

LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS MEDIANTE
EL DOBLADO DE PAPEL

BLANCA PIEDAD JAIME GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA

2004

LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS MEDIANTE
EL DOBLADO DE PAPEL

BLANCA PIEDAD JAIME GARCÍA

Trabajo de grado para optar el título de
Especialista en Educación Matemática

Director

Dr. GABRIEL YÁÑEZ CANAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA

2004

A Dios por su infinito amor.

A mi padre, a mi esposo y a mi hija por

Sus esfuerzos, paciencia y apoyo

incondicional.

A mi familia y amigos por creer en mi.

AGRADECIMIENTOS

Expreso sinceros agradecimientos a:

Gabriel Yáñez Canal, por sus valiosas orientaciones como director en el desarrollo del presente trabajo.

Rosalba Osorio, Arturo Martínez, Bernardo Mayorga, Jorge Enrique Fiallo y demás docentes de la Especialización en educación Matemática, por compartir sus conocimientos y su experiencia en beneficio de mi quehacer educativo.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
1. MARCO TEÓRICO	4
1.1. MODELO DE VAN HIELE	4
1.1.1. Niveles de razonamiento	5
1.1.1.1. Características de los niveles	10
1.1.2. El proceso de aprendizaje según el modelo de Van Hiele	13
1.1.3. Fases de aprendizaje	18
1.2 ANTECEDENTES	22
1.3. EL DOBLADO DE PAPEL	26
1.3.1. Origen del origami	26
1.3.2. Postulados referentes al doblado de papel	27
1.4. FUNDAMENTO MATEMÁTICO DE LOS CUADRILÁTEROS	28
1.4.1. Definición	28
1.4.2. Elementos de los cuadriláteros	29
1.4.3. Clasificación de los cuadriláteros	30
1.4.4. Características de los cuadriláteros	32
2. METODOLOGÍA	34
2.1. POBLACIÓN Y MUESTRA	34
2.2. INDAGACIÓN DE LOS PRESABERES	35
2.2.1. Análisis de los resultados	38
2.3 DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN DE LAS ACTIVIDADES	40
3. PROPUESTA	43
3.1. PARÁMETROS PARA CADA NIVEL	43
3.2. LAS ACTIVIDADES	45
3.2.1. Esquema de las actividades	46

3.2.2. Organización de las actividades	47
3.3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA	48
3.4 ACTIVIDADES Y ANÁLISIS DE LAS MISMAS	51
3.4.1 Figura: Rectángulo	52
3.4.1.1 Análisis actividades del rectángulo	56
3.4.2. Figura: Rombo	59
3.4.1.1 Análisis actividades del rombo	63
3.4.3. Figura: Cuadrado	64
3.4.1.1 Análisis actividades del cuadrado	69
3.4.4. Figura: trapecio	71
3.4.1.1 Análisis actividades del trapecio	79
3.4.5. Figura: Trapezoide	82
3.4.5.1 Análisis actividades del trapezoide	83
3.5 EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES	84
4. CONCLUSIONES	88
BIBLIOGRAFÍA	92
ANEXOS	94

1. TÍTULO: LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS MEDIANTE EL DOBLADO DE PAPEL. *

2. AUTOR: BLANCA PIEDAD JAIME GARCÍA. **

3. PALABRAS CLAVES: Cuadriláteros, Doblado de papel, Modelo de Van Hiele.

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO: El presente trabajo intenta ser un aporte a uno de los propósitos de los maestros: hacer de la clase de geometría, una actividad amena, que genere un ambiente propicio para que niños y jóvenes puedan aprender.

Consiste en una propuesta metodológica para enseñar el tema de los cuadriláteros, mediante una serie de actividades que han sido planteadas teniendo como referencia la teoría de niveles del pensamiento geométrico de Van Hiele y están apoyadas en la herramienta didáctica del doblado de papel. Estas actividades están organizadas en una secuencia didáctica que permite abordar los cuadriláteros y sus características particulares de una manera sencilla y amena para el estudiante. Son en total veinte actividades clasificadas de acuerdo a cada cuadrilátero y están basadas en el trabajo de tesis de Noraisa González y Víctor Larios.

El marco teórico está apoyado en tres pilares básicos: uno, el modelo didáctico de Van Hiele que describe las características particulares de cada nivel de razonamiento y las fases por las que hay que transitar para avanzar de un nivel a otro. Dos, el doblado de papel como herramienta didáctica para hacer de las actividades algo entretenido e interesante. Tres, el fundamento teórico sobre los cuadriláteros, en el cual se hace un resumen de la clasificación y las características de cada uno de ellos.

Siempre estará vigente la inquietud de seguir mejorando o ideando nuevas estrategias que faciliten cumplir con uno de los propósitos de todo maestro, lograr que sus estudiantes aprendan.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. YÁNEZ, Gabriel

1. TITLE THE TEACHING OF THE QUADRILATERALS BY MEANS OF THE PAPER FOLDED *

2. AUTHOR: BLANCA PIEDAD JAIME GARCÍA**

3. KEY WORDS: quadrilaterals, paper folded. Van Hiele's pattern.

4. DESCRIPTION OR CONTENTS: This work tries to be an a contribution to one of the mathematic teacher's purposes, such as: to do the geometry class a funny activity that generates a favorable enviropment for the children and teenagers can learn.

This work consists in a methodological proposition to teach the theme of the quadrilaterals by means a serie of activities that have been established having as reference de Van Hiele's geometrical thought levels theory and they are supported in the didactic tool of the paper folded. These activities are organized in a didactic sequence that lets arrive the quadrilaterals and their particular characteristics in a simple and funny way to the student. They are in total twenty activities, they are classified according to each quadrilateral and they are based on the Noraisa González and Victor Larios's thesis work.

The theoretic mark is supported on three basic mainstays: first, Van Hieles's didactic pattern that describes the particular characteristics of each tough level and the stages on which we have to travel to advance from one level to another. Second, the paper folded like didactic tool to do the activities something funny and interesting. Third, the theoretic foundation about the quadrilaterals on which we do a summary of the classification and the characteristics of each one.

The disquiet will be always valid to follow improving or inventing new strategies that make easy to comply one of the every teacher's purpose, to get that their students learn.

* Degree work

** Sciences Faculty. Specialization in Mathematical Educatives. YAÑEZ Gabriel.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, casi todas las normas educativas y las directrices ministeriales en materia de educación apuntan a resaltar la importancia de uno de los propósitos de la educación matemática, generar en los estudiantes desarrollo del pensamiento, particularmente me refiero al pensamiento geométrico. Esto precisamente ha suscitado preocupación entre los maestros puesto que en el estudio de la geometría, en el nivel de enseñanza secundaria, se presentan algunos problemas de conceptualización e identificación. A pesar de su carácter gráfico, la geometría no siempre ayuda a desarrollar una capacidad intuitiva en el estudiante. En ocasiones, los estudiantes no diferencian lo que en realidad es el objeto de estudio de la geometría y lo que corresponde a procedimientos propios de un dibujante técnico, llegando a una simple memorización de propiedades y de pasos a seguir en el trazado de figuras.

Hoy en día, los maestros de matemáticas se enfrentan al reto de enseñar de tal forma que propicien en los estudiantes un desarrollo de su pensamiento geométrico a través de un aprendizaje centrado no sólo en conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento útiles y aplicables. Para esto, se hace necesario buscar estrategias metodológicas, que además de respetar el ritmo de aprendizaje de los estudiantes, contribuyan en su motivación.

El propósito primordial de un maestro debe ser el de contribuir en la formación integral de sus estudiantes, ampliarles el nivel de conocimiento, que les genere desarrollo del pensamiento, ayudarles a crecer tanto espiritual como intelectualmente, procurando siempre un ambiente propicio para que

niños y jóvenes puedan aprender. Hacer la clase de una manera distinta a la tradicional ofrece más posibilidades para lograr que el estudiante aprenda.

El presente trabajo, consiste en una propuesta para estudiar el tema de los cuadriláteros mediante una serie de actividades basadas en el doblado de papel y organizadas en una secuencia didáctica que permite abordar los cuadriláteros y sus características particulares de una manera sencilla. Está fundamentado en trabajos realizados por maestros y personas interesadas en la enseñanza de la geometría, en los que coinciden en tomar como marco referencial el modelo de Van Hiele, o la utilización de recursos didácticos para estudiar la geometría.

El trabajo se ha organizado por capítulos, en el primero, se hace referencia a los antecedentes y al marco teórico que está fundamentado en tres aspectos: el modelo de Van Hiele que describe los niveles de razonamiento y sus características particulares, el proceso de aprendizaje y las fases por las que hay que transitar para avanzar de un nivel a otro. El doblado de papel como herramienta didáctica, allí se describe un breve comentario sobre el origen del origami y los postulados a tener en cuenta en los dobleces. Por último, el fundamento matemático de los cuadriláteros, en el cual se hace un resumen de los elementos, la clasificación y las características de cada uno de ellos. El segundo capítulo es un resumen de la metodología, se hace una breve descripción de la población y de cómo se implementó el trabajo,. Además se detallan algunos aspectos de la evaluación diagnóstica.

En el tercer capítulo, se plantea la propuesta, en ella se establecen los parámetros para cada nivel, se describe el esquema, la organización de las actividades y se detallan una a una. Además, se hacen algunos comentarios generales y una descripción de la experiencia al desarrollar las actividades,

con un análisis para cada grupo de actividades, como también se hacen algunas observaciones generales sobre los resultados de la evaluación.

Finalmente se presentan algunas conclusiones generales del trabajo y los anexos.

1. MARCO TEÓRICO

“Se dice que un estudiante tiene comprensión en un determinado campo de la geometría, cuando a partir de datos y relaciones geométricas, es capaz de llegar a una conclusión en una situación en la que nunca antes se había enfrentado” (Van Hiele, P., 1957). Uno de los problemas en la enseñanza de la geometría es precisamente la poca comprensión por parte de los estudiantes, lo que ha generado preocupación entre los maestros y ha llevado a la creación de nuevas estrategias y modelos de enseñanza de la geometría, entre los que se destaca el modelo de Van Hiele, del cual se presenta un resumen de sus aspectos más relevantes, basado en los escritos de los autores consultados.

1.1 MODELO DE VAN HIELE

El modelo de Van Hiele surgió hace más de cuarenta años, a raíz de la preocupación de los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele – Geldof , al observar que sus estudiantes de geometría no entendían, a pesar de las explicaciones. Movidos por esta inquietud, hicieron un estudio a fondo sobre el porqué sus estudiantes tenían poca comprensión. De este estudio se recogieron las ideas que constituyen el corazón del modelo (GUTIERREZ A. y JAIME, A., 1991), dichas ideas son:

1. En el razonamiento de los estudiantes de matemáticas se pueden encontrar varios niveles diferentes.

2. Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
3. Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, para presentársela será necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior.
4. No se puede enseñar a razonar a una persona en una determinada forma, pero si se le puede ayudar a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas,

El modelo de Van Hiele describe las formas de razonamiento de los estudiantes de Geometría y está formado por dos partes: la primera es la descripción de los distintos tipos de razonamiento geométrico de los estudiantes a lo largo de su formación matemática, que van desde el razonamiento visual de los niños de preescolar hasta el formal y abstracto de los estudiantes de las facultades de ciencias; estos tipos de razonamientos se denominan *niveles de razonamiento*.

La segunda parte, llamada *fases de aprendizaje*, es una descripción de la manera cómo el profesor puede organizar la actividad en sus clases para lograr que los estudiantes sean capaces de acceder al nivel de razonamiento superior al que tienen actualmente.

1.1.1 Niveles de razonamiento.

Constituyen la primera parte del modelo, están definidos como los estadios del desarrollo de las capacidades intelectuales del estudiante, los cuales no

están directamente ligados con el crecimiento o la edad. Estos niveles de razonamiento se repasan sucesivamente en cada ocasión en que el estudiante se encuentra con un nuevo tema a tratar en matemáticas. Los niveles de razonamiento que plantea el modelo son:

Nivel 1: Reconocimiento.

En este nivel, el estudiante percibe las figuras a estudiar en su totalidad, de manera global, como unidades individuales, limitándose a descripciones y reconocimientos físicos exteriores. En muchas ocasiones las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos que conocen.

Los estudiantes no suelen reconocer explícitamente las partes de la figura ni sus propiedades matemáticas. Por ejemplo, cuando se maneja un tipo de figuras como los cuadriláteros, aprenden sus nombres y realizan actividades de reconocimiento en los dos sentidos: nombre $\leftrightarrow$ figura, así, de un grupo de cuadriláteros pueden seleccionar los rombos, los cuadrados, los rectángulos etc., y si se toma uno tras de otro, ellos pueden decir el correspondiente nombre, pero en este nivel no se espera que hagan inferencias relacionadas con paralelismo, ángulos rectos etc. (JAIME. y GUTIERREZ. 1990, p 307). En este nivel, los estudiantes pueden reproducir un cuadrado, un rombo, un rectángulo, dibujándolo, pero son incapaces de ver que un cuadrado es un tipo especial de rombo y que el rombo es un paralelogramo particular (FIALLO, J. E. 1996).

Este es el nivel más elemental de razonamiento, pero no es exclusivo de preescolar o primeros cursos, en realidad, cada vez que se presente un concepto geométrico nuevo, los estudiantes pasarán por el nivel 1.

Con respecto al trabajo con cuadriláteros, en este nivel se podrá establecer que el estudiante se encuentra en nivel 1 y está listo para pasar al nivel siguiente, si se encuentra en condiciones de realizar acciones que han sido establecidas como características de este nivel. Es decir, un estudiante está en el nivel 1 si dibuja los principales cuadriláteros, asigna el nombre a cada uno, hace comparaciones entre ellos, hace clasificaciones simples y forma grupos con los diversos cuadriláteros.

Nivel 2: Análisis.

Es un nivel en el que los estudiantes se dan cuenta que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y que están dotadas de propiedades matemáticas; pueden describir los elementos de una figura y enunciar sus propiedades de manera informal. Además de esto, pueden deducir otras propiedades, generalizándolas a partir de la experimentación. Pero no son capaces de relacionar unas propiedades con otras, por lo que no pueden hacer clasificaciones lógicas de figuras, basándose en sus elementos o en sus propiedades. (JAIME y GUTIERREZ. 1990, p 308).

En este nivel los estudiantes han cambiado la forma de ver la figura, por ejemplo, para un estudiante del nivel 1 de Van Hiele, un rectángulo es una figura que tiene determinada forma, como una puerta, o un libro; para otro que se encuentre en el nivel 2, un rectángulo es un cuadrilátero con lados opuestos iguales, ángulos rectos, lados paralelos dos a dos, etc.. En general, un estudiante del nivel 1 describe una figura mediante semejanzas con otros objetos conocidos, mientras que un estudiante del nivel 2 hace la descripción de la figura mediante una lista de las propiedades que conoce.

En el nivel 2 se presenta por primera vez, un razonamiento que se le puede llamar “matemático”, puesto que a partir de la observación y la manipulación, los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades que no conocían, sin embargo esta capacidad de razonamiento es limitada, pues usarán las propiedades como si fueran independientes entre sí. Por ejemplo, en un rectángulo no relacionarán la existencia de ángulos rectos con el hecho de tener lados perpendiculares, además le dan mayor peso a las diferencias que a las características comunes; esto hace que no puedan clasificar adecuadamente las diferentes familias de polígonos, por ejemplo, seguirán considerando que los cuadrados y los rectángulos forman familias diferentes.

En el trabajo con cuadriláteros, un estudiante de este nivel estará en condiciones de pasar al siguiente si define cada uno de los cuadriláteros mediante sus propiedades, los relaciona con sus características propias, los clasifica de modo diferente, teniendo en cuenta las características elementales y si además, compara y asigna nombres a los grupos de cuadriláteros.

Nivel 3: Clasificación.

En este nivel comienza la capacidad de razonamiento formal. El estudiante es capaz de dar definiciones formales de los objetos a estudiar, de establecer relaciones entre propiedades y deducir algunas de otras. Aunque comprende los pasos que se siguen en un razonamiento lógico formal, los ve de forma aislada y no puede establecer la concatenación de razonamientos que pueden llevar a una demostración. Puede entender una demostración explicada por el profesor o desarrollada en el libro, pero no puede construirla

por si mismo. El estudiante aún no es capaz de comprender la estructura axiomática de las matemáticas.

Un estudiante del nivel 2 no entiende que unas propiedades se pueden deducir de otras, pero en el nivel 3 ya podrá relacionar lógicamente propiedades de la misma o de diferentes figuras, por ejemplo, podrá entender que la igualdad de los ángulos opuestos de un cuadrilátero, implica el paralelismo de los lados, que la igualdad de los lados implica la perpendicularidad de las diagonales, etc.. Este avance es importante, pero no es más que un paso intermedio en el camino que lleva a la comprensión completa de los sistemas axiomáticos formales, la capacidad de los estudiantes se limitará a realizar pequeñas deducciones, pero aún no tendrá la técnica para hacer una demostración completa de un teorema. (JAIME y GUTIERREZ. 1990, pp. 310).

Un estudiante del nivel 3 estará en condiciones de relacionar los cuadriláteros de acuerdo a sus características, de establecer diferencias y semejanzas entre ellos, de agruparlos y diferenciarlos y de hacer un cuadro sinóptico de la clasificación de los cuadriláteros

Nivel 4: Deducción formal.

En este nivel el estudiante es capaz de llevar a cabo razonamientos lógicos formales y comprender la estructura axiomática de las matemáticas, al tiempo que le encuentra sentido y utilidad a las demostraciones de teoremas. Asimismo, puede llegar al mismo resultado por distintos caminos, es decir, por medios equivalentes. Al llegar al nivel 4 se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático y la capacidad para tener una visión globalizadora del área de estudio.

Los estudiantes del nivel 4 podrán hacer demostraciones formales de las propiedades de los cuadriláteros, antes las habían demostrado de manera informal, también podrán descubrir y demostrar nuevas propiedades más complejas, estarán en condiciones de relacionar los cuadriláteros con otros temas estudiados de la geometría y se darán cuenta que todos éstos tienen elementos comunes como puntos, rectas, paralelismo etc., además llegarán a reconocer que las diferentes partes de la geometría, son en realidad partes de un sistema formal basado en los postulados de Euclides. (JAIME y GUTIERREZ. 1990,)

Nivel 5: Razonamiento rigurosamente deductivo.

En este nivel el estudiante puede trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Puede trabajar geometrías no euclidianas y comparar diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

“En este nivel el estudiante razona sin necesidad de la intuición, pudiendo componer su razonamiento deductivo con otros y puede analizar el grado de rigor en varios sistemas deductivos. Puede comparar sistemas basados en axiomas diferentes, y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Por su alto grado de abstracción, generalmente este nivel no es alcanzado por estudiantes de nivel medio, se considera apto para estudiantes de nivel superior” (NORTES, 1990)

1.1.1.1 Características de los niveles.

Es importante mencionar que existen características que tienen todos los niveles, pero que en cada uno de éstos se manifiesta de distintas maneras. Estas características son: la jerarquización y secuencialidad de los niveles, la

relación entre el lenguaje y los niveles, y la continuidad del paso por los niveles.

- **La jerarquización y secuencialidad de los niveles**

Se refiere a la necesidad de transitar primero un nivel para, posteriormente, pasar al siguiente superior, de tal manera que es obligatorio cursar todos sin omitir ninguno. Esto tiene la ventaja del elemento denominado recursividad, pues los conceptos y definiciones a los que un estudiante tiene acceso en un determinado nivel pueden ser utilizados posteriormente en los siguientes.

Entre las características de cada nivel 1, 2 o 3 siempre hay alguna que se refiere a habilidades que todavía los estudiantes no saben usar, hasta ahora están empezando a adquirirlas, aún no son conscientes y por tanto no las usan explícitamente, por ejemplo, en el nivel 1 no se reconoce la importancia de las partes de las figuras, en el nivel 2 no se reconoce la existencia de relaciones de implicación entre propiedades de las figuras; en el nivel 3 no se reconoce la existencia de conexiones o encadenamientos entre distintas implicaciones para construir demostraciones formales.

Los niveles de Van Hiele tienen una estructura recursiva, ya que en cada nivel hay determinadas habilidades que están siendo usadas por el estudiante de manera implícita y cuyo uso explícito se aprende en el siguiente nivel. La actividad que realice para desarrollar su capacidad de razonamiento, debe apuntar a hacer explícita esa habilidad implícita, por eso deben ser actividades que requieran del uso de esas habilidades, ya que la forma de razonar del estudiante, dependerá de la práctica repetida y de la experiencia.

.El diagrama de la figura 1 resume estas ideas (JAIME y GUTIERREZ, 1990, p 311).

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
Nivel 1	Figuras	Partes y propiedades De las figuras
Nivel 2	Partes y propiedades De las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel 3	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal de teoremas
Nivel 4	Deducción formal de teoremas	

Figura 1. Estructura recursiva de los niveles de Van Hiele

Esta propiedad permite advertir del peligro de un aprendizaje memorístico: un estudiante puede aparentar tener un nivel superior al que en realidad posee, , en general, *No es posible alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado el nivel inferior.*

▪ La relación entre el lenguaje y los niveles

Se refiere a la manera en que el estudiante se comunica con los demás, ya sea con el profesor o con sus compañeros. Se dice que a cada nivel de razonamiento le corresponde un lenguaje específico, por eso, dos personas que se encuentren en diferente nivel de razonamiento, difícilmente se comprenderán al hablar sobre el tema. Para hacerse comprender, es necesario que el profesor presente a los estudiantes las situaciones o el conocimiento con un lenguaje accesible y de acuerdo con su nivel de razonamiento y a partir de ahí, tratar de guiarles para que lleguen al nivel superior.

Las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a los niveles de Van Hiele, se reflejan no solo en la forma de resolver los problemas propuestos, sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario. A medida que el estudiante va logrando un nivel de razonamiento superior, su lenguaje también se va enriqueciendo y le va encontrando sentido al lenguaje matemático y simbólico. Palabras que no tienen sentido en un determinado nivel de razonamiento, empezarán a tenerlo cuando logre un nivel superior, lo que permitirá ir entendiendo el lenguaje matemático y la necesidad de su utilización, para entender toda la axiomática matemática. (FIALLO, 1996)

- **La continuidad del paso por los niveles.**

Implica que en ocasiones los estudiantes podrán presentar rasgos en sus procedimientos y razonamientos que corresponden a un estado de transición entre dos niveles. Pero no se podrá dar un cambio brusco de un nivel a otro, pues las habilidades se van desarrollando progresivamente. El paso de un nivel de razonamiento al siguiente se produce de manera gradual, y durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y de otro. "La evidencia de este período (el de transición) será que el estudiante mostrará deseos de usar el nivel superior, pero cuando encuentre dificultades o dudas tenderá a refugiarse en la seguridad del nivel inferior, en el que se siente más cómodo" (JAIME y GUTIERREZ, 1990 p. 319).

1.1.2 El proceso de aprendizaje según el modelo de Van Hiele

"Mientras estudia un área de la geometría, una persona pasa por un proceso por el cual aprende a utilizar nuevos métodos y herramientas de

razonamiento, es decir pasa a utilizar un tipo de razonamiento propio de un nivel superior al que utilizaba anteriormente, que le permite acceder a conocimientos más profundos”. (JAIME, A. 1990, pp 323).

El profesor debe procurar que sus estudiantes construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento al que deben acceder, creando primero los vértices de la red, que representan los conceptos asimilados, y después las conexiones entre ellos, que representan las relaciones establecidas entre esos conceptos. El paso de un nivel de Van Hiele a otro superior se produce mediante la creación de una nueva red de relaciones, que se obtiene al incorporar a la anterior, nuevos conceptos y nuevas relaciones entre ellos, más complejas y abundantes que de la red anterior. Estas redes de relaciones representan las estructuras mentales de una persona, las cuales al irse transformando, van dando lugar a nuevas redes en cada uno de los niveles. (FIALLO, 1996)

- En el nivel 1 la red es bastante simple, está formada por nombres de figuras y conceptos sin conexión entre ellos, y por imágenes relacionadas con los nombres o por acciones realizadas por ellos. (Figura 2)

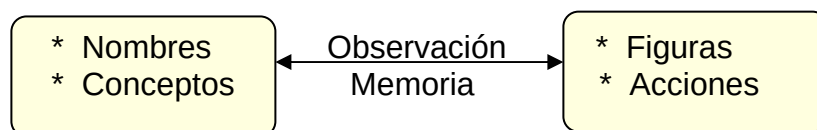


Figura 2. Primera red de relaciones

- Durante el proceso de adquisición del nivel 2 las subredes anteriores se amplían gracias al surgimiento de los conceptos correspondientes a los

elementos y propiedades de las figuras. En este nivel se utiliza la proposición lógica. (Figura 3)

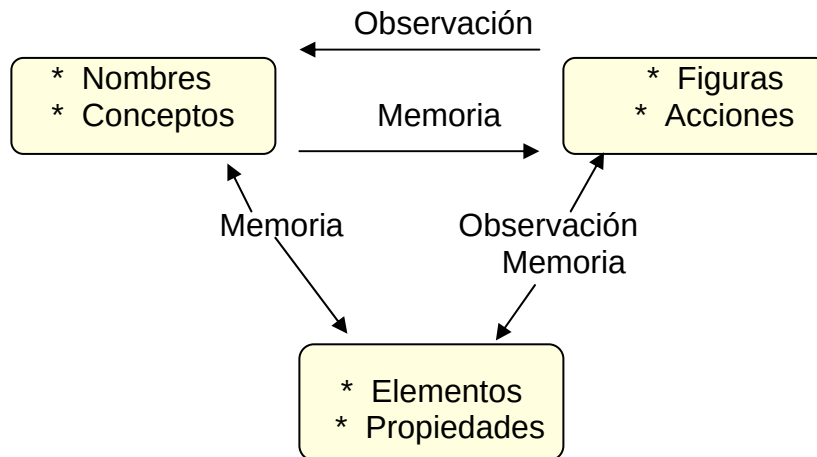


Figura 3. Segunda red de relaciones

- En el nivel 3 las nuevas habilidades permiten integrar las diversas subredes en una sola red, en ésta, las relaciones establecidas son de tipo lógico, a diferencia de las anteriores que estaban basadas en la observación y en la memoria. Ahora los estudiantes ya saben clasificar las figuras, definir correctamente, relacionar las propiedades y hacer inclusiones de clase. (Figura 4)

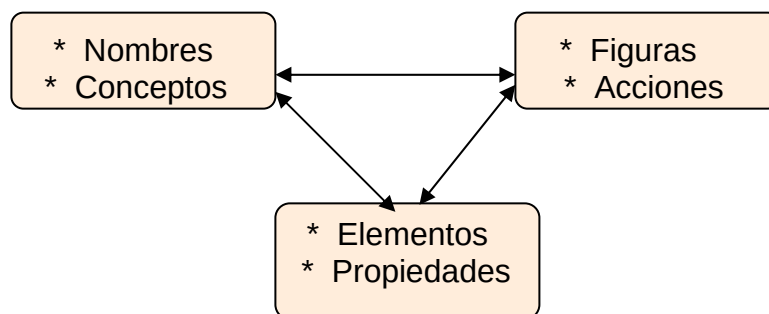


Figura 4. Tercera red de relaciones

La red de relaciones del nivel 4 es muy parecida a la del nivel 3, debido a que la mayor parte de los conceptos estudiados estarán ya presentes en el nivel 3. Por medio del razonamiento formal, la red del nivel 4 permitirá unir en una sola, varias redes que hasta el momento parecían separadas. “La gran diferencia entre los niveles 3 y 4 está en la cantidad y el tipo de conexiones que la integran. Mientras que las conexiones del nivel 3 son de tipo lógico pero informal, basado en la utilización de materiales, el razonamiento del nivel 4 es formal y abstracto. Además, como consecuencia de la mayor potencia de este razonamiento, en la red del nivel 4 se podrán establecer nuevas relaciones, que en el nivel 3 no se habían encontrado a causa de su complejidad”. (JAIME y GUTIERREZ. 1990 p 325)

El proceso por el cual una persona aprende a razonar mejor en matemáticas, se puede describir mediante el modelo de Van Hiele:

- El nivel 1 carece totalmente de razonamiento matemático, no habrá relación entre ninguna afirmación, producto de la observación o de la memoria.
- En el nivel 2 los estudiantes aún no relacionan unas propiedades con otras, por eso la red de relaciones estará formada por afirmaciones que son un vértice cada una pero sin ninguna conexión. (Figura 5)

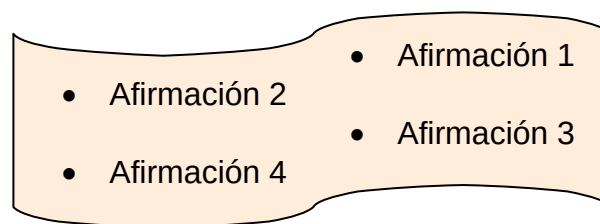


Figura 5. Primera red de relaciones del razonamiento matemático

En el nivel 3 ya existe relación lógica entre las diversas afirmaciones, aunque son sólo relaciones simples y no cadenas deductivas. (Figura 6)

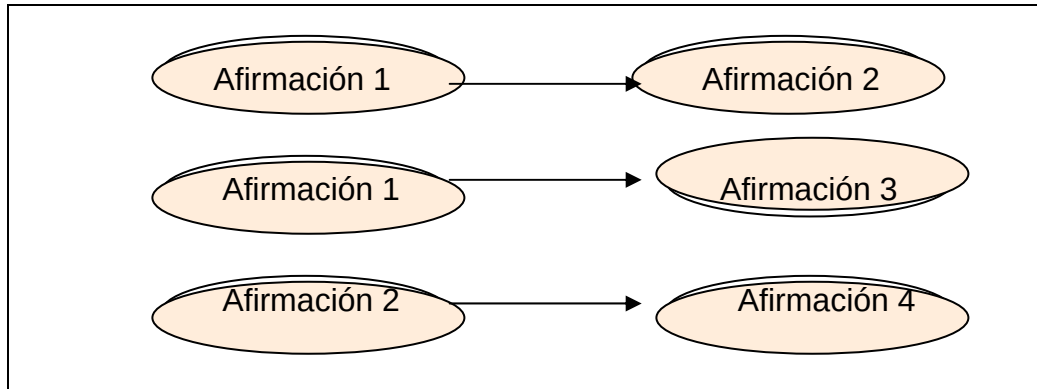


Figura 6. Segunda red de relaciones del razonamiento matemático

- Al llegar al nivel 4 se adquiere por completo la capacidad de razonamiento matemático. La nueva red de relaciones convierte varios vértices de la red anterior en uno sólo, por ejemplo, las afirmaciones o proposiciones que estaban conectadas por implicaciones simples van formando un nuevo vértice, que serían los teoremas; además surgirán nuevos vértices, que antes no existían, estableciendo nuevas relaciones para formar todo un sistema axiomático. (Figura 7)

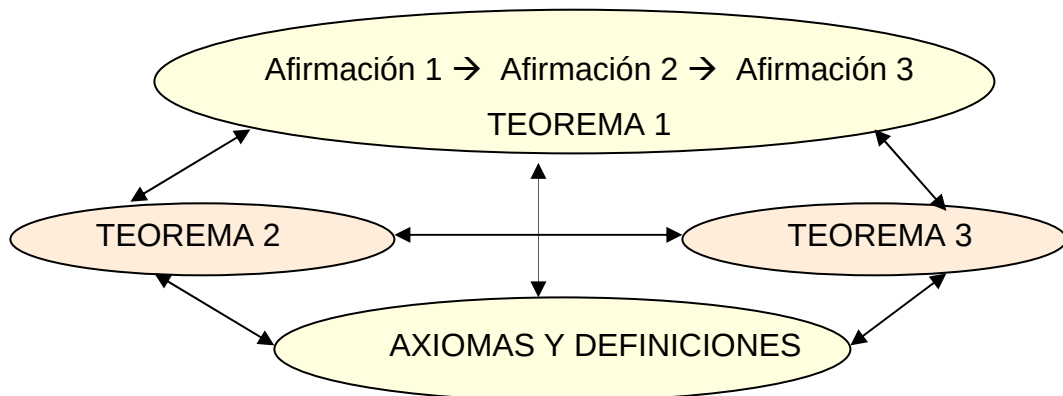


Figura 7. Tercera red de relaciones del razonamiento lógico

Al realizar la comparación entre las redes de las estructuras mentales del aprendizaje de la geometría y las redes del razonamiento matemático, se encuentra una estrecha relación y se observa que tienen las mismas estructuras aunque correspondan a niveles diferentes. (FIALLO, 1996.)

1.1.3 Fases de aprendizaje.

La segunda parte del modelo se refiere a las directrices que se dan a los profesores para que ayuden a sus estudiantes a subir al siguiente nivel de razonamiento, éstas son las llamadas “*fases de aprendizaje*”, son unas etapas en la graduación y organización de las actividades que deben realizar los estudiantes para adquirir las experiencias que les lleven al nivel superior de razonamiento. A lo largo de estas fases, el profesor debe orientarlos para que construyan la red mental de relaciones del nivel de razonamiento pertinente. “Es indispensable conseguir que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos”. (JAIME y GUTIERREZ, 1990).

Las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele son cinco:

1ª fase: Información.

Se trata de una fase de toma de contacto, inicialmente el profesor debe informar a sus estudiantes sobre el tema que se va a trabajar, el tipo de problemas que se van a plantear, los materiales a utilizar etc. Los estudiantes manejarán el material y adquirirán algunos conocimientos básicos necesarios para comenzar el trabajo matemático propiamente dicho. Esta fase ofrece información también al profesor, pues le permite indagar

sobre los conocimientos previos o presaberes que los estudiantes poseen sobre el tema que se va a estudiar; así se evita repetir un trabajo, al enseñar lo que ellos ya saben. La experiencia extra escolar se puede aprovechar como fuente de motivación. Para una buena utilización del modelo de Van Hiele, es importante que el maestro sepa el grado de conocimiento que sus estudiantes tienen sobre el tema, y sobre todo el nivel de razonamiento que son capaces de mostrar.

Esta fase sirve para dirigir la atención de los estudiantes y darles a conocer el tipo de trabajo que van a realizar.

2ª fase: Orientación dirigida.

En esta fase los estudiantes comienzan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material proporcionado. El propósito esencial de esta fase, es lograr que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan los conceptos, propiedades, figuras, etc., del tema que están estudiando. En esta fase se construirán los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. “las actividades, si son escogidas con cuidado, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (VAN HIELE, P. 1957).

Los estudiantes no podrán realizar un aprendizaje eficaz, por sí solos, es necesario que las actividades que se les propongan estén convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades etc., que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer, estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras características se les presenten en forma progresiva.

En resumen, esta fase se refiere a la investigación o búsqueda de conocimientos, principalmente por parte de los estudiantes. Y en ella se construye la red mental que permitirá relacionar los conocimientos posteriormente.

3ª fase: Explicitación.

La principal finalidad de esta fase es hacer, mediante un diálogo en el grupo, que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión, lo conducirá a un análisis cuidadoso de sus ideas y a expresarlas en forma clara y ordenada. En el transcurso de esta fase, se forma parcialmente la nueva red de relaciones, mediante dicho intercambio de ideas.

Esta fase también tiene el propósito de conseguir que los estudiantes terminen de aprender el vocabulario correspondiente al nuevo nivel de razonamiento que comienzan a alcanzar. En algunos casos, especialmente con niños, no es conveniente, desde el punto de vista didáctico, introducir nuevos conceptos, nuevo vocabulario y nuevos símbolos. Al principio se puede permitir que los estudiantes denominen las nuevas figuras o propiedades a su gusto, hasta que hayan adquirido un dominio suficiente de las mismas. En esta fase es necesario hacer el paso del vocabulario de los estudiantes al vocabulario usual. La fase 3 no es una fase de aprendizaje de cosas nuevas, sino de revisión del trabajo realizado antes, de puesta en común y de práctica y perfeccionamiento en la forma de expresarse.

4ª fase: Orientación libre.

Los conocimientos y el lenguaje que los estudiantes adquieren deben aplicarlos a otras investigaciones. El campo de estudio ya es en gran parte conocido por los estudiantes, pero aún deben perfeccionar su conocimiento del mismo. Esto se consigue mediante el planteamiento de problemas que puedan ser desarrollados de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones. Estos problemas los plantea el profesor y les da indicios que muestren el camino a seguir, pero de tal forma que el estudiante deba combinarlos adecuadamente, aplicando la forma de razonar y los conocimientos que ha adquirido en las fases anteriores.

La esencia de esta fase, la constituyen las actividades de utilización y combinación de las formas de razonamiento y de los nuevos conceptos y propiedades. Los problemas que se deben plantear en la fase 4, no tienen nada que ver con los ejercicios de aplicación, frecuentes en los textos guía, para cuya solución sólo se requiere recordar algún hecho concreto y utilizarlo directamente. Los problemas de esta fase deben presentar situaciones nuevas, ser abiertos, con varios caminos de resolución. Estos tipos de actividades son las que permitirán completar la red de relaciones que comenzó a formarse en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan las relaciones más importantes y más complejas.

5ª fase: Integración.

Esta es una fase de integración y comparación de todo lo que el estudiante ha explorado, es una acumulación de conocimientos que le permitirá tener una visión general de lo adquirido con anterioridad.

Durante las fases anteriores los estudiantes han adquirido nuevos conocimientos y habilidades, pero todavía les falta una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, y una relación de los nuevos conocimientos con otros ya adquiridos; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. Este trabajo se fomenta mediante comprensiones globales, que proporciona el profesor. Estas comprensiones generales, no deben aportar al estudiante ninguna propiedad o concepto nuevo, solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

Completada esta fase, los estudiantes tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, y habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento.

En este modelo el maestro cambia su papel de expositor y pasa a ser un coordinador de trabajos. No se prepara para dictar clase y hacer exámenes, sino que busca ejercicios y actividades que permitan tener un ambiente propicio para el desarrollo del razonamiento del estudiante y lo lleven a cambiar su papel de receptor pasivo, por el de buscador activo de conocimiento.

1.2 ANTECEDENTES

Son varios los trabajos que constituyen aportes valiosos a la enseñanza de la geometría y que tienen en común aspectos tales como usar de referencia el modelo de Van Hiele para el estudio de algún tema particular de la geometría; o utilizar recursos didácticos como el doblado de papel.

Sobre el uso como referencia del modelo de Van Hiele, se tiene conocimiento que hay varios trabajos, entre ellos figuran:

- ✓ *“Clasificación de los contenidos del programa de matemáticas basado en los niveles de Van Hiele”* realizado por un equipo encabezado por María de Jesús Figueroa Torres que fue publicado en las Memorias del XII Congreso Nacional de la Asociación De Profesores de Matemáticas, México 1993. Hacen una selección de temas de geometría de acuerdo con los niveles de razonamiento y para cada grupo de contenidos, indican las fases de aprendizaje que permitirán el paso de un nivel a otro, según el modelo de Van Hiele.
- ✓ El trabajo de tesis de magister en la Enseñanza de la Educación Matemática *“El modelo de Van Hiele en la enseñanza de los deslizamientos en el plano de la geometría de sexto grado”*, investigación de Jorge Enrique Fiallo Leal, que plantea una alternativa de solución en el campo específico de la geometría de sexto grado. Ha servido de fuente de consulta de aspectos importantes del modelo de Van Hiele
- ✓ Otro trabajo de apoyo es la Tesis de Licenciatura *“Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico”* de Víctor Larios Osorio y Noraisa González G. En el que proponen el doblado de papel y el uso de la tecnología a través de un computador, como dos recursos didácticos que facilitan y hacen más entretenida la enseñanza de la geometría.

- ✓ De los mismos autores anteriores, es el trabajo *“El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría”*. Reporte de investigación publicado en las Memorias del XIV Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas México 1997. Trabajo en el que se describe la realización de un compendio de actividades basadas en el modelo de enseñanza de la geometría, que el matrimonio holandés de los Van Hiele desarrolló con la intención de tratar de disminuir algunas deficiencias en los conocimientos y razonamientos que mostraban los estudiantes. Allí se considera que los trazos realizados con regla y compás sobre un papel, tienen la desventaja de carecer de movilidad y como los estudiantes necesitan observar plásticamente las propiedades de las figuras de manera más intuitiva que rigurosa, escogieron el doblado de papel como herramienta que permite construir las figuras con una buena aproximación y facilita su aprendizaje.

- ✓ Sobre el uso del doblado de papel está el trabajo de Vicente Carrión Miranda *“Un recurso para la enseñanza de la geometría”*, publicado en la revista Educación Matemática volumen 5, número 1, México 1993. Contiene una serie de ejercicios de doblado de papel enfocados hacia el estudio de la geometría. Plantea que el uso del papel doblado, en la enseñanza de la geometría, es un gran apoyo que permite construir objetos geométricos del plano como los polígonos y sugiere utilizarlo en la búsqueda de sus propiedades.

- ✓ El trabajo de María Cecilia Procopio M., *“Conexiones entre la geometría y el álgebra en secundaria: Uso del doblado de papel para el estudio de polígonos y variables algebraicas”* de la Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá 2001. Es un estudio exploratorio sobre la manipulación

concreta del doblado de papel y su relación con el establecimiento de conexiones entre la geometría y el álgebra que efectúan los alumnos de secundaria durante la resolución de problemas sobre los contenidos de polígonos y variables algebraicas. Toma como referencia el modelo de Van Hiele.

- ✓ *“Un cuadrado y sus transformaciones”* artículo de Alejandra León Castellá, de la Fundación CIENTEC, presentado en el II Festival de Matemática, Costa Rica, 2000. Este artículo pretende documentar un acercamiento multidisciplinario y sensorial a la geometría y su enseñanza en los primeros años (pre y escolares) con el fin de facilitar una aprendizaje más creativo y efectivo. Presenta enfoques de la investigación del aprendizaje, recomendaciones para profundizar y afianzar el conocimiento y utiliza un cuento como el contexto para explorar una forma y sus transformaciones por medio del doblado de papel. Estas investigaciones afirman que un contenido reducido con poca manipulación de objetos y procesos matemáticos, no proporcionan las oportunidades necesarias para trascender los prototipos utilizados. Así entonces, el cuadrado en preescolar tiene siempre su base horizontal, es pequeño y tiene un color determinado. Si los estudiantes bajo este sistema son enfrentados con leves modificaciones del cuadrado, inclusive rotación del mismo, cabe la posibilidad de que no lo reconozcan.
- ✓ En general son muchos los trabajos en donde toman el modelo de Van Hiele como referencia o fundamento en el estudio de un tema de la geometría.

1.3 EL DOBLADO DE PAPEL

A continuación se brinda, mediante un pequeño resumen, una información general sobre el doblado de papel, más comúnmente conocido como origami. Además se describen algunos postulados sobre el doblado de papel que se tienen en cuenta en las actividades.

1.3.1 Origen del origami.

La palabra origami significa arte de doblar el papel, La definición de la palabra japonesa significa literalmente "plegar" (oru) "papel" (kami). Se originó hace varios cientos de años y era una tradición reservada originalmente a la nobleza y los samuráis japoneses. Después de una lenta difusión, fue introducido en Europa y posteriormente en América, tomando este significado se creó la palabra de origen europeo: papiroflexia, con la cual se define este arte en España. El Origami o papiroflexia, más que un arte japonés, es parte integral de su cultura. Su técnica está basada en el doblado de papel para crear bellas figuras bi y tridimensionales. Inicialmente fue practicado por la Corte Imperial como recreación y entretenimiento pero después se enseñó en las escuelas como una forma de pasatiempo que contribuía en el desarrollo de la motricidad fina de los niños. Luego se extendió al resto de la población. Fue llevado a occidente y ahora es fomentado en círculos de aficionados en todo el mundo.

El origami clásico utiliza papel cuadrado y no permite cortes en el papel. Pero en su evolución se han creado técnicas para trabajar el papel, sin importar la forma y el tamaño y además, permiten rasgados y cortes. Esto ha originado que el origami tenga diversos tipos de clasificación. Por ejemplo, se clasifica de acuerdo a la finalidad, como artístico o educativo. De acuerdo a la forma

del papel, como a papel completo o tiras y de acuerdo a la cantidad de trozos utilizados, puede ser tradicional o modular.

El origami es una disciplina que tiene muchas consideraciones, algunos la definen como un arte educativo en el cual las personas desarrollan su expresión artística. En los últimos años está tomando vuelo desde el punto de vista matemático y científico. En la enseñanza de la matemática, las técnicas del doblado de papel se incorporan como una herramienta didáctica para enseñar geometría. (Microsoft ® Encarta ® Biblioteca de Consulta 2002.)

1.3.2 Postulados referentes al doblado de papel

Para las actividades planteadas en el presente trabajo, se consideraron una serie de postulados referentes al doblado de papel. Éstos postulados son:

1. Puede considerarse que una hoja de papel es una superficie plana.
2. Un pliegue realizado en una hoja de papel que pase por dos puntos del papel y que se ha hecho sobre una superficie plana, como apoyo, es una línea recta.
3. El papel puede ser plegado de tal manera que pase por dos o más puntos colineales.
4. Pueden superponerse dos puntos distintos en una misma hoja de papel.
5. Puede plegarse el papel de modo que un punto puede superponerse a otro pliegue.

6. Dos ángulos son congruentes si al superponerse coinciden.
7. Dos segmentos son congruentes si al superponerse coinciden

1.4 FUNDAMENTO MATEMÁTICO DE LOS CUADRILÁTEROS

El tema escogido para trabajarlo mediante las actividades de doblado de papel es el de los cuadriláteros. Por esta razón se presenta su clasificación, sus propiedades y características, las cuales servirán de pauta para el desarrollo de dichas actividades.

1.4.1 Definición

Los cuadriláteros son figuras geométricas formadas por cuatro líneas rectas que encierran una porción finita del plano. Son polígonos cuya característica única es que: *Tienen cuatro lados*. En la figura 8 se muestran ejemplos de cuadriláteros

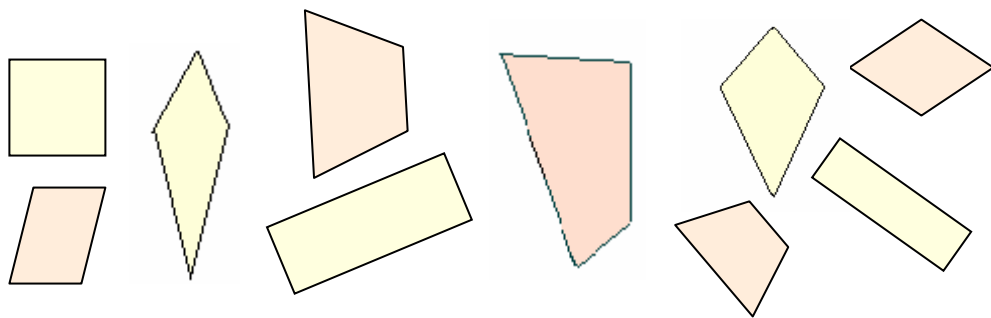


Figura 8. Gráfica de algunos cuadriláteros

1.4.2 Elementos de los cuadriláteros.

En un cuadrilátero se distinguen diversos elementos, entre ellos figuran los siguientes: (BALDOR, A. 1967)

Lados: son los segmentos AB, BC, CD y DA forman la figura.

Vértices: son los puntos de intersección A, B, C y D, de las rectas que forman el cuadrilátero ABCD.

Diagonales: son los segmentos AC y BD que unen dos vértices no consecutivos.

Ángulos interiores: son los ángulos $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, y $\angle D$ formados por dos lados y el vértice común.

Ángulos exteriores: son los ángulos, formados por un lado, un vértice y la prolongación del lado adyacente.

En la figura 9 se muestran los diversos elementos de un cuadrilátero

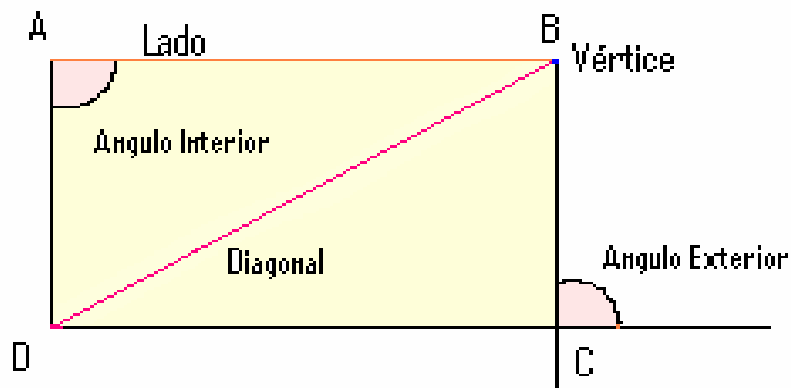


Figura 9. Elementos de un cuadrilátero

Además, a un cuadrilátero, se le puede calcular su *Perímetro*: formado por la suma de las medidas de sus cuatro lados.

1.4.3 Clasificación de los cuadriláteros.

Los cuadriláteros se clasifican en tres grandes grupos: los paralelogramos, los trapecios y los trapezoides.

Son paralelogramos si los dos pares de lados opuestos son iguales. Dentro de éstos están los cuadrados (Figura 10), con los cuatro lados y ángulos iguales, los rectángulos (Figura 11) con cuatro ángulos rectos y lados iguales dos a dos, los rombos (Figura 13) con los cuatro lados iguales y los romboides (Figura 12) que no tienen los lados iguales ni ángulos rectos.



Figura 10. Cuadrado

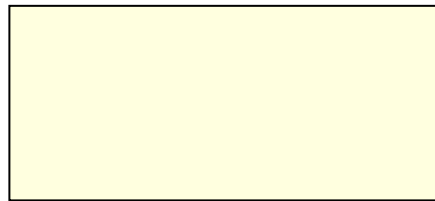


Figura 11. Rectángulo

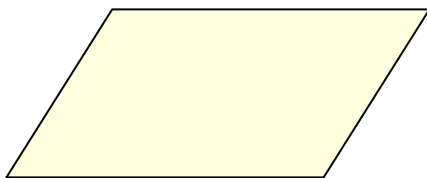


Figura 12. Romboide

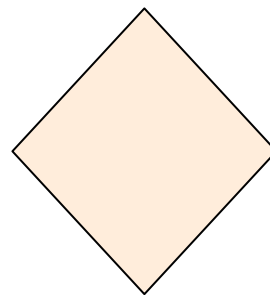


Figura 13. Rombo

Los no paralelogramos son los trapecios, si dos de sus lados son paralelos y los otros dos no. Hay trapecios isósceles (Figura 14), escalenos (Figura 15) y rectángulos (Figura 16); y los cuadriláteros que no tienen lados paralelos son los trapezoides (Figura 17).

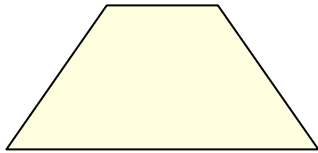


Figura 14. Trapecio Isósceles

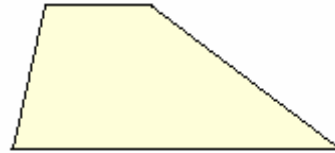


Figura 15. Trapecio Escaleno

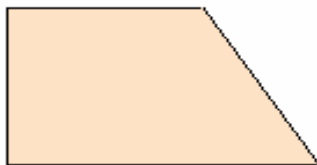
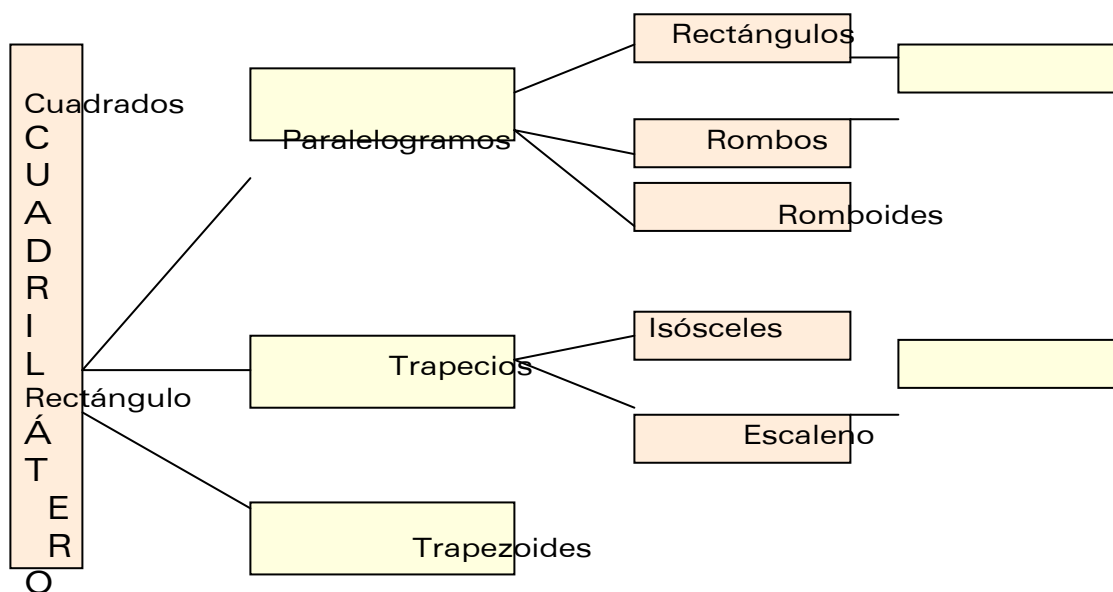


Figura 16. Trapecio Rectángulo



Figura 17. Trapezoide

La clasificación de los cuadrilátero se resume en el siguiente esquema



S

Figura 18. Clasificación de los cuadriláteros

1.4.4 Características de los cuadriláteros.

La característica que tienen en común todos los cuadriláteros es *tener cuatro lados*.

Los cuadriláteros se dividen en tres grandes grupos: los paralelogramos, los trapecios y los trapezoides.

Los paralelogramos son un tipo de cuadriláteros cuya característica es: *Tener dos pares de lados opuestos que son paralelos*.

Entre los cuadriláteros que cumplen esta característica, se distinguen los rectángulos, los rombos, los romboides y el cuadrado.

Los rectángulos son paralelogramos que, tienen las siguientes características: *sus lados opuestos son iguales entre sí y sus cuatro ángulos interiores son rectos*.

Los rombos tienen las siguientes características: *sus ángulos internos opuestos son iguales entre sí y sus cuatro lados son iguales*.

El cuadrado, cumple con las propiedades de los rectángulos y de los rombos, por lo que puede ser considerado como un caso particular de éstos últimos y sus características son una combinación de las características de dichas figuras, las cuales son: *los cuatro ángulos interiores son rectos. Y sus cuatro lados son iguales*.

los romboides, tienen las siguientes características: *sus ángulos internos opuestos son iguales entre sí. y sus lados opuestos son iguales.*

El otro gran grupo de cuadriláteros, o familia, es el de los trapecios. Los trapecios son cuadriláteros que tienen las siguientes características: *tienen dos lados que son paralelos entre sí. Los otros dos lados NO son paralelos entre sí.*

Los lados paralelos se llaman bases. Dentro de los trapecios existen los trapecios isósceles, los trapecios escalenos y los trapecios rectángulos.

Los trapecios isósceles cumplen con las características de los trapecios y además, con las siguientes características: *los lados no paralelos son iguales entre sí y los ángulos interiores situados en los extremos de cada uno de los lados paralelos, son iguales entre sí.*

Los trapecios escalenos, además de las características de los trapecios, cumplen las siguientes condiciones: *los lados no paralelos NO son iguales entre sí y los ángulos interiores situados en los extremos de cada uno de los lados paralelos NO son iguales entre sí.*

Los trapecios rectángulos cumplen con las características de los trapecios escalenos , pero además cumplen las siguientes condiciones: *uno de los lados no paralelos es perpendicular a los lados paralelos entonces, los ángulos situados en los extremos de dicho lado perpendicular son iguales entre sí y son rectos.*

Finalmente, el otro grupo de cuadriláteros es el de los trapezoides. Los trapezoides son cuadriláteros que *No tienen lados que sean paralelos entre sí.*

2. METODOLOGÍA

El propósito de este trabajo es plantear una propuesta metodológica que facilite a los estudiantes la identificación de los diversos cuadriláteros y sus características para que puedan utilizarlos en los diseños de ejercicios y actividades de su especialidad.

El presente trabajo se desarrolló en varias etapas, primero se hizo una recopilación de información necesaria, que permitió fundamentar el marco teórico. Se seleccionó el grupo de estudiantes y se hizo un diagnóstico de presaberes. Se organizaron las actividades que constituyen la propuesta, para luego ser implementadas. Por último se hace un análisis de resultados.

2.1 POBLACIÓN Y MUESTRA

Como en el Instituto Técnico Industrial Laureano Gómez Castro, de la ciudad de Aguachica en el departamento del Cesar, en su plan de estudio figura el tema de los cuadriláteros dentro del contenido del plan de la asignatura de geometría para el grado octavo, se decidió desarrollar el presente trabajo, con los estudiantes del grado 8 A de la Jornada de la Tarde. Además, porque ellos, como estudiantes de un colegio técnico, deben realizar trabajos propios de su especialidad. Metalistas, electricistas y dibujantes deben hacer diseños de planos y de objetos ornamentales: rejas, puertas,

ventanas etc., en donde las figuras geométricas constituyen la base de dichos diseños.

La población de estudio la constituyen jóvenes cuyas edades oscilan entre los 13 y 16 años. La mayoría corresponde a un nivel socioeconómico bajo, cuyas expectativas son, fundamentalmente, aprender un oficio que les facilite la consecución de empleo. Son pocos los estudiantes que aspiran a seguir una carrera profesional.

Las actividades se desarrollaron con los 40 estudiantes del curso, pero con el fin de facilitar la observación se hizo la escogencia de tres estudiantes, que voluntariamente accedieron a colaborar, manifestando su interés por participar en el desarrollo del trabajo, por solicitud de ellos, los nombres fueron cambiados, simplemente se les llamarán: Ernesto, Lady y Johana. Ernesto es un estudiante aventajado respecto a los demás, capta con mucha facilidad y es muy activo. Lady en cambio es tímida y a veces no demuestra mucha habilidad en lo que hace, le falta dinamismo. Johana es una joven cuyo rendimiento es bueno y se muestra interesada por aprender y hacer las cosas lo mejor posible.

2.2 INDAGACIÓN DE LOS PRESABERES

Es importante establecer el nivel en que se encuentran los estudiantes al inicio del curso, esto se puede lograr mediante una prueba diagnóstica en la que se debe evitar respuestas que impliquen memorismos, ya que se tienen que mostrar los procedimientos de razonamiento que llevó a cabo el estudiante en el momento de resolver la cuestión. Esto significa que es más importante saber el nivel de razonamiento que el de conocimiento, por eso,

observar cómo contestan y porque lo hacen así, tiene mayor significado que si contestan bien o mal.

El trabajo comienza con una evaluación inicial como prueba diagnóstica, la cual fue diseñada con la intención de que permita indagar sobre los conocimientos que sobre el tema tienen los estudiantes, es decir, sus presaberes, y además, permita tener información sobre el nivel de razonamiento que los estudiantes poseen.

En el anexo 1, se muestra el modelo de la evaluación inicial.

La prueba diagnóstica fue aplicada en el horario habitual de clase, y para responderla se dio un tiempo de 40 minutos. Dicha prueba consta de tres preguntas, la pregunta uno, tiene dos partes, la sección *a*, se trata de identificar de entre varias figuras, cuáles de ellas son cuadriláteros y la sección *b*, apunta a que el estudiante relacione cada figura con su correspondiente nombre; esta pregunta caracteriza el primer nivel de razonamiento, el de reconocimiento. Con la segunda pregunta se pretende que el estudiante reconozca una característica común, y con base en ésta haga una clasificación, esta pregunta es de nivel 3: clasificación. La tercera pregunta es de nivel 2: Análisis y se trata de que determinen e identifiquen los elementos de un cuadrilátero.

Antes de iniciar la prueba, se le preguntó a los estudiantes si el tema de los cuadriláteros ya lo habían estudiado en años anteriores, todos respondieron afirmativamente. Algunos comentaron que en quinto de primaria habían estudiado algunos cuadriláteros y luego en sexto grado volvieron a verlos, De acuerdo a esto, se esperaban buenos resultados.

Durante el desarrollo de la prueba se dieron varias orientaciones y explicaciones para atender a las dudas que planteaban los estudiantes. Al finalizar la prueba se pidió a los estudiantes que hicieran comentarios sobre la evaluación y sobre cómo se habían sentido respondiéndola. Al respecto, se escucharon opiniones como “yo se que me lo enseñaron, pero no me acuerdo de algunas cosas” “la primera pregunta estaba muy fácil” “¡uy si! , quién no va a distinguir los cuadriláteros”. “la segunda pregunta nos pareció difícil”. Casi todos los estudiantes estuvieron de acuerdo que la primera parte de la pregunta uno estaba fácil, de la tercera no se acordaban y respecto a la segunda, no tenían claro que significaba lados paralelos.

De los resultados de la prueba inicial, aquellos estudiantes que no respondieron correctamente ninguna pregunta o que sólo respondieron la sección **a** de la primera pregunta, como se consideran que no están ni siquiera en el nivel de reconocimiento los ubicaremos como en un nivel 0. La tabla 1 muestra los resultados de la prueba inicial y la tabla 2 el número de estudiantes por nivel.

RESULTADOS DE LA PRUEBA INICIAL					
Preguntas Correctas	Tres 1 ^a , 2 ^a y 3 ^a	Dos 1 ^a y 3 ^a	Una 1 ^a sec. a y b	media 1 ^a sec. a	Ninguna Pregunta
Numero de Estudiantes	3	8	16	8	5

Tabla 1. Resultados de la prueba inicial

NÚMERO DE ESTUDIANTES POR NIVEL				
	Nivel 0	Nivel 1 Reconocimiento	Nivel 2 Análisis	Nivel 3 Clasificación

Número de Estudiantes	13	16	8	3
Porcentaje	32.5%	40 %	20%	7.5%

Tabla 2. Número de estudiantes por nivel

2.2.1 Análisis de los resultados de la prueba diagnóstica

La observación del desarrollo de la evaluación inicial (prueba diagnóstica) y sus resultados, permiten hacer el siguiente análisis:

- La gran mayoría de los estudiantes no tienen inconveniente en distinguir los cuadriláteros de las demás figuras.
- Los estudiantes que se encuentran dentro del 12.5% que no respondieron correctamente ninguna pregunta, identificaron como cuadriláteros únicamente, los que estaban apoyados sobre uno de sus lados. Se podría pensar que para ellos, un cuadrilátero deja de serlo, si se rota la figura.
- Los rectángulos y los cuadrados que se encontraban rotados, no los identificaron como tales. En general, los cuadriláteros que estaban apoyados sobre uno de sus vértices, varios estudiantes, los identificaron como rombos.
- Parece que para algunos estudiantes, el nombre del cuadrilátero depende de su posición, en un momento una figura es un cuadrado, pero al girarlo, ya no es cuadrado, es rombo.
- Por la observación anterior se puede concluir que algunos estudiantes identifican las figuras por semejanza con otros objetos pero no por sus

características, lo que evidencia que su nivel e razonamiento es de reconocimiento simplemente.

- En la segunda pregunta, hubo confusión fue necesario dar algunas orientaciones, y sin embargo, de los 27 estudiantes que respondieron correctamente la primera pregunta (en sus dos secciones), sólo 3 de ellos pudieron completar la tabla. Esto indica que la mayoría de estudiantes tienen dificultad para identificar los segmentos que son paralelos.
- En la tercera pregunta debían dibujar un cuadrilátero cualquiera para señalar en él sus elementos, aproximadamente un 80% de los estudiantes dibujó un cuadrado apoyado sobre uno de sus lados, como si cuadrilátero fuera únicamente el cuadrado. Parece que para ellos, la noción de cuadrilátero esta limitada a la del cuadrado únicamente.
- En la tercera pregunta, algunos estudiantes escribieron los elementos, pero no los señalaron en el cuadrilátero; como si lo supieran de memoria, pero en la figura, no distinguen cuál es cada uno.
- Muchos de los estudiantes, en la tercera pregunta, hicieron únicamente el dibujo de un cuadrado, no escribieron los elementos, mucho menos los identificaron.
- Algunos estudiantes manifestaron que en años anteriores estudiaron el tema de los cuadriláteros pero sólo habían visto el cuadrado, el rombo y el rectángulo y que los elementos no los habían visto. A uno de ellos se le preguntó ¿Qué es rectángulo? Con mucha seguridad respondió “un rectángulo es una figura de cuatro lados que tiene todos sus ángulos rectos” pero al pedirle que, entre todas las figuras, señalará los

rectángulos, no respondió satisfactoriamente. Esta situación lleva a pensar que poseen un conocimiento memorístico.

- Hubo dos estudiantes que entregaron la prueba en blanco, argumentando que no se acordaban de nada.
- El tiempo que se dispuso para desarrollar la prueba fue suficiente, aproximadamente un 85% de los estudiantes, entregó la prueba antes del tiempo permitido.
- Se inicia entonces el trabajo con tan sólo un 7.5 % de los estudiantes en un nivel 3, un 20% en el nivel 2 y un 40% en el nivel 1.

2.3 Descripción de la implementación de las actividades

Con base en la información recopilada, específicamente sobre cuadriláteros y doblado de papel, se hizo la adaptación de las actividades a desarrollar, para esto se tuvo en cuenta el resultado de la prueba diagnóstica. se organizaron en cinco grupos uno por cada figura. Cada actividad tiene un instructivo para obtener un cuadrilátero determinado, mediante doblado de papel; cada una de ellas tiene un objetivo, un esquema de trabajo y se plantean preguntas que conlleven al logro del objetivo. Además, en cada una se especifica el nivel de razonamiento que se pretende alcanzar. Para el caso de este trabajo se espera que a lo sumo los estudiantes alcancen un nivel de clasificación (nivel 3)

Las actividades se desarrollaron en la clase establecida para geometría, en su horario habitual. Cada clase se organizó como una sesión con una duración de 55 minutos. Se planteó que las actividades de construcción de la

figura y de identificación de sus elementos se desarrollaran en una misma sesión y para las actividades de comprobación de las propiedades se destinó una sesión por actividad. En total se trabajaron 13 sesiones. Para los rectángulos, los cuadrados y los trapecios se destinaron tres sesiones para cada figura, para los rombos dos sesiones y una para los trapezoides. Hubo una sesión extra en donde se trabajó la actividad con los cuadriláteros flexibles formados con paletas y chinchas, propuesta por una de las estudiantes.

Cada sesión iniciaba con la fase 1, dando la información sobre el nombre de la actividad, la figura que se iba a trabajar y se planteaba el objetivo. Luego se daban las instrucciones que los estudiantes debían seguir para obtener la figura, todo esto se anotaba en el tablero (fase 2). Ellos primero tomaban nota en su cuaderno de apuntes, para luego seguir cada paso del instructivo. En esos momentos se paseaba por el aula, observando cómo cada estudiante hacía los dobleces y orientando a quienes lo solicitaban. Cuando todos los estudiantes tenían su figura de papel, se hacían algunas aclaraciones y se planteaban una serie de preguntas para que cada uno respondiera, inicialmente en forma individual y luego formaban grupos con dos o tres compañeros para intercambiar ideas y opiniones sobre lo realizado. En la puesta en común cada estudiante exponía ante el grupo lo observado, entre todos hacían comentarios, se presentaban discusiones y llegaban a conclusiones unificadas. Antes de iniciar la siguiente actividad se hacían comentarios y concreciones sobre la actividad anterior.

Al terminar el desarrollo del grupo de actividades de una misma figura, se daba una retroalimentación, se despejaban dudas y se hacían aclaraciones sobre ideas erróneas en los estudiantes, ellos tomaban nota de las

orientaciones y explicaciones dadas y al final, elaboraban un resumen sobre la figura trabajada.

Mientras los estudiantes trabajaban en cada actividad, se les observaba y en una libreta de apuntes, se tomaba nota de cosas que parecían importantes y también de los comentarios, especialmente los que hacían los tres estudiantes seleccionados, Lady, Ernesto y Johana. Estas anotaciones permitirían hacer más adelante, la reflexión y el análisis sobre el trabajo desarrollado.

Una vez desarrolladas todas las actividades y realizados los resúmenes respectivos, se hizo una evaluación mediante una prueba escrita, para establecer si hubo o no, avance en los estudiantes en cuanto a su nivel de razonamiento.

3. PROPUESTA

La propuesta consiste en una serie de 20 actividades para estudiar los cuadriláteros utilizando técnicas de doblado y rasgado de papel, y clasificadas y ordenadas de acuerdo a cada figura y a los niveles de razonamiento de Van Hiele. Se pretende que los estudiantes, en cada figura, vayan aumentando su nivel de razonamiento. No se espera que alcancen un nivel de razonamiento 4, pero si que al menos, alcancen el nivel de clasificación (nivel 3). De todos modos, teniendo en cuenta los resultados iniciales, si se logra un incremento del porcentaje de estudiantes en cada nivel, en por lo menos un 20%, se considerará que es un resultado satisfactorio.

A continuación se mencionan los parámetros que permitirán establecer el nivel de razonamiento, se describe el esquema y la organización de las actividades, éstas se detallan una a una y al final de cada grupo de actividades se hace el su respectivo análisis.

3.1 PARÁMETROS PARA CADA NIVEL

De acuerdo con la actividad que se realice, los siguientes son los parámetros que permitirán identificar el paso de un nivel a otro en el modelo de Van Hiele, además se plantea un objetivo en cada nivel.

Para el Nivel 1: Reconocimiento

Objetivo: Identificar los cuadriláteros

Como lo relevante en este nivel es lograr una visión global del nuevo concepto, en el caso particular de los cuadriláteros, debe alcanzarse un reconocimiento de cada figura, identificar cada una de ellas, independientemente de su posición.

Inicialmente, de un grupo de diversas figuras, el estudiante deberá identificar cuáles de ellas son cuadriláteros y luego, de un grupo de cuadriláteros, deberá distinguir los cuadrados, los rectángulos, los rombos, los trapecios y los trapezoides. Además debe realizar las siguientes acciones:

- ❖ Dibujar los principales cuadriláteros.
- ❖ Asignar el nombre a cada cuadrilátero.
- ❖ Hacer clasificaciones simples
- ❖ Formar grupos con los diversos cuadriláteros.

Para el Nivel 2: Análisis

Objetivo: Descomponer los cuadriláteros en sus partes.

Como lo fundamental en este nivel es la identificación de partes y propiedades, mediante la observación y la manipulación, se debe llegar a un

descubrimiento experimental de las características particulares de cada cuadrilátero y de sus elementos: lados, ángulos, vértices, diagonales.

En la representación gráfica de un cuadrilátero cualquiera, el estudiante, debe señalar cada uno de sus elementos y además, realizar las siguientes acciones:

- ❖ Definir cada cuadrilátero mediante sus propiedades.
- ❖ Relacionar cada cuadrilátero con sus características propias.
- ❖ Clasificar los cuadriláteros de modo diferente, teniendo en cuenta las características elementales.

Para el Nivel 3: Clasificación

Objetivo: Establecer diferencias y semejanzas entre los cuadriláteros

En este nivel se espera que el estudiante descubra que unas propiedades se deducen de otras y que establezca diferencias y semejanzas entre uno y otro cuadrilátero. Además, debe hacer comparaciones entre cada dos cuadriláteros y determinar en qué se parecen y en qué se diferencian esas dos figuras, es decir, podrá realizar las siguientes acciones:

- ❖ Relacionar los cuadriláteros de acuerdo a sus características.
- ❖ Establecer diferencias y semejanzas entre los cuadriláteros
- ❖ Agrupar y diferenciar los tipos de cuadriláteros
- ❖ Hacer un cuadro sinóptico de la clasificación de los cuadriláteros

3.2 LAS ACTIVIDADES

En primer lugar se hizo una recopilación de material bibliográfico y fundamentado en esto, se organizaron y adaptaron las actividades que constituyen la propuesta, dichas actividades están basadas en el trabajo de Victor Larios y Noraisa González, de su reporte de investigación titulado "El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría", presentado en el XIV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Realizado en la ciudad de Toluca (México). Además, las actividades fueron adaptadas con un esquema en donde no se hace explícita cada una de las fases.

Las actividades que se relacionan con la construcción de las figuras son del nivel 1. Las actividades que tiene que ver con nombrar los elementos de cada cuadrilátero son del nivel 2 y las que se refieren a la identificación de propiedades o comparación de figuras, son del nivel 3.

3.2.1 Esquema de las actividades

Las 20 actividades fueron organizadas por grupos de acuerdo a la figura. En cada actividad se especifica el nivel de razonamiento y la fase de aprendizaje que sobresale en cada una de ellas. La fase 1 va implícita en el nombre de la actividad y lo que se espera de ella. La fase 2 es la que más se evidencia en todas las actividades, pues, siguiendo las instrucciones de la actividad y las orientaciones del maestro, el estudiante llega al conocimiento esperado. En la mayoría de las actividades, la fase 3 se da en el momento de la socialización general (puesta en común), cuando cada estudiante expone ante sus compañeros lo observado, entre todos hacen comentarios, se plantean discusiones y llegan a conclusiones unificadas. En cierta forma, la fase 4 esta implícita en la mayoría de las actividades, puesto que en el desarrollo de cada actividad se aplican conocimientos de actividades

anteriores. La fase 5 se da cuando el estudiante aplica lo que aprendió, por ejemplo cuando usa los cuadriláteros en la realización de diseños y trabajos, pero ésta no se da dentro de las actividades.

Es importante aclarar que las actividades están diseñadas en un esquema en donde se destacan siete aspectos, en los que van implícitas las fases de aprendizaje, estos siete aspectos son:

- *el nombre de la actividad* (fase de información),
- *el nivel de razonamiento al que corresponde,*
- *la fase de aprendizaje* que sobresale,
- *Lo que se espera en cada actividad*
- *las instrucciones* (fase de orientación dirigida) que son las indicaciones que se le dan al estudiante para que haciendo los dobleces obtenga la figura, o visualice características o compruebe propiedades;
- *el esquema de trabajo* (fase de explicitación) en el que se indica cómo desarrollar la actividad .
- en algunos casos, *un dibujo ilustrativo*

3.2.2 Organización de las actividades

Las actividades se han organizado así: tres para el rectángulo, comprendiendo actividades que corresponden desde el nivel 1 de razonamiento hasta el nivel 3. Estas actividades son: construcción de un rectángulo (nivel 1), nombramiento e identificación de los elementos de un rectángulo (nivel 2) y comprobación de las propiedades de un rectángulo (nivel 3).

Tres actividades para el rombo, con una correspondencia entre los niveles del 1 al 3, las cuales son: construcción de un rombo mediante dos métodos (nivel 1 ambas), y comprobación de las propiedades de los rombos (nivel 3).

Cinco actividades para el cuadrado, también con la intención de alcanzar un nivel 3. Dichas actividades son: construcción de un cuadrado (nivel 1), determinación de los elementos de un cuadrado (nivel 2), comprobación de que el cuadrado es un caso particular de los rectángulos (nivel 3), comprobación que el cuadrado es un caso particular de los rombos (nivel 3) y por último, comprobación de las características generales de los cuadrados (nivel 3).

Ocho actividades para los trapecios y todas sus clasificaciones, actividades que corresponden desde el nivel 1 hasta el nivel 3. Dichas actividades son: Construcción de un trapecio (nivel 1), los elementos de un trapecio (nivel 2), construcción de un trapecio escaleno (nivel 1), propiedades de los trapecios escalenos (nivel 3), construcción de un trapecio isósceles (nivel 1), propiedades del trapecio isósceles (nivel 3), construcción de un trapecio rectángulo (nivel 1) y propiedades del trapecio rectángulo (nivel 3).

Una actividad que involucra a los trapezoides y que corresponde al nivel I de razonamiento, la cual fue la obtención de trapezoides a partir de un cuadrado de papel (nivel 1).

Como ya se mencionó, todas estas actividades son clasificadas, teniendo en cuenta la complejidad de los dobleces y de los conceptos utilizados en cada una de ellas y se organizaron en un orden de acuerdo a la figura, al nivel de razonamiento y la fase de aprendizaje.

3.3. DESARROLLO DE LA PROPUESTA

El trabajo comenzó con la evaluación inicial, como prueba diagnóstica, que permitió establecer el nivel de razonamiento en que se encuentran los estudiantes. Los resultados de esta prueba, permitieron establecer que tan sólo un 7.5% de ellos alcanzan un nivel de clasificación (nivel 3) y evidenció que el 32.5 % confunden un cuadrilátero con otro.

En otra sesión se realizó una actividad inicial de motivación e inducción en el uso de doblado de papel, para esto se contó con la colaboración de un estudiante de sexto grado, que maneja el origami y quien orientó a los estudiantes, sobre la forma de obtener con dobleces, diversas figuras a partir de una hoja de papel. Se hicieron cajas, barcos, camisas, sombreros, cubos etc., además se indicó la manera de hacer dobleces perpendiculares a otros, superponiendo el doblez original sobre si mismo, y cómo obtener el punto medio de un doblez o del borde de una hoja.

La observación directa en el desarrollo de la actividad inicial permitió establecer que en algunos estudiantes, la habilidad manual no esta muy bien desarrollada, les cuesta trabajo hacer dobleces bien definidos y por los puntos indicados y necesitan que las instrucciones a seguir se repitan varias veces, por eso fue necesario hacer algunos ejercicios de doblado y cortado de papel para mejorar dichas habilidades; otros estudiantes en cambio, muestran mucha habilidad manual, hacen muy bien los dobleces, sus figuras son muy similares a la original y captan rápidamente las instrucciones dadas.

En las indicaciones de cómo hacer los dobleces y en la observación de las figuras obtenidas con dichos dobleces, siempre se tuvo en cuenta dos supuestos importantes: primero, un doblez (bien hecho) representa un segmento de línea recta; y segundo, los segmentos, ángulos o figuras que

coinciden al superponerse, son congruentes. Todas estas actividades iniciales sirvieron de preparación y a la vez de motivación; generaron expectativas entre los estudiantes y propiciaron un buen ambiente para comenzar el estudio de los cuadriláteros mediante actividades basadas en el doblado de papel.

En todas las actividades el estudiante trabajaba inicialmente en forma individual, siguiendo las instrucciones obtenía las figuras, hacía las observaciones y después por parejas, o por tríos, cada quien exponía sus opiniones, veía y escuchaba a sus compañeros y todos hacían comentarios y comparaciones sobre lo observado. Seguidamente se daba la puesta en común o socialización general con todo el grupo, en donde cada equipo podía añadir observaciones o discutir sobre otras en las que no estuvieran de acuerdo, pero los argumentos debían estar basados en las observaciones de las figuras construidas. Finalmente entre todos y con la orientación de la maestra, se sacaban las conclusiones.

En general, las actividades de construcción de figuras (actividades 1, 4, 5, 7, 12, 14, 16, 18 y 20) se desarrollaron con facilidad, la intervención de la maestra fue mínima, con orientaciones entre ellos mismos, siguiendo las instrucciones indicadas en cada actividad y mediante el ensayo y error obtenían cada figura esperada. Se notó que, en la medida en que se avanzaba en las actividades, el ensayo y error disminuía, los dobleces eran más precisos y las construcciones les resultaban más fáciles cada vez; luego repetían estas acciones para obtener figuras de diversos tamaños.

Referente a las actividades de identificación de los elementos de cada figura (actividades 2, 8 y 13), se puede decir que no se presentaron mayores inconvenientes en su desarrollo, en su gran mayoría, los estudiantes

identificaron con facilidad cada uno de los elementos de la figura estudiada. Se considera importante resaltar que el desconocimiento de terminología matemática de los estudiantes, llevó a que inicialmente, nombraran los elementos de las figuras con nombres de su invención, pero esto fue disminuyendo , con la participación de la maestra, y a medida que avanzaban por los niveles. Fue una evidencia de una de las características de éstos, la relación entre el lenguaje y los niveles.

Con respecto a las actividades de comparaciones entre figuras o comprobación de sus propiedades (actividades 3, 6, 9, 10, 11, 15, 17, y 19), se desarrollaron en forma más lenta, una actividad por sesión, se les dedicó más tiempo porque se consideró que para poder obtener las propiedades se requiere manipular cada una de las figuras construidas, hacer muchas observaciones, intercambiar opiniones con sus compañeros etc. Y esto implica un tiempo mayor que el de las demás actividades. Gracias a la flexibilidad que el papel tiene, se dobló, se torció, se hicieron coincidir lados y ángulos a través de la superposición y todo esto facilitó al estudiante la observación de las propiedades de cada figura y les permitió dar respuestas a preguntas como: ¿Cómo son sus lados?, ¿son iguales? ¿son paralelos?; ¿cómo son su ángulos? ¿son congruentes?, ¿son rectos?, ¿son oblicuos?; ¿cómo son sus diagonales?, ¿son iguales?, ¿en qué punto se cortan?. De esta manera durante la fase 3 se dieron muchos aportes que generaron discusión e inquietudes entre los estudiantes; la participación de la maestra fue un apoyo importante a la hora de concretar las conclusiones generales y de establecer las propiedades de cada figura.

3.4 ACTIVIDADES Y ANÁLISIS DE LAS MISMAS

Las actividades están organizadas por grupos, para ser desarrolladas por sesiones, cada periodo de clase era una sesión, en algunas oportunidades se desarrollaron varias actividades por sesión.

Las actividades fueron ordenadas en la secuencia didáctica por grupos de figuras, al final de cada grupo de actividades se hace el análisis respectivo.

3.4.1 Figura: Rectángulo.

Actividad 1: *Construcción de un rectángulo.*

Se pretende que el estudiante identifique el rectángulo a través de la orientación dirigida y comparta sus experiencias con sus compañeros.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES:

1. Tomen un trozo cualquiera de papel, puede ser irregular.
2. Dóblenlo por un lado y recorten por ese doblez. Se forma el primer lado.
3. Dóblenle otro lado de tal forma que quede haciendo ángulo recto con el primero (doblez perpendicular), quedando el segundo lado.
4. Para formar el tercer lado, Por uno de los lados existentes se hace un doblez perpendicularmente.
5. El cuarto lado se forma con un doblez similar al anterior.

En la figura 19 se muestran los dobleces en el papel y como queda el rectángulo al hacer los dobleces.

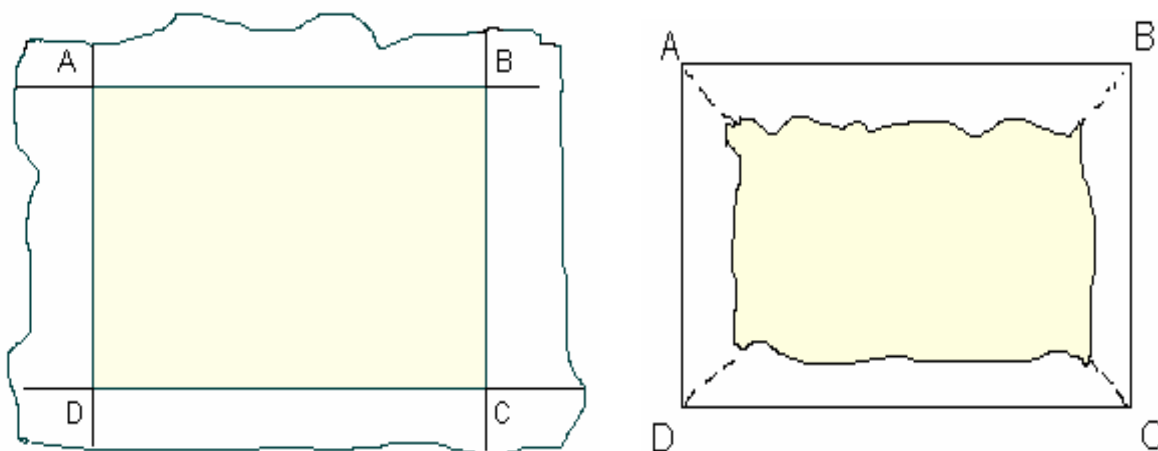


Figura 19. obtención del rectángulo mediante dobleces de papel

ESQUEMA DE TRABAJO

Conformar equipos de tres integrantes. Cada integrante construirá un rectángulo, siguiendo las indicaciones. En equipo compararán las figuras resultantes, observando ¿cómo son los ángulos? y ¿cómo son los lados.?

En el cuaderno anotarán las respuestas.

Actividad 2: Nombrar e Identificar los elementos de un rectángulo

Se pretende generalizar la idea de identificación de vértices, diagonales, y demás elementos.

Nivel 2. Fase 1

INSTRUCCIONES

1. Tomen un rectángulo e identifiquen sus cuatro esquinas. En cada esquina se encuentran dos lados que se tocan en ese mismo punto.
2. Denle un nombre a ese punto.
3. Ahora escojan una de las esquina del rectángulo y a este punto pónganle el nombre de "A".
4. Enseguida y siguiendo el sentido de las manecillas del reloj localicen el siguiente punto y llámenlo "B".
5. Continúen con la misma secuencia y llamen "C" y "D" a los siguientes puntos.
6. Doblen el rectángulo a través de dos esquinas opuestas (no importa si las otras dos esquinas no coinciden).
7. Pónganle nombre al dobléz que resulta (diagonal).
8. Con el mismo procedimiento del paso 6, pero con las otras esquinas, encuentren la otra diagonal
9. Nombren el punto donde se cruzan las diagonales.
10. Señalen en el rectángulo otros elementos y pónganle nombre

ESQUEMA DE TRABAJO

Sentados alrededor del salón identificarán de manera individual, los vértices, de rectángulos de diversas dimensiones. y realizarán de forma individual los dobleces para después, por parejas, intercambiar opiniones acerca de los dobleces y los nombres otorgados a los elementos.

Después de que los estudiantes hayan nombrado cada uno de los elementos, se les darán a conocer el nombre aceptado comúnmente.

En la figura 20 se resaltan los elementos de un rectángulo.

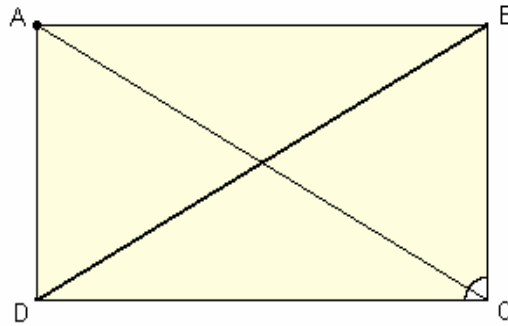


Figura 20. Elementos de un rectángulo

Actividad 3: Comprobación de las propiedades del rectángulo.

Se pretende que el estudiante alcance un nivel de pensamiento que le permita realizar comprobaciones iniciales y no formales.

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

Dado un rectángulo, por superposición, gracias a la flexibilidad del papel comprueben:

- a) si los cuatro ángulos son iguales.
- b) si los cuatro ángulos son rectos
- c) si los cuatro lados a veces no son iguales.
- d) si las parejas de lados opuestos son iguales entre sí.

ESQUEMA DE TRABAJO

En equipos de tres estudiantes tratarán de realizar la comprobación con rectángulos de diferentes tamaños. Intercambiarán opiniones en los mismos

equipos. Los resultados y experiencias se socializarán con todo el grupo. y al final tomarán apuntes de las conclusiones obtenidas.

3.4.1.1 Análisis de las actividades para el Rectángulo

La primera actividad, construcción de un rectángulo, se inició a partir de un trozo de papel en donde no importaba la forma ni el tamaño; los estudiantes siguieron las instrucciones dadas, hicieron los dobleces pero al observar la figura que obtuvieron, Lady comentó *“este rectángulo esta torcido”*. Entonces se les dijo *“la figura que obtuvieron, efectivamente es un cuadrilátero pero no es rectángulo, posiblemente no hicieron los dobleces correctamente”*. Fue necesario repetir esta actividad, pues en la primera ocasión, en la mayoría de los estudiantes se presentó confusión a la hora de hacer los dobleces. entonces se enfatizó que los dobleces debían ser perpendiculares, En el segundo intento si obtuvieron la figura esperada.

Cuando los estudiantes hicieron los dobleces correctos, obtuvieron el rectángulo, Johana, al observar la figura comentó *“si hago los dobleces perpendiculares los ángulos que se forman son rectos, ¿verdad señor?”* y Ernesto agregó *“entonces, si el rectángulo tiene lados perpendiculares, también tiene lados paralelos, los lados opuestos son paralelos”* se les dijo entonces que un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos se llama paralelogramo. La deducción que hizo Ernesto, muestra un nivel 3 de razonamiento.

En cierta forma el error sirvió para que ellos se dieran cuenta que en un rectángulo, los lados contiguos deben ser perpendiculares, esto implica que los lados opuestos sean paralelos; en ese momento vieron que un rectángulo

es un paralelogramo que tiene los ángulos rectos. Luego construyeron rectángulos de distintos tamaños.

La actividad dos se desarrolló en una sola sesión. Mediante la manipulación del rectángulo, fácilmente bordearon sus lados y señalaron los puntos de unión de los lados, a los que inicialmente le llamaron “esquinas” y seguidamente hicieron los dobleces a través de dos esquinas opuestas, casi todos identificaron las líneas que determinaron estos dobleces, inicialmente les llamaron “transversales”. Al preguntar *¿qué elementos tiene un rectángulo?* Señalaron los lados y los ángulos, Ernesto dijo *“tiene cuatro puntos en donde se encuentran dos lados”* y Lady dijo *“¡ah! Esas son las esquinas”* ese momento se aprovechó para indicarles que esos puntos se llaman vértices. Y que las líneas que ellos llamaron transversales se llaman diagonales.

La actividad 4, comprobación de las propiedades del rectángulo, se inició con la construcción de un rectángulo de cualquier tamaño, los estudiantes siguieron las indicaciones de superponer los lados y los ángulos y se les sugirió que fueran comentando lo que observaran, Lady dijo *“este rectángulo tiene dos lados largos y dos lados cortos”* Ernesto dijo *“cada dos lados son iguales, miren que coinciden totalmente”*. Mostrando el rectángulo doblado donde hacia coincidir los lados opuestos. Hubo diversos comentarios sobre el tamaño de los lados del rectángulo y al final concluyeron que los lados son iguales por parejas. Luego se les indicó que doblaran el rectángulo de manera que coincidieran los ángulos, observaban y Johana dijo *“todos los ángulos son iguales”*. Al preguntarles *¿Qué clase de ángulos tiene un rectángulo?* Ernesto tomó una escuadra y sobrepuso el rectángulo sobre el ángulo recto, mostrándole a sus compañeros dijo *“estos ángulos son rectos, miren que coinciden exactamente con el ángulo recto de la escuadra”*. Hubo

discusiones sobre la medida de los ángulos y al final concluyeron que un rectángulo tiene cuatro ángulos iguales y Lady dijo *“¡ah sí!, acuérdense cuando se construyó el rectángulo ya se había dicho que los ángulos son rectos”*. recordaron que en la primera actividad, ya se había mencionado que un rectángulo tienen ángulos rectos.

Entre todos dieron respuesta a las preguntas planteadas en las instrucciones, un estudiante escribió en el tablero: *“un rectángulo tiene cuatro ángulos iguales y son rectos y los lados son iguales por parejas”*. Luego se les dibujó en el tablero varios rectángulos en diversas posiciones, cuando se les preguntó *“¿Todas las figuras son rectángulos?”* Lady, al igual que otros estudiantes, dijo *“No, hay dos que no son rectángulos, los ángulos no están rectos”* señalando las figuras en las que la base no era un segmento horizontal, Johana, poniendo la escuadra en uno de los ángulos le contesto *“Como que no, miren que sí son rectos”*, en ese momento Ernesto, les dijo a sus compañeros *“Es que no importa en que posición está la figura, lo que hay que mirar es que tenga los cuatro ángulos rectos”*. Todo esto permitió que los estudiantes pudieran visualizar las propiedades de un rectángulo: sus lados opuestos son iguales entre sí y sus cuatro ángulos interiores son rectos.

Se observó que los estudiantes identifican muy bien los rectángulos cuando están en posición horizontal o vertical, pero al rotar la figura presentan alguna dificultad en su identificación, esta dificultad ya se había detectado en la prueba diagnóstica.

3.4.2 Figura: Rombo.

Actividad 4: Construcción de un rombo. Método I.

Se pretende que el estudiante identifique la forma de la figura (el rombo) utilizando la orientación dirigida, pasando luego al intercambio de experiencias.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un rectángulo $AB'CD'$ y mediante un dobléz, obtengan la diagonal AC .
2. Sobrepongan A y C para formar un dobléz perpendicular a la diagonal en su punto medio (el punto O).
3. El punto B se forma con la intersección del dobléz del paso anterior con el lado AB' .
4. El punto D se forma con la intersección del dobléz del paso 2 con el lado CD' .
5. Hagan un dobléz que una los puntos A y D y corten el triángulo que se forma (triángulo ADD').
6. Hagan un dobléz que una los puntos B y C y corten el triángulo que se forma (triángulo $BB'C$).
7. El cuadrilátero $ABCD$ que se forma, es un rombo (Figura 21)

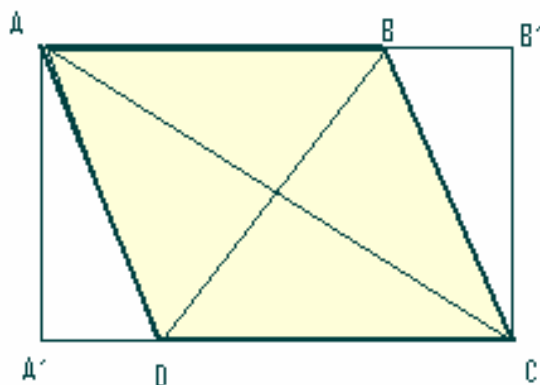


Figura 21. Obtención de un rombo mediante dobleces

ESQUEMA DE TRABAJO

Cada estudiante de manera individual realizará los dobleces, después de mirar la figura que obtuvo, hará una identificación de los elementos del rombo y luego, por equipos, los mencionará junto con algunas características que observen. Contestarán las siguientes preguntas: ¿Cómo son los lados del rombo? ¿Cómo son sus ángulos? ¿Cómo son sus diagonales? ¿son iguales? ¿Qué ángulo forman las diagonales?

Se sugiere que en estas actividades se utilicen rectángulos de diferentes dimensiones, incluyendo cuadrados o casi cuadrados

Actividad 5: Construcción de un rombo. Método II.

Se pretende que el estudiante identifique la forma del rombo utilizando la orientación dirigida, pasando posteriormente al intercambio de experiencias.

Nivel 2. Fase 4

INSTRUCCIONES

1. Dado un rectángulo $A' B' C' D'$, hagan dobleces en la mitad superponiendo el lado $A' D'$ sobre $B' C'$ y el lado $A' B'$ sobre $C' D'$ para obtener el punto central O y los puntos A , B , C y D que son los puntos medios de los lados.
2. Hagan un doblez que vaya de A a B , otro que vaya de B a C , otro que vaya de C a D y otro de D a A .
3. Eliminen los triángulos que se forman en las esquinas del rectángulo.
4. La figura resultante es un rombo. (Figura 22)

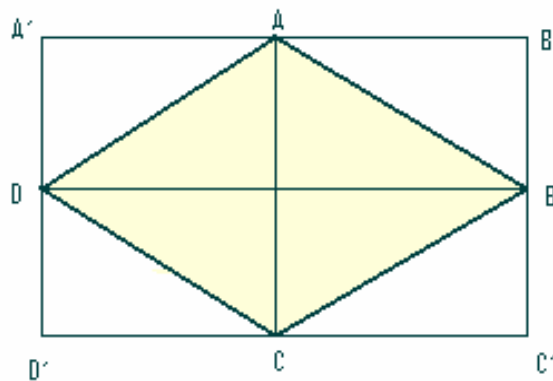


Figura 22. Construcción de un rombo

ESQUEMA DE TRABAJO

Los estudiantes se dispondrán en círculo para realizar de manera individual los dobleces. Luego, por equipos, identificarán las partes del rombo y las mencionarán junto con algunas características que se observen.

Se sugiere que en estas dos actividades se utilicen rectángulos de distintas dimensiones, incluyendo cuadrados o casi cuadrados.

Actividad 6: *Comprobación de las propiedades del rombo.*

Se pretende que el estudiante determine las características que no varían en los rombos, para lo cual se necesitarán rombos de distintas dimensiones y el intercambio de experiencias con sus compañeros

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

1. Construyan un rombo y por superposición comprueben:

- a) si los cuatro lados son iguales.
- b) si los ángulos son congruentes entre sí.
- c) si el punto O es el punto medio de las diagonales.
- d) si los ángulos opuestos son iguales.
- e) si es un paralelogramo.

ESQUEMA DE TRABAJO

El grupo se organizará por parejas. Pero primero en forma individual cada estudiante hará la construcción de los rombos y luego en equipo se realizarán las comprobaciones. Se intercambiarán experiencias y observaciones. Harán una lista de propiedades que tiene el rombo, la consignarán en el cuaderno y luego harán comparaciones entre rectángulos y rombos establecerán diferencias y semejanzas.

3.4.2.1 Análisis de las actividades para el Rombo

Las actividades 4, y 5 se desarrollaron en una misma sesión, como ya sabían construir rectángulos, el trabajo se facilitó, siguiendo las instrucciones obtuvieron el rombo, construyeron rombos por los dos métodos indicados, observaban las figuras y se escuchó el comentario de Lady: *“esta figura se parece al rectángulo”* al preguntarles que diferencia veían con el rectángulo Johana respondieron *“Todos los ángulos no son iguales”*, Ernesto, señalando los ángulos dijo *“tiene dos ángulos agudos y dos obtusos”*, al preguntarles *¿Cómo son los lados del rombo?* Intentaron hacer coincidir dos de los lados, al no poder hacerlo, se les indicó que doblaran el rombo por una de sus diagonales, *¿Qué observan?* Ernesto respondió *“cada dos lados coinciden, entonces son iguales”*, *“lo mismo que en el rectángulo”* dijo Lady. Doblaron nuevamente el rombo y se dieron cuenta que los cuatro *lados coincidían*, Ernesto preguntó *¿Señor, un rombo tiene los cuatro lados iguales?* Y varios compañeros bordeando los lados que coincidían al tener el rombo doblado en cuatro, respondieron simultáneamente *“sí, miren”*., mostrando como coincidían sus lados al superponerse. Fueron intercambiando ideas sobre lo observado y establecieron las diferencias y parecidos entre el rombo y el rectángulo, anotaron en sus apuntes lo observado..

Para la actividad 6, comprobación de las propiedades del rombo se siguió un proceso similar al del rectángulo, compararon los lados y los ángulos llegando a la conclusión que los cuatro lados deben ser iguales y que los ángulos no son rectos. Después de todas las observaciones Ernesto dijo *“entonces un rombo es un paralelogramo que tiene los lados iguales”* esto generó discusión entre los compañeros, pero sirvió para que entre todos

establecieran las propiedades que tiene un rombo: sus ángulos internos opuestos son iguales entre sí y sus cuatro lados son iguales.

3.4.3 Figura: Cuadrado.

Actividad 7: Construcción de un cuadrado.

Se pretende que el estudiante comience a construir cuadrados. Al igual que en otras actividades, se sugiere utilizar rectángulos de diversas dimensiones.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un rectángulo cualquiera y dóblenlo de tal manera que un lado corto coincida con un lado largo. El resultado es una figura hecha por un triángulo y un rectángulo más pequeño.
2. Doblen por la línea que une al triángulo con el rectángulo pequeño y corten por ahí utilizando las tijeras.
3. Al quitar el rectángulo pequeño queda únicamente un triángulo doble.
4. Desdóblenlo y se obtiene un cuadrado.

ESQUEMA DE TRABAJO

De manera individual se llevarán a cabo los dobleces y los cortes. Mostrarán a sus compañeros las figuras obtenidas, repetir estos dobleces con rectángulos de diferentes tamaños.

En la figura 23 se ilustra la construcción de un cuadrado

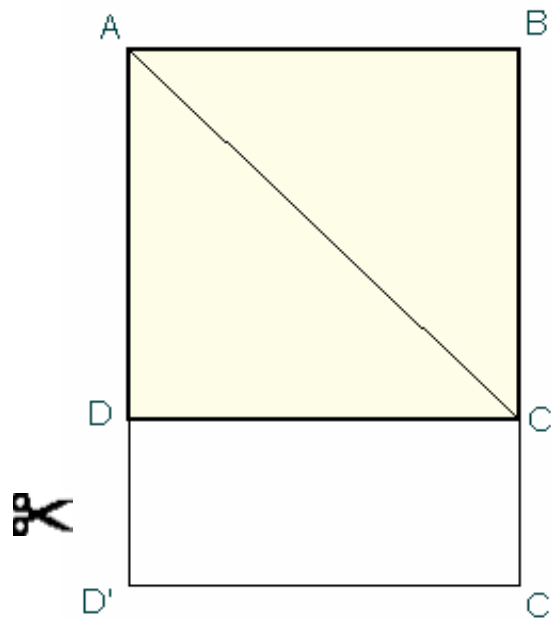


Figura 23. Construcción de un cuadrado

Actividad 8: Determinación los elementos de un cuadrado.

Se pretende que el estudiante determine y nombre cuáles son los elementos que siempre están presentes en el cuadrado aunque varíe su tamaño.

Nivel 2. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un cuadrado y hagan un doblez que vaya de esquina a esquina.
Cómo llamarían a este doblez?
- 2 Hagan otro doblez que el otro par de esquinas.

3. Observen el punto donde se cruzan los dobleces. ¿Cómo llamarían a ese punto?
4. Ese punto, ¿Cómo divide a cada uno de los dobleces?
5. ¿Qué ángulo forman los dobleces entre sí?
6. ¿Cuáles son los elementos de un cuadrado?

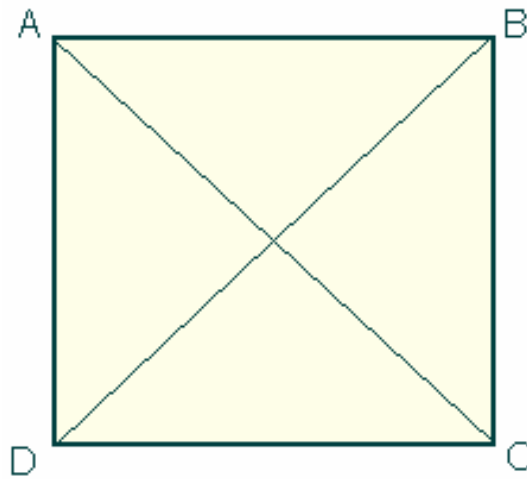


Figura 24. Elementos de un cuadrado

ESQUEMA DE TRABAJO

Los estudiantes harán los dobleces y las comprobaciones de manera individual y luego organizados en equipos de tres integrantes, compararán los resultados de cada uno. Posteriormente, harán la socialización con el grupo. Sacarán las conclusiones y las anotarán en su cuaderno de apuntes.

Actividad 9: *Comprobación de que el cuadrado es un caso particular de los rectángulos.*

Se pretende que el estudiante relacione las características de los rectángulos que posee el cuadrado para finalmente concluir que el cuadrado es un caso particular de los rectángulos.

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

Tomen un cuadrado y apliquen las propiedades del rectángulo. Utilicen la observación para comprobar que:

- a) los cuatro ángulos son iguales.
- b) los lados opuestos son iguales entre sí
- c) las diagonales se cortan entre sí en sus puntos medios.

ESQUEMA DE TRABAJO

Se formarán equipos de tres integrantes para intentar hacer la demostración en equipo. Se compararán los resultados, las observaciones y las conclusiones a nivel grupal.

Nuevamente, se sugiere utilizar cuadrados de diversas dimensiones para evitar creer que el tamaño influye en este tipo de relaciones.

Actividad 10: *Comprobación de que el cuadrado es un caso particular de los rombos.*

Se pretende que el estudiante relacione las características de los rombos con las que posee el cuadrado para establecer una relación entre ellos y llegar a concluir que éste es un caso particular de los rombos.

Nuevamente es importante utilizar cuadrados de distintas dimensiones

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

Tomen un cuadrado y apliquen las propiedades del rombo. Comprobar que

- a) los cuatro lados son iguales.
- b) las diagonales son perpendiculares entre sí.
- c) los ángulos opuestos son iguales. (Actividad no. 6.)

ESQUEMA DE TRABAJO

Se formarán equipos de tres integrantes para intentar hacer la comprobación. Se compararán los resultados, las observaciones y las conclusiones a nivel grupal.

Actividad 11: *Comprobación de las características generales de los cuadrados.*

Se pretende que el alumno generalice las características inmutables de los cuadrados y lo considere como rectángulo y rombo, simultáneamente.

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

Tomen un cuadrado y, por superposición, comprueben las propiedades del cuadrado

- a) si los cuatro lados son iguales.
- b) si los cuatro ángulos son iguales.
- c) si sus diagonales son perpendiculares entre sí y se cortan en sus puntos medios.

ESQUEMA DE TRABAJO

Se formarán equipos de tres integrantes. Inicialmente se harán los dobleces de manera individual luego se compararán los resultados por equipo, se compararán los resultados, las observaciones y las conclusiones a nivel grupal, estableciendo relaciones entre esta actividad y las dos anteriores.

3.4.3.1 Análisis de las actividades para el cuadrado

Las actividades 7 y 8 construcción de un cuadrado y determinación de sus elementos, se desarrollaron en la misma sesión. Para los estudiantes fue sencillo obtener un cuadrado a partir de un rectángulo, sólo con las instrucciones, no fue necesario darles orientaciones extras. Al hacer la construcción observaron que los lados del cuadrado son iguales. Hicieron cuadrados de varios tamaños y comentaban que el cuadrado se parece al rectángulo y también se parece al rombo, bordeando lados y ángulos

establecieron los elementos, Lady dijo *“un cuadrado tiene los mismos elementos que el rectángulo”*.

En la siguiente sesión se desarrollaron las actividades 9 y 10, se les indicó que observaran lados y ángulos e hicieran comparaciones entre las figuras vistas, después de una larga observación Ernesto dijo *“el cuadrado tiene los cuatro ángulos rectos lo mismo que el rectángulo”* y Johana complementó *“el cuadrado tiene los cuatro lados iguales, o sea que son iguales por parejas, como en el rectángulo”*, surgió entonces la pregunta, *¿un cuadrado es un rectángulo?*. Todos se quedaron pensativos hasta que tímidamente Ernesto dijo *“Si, cuando un rectángulo tienen los lados iguales es un cuadrado”* y entre todos, mediante la observación y manipulación de las figuras construidas, comprobaron que el cuadrado cumple las propiedades del rectángulo. También compararon el cuadrado con el rombo, observando las dos figuras, Ernesto comentó *“los cuadrados y los rombos tienen los lados iguales, pero los ángulos no son iguales”*. Al preguntar *¿Qué pasaría si el rombo tuviera los ángulos rectos?*, se escuchó un coro que respondió *“sería un cuadrado”*. Seguidamente, Lady preguntó *¿entonces un rombo puede ser un cuadrado?*. Quedó la pregunta en el aire, se les dio un tiempo para que observaran simultáneamente un rombo y un cuadrado, transcurrido un buen rato, Ernesto respondió *“sí, cuando un rombo tiene los ángulos rectos entonces es un cuadrado”* fue entonces cuando Johana planteó la idea de hacer un cuadrado con cuatro paletas unidas con chinchas, de manera que quedaba una figura flexible, en la que tan sólo con presionar uno de sus lados, sus ángulos rectos se volvían oblicuos, así palparon en forma concreta que un cuadrado es un rombo que tiene los ángulos rectos, es decir que cuando un rombo tiene los ángulos rectos es un cuadrado.

Esta idea, de la figura flexible, se aprovechó para hacer un rectángulo, allí también, al presionar uno de sus lados, los ángulos rectos se volvían oblicuos, al observar esto, Johana comentó *“si la figura no tiene los ángulos rectos entonces no es rectángulo”* Lady preguntó, *¿entonces qué figura es, será un rombo?*. Todos se mostraron pensativos, hasta que Ernesto dijo *“No es un rombo, porque los lados no son iguales”* En ese momento se les informó que esa figura se llamaba romboide. Luego de hacer movimientos con las dos figuras flexibles e intercambiar ideas al respecto, acordaron que si un rombo tiene los ángulos rectos, es un cuadrado y un romboide que tenga los ángulos rectos es un rectángulo.

Todos los estudiantes, mediante la observación y manipulación de las figuras, comprobaron que los cuadrados cumplen las propiedades de los rombos y también de los rectángulos. Después de varios comentarios, anotaron en sus apuntes que el cuadrado es un rectángulo y también es un rombo.

3.4.4 Figura: trapecio

Actividad 12: Construcción de un trapecio.

Se pretende que el estudiante logre una visualización general de los trapecios.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un rectángulo y elijan un lado al que llamaremos "base".

2. En el lado opuesto a la "base" escojan un punto.
3. Unan los extremos de la "base" con el punto que escogieron utilizando dos dobleces.
4. Hagan un doblez que sea paralelo a la "base".
7. En la parte inferior, pegada a la "base", se forma una figura de cuatro lados a la que llamaremos trapecio.

En la figura 25, el polígono ABCD es un trapecio.

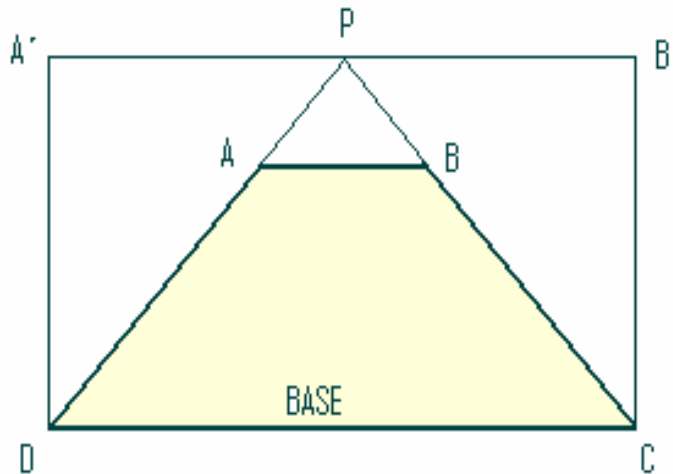


Figura 25. Construcción de un trapecio

ESQUEMA DE TRABAJO

El grupo se organiza en equipos de 2 ó 3 integrantes. Los dobleces y las construcciones se realizan de manera individual. Se comparan los resultados en los equipos.

Actividad 13: *elementos de los trapecios*

El estudiante observará cómo son los ángulos, cómo son los lados y determinará qué elementos del trapecio son invariables, sin considerar cuestiones de tipo cuantitativo.

Nivel 2. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un trapecio y dóblenlo por dos esquinas opuestas. El doblez que resulta es una diagonal.
2. La otra diagonal se obtiene de manera semejante, pero usando el otro par de esquinas.
3. El punto donde se cruzan las diagonales, ¿cómo se llamaría?
4. El lado que llamamos inicialmente "base" se le llama "base mayor".
5. Al lado opuesto a la "base mayor" se le llama "base menor".
6. Las dos "bases", ¿son paralelas entre sí?

ESQUEMA DE TRABAJO

El grupo se organiza por equipos para intercambiar experiencias después de realizar los dobleces y las observaciones en forma individual.

Actividad 14: *Construcción de un trapecio escaleno.*

El estudiante podrá visualizar la forma general de un trapecio escaleno y, conociendo los triángulos escalenos, podrá comparar su forma con éstos últimos.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

Tomen un rectángulo y hagan el mismo procedimiento que se hizo para hacer el trapecio (actividad 12), con la pequeña diferencia de que el punto escogido en el lado opuesto a la "base" NO sea el punto medio.

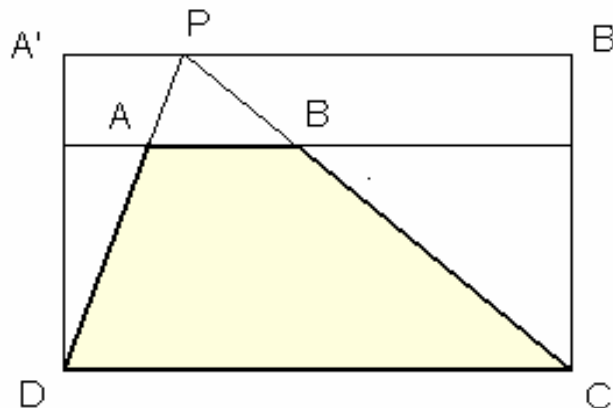


Figura 26. Construcción de un trapecio escaleno

ESQUEMA DE TRABAJO

La construcción la hacen individualmente y al final, los estudiantes se organizan por equipos y comparan las figuras que obtuvieron. Observan ¿cómo son sus lados?. ¿cómo son sus ángulos?

Actividad 15: *Propiedades de los trapecios escalenos.*

Se pretende que el estudiante generalice las características de los trapecios escalenos

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

1. Tomen un trapecio escaleno y comprueben que:
 - a) las dos bases son paralelas entre sí.
 - b) los dos lados que no son bases NO son iguales.
 - c) las diagonales tampoco son iguales.
2. Si saben acerca del triángulo escaleno, establecer la relación con éstos, por lo del nombre.

ESQUEMA DE TRABAJO

En equipos de tres integrantes llevar a cabo la actividad. Comentar dentro del equipo los resultados y posteriormente comentarlos a nivel grupal.

Los estudiantes reciben la orientación de cómo mediante dobleces pueden comprobar si dos lados son paralelos.

Actividad 16: Construcción de un trapecio isósceles.

El estudiante podrá visualizar la forma general de los trapecios isósceles y, sólo si conoce los triángulos isósceles, podrá hacer comparaciones de la forma y del nombre entre aquellos con éstos.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un rectángulo y hagan el mismo proceso que se siguió para el trapecio (actividad 12), pero ahora el punto elegido debe ser el PUNTO MEDIO del lado opuesto a la base.

ESQUEMA DE TRABAJO

Organizar equipos y doblar individualmente. Comparar los dobleces en los equipos y plantear la cuestión del nombre. Comentar sobre las diferencias y parecidos que observan entre la figura obtenida y la figura de la actividad anterior. ¿Se parecen? ¿en que se parecen?

Actividad 17: *Propiedades del trapecio isósceles.*

Se pretende que el estudiante determine las características y propiedades generales de los trapecios isósceles, sin importar criterios cuantitativos.

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

1. Tomen un trapecio isósceles y haciendo dobleces y superposiciones comprueben que:
 - a) las dos bases son paralelas. Para eso, hagan un doblez de tal forma que el borde de una de las bases coincida totalmente, y verificar que el borde de la otra base también coincide.
 - b) los lados que no son bases son iguales.

- c) las diagonales son iguales.
 - d) los ángulos en los extremos de la base mayor son iguales.
 - e) los ángulos en los extremos de la base menor son iguales.
2. Si saben acerca del triángulo isósceles establecer la relación con éste por lo del nombre.

ESQUEMA DE TRABAJO

El grupo organizado en equipos de tres integrantes, realizarán las comprobaciones y comentarán los resultados. Posteriormente socializarán a nivel grupal, las observaciones y los resultados. Se harán discusiones sobre los comentarios y entre todos se hará una lista de las propiedades que cumple el trapecio isósceles, uno de los estudiantes la escribirá en el tablero y cada uno hará la respectiva anotación en su cuaderno.

Actividad 18: Construcción de un trapecio rectángulo.

El estudiante podrá crear y visualizar los trapecios rectángulos a partir de un rectángulo, formándose una idea general de los mismos.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

Tomen un rectángulo y realicen el mismo procedimiento que se llevó a cabo para construir el trapecio (actividad 12) pero el punto escogido debe ser uno de los dos extremos del lado opuesto a la "base".

El cuadrilátero ABCD que se obtiene, es un trapecio rectángulo y se ilustra en la figura 27.

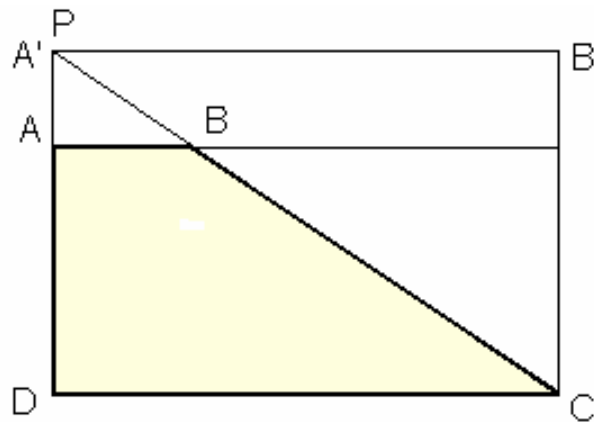


Figura 27. Construcción de un trapecio rectángulo

ESQUEMA DE TRABAJO

Organizar el grupo en equipos de tres integrantes. Realizar la construcción de manera individual. Hacer observaciones de la figura obtenida, ¿cómo son sus lados?, ¿cómo son sus ángulos?, ¿qué parecido tiene con la figura anterior?, ¿qué diferencias hay?, luego comentar los resultados en los equipos. Y llegar a conclusiones concretas.

Actividad 19: *Propiedades del trapecio rectángulo.*

Se pretende que el estudiante determine las propiedades y características generales de los trapecios rectángulos y que establezca, sólo si conocen los triángulos rectángulos, una analogía con éstos a través del nombre. Finalmente el estudiante establecerá una relación de esta figura con las

propiedades de los trapecios escalenos para concluir que los trapecios rectángulos son un subconjunto de los trapecios escalenos

Nivel 3. Fase 4

INSTRUCCIONES

1. Tomen un trapecio rectángulo y comprueben:
 - a) si las dos bases son paralelas.
 - b) si los lados que no son bases NO son iguales.
 - c) si los ángulos en los extremos de uno de los dos lados que no son bases son rectos.
2. Con lo que saben del triángulo rectángulo establecer la posible relación a través del nombre.
3. Determinen si el trapecio rectángulo es trapecio isósceles o trapecio escaleno.

ESQUEMA DE TRABAJO

El grupo se organiza en equipos de tres. Realizar los dobleces y las observaciones inicialmente de manera individual. Luego a nivel grupal, se comparan los resultados y se establecen las conclusiones.

3.4.4.1 Análisis de las actividades para el trapecio

Actividades del trapecio

En general, las actividades 12, y 13 que se refieren a la construcción de trapecios y sus elementos, se desarrollaron con facilidad, ya los estudiantes

tenían más precisión en sus dobleces y más habilidad en la construcción de rectángulos. Para la construcción de un trapecio, no fue necesario dar orientaciones extras, ellos solos, siguiendo las instrucciones de la actividad, pudieron construirlo, al obtener la figura, de inmediato notaron que no se parecía mucho a las figuras con las que ya habían trabajado, Lady comentó *“esta figura sólo tiene dos lados opuestos que sean paralelos”* se les contestó *“eso es precisamente lo que identifica los trapecios, que tienen sólo un par de lados paralelos”*. *“¿y esos lados paralelos son las bases?”* Preguntó Johana, *“si, al par de lados paralelos se le llaman bases”* se les contestó. Después, en el tablero se dibujaron diversos cuadriláteros entre ellos, varios trapecios en diferente posición, para que señalarán los trapecios. Curiosamente, sólo señalaron aquellos trapecios cuyas bases eran horizontales o verticales, cuando el trapecio estaba rotado no lo identificaron como tal. Nuevamente se evidencia la dificultad de identificar una figura cuando esta rotada.

Luego, siguiendo indicaciones dadas, señalaron sus elementos, mencionando el respectivo nombre. Lady volvió a comentar *“los elementos son los mismos del rectángulo”* “si” agregó Ernesto *“son lados, vértices ángulos y diagonales”* al tiempo que iba señalando cada uno de ellos. Luego se les indicó que dibujaran un trapecio en el cuaderno y señalarán cada uno de sus elementos.

En otra sesión se desarrollaron las actividades 14 y 15, con habilidad construyeron el trapecio indicado, un trapecio escaleno, se les sugirió que observaran cómo son sus lados y cómo son sus ángulos, luego de hacer dobleces tratando de hacer coincidir los lados y superponiendo los ángulos, se escucharon comentarios como los de Lady: *“uy, esta figura no tiene ningún ángulo igual”* *“tampoco los lados son iguales”* agregó Johana. Tras

intercambio de ideas llegaron a la conclusión que un trapecio escaleno tiene los lados y los ángulos diferentes. *“lo mismo que el triángulo escaleno”* comentó Ernesto.

En la siguiente sesión se desarrollaron las actividades 16 y 17. Siguiendo las instrucciones construyeron trapecios isósceles. Al pedirles que describieran las características que observaban en la figura, mencionaron que tenía cuatro lados, dos de ellos eran paralelos, pero no dijeron que tenía dos lados iguales, entonces se les sugirió que doblarán el trapecio, tratando de hacer coincidir los lados no paralelos, fue cuando Ernesto dijo *“los lados coinciden totalmente, o sea que los dos lados son iguales”*. Johana agregó *“¡ah! por eso es que se llama isósceles, por tener dos lados iguales, así como el triángulo”*. En vista de que no comentaban nada de los ángulos, se les preguntó ¿cómo son los ángulos de un trapecio isósceles?. Haciendo coincidir un ángulo con otro se dieron cuenta que tenía dos ángulos congruentes. Entonces se les pidió que anotaran en el cuaderno las propiedades que tiene un trapecio isósceles.

Las actividades 18 y 19 se desarrollaron en diferente sesión, la construcción del trapecio rectángulo fue bastante sencilla, la realizaron con gran habilidad, al pedirles que observaran la figura obtenida y describieran sus características, Lady comentó *“parece un triángulo pegado a un rectángulo”* “*tiene dos ángulos rectos”* dijo Ernesto. Intercambiaron opiniones concluyeron que el trapecio rectángulo se llama así por tener ángulos rectos. Luego se les sugirió que observaran como son los lados. Uno de los estudiantes dijo *“mi trapecio tiene dos lados iguales”* Se les preguntó *“¿Cómo se llaman los trapecios que tienen dos lados iguales?”* En coro respondieron *“trapecio isósceles”* Johana preguntó *“¿entonces un trapecio puede ser isósceles y rectángulo a la vez?”* . Antes que se dijera algo,

Ernesto respondió “*Si, como los triángulos*”. Luego Carlos dijo “*pero mi trapecio no tiene lados iguales*” ¿Qué clase de trapecio es? algunos contestaron que era un trapecio escaleno. “*Entonces también hay trapecios rectángulos escalenos*” dijo Lady. Para que concluyeran la actividad se les sugirió que dibujaran todas las clases de trapecios que se habían construido y escribieran su respectivo nombre

3.4.5 Figura: Trapezoide

Actividad 20: Construcción de un trapezoide.

Se pretende que, con la ayuda de todo el grupo, el estudiante encuentre las características que tienen los trapezoides. Al igual que en actividades anteriores, es recomendable utilizar cuadrados de distintos tamaños.

Nivel 1. Fase 2

INSTRUCCIONES

1. Tomen un cuadrado y marquen las diagonales para encontrar su centro.
2. Háganle un doblez que pase por el centro, pero que no sea diagonal.
3. Se han obtenido dos figuras congruentes, Qué son?.
4. Se hace ahora otro doblez que pase por el centro del cuadrado inicial y que sea perpendicular al primer doblez.
5. Corten por los dobleces realizados. Se han obtenido cuatro figuras. ¿Qué son?.
6. ¿Qué características tiene cada una de estas cuatro figuras?.

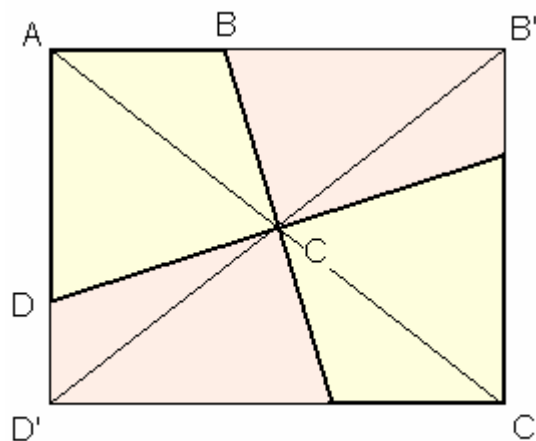


Figura 28. Construcción de trapezoides

ESQUEMA DE TRABAJO

Organizar al grupo por parejas. Pero inicialmente los dobleces se realizan en forma individual . Observar la figura obtenida para posteriormente hacer comparaciones con su pareja. ¿Revisar cómo son los lados? Mediante los dobleces adecuados, verificar si los lados son paralelos, haciendo coincidir los ángulos comprobar si son iguales. Luego se harán comentarios a nivel grupal y entre todos establecerán la lista de características que tiene un trapezoide. Este resumen se escribirá en el tablero, para que cada estudiante pueda tomar nota en su respectivo cuaderno.

3.4.5.1 Análisis de las actividades para el trapezoide

La última actividad, construcción de un trapezoide se desarrolló sin complicaciones, siguiendo las instrucciones construyeron los cuatro figuras, se les indicó que cada una de esas figuras se llamaba trapezoide y al

solicitarle que describieran la figura, mencionaron que no tiene lados ni ángulos iguales, *tampoco tiene lados paralelos*, “*en lo único que se parece a las otras figuras, es que tiene cuatro lados*” dijo Ernesto. Al sugerirles que escribieran en el tablero, lo que es un trapezoide, uno de los estudiantes escribió “es un cuadrilátero que no tienen lados paralelos”, todos estuvieron de acuerdo con esta idea. Luego hicieron una lista de sus características.

3.5 EVALUACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Una vez desarrolladas todas las actividades, se hizo una evaluación en dos aspectos: uno mediante una charla con los estudiantes, para conocer sus opiniones sobre las actividades y el otro aspecto de la evaluación se hizo con el propósito de determinar el nivel de pensamiento geométrico de los estudiantes, según el modelo de Van Hiele. Para eso se diseñó la prueba de manera que las acciones que realicen para responder cada pregunta y basado en los parámetros establecidos para cada nivel, permitieran establecer en qué nivel de razonamiento se encuentran los estudiantes. La primera pregunta en sus dos secciones apuntaba a la identificación del nivel de reconocimiento (nivel 1), la segunda y tercera pregunta al nivel de análisis (nivel 2) y la cuarta pregunta al nivel de clasificación (nivel 3).

En el anexo 2, está el modelo de la evaluación 1 (prueba escrita)

Como un trabajo adicional, se les propuso que hicieran comparaciones entre los cuadriláteros, que identificaran sus diferencias y semejanzas y completaran una tabla en donde, para cada par de cuadriláteros, se debía determinar diferencias y las semejanzas entre ellos. Todo esto sirvió para reforzar las propiedades de cada cuadrilátero.

En el anexo 3 está el modelo de la tabla de comparaciones

Sobre las opiniones respecto a las actividades, los siguientes, son algunos de los comentarios hechos por los estudiantes:

- “Todas las actividades nos parecieron chéveres”
- “las clases son más entretenidas, cuando se hacen actividades diferentes”
- “Al manipular las figuras que nosotros mismos hemos hecho, vemos más fácilmente lo que ellas tienen”
- “Al estar doblando papel, uno se distrae, el tiempo de clase se pasa volando”
- “Las características de las figuras, no quedan en teoría únicamente, porque podemos comprobarlas, doblando las figuras de papel que tenemos”
- “Vacano, doblar papeles y hacer figuras. Lo malo es que al final quedan muchos papeles en el suelo y nos toca ponernos a recoger”
- “Al principio, me quedaban chuecas las figuras porque no hacía bien los dobleces, pero al final, note que mejoré ya las figuras me quedaban mejor.”
- En general, las actividades tuvieron buena aceptación, las clases les parecen “mas chéveres” cuando se hace algo fuera de lo rutinario.

En cuanto a la revisión de resultados de la prueba escrita, éstos permitieron establecer que el mayor porcentaje de estudiantes se encuentran en nivel 2, con un 45 %. la cantidad de estudiantes que muestran un razonamiento de un nivel superior, no sobrepasa el 30%. En realidad, aunque se tenía la expectativa que los porcentajes de estudiantes en los niveles 2 y 3 fueran mayores, los resultados obtenidos se consideran satisfactorios, ya que se

logró disminuir el número de estudiantes en el nivel 1 y en el nivel 0, lo que implica un aumento en los niveles 2 y 3, en los cuales se vio un incremento de al menos un 10 % en cada uno de ellos. Por ejemplo, en el nivel de análisis, aumento del 20 % al 45% y en el nivel de clasificación aumentó del 7.5% al 17.5%. De todas maneras, es bastante significativo el hecho de que haya aumentado el número de estudiantes que alcanzaron un nivel de razonamiento superior al que tenían inicialmente.

De manera particular, los tres estudiantes seleccionados previamente, Lady, Ernesto y Johana, también presentaron un avance en su nivel de razonamiento. Por ejemplo Lady, según la evaluación inicial, se encontraba en el grupo de estudiantes que reconocen los cuadriláteros de las demás figuras pero no distinguen uno del otro, en la evaluación final, mostró un nivel de análisis (nivel 2), pues no solamente reconoció y diferenció los cuadriláteros sino además identificó correctamente sus elementos. Con respecto a Johana, ella presentó un avance del nivel 1 de reconocimiento al nivel 3 de clasificación (obviamente pasando por el nivel 2), respondió la evaluación en forma correcta en su totalidad, además las reflexiones y comentarios que hacía, daban muestra de ello. Ernesto se mantuvo en el nivel 3. En la evaluación inicial, por la forma cómo respondió las preguntas se ubicó en el nivel de clasificación (nivel 3) y según la evaluación final, mantuvo ese nivel. Se puede decir que su avance consistió en el fortalecimiento y profundización de las ideas sobre cuadriláteros y en el desarrollo de su habilidad manual, lograda con el doblado de papel.

En la tabla 3 se hace una comparación de los resultados generales tanto de la evaluación inicial como de la evaluación final y se establece la variación del porcentaje de estudiantes en cada nivel.

Se aclara que aunque en el modelo propuesto por Van Hiele no se menciona un nivel 0, la necesidad de ubicar aquellos estudiantes que no mostraron acciones propias de un nivel de reconocimiento, llevó a hacer la propuesta de la existencia de este nivel.

RESULTADOS DE LAS EVALUACIONES INICIAL Y FINAL						
Nivel ↓	EVALUACIÓN INICIAL		EVALUACIÓN FINAL		DIFERENCIA DE RESULTADOS	
	N° de estudiantes	Porcentaje	N° de estudiantes	Porcentaje	Porcentaje	Variación
Nivel 0	13	32.5 %	2	5%	27.5 %	Disminuyó
Reconocimiento	16	40 %	10	25%	15%	Disminuyó
Análisis	8	20 %	18	45%	25 %	Aumentó
Clasificación	3	7.5 %	10	25%	17.5 %	Aumentó

Tabla 3. Resultados de las evaluaciones inicial y final

4. CONCLUSIONES

- El presente trabajo fue una experiencia de aula que propició la reflexión sobre aspectos del quehacer educativo, y llevó a plantearse interrogantes como: ¿cuáles son las estrategia más adecuadas para despertar más interés en los estudiantes? ¿qué actividades facilitan la enseñanza de los temas de geometría?
- Cuando se introduce algún cambio en la rutina de clase, también se evidencia un cambio en la actitud de los estudiantes. Con esta experiencia se comprobó una vez más que son positivas las innovaciones de aula, no solamente se logra en los estudiantes mayor atención, sino también más entusiasmo por aprender.
- La propuesta planteada en este trabajo despertó inquietud, también en los demás docentes del área de matemáticas, quienes vieron en ésta, una forma diferente de trabajar en la clase de geometría.
- El usar el doblado de papel como la herramienta didáctica para el desarrollo de las actividades fue un acierto en este trabajo, puesto que con ello se atrajo el interés del estudiante y contribuyó en gran medida en su motivación.
- los estudiantes pudieron visualizar las figuras geométricas, sus características y propiedades en una forma sencilla, entretenida y dinámica, gracias a las actividades basadas en el doblado de papel.

- Inicialmente, la mayoría de los estudiantes mostró dificultad para identificar cada tipo de cuadrilátero cuando éstos se mostraban en una posición diferente a la usual, como es el de estar apoyados sobre uno de sus lados.
- Aunque con el desarrollo de las actividades disminuyó la cantidad de estudiantes que confunden los cuadriláteros cuando se encuentran rotados, llama la atención el hecho de que en algunos estudiantes, aproximadamente el 10%, persiste la tendencia de confundir un cuadrilátero con otro, cuando éstos se giran.
- Un ejemplo concreto de la situación descrita anteriormente fue, cuando se les mostró un cuadrado apoyado sobre uno de sus lados, lo identificaron con mucha facilidad, pero cuando se les mostró el mismo cuadrado pero apoyado sobre uno de sus vértices, dijeron que no era un cuadrado, lo identificaron como un rombo. Igual confusión presentaron con el rectángulo y el romboide.
- A pesar del trabajo realizado, se mantuvo en algunos estudiantes la dificultad de identificar los cuadriláteros cuando se giran, este hecho, suscitó la pregunta: ¿son necesarias otras actividades que apunten a esta situación?
- La incorporación del modelo de Van Hiele como referencia para establecer en qué condiciones de conocimiento y de razonamiento se encuentra el estudiante, facilitó muchísimo el seguimiento de su avance.

- Inicialmente el mayor porcentaje de estudiantes estaba en el nivel de reconocimiento (nivel 1), con el desarrollo de las actividades el mayor porcentaje de estudiantes se encuentra en el nivel de análisis (nivel 2). Este sólo hecho constituye una evidencia de que en forma general, hubo avance en el razonamiento de los estudiantes.
- Se habla de un avance en los estudiantes no solo por la variación que se presentó en el número de estudiantes en cada nivel, sino por el desarrollo de la habilidad y destreza manual que mostraron mediante el doblado de papel.
- En referencia a la percepción y relación de las propiedades de los cuadriláteros, también hubo avances, puesto que a medida en que se adelantaba en el desarrollo de las actividades, ellos llegaban a conclusiones cada vez más concretas y en forma más rápida.
- Además de los avances planteados anteriormente, uno de los aspectos positivos, más importantes, que se dieron con el desarrollo de las actividades, fue el cambio de actitud de los estudiantes en la clase: Se mostraron más interesados, se vio en ellos esas ganas por participar y hacer las cosas bien, en general, se sintieron motivados.
- Según las opiniones y comentarios hechos por los estudiantes, respecto al trabajo realizado, se puede decir que tuvo una gran aceptación entre ellos.
- Se considera que el uso del doblado de papel, es un buen apoyo para el estudio de la geometría, no importa si se trata de un nivel de preescolar, primaria o secundaria, pues permite a los estudiantes reflexionar sobre

sus observaciones y pasar de percepciones concretas a ideas abstractas y poder relacionar estas ideas entre si.

- El uso del papel doblado también es una muy buena herramienta que permite construir objetos geométricos del plano como los cuadriláteros y facilita la identificación de sus características. La flexibilidad del papel, hace más sencilla la comprobación de sus propiedades.
- El modelo de Van Hiele se ajusta a la construcción del pensamiento geométrico; mediante sus niveles de razonamiento, es posible describir el avance del estudiante de acuerdo a su ritmo individual.
- El innovar en el aula con actividades diferentes a las tradicionales, como el estudiar los cuadriláteros mediante doblados de papel, hace que la clase sea diferente y propicia más interés en el estudiante.
- Un maestro debe estar en permanente búsqueda de nuevas estrategias de trabajo en el aula, que le permitan responder a las expectativas de sus estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

BALDOR, J. A. (1967) Geometría plana y del espacio. Bogotá. Cultural colombiana Ltda.

CARRION Miranda, Vicente (1993). "Un recurso para la enseñanza de la geometría". En revista *Educación Matemática*. Volumen 5, número 1. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

FIALLO LEAL. Jorge E. (1996) "El modelo de Van Hiele en la enseñanza de los deslizamientos en el plano de la geometría de sexto grado". Tesis de magíster en la Enseñanza de la Matemática. Bucaramanga.

FIGUEROA T., María de Jesús. y otros (1993) "Clasificación de los contenidos del programa de matemáticas basado en los niveles de Van Hiele". México.

GONZÁLEZ G., Noraisa y LARIOS O., Victor (1994). "Uso de la microcomputadora y del doblado de papel en la aplicación del modelo de Van Hiele en la enseñanza de la geometría euclidiana en el nivel medio básico" (Tesis de licenciatura). Estado de Querétaro, México.

GUTIERREZ, Angel; JAIME, Adela (1991). "El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría". En revista *Educación Matemática*. Volumen 3 número 2. Grupo Editorial Iberoamérica. México. 1991.

.
JAIME, Adela. GUTIERREZ, Ángel. (1990) Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele, en S. Llinares, M.V. Sánchez (eds), *Teoría y práctica en educación matemática* (Alfar: Sevilla, España), 1990, pp 300 - 375
.

LARIOS Osorio, Victor y GONZÁLEZ González, Noraisa. (1997) "El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría", Memorias del XIV Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas. Toluca, México.

LEÓN C., Alejandra. (2000) "Un cuadrado y sus transformaciones". Memorias del II Festival de Matemáticas. Heredia, Costa rica.

Microsoft ® Encarta ® Biblioteca de Consulta 2002.

NORTES, Andrés (1990). "Matemáticas y su didáctica". Murcia: Tema DM,

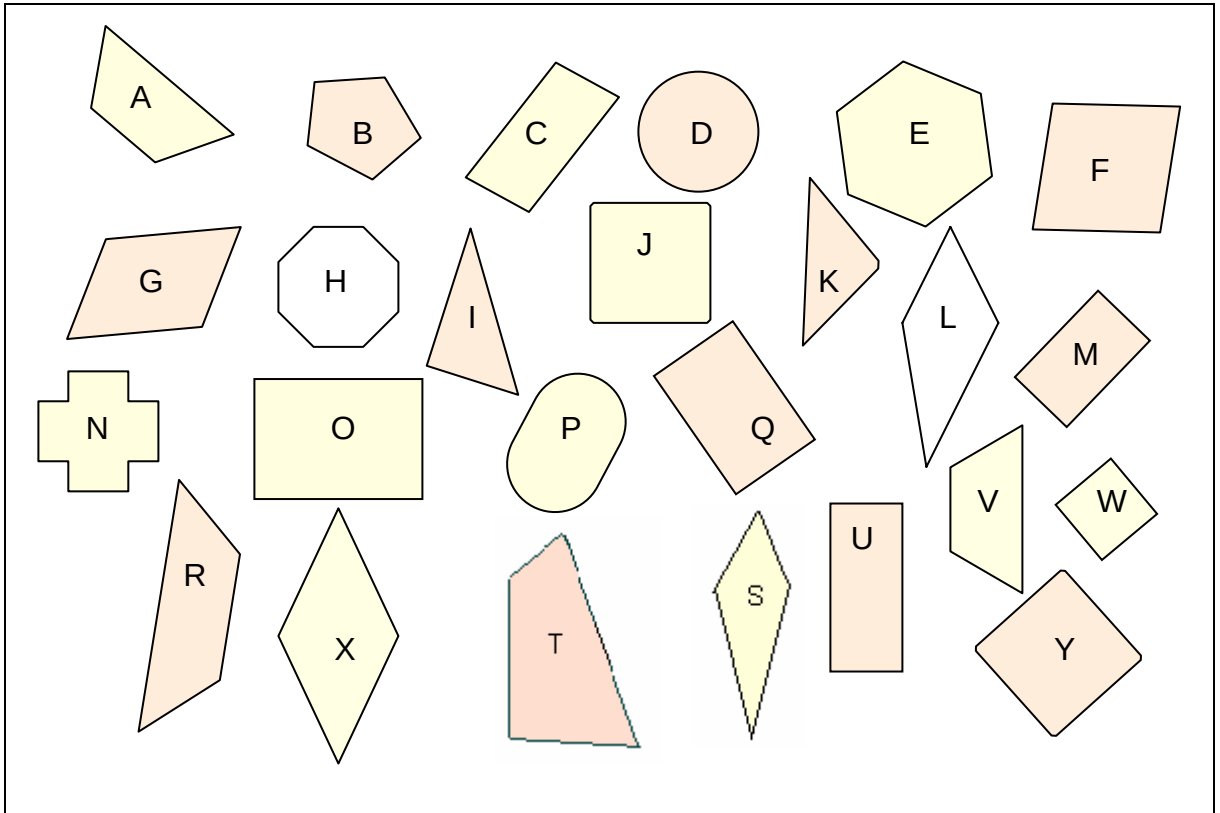
PROCOPIO, M.C. (2001). "Conexiones entre la geometría y el álgebra en secundaria: uso del doblado de papel para el estudio de polígonos y variables algebraicas". Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

VAN HIELE, Pierre (1957). "El problema de la comprensión". Tesis de doctor en matemática y ciencias naturales. Utrecht.

ANEXOS

ANEXO 1 . Evaluación inicial

1. ¡A clasificar figuras!,
 - a) Escriba las letras de las figuras que corresponden a cuadriláteros,
 - b) Frente a cada letra escriba el nombre del respectivo cuadrilátero.



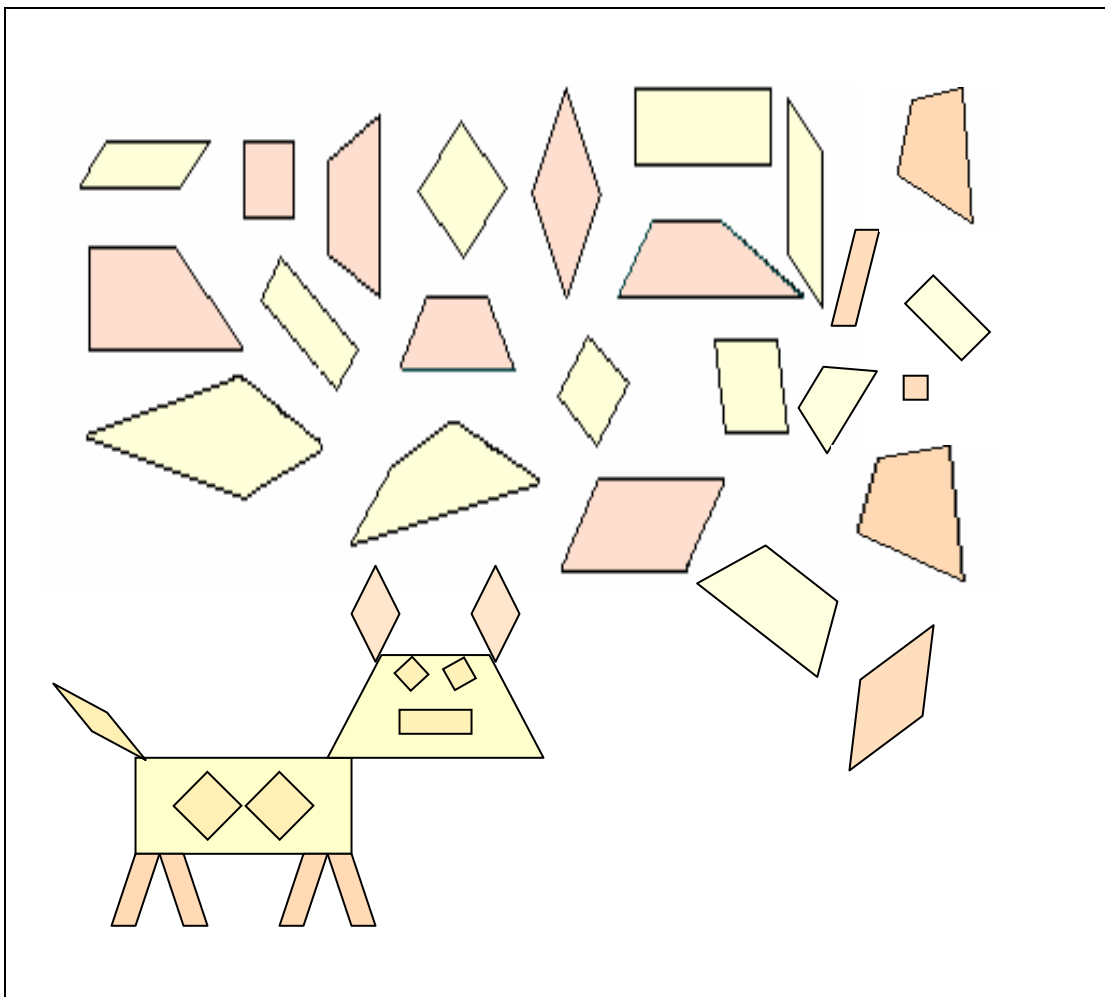
- 2) Completa la tabla, colocando en cada columna la letra correspondiente al cuadrilátero que cumpla la condición indicada:

cuadriláteros		
Con los lados paralelos		Sin lados paralelos
Dos pares	Un solo par	

- 3) Utilizado regla o escuadra, dibuje un cuadrilátero cualquiera y en él señale sus elementos.

ANEXO 2. Evaluación Final

1. a) Identifique cada una de las siguientes figuras, escriba dentro de la figura el número correspondiente de acuerdo al tipo de cuadrilátero, así: **1** para el cuadrado, **2** para el rectángulo, **3** para el rombo, **4** para el romboide, **5** para el trapecio, **6** para el trapezoide.



- b) Observe detenidamente la ilustración, identifique los diversos cuadriláteros, cuente cuántos cuadriláteros hay de cada clase.

Cuadrados _____

Rectángulos _____

Rombos _____

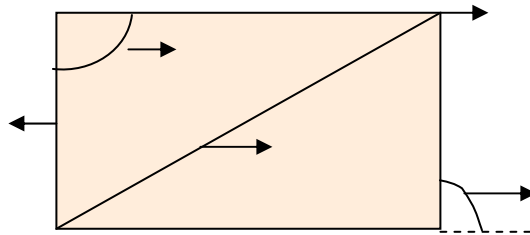
Trapezoides _____

Romboides _____

Trapecios _____

Evaluación Final (continuación)

2. Identifique cada uno de los elementos del cuadrilátero ilustrado, escriba el número que le corresponde de acuerdo al elemento.



1. Lado
2. Ángulo interior
3. Vértice
4. Ángulo exterior
5. Diagonal

3. Identifique cuál o cuáles de las características dadas, posee cada cuadrilátero, marque con una X en la casilla correspondiente

Cuadrilátero → Características	Cuadrado	Rombo	Rectángulo	Romboides	Trapezio	Trapezoide
Tienen cuatro lados						
No tienen lados paralelos						
Tienen cuatro ángulos rectos						
Tienen dos pares de lados paralelos						
Tienen lados opuestos iguales						
Sus diagonales son iguales						
Tienen cuatro lados iguales						
Tienen un par de lados paralelos						
Sus diagonales son perpendiculares						
Tienen ángulos opuestos iguales						
Sus diagonales se cortan en el punto medio						

4. Escriba una diferencia y una semejanza que exista entre:

- a) El rombo y el cuadrado
- b) El cuadrado y el rectángulo
- c) El trapezio y el trapezoide

ANEXO 3. **Tabla de comparaciones**

Complete la tabla, escribiendo las semejanzas y las diferencias que hay entre cada par de cuadriláteros indicados.

CUADRILÁTEROS	SEMEJANZAS	DIFERENCIAS
ROMBO y CUADRADO		
CUADRADO RECTÁNGULO		
RECTÁNGULO Y ROMBOIDE		
ROMBO y ROMBOIDE		
TRAPECIO y RECTÁNGULO		
TRAPECIO y TRAPEZOIDE		