grupo tiene más o menos que otro de un determinado atributo. En el siguiente nivel se debe pasar a comparar dos conjuntos, de esta manera se les crea la necesidad de más herramientas que les permitan identificar semejanzas y diferencias, aquí es justo cuando se deben introducir los histogramas, gráficos de tronco, gráficos de caja y nubes de puntos. En el nivel de Octavo a Noveno entonces necesitarán investigar asociaciones y tendencias de datos bivariantes, y finalmente para Décimo y Undécimo el análisis de residuos y correlación.

3. **Desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos**

Los estudiantes deben comprender los elementos básicos que componen un análisis estadístico, a saber: seleccionar adecuadamente una muestra, recoger los respectivos datos, describir la muestra y hacer inferencias que relacionen la muestra y la población.

Los más pequeños sólo trabajan con datos a partir de encuestas. Por lo tanto aún no están preparados para comprender que la muestra representa la población. Después pueden llegar a adquirir algunas nociones de inferencia estadística pero todavía no tienen una idea conceptual del proceso de muestreo.

Los resultados de las investigaciones demuestran que los estudiantes en los niveles de Sexto a Séptimo aún consideran su juicio más veraz que el de los datos mismos.
En los niveles finales se supone que los estudiantes ya deben tener ideas claras de muestreo e inferencia, y empezar a comprender que se puede cuantificar la certeza de los resultados estadísticos. Además deben usar simulaciones para entender que a partir de distribuciones muestrales se puede inferir.

4. Comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad

La probabilidad sirve de base para recoger, describir e interpretar datos. Es recomendable que en los niveles de Primero a Tercero se maneje informalmente. Se debe utilizar el lenguaje acorde con el desarrollo de los niños, para introducir nociones de probabilidad, siempre utilizando los hechos cotidianos para ellos, por ejemplo: es *muy probable* que hoy tengamos descanso, e *improbable* que llueva.

Se hace muy importante que las primeras experiencias con el azar sean con materiales concretos como bolas, fichas, monedas.

Ya en los niveles de Cuarto y Quinto se debe enriquecer con experimentos en los que se utilicen monedas, dados, ruletas, y se produzcan resultados que permitan introducir sucesos con la designación de imposibles, improbables, probables o seguros.
Para Secundaria se espera que los estudiantes calculen probabilidades de sucesos condicionados e independientes. Pero tal vez el concepto más importante es comprender que un suceso individual es impredecible, pero cuando se repite muchas veces va definiendo una tendencia, esto es fundamental para el estudio de la inferencia estadística.

Para el objetivo de esta monografía es pertinente registrar los estándares estipulados por el Ministerio de Educación Nacional para el pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

ESTÁNDARES BÁSICOS

PRIMERO-TERCERO	CUARTO-QUINTO	SEXTO-SÉPTIMO	OCTAVO-NOVENO	DÉCIMO-UNDÉCIMO
• Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas. •Interpreto cualitativamente datos referidos a situaciones del entorno escolar. • Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos. • Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras. • Identifico regularidades y tendencias en un conjunto de datos. • Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. • Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro. • Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.	• Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). • Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos. • Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares). • Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos. • Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos. • Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	• Comparo e interpreto datos provenientes de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación. • Interpreto, produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos. (diagramas de barras, diagramas circulares.) • Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos. • Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. • Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad. • Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares. • Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística.	• Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. • Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas. • Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. • Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). • Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico. • Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). • Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas. • Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo). • Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.).	• Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación. • Justifico o refuto inferencias basadas en razonamientos estadísticos a partir de resultados de estudios publicados en los medios o diseñados en el ámbito escolar. • Diseño experimentos aleatorios (de las ciencias físicas, naturales o sociales) para estudiar un problema o pregunta. • Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas. • Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos). • Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad). • Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos. • Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo). • Propongo inferencias a partir del estudio de muestras probabilísticas.

Teniendo en cuenta los estándares se presentan los que se consideran pueden ser potenciados con el Quincunx.

De Primero a Tercero

Estándar	Actividad Quincunx
Clasifico y organizo datos de acuerdo a cualidades y atributos y los presento en tablas.	Se representan los datos obtenidos a partir del Quincunx en una tabla.
Describo situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos.	Se describen los resultados a partir de los resultados obtenidos después de dejar caer una cantidad de canicas.
Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos, pictogramas y diagramas de barras.	Se representan los datos obtenidos mediante un histograma de frecuencias.
Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos	Después de realizar una experiencia con el Quincunx el niño puede indicar la posibilidad o imposibilidad de que la canica caiga en uno u otro compartimento.
Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.	Se puede predecir donde es más probable que caiga una canica, se comparan dos o más compartimentos.
Resuelvo y formulo preguntas que requieran para su solución coleccionar y analizar datos del entorno próximo.	Responde y se cuestiona acerca del fenómeno que ocurre en una experiencia del Quincunx.

De Cuarto a Quinto

Estándar	Actividad Quincunx
Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).	Los datos obtenidos en el Quincunx además de representarse en una tabla se pueden pasar a otros tipos de tablas como el diagrama circular.
Comparo diferentes representaciones del mismo conjunto de datos	Después de obtener las diferentes representaciones se pueden comparar, y determinar en qué situaciones son más útiles.
Interpreto información presentada en tablas y gráficas. (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de líneas, diagramas circulares).	Se pueden interpretar las representaciones de los diagramas de otros compañeros.
Conjeturo y pongo a prueba predicciones	El niño puede diseñar una estrategia para

acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos	predecir en qué compartimentos caerán más canicas, y comprobarla utilizando el Quincunx.
Describo la manera como parecen distribuirse los distintos datos de un conjunto de ellos y la comparo con la manera como se distribuyen en otros conjuntos de datos	El niño describe la manera como en que se distribuyen las canicas en una experiencia Quincunx.
Uso e interpreto la media (o promedio) y la mediana y comparo lo que indican.	Se puede utilizar el Quincunx para presentar las medidas de tendencia central.
Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.	Se pueden formular preguntas y contestarlas a partir de la experiencia con el instrumento, y del tratamiento de los datos.

De Sexto a Séptimo

Estándar	Actividad Quincunx
Uso medidas de tendencia central (media, mediana, moda) para interpretar comportamiento de un conjunto de datos	A partir de los datos obtenidos se le pide a los estudiantes que calculen e interpreten las medidas de tendencia central.
Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento	El estudiante debe encontrar un modelo que describa lo que ocurre en el Quincunx.
Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad	Una vez se encuentre el modelo matemático que describa lo que sucede, se pueden calcular probabilidades para cada compartimentos en diferentes arreglos de pines.
Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información estadística	A partir de las nociones básicas de probabilidad, por ejemplo el triángulo de Pascal, el estudiante puede hacer predicciones de los resultados argumentando adecuadamente sus razonamientos.

De Octavo a Noveno

Estándar	Actividad Quincunx
Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría	Además de calcular las medidas de tendencia central, las debe interpretar y utilizar para hacer estimaciones e inferencias.

Comparo resultados de experimentos aleatorios con los resultados previstos por un modelo matemático probabilístico	Puede comparar sus estimativos con los resultados y determinar la validez del modelo matemático preestablecido, y realizar ajustes si es el caso.
Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo	A partir del triángulo de Pascal y del modelo matemático puede calcular la probabilidad de que una canica caiga en un cierto compartimento, y para cierta cantidad de lanzamientos predecir la cantidad posible que caerá en cada compartimento.
Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc)	Según la distribución de los pines se pueden generar diferentes espacios muestrales. También se puede corregir la falacia del jugador.

De Décimo a Undécimo

Estándar	Actividad Quincunx
Interpreto nociones básicas relacionadas con el manejo de información como población, muestra, variable aleatoria, distribución de frecuencias, parámetros y estadígrafos	Es importante este instrumento para transmitir el concepto de variable aleatoria y distribución de frecuencias, también puede hacer estimativos de los parámetros de medida central.
Uso comprensivamente algunas medidas de centralización, localización, dispersión y correlación (percentiles, cuartiles, centralidad, distancia, rango, varianza, covarianza y normalidad	También se pueden calcular medidas de dispersión y junto con la ayuda de una hoja de cálculo representar los datos. También es útil para que mediante la recolección de datos de todo un curso se intuya el concepto de la ley de los grandes números.
Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos	Se pueden trabajar algunos ejemplos de probabilidad condicional utilizando canicas de varios colores.
Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo	Este instrumento es perfecto para ejercicios de conteo y combinatoria, ampliamente utilizados en la industria actual.

Las actividades anteriormente descritas son tan sólo un preámbulo del potencial que tiene este instrumento didáctico, por eso es recomendable darle continuidad a este trabajo para que finalmente se cuente con un instructivo que le permita al docente darle un adecuado uso y los niños puedan avanzar en el desarrollo de su pensamiento aleatorio.

2.0 Antecedentes

2.1 Francis Galton

Sir Francis Galton (1822 –1911), explorador y científico británico con un amplio espectro de intereses. No tuvo cátedras universitarias y realizó la mayoría de sus investigaciones por su cuenta. Sus múltiples contribuciones recibieron reconocimiento formal cuando, a la edad de 87 años, se le concedió el título de *Sir* o caballero del Reino.

De intereses muy variados, Galton contribuyó a diferentes áreas de la ciencia como la psicología, la biología, la tecnología, la geografía, la estadística o meteorología. A menudo sus investigaciones fueron continuadas dando lugar a nuevas disciplinas.
Primo de Charles Darwin, aplicó sus principios a numerosos campos, principalmente al estudio del ser humano y de las diferencias individuales.

El aporte que para esta monografía es de interés es la máquina de Galton desarrollada en el año 1872 para demostrar la ley del error y la distribución normal como una suma distribuciones y es el instrumento de inspiración para este trabajo.

Los primeros diseños que de ella hizo Galton se muestra en la siguiente figura. En la de la izquierda se observan 24 filas de pines para finalmente terminar en 13 compartimentos. La del medio es bastante interesante pues muestra una primera parte donde llegan las bolas A-A, después cada compartimento de estos se ´puede abrir para generar otra distribución en la sección B-B. Finalmente la de la derecha es similar a la de la izquierda excepto por la reducción que sufren los compartimentos, con este se logra simplemente una deformación visual de la gráfica.

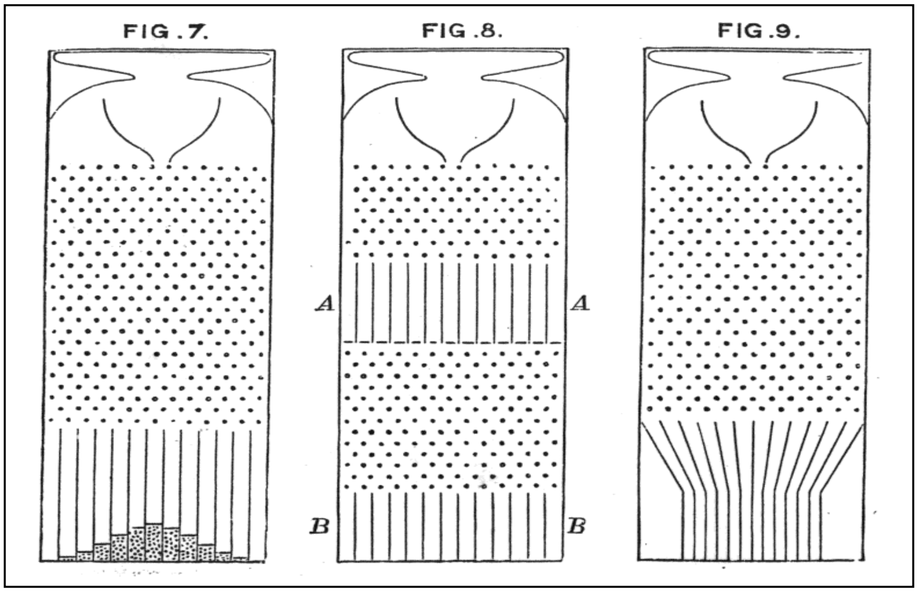


Figura 2.1 Primeros diseños de la Máquina de Galton

La primera máquina que se construyó por la empresa Tiller & Spiller en 1872 de la ciudad de Londres es la de la figura 2.2.

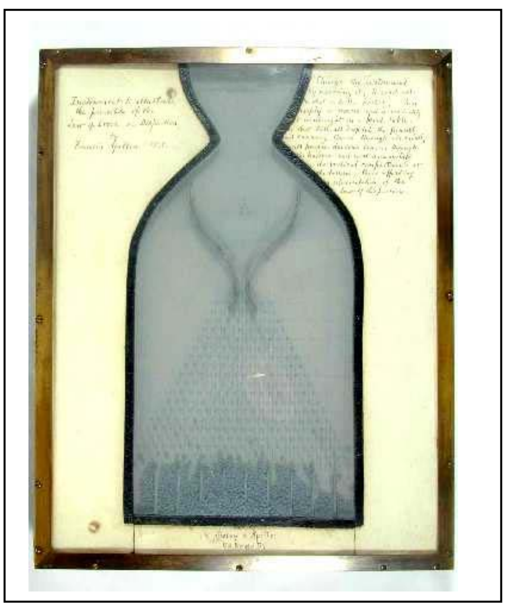


Figura 2.1 Primera Máquina de Galton construida en 1872.
Tomado de:
http://www.ucl.ac.uk/museums/galton/statistics/quincunx.html

Galton la diseñó para hacer varias demostraciones, entre ellas respecto a la herencia de la altura de los individuos, refiriéndose al respecto de la siguiente manera: “*La estatura no es un simple elemento, sino la suma de largos y espesores acumulados de más de cien partes del cuerpo, cada una tan distinta del resto como para haber conseguido un nombre con el cual se le puede especificar. La lista incluye cerca de cincuenta huesos diferentes, situados en el cráneo, la columna, la pelvis, las dos piernas y los de los tobillos y los pies. Esta multiplicidad de elementos, cuyas variaciones son, en alguna medida, independientes unas de otras, algunas tendientes a alargar la estatura total, otras a acortarla, se correspondería con un número igual de filas de alfileres del aparato de la figura* ”. 1[1]

2.2 Piaget e Inhelder

A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos por Piaget e Inhelder presentados por Batanero en su libro Didáctica de la Estadística.

Piaget e Inhelder utilizaron la máquina de Galton para hacer varios experimentos que desarrolló con la intención de comprender la idea de distribución normal que se produce en las diferentes etapas de desarrollo. A continuación se presentan algunos resultados de dichas investigaciones, para las cuales se diseñaron los tableros presentados en la figura 2.3 con base en el Quincunx de Galton, que él lo describe como un plano inclinado con pines regularmente espaciados, que al dejar caer una cierta cantidad de bolas se dispersan aleatoriamente.

[1] GALTON, Francis. Herencia y Eugenesia

Para Piaget e Inhelder es fundamental la característica simétrica que se presenta en este tipo de distribución.

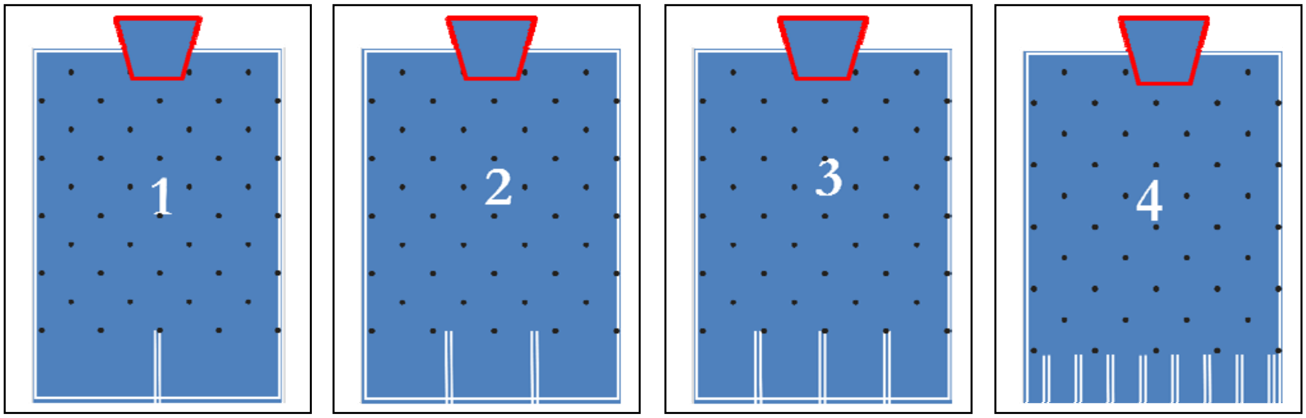


Figura 2.3 Tableros utilizados por Piaget e Inhelder.

Consiste en introducir una bola, después otra, y luego otra más, indagando al niño donde cree que va a caer y por qué. Cuando el comprenda se le pregunta por la disposición final que tendrían muchas bolas si se dejaran caer.

Por último se dejan caer las bolas y se le pide al niño que interprete los resultados obtenidos.

Los resultados encontrados para cada una de las etapas que Piaget ha categorizado en su teoría sobre el aprendizaje se presentan de manera breve en los siguientes párrafos.

Preoperatoria (2-7 años): Se caracteriza por la necesidad de manipular objetos reales para poder aprender sobre un cierto concepto, pues los niños requieren de la experiencia empírica para aprender, por eso también se le conoce como etapa sensoriomotriz.

- Tablero 1: Para esta etapa los niños aún no tienen una idea de distribución, ellos hacen apuestas sin discriminación alguna por cualquier compartimento. No tienen presente que al aumentar la cantidad de bolas tienden a igualarse las cantidades de los dos compartimentos.
- Tablero 2: Se presentan dos tipos de predicciones. Una donde ellos consideran que se dará una distribución uniforme para los tres compartimentos y otra en la que creen que todas las bolas caerán en uno de los compartimentos, en este punto el texto no precisa si los niños se inclinan por alguno en especial.
- Tablero 3. El niño advierte que caerán en uno de los dos casilleros centrales o que se puede dar una distribución irregular. Pareciera que los niños ya intuyen que para que sea simétrica se necesita un número de compartimentos impar.
- Tablero 4: Para este último los niños suponen que se dará una distribución irregular.

Operaciones Concretas (7-11 años): comienza la comprensión de la conservación de la masa, peso, número y volumen. Y comienza a adquirir conceptos donde no se requiere de la manipulación de objetos. Para el caso particular de esta experiencia los niños prevén la diferencia en las frecuencias de los dos tipos de compartimentos, los centrales y los laterales. Sin embargo el niño a pesar de tener el principio de distribución de conjunto aún no puede cuantificarla pues no tiene el concepto de la ley de los grandes números. Por esto el niño percibe una simetría global pero aún no es capaz de igualar los sectores correspondientes.

- **Tablero 1:** A pesar de que el niño prevé una cantidad igual de bolas en los dos compartimentos, no percibe que esta igualdad se logra aumentando la cantidad de bolas (Ley de los grandes números).
- **Tablero 2**: El niño da cuenta de un máximo en el central pero no identifica la igualdad de los dos laterales.
- **Tablero 3:** Ya identifica que los compartimentos centrales tiene ventaja sobre los laterales, pero no da cuenta de la igualdad entre los dos centrales y los dos laterales.
- **Tablero 4:** Aún no anticipa una distribución simétrica regular, pero por las experiencias anteriores comienza a vislumbrarse la idea de configuración de conjunto.

Operaciones Abstractas (11 años en adelante): manipula relaciones entre representaciones simbólicas, formula hipótesis y establece conclusiones. Aquí ya comienza a cuantificar la distribución de conjunto, en otras palabras, a prever una equivalencia entre las partes correspondientes de la simetría de la dispersión.

- **Tablero 1:** Comprende que será la misma cantidad de bolas para cada compartimento.
- **Tablero 2:** Ya identifica la igualdad entre los dos compartimentos laterales.
- **Tablero 3:** Igual encuentra la equivalencia entre lod dos centrales y los dos laterales.
- **Tablero 4:** se presta para que mediante ensayos de graduación se descubra la forma de campana que será regular para grandes cantidades, y esto no es otra

cosa que la ley de los grandes números, lo que sería un gran logro si se llegase a este nivel de comprensión.

A pesar de que en la experiencia que se va a diseñar sólo se trabajará con los tableros 1 y 2, se puede tener en cuenta las aplicaciones que del Quincunx hizo Piaget e Inhelder para diseñar otros talleres que permitan tener objetivos diferentes a los aquí propuestos.

2.3 Quincunx Actual

En el ámbito comercial sólo se encontró un Quincunx en dos empresas que lo fabrican y comercializan en Estados Unidos y en Europa. El uso que se le da a este Quincunx es específicamente para la educación superior, se considera conveniente presentar los usos que se les está dando a este Quincunx.

- **Demostrar la inferencia estadística**

La pregunta que describe este uso sería ¿Puede las estadística predecir un resultado a partir de una muestra?. Para demostrar esto se dejan caer una cantidad de semillas en Quincunx, se calcula se media y desviación estándar, y se predicen los límites de seis desviaciones estándar. Ahora tome las apuestas de los participantes de si las próximas 100 semillas caerán dentro de los límites calculados para seis desviaciones estándar. Déjelas caer y recoja sus apuestas.

- **Demostrar procesos centrados**

Establezca límites específicos sobre el Quincunx entre las columnas 5 y 20. Coloque la tolva de izquierda a derecha y observe que cierto porcentaje de las medidas caerán por fuera de los límites especificados anteriormente. Ahora centre la tolva y repita la experiencia. Usted observará que sus estudiantes comienzan a comprender el concepto de procesos de centrado y cómo pueden aplicarlo a sus propios procesos.

- **Demostrar la inutilidad de una inspección aleatoria**

Esta demostración es muy efectiva con operarios de máquinas industriales y muestra a la administración cómo ellos hacen parte del problema. Indicar las técnicas actuales de muestreo aleatorio que han sido determinadas por un compañía en particular, por ejemplo chequear cada 20 piezas, cada media hora, e.t.c. Ahora se monta el Quincunx como en la demostración de procesos centrados y ubique la tolva cerca al límite superior. Indique cómo muchos operarios corren hacia el lado de la tolerancia en que ellos pueden reducir los imperfectos. Deje caer 19 semillas y entonces la veinteava será la representante inspeccionada y apunte si cae por fuera o por dentro de los límites. Repita el proceso cinco o seis veces. La probabilidad de que cada semilla inspeccionada esté dentro de la especificación es del 10% sobre el total de las otras semillas que están por fuera de la tolerancia. Si una semilla cae por fuera de la tolerancia durante uno de los chequeos recuerde al estudiante que la mayoría de operarios dejarán correr una segunda pieza antes de ajustar el proceso. Esta demostración permite detectar la razón por la cual los operarios que están instruidos en el uso de técnicas de muestreo aleatorio tienen problemas en el mantenimiento de tolerancias específicas.

- **Precontrol**

Corra una muestra lo suficientemente grande para calcular la exactitud o predecir un rango de seis desviaciones estándar. Marque los límites de tolerancia y las líneas de precontrol sobre el Quincunx. Deje caer una serie de semillas con la tolva centrada y demuestre las reglas de decisión en el plan de pre-control. Mueva la tolva de izquierda a derecha y muestre cómo el pre-control debería re-centrar el proceso.

- **Dirección de procesos**

El Quincunx tiene un bloque de distribución angosto para demostrar el efecto de mejoramiento de procesos. Desde que esto tiene menos variabilidad, el gráfico de control demuestra que tendrá un rango más pequeño y consecuentemente más ajustados a los límites de control.

3.0 Diseño del Instrumento

Después de estudiar los antecedentes se decide que un buen instrumento de simulación que les permita a los estudiantes de grado undécimo comprender el concepto de distribución binomial y su aproximación a la distribución normal es la máquina de Galton ó Quincunx.

Se procedió entonces a realizar una búsqueda exhaustiva de los aparatos que se encuentran en el mercado, también algunos diseños para museos de ciencia y tecnología y otros fabricados por docentes inquietos para sus clases de estadística.

A continuación se presentan algunos de estos modelos que serán la base sobre la cual se diseñará la máquina de Galton de esta monografía, después de algunas innovaciones que surjan de los autores y de las sugerencias recibidas por el Dr. Yáñez, director de la monografía y del Ingeniero Roberto Behar, profesor titular de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Valle, quien ha venido utilizando este aparato en su labor como docente de la Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística.

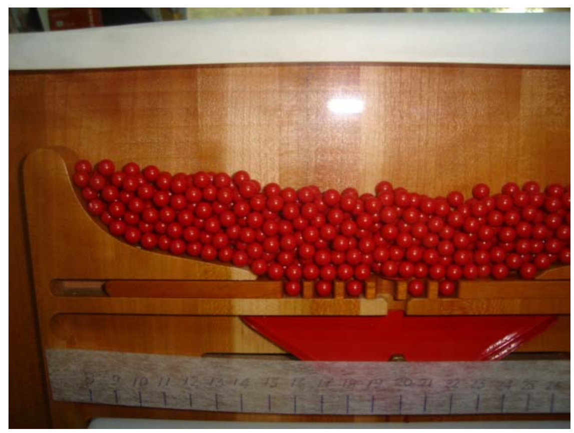
3.1. Modelos Comerciales

En el comercio nacional no se encontró ninguna empresa que ofrezca este producto o similar. Pero en la búsqueda por internet se encontró una máquina de Galton que es la misma que utiliza el Ing. Roberto, sin embargo por la página web sólo aparecen algunas fotografías que el lector puede apreciar en las siguientes direcciones de las siguientes empresas Unlimited Learning Resources (http://4ulr.com) y Lighning Calculator (http://qualitytng.com).

Se consideró oportuno conocer directamente la máquina de Galton, para lo cual uno de los autores de este trabajo se desplazó a la ciudad Cali, para conocer su mecanismo y los usos que en su momento se le está dando en las clases que imparte el Ing. Behar en la Universidad del Valle en la Facultad de Ingeniería.

A continuación se presentan fotografías de esta máquina para que el lector pueda hacerse una mejor idea del instrumento.

Fotografía 3.1 Vista frontal del Quincunx del ingeniero Behar



Fotografía 3.2 Enfoque de la tolva de suministro de bolas del Quincunx.

Descripción de la Máquina de Galton comercial

Se procede a describir brevemente los componentes de la única máquina de Galton que se encontró en el mercado. Es un aparato de dimensiones 4 x 37 x 71 cm y un peso aproximado de 6 kg. Tiene 10 filas de obstáculos y 25 compartimentos.

Es un único cuerpo que contiene 500 semillas que caen desde la tolva, y que se pueden detener en dos o tres lugares según el modelo. Además algunas de las filas de puntillas se pueden mover y fijar en lugares intermedios.

Las semillas siempre permanecen dentro del aparato y para pasarlas del nivel inferior al superior es necesario alzar el Quincunx y girarlo para que las semillas por gravedad cambien su posición, trabajo incómodo por las dimensiones del aparato.

Un Quincunx hexagonal

En la búsqueda por la red se encontró un Quincunx que tiene el instituto Butantan en Sao Paulo, Brasil. Como se aprecia en la fotografía 3.3 es un estilo diferente al anterior y llama la atención que se aprecian fácilmente los caminos que siguen las bolas antes de caer a los compartimentos. Se sugiere que por su geometría podría facilitarle al estudiante la comprensión del por qué los compartimentos que se encuentran más cerca del centro tienen mayor frecuencia de bolas en un experimento.

Fotografía 3.3 Quincunx hexagonal del instituto Butantan en Sao Paulo, Brasil.

3.2 Diseño del Instrumento Didáctico

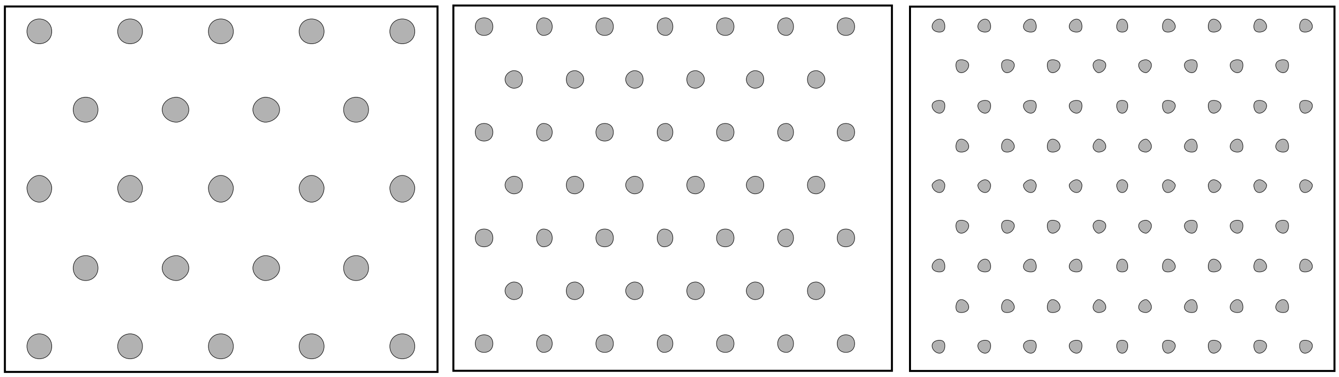
3.2.1. Diseño Funcional

Es importante para su mejor análisis dividir el aparato de Galton en tres secciones a saber: el área de suministro, el cuerpo de pines y los compartimentos de la distribución.

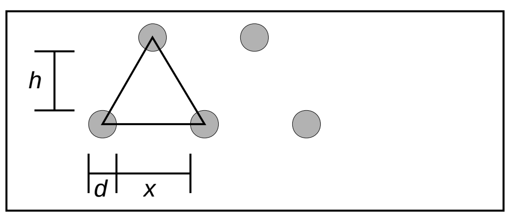
De los modelos existentes se definen tres secciones que componen el instrumento y que se tendrán en cuenta para el diseño del aparato al que se pretende llegar una vez finalizado este capítulo.

Área de suministro: En el Quincunx comercial está compuesta por una tolva, las pepas y una corredera que permite la caída de las mismas. Para la otra versión está compuesta por una concavidad esférica que geométricamente le da un grado de aleatoriedad muy alto. En esta sección es muy importante el diseño pues una concepción errada puede llegar a generar una distribución sesgada.

Cuerpo de Pines: está compuesto por los obstáculos que distribuirán las bolas en los compartimentos. Se definen varias variables en esta sección: el número de filas de obstáculos que no es otra cosa que el número de veces que se repite el ensayo Bernoulli (n), el diámetro de la bola, la distancia entre obstáculos para el caso del quincunx comercial y el ancho del camino para el caso del que se encuentra en Brasil. A partir de las anteriores variables se definirá el tamaño del instrumento. La malla de pines siempre será de dimensiones $n\ x\ n$. A continuación se presentan mallas de 5 x 5, 7 x 7 y 9 x 9 para sección transversal circular. Este valor de n debe ser lo más grande posible para que el estudiante aprecie mejor la aproximación de la distribución binomial a la normal, que es uno de los objetivos de esta monografía.



A continuación se presenta una expresión que permite predimensionar el instrumento a partir de n y otras variables que se indican en la gráfica



d: *diámetro del obstáculo*

x: *distancia horizontal entre dos obstáculos*

h: *distancia vertical entre dos obstáculos*

Definidas las variables se hallan las expresiones que determinan la dimensión horizontal (X) y vertical (Y) del cuerpo de pines, así

$$X = x \cdot (n - 1) + nd$$

$$Y = h \cdot (n - 1) + nd$$

Pero $h = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^2 + 2xd + d^2} - d = \frac{\sqrt{3}}{2}(x + d) - d$

Entonces,

$$Y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x + d) - d\right) \cdot (n - 1) + nd$$

Ahora se debe definir qué relación debe haber entre el diámetro de la bola que se va a utilizar y la distancia x. En los Quincunxs la distancia x está entre un 20 y 50% mayor que la longitud del diámetro de la bola (D).

Las bolas

Es también importante que la bola cumpla ciertas características para que la máquina no pierda su funcionalidad. Se consideró que debía ser esférica, a pesar de que el quincunx comercial trabaja con semillas que no son esféricas. También debían ser de un material que no tuviera demasiado rebote pues se saldría fácilmente del tablero. Se busca que la cantidad de bolas sea la máxima posible con el fin de hacer una buena aproximación visible de la distribución binomial a la normal.

Los compartimentos

La cantidad de compartimentos está definida por $n - 1$. Se busca que tenga la mayor cantidad de compartimentos posibles, pues así el instrumento es más versátil y permite que diversas modelaciones. Esta sección también define una nueva variable que es la altura del compartimento para que de esta manera quepan la mayor cantidad de bolas por la razón ya expuesta.

A continuación se presentan algunas características detectadas por los autores de este trabajo, que debería cumplir el instrumento didáctico a diseñar.

- ✓ Debe ser un instrumento fácil de cargar, tanto en lo que se refiere a su peso como a sus dimensiones.
- ✓ El ingeniero Behar recomienda que la tolva de suministro de bolas se pueda ocultar, pues se requiere esta condición para la realización de ciertas experiencias.
- ✓ El Quincunx comercial tiene una tapa en acrílico, que a pesar de tener la ventaja de su peso con respecto al vidrio, se curvea con el transcurrir del tiempo.
- ✓ El Quincunx no ha sufrido cambio alguno desde su origen, a pesar del avance tecnológico del último siglo. Es posible que esto se deba a que estaba protegido por derechos de autor, o porque no se le ha introducido como herramienta didáctica en la enseñanza de la estadística y la probabilidad.
- ✓ Se considera que el Quincunx comercial para un grupo de estudiantes, que en las condiciones normales de nuestro país (40 estudiantes) es insuficiente. Además que la visibilidad para todos es prácticamente imposible. Esto sugiere que se considere en primera instancia reducir ostensiblemente sus dimensiones, lo cual repercute también en su peso. Se podría pensar en que fuese un Quincunx para cada estudiante o por lo menos para trabajar en grupos reducidos.
- ✓ Actualmente se está utilizando en muy pocas instituciones de educación superior. Luego se debe tener en cuenta que para utilizarlo en el grado undécimo

posiblemente sus características y funciones sean diferentes. Se podría utilizar para enseñar conceptos básicos de probabilidad como la aleatoriedad, los diagramas de árbol, la variable aleatoria, la distribución discreta, la distribución binomial y finalmente pensar en la aproximación a una distribución continua como lo es la normal. Esto indica que no necesariamente se debe diseñar pensando en el currículo de undécimo, pues los conceptos mencionados se pueden introducir desde grados de básica primaria.

- ✓ Debe ser diseñado teniendo en cuenta los materiales disponibles y económicos de la región. También se debe tener en cuenta que su fabricación requiera de tecnología de fácil acceso. Esto pensando en que puede llegar a ser un producto que se masifique en las instituciones educativas, beneficiando a niños y jóvenes, y por qué no generar empleo del sector. Es decir, su precio debe ser accesible para cualquier institución educativa.
- ✓ Debe incluir un manual instructivo que le indique a los usuarios cómo utilizarlo. Se pretende que en esta monografía se diseñe un taller de una experiencia significativa donde se utilice el instrumento didáctico, sin embargo se sugiere que en posteriores trabajos dirigidos se continúe con la elaboración de este manual instructivo..

3.2.2 Diseño Dimensional

Diseño del primer prototipo

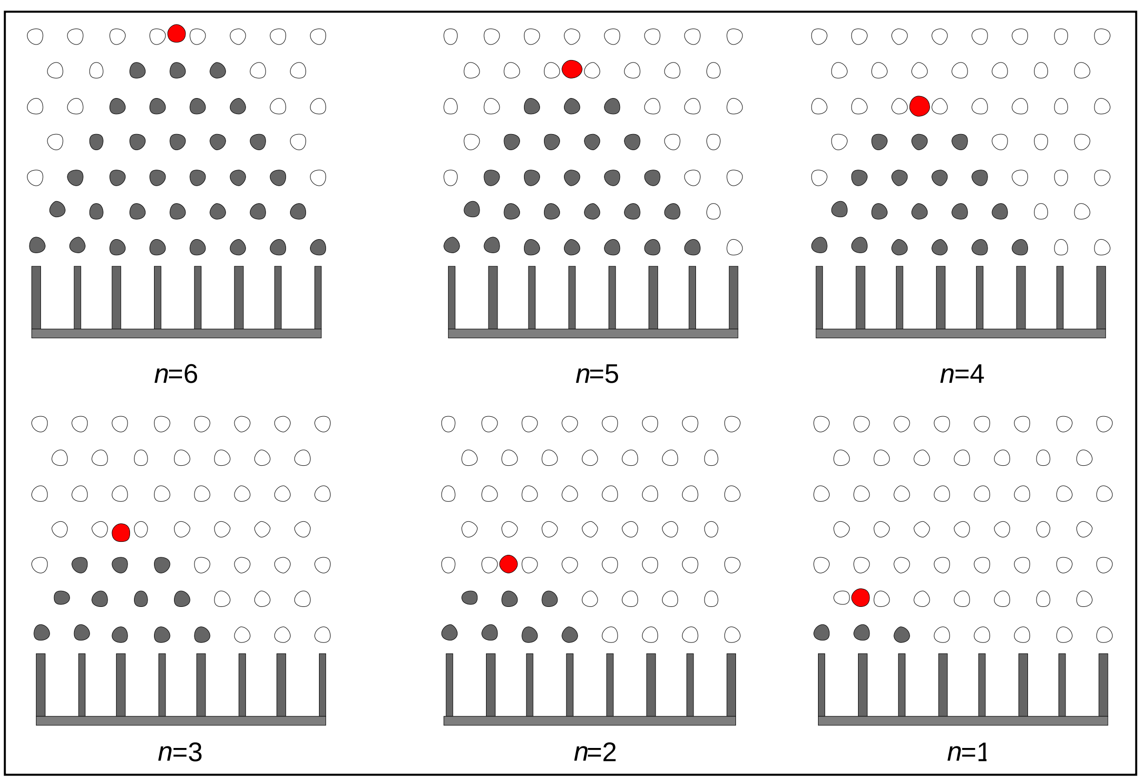
Los primeros diseños se hicieron utilizando círculos y hexágonos como obstáculos, pero se necesitaba hacer un tablero para cada n.

Entonces no cumple la condición de que su manipulación fuese cómoda, además que los costos se incrementaron sustancialmente. Se deseaba que el precio del instrumento estuviera en un rango entre $50.000 y $100.000. En la fotografía puede apreciar este primer prototipo.

Fotografía 3.4 Primer prototipo de Quincunx, con círculos.

Diseño del segundo prototipo

Con el ánimo de superar los inconvenientes del primer prototipo se llega a concebir la idea de que los pines sean removibles, de esta manera en un mismo tablero se pueden trabajar varios n. Veamos un ejemplo, si se trabajara un n máximo de 7 se podrían ubicar los pines en las siguientes disposiciones.



Para n ensayos de bernoulli se deduce de la gráfica

- La malla debe ser $n + 2 \; x \; n$
- El número de compartimentos es $n + 1$

Esto repercute en las expresiones que calculan las dimensiones, donde se introduce una nueva variable que es la cantidad de compartimentos que se desean (c), después de hacerle los cambios quedarían así

$$n = c - 1$$

$$X = x \cdot (n + 1) + (n + 2)d$$

$$Y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x + d) - d\right) \cdot n + nd = n \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x + d) - d + d\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}n(x + d)$$

En la siguiente tabla se calculan las dimensiones para los diámetros comerciales de los pines en tubo de aluminio, con $n = 13$ y un diámetro de las bolas de 10 mm.

d (in)	d (cm)	X (cm)	Y (cm)
5/16	0,79	27,68	25,23
3/8	0,95	29,75	27,01
1/2	1,27	33,87	30,59

Este nuevo diseño ha resuelto parte de los inconvenientes del primer diseño, sin embargo en su utilización se presentan otras situaciones problemas que se deben resolver:

1. Continúa siendo pesado.
2. Por quedar en ángulo recto con respecto a la superficie de apoyo las bolas bajan muy rápido.

La siguiente fotografía muestra el segundo prototipo construido.

Fotografía 3.5 Segundo Prototipo de Quincunx.

Diseño tercer prototipo

Para resolver los anteriores inconvenientes se vislumbra un nuevo diseño donde los obstáculos ya no son tubos de aluminio sino puntillas de acero inoxidable con cabeza, esto hace que las dimensiones se reduzcan ostensiblemente, lo que repercute de manera importante en el peso del instrumento, además permite que se aumente el n. Este nuevo cambio afecta positivamente el costo, pues además de que el costo de los pines de aluminio es mucho mayor que las puntillas, la mano de obra de corte del aluminio se anula. Recuerde que la variable costo es importante para su fácil acceso en las instituciones educativas.

Redimensionando se tiene para un diámetro del hueco $d = 1{,}98\ mm$, nótese que ya no se utiliza el diámetro de la puntilla sino del hueco dentro del cual se introducirá.. En esta oportunidad se tendrá en cuenta el número de compartimentos (c).

c	*n*	d (in)	d (cm)	X (cm)	Y (cm)
11	10	5/64	0,198	15,0	14,2
12	11	5/64	0,198	16,7	15,7
13	12	5/64	0,198	18,3	17,1
14	13	5/64	0,198	19,9	18,5
15	14	5/64	0,198	21,6	19,9
16	15	5/64	0,198	23,2	21,4
17	16	5/64	0,198	24,9	22,8

Para ilustrar mejor el concepto de aproximación de la distribución binomial a la normal se debe considerar el número de compartimentos impar, de esta manera habrá uno central sobre el que caerán más bolas. Por esto se tomará la decisión de que el máximo de compartimentos sean 15 ó 17.

Para resolver la situación del ángulo de inclinación se decide fabricar un marco de soporte que permita graduar la inclinación del tablero según lo desee el usuario.

Finalmente se diseñó teniendo en cuenta el espacio de almacenamiento de los elementos removibles: puntillas, canicas y separadores de compartimentos. Además tener en cuenta su posterior empaque que no ocupe demasiado espacio y se pueda enviar fácilmente a otra ciudad.

El diseño seguirá mejorando continuamente a partir de las recomendaciones y sugerencias de los docentes y estudiantes que lo utilicen.

Por ahora se podría decir que las puntillas pueden generar un cierto riesgo dentro del aula, por eso se considera en el corto plazo cambiarlas por un material plástico.

3.2.3 Elección de los materiales

El tablero

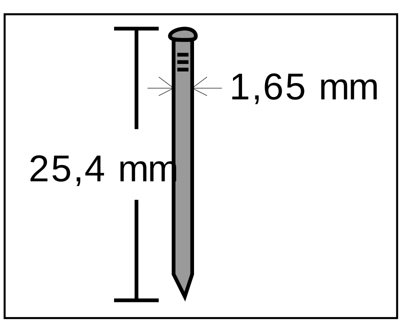
En la actualidad el material que mejor cumple con las variables de costo y peso, es el MDF. Presenta también la gran ventaja de que viene en lámina con diferentes espesores y dimensiones. Otras opciones son triplex y maderas. El triplex tiene la desventaja de que se deforma fácilmente y el terminado no es muy estético, y la madera eleva demasiado el costo del instrumento. En este orden de ideas la mejor elección es el MDF.

Las dimensiones y espesores comerciales son:

Espesores (mm)	Largo (cm)	Ancho (cm)
2.7 - 3 - 5.5	244	213
9 - 12 - 15	244	183
18 - 25 - 30	244	152
	244	122

Las puntillas

Se buscó una puntilla que cumpliera la condición de que la broca que perforaría los huecos dentro de los cuales entraría fuera lo más ajustada, y que además tuviera la longitud suficiente para entrar en el tablero de MDF de 12 mm y sirviera de obstáculo a las bolas. Por eso se eligió una puntilla con cabeza plana grafilada y punta en forma de diamante.

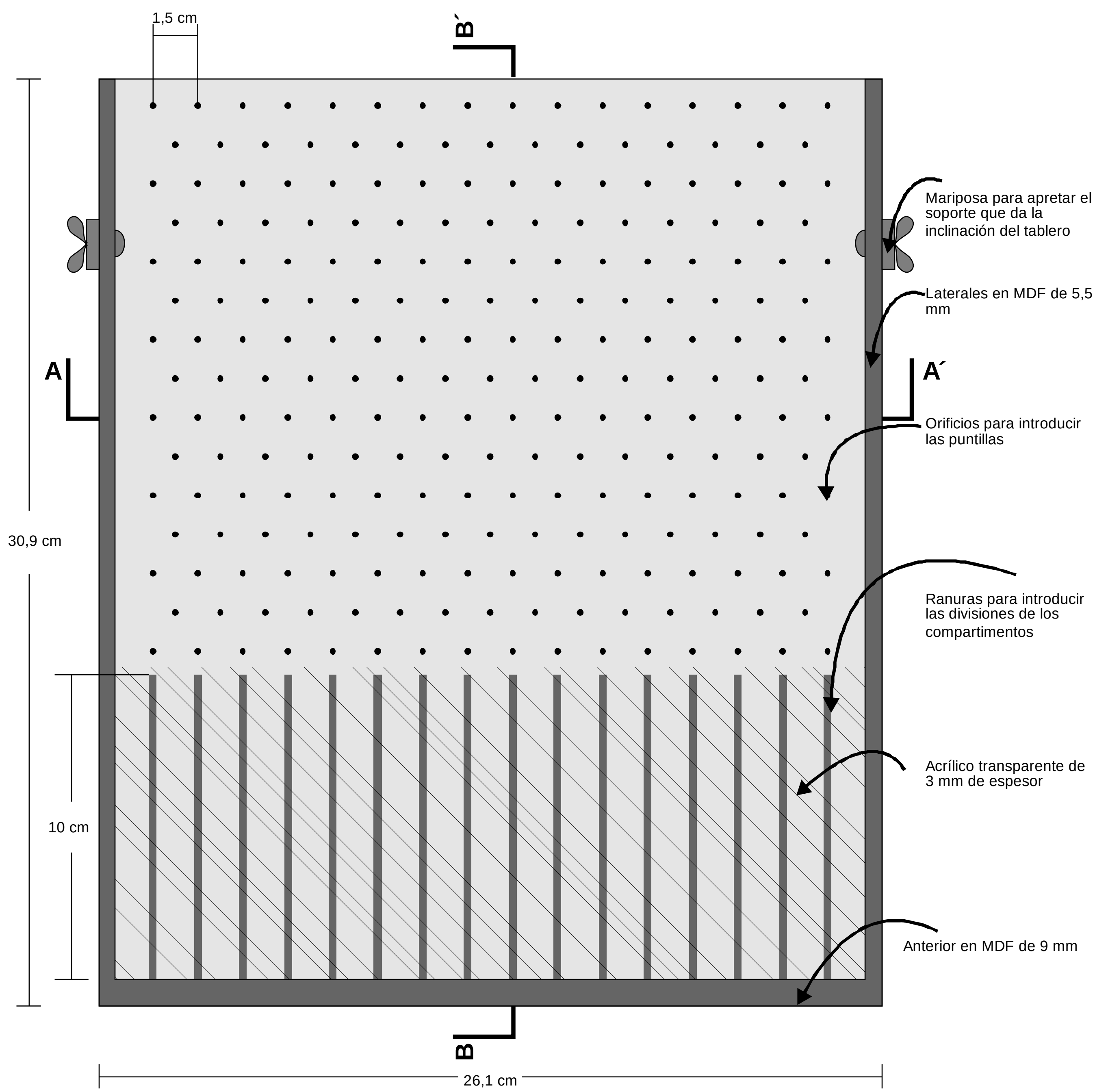


La tapa

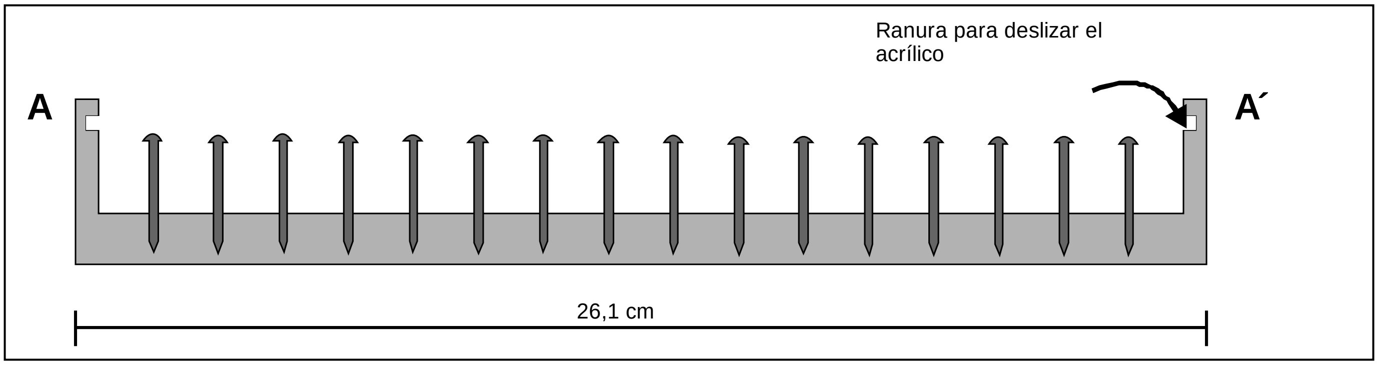
Se elige el acrílico transparente 100% de espesor 3 mm por ser un material muy durable y resistente a los golpes, además su transparencia permite observar la distribución discreta durante las experiencias.

El diseño final

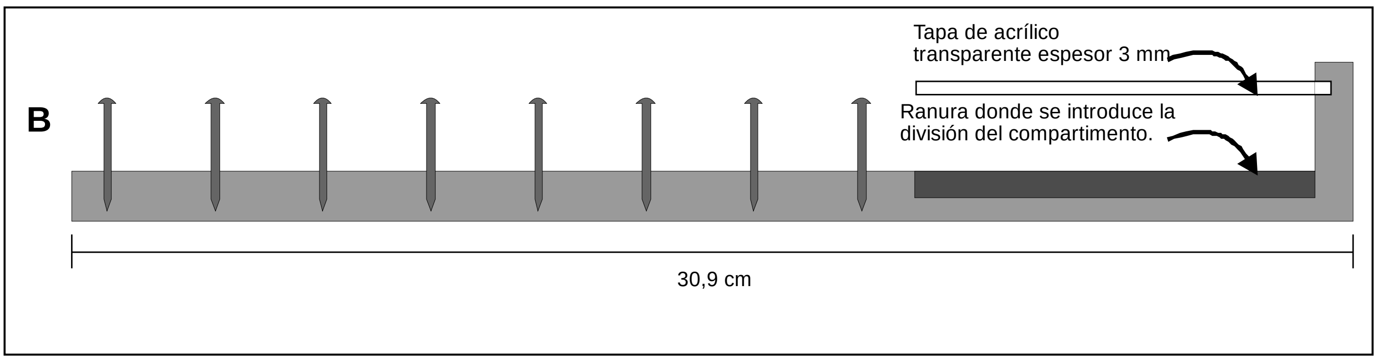
Vista en Planta



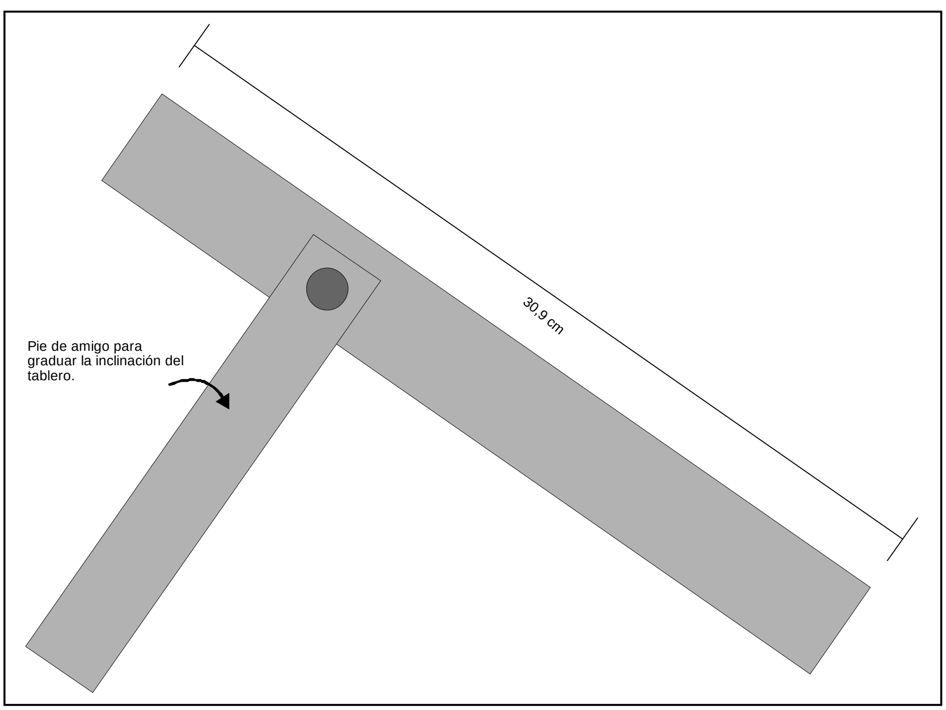
Corte AA´



Corte BB´



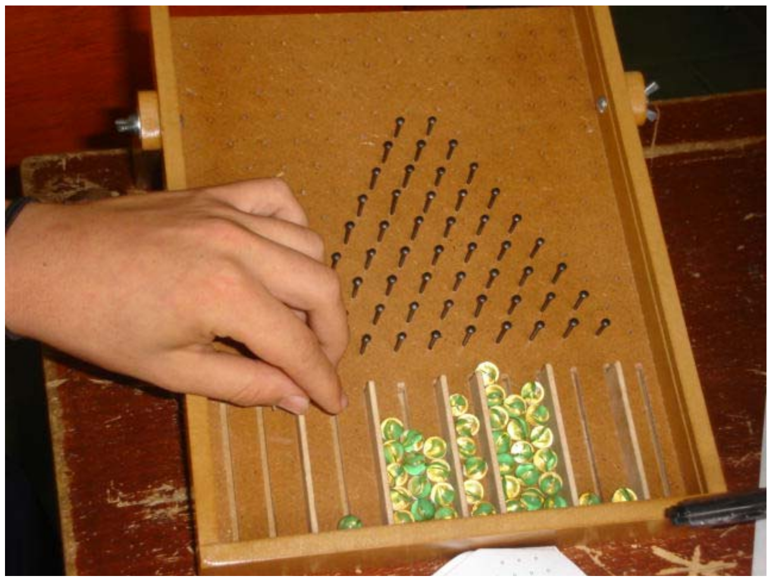
VISTA LATERAL



Instrumento Didáctico Terminado

Después de terminar de diseñar el instrumento se procedió a fabricarlo para llevarlo finalmente al aula.

Estas son fotografías del instrumento terminado.



Fotografía 3.6 Quincunx definitivo ya terminado

4.0 Diseño del Taller

4.1. Diseño del taller

En este capítulo se busca sintetizar las ideas y teorías ya expuestas obteniendo como resultado una propuesta didáctica de utilización del Quincunx para que el estudiante adquiera un aprendizaje significativo gracias a dos elementos fundamentales; el primero se refiere al interés de los estudiantes por los juegos de azar y el segundo a la estrecha relación entre las matemáticas y el azar, siempre buscando mostrarles a los estudiantes que la matemática es placentera y significativa además de tener aplicaciones concretas en el mundo en el que nos encontramos inmersos.

Para esto mediante el Quincunx se realizará una experiencia que le permita al estudiante corroborar sus intuiciones en experimentos aleatorios. Se trata de intuir en dónde caerá una canica lanzada en el instrumento que se acaba de diseñar.

Después de realizar varias veces la experiencia se espera que el estudiante de undécimo grado intente hacer un modelo matemático o una representación simplificada de lo que ocurre en el Quincunx que le permita hacer predicciones y validar su modelo. Su concepción del modelo se puede ver reflejada en la estrategia utilizada por él mismo para lograr ganarle a su adversario.

También se puede esperar que el estudiante adquiera un concepto de probabilidad de un suceso a partir de su frecuencia relativa.

Objetivo

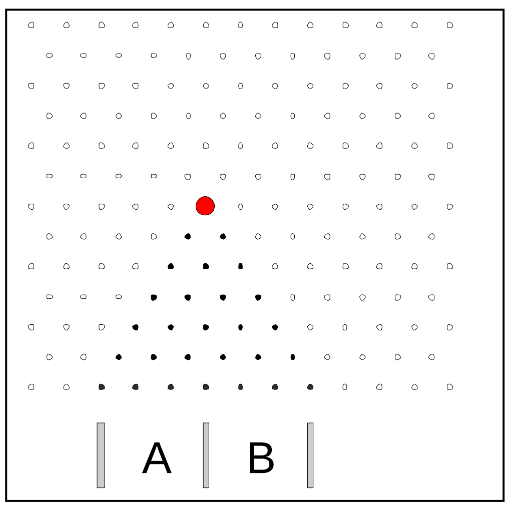
La finalidad de esta experiencia es propiciar en el estudiante una reflexión sobre el hecho de que sus intuiciones sobre el azar pueden no ser correctas, y que esto ocurre con frecuencia en todos los seres humanos.

Esta propuesta de taller está enfocada a estudiantes de undécimo grado.

La Primera Actividad

Se le entrega un Quincunx a cada pareja de estudiantes para desarrollar la actividad. Se va a realizar con 6 estudiantes, es decir 3 parejas. Cada pareja estará conformada por un joven y una joven.

En el Quincunx los participantes deben pronosticar el compartimento en que caerá la primera bola que se va a lanzar ver círculo rojo en el gráfico, ubicando los pines de la siguiente manera:



Ellos antes de lanzar la bola deberán predecir en cuál compartimento caerá, teniendo como opciones A y B. Este pronóstico se registrará en una tabla de registro, en la columna Pronóstico tal como se muestra en la siguiente tabla:

HOJA DE REGISTRO QUINCUNX AB

	EXPERIENCIA 1		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			

Después de lanzada la bola deberán registrar en la casilla de Resultado el compartimento en que dicha bola cayó. Finalmente deben indicar en la tercera columna sí acertaron o no. Esto se repetirá 40 veces.

Luego de haber repetido la actividad 40 veces se cuentan los aciertos que cada jugador tuvo. Ganará quien obtenga la mayor cantidad de aciertos. Así se da por terminada la primera partida.

Se da comienzo a una segunda partida pues el ganador final será quien gane 2 de 3 partidas.

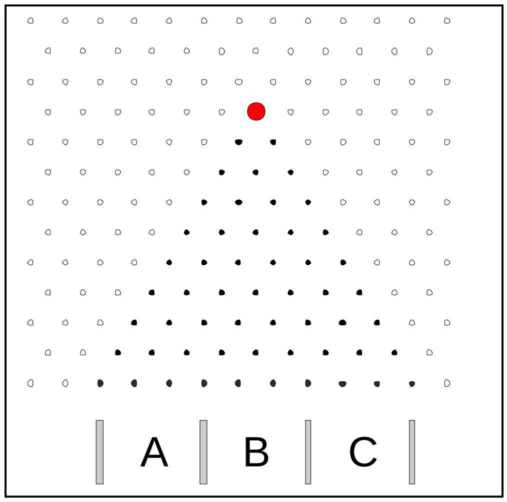
Mientras se va desarrollando la experiencia los jugadores van dando respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?
2. ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.
3. ¿Observando los resultados, ¿Qué piensa ahora de su estrategia?

Con estas preguntas se pretende detectar si el estudiante construye un modelo matemático de lo que está ocurriendo, también se espera observar la motivación y la actitud que toma frente a los resultados que va obteniendo en la experiencia, por ejemplo un cambio de estrategia, también son importantes estas preguntas para averiguar a si el estudiantes encuentra una razón que dé cuenta de lo que está ocurriendo en la realidad.

La Segunda Actividad

Esta actividad consiste en lo mismo de la anterior excepto que se han aumentado el número de posibles compartimentos a tres, en la figura se aprecia la disposición en que se deben ubicar los pines.



De la misma manera los estudiantes deben registrar en la tabla de registro que se presenta a continuación, y también se repite 40 veces.

HOJA DE REGISTRO QUINCUNX ABC

	EXPERIENCIA 1		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			

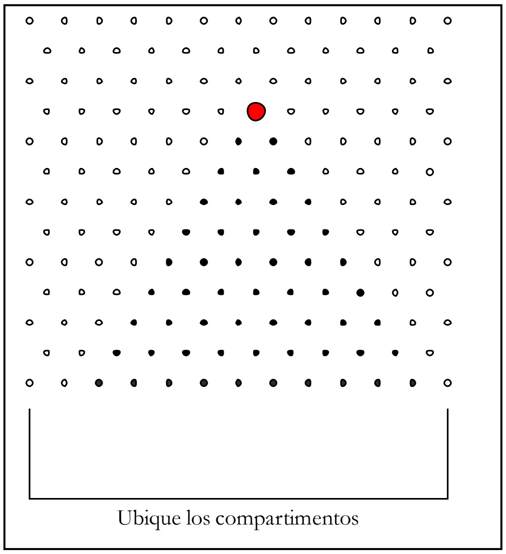
Para esta actividad las preguntas que se les harán a los estudiantes son:

1. Sin comenzar la actividad, ¿Usted sugiere una estrategia para ganar?
2. ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?
3. ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.

4. Observando los resultados, ¿Qué piensa ahora de su estrategia?
5. Una vez terminada la actividad, ¿Qué puede decir respecto a la estrategia utilizada con 2 compartimentos?
6. ¿Qué puede decir respecto a la estrategia utilizada con 3 compartimentos?

Finalmente se les plantea la posibilidad de elegir los compartimentos, esto con el objeto de que intuitivamente le hayan dado un valor relativo de probabilidad a cada compartimento.

La situación se les planteará mediante la siguiente gráfica:



En la figura deben ubicar cómo se distribuyen los compartimentos y se espera que negocien los compartimentos centrales por ser los que tienen una mayor probabilidad.

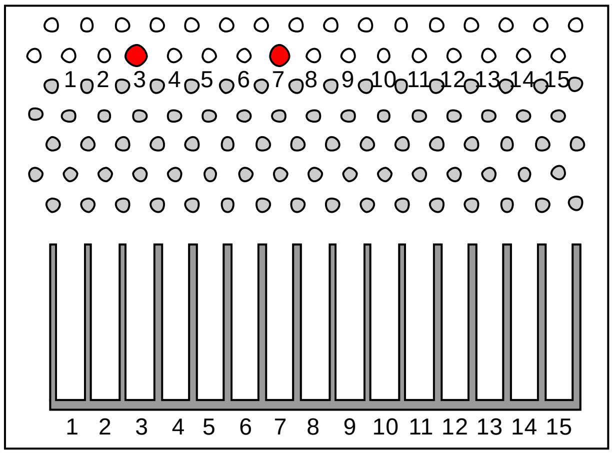
A continuación se presentan otras posibles actividades que se pueden realizar con los estudiantes utilizando el Quincunx.

4.2 Otros talleres

Estos talleres sirven para simular experimentos aleatorios y estudiar las variables estadísticas resultantes, además de obtener empíricamente algunas distribuciones muestrales.

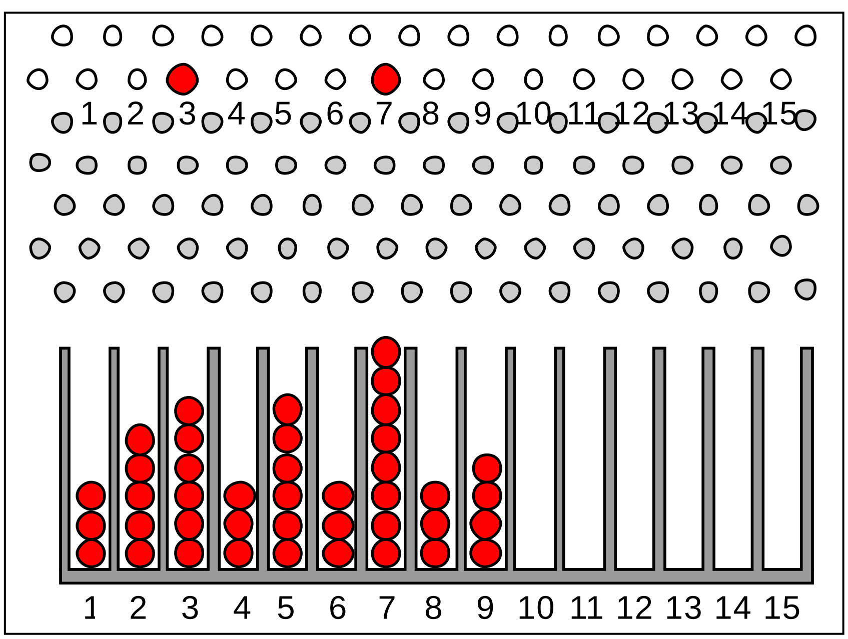
SegundoTaller

Se trabaja en parejas y se requiere un Quincunx por grupo. La actividad consiste en que un estudiante ubique los pines de la siguiente manera.



En este caso el estudiante dejara caer 20 canicas desde la posición 3 y 20 canicas desde la posición 7.

A manera de ejemplo se presenta un posible resultado de distribución, así:



Se espera que el estudiante perciba que en el compartimento común vendrán canicas desde la posición 3 como de la posición 7.

Tercer Taller

A partir de los resultados de una experiencia se pueden calcular las medidas centrales y de variabilidad. El Quincunx permite una concepción visual de la moda.

5.0 Aplicación del Taller

5.1 Desarrollo de la Experiencia

La experiencia se realizó en el Instituto Técnico Santo Tomás del Municipio de Zapatoca, Santander. Allí se llegó después de 2 horas de viaje por los paisajes característicos del entrañable Cañón del Chicamocha.

Fotografía 5.1 Panorámica del Cañón del Chicamocha en la vía Bucaramanga-Zapatoca

Fotografía 5.2 Vista del Instituto Técnico Santo Tomás

Se contó con la participación de 6 estudiantes del grado undécimo, 3 hombres y 3 mujeres.

Fotografía 5.3 De izquierda a Derecha: Jaime Camilo Ordoñez Serrano, Sergio Enrique Rueda Rueda, Angel aTatiana Rueda Rueda, Laura,Yolima Otero Olave, Germán Reynaldo Rueda Orejarena y Ailyn Julieth Mendoza Moreno (ausente).

Se dispuso de un Quincunx con 40 canicas para cada pareja conformada por un hombre y una mujer.

Se les hizo entrega de la guía de la experiencia que se iba realizar y se les pidió que ubicarán los pines cómo se indicada en la figura. Esta parte de la actividad, manipulación de pines y la ubicación de los pines y compartimentos, sirve para que los jóvenes manipulen el instrumento y adquieran cierta confianza, pues el instrumento, la filmadora, el docente desconocido que acompaña a su docente regular los pone algo nerviosos.

Fotografía 5.4 Se terminan ubicar las divisiones de compartimentos en el Quincunx

Fotografía 5.5 Los estudiantes comienzan a ubicar los pines en el Quincunx

Unos estudiantes empezaron a jugar de manera extrovertida y bulliciosa otros por el contrario se concentraban y trabajaban en voz baja.

Fotografía 5.6 Expresiones de motivación durante el desarrollo de la experiencia

Fotografía 5.7 Las canecas buscan una ruta para llegar a un compartimento

En general se percibió mucha motivación de los estudiantes por el tipo de actividad, pues consistía en predecir un resultado. Se escuchaban frases como: "*yo sé que tiene que haber algo escondido*", "*yo le doy efecto a la canica para que caiga en el A*", en busca de una estrategia ganadora.

La actividad comenzó hacia las 8:30 AM y se prolongó hasta las 10:30 AM, en ese momento llegaron otros estudiantes que salían a descanso y se mostraron curiosos por conocer el Quincunx, también solicitaban que la actividad se hiciera con ellos también.

Los nombres de los estudiantes que participaron de la experiencia son:
Grupo 1: Ailyn Julieth Mendoza Moreno y Sergio Enrique Rueda Rueda
Grupo 2: Angela Tatiana Rueda Rueda y German Reynaldo Rueda Orejarena
Grupo 3: Laura Yolima Otero Olave y Jaime Camilo Ordoñez Serrano

A continuación se presentaran los resultados que se obtuvieron durante la aplicación del taller en el aula. Se recomienda ir observando el taller que se encuentra en la sección de anexos.

5.2. Resultados y Análisis

Los resultados para dos compartimentos A y B

Antes de la primera pregunta el estudiante ha realizado 5 pronósticos con sus respectivos resultados. Esto fue lo que ocurrió.

GRUPO 1 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO AILYN	PRONÓSTICO SERGIO	RESULTADO	ACERTÓ AILYN?	ACERTÓ SERGIO?
1	B	A	B	SI	NO
2	A	A	A	SI	SI
3	A	B	A	SI	NO
4	B	A	B	SI	NO
5	A	B	A	SI	NO

GRUPO 2 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO ANGELA	PRONÓSTICO GERMAN	RESULTADO	ACERTÓ ANGELA?	ACERTÓ GERMAN?
1	A	B	B	NO	SI
2	B	B	A	NO	NO
3	A	A	B	NO	NO
4	B	B	A	NO	NO
5	A	A	B	NO	NO

GRUPO 3 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO LAURA	PRONÓSTICO JAIME	RESULTADO	ACERTÓ LAURA?	ACERTÓ JAIME?
1	B	B	A	NO	NO
2	B	A	A	NO	SI
3	A	A	B	NO	NO
4	A	B	A	SI	NO
5	A	B	B	NO	SI

A continuación se transcriben las respuestas de los estudiantes a cada una de las preguntas que contestaron durante el desarrollo de la experiencia.

1.0 ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Observando el movimiento que tiene la canica en los diferentes movimientos	Observar las anteriores caídas de las canicas para intentar hacer un promedio de probabilidades	Estoy mirando las veces que cae en la parte A o B, y así escojo cual puedo ganar pero ella coge otro lugar diferente cada vez.	Es difícil predecir en donde caerá la canica, ya que la posibilidad de caer en un lado u otro es la misma, así que mi estrategia es sólo cambiar de posición en la respuesta.	Cada dos letras iguales cambio a la otra pero sólo una vez, es decir, dos veces A y una B.	La forma en que se hace el lanzamient o.

En general los estudiantes dicen que su estrategia es tomar los resultados que hasta el momento se han obtenido. Aquí se podría decir que ellos aún no tienen la idea de que 5 lanzamientos es una muestra muy pequeña que no indica la tendencia de la distribución.

Se observa que Ailyn cree haber encontrado un patrón BAA que le funcionó a la perfección, 5 de 5.

Jaime hace referencia a sacar un promedio, esto demuestra que tiene vacíos conceptuales en lo que a la media se refiere.

2.0 ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
No, porque la que estoy utilizando es la más apropiada ya que no se va por el mismo lugar.	No, porque en lo que visto considero que las probabilidades son para A y B el 50%.	Pues sí porque ella cae en diferentes partes cada vez, y entonces se mira las veces que ella acierta un lugar A o B.	Sí, los resultados no son acertados en la mayoría, así que es mejor tener una estrategia calculada.	Sí, tal vez la secuencia no siga entonces cambiaría de letra.	No, porque creo que en la forma en como se lanza la mara ella tiene su recorrido.

Se dividen las opiniones, obviamente quien va ganando no cambiará su estrategia, mientras que el que va perdiendo sí lo hace.

En este momento la mayoría de estudiante cree que el compartimento en que caerá depende de cómo lance la canica.

Después de responder a las dos preguntas anteriores los estudiantes continuaron haciendo sus pronósticos hasta completar los 40 lanzamientos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes para cada grupo:

GRUPO 1 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO AILYN	PRONÓSTICO SERGIO	RESULTADO	ACERTÓ AILYN?	ACERTÓ SERGIO?
6	B	A	B	SI	NO
7	B	A	A	NO	SI
8	A	B	B	NO	SI
9	A	A	A	SI	SI
10	B	B	B	SI	SI
11	A	B	B	NO	SI
12	A	B	B	NO	SI
13	A	A	B	NO	NO
14	A	B	B	NO	SI
15	A	B	A	SI	NO
16	B	B	A	NO	NO
17	A	A	B	NO	NO
18	B	B	A	NO	NO
19	A	B	B	NO	SI
20	A	B	B	NO	SI
21	A	A	A	SI	SI
22	A	B	B	NO	SI
23	B	A	A	NO	SI
24	B	B	A	NO	NO
25	A	A	A	SI	SI
26	A	B	B	NO	SI
27	B	A	B	SI	NO
28	A	B	B	NO	SI
29	A	A	B	NO	NO
30	A	A	A	SI	SI
31	B	B	B	SI	SI
32	A	A	B	NO	NO
33	A	B	B	NO	SI
34	A	B	B	NO	SI
35	B	A	A	NO	SI
36	B	A	B	SI	NO
37	A	B	B	NO	SI
38	B	A	B	SI	NO
39	B	B	B	SI	SI
40	B	B	A	NO	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		17	23

GRUPO 2 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO ANGELA	PRONÓSTICO GERMAN	RESULTADO	ACERTÓ ANGELA?	ACERTÓ GERMAN?
6	A	B	A	SI	NO
7	B	A	A	NO	SI
8	B	A	A	NO	SI
9	A	A	A	SI	SI
10	A	A	B	NO	NO
11	A	A	A	SI	SI
12	A	A	B	NO	NO
13	B	B	B	SI	SI
14	B	B	B	SI	SI
15	A	B	A	SI	NO
16	B	B	A	NO	NO
17	A	B	B	NO	SI
18	B	B	A	NO	NO
19	A	B	A	SI	NO
20	B	B	B	SI	SI
21	A	B	A	SI	NO
22	B	B	A	NO	NO
23	A	A	B	NO	NO
24	B	A	A	NO	SI
25	A	A	A	SI	SI
26	B	A	B	SI	NO
27	A	A	A	SI	SI
28	B	A	B	SI	NO
29	A	A	A	SI	SI
30	B	A	A	NO	SI
31	A	A	B	NO	NO
32	A	A	B	NO	NO
33	A	A	A	SI	SI
34	B	A	B	SI	NO
35	A	A	B	NO	NO
36	A	B	B	NO	SI
37	A	B	A	SI	NO
38	A	B	A	SI	NO
39	A	B	B	NO	SI
40	B	B	A	NO	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		18	17

GRUPO 3 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO LAURA	PRONÓSTICO JAIME	RESULTADO	ACERTÓ LAURA?	ACERTÓ JAIME?
6	B	B	B	SI	SI
7	B	A	A	NO	SI
8	A	B	A	SI	NO
9	B	B	A	NO	NO
10	A	B	A	SI	NO
11	B	B	A	NO	NO
12	A	B	A	SI	NO
13	B	A	A	NO	SI
14	A	B	A	SI	NO
15	A	B	A	SI	NO
16	A	A	B	NO	NO
17	A	A	B	NO	NO
18	B	B	A	NO	NO
19	A	A	A	SI	SI
20	A	B	B	NO	SI
21	A	A	B	NO	NO
22	B	A	B	SI	NO
23	B	B	B	SI	SI
24	A	B	A	SI	NO
25	A	B	A	SI	NO
26	B	A	A	NO	SI
27	B	A	B	SI	NO
28	A	B	A	SI	NO
29	B	A	A	NO	SI
30	B	A	B	SI	NO
31	A	B	B	NO	SI
32	B	A	B	SI	NO
33	A	A	A	SI	SI
34	A	B	B	NO	SI
35	B	A	B	SI	NO
36	B	A	A	NO	SI
37	A	B	A	SI	NO
38	A	B	B	NO	SI
39	B	A	B	SI	NO
40	A	B	A	SI	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		21	15

De lo anterior se puede decir que:

- Los resultados del grupo 1 tienen una menor frecuencia de A sobre B (15 a 25), y esto se ve reflejado en los pronósticos, especialmente de Ailyn. Esto también se observa en el grupo 3 pero en este caso A tiene la mayor frecuencia, y Laura pronostica más a favor de A. Entonces los estudiantes realmente están teniendo en cuenta los resultados que se van obteniendo.
- Los aciertos de todos los estudiantes están en un rango comprendido entre 15 y 25.
- La diferencia de aciertos entre el ganador y el perdedor no es mayor que 6 en ningún caso.

3.0 Observando los resultados, ¿Qué piensa ahora de su estrategia?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**Germán**	**Ailyn**	**Sergio**
Que es buena, pero se debe tener en cuenta las diferentes caídas de la canica	Que es algo inválida porque las probabilidades son iguales.	Pues funcionó en verdad, mi estrategia era tirarla siempre al lado A, aunque en ocasiones se iba a la parte B, pero acertaba con ella.	Pienso que es difícil encontrar una estrategia que lleve a ser todo aciertos, pero estoy seguro que la hay.	No me funcionó pues como pensé la secuencia no siguió como debía.	Que fue muy buena, pues la mara siempre lleva el recorrido según su lanzamiento.

Laura comienza a observar la independencia de los sucesos en cada momento en que la canica golpea un pin.

Jaime se atreve a calcular la probabilidad por simetría dándole un 50% a cada compartimento.

Germán cree que existe una estrategia que le permite acertar todas las veces, este puede ser catalogado como un pensamiento muy determinista.

Ailyn se fija en las secuencias intentando encontrar un patrón.

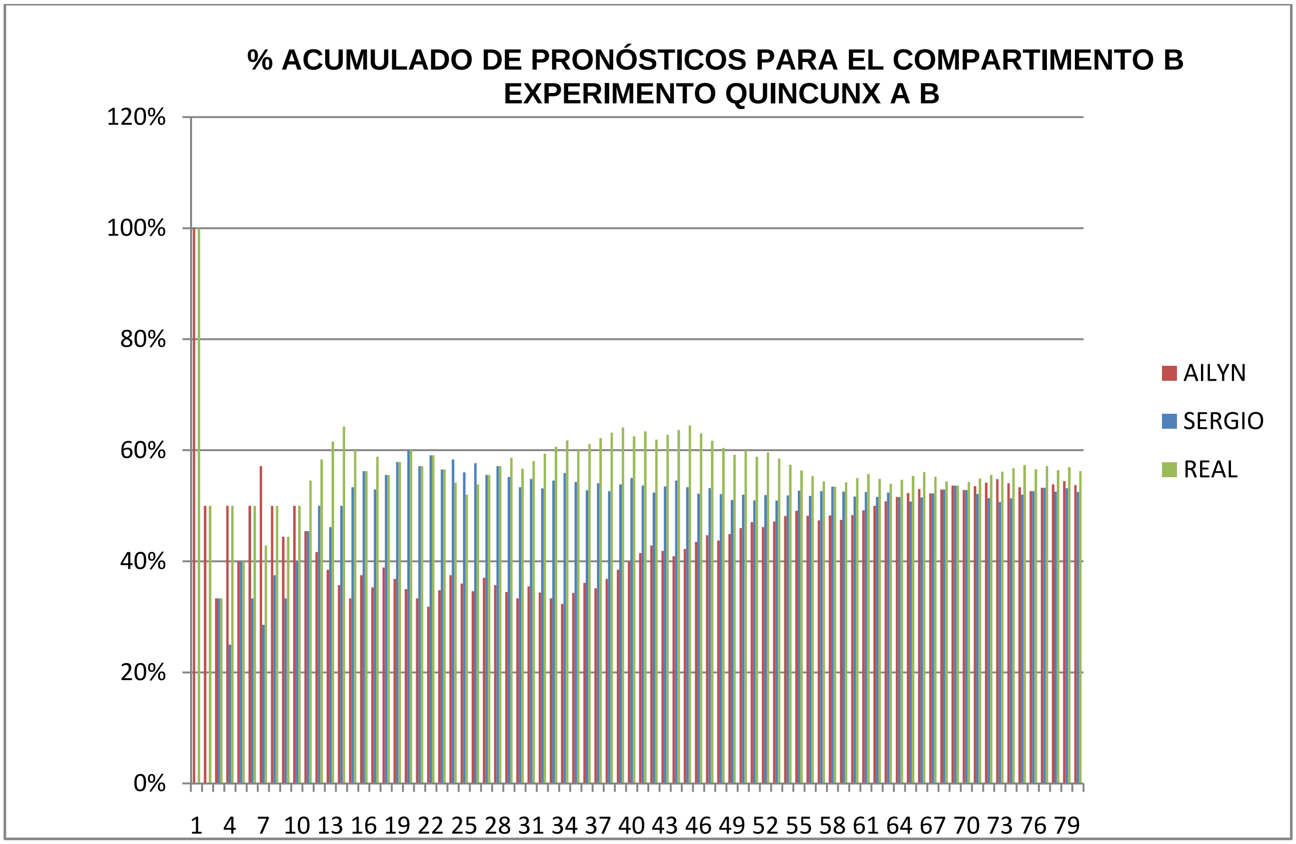
Sergio comienza a creer que todo depende del modo como se realice el lanzamiento de la canica.

Entonces se observa que quienes ganaron creen tener un argumento válido para justificar su propia estrategia, lo contrario sucede con quienes perdieron.

Para analizar los datos anteriores se graficaron de la siguiente manera:

En las abscisas se ubicó la cantidad de veces que se ha dejado caer la canica para cada grupo y las ordenas se halló el porcentaje (%) de pronósticos que cada estudiante hacía para el compartimento B, lo mismo se hizo con los resultados y todo se incluyó en la misma gráfica con el ánimo de observar mejor los datos y hacer un mejor análisis.

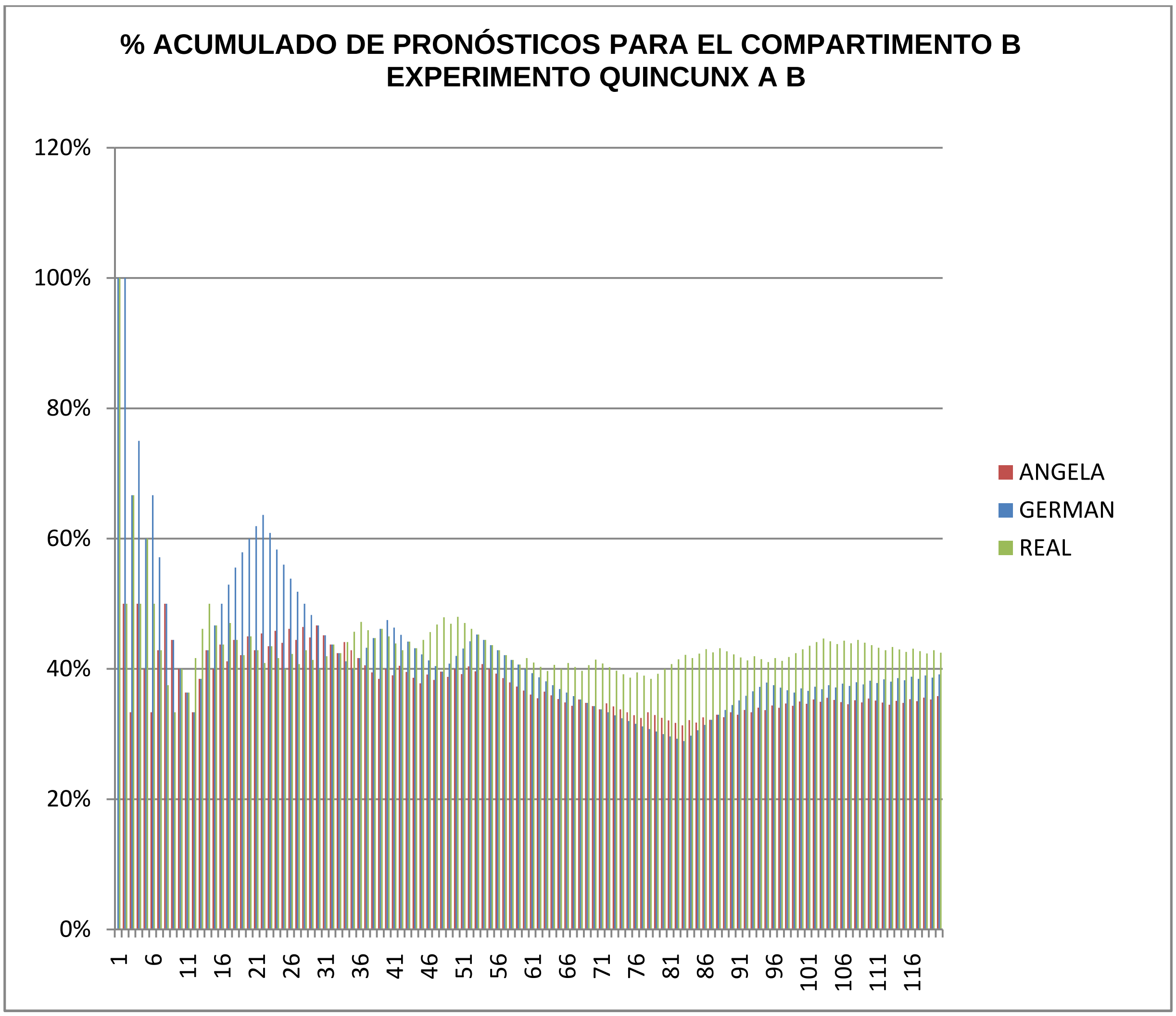
El grupo 1 de Ailyn y Sergio jugaron dos veces, es decir dejaron caer 80 canicas, no fue necesario ir a un tercer juego pues en los dos ganó Sergio. Y el gráfico para este grupo es el siguiente:



Se observa que en un comienza la dispersión es muy alta, pero a medida que aumenta el número de lanzamientos se va reduciendo. Los estudiantes llevan un estimativo del porcentaje de veces que ha caído en B, y tienden a seguirlo. Véase que

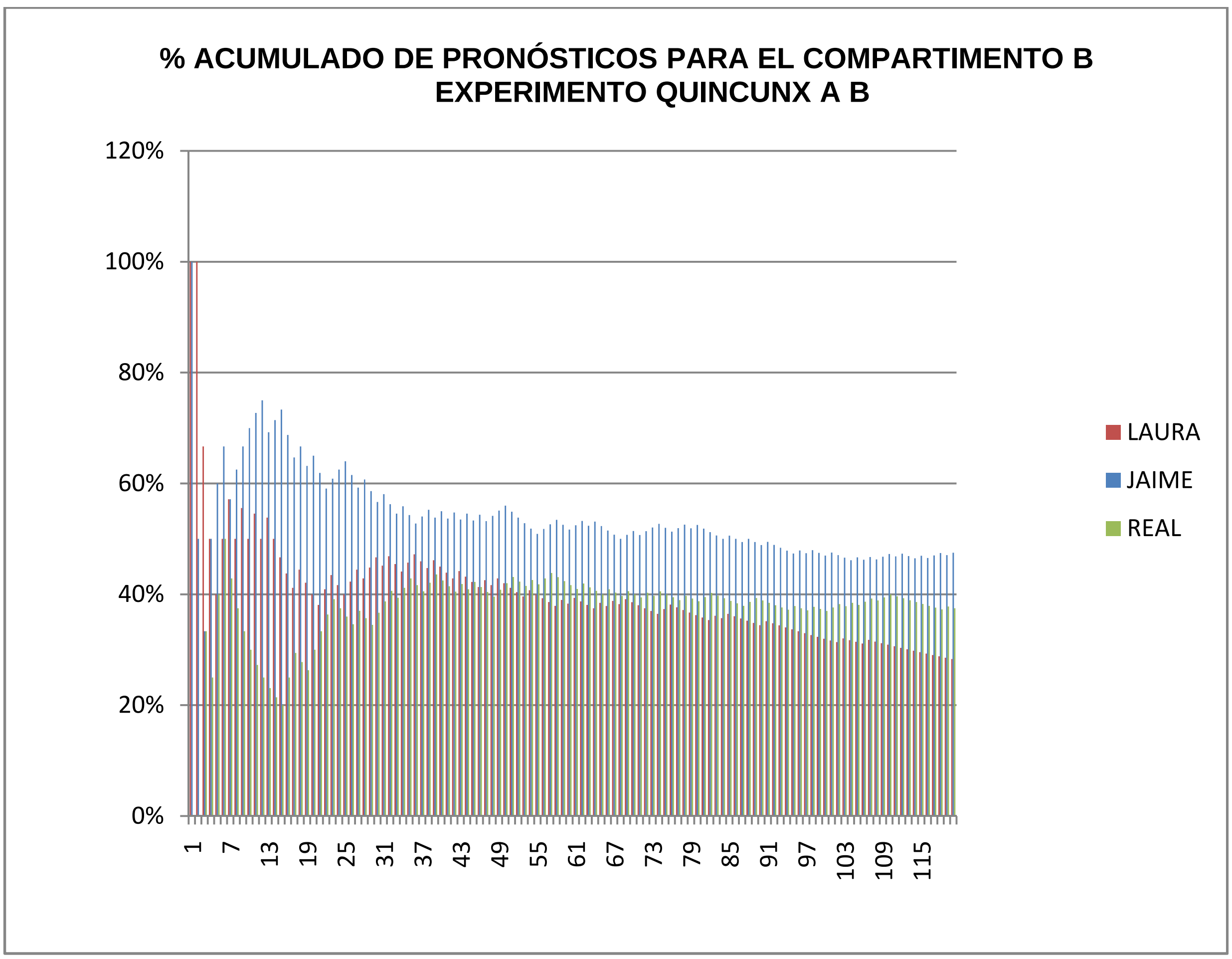
Sergio a pesar de que dice seguir una estrategia en el lanzamiento, tiene la noción de que es un experimento equiprobable para A y B.

El grupo 2 de Angela y Germán tuvo la necesidad de irse a un tercer juego (120 canicas) pues iban empatados. Finalmente ganó Angela con 20 aciertos, mientras que Germán obtuvo 16 aciertos. El gráfico de este grupo es:



En este grupo los resultados hasta los 120 lanzamientos se inclinan a favor de la canica A. Los estudiantes siguiendo la tendencia de estos resultados también lo hacen con sus pronósticos. Este podría ser un indicio de lo que se conoce como la falacia del jugador, donde a una racha de resultados A, por ejemplo, el jugador considera que es más probable que resulte B, olvidándose de la independencia de los experimentos.

Para el grupo 3 de Laura y Jaime se presenta algo no previsto. En el primer juego gana Laura, mientras que en el segundo gana Jaime. Al finalizar el tercer juego se da un empate en aciertos, entonces se decide que gana quien haya obtenido la mayor cantidad de aciertos en los tres juegos, y los estudiantes aceptan. Aquí se evidencia lo que Ausubel denomina como el apoyo didáctico, no se previó durante el diseño de la actividad que se podría dar un empate. Esto sirve para que en las próximas oportunidades este evento no cause traumatismos dentro del aula. Aunque también vale la pena mencionar que este "inconveniente" permitió llegar a un consenso con los estudiantes de buscar la mejor forma de definir el desempate.



En este gráfico se aprecia que a pesar de que la tendencia de resultados es de un 40% para B, Jaime no cambia este porcentaje, sino que por el contrario se mantiene en un 50% acorde con se intuición. Podría decirse entonces que a pesar de que los resultados no le son favorables para ganar el continúa creyendo en su intuición primaria, que por fortuna para este caso es correcta. Entonces para Jaime la repetición de experiencias y la recolección de los datos de todos los estudiantes al final le permitirán darse cuenta que estaba en lo cierto.

Los resultados para tres compartimentos A, B y C

Estos son los resultados para el Quincunx con tres compartimentos A, B y C. También se presenta un análisis como el que se hizo para dos compartimentos.

1.0 Sin comenzar la actividad, ¿Usted sugiere una estrategia para ganar?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Escoger principalmente las casillas de las esquinas, es decir la A o la C, según se considere con más probabilidad.	Evitar la B porque creo que tiene menos posibilidades.	Sí, lanzar en forma que la canica se vaya por el medio para que caiga en la B.	No	La mara caerá más veces en la B y creo que con esta letra tendré mayores aciertos.	La mara irá a caer más fácil en las esquinas que en el centro.

Laura, Jaime y Sergio creen que las esquinas tienen más probabilidades, también por simetría le asignan intuitivamente igual probabilidad a los compartimento A y C. Así se detectan ciertos conocimientos previos, según la teoría de Ausubel, que consisten en que los estudiantes consideran intuitivamente que los compartimentos de los extremos tienen mayor probabilidad. Mediante esta experiencia con el Quincunx se pretende interactuar esta idea que tiene el estudiante, en su estructura cognitiva, con la nueva idea donde el compartimento de mayor probabilidad es el B, con un 50%, mientras que los de los extremos cada uno tiene un 25%.

Intuitivamente los estudiantes ya suponen que la distribución será simétrica, se debe aprovechar esta "buena intuición", y fortalecer esta característica, pues la simetría perfecta no siempre presenta. Sirve también la experiencia para desarrollar el sentido de estimación y aproximación, donde él se da cuenta que es aproximadamente simétrica.

GRUPO 1 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS AB

	PRONÓSTICO AILYN	PRONÓSTICO SERGIO	RESULTADO	ACERTÓ AILYN?	ACERTÓ SERGIO?
1	B	A	B	SI	NO
2	C	C	B	NO	NO
3	B	A	A	NO	SI
4	B	C	B	SI	NO
5	C	B	A	NO	NO

GRUPO 2 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO ANGELA	PRONÓSTICO GERMAN	RESULTADO	ACERTÓ ANGELA?	ACERTÓ GERMAN?
1	B	C	B	SI	NO
2	B	C	B	SI	NO
3	B	C	C	NO	SI
4	B	C	B	SI	NO
5	B	C	A	NO	NO

GRUPO 3 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO LAURA	PRONÓSTICO JAIME	RESULTADO	ACERTÓ LAURA?	ACERTÓ JAIME?
1	A	C	C	NO	SI
2	C	A	B	NO	NO
3	A	A	B	NO	NO
4	B	C	B	SI	NO
5	B	B	A	NO	NO

Intuitivamente Angela supone que si ella ubica la canica exactamente en el centro del primer pin la canica llegará al compartimento B, y apuesta todos los lanzamientos a este.

Ailyn a pesar de haber predicho que las casillas laterales tenían mayor posibilidad comienza apostándole a la B.

2.0 ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Estoy observando las diferentes rutas de la canica para escoger la apropiada.	Trato de ver en cual cae con más frecuencia.	Lanzar en medio en forma que vaya directo a la B	Ninguno, no he encontrado el verdadero sentido para predecir el comportamiento de la canica.	Por la forma en que están ubicadas las puntillas es más probable que caiga en B y esta letra es la que ha tenido el mayor número de aciertos.	El recorrido que lleva y la secuencia con que cae en cada lado.

Por primera vez un estudiante (Laura) observa que hay diferentes rutas para llegar a un mismo compartimento. Sin embargo tal vez el hecho de que los pines se ubicaran de tal manera que tres desembocaduras llegaran a cada uno de los compartimentos, impide que los estudiantes visualicen fácilmente que las rutas es parte de la solución a la situación planteada. Por eso se recomienda para una próxima oportunidad de aplicación del taller que para cada compartimento corresponda una sola desembocadura, por lo menos en las primeras experiencias de los estudiantes con el Quincunx.

La mayoría se percata del hecho de que la casilla B tiene una mayor frecuencia que las demás, y la proporción de pronósticos para este compartimento es mayor que para los otros dos.

3.0 ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
No, porque es la que tengo como alternativa de más probabilidad para acertar.	Sí, porque creo que la tiene las mismas posibilidades después de ver los primeros 5 tiros.	No, porque la estrategia me ha dado buenas posibilidades de ganar.	Sí, este “juego” tiene una estrategia lógica.	No, Porque la mara está cayendo repetidamente en la B.	No, creo que el recorrido es lo que hace los verdaderos aciertos.

Nuevamente los que van ganando no piensan cambiar de estrategia. Ailyn mantiene su estrategia de jugar más veces por la B.

GRUPO 1 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO AILYN	PRONÓSTICO SERGIO	RESULTADO	ACERTÓ AILYN?	ACERTÓ SERGIO?
6	B	A	B	SI	NO
7	B	A	C	NO	NO
8	B	B	C	NO	NO
9	B	A	B	SI	NO
10	C	B	A	NO	NO
11	B	C	B	SI	NO
12	B	B	B	SI	SI
13	B	A	A	NO	SI
14	C	C	C	SI	SI
15	A	C	A	SI	NO
16	B	B	A	NO	NO
17	B	C	C	NO	SI
18	B	A	C	NO	NO
19	B	A	B	SI	NO
20	C	B	C	SI	NO
21	B	A	B	SI	NO
22	B	C	B	SI	NO
23	B	C	B	SI	NO
24	C	B	C	SI	NO
25	A	B	B	NO	SI
26	B	B	A	NO	NO
27	B	C	C	NO	SI
28	B	B	A	NO	NO
29	B	A	B	SI	NO
30	B	A	B	SI	NO
31	B	B	A	NO	NO
32	C	B	C	SI	NO
33	B	B	C	NO	NO
34	B	A	A	NO	SI
35	B	B	B	SI	SI
36	A	C	A	SI	NO
37	C	A	C	SI	NO
38	B	B	C	NO	NO
39	A	A	B	NO	NO
40	B	B	C	NO	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		20	9

GRUPO 2 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO ANGELA	PRONÓSTICO GERMAN	RESULTADO	ACERTÓ ANGELA?	ACERTÓ GERMAN?
6	B	A	A	NO	SI
7	B	A	C	NO	NO
8	B	B	A	NO	NO
9	A	B	A	SI	NO
10	B	B	B	SI	SI
11	B	B	C	NO	NO
12	B	B	A	NO	NO
13	B	B	B	SI	SI
14	B	B	B	SI	SI
15	A	B	B	NO	SI
16	B	C	A	NO	NO
17	B	C	A	NO	NO
18	A	C	B	NO	NO
19	B	C	B	SI	NO
20	B	C	A	NO	NO
21	B	C	B	SI	NO
22	B	B	B	SI	SI
23	A	B	B	NO	SI
24	B	B	B	SI	SI
25	B	B	A	NO	NO
26	B	B	B	SI	SI
27	B	B	C	NO	NO
28	B	B	B	SI	SI
29	B	B	B	SI	SI
30	B	B	B	SI	SI
31	B	B	B	SI	SI
32	B	B	B	SI	SI
33	B	B	B	SI	SI
34	B	B	B	SI	SI
35	B	B	C	NO	NO
36	B	B	B	SI	SI
37	B	B	B	SI	SI
38	B	B	A	NO	NO
39	B	B	B	SI	SI
40	B	B	B	SI	SI
		TOTAL DE ACIERTOS		23	21

GRUPO 3 EXPERIMENTO 1 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO LAURA	PRONÓSTICO JAIME	RESULTADO	ACERTÓ LAURA?	ACERTÓ JAIME?
6	C	B	B	NO	SI
7	B	A	B	SI	NO
8	B	C	A	NO	NO
9	B	B	B	SI	SI
10	B	B	B	SI	SI
11	C	A	B	NO	NO
12	B	B	A	NO	NO
13	B	C	C	NO	SI
14	B	B	B	SI	SI
15	B	A	B	SI	NO
16	B	B	C	NO	NO
17	B	C	B	SI	NO
18	B	B	C	NO	NO
19	B	B	B	SI	SI
20	C	B	C	SI	NO
21	B	A	B	SI	NO
22	C	A	B	NO	NO
23	B	B	A	NO	NO
24	C	C	B	NO	NO
25	B	C	B	SI	NO
26	B	B	B	SI	SI
27	A	B	B	NO	SI
28	B	B	B	SI	SI
29	B	C	B	SI	NO
30	C	B	B	NO	SI
31	B	B	C	NO	NO
32	B	C	A	NO	NO
33	B	B	B	SI	SI
34	A	C	B	NO	NO
35	B	B	B	SI	SI
36	B	B	A	NO	NO
37	B	B	A	NO	NO
38	C	B	B	NO	SI
39	B	B	B	SI	SI
40	B	B	B	SI	SI
		TOTAL DE ACIERTOS		18	16

4.0 Observando los resultados, ¿Qué piensa ahora de su estrategia?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Que fue cambiada, por seguir una secuencia la cuál si funciona exitosamente.	Que mi estrategia estaba mal, la que más cae es la B.	Me ha servido ya que con la estrategia de la B he ganado.	Seguramente mi estrategia está equivocada, tal vez en la forma del lanzamiento o algo más lógico.	Sí sirvió pues la mara cayó mayor número de veces en la B.	No sirvió porque la mayoría de veces está cayendo en el centro.

Angela comienza a utilizar una estrategia que parece funcionar, ella percibe que el compartimento con mayor recurrencia es el B. Entonces decide aportarle siempre a este compartimento, de esta manera asegura cerca de un 50% de aciertos, es decir 20, que es un buen resultado para ganar. En este primer juego gana Angela pero cometió el error de contar mal y darle el triunfo a Germán.

Germán también decide seguir la estrategia de Angela en la segunda parte del primer juego. La sigue utilizando en el segundo juego donde le apuesta todos al B. Mientras que Angela en este segundo juego le apuesta la mayoría al B, pero de vez en cuando lo hace por el A y el C, finalmente Angela gana 23 contra 20 aciertos de Germán. El hecho de perder hace que Germán cambie la estrategia para el último juego donde se definirá el ganador.

Para este último juego Angela le apuesta todos al compartimento B, mientras que Germán cambia a la estrategia de apostarle al A en el primer tercio de los lanzamientos (13), al B en el segundo tercio (14-26), y al C en el último tercio. Los resultados no le favorecen a Germán pues obtiene tan sólo 12 aciertos contra el mayor puntaje obtenido en toda la experiencia, 29 aciertos para Angela.

Los únicos estudiantes que tomaron la estrategia con mayor posibilidad de ganar fue el grupo conformado por Germán y Angela, en este caso se puede decir que uno de los dos diseñó la estrategia y el otro al ver los buenos resultados optó por tomarla también.

GRUPO 1 EXPERIMENTO 2 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO AILYN	PRONÓSTICO SERGIO	RESULTADO	ACERTÓ AILYN?	ACERTÓ SERGIO?
1	B	B	B	SI	SI
2	B	A	B	SI	NO
3	B	A	C	NO	NO
4	C	B	B	NO	SI
5	B	B	A	NO	NO
6	B	C	B	SI	NO
7	B	A	A	NO	SI
8	C	B	A	NO	NO
9	B	C	A	NO	NO
10	B	B	A	NO	NO
11	A	C	B	NO	NO
12	B	B	A	NO	NO
13	B	C	A	NO	NO
14	A	B	C	NO	NO
15	C	A	B	NO	NO
16	B	B	C	NO	NO
17	B	B	B	SI	SI
18	B	A	A	NO	SI
19	C	C	B	NO	NO
20	B	B	C	NO	NO
21	B	A	C	NO	NO
22	C	B	A	NO	NO
23	B	B	B	SI	SI
24	A	A	B	NO	NO
25	B	C	C	NO	SI
26	A	B	C	NO	NO
27	B	A	C	NO	NO
28	B	B	B	SI	SI
29	C	B	A	NO	NO
30	B	A	B	SI	NO
31	C	B	A	NO	NO
32	A	C	B	NO	NO
33	B	B	B	SI	SI
34	C	A	B	NO	NO
35	B	B	C	NO	NO
36	B	A	B	SI	NO
37	A	C	B	NO	NO
38	C	A	B	NO	NO
39	A	B	B	NO	SI
40	B	A	A	NO	SI
		TOTAL DE ACIERTOS		9	11

GRUPO 2 EXPERIMENTO 2 COMPARTIMENTOS ABC

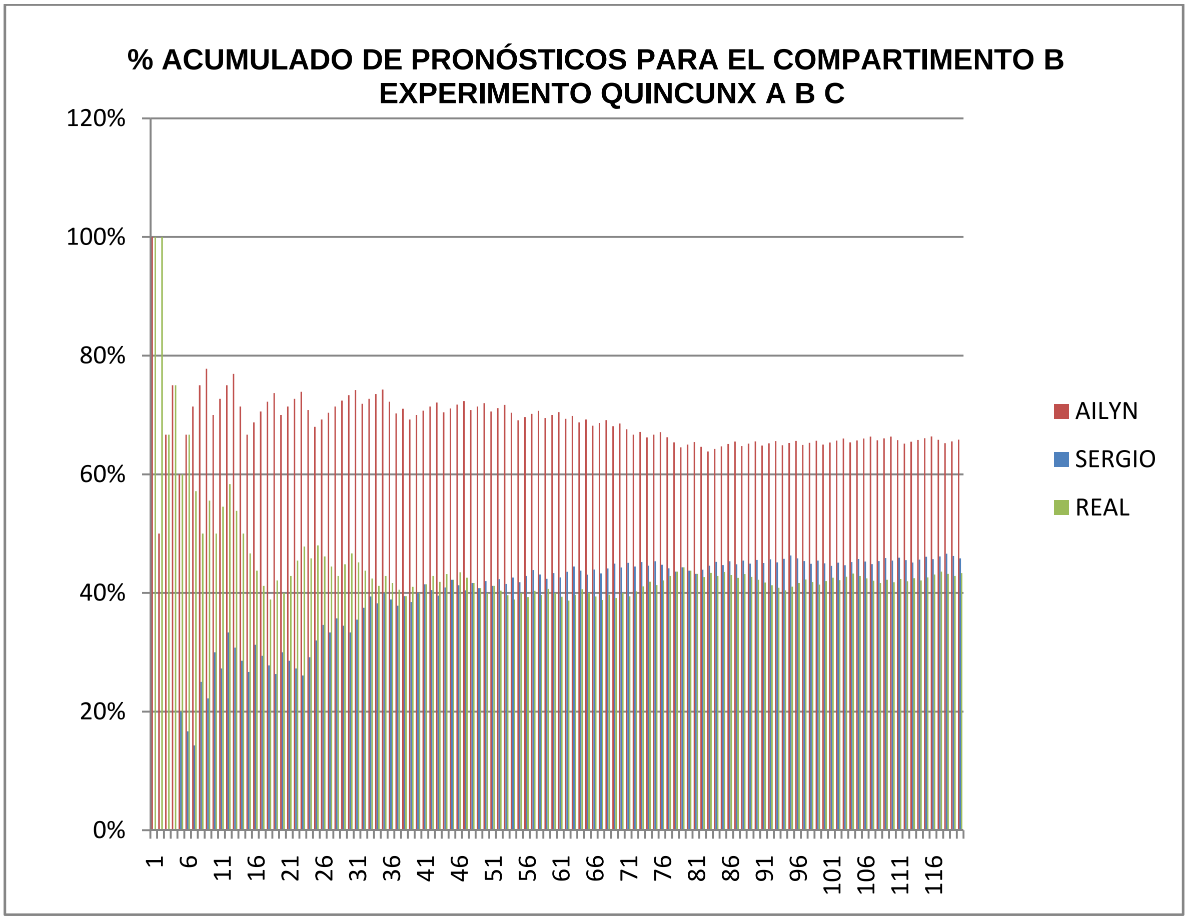
	PRONÓSTICO ANGELA	PRONÓSTICO GERMAN	RESULTADO	ACERTÓ ANGELA?	ACERTÓ GERMAN?
1	B	B	C	NO	NO
2	B	B	C	NO	NO
3	B	B	A	NO	NO
4	C	B	B	NO	SI
5	B	B	C	NO	NO
6	C	B	A	NO	NO
7	B	B	C	NO	NO
8	B	B	A	NO	NO
9	C	B	B	NO	SI
10	B	B	B	SI	SI
11	B	B	B	SI	SI
12	B	B	B	SI	SI
13	B	B	B	SI	SI
14	B	B	A	NO	NO
15	B	B	B	SI	SI
16	B	B	C	NO	NO
17	B	B	B	SI	SI
18	B	B	A	NO	NO
19	C	B	C	SI	NO
20	A	B	A	SI	NO
21	A	B	A	SI	NO
22	B	B	A	NO	NO
23	B	B	B	SI	SI
24	B	B	C	NO	NO
25	B	B	B	SI	SI
26	B	B	B	SI	SI
27	A	B	A	SI	NO
28	B	B	B	SI	SI
29	C	B	C	SI	NO
30	B	B	B	SI	SI
31	B	B	B	SI	SI
32	C	B	B	NO	SI
33	B	B	B	SI	SI
34	B	B	B	SI	SI
35	B	B	B	SI	SI
36	B	B	B	SI	SI
37	B	B	A	NO	NO
38	B	B	B	SI	SI
39	B	B	A	NO	NO
40	A	B	A	SI	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		23	20

GRUPO 3 EXPERIMENTO 2 COMPARTIMENTOS ABC

	PRONÓSTICO LAURA	PRONÓSTICO JAIME	RESULTADO	ACERTÓ LAURA?	ACERTÓ JAIME?
1	B	B	B	SI	SI
2	B	B	B	SI	SI
3	B	B	B	SI	SI
4	B	B	B	SI	SI
5	B	B	C	NO	NO
6	B	B	C	NO	NO
7	C	B	C	SI	NO
8	B	B	A	NO	NO
9	C	C	A	NO	NO
10	B	A	C	NO	NO
11	B	C	B	SI	NO
12	B	A	B	SI	NO
13	B	B	C	NO	NO
14	B	B	C	NO	NO
15	B	A	B	SI	NO
16	B	C	B	SI	NO
17	B	B	B	SI	SI
18	B	B	A	NO	NO
19	B	B	C	NO	NO
20	C	B	B	NO	SI
21	B	A	B	SI	NO
22	B	C	B	SI	NO
23	B	B	A	NO	NO
24	C	A	B	NO	NO
25	B	C	B	SI	NO
26	B	B	C	NO	NO
27	B	A	A	NO	SI
28	B	C	A	NO	NO
29	B	B	C	NO	NO
30	B	C	B	SI	NO
31	B	A	A	NO	SI
32	B	B	C	NO	NO
33	B	C	B	SI	NO
34	B	A	A	NO	SI
35	B	A	A	NO	SI
36	B	B	A	NO	NO
37	A	B	B	NO	SI
38	B	C	B	SI	NO
39	B	A	B	SI	NO
40	B	C	A	NO	NO
		TOTAL DE ACIERTOS		17	11

Realizando mismo tipo de gráfica que se utilizó para dos compartimentos se tiene:

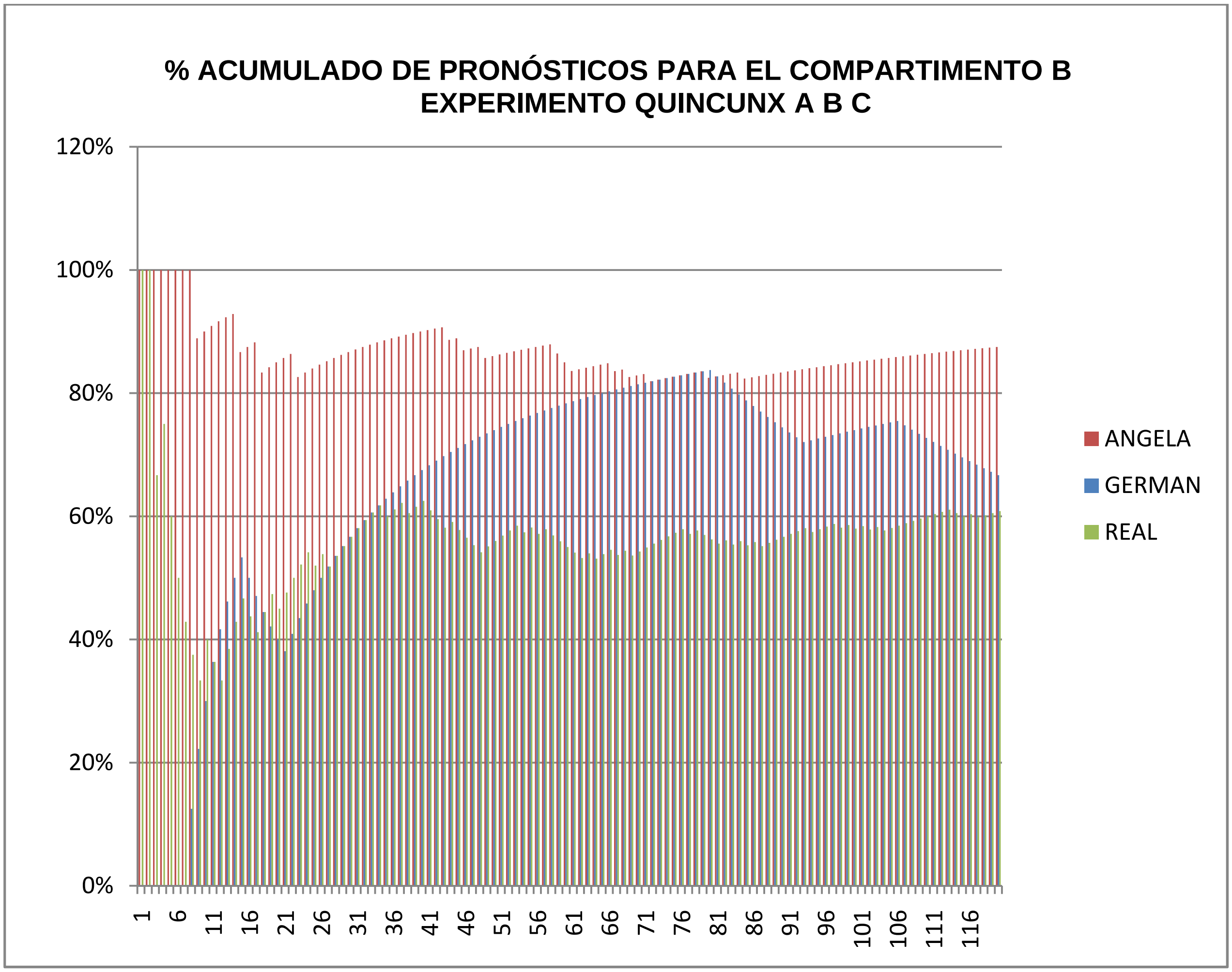
Para el grupo 1



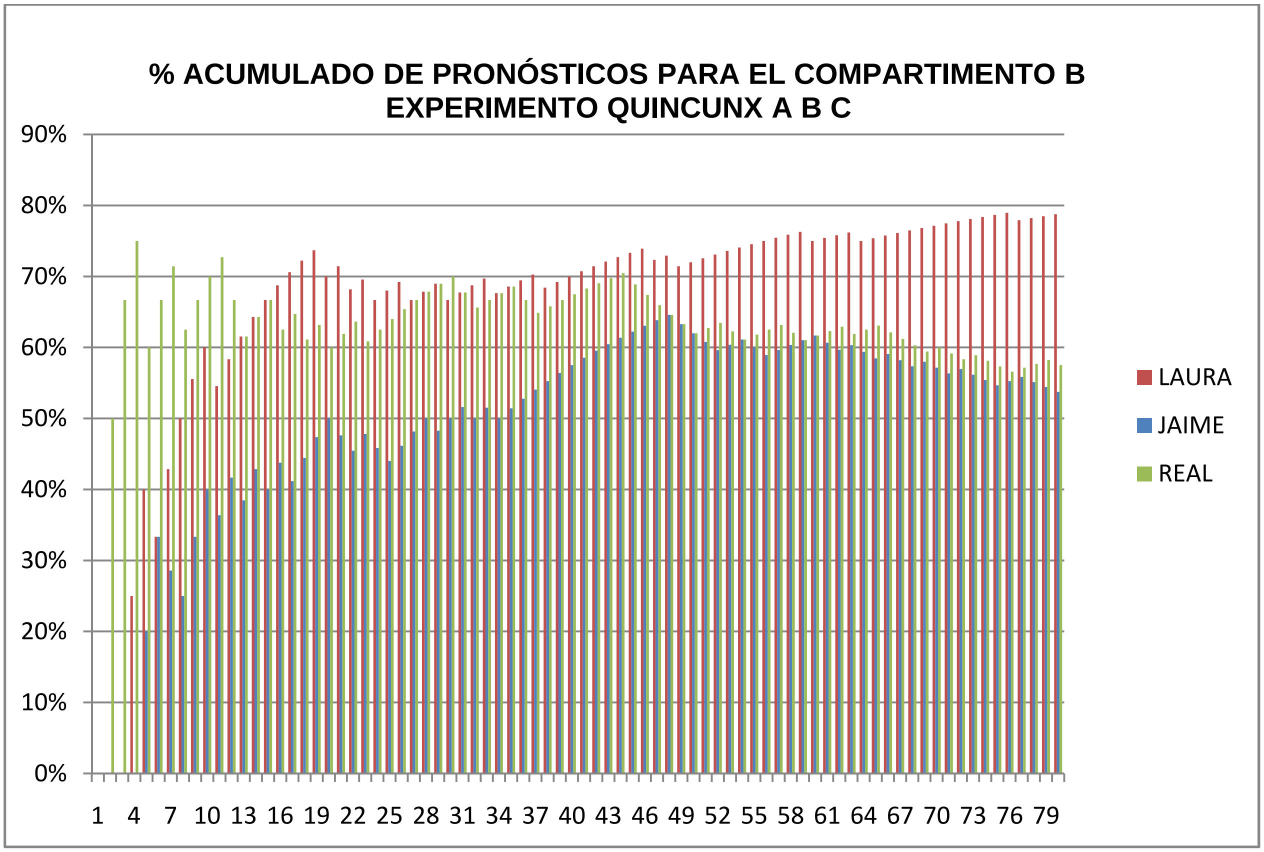
Ailyn le apuesta en casi un 70% de lanzamientos al compartimento B. Esta proporción la mantiene constante durante los tres juegos. Ella sólo gana en el primer juego, mientras que Sergio lo hace en los últimos dos.

Sergio considera que tiene la estrategia ganadora, pues finamente le ganó a Ailyn, Él cree desde un comienzo que desde el lanzamiento determina donde caerá la canica, no cambia esta idea más aún cuando ganó con 2 y 3 compartimentos.

Para el grupo 2 se tiene el siguiente gráfico donde se aprecia la estrategia de Angela por apostarle casi siempre al compartimento B. Esta estrategia le permitió obtener el mayor número de aciertos durante toda la experiencia.



El grupo 3 de Laura y Jaime. Laura también se inclina en gran proporción por el compartimento B, y gana suficientemente en sólo dos juegos. Podría ser que ella intuitivamente tiene la misma estrategia de Angela pero tal vez no la sabe explicar durante el desarrollo de la experiencia, pues ella expresa que su estrategia sigue una secuencia, hecho que contradice sus pronósticos.



Los resultados sobre la actividad en general

1.0 Una vez terminada la actividad, ¿Qué puede decir respecto a la estrategia utilizada con dos compartimentos AB?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Que es bueno seguir la secuencia	Con dos compartimentos funcionó mejor	Mi estrategia sirvió y ella se fue por los lados pero yo también la iba cambiando.	La estrategia utilizada, creo no depende de los compartimentos en este caso, tal vez haya una explicación lógica para ganar pero la estrategia en este caso una relación con forma de lanzar la canica.	Es muy inestable pues si acertaba en la secuencia pero muy regularmente.	Que influye más en la forma como se lanza la canica.

Los estudiantes tienen mayor acierto cuando sólo son dos compartimentos. Sergio continúa creyendo que depende de la forma como se lanza la canica, reforzado por el hecho de haber ganado. Entonces se debe tener especial cuidado en estos casos y repetir la actividad varias veces, intercambiando los jugadores y finalmente hacer la recolección de datos de todo el grupo para que el no continúe considerando que la manera del lanzamiento determina el compartimento en que caerá.

2.0¿Qué puede decir respecto a la estrategia con tres compartimentos ABC?					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Es bueno seguir la estrategia, pero teniendo en cuenta algunas veces las de las esquinas.	Con tres no funciona para nada	Me funcionó, ya que lo lanzaba de tal manera que la canica se fuese por el medio.	Con 3 compartimentos, la estrategia en cuanto a posibilidad es diferente, ya que tiene 3 compartimentos y la posibilidad más segura es el compartimento del centro.	No sirvió pues caía en la B, pero habían muchas variaciones y habían momento en los que no acertaba en la B.	Que cae más en el medio, pero también la forma de el lanzamiento hace que caiga en los diferentes lados.

Finalmente tiene la posibilidad de elegir la distribución de los compartimentos en el último tablero jugado. Plantee la estrategia y condiciones que usted aceptaría.					
Laura	**Jaime**	**Angela**	**German**	**Ailyn**	**Sergio**
Dividimos en 5 compartimentos de tal forma que el del centro es neutral, por consecuencia no entra en el puntaje.	Dividimos el tablero en 5 y la partición del centro es neutral por consecuencia no entra en el puntaje	Dividimos los compartimentos de tal forma que 6 para mí compañero y 6 para mí.	Organizamos 12 compartimentos y los dividimos por la mitad. Los lanzamientos tienen igual posibilidad de caer en un lado o en otro.	Dividimos en A y B.	Dividimos el espacio en dos y seguiré utilizando la misma estrategia.

Todos se distribuyeron equitativamente los compartimentos y ninguno tomó la iniciativa de de tomar el compartimento central a cambio de por ejemplo un mayor valor a la canica que cayera en los compartimentos de los extremos.

Conclusiones y Recomendaciones

Los autores se encontraron con grandes vacíos conceptuales de probabilidad y aún hoy se considera que se debe profundizar y seguir pensando en ellos para digerirlos y tenerlos más claros, fue bueno encontrar estos obstáculos didácticos porque sensibilizaron a los autores aún más en el momento de llegar a clase y enseñarles esos conceptos a los estudiantes.

El estudiante a pesar de que la experiencia le demostraba que su intuición estaba errada, continúa dándole validez. Por eso es importante que este tipo de experiencias se repitan las veces que sean necesarias, y además se le debe dar la oportunidad de experimentar con otros tipos de experimentos aleatorios. Este fenómeno se acentúa si la supuesta “**estrategia**” le permite ganar en el juego.

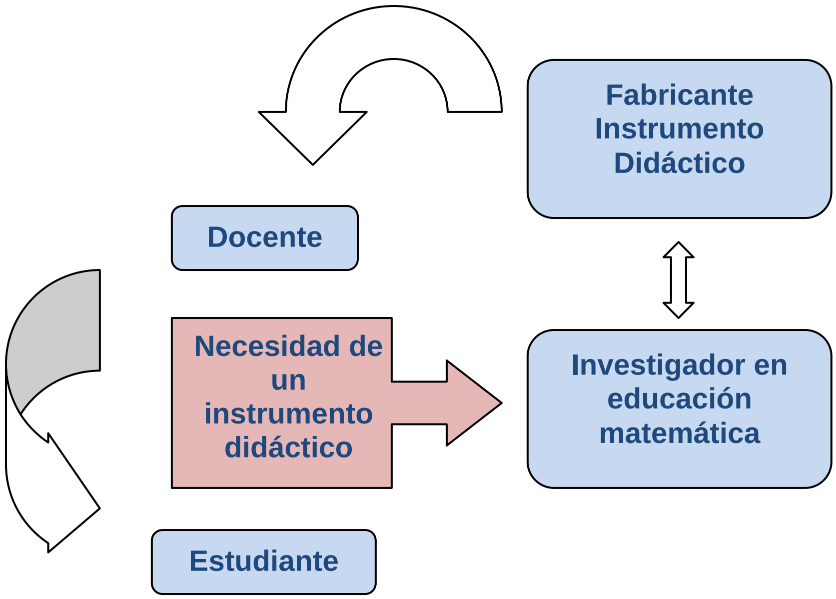
Es fundamental despertar el pensamiento aleatorio desde el preescolar, de lo contrario se requerirá un gran esfuerzo para hacerlo cuando se encuentre en grado undécimo, y logre tener la fundamentación necesaria para continuar con una carrera profesional y ser competente estadísticamente. En otras palabras, la educación de preescolar, básica primaria, media y secundaria realmente tienen que encadenarse para hacer que su proceso sea mucho más eficiente.

A pesar de lo significativa de la experiencia no se logró que el estudiante encontrara la solución al por qué caen más en el compartimento B. Después de analizarlo se cree que pudo ser el hecho de no dejar que para cada compartimento hubiese una única desembocadura. Por eso se continuará trabajando para que en el primero contacto con el Quincunx esta condición se dé.

Se encontró como obstáculo el hecho de que los estudiantes no habían tenido experiencias con la aleatoriedad de manera formal en el aula. Es conveniente que los estudiantes sobre todo en los primeros grados de escolaridad de básica primaria, y por qué no desde el grado transición, se enfrenten a situaciones donde el concepto de aleatoriedad se vaya adquiriendo a partir de la intuición. Y es importante que se presenten ejemplo tanto de equiprobabilidad como de no equiprobabilidad.

Como Ausebel lo describió, los estudiantes tenían una idea preexistente respecto al compartimento con mayor probabilidad, sin embargo la experiencia les demostró que esta intuición era errónea. Seguramente esta interacción generó un aprendizaje significativo por descubrimiento en los estudiantes que una vez terminada la experiencia tan solo está en su etapa inicial pues como se describe en el marco pedagógico este aprendizaje no es inmediato sino que se toma un tiempo de reconstrucción para posteriormente ser verdaderamente incorporado en la estructura cognitiva del estudiante.

Durante el desarrollo de esta monografía se detectó que en el diseño de los materiales didácticos que se encuentran en el mercado nacional no hay una intervención del docente ni del investigador en educación matemática. Lo que se hace es copiar unos modelos de otros países adaptándoles a las materias primas existentes en el lugar de fabricación. Pero no se hace el trabajo más importante que consiste en direccionarlo a unos objetivos educativos, los contenidos coherentes con la normatividad del Ministerio de Educación Nacional, las características de los estudiantes que los van a utilizar, así mismo las características del contexto nacional, la estrategias didácticas que se deben utilizar, siguiendo una secuencia de contenidos y la metodología entre otras. Por eso se considera que el resultado de esta monografía contribuya en la construcción de una estructura coherente y eficaz en la producción de un material didáctico. Por eso se propone el siguiente modelo:



A pesar de que se realizó la experiencia planeada hizo falta tiempo para continuarla y recolectar los datos de todos los participantes para hacer los respectivos histogramas que les permitiera una mejor visualización de los resultados. También es necesario diseñar la continuación de la misma e irla depurando para lograr todos los objetivos propuestos.

Bibliografía

AUSUBEL, D.P; NOVAK, J.D y HANESIAN,H (1983). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2ª. Ed). Trillas. México.

BATANERO, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Recuperado el 22 de Febrero de 2008 de http:///www.ugr.es/local/batanero.

BATANERO, C., CAÑIZARES, M. J. y GODINO, J. D. (1996). *Azar y Probabilidad: Fundamentos Didácticos y Propuestas Curriculares*. Síntesis. Madrid.

BATANERO, C., GODINO, J. D. y NAVARRO V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Síntesis. Madrid.

BOX, George (1989). *Estadística para Investigadores*. Reverté. México

FISCHER, R. A. (1942). *Métodos estadísticos para investigaciones*. Aguilar. Madrid

MEN, Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares*. Santafé de Bogotá.

________________________________(2006). *Estándares Básicos de competencias en Matemáticas*. Santafé de Bogotá.

NTCM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. 1° ed. Español. Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Anexo
Taller Aplicado

GUÍA DE ACTIVIDAD PARA EL ESTUDIANTE: EL CASINO

NOMBRE ____ **FECHA**_________________

NOMBRE
DE SUS COMPAÑEROS ____ **GRADO**_________________
____

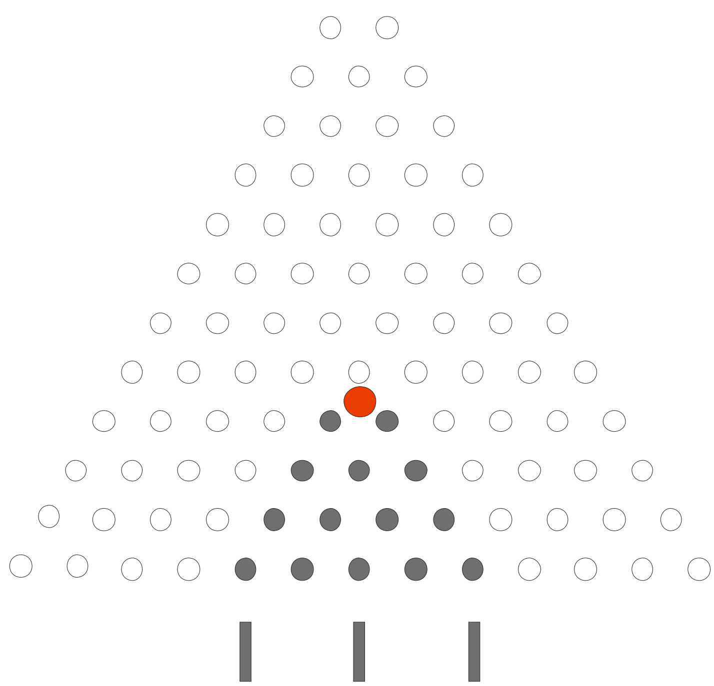
LOS RECURSOS
- Quincunx Portátil: Uno para 3 estudiantes - Plantilla: Una por estudiante – Lápiz

LA ACTIVIDAD
En el quincunx los participantes deben pronosticar el compartimento en que caerá la primera bola que se va a lanzar, esto lo debe registrar en la tabla de registro que se presenta a continuación. Cada acierto lo hará acreedor a un punto, gana quien después de cuarenta lanzamientos obtenga el mayor número de puntos.

UBICACIÓN DE LOS TROZOS DE ALUMINIO
Ubique los trozos de aluminio en los orificios sombreados como se indica en la siguiente figura. Haga lo mismo con las divisores de compartimentos. Tenga en cuenta que el compartimento A se ubica a la izquierda y el B a la derecha.

Desde la posición de la bola roja de figura debe dejar caer canica por canica intercambiando de turno con el compañero con quien se encuentra jugando. Antes de cada lanzamiento debe registrar en la tabla de la siguiente página su pronóstico respecto al compartimento que usted considera que caerá la canica, su compañero debe hacer lo mismo. Después de cada lanzamiento usted y su compañero registrarán el compartimento en que realmente cayó la canica.

Finalmente diligencie la casilla de acierto o desacierto con un SI o un NO.



HOJA DE REGISTRO QUINCUNX AB

	EXPERIENCIA 1		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			

1. ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?

____

____

____

____

____

2. ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.

____

____

____

____

6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

3. Observando los resultados, ¿Que piensa ahora de su estrategia?

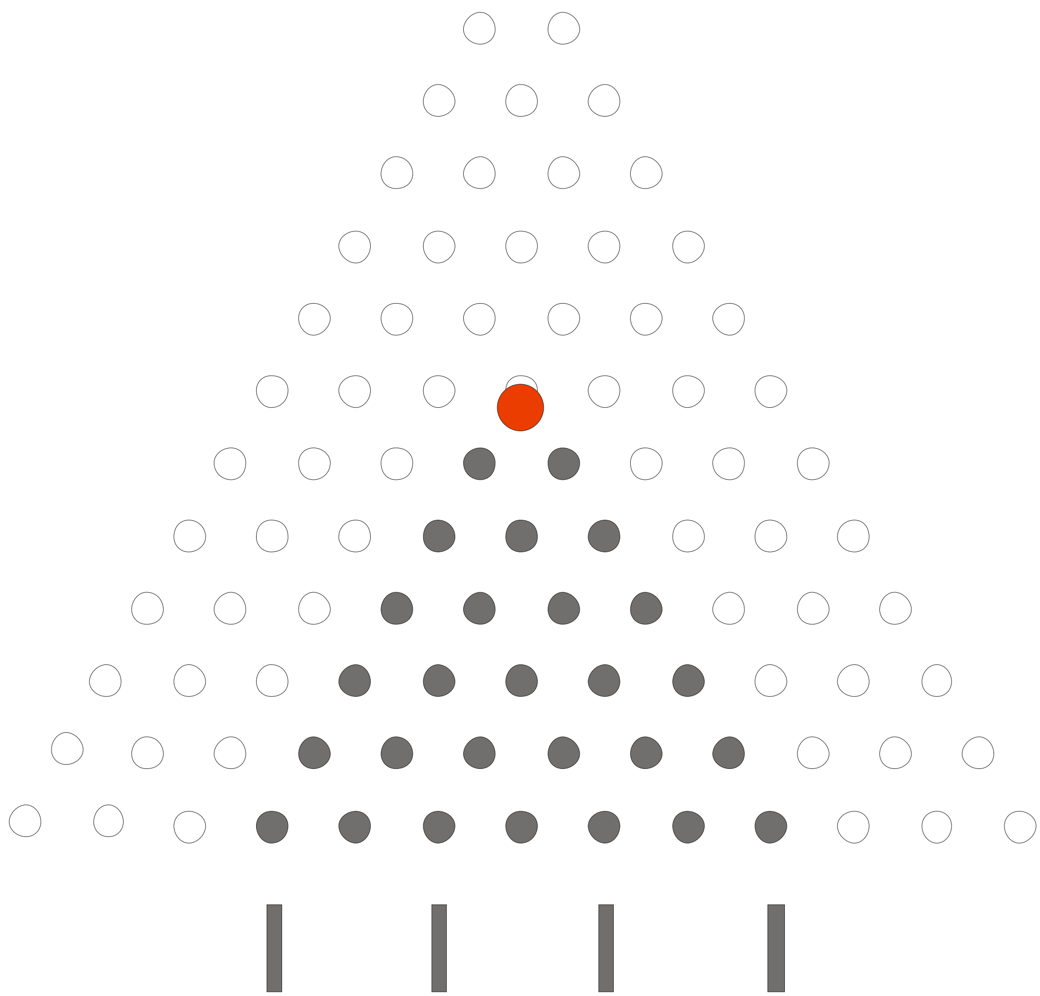
____

A continuación se va a realizar nuevamente la actividad, y si es necesario se hará una tercera pues el ganador será quien gane dos de tres.

	EXPERIENCIA 2		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

	EXPERIENCIA 3		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

Ahora cambiamos, trabajaremos la misma actividad anterior pero teniendo en cuenta 3 compartimentos como si indica a continuación:



Sin comenzar la actividad, ¿Usted sugiere una estrategia para ganar?

____

____

____

____

____

	EXPERIENCIA 1		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			

1. ¿Qué estrategia está utilizando para predecir el compartimento en que caerá la canica?

____

____

____

____

____

2. ¿Está considerando la posibilidad de cambiar de estrategia ó de mejorarla? Justifique su respuesta.

____

____

____

6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

3. Observando los resultados, ¿Que piensa ahora de su estrategia?

A continuación se va a realizar nuevamente la actividad, y si es necesario se hará una tercera pues el ganador será quien gane dos de tres.

	EXPERIENCIA 2		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

	EXPERIENCIA 3		
	Pronóstico	Resultado	Acierto/ Desacierto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
	Total Aciertos		

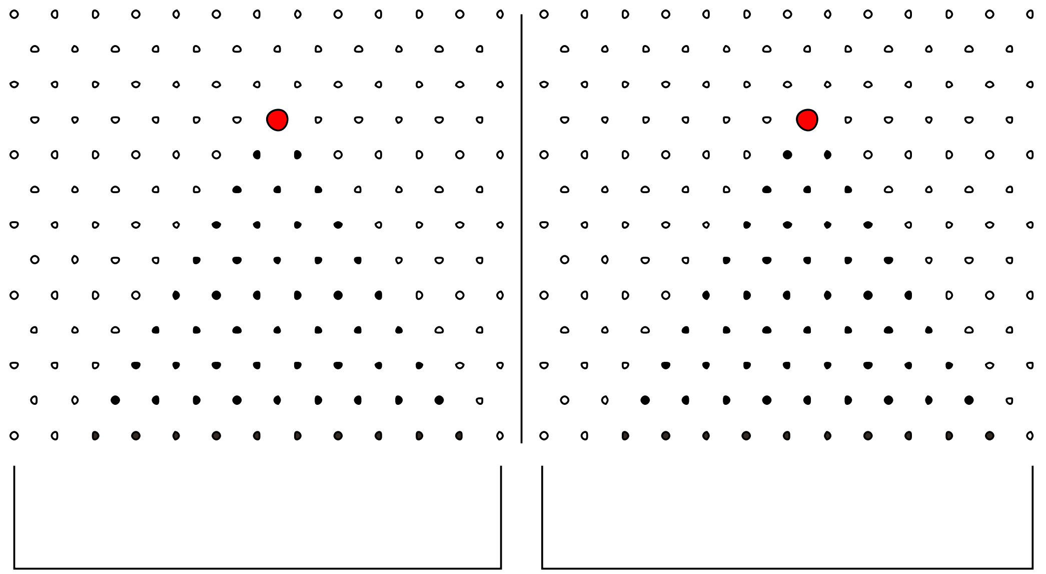
Una vez terminada la actividad, ¿Qué puede decir respecto a la estrategia utilizada con 2 compartimentos?

¿Qué puede decir respecto a la estrategia utilizada con 3 compartimentos?

Reclame su premio según la tabla de premios, teniendo en cuenta los aciertos obtenidos en el mejor resultado de todas las actividades. Los premios son juegos matemáticos en madera que plantean una situación problema que debe resolver.

	TABLA DE PREMIOS
10<Aciertos<20	**SALTO DEL SAPO**
20<Aciertos<30	**4 ESQUINAS**
30<Aciertos 40	**SOLITARIO**

Finalmente tiene la posibilidad de elegir la distribución de los compartimentos en el último tablero jugado. Plantee la estrategia y condiciones que usted aceptaría.



Ubique los compartimentos

Ubique los compartimentos

Después de jugar describa lo sucedido.