

**ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE DISCOS
DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN
RELATIVIDAD GENERAL**

EDUAR ANTONIO BECERRA VERGARA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016**

**ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE DISCOS
DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN
RELATIVIDAD GENERAL**

EDUAR ANTONIO BECERRA VERGARA

Trabajo de grado presentado para obtener el título de
FÍSICO

Director
Prof. Dr. GUILLERMO A. GONZÁLEZ VILLEGAS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2016**

Dedicado a mi madre María Amparo por ser mi ejemplo a seguir; por su amor incondicional, su paciencia, dedicación y enseñanzas; por ser el pilar en el cual se construye mi vida y el motor que me alienta a seguir adelante cada día. Sin ella, lo que soy y todo lo que he logrado no hubiese sido posible.

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Guillermo A. González por sus enseñanzas, su constante apoyo, por la paciencia tenida, por su comprensión y consejos, por los conocimientos brindados y su dedicación en la dirección de esta investigación.

Al profesor Fredy L. Dubeibe por su dedicación en el desarrollo de este proyecto, además por sus conocimientos brindados y valiosos aportes.

A COLCIENCIAS por la beca otorgada en el marco del programa Jóvenes Investigadores e Innovadores año 2014

A todos los compañeros del Grupo de Investigaciones en Relatividad y Gravitación (GIRG) y especialmente a Oscar por su colaboración y apoyo.

Índice general

| | pág. |
|---|-----------|
| INTRODUCCIÓN | 14 |
| 1 ECUACIONES PERTURBADAS | 17 |
| 1.1 Ecuaciones de conservación perturbadas: Caso general | 17 |
| 1.2 Ecuaciones de conservación perturbadas: Caso de discos delgados . . | 22 |
| 2 ECUACIONES PARA LAS VARIABLES DE ESTADO | 25 |
| 3 DISCO DELGADO CON PRESIÓN RADIAL Y AZIMUTAL | 29 |
| 3.1 Disco isótropo de Schwarzschild | 29 |
| 4 DISCOS DELGADOS CON PRESIÓN AZIMUTAL | 42 |
| 4.1 Disco delgado de Chazy-Curzon | 42 |
| 4.2 Disco delgado de Zipoy-Voorhees | 47 |
| CONCLUSIONES | 51 |
| Bibliografía | 53 |

Índice de figuras

| | pág. |
|---|------|
| Figura 3.1 Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes modos de oscilación w en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa un aumento en la frecuencia al incrementar w | 33 |
| Figura 3.2 Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores del número de onda k_φ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa que al crecer k_φ la amplitud decrece. | 33 |
| Figura 3.3 Perfil de amplitudes de la presión perturbada δp para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa un aumento en la frecuencia al incrementar w similar al presentado por $\delta\sigma$; sin embargo, la perturbación sobre la presión se anula más rápido. | 34 |
| Figura 3.4 Perfil de amplitudes de la componente azimutal de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. El cálculo de la velocidad azimutal se realizó con $k_\varphi = 0,08$ debido a que $\delta U^z = 0$ para $k_\varphi = 0$ | 36 |
| Figura 3.5 Perfil de amplitudes de la componente radial de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación con $k_\varphi = 0$ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. | 36 |
| Figura 3.6 Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes modos de oscilación w en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar. | 38 |
| Figura 3.7 Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores del número de onda k_φ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar. | 38 |

| | | |
|--------------------|---|----|
| Figura 3.8 | Perfil de amplitudes para las componentes azimutal de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar. | 39 |
| Figura 3.9 | Perfil de amplitudes para las componentes radial de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar. | 39 |
| Figura 3.10 | Perfil de amplitudes de la presión perturbada δp para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar. | 40 |
| Figura 4.1 | Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de w en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes. | 45 |
| Figura 4.2 | Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de k_φ en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes. | 45 |
| Figura 4.3 | Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de la relación m/a en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes. | 46 |
| Figura 4.4 | Gráfica para la función B/A presente en la solución de la densidad de energía perturbada para el disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon para valores de $a = 0,4; 1; 5$. Como la función B/A no depende de los valores de w y k_φ los resultados se obtuvieron tomando valores de $w = k_\varphi = 0$ y $m = 0,5$ | 46 |
| Figura 4.5 | Gráfica para la función B/A presente en la solución de la densidad de energía perturbada para el disco delgado obtenido a partir de la métrica de Zipoy-Voorhees para valores de $b = 2,15; 3,3; 12$, $a = 1$ y $m = 0,5$. Como la función B/A no depende de los valores de w y k_φ los resultados se obtuvieron tomando valores de $w = k_\varphi = 0$ | 49 |

Figura 4.6 Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de b con $w = 0,13$ y $k_\varphi = 0$ en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Zipoy-Voorhees. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes. 50

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS EN RELATIVIDAD GENERAL*

AUTOR: EDUAR ANTONIO BECERRA VERGARA**

PALABRAS CLAVE: Relatividad General, Discos delgados Relativistas, simetría axial, Estabilidad.

Se estudió la estabilidad de discos delgados, estáticos y axialmente simétricos en el contexto de la relatividad general, realizando una perturbación a primer orden de las componentes temporal, radial, tangencial y azimutal del tensor de energía-momentum del fluido con soporte en el plano $z = 0$. Se consideró que las perturbaciones realizadas al tensor de energía-momentum no modifican las derivadas de la métrica obtenida a partir de la solución de las ecuaciones de campo de Einstein, es decir, no se perturba la identidad de Bianchi. Los modelos de discos analizados fueron los generados a partir de la métrica isótropa de Schwarzschild, la métrica de Chazy-Curzon y la métrica de Zipoy-Voorhees utilizando el método de desplazamiento, corte y reflexión. Partiendo de soluciones numéricas de las ecuaciones de conservación se hizo un análisis del comportamiento gráfico de los perfiles de amplitud de las cantidades perturbadas, donde se observó que los patrones obtenidos de las variables termodinámicas para el disco isótropo de Schwarzschild presentan un carácter oscilatorio que decrece rápidamente hasta llegar a anularse, sugiriendo que este modelo presenta estabilidad bajo las perturbaciones estudiadas. Además, se encontró que los modelos Chazy-Curzon y Zipoy-Voorhees no son estables debido a que su densidad de energía perturbada tiende a infinito para ciertos valores de la coordenada radial.

*Tesis de grado para optar al título de Físico.

**Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Director: Prof. Guillermo A. González Villegas, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE:: STUDY OF THE STABILITY OF AXIALLY SYMMETRIC RELATIVISTIC THIN DISKS^{***}

AUTHOR: EDUAR ANTONIO BECERRA VERGARA^{****}

KEYWORDS: General Relativity, Relativistic thin disks, Stability.

We study the stability of static axially symmetric thin disks in the context of general relativity, by means of a first order perturbation in the temporal, radial, tangential and azimuthal components of energy-momentum tensor of the fluid in the plane $z = 0$. We assume that the perturbations on energy-momentum tensor do not modify the derivatives of the metric, which is found by solving the Einstein field equations, *i.e.*, the perturbation introduced to the system do not perturb the Bianchi's identity. The disk models that we used were generated from the isotropic Schwarzschild, Chazy-Curzon and Zipoy-Voorhees metrics, using the displace-cut-reflection method. Based on the numerical solutions of the conservation equations, we perform a graphical analysis of the amplitude profiles for the perturbed quantities. In the case of the isotropic Schwarzschild disk, it was observed that the thermodynamic variables exhibit an oscillatory character that tends rapidly to zero. For this reason, we may say that the model is stable under the studied perturbations. Moreover, we found that the Chazy-Curzon and Zipoy-Voorhees models are not stable, because its perturbed energy density tends to infinity at some specific positions of the radial coordinate.

^{***} Undergraduate diploma paper

^{****} Science Faculty, School of Physics. Advisor: Prof. Guillermo A. González Villegas, Ph. D.

INTRODUCCIÓN

Los modelos relativistas de configuraciones infinitesimalmente delgadas en forma de disco son de gran interés astrofísico, ya que pueden ser usados para modelar discos de acreción, galaxias en equilibrio termodinámico o la superposición de un agujero negro y una galaxia [1–4]. Además, la inclusión de campos electromagnéticos en dichos espacio-tiempos permite estudiar la formación de estrellas de neutrones, enanas blancas y cuásares [5, 6]. Por lo anterior, en las últimas décadas se han dedicado esfuerzos en la obtención de soluciones analíticas axialmente simétricas de discos, tanto en la formulación Newtoniana como en Relatividad General.

Los primeros estudios sobre soluciones exactas como fuentes de discos delgados relativistas fueron realizados por Bonnor y Sackfield [7] en 1968 y Morgan y Morgan [8] en 1969, donde se analizaron discos sin presión radial; la inclusión de dicha presión en las ecuaciones de Einstein-Maxwell fue llevada a cabo por Morgan y Morgan [9] y González y Letelier [10]. Además, distintos autores han obtenido diferentes tipos de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [2, 10–16] y estacionarios [1, 4, 17, 18]. Con el ánimo de modelar sistemas más realistas, varios autores han analizado modelos construidos como la superposición de un disco estático o estacionario con un agujero negro [19–27]. Discos delgados relativistas en contra-rotación como fuentes de la métrica de Kerr y discos estáticos como fuentes de espacio-tiempo vacío a partir de la métrica de Chazy-Curzon [28, 29] y Zipoy-Voorhees [30, 31] fueron obtenidos por Bicák *et al.* [1, 16]. Los modelos en contra-rotación con y sin presión radial fueron estudiados por González y Espitia [32] y García y González [33] respectivamente. Por otra parte, en lo referente a modelos de disco estacionarios que incluyen campos eléctricos, magnéticos y electromagnéticos [34–36], Vogt y Letelier han obtenido soluciones exactas para discos delgados de fluido perfecto con halos de materia [37], discos delgados hechos de polvo cargado [38] y discos delgados hechos de fluido perfecto cargado [39]; finalmente González y Letelier [40] obtuvieron soluciones exactas para discos gruesos.

Un criterio esencial para determinar la posible aplicabilidad de los modelos de discos descritos a cualquier sistema estelar que se encuentra en la naturaleza (ya

sea discos de acreción, galaxias o formación de estrellas) es el de su estabilidad. El estudio de diferentes tipos de perturbaciones, cuando se aplica a estos modelos, podría dar una idea de la formación de diferentes patrones estelares; por ejemplo, una perturbación puede causar el colapso de un objeto estable generando una estructura nueva como el caso de la formación de agujeros negros por el colapso de estrellas supermasivas. En general, existen dos opciones para estudiar la estabilidad de discos en relatividad general: la primera opción se basa en analizar la estabilidad de las órbitas de partículas a lo largo de geodésicas, mientras que la segunda opción consiste en perturbar el tensor de energía-momentum.

Un análisis de la estabilidad de órbitas fue hecho por Letelier utilizando el criterio de estabilidad de Rayleigh [41] para una formulación relativista [42, 43]. Utilizando este criterio, se estudió la estabilidad de las órbitas alrededor de agujeros negros rodeados de discos [42]. Este mismo enfoque, fue empleado por Vogt [37] para analizar la estabilidad en discos delgados isótropos de Schwarzschild, así como discos con halos simples y compuestos utilizando el método de desplazamiento, corte, y reflexión [44, 45]. Bicák, Lynden-Bell y Katz [16] analizaron la estabilidad de los discos delgados obtenidos a partir de la métrica de Chazy-Curzon y Zipoy-Voorhees, estudiando sus curvas de velocidad y momento angular específico, descubriendo que estos modelos no son estables para discos altamente relativistas. Es importante aclarar que desde un punto de vista teórico, es más riguroso el estudio de la estabilidad de discos perturbando el tensor de energía-momentum, porque en este caso se tiene en cuenta el comportamiento colectivo de las partículas. Sin embargo, hay pocos estudios en la literatura que efectúen este tipo de perturbación.

Las condiciones para la estabilidad de sistemas estelares formados por fluidos perfectos han sido derivadas en el contexto de la teoría general de la relatividad por Schutz en 1972 [46], por Chandrasekhar y Friedman en 1972 [47, 48] y por Will en 1974 [49]. Basado en estos estudios, Seguin [50] analizó la estabilidad general de estrellas rotantes formadas por un fluido relativista con viscosidad, perturbando el tensor de energía-momentum y considerando los coeficientes de las variables perturbadas como constantes; es decir, considerando sólo perturbaciones locales (es de aclarar que esta condición es demasiado restrictiva). Posteriormente Ujevic y Letelier [?] estudiaron la estabilidad de discos gruesos obtenidos a partir de la métrica isótropa de Schwarzschild, considerando variables los coeficientes de las perturbaciones y haciendo una aproximación a primer orden de las mismas.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta investigación es estudiar la estabilidad de modelos de discos delgados axialmente simétricos en el contexto de la relatividad general, teniendo en cuenta el movimiento colectivo de las partículas. Para cumplir con dicho objetivo, se realizó una perturbación general en las componentes del tensor de energía-momento del fluido y se obtuvieron las correspondientes ecuaciones de conservación perturbadas. Las perturbaciones consideradas no modifican las derivadas de la métrica obtenida a partir de la solución de las ecuaciones de Einstein; es decir, no se perturba la identidad de Bianchi. Partiendo de las ecuaciones perturbadas, para el caso de un disco delgado en el que se tiene una distribución del tensor de energía-momentum con soporte en el plano $z = 0$, se encontraron expresiones para la densidad de energía superficial perturbada y las presiones perturbadas, las cuales se resolvieron numéricamente y se analizaron gráficamente con el fin de determinar su estabilidad. Este análisis de estabilidad se realizó en sistemas que presentan presión radial y azimutal, así como también en sistemas que solo presentan presión azimutal. En este sentido se decidió analizar tres modelos analíticos de discos delgados presentes en la literatura, dichos modelos son generados a partir de las métricas: isótropa de Schwarzschild, Chazy-Curzon y Zipoy-Voorhees.

Capítulo 1

ECUACIONES PERTURBADAS

1.1. Ecuaciones de conservación perturbadas: Caso general

La métrica estática y axialmente simétrica más general, se puede escribir como

$$ds^2 = -e^{2\Psi_1} dt^2 + e^{2\Psi_2} r^2 d\varphi^2 + e^{2\Psi_3} (dr^2 + dz^2), \quad (1.1)$$

donde las funciones Ψ_i con $i = 1, 2, 3$, dependen únicamente de las coordenadas r y z , es decir,

$$\Psi_1 = \Psi_1(r, z), \quad \Psi_2 = \Psi_2(r, z), \quad \Psi_3 = \Psi_3(r, z).$$

Al considerar un fluido anisótropo y sin flujo de calor, el tensor de energía-momentum $T^{\mu\nu}$ más general que describirá el fluido está dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + S^{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $S^{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos y ρ es la densidad de energía medida por un observador comovil con velocidad U^μ que cumple $U^\mu U_\mu = -1$, con $U^0 > 0$. Los autovectores correspondientes a los autovalores (p_r, p_φ, p_z) del tensor de esfuerzos, definen la dirección de los esfuerzos principales como una base en la cual $S^{\mu\nu}$ es diagonal. Por medio de un proceso algebraico la base se convierte en ortonormal de tal manera que

$$\begin{aligned}
-U^\mu U_\mu &= X^\mu X_\mu = Y^\mu Y_\mu = Z^\mu Z_\mu = 1, \\
U^\mu X_\mu &= U^\mu Y_\mu = U^\mu Z_\mu = 0, \\
X^\mu Y_\mu &= X^\mu Z_\mu = Y^\mu Z_\mu = 0,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

y los autovalores son

$$S^{\mu\nu} X_\nu = p_r X^\mu, \quad S^{\mu\nu} Y_\nu = p_\varphi Y^\mu, \quad S^{\mu\nu} Z_\nu = p_z Z^\mu.$$

Según lo descrito anteriormente, el tensor $T^{\mu\nu}$ en una tétrada comovil es

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu + p_r X^\mu X^\nu + p_\varphi Y^\mu Y^\nu + p_z Z^\mu Z^\nu, \tag{1.4}$$

en donde la cantidad U^μ es la cuadrivelocidad del fluido y las cantidades X^μ, Y^μ y Z^μ , son los ejes principales del fluido. La base de vectores que diagonaliza el tensor de energía-momentum está dada por

$$\begin{aligned}
U^\mu &= e^{-\Psi_1} (1, 0, 0, 0), \\
X^\mu &= e^{-\Psi_3} (0, 1, 0, 0), \\
Y^\mu &= \frac{e^{-\Psi_2}}{r} (0, 0, 1, 0), \\
Z^\mu &= e^{-\Psi_3} (0, 0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Para el caso de una métrica estática y axialmente simétrica, todas las cantidades del tensor de energía-momentum solo dependen de r y z , al igual que los coeficientes de las ecuaciones de conservación perturbadas. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede construir una perturbación general $\xi_{(p)}^\mu$ de una cantidad ξ^μ de la forma

$$\xi_{(p)}^\mu(t, r, \varphi, z) = \xi^\mu(r, z) + \delta\xi^\mu(t, r, \varphi, z), \tag{1.6}$$

donde $\xi^\mu(r, z)$ es la cantidad sin perturbar y $\delta\xi^\mu(t, r, \varphi, z)$ es una pequeña perturbación. Reemplazando (1.6) en la ecuación (1.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
T_{(p)}^{\mu\nu} &= (\rho + \delta\rho) (U^\mu + \delta U^\mu) (U^\nu + \delta U^\nu) + (p_r + \delta p_r) (X^\mu + \delta X^\mu) (X^\nu + \delta X^\nu) + \\
&\quad (p_\varphi + \delta p_\varphi) (Y^\mu + \delta Y^\mu) (Y^\nu + \delta Y^\nu) + (p_z + \delta p_z) (Z^\mu + \delta Z^\mu) (Z^\nu + \delta Z^\nu).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Después de realizar un proceso algebraico se llega finalmente a que el tensor de energía-momentum perturbado tiene la forma

$$T_{(p)}^{\mu\nu}(t, r, \varphi, z) = T^{\mu\nu}(r, z) + \delta T^{\mu\nu}(t, r, \varphi, z), \quad (1.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \delta T^{\mu\nu} = & \rho U^\mu \delta U^\nu + \rho \delta U^\mu (U^\nu + \delta U^\nu) + \delta \rho (U^\mu + \delta U^\mu) (U^\nu + \delta U^\nu) + \\ & p_r X^\mu \delta X^\nu + p_r \delta X^\mu (X^\nu + \delta X^\nu) + \delta p_r (X^\mu + \delta X^\mu) (X^\nu + \delta X^\nu) + \\ & p_\varphi Y^\mu \delta Y^\nu + p_\varphi \delta Y^\mu (Y^\nu + \delta Y^\nu) + \delta p_\varphi (Y^\mu + \delta Y^\mu) (Y^\nu + \delta Y^\nu) + \\ & p_z Z^\mu \delta Z^\nu + p_z \delta Z^\mu (Z^\nu + \delta Z^\nu) + \delta p_z (Z^\mu + \delta Z^\mu) (Z^\nu + \delta Z^\nu). \end{aligned} \quad (1.9)$$

El tensor de energía-momentum satisface las ecuaciones de campo de Einstein,

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

tal que, aplicando la derivada covariante a la ecuación anterior se tiene

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (1.11)$$

Se asume que la perturbación del tensor de energía-momentum no modifica las derivadas de la métrica encontrada como solución de las ecuaciones de Einstein; es decir, la perturbación $\delta T^{\mu\nu}$ no modifica la identidad de Bianchi. Con el tensor de energía-momentum perturbado $T_{(p)}^{\mu\nu}$ y las ecuaciones de campo de Einstein, se obtiene que la ecuación perturbada para el tensor de energía-momentum está dada por

$$(\delta T^{\mu\nu})_{;\mu} = 0. \quad (1.12)$$

Introduciendo la expresión (1.9) en la ecuación (1.12) y considerando sólo perturbaciones a primer orden; es decir, despreciando términos de orden mayor igual a dos en δ , las ecuaciones de conservación perturbadas para cada coordenada son

$$\nu = t$$

$$\begin{aligned}
& \delta U^t_{,t} (\rho U^t) + \delta U^\mu_{,\mu} (\rho U^t) + \delta X^t_{,r} (p_r X^r) + \delta Y^t_{,\varphi} (p_\varphi Y^\varphi) + \delta Z^t_{,z} (p_z Z^z) + \\
& \delta U^r \left[(\rho U^t)_{,r} + \rho U^t (2\Gamma^t_{tr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \delta U^z \left[(\rho U^t)_{,z} + \rho U^t (2\Gamma^t_{tz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + \\
& \delta X^t \left[(p_r X^r)_{,r} + p_r X^r (2\Gamma^t_{tr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \delta Z^t \left[(p_z Z^z)_{,z} + p_z Z^z (2\Gamma^t_{tz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] \\
& + \delta \rho_{,t} (U^t U^t) = 0,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\nu = r$$

$$\begin{aligned}
& \delta U^r_{,t} (\rho U^t) + \delta X^r_{,r} (p_r X^r) + \delta X^\mu_{,\mu} (p_r X^r) + \delta Y^r_{,\varphi} (p_\varphi Y^\varphi) + \delta Z^r_{,z} (p_z Z^z) + \\
& \delta p_{r,r} (X^r X^r) + 2\delta U^t (\rho U^t \Gamma^r_{tt}) + 2\delta X^r \left[(p_r X^r)_{,r} + p_r X^r (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \\
& \delta X^z \left[(p_r X^r)_{,z} + p_r X^r (2\Gamma^r_{rz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + 2\delta Y^\varphi (p_\varphi Y^\varphi \Gamma^r_{\varphi\varphi}) + \delta p_z (Z^z Z^z \Gamma^r_{zz}) + \\
& \delta Z^r \left[(p_z Z^z)_{,z} + p_z Z^z (2\Gamma^r_{rz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + 2\delta Z^z (p_z Z^z \Gamma^r_{zz}) + \delta \rho (U^t U^t \Gamma^r_{tt}) + \\
& \delta p_\varphi (Y^\varphi Y^\varphi \Gamma^r_{\varphi\varphi}) + \delta p_r \left[(X^r X^r)_{,r} + X^r X^r (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\nu = \varphi$$

$$\begin{aligned}
& \delta U^\varphi_{,t} (\rho U^t) + \delta X^\varphi_{,r} (p_r X^r) + \delta Y^z \left[(p_\varphi Y^\varphi)_{,z} + p_\varphi Y^\varphi (2\Gamma^\varphi_{\varphi z} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + \\
& \delta Y^\varphi_{,\varphi} (p_\varphi Y^\varphi) + \delta Y^\mu_{,\mu} (p_\varphi Y^\varphi) + \delta X^\varphi \left[(p_r X^r)_{,r} + p_r X^r (2\Gamma^\varphi_{\varphi r} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \\
& \delta Y^r \left[(p_\varphi Y^\varphi)_{,r} + p_\varphi Y^\varphi (2\Gamma^\varphi_{\varphi r} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \delta Z^\varphi_{,z} (p_z Z^z) + \delta p_{\varphi,\varphi} (Y^\varphi Y^\varphi) + \\
& \delta Z^\varphi \left[(p_z Z^z)_{,z} + p_z Z^z (2\Gamma^\varphi_{\varphi z} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] = 0,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\nu = z$$

$$\begin{aligned}
& \delta U^z_{,t} (\rho U^t) + \delta X^z_{,r} (p_r X^r) + \delta Y^z_{,\varphi} (p_\varphi Y^\varphi) + \delta Z^z_{,z} (p_z Z^z) + Z^\mu_{,\mu} (p_z Z^z) + \\
& \delta X^z \left[(p_r X^r)_{,r} + p_r X^r (2\Gamma^z_{zr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + 2\delta Y^\varphi (p_\varphi Y^\varphi \Gamma^z_{\varphi\varphi}) + \delta \rho (U^t U^t \Gamma^z_{tt}) + \\
& \delta Z^r \left[(p_z Z^z)_{,r} + p_z Z^z (2\Gamma^z_{zr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \delta p_{z,z} (Z^z Z^z) + 2\delta U^t (\rho U^t \Gamma^z_{tt}) + \\
& 2\delta Z^z \left[(p_z Z^z)_{,z} + p_z Z^z (\Gamma^z_{zz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + \delta p_r (X^r X^r \Gamma^z_{rr}) + \delta p_\varphi (Y^\varphi Y^\varphi \Gamma^z_{\varphi\varphi}) + \\
& \delta p_z \left[(Z^z Z^z)_{,z} + Z^z Z^z (\Gamma^z_{zz} + \Gamma^\mu_{\mu z}) \right] + 2\delta X^r (p_r X^r \Gamma^z_{rr}) = 0,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

en donde los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ diferentes de cero son

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,r}, \quad \Gamma_{tz}^t = \Gamma_{zt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}g_{tt,z}, \quad \Gamma_{rz}^r = \Gamma_{zr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,z},$$

$$\Gamma_{\varphi r}^\varphi = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,r}, \quad \Gamma_{\varphi z}^\varphi = \Gamma_{z\varphi}^\varphi = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}g_{\varphi\varphi,z}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}g_{rr,r},$$

$$\Gamma_{zr}^z = \Gamma_{rz}^z = \frac{1}{2}g^{zz}g_{zz,r}, \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{tt,r}, \quad \Gamma_{zz}^z = \frac{1}{2}g^{zz}g_{zz,z},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{\varphi\varphi,r}, \quad \Gamma_{tt}^z = -\frac{1}{2}g^{zz}g_{tt,z}, \quad \Gamma_{rr}^z = -\frac{1}{2}g^{zz}g_{rr,z},$$

$$\Gamma_{zz}^r = -\frac{1}{2}g^{rr}g_{zz,r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^z = -\frac{1}{2}g^{zz}g_{\varphi\varphi,z}.$$

Para obtener un modelo de perturbación consistente, es evidente que la tétrada se debe perturbar, por lo que los vectores deben mantener la condición de ortonormalidad

$$\begin{aligned} \delta U^\mu \delta U_\mu &= \delta X^\mu \delta X_\mu = \delta Y^\mu \delta Y_\mu = \delta Z^\mu \delta Z_\mu = 1, \\ \delta U^\mu \delta X_\mu &= \delta U^\mu \delta Y_\mu = \delta U^\mu \delta Z_\mu = 0, \\ \delta X^\mu \delta Y_\mu &= \delta X^\mu \delta Z_\mu = \delta Y^\mu \delta Z_\mu = 0; \end{aligned} \tag{1.17}$$

es decir, se deben cumplir las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \delta U^t &= \delta X^r = \delta Y^\varphi = \delta Z^z = 0, \\ \delta X^t &= -\frac{X_r}{U_t} \delta U^r, \quad \delta Y^t = -\frac{Y_\varphi}{U_t} \delta U^\varphi, \quad \delta Z^t = -\frac{Z_z}{U_t} \delta U^z, \\ \delta X^\varphi &= -\frac{X_r}{Y_\varphi} \delta Y^r, \quad \delta X^z = -\frac{X_r}{Z_z} \delta Z^r, \quad \delta Y^z = -\frac{Y_\varphi}{Z_z} \delta Z^\varphi. \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.2. Ecuaciones de conservación perturbadas: Caso de discos delgados

Uno de los métodos para obtener discos delgados en relatividad general es a partir de soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein, en las que se introduce una discontinuidad finita en la primera derivada del tensor métrico a través del plano $z = 0$. Estos modelos de discos delgados son caracterizados por una distribución del tensor de energía-momentum proporcional a una función delta de Dirac con soporte en el plano $z = 0$, por lo tanto, se cumple que no existe presión axial y además las propiedades del fluido sólo dependen de la coordenada r , esto es

$$p_z = 0, \quad \rho = \rho(r), \quad p_r = p_r(r), \quad p_\varphi = p_\varphi(r).$$

De lo anterior, se puede demostrar que el tensor de energía-momentum para una distribución discoidal se puede escribir como *

$$T^{\mu\nu} = Q^{\mu\nu} \delta(z), \quad (1.19)$$

donde $\delta(z)$ es la función delta de Dirac y

$$Q^{\mu\nu} = \sigma U^\mu U^\nu + p_r X^\mu X^\nu + p_\varphi Y^\mu Y^\nu. \quad (1.20)$$

En esta expresión σ es la densidad de energía superficial y (U^μ, X^μ, Y^μ) son los vectores de la tétrada definida previamente.

Introduciendo la definición del tensor de energía-momentum para un disco delgado (1.19) en la ecuación de conservación perturbada (1.12), se obtiene

$$(\delta Q^{\mu\nu})_{;\mu} \delta(z) + \delta Q^{z\nu} [\delta(z)]_{,z} = 0. \quad (1.21)$$

Al integrar la ecuación anterior sobre la coordenada z se tiene

$$\int \left\{ (\delta Q^{\mu\nu})_{;\mu} \delta(z) + \delta Q^{z\nu} [\delta(z)]_{,z} \right\} \sqrt{g_{zz}} dz = 0, \quad (1.22)$$

teniendo en cuenta que $f(x)\delta'(x) = -f'(x)\delta(x)$ y que $\int f(x)\delta(x) = f(x)|_{x=0}$ el resultado de la integral es

$$\left[(\delta Q^{\mu\nu})_{;\mu} - (\delta Q^{z\nu})_{,z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.23)$$

*Esta ecuación se demuestra en el capítulo siguiente.

La métrica considerada para el modelo de discos delgados se obtiene aplicando el métodos de desplazamiento, corte y reflexión [1, 37]. Por esta razón las componentes de la métrica dependen de la coordenada r y del valor absoluto de z ; en otras palabras, la ecuación (1.23) toma la forma

$$\left[(\delta Q^{\mu\nu})_{;\mu} - (\delta Q^{z\nu})_{,|z|} |z|_{,z} \right] \Big|_{z=0} = 0. \quad (1.24)$$

Siguiendo el enfoque de la teoría de distribuciones se toma la derivada del valor absoluto de z evaluada en $z = 0$ como cero, la ecuación de conservación perturbada para un disco delgado reduce a

$$(\delta Q^{\mu\nu})_{;\mu} |_{z=0} = 0. \quad (1.25)$$

Como es de interés las perturbaciones sobre la cuadrivelocidad y las las variables de estado, entonces se puede hacer cero las perturbaciones δX^φ ya que se puede observar de las relaciones encontradas en (1.18), que esta cantidad no está relacionada con las perturbaciones en la velocidad radial o azimutal. Por otro lado, las perturbaciones en la tétrada son independientes de las perturbaciones en las cantidades del fluido, por esta razón, asumir $\delta X^\varphi = 0$ no modifica la ecuación de estado del mismo. Debido a que el fluido se encuentra en el plano $z = 0$, entonces se establece que las perturbaciones sobre el vector Z^μ son cero, por lo tanto, al introducir $\delta X^\varphi = \delta Z^t = \delta Z^r = \delta Z^\varphi = \delta Z^z = 0$ en las relaciones presentadas en (1.18) se obtiene

$$\delta U^z = \delta X^z = \delta Y^z = \delta Y^r = 0. \quad (1.26)$$

Dada la dependencia con las coordenadas de la métrica estática axialsimétrica (1.1), y la forma del tensor de energía-momentum perturbado para un disco delgado (1.19), todos los coeficientes incluyendo los coeficientes de conexión sólo dependen de la coordenada radial. Por lo tanto, se puede construir una perturbación general de la forma

$$\delta \xi^\mu (t, r, \varphi) = \delta \xi^\mu (r) e^{i(k_\varphi \varphi - \omega t)}. \quad (1.27)$$

La ecuación anterior es de suma importancia para este trabajo, ya que de aquí se deriva el criterio que permitirá decidir si los modelos estudiados son estables o no. Para analizar la estabilidad nos centraremos en el término $\delta \xi^\mu (r)$: Si su amplitud tiende a cero o se mantiene constante, se puede decir que el sistema es estable, por el contrario, si la amplitud tiende a infinito se dice que el sistema es inestable.

Finalmente, al sustituir la perturbación (1.27) en la ecuación (1.25) y al reemplazar las condiciones (1.26) y (1.18) en la expresión resultante, se obtienen las ecuaciones de conservación perturbadas para un modelo de disco delgado:

$$\nu = t$$

$$\begin{aligned} & \delta U^r_{,r} \left(\sigma U^t - \frac{p_r}{U_t} \right) + \delta U^r \left\{ (\sigma U^t)_{,r} + \sigma U^t (2\Gamma^t_{tr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) - \left(\frac{X_r}{U_t} \right)_{,r} p_r X^r - \right. \\ & \left. \frac{X_r}{U_t} \left[(p_r X^r)_{,r} + p_r X^r (2\Gamma^t_{tr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] \right\} + \delta U^\varphi \left[ik_\varphi \left(\sigma U^t - \frac{p_\varphi}{U_t} \right) \right] - \\ & \delta \sigma (i\omega U^t U^t) = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\nu = r$$

$$\begin{aligned} & \delta p_{r,r} (X^r X^r) + \delta U^r \left[i\omega \left(\frac{p_r}{U_t} - \sigma U^t \right) \right] + \delta \sigma (U^t U^t \Gamma^r_{tt}) + \\ & \delta p_r \left[(X^r X^r)_{,r} + X^r X^r (\Gamma^r_{rr} + \Gamma^\mu_{\mu r}) \right] + \delta p_\varphi (Y^\varphi Y^\varphi \Gamma^r_{\varphi\varphi}) = 0, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\nu = \varphi$$

$$\delta U^\varphi \left[w \left(\frac{p_\varphi}{U_t} - \sigma U^t \right) \right] + \delta p_\varphi (k_\varphi Y^\varphi Y^\varphi) = 0, \quad (1.30)$$

donde se definió $\delta p_z = 0$, con el fin de mantener la ecuación de estado del fluido en el disco.

Capítulo 2

ECUACIONES PARA LAS VARIABLES DE ESTADO

En el capítulo anterior se encontraron explícitamente las ecuaciones de conservación perturbadas para un modelo de disco delgado; sin embargo, estas ecuaciones dependen de las variables de estado del fluido, lo que hace necesario hallar expresiones para la densidad de energía superficial y las presiones sobre el disco. Para tal fin, se deben formular las ecuaciones de Einstein correspondientes a un espacio-tiempo estático y axialmente simétrico en el cual existe una distribución discoidal de materia.

Es posible representar la distribución de materia en el espacio mediante una hipersuperficie Σ , definida por la función $l(x^\alpha) = z$, que divide el espacio-tiempo en dos regiones: M^+ en la parte superior y M^- en la parte inferior. Por consiguiente, el vector normal a la hipersuperficie Σ está dado por $n_\alpha = l_{,\alpha} = \delta_\alpha^z$, y las componentes del tensor métrico serán funciones simétricas de la coordenada z , de tal forma que

$$g_{\mu\nu}^-(r, z) = g_{\mu\nu}^+(r, -z), \quad (2.1)$$

mientras que para $z \neq 0$, las primeras derivadas respecto a z de dichas componentes serán funciones impares

$$g_{\mu\nu,z}^-(r, z) = -g_{\mu\nu,z}^+(r, -z), \quad (2.2)$$

donde $g_{\alpha\beta}^\pm$ son los tensores métricos para las regiones definidas por $z > 0$ (M^+) y $z < 0$ (M^-).

Según lo anterior, se puede definir la función

$$[A] = A(M^+) |_{\Sigma} - A(M^-) |_{\Sigma}, \quad (2.3)$$

donde A , es una cantidad tensorial definida en ambos lados de la hipersuperficie Σ y $[A]$ es definido como el salto de A a través de Σ . Tomando el límite cuando z tiende a cero, las discontinuidades en la primera derivada del tensor métrico se pueden escribir como

$$b_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu,z}] = 2g_{\mu\nu,z}^+ |_{z=0}. \quad (2.4)$$

Usando el método de distribuciones [51, 52], la métrica se puede escribir como

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l) g_{\alpha\beta}^+ - \Theta(-l) g_{\alpha\beta}^-, \quad (2.5)$$

donde $\Theta(l)$ es la función de Heaviside,

$$\Theta(l) = \begin{cases} +1 & \text{si } l > 0 \\ 0 & \text{si } l < 0 \\ 1/2 & \text{si } l = 0 \end{cases}$$

que satisface

$$\Theta^2(l) = \Theta(l), \quad \Theta(l) \Theta(-l) = 0, \quad \frac{d}{dx} \Theta(l) = \delta(l),$$

donde $\delta(l)$ es la función delta de Dirac. Considerando que el producto $\Theta(l) \delta(l)$ no está definido, es necesario mostrar que la métrica (2.5) es solución de las ecuaciones de Einstein. Para esto, se debe verificar que las cantidades geométricas construidas a partir de $g_{\alpha\beta}$ están propiamente definidas como una distribución. Al diferenciar (2.5) se obtiene

$$g_{\alpha\beta,\gamma} = \Theta(l) g_{\alpha\beta,\gamma}^+ + \Theta(-l) g_{\alpha\beta,\gamma}^- + n_{\gamma} \delta(l) [g_{\alpha\beta}]. \quad (2.6)$$

El último término de la ecuación (2.6) puede causar singularidades en las conexiones afines por la aparición de términos proporcionales a $\Theta(l) \delta(l)$. Para evitar este problema, se impone como restricción que la métrica sea continua en la hipersuperficie,

$$[g_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\beta}^+ - g_{\alpha\beta}^- = 0. \quad (2.7)$$

De (2.6) y (2.7), los símbolos de Christoffel se pueden escribir como

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Theta(l) \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha+} + \Theta(-l) \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha-}, \quad (2.8)$$

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha\pm}$ se construyen a partir de $g_{\alpha\beta}^{\pm}$. Derivando (2.8), se obtiene

$$\Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha} = \Theta(l) \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha+} + \Theta(-l) \Gamma_{\beta\gamma,\delta}^{\alpha-} + n_{\delta}(l) [\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}], \quad (2.9)$$

por lo que el tensor $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}$ queda descrito por

$$R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \Theta(l) R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha+} + \Theta(-l) R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha-} + \delta(l) \widehat{R}_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}, \quad (2.10)$$

con $R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha\pm}$ los tensores definidos en M^{\pm} y

$$\widehat{R}_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = [\Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}] n_{\gamma} - [\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] n_{\delta}. \quad (2.11)$$

donde

$$[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] = \frac{1}{2} (b_{\beta}^{\alpha} n_{\gamma} + b_{\alpha}^{\beta} n_{\gamma} - b_{\beta\gamma} n^{\alpha}). \quad (2.12)$$

El término $[g_{\alpha\beta,\gamma}] = b_{\alpha\beta} n_{\gamma}$ representa la discontinuidad finita de la derivada normal a la hipersuperficie.

A partir de la ecuaciones (2.11) y (2.12), se puede demostrar que el tensor de Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci correspondientes a la hipersuperficie están dados por

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{1}{2} \{ b_{\delta}^{\alpha} n_{\beta} n_{\gamma} - b_{\gamma}^{\alpha} n_{\beta} n_{\delta} + b_{\beta\gamma} n^{\alpha} n_{\delta} - b_{\beta\delta} n^{\alpha} n_{\gamma} \} \\ \widehat{R}_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} \{ b_{\delta}^{\alpha} n_{\beta} n^{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} n_{\beta} n_{\delta} + b_{\beta\alpha} n^{\alpha} n_{\delta} - b_{\beta\delta} n^{\alpha} n_{\alpha} \} \\ \widehat{R} &= \{ b_{\mu\alpha} n^{\alpha} n^{\mu} - b_{\alpha}^{\alpha} n^{\alpha} n_{\alpha} \}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

El tensor de energía-momentum $T_{\beta\delta}$ se puede expresar como

$$T_{\beta\delta} = \Theta(l) T_{\beta\delta}^{+} + \Theta(-l) T_{\beta\delta}^{-} + \delta(l) Q_{\beta\delta}, \quad (2.14)$$

donde $Q_{\beta\delta}$ es el tensor de energía-momentum asociado a la hipersuperficie y $T_{\beta\delta}^{\pm}$ son los tensores de energía-momentum asociados a M^{\pm} , entonces las ecuaciones de

Einstein se pueden escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_{\beta\delta}^{\pm} - \frac{1}{2}g_{\beta\delta}R^{\pm} &= kT_{\beta\delta}^{\pm} \\ \widehat{R}_{\beta\delta} - \frac{1}{2}g_{\beta\delta}\widehat{R} &= kQ_{\beta\delta}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como la única fuente de campo gravitacional es una distribución delgada de materia, el resto del espacio-tiempo es vacío ($T_{\beta\delta}^{\pm} = 0$), por lo que se satisface

$$\begin{aligned} kQ_{\beta\delta} &= \frac{1}{2} \{ b_{\alpha\delta}n_{\beta}n^{\alpha} - b_{\alpha}^{\alpha}n_{\beta}n_{\delta} + b_{\beta\alpha}n^{\alpha}n_{\delta} - b_{\beta\delta}n^{\alpha}n_{\alpha} - \\ &\quad (b_{\mu\alpha}n^{\alpha}n^{\mu} - b_{\alpha}^{\alpha}n^{\alpha}n_{\alpha})g_{\beta\delta} \}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para el caso de una distribución discoidal finita en un espacio-tiempo M en coordenadas cuasi-cilíndricas $x^{\alpha} = (t, r, \varphi, z)$ y considerando una hipersuperficie Σ definida por la función $l(x^{\alpha}) = z$, con vector normal $n_{\alpha} = \delta_{\alpha}^z$, la ecuación (2.16) toma la forma

$$kQ^{\mu}_{\beta} = \frac{1}{2} \{ b^{z\mu}\delta_{\beta}^z - g^{\mu z}\delta_{\beta}^z b^{\alpha}_{\alpha} + g^{\mu z}b^z_{\beta} - g^{zz}b^{\mu}_{\beta} - (b^{zz} - g^{zz}b^{\alpha}_{\alpha})\delta^{\mu}_{\beta} \}, \quad (2.17)$$

De esta última ecuación, se puede demostrar que los elementos del tensor de energía-momentum superficial son

$$Q^t_t = \frac{1}{2k} \{ -b^{zz} + g^{zz} (b^r_r + b^{\varphi}_{\varphi} + b^z_z) \} \quad (2.18)$$

$$Q^r_r = \frac{1}{2k} \{ -b^{zz} + g^{zz} (b^t_t + b^{\varphi}_{\varphi} + b^z_z) \} \quad (2.19)$$

$$Q^{\varphi}_{\varphi} = \frac{1}{2k} \{ -b^{zz} + g^{zz} (b^t_t + b^r_r + b^z_z) \} \quad (2.20)$$

$$Q^z_z = 0, \quad (2.21)$$

en donde Q^t_t representa la densidad de energía superficial (σ), Q^r_r la presión radial (p_r), Q^{φ}_{φ} la presión azimutal (p_{φ}) y k la constante de la ecuación de campo de Einstein en unidades geometrizadas ($k = 8\pi$).

Capítulo 3

DISCO DELGADO CON PRESIÓN RADIAL Y AZIMUTAL

3.1. Disco isótropo de Schwarzschild

Una clase de disco con presión radial y azimutal se puede obtener al aplicar el método de desplazamiento, corte y reflexión a la métrica isótropa de Schwarzschild. Tomando las funciones métricas Ψ_i como

$$\Psi_1 = \ln \left[\frac{2R - m}{2R + m} \right], \quad \Psi_2 = \Psi_3 = \ln \left[1 + \frac{m}{2R} \right]^2, \quad (3.1)$$

y reemplazando en la ecuación (1.1) se tiene que la métrica isótropa de Schwarzschild está descrita por

$$ds^2 = - \left(\frac{2R - m}{2R + m} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2R} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2) \quad (3.2)$$

donde m es una constante positiva y $R^2 = r^2 + (|z| + a)^2$.

Utilizando la métrica definida en (3.2) y aplicando la definición (2.4), se obtienen las siguientes expresiones para el salto de la primera deriva de la métrica a través del plano $z = 0$,

$$b_{tt} = -16mR_{,z} \frac{(2R+m)}{(2R+m)^3} \Big|_{z=0^+} \quad b_{rr} = -\frac{mR_{,z}}{2R^5} (2R+m)^3 \Big|_{z=0^+} \quad (3.3)$$

$$b_{\varphi\varphi} = -\frac{mr^2R_{,z}}{2R^5} (2R+m)^3 \Big|_{z=0^+} \quad b_{zz} = -\frac{mR_{,z}}{2R^5} (2R+m)^3 \Big|_{z=0^+}$$

De las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20) y (3.3), se obtienen las expresiones para la presión y la densidad de energía superficial del modelo,

$$\sigma = \frac{16maR_0^2}{\pi(2R_0+m)^5}, \quad (3.4)$$

$$p = p_r = p_\varphi = \frac{8m^2aR_0^2}{\pi(2R_0+m)^5(2R_0-m)}, \quad (3.5)$$

donde $R_0 = R(r, z = 0)$.

Es bien sabido que al aplicar el método de desplazamiento, corte y reflexión, pueden generarse discos de materia exótica [53]. Estas anomalías se pueden evitar garantizando que el tensor de energía-momentum cumple las condiciones de energía, es decir, $\sigma \geq 0 \wedge \sigma + p_r + p_\varphi \geq 0$. De la ecuación (3.4) se puede observar que la densidad de energía superficial siempre es positiva, de manera que se cumple la condición de energía débil. Para obtener valores positivos de la presión radial y azimutal se debe cumplir que

$$m < 2R_0 \quad \longrightarrow \quad m < 2\sqrt{r^2 + a^2}, \quad (3.6)$$

de tal forma, que se satisface la condición de energía dominante

$$\sigma + 2p \geq 0. \quad (3.7)$$

Para garantizar que la ecuación (3.7) se satisface, es necesario encontrar una relación directa entre los parámetros m y a ; para tal fin, se hace necesario utilizar la definición de la velocidad de propagación del sonido en el fluido v definida como $v^2 = p_{,r}/\sigma_{,r}$ la cual se puede calcular a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.5), obteniendo

$$v^2 = \frac{m(4R_0 - m)}{3(2R_0 - m)^2}. \quad (3.8)$$

De la condición $v^2 < 1$, resulta $R_0 > m$ y $R_0 < \frac{m}{3}$, que junto con la condición (3.6), da como resultado

$$m < \sqrt{r^2 + a^2}. \quad (3.9)$$

Esta desigualdad es válida en todo el disco si $m < a$.

Por otra parte, para que las perturbaciones cumplan la ecuación de estado del fluido, deben satisfacer

$$\delta p = p_{,r} dr \quad \delta \sigma = \sigma_{,r} dr.$$

o equivalentemente

$$\delta p = \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma. \quad (3.10)$$

Denotando los coeficientes que acompañan a las variables perturbadas en la ecuación (1.28) como A_i , en la ecuación (1.29) como B_i y en la ecuación (1.30) como C_i , y reemplazando la relación en (3.10), se obtiene

$$\delta U^r = -\frac{B_1}{B_2} \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma_{,r} - \frac{1}{B_2} \left\{ B_1 \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right)_{,r} + \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) [B_4 + B_5] + B_3 \right\} \delta \sigma \quad (3.11)$$

$$\delta U^\varphi = -\frac{C_2}{C_1} \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \delta \sigma. \quad (3.12)$$

Al derivar la expresión (3.11) y reemplazar las expresiones para δU^r y δU^φ en la ecuación (1.28), se encuentra la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para la densidad de energía perturbada

$$A \delta \sigma_{,rr} + B \delta \sigma_{,r} + C \delta \sigma = 0, \quad (3.13)$$

donde los coeficientes A , B y C , que dependen de los parámetros a , m , w , k_φ y r , quedan descritos como

$$A = -\frac{A_1 B_1}{B_2} \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right),$$

$$B = A_1 \left\{ -\frac{2B_1}{B_2} \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right)_{,r} + \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right) \left[\frac{B_1 B_{2,r}}{B_2^2} - \frac{B_{1,r} + B_4 + B_5}{B_2} \right] - \frac{B_3}{B_2} \right\} - \frac{A_2 B_1}{B_2} \left(\frac{p_{,r}}{\sigma_{,r}} \right),$$

$$\begin{aligned}
C = & A_1 \left\{ -\frac{B_1}{B_2} \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right)_{,rr} + \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right)_{,r} \left[\frac{B_1 B_{2,r}}{B_2^2} - \frac{B_{1,r} + B_4 + B_5}{B_2} \right] + \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) \left[\frac{B_{2,r}}{B_2^2} \right. \right. \\
& \left. \left. (B_4 + B_5) - \frac{B_{4,r} + B_{5,r}}{B_2} \right] + \frac{B_{2,r} B_3}{B_2^2} - \frac{B_{3,r}}{B_2} \right\} - \frac{A_2}{B_2} \left\{ B_1 \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right)_{,r} + \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) \right. \\
& \left. [B_4 + B_5] + B_3 \right\} - \frac{A_3 C_2}{C_1} \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) - A_4.
\end{aligned}$$

Como se puede observar, dada la complejidad de la ecuación (3.13), ésta debe resolverse numéricamente. Para este fin, se imponen dos condiciones de contorno, una en el centro del disco y la otra en el punto donde termina el mismo. Sin embargo, el disco considerado tiene extensión infinita, por lo que se debe hacer un corte en la coordenada radial. Teniendo en cuenta lo anterior, se define el radio de corte r_c de la siguiente manera: la materia contenida en el disco hasta el radio de corte es aproximadamente igual al 95 % del total de la masa del disco infinito, y el restante 5 % de la materia se distribuye a lo largo del plano $z = 0$ desde r_c hasta infinito*. Además, se asume que en $r = 0$ la perturbación es el 10 % del valor de la densidad de energía sin perturbar y para $r = r_c$ la perturbación desaparece.

La masa del disco puede calcularse a partir de la expresión

$$M_T = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma \sqrt{g_{zz}} \sqrt{g_{rr}} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} dr d\varphi. \quad (3.14)$$

En 2003 Vogt y Letelier [37] realizaron un análisis del comportamiento de la densidad de energía de un disco delgado isótropo de Schwarzschild para distintos valores de a y m , determinando que los valores de estos parámetros que mejor describen el perfil de densidad de energía, son $m \approx 0,5$ y $a \approx 0,6$. Por medio de la ecuación (3.14), la condición para el radio de corte descrita anteriormente, y tomando valores de $m = 0,5$ y $a = 0,6$, se encontró un valor de $r_c \approx 10$. A partir de los valores obtenidos y de las condiciones descritas se resolvió numéricamente la ecuación diferencial (3.13). Las figuras 3.1 y 3.2 muestran el perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada para diferentes valores de w y k_φ , respectivamente. En la figura 3.1 se puede observar que un aumento en el modo w incrementa la frecuencia de las oscilaciones; además, se puede ver que estas oscilaciones decaen aproximadamente con la misma rapidez independientemente del modo de oscilación.

*Se escoge el 95 % de la masa total para determinar el radio de corte, debido a que para valores mayores del porcentaje el valor de σ decrece rápidamente, por lo que la perturbación considerada inicialmente en $r = 0$ sería tan débil comparada con σ que no afectaría el sistema.

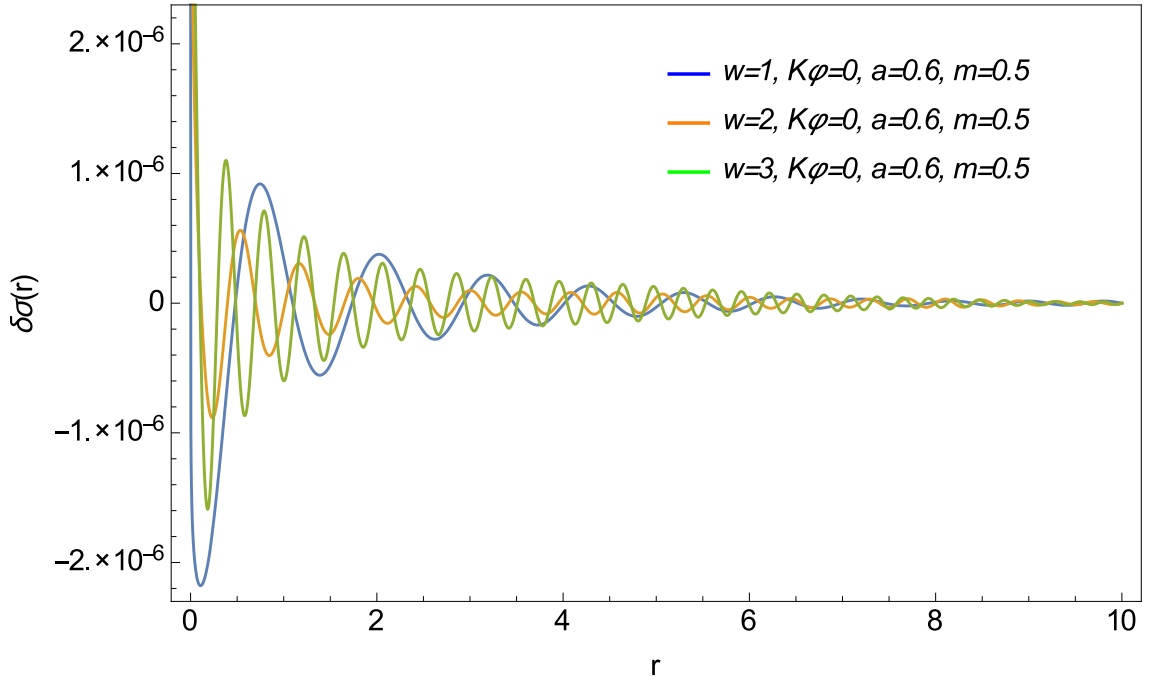


Figura 3.1: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes modos de oscilación w en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa un aumento en la frecuencia al incrementar w .

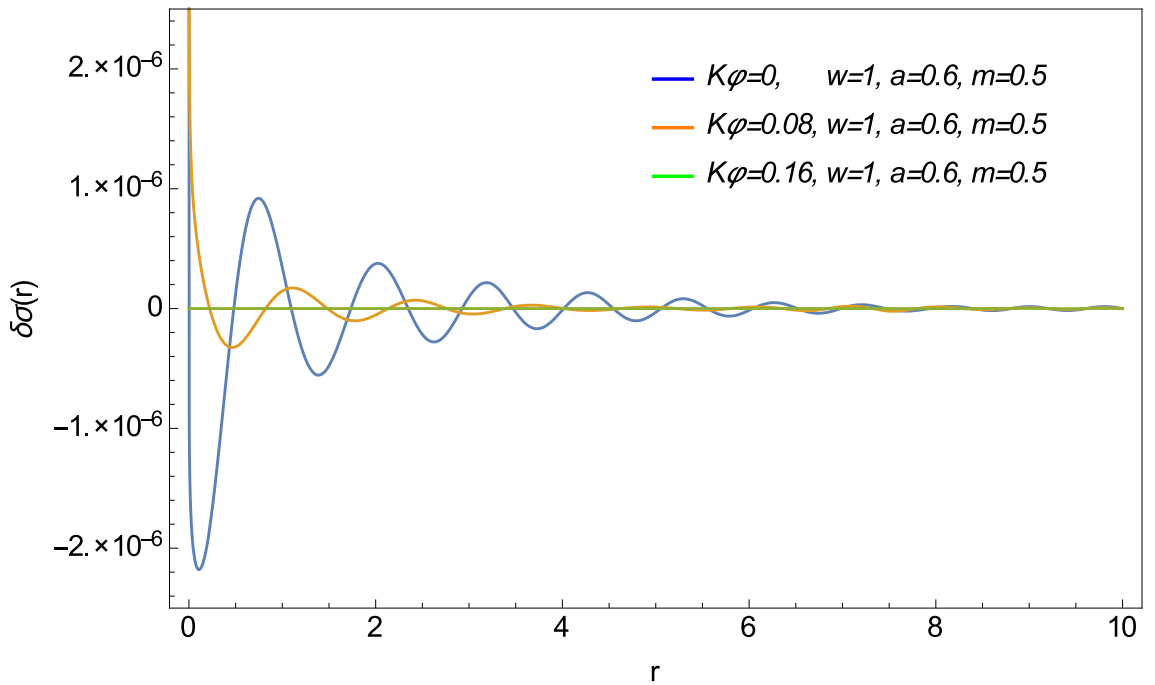


Figura 3.2: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores del número de onda k_φ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa que al crecer k_φ la amplitud decrece.

Por otro lado, en la Fig.3.2 se puede apreciar un decaimiento en la amplitud de oscilación cuando aumenta el número de onda; por ejemplo, para $k_\varphi = 0,08$ la amplitud decrece aproximadamente un orden de magnitud, mientras que al duplicar el número de onda ($k_\varphi = 0,16$) la amplitud prácticamente se hace cero. Finalmente, se evidencia que la perturbación generada sobre la densidad de energía en el disco decae a cero independientemente del valor de w y k_φ , por lo tanto se puede considerar que σ es estable bajo una perturbación de la forma (1.27).

El perfil de amplitudes para la presión perturbada se presenta en la figura 3.3. Se observa que la amplitud para δp tiene un comportamiento oscilatorio similar al mostrado por la densidad de energía perturbada; adicionalmente, se puede notar en la presión perturbada el mismo efecto presentado por $\delta\sigma$, al cambiar el modo de oscilación. Sin embargo, la diferencia entre ambas variables radica en que la amplitud de la presión decrece más rápido, generando que la perturbación desaparezca, por lo cual la presión en el disco también se considera estable.

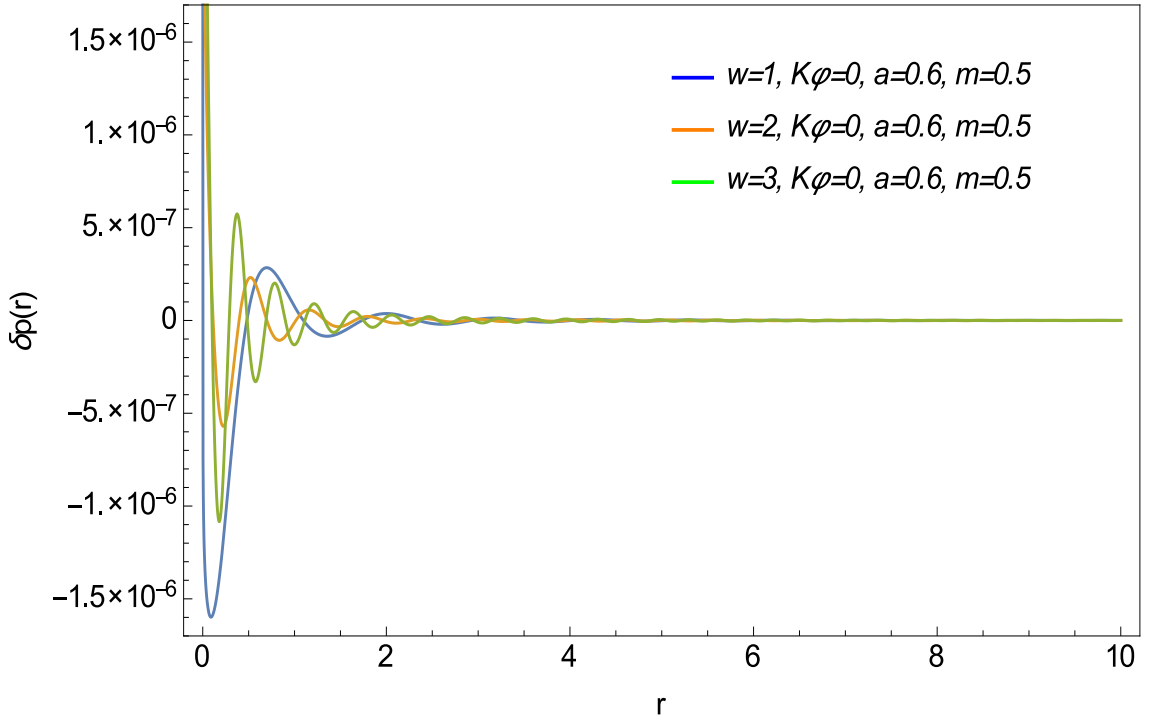


Figura 3.3: Perfil de amplitudes de la presión perturbada δp para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. Se observa un aumento en la frecuencia al incrementar w similar al presentado por $\delta\sigma$; sin embargo, la perturbación sobre la presión se anula más rápido.

Los perfiles para las componentes azimutal y radial de la velocidad perturbada se muestran en las Figuras 3.4 y 3.5. Al igual que las variables analizadas anteriormente, las velocidades δU^z y δU^r exhiben un aumento en la frecuencia al incrementar el modo de oscilación; además, se observa que los patrones de amplitudes presentan diferencias entre la componente azimutal y la componente radial. Por otro lado, la amplitud de la perturbación para la velocidad radial comienza a crecer hasta llegar a un punto máximo donde decae nuevamente. Este comportamiento se manifiesta para los tres modos w . Un aspecto a considerar es que la velocidad radial de las partículas debe ser menor a la velocidad de escape v_e , de no ser así, entonces se estaría describiendo un disco que no contiene partículas en su interior. Es bien conocido que la velocidad v_e necesaria para vencer la fuerza generada por un potencial gravitacional Φ se puede calcular como

$$v_e = \sqrt{2\Phi}. \quad (3.15)$$

Para poder encontrar Φ y por ende v_e , se utilizará la aproximación de campo débil. En el límite newtoniano de la relatividad general se puede descomponer la métrica del espacio-tiempo $g_{\alpha\beta}$ de la forma

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (3.16)$$

donde $\eta_{\alpha\beta}$ es la métrica de Minkowski y $h_{\alpha\beta}$ es una función que describe la desviación de la planitud y puede relacionarse con el potencial gravitacional. Se puede demostrar que la componente g_{tt} de la métrica está dada por [54]

$$g_{tt} = 1 + 2\Phi. \quad (3.17)$$

Despejando el potencial de la ecuación (3.17) e introduciéndolo en la expresión (3.15), escogiendo la signatura $(-1, 1, 1, 1)$, se obtiene que la velocidad de escape es

$$v_e = \frac{2\sqrt{2mR}}{2R + m}. \quad (3.18)$$

Para el conjunto de parámetros $a = 0,6$, $m = 0,5$ y $r = 10$, la velocidad de escape es $v_e = 0,308$, y de la Fig. 3.5 se observa que para los tres modos de oscilación las partículas se mueven a una velocidad menor a 8×10^{-5} , garantizando que todas las partículas permanecen dentro del disco^{**}. Este resultado demuestra que para los parámetros escogidos y las condiciones impuestas el modelo presenta

^{**}Esta comparación tiene lugar debido a que en las unidades geometrizadas la velocidad es adimensional

un comportamiento consistente y puede ser utilizado para describir modelos astrofísicos.

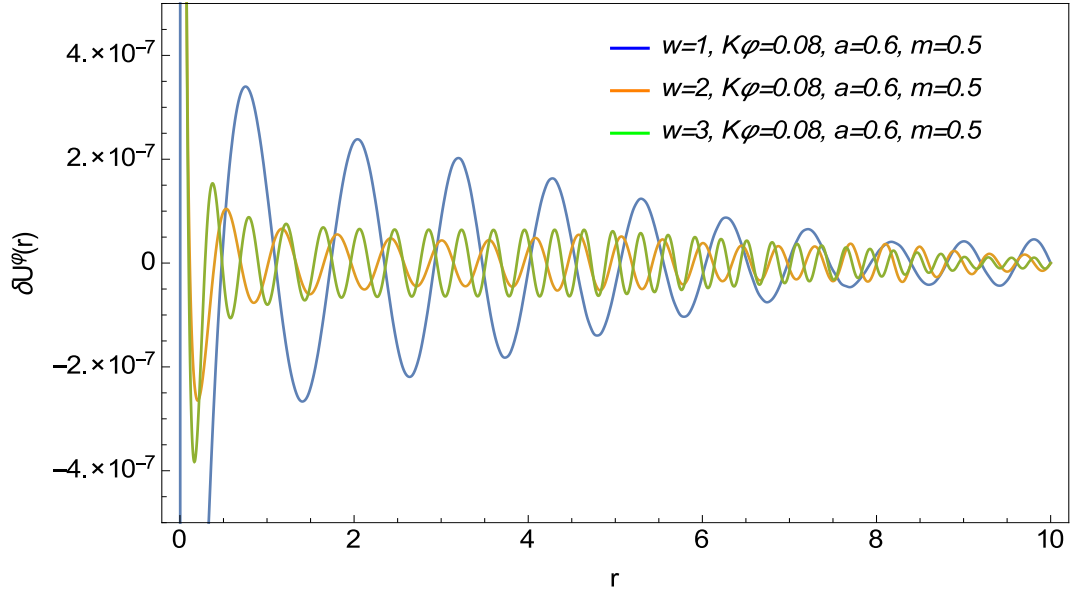


Figura 3.4: Perfil de amplitudes de la componente azimutal de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild. El cálculo de la velocidad azimutal se realizó con $k_\varphi = 0,08$ debido a que $\delta U^z = 0$ para $k_\varphi = 0$.

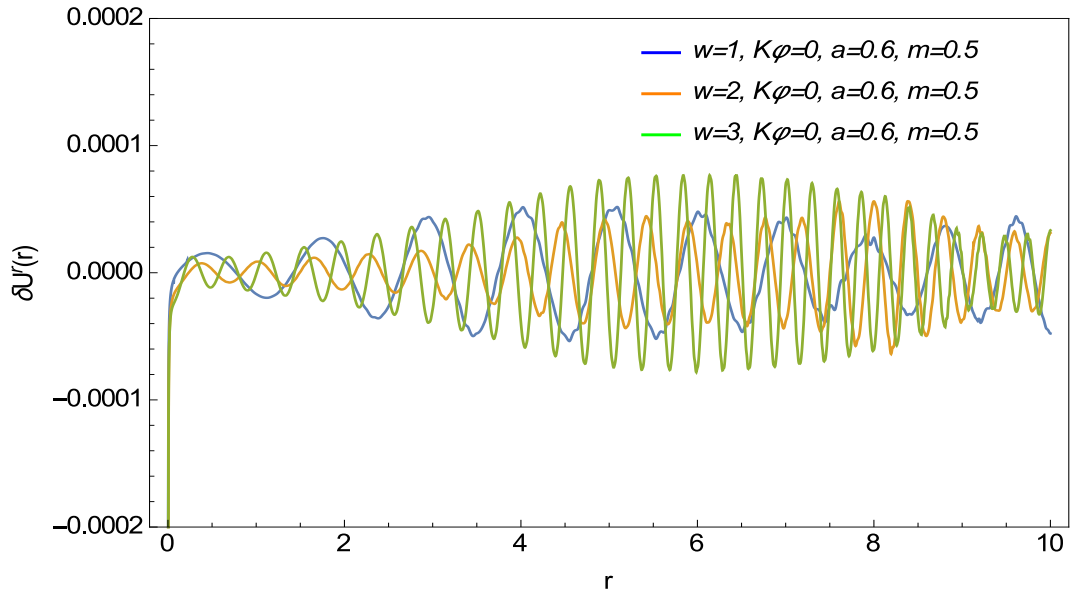


Figura 3.5: Perfil de amplitudes de la componente radial de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación con $k_\varphi = 0$ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild.

Los resultados analizados anteriormente se obtuvieron utilizando un criterio de masa sencillo y no muy aceptado; por esta razón, en lo que sigue se realizarán los mismos cálculos usando un criterio de masa estándar, la masa de Komar [52], la cual se describe como

$$M_T = 2 \int_{\Sigma} \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) n^\alpha \xi_{(t)}^\beta \sqrt{h} d^3 y, \quad (3.19)$$

en donde Σ es una hipersuperficie tipo espacio, n^α es un vector tipo tiempo normal a Σ , $\xi_{(t)}^\beta$ es el vector de Killing tipo tiempo y h es el determinante de la métrica asociada a Σ . Para una métrica estática, axialsimétrica y diagonal se tiene que

$$n^\alpha = -\frac{g^{\alpha\beta}}{\sqrt{|g^{tt}|}} \delta_\beta^t, \quad \xi_{(t)}^\beta = \delta_t^\beta, \quad h = g_{zz} g_{rr} g_{\varphi\varphi},$$

por lo que la masa de Komar para un disco delgado isótropo de Schwarzschild es

$$M_T = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\sigma + 2p) e^{\Psi_1} \sqrt{g_{zz}} \sqrt{g_{rr}} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} dr d\varphi. \quad (3.20)$$

Introduciendo las expresiones encontradas para σ , p , e^{Ψ_1} y $g_{\alpha\beta}$ en la ecuación (3.20) y resolviendo la integral, se llega a que $M_T = m$. Teniendo en cuenta este resultado y el método descrito previamente para calcular el radio de corte, se encuentra que $r_c \approx 12$. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 3.6 y 3.7, donde se observa que los perfiles para $\delta\sigma$ presentan un comportamiento oscilatorio similar al mostrado en la Fig.3.1 y Fig.3.2, ya que las oscilaciones aumentan al incrementar el valor de w y la amplitud decrece al elevar el valor de k_φ . Por otra parte, se evidencia que la amplitud de la oscilación decae más rápido, en consecuencia la perturbación prácticamente es nula en la mayor parte del disco para los modos ($w = 1$, $k_\varphi = 0,08$) y ($w = 1$, $k_\varphi = 0,16$). Las características exhibidas por la densidad de energía perturbada indican que esta variable permanece estable bajo la perturbación estudiada.

En las Figuras 3.8 y 3.9 se presenta el perfil de amplitudes para las componentes azimutal y radial de la velocidad perturbada, para diferentes modos de oscilación. De la figura 3.8, se puede ver que la amplitud de δU^φ decrece a medida que la perturbación atraviesa el disco; no obstante, cuando la perturbación se acerca al final del disco la amplitud tiende a permanecer constante pero cercana a cero para los tres modos de oscilación. En contraste, la amplitud descrita por δU^r inicialmente crece hasta alcanzar nuevamente un máximo. Este comportamiento no es evidente para los dos primeros modos w ya que la perturbación es muy leve y solo se aprecia al terminar el disco (ver Fig. 3.9).

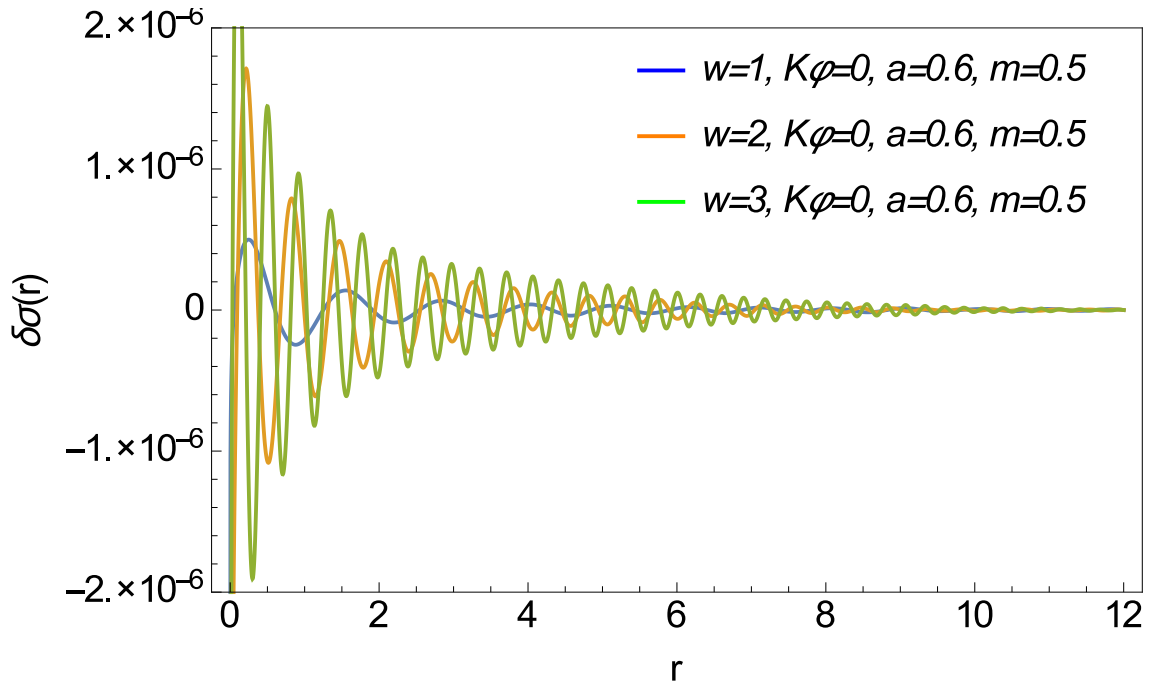


Figura 3.6: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes modos de oscilación w en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar.

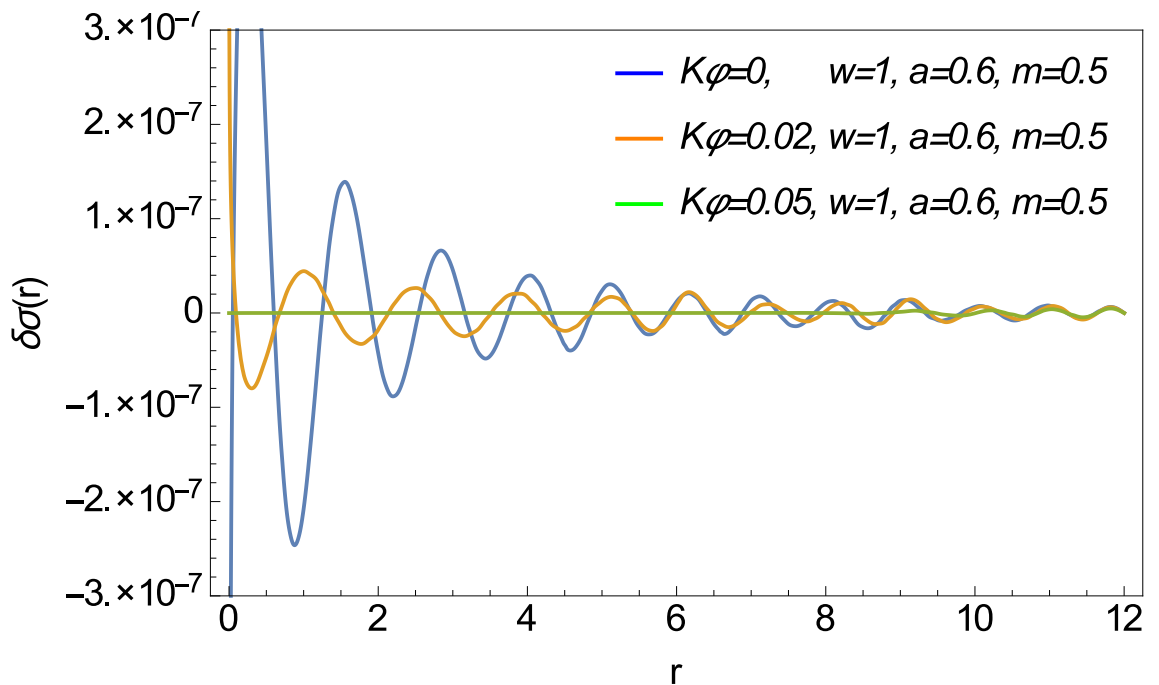


Figura 3.7: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores del número de onda k_φ en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar.

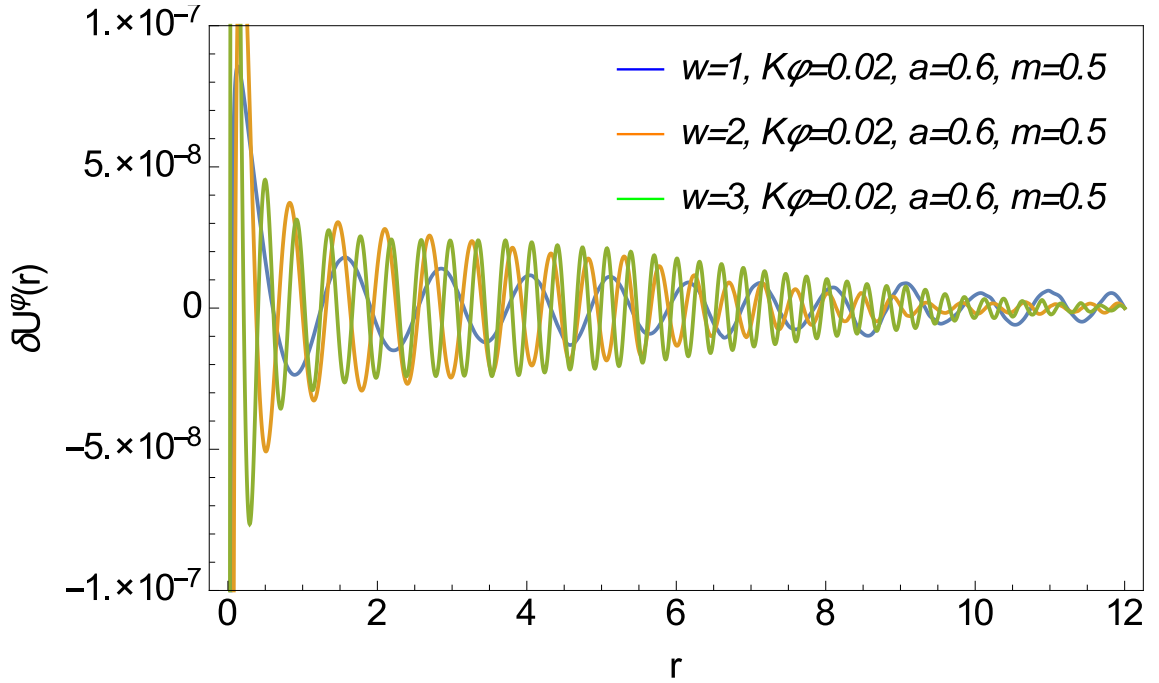


Figura 3.8: Perfil de amplitudes para las componentes azimutal de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar.

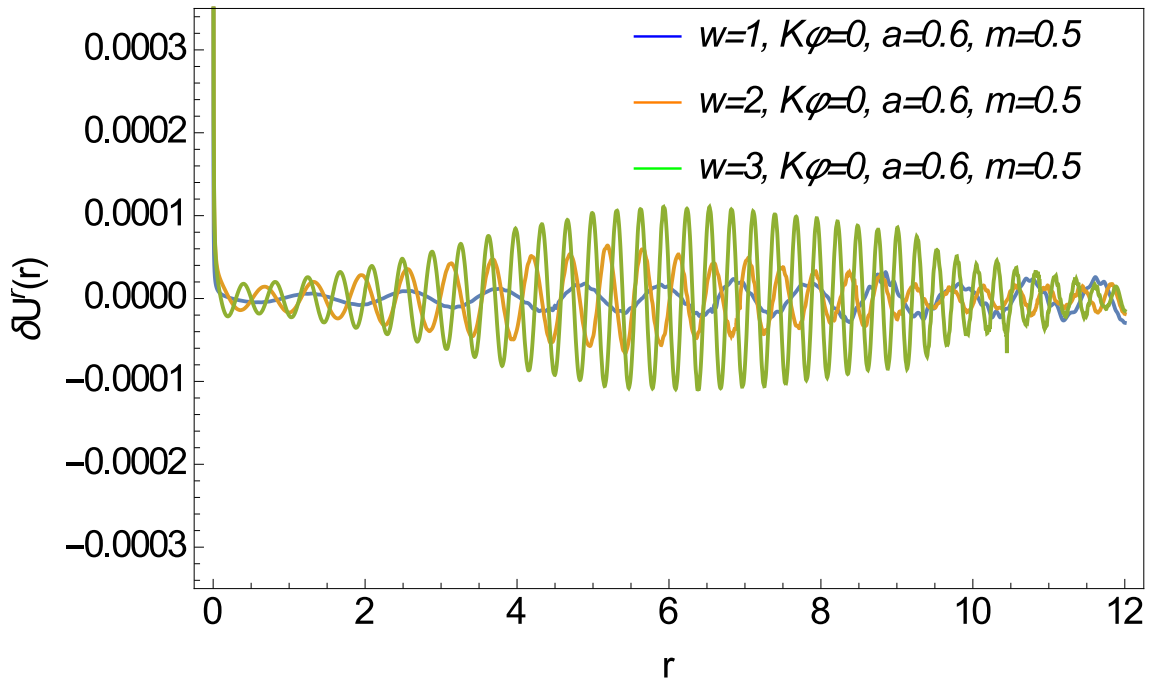


Figura 3.9: Perfil de amplitudes para las componentes radial de la velocidad perturbada para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar.

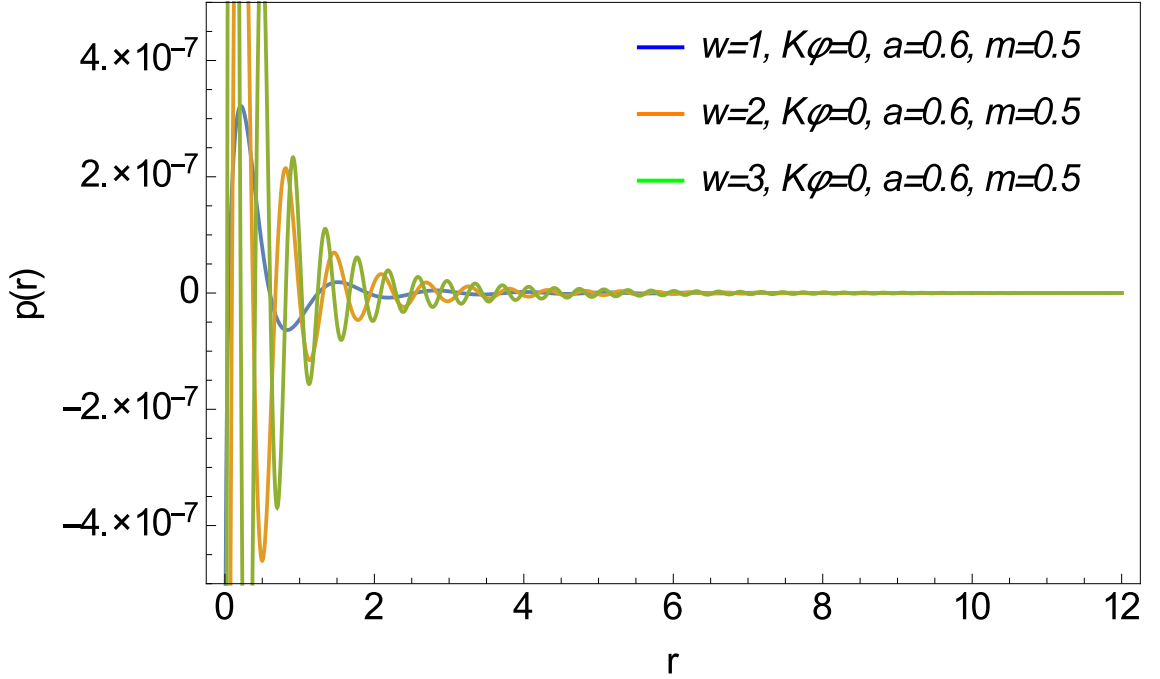


Figura 3.10: Perfil de amplitudes de la presión perturbada δp para diferentes modos de oscilación en un disco delgado isótropo de Schwarzschild obtenidos a partir de la definición de masa de Komar.

La velocidad de escape, en este caso, toma el valor $v_e = 0,283$ mientras que la velocidad radial de las partículas es menor a 2×10^{-4} , por lo que no hay escape de fluido hacia el exterior del disco. Incluso en el caso límite en donde el radio de corte contiene el 99.9% de la masa total del disco ($r_c \approx 600$), la velocidad de escape es $40,8 \times 10^{-3}$ mientras que la velocidad radial es por lo menos dos ordenes de magnitud menor, lo que sugiere que v_e crece mas rapido que δU_r , de tal manera que no existe algún modo (w, k_φ) en el cual las partículas puedan escapar del disco. Este resultado no está de acuerdo con el estudio realizado por Ujevic y Letelier [55], en el que crece la amplitud de la velocidad radial al infinito para algunos modos de oscilación permitiendo la posibilidad de inestabilidad en este modelo. Finalmente, es evidente que la velocidad radial y azimutal presentan patrones similares a los calculados con el criterio de masa descrito en (3.14), lo que permite inferir que la velocidad de las partículas en el disco no se ve afectada por la definición de masa utilizada. Por otra parte, de la figura 3.10 se observa que el perfil de amplitudes para la presión perturbada tiene algunos aspectos semejantes a los exhibidos por la densidad de energía perturbada, la principal diferencia entre estas dos variables es que las amplitudes tienden a cero más rápido para δp y prácticamente la perturbación desaparece alrededor de la mitad del disco. Esto permite concluir que el criterio de masa afecta la frecuencia de oscilación y el orden de magnitud de la

amplitud, pero las tendencias y los patrones de las variables perturbadas no se ven afectados, luego la estabilidad del sistema es independiente del criterio establecido para determinar la masa total del disco.

Capítulo 4

DISCOS DELGADOS CON PRESIÓN AZIMUTAL

4.1. Disco delgado de Chazy-Curzon

La métrica de Chazy-Curzon en coordenadas de Weyl está descrita por

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{-2\Phi} r^2 d\varphi^2 + e^{2(\Lambda-\Phi)}(dr^2 + dz^2), \quad (4.1)$$

donde las funciones Φ y Λ están dadas por

$$\Phi = -\frac{m}{R}, \quad \Lambda = -\frac{m^2 r^2}{2R^4}, \quad (4.2)$$

con $R^2 = r^2 + (|z| + a)^2$. De la métrica (4.1) y la definición (2.4), se obtienen las expresiones para el salto de la primera derivada de la métrica a través del plano $z = 0$,

$$\begin{aligned} b_{tt} &= -\frac{4ma}{R^3} e^{2\Phi} \Big|_{z=0^+} & b_{rr} &= \frac{4ma}{R^3} \left(\frac{2mr^2}{R^3} - 1 \right) e^{2(\Lambda-\Phi)} \Big|_{z=0^+} \\ b_{\varphi\varphi} &= -\frac{4ma}{R^3} r^2 e^{-2\Phi} \Big|_{z=0^+} & b_{zz} &= \frac{4ma}{R^3} \left(\frac{2mr^2}{R^3} - 1 \right) e^{2(\Lambda-\Phi)} \Big|_{z=0^+}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Las expresiones para la presión y la densidad de energía superficial de un disco delgado de Chazy-Curzon, se obtienen de las ecuaciones (2.18), (2.19), (2.20) y las definiciones (4.2) y (4.3),

$$\sigma = -\frac{ma}{2\pi R_0^3} \left[\frac{mr^2}{R_0^3} - 1 \right] e^{-2(\Lambda_0 - \Phi_0)}, \quad (4.4)$$

$$p_\varphi = \frac{m^2 a}{2\pi R_0^4} \frac{r^2}{R_0^2} e^{-2(\Lambda_0 - \Phi_0)}, \quad (4.5)$$

$$p_r = 0, \quad (4.6)$$

donde R_0 , Λ_0 y Φ_0 son las respectivas funciones evaluadas en $z = 0$. Como se evidencia en la ecuación (4.6) el disco descrito por la métrica de Chazy-Curzon no posee presión radial. Sin embargo, estudios realizados han mostrado la posible existencia de discos con solo presión azimutal, en donde se podría generar estabilidad si se tienen corrientes circulares de partículas moviéndose en sentidos opuestos; es decir, en contra-rotación [12, 32, 56]. Al igual que en el caso del disco delgado isótropo de Schwarzschild, este modelo también debe cumplir con las condiciones de energía; si se cumple la condición de energía dominante ($\sigma + p \geq 0$), entonces se debe cumplir que la velocidad de contra-rotación v debe ser ≤ 1 . González *et al.* [32] analizaron modelos de discos delgados en contra-rotación y Bicak *et al.* [16] estudiaron específicamente el modelo de disco de Chazy-Curzon, demostrando en ambas investigaciones que $v^2 = p / \sigma$. A partir de las ecuaciones (4.4) y (4.5) se calcula la velocidad de contra-rotación

$$v^2 = \frac{mr^2}{R_0^3 - mr^2}. \quad (4.7)$$

Tomando la derivada de la expresión anterior e igualando a cero se encuentra que el máximo valor de v^2 tiene lugar cuando $r = \sqrt{2}a$, entonces $v^2 < 1$ cuando

$$\frac{m}{a} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \vee \quad \frac{m}{a} > \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (4.8)$$

La condición de energía débil establece que $\sigma \geq 0$, es decir $m/a \leq 3\sqrt{3}/2$. Dado que las condiciones de energía débil y dominante deben satisfacerse simultáneamente, se tiene que

$$m/a \leq 3\sqrt{3}/4 \approx 1,3. \quad (4.9)$$

Puesto que para un disco de Chazy-Curzon $p_r = \delta p_r = 0$, de las ecuaciones (1.29) y (1.30) se obtienen δU^r y δU^φ . Introduciendo este resultado en la ecuación (1.28), junto con las expresiones (4.4) y (4.5), se encuentra la siguiente ecuación diferencial de primer orden para la densidad de energía perturbada

$$A\delta\sigma_{,r} + B\delta\sigma = 0, \quad (4.10)$$

donde A y B son funciones de los parámetros a , m , w , k_φ , r y tienen la forma

$$A = \frac{1}{w} \left[U^t U^t \Gamma_{tt}^r + Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^t \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) \right],$$

$$B = \left\{ \frac{1}{w} \left[(U^t U^t \Gamma_{tt}^r)_{,r} + (Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^t)_{,r} \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) + Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^t \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right)_{,r} \right] - \frac{1}{w^2 \sigma U^t} \right. \\ \left. \left[U^t U^t \Gamma_{tt}^r + Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^t \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) \right] (w^2 \sigma U^t)_{,r} + [(\sigma U^t)_{,r} + \sigma U^t (2\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\mu r}^\mu)] \right. \\ \left. \left[\frac{1}{w \sigma U^t} \left(U^t U^t \Gamma_{tt}^r + Y^\varphi Y^\varphi \Gamma_{\varphi\varphi}^t \left(\frac{p,r}{\sigma,r} \right) \right) \right] - \frac{k_\varphi^2 Y^\varphi Y^\varphi}{w} + w U^t U^t \right\}.$$

Como la densidad de energía encontrada para este modelo de disco se comporta de forma similar a la descrita en (3.4); es decir, σ decrece rápidamente a medida que aumenta la coordenada radial, entonces se sigue un procedimiento similar, asumiendo las mismas condiciones que se usaron para resolver la ecuación diferencial de $\delta\sigma$ del modelo isótropo de Schwarzschild. Para solucionar la ecuación (4.10) se usaron valores de $a = 0,4$ y $m = 0,5$, los cuales satisfacen las condiciones de energía ($m/a \approx 1,3$).

En las Figuras 4.1 y 4.2 se presenta el perfil de amplitudes para la densidad de energía perturbada en un disco de Chazy-Curzon, variando el modo de oscilación w y el número de onda k_φ . Se observa que la amplitud realiza una oscilación, pero esta tendencia no se mantiene y la amplitud comienza a crecer rápidamente independientemente del valor de w y de k_φ . Estos resultados evidencian que la densidad de energía, y por ende la presión y las velocidades, presentan inestabilidades para este modelo. Para descartar que el efecto anterior se deba a los valores escogidos de a , en la Figura 4.3 se presenta el perfil de amplitud para la densidad de energía perturbada en el intervalo $0 \leq m/a \leq 1,3$. De la figura se observa que al variar el parámetro a se siguen presentando inestabilidades, pues la amplitud de $\delta\sigma$ tiende a infinito independientemente del valor escogido. El origen de la inestabilidad, se puede apreciar si se considera que la ecuación diferencial (4.10) tiene soluciones de la forma

$$\delta\sigma = e^{-\int B/A dr}, \quad (4.11)$$

lo que implica que las inestabilidades son una consecuencia de las indeterminaciones en la función B/A .

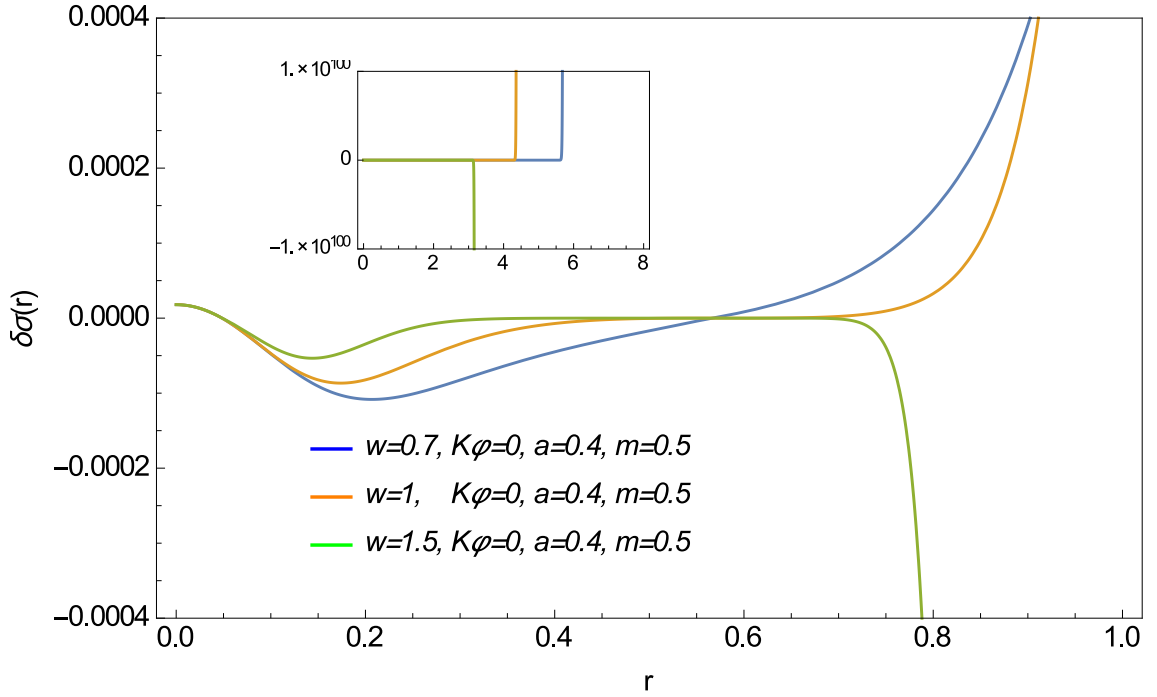


Figura 4.1: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de w en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes.

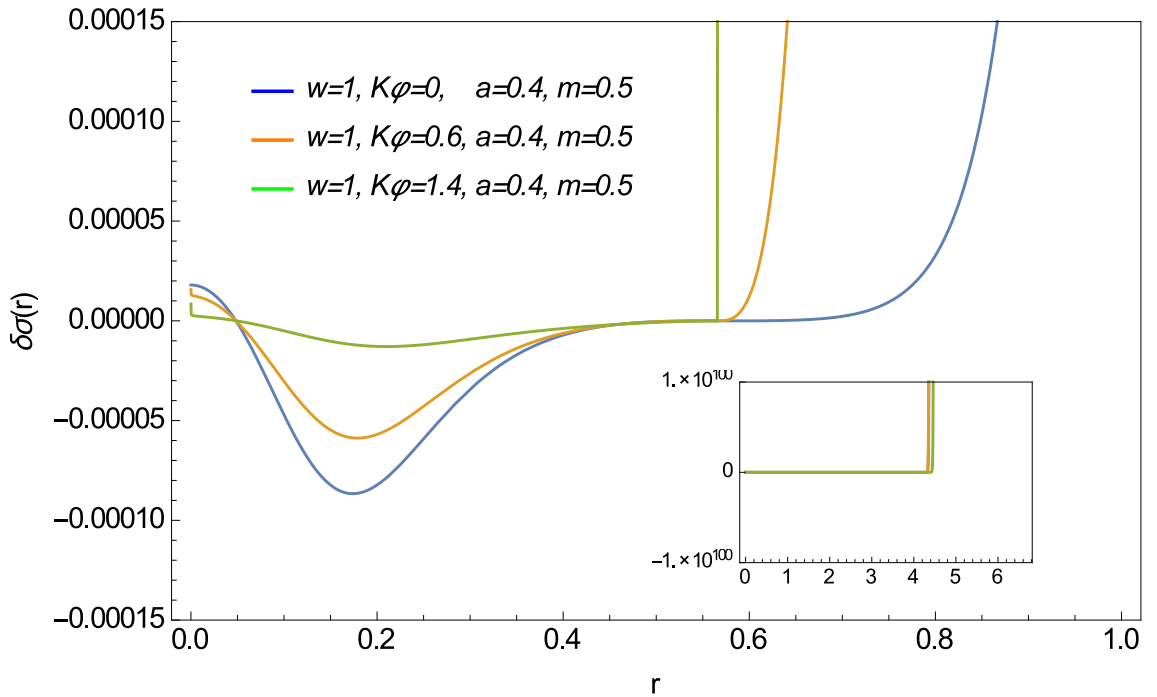


Figura 4.2: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de k_φ en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes.

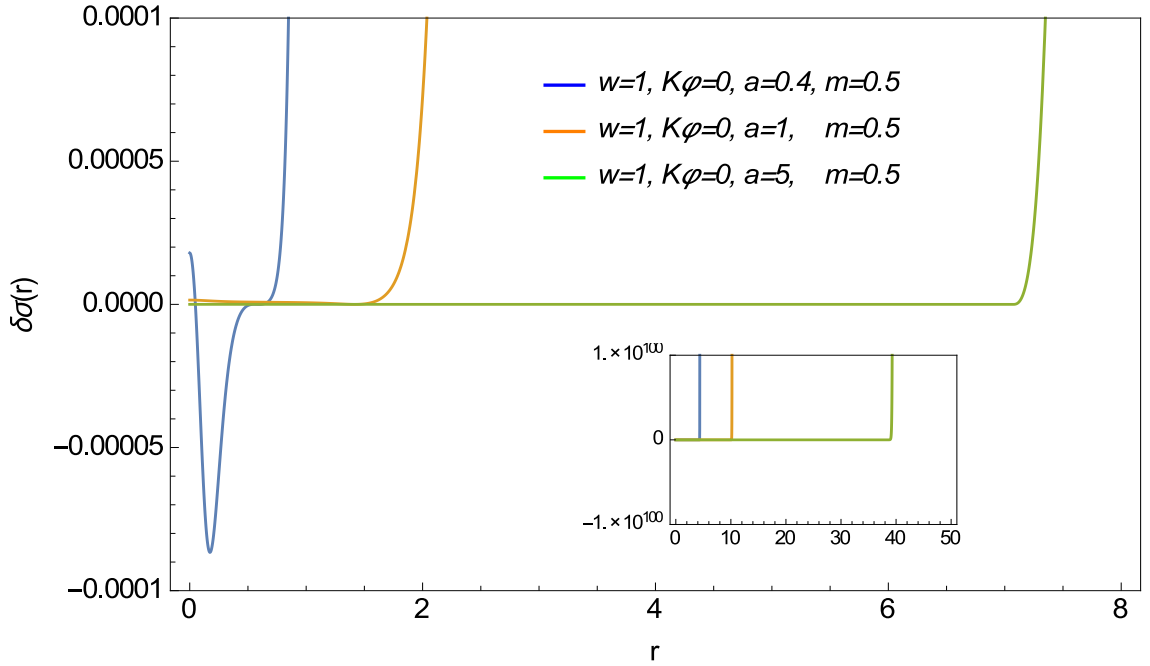


Figura 4.3: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de la relación m/a en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes.

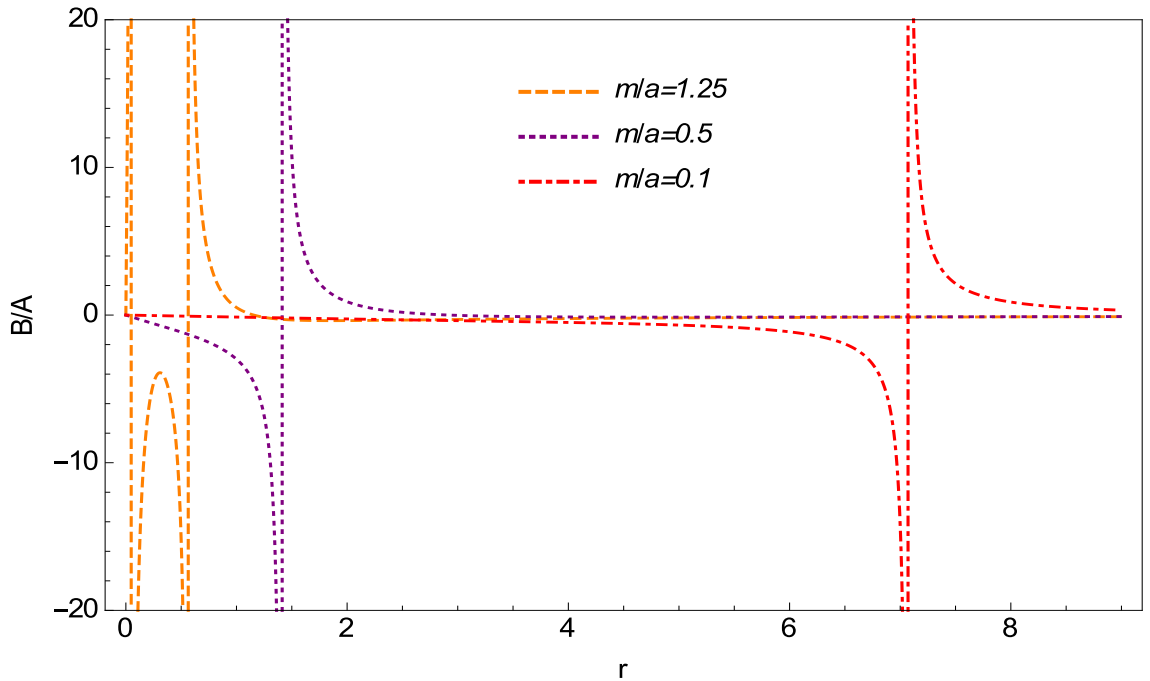


Figura 4.4: Gráfica para la función B/A presente en la solución de la densidad de energía perturbada para el disco delgado obtenido a partir de la métrica de Chazy-Curzon para valores de $a = 0,4; 1; 5$. Como la función B/A no depende de los valores de w y k_φ los resultados se obtuvieron tomando valores de $w = k_\varphi = 0$ y $m = 0,5$.

En la figura 4.4 se muestra la gráfica de la función B/A . Ésta presenta una asíntota vertical dependiente del valor de a . Lo anterior sugiere que las asíntotas presentes en la función B/A generan inestabilidades al solucionar la ecuación para $\delta\sigma$; debido a esto, se puede afirmar que el modelo de disco delgado de Chazy-Curzon no es estable bajo perturbaciones a primer orden de la forma (1.23).

4.2. Disco delgado de Zipoy-Voorhees

Este disco delgado es obtenido al aplicar el conocido método de desplazamiento, corte y reflexión a la métrica de Zipoy-Voorhees. Esta métrica es similar a la descrita en (4.1) y se obtiene a partir de la ecuación (1.1) escogiendo

$$\Psi_1 = -\Psi_2 = \Phi, \quad \Psi_3 = \Lambda - \Phi, \quad (4.12)$$

estando las funciones Φ y Λ dadas por

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{m}{b-a} \ln \left[\frac{R_a + |z| + a}{R_b + |z| + b} \right], \\ \Lambda &= \frac{2m^2}{(b-a)^2} \ln \left[\frac{(R_a + R_b)^2 - (b-a)^2}{4R_a R_b} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $R_a^2 = r^2 + (|z| + a)^2$, $R_b^2 = r^2 + (|z| + b)^2$ y $b \geq a$. Utilizando las expresiones anteriores y aplicando la definición (2.4), se obtienen las expresiones para el salto de la primera derivada de la métrica a través del plano $z = 0$

$$\begin{aligned} b_{tt} &= -\frac{4m}{b-a} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) e^{2\Phi} \Big|_{z=0^+} & b_{\varphi\varphi} &= -\frac{4m}{b-a} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) e^{2\Phi} \Big|_{z=0^+} \\ b_{rr} = b_{zz} &= \frac{8m^2}{(b-a)^2} e^{2(\Lambda-\Phi)} \left[\frac{2(R_a + R_b) \left(\frac{a}{R_a} + \frac{b}{R_b} \right)}{(R_a + R_b)^2 - (b-a)^2} - \left(\frac{b}{R_b^2} + \frac{a}{R_a^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{4m}{b-a} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right) e^{2(\Lambda-\Phi)} \Big|_{z=0^+}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aplicando el procedimiento usado para los dos modelos de disco anteriores, se obtienen las expresiones para la densidad de energía superficial y la presión azimutal

$$\sigma = -\frac{m^2 e^{-2(\Lambda_0 - \Phi_0)}}{2\pi(b-a)^2} \left[\frac{2(R_{a0} + R_{b0}) \left(\frac{a}{R_{a0}} + \frac{b}{R_{b0}} \right)}{(R_{a0} + R_{b0})^2 - (b-a)^2} - \left(\frac{a}{R_{a0}^2} + \frac{b}{R_{b0}^2} \right) \right] \quad (4.15)$$

$$+ \frac{m}{2\pi(b-a)} \left(\frac{1}{R_{a0}} - \frac{1}{R_{b0}} \right) e^{-2(\Lambda_0 - \Phi_0)},$$

$$p_\varphi = \frac{m^2 e^{-2(\Lambda_0 - \Phi_0)}}{2\pi(b-a)^2} \left[\frac{2(R_{a0} + R_{b0}) \left(\frac{a}{R_{a0}} + \frac{b}{R_{b0}} \right)}{(R_{a0} + R_{b0})^2 - (b-a)^2} - \left(\frac{a}{R_{a0}^2} + \frac{b}{R_{b0}^2} \right) \right], \quad (4.16)$$

$$p_r = 0, \quad (4.17)$$

donde R_{a0} , R_{b0} , Λ_0 y Φ_0 son las respectivas funciones evaluadas en $z = 0$. Al igual que el modelo de Chazy-Curzon, el disco descrito por la métrica de Zipoy-Voorhees no posee presión radial; por lo tanto, la hipótesis de contra-rotación es válida también para este modelo. Así como en los modelos ya estudiados, la velocidad se calcula a partir de las ecuaciones (3.10) y (3.11), obteniendo

$$v^2 = \frac{\frac{m}{b-a} \left(\frac{b}{R_{b0}} - \frac{a}{R_{a0}} \right)}{1 - \frac{m}{b-a} \left(\frac{b}{R_{b0}} - \frac{a}{R_{a0}} \right)}. \quad (4.18)$$

La expresión (4.18) se maximiza cuando

$$r^2 = \frac{a^2 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2/3} b^2}{\left(\frac{a}{b} \right)^{2/3} - 1}, \quad (4.19)$$

luego la inecuación $v^2 < 1$ se satisface cuando

$$\frac{2mb}{(b-a)(a^2 - b^2)^{1/2}} \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{2/3} - 1 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2/3} \right] \leq 1. \quad (4.20)$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para el disco de Chazy-Curzon, se obtiene una ecuación diferencial de primer orden para la densidad de energía

perturbada para el modelo de Zipoy-Voorhees, cuya solución es igual a la presentada en (4.11). La Figura 4.5 muestra la gráfica de la función argumento de la integral en la ecuación para la densidad de energía perturbada para el disco delgado de Zipoy-Voorhees con diferentes valores del parámetro b . Para ser consistentes con los modelos anteriores, los cálculos se realizaron con un valor de $m = 0,5$ y el valor fijo $a = 1$. Al igual que para el caso del disco de Chazy-Curzon, el modelo de Zipoy-Voorhees también exhibe asíntotas verticales para cada valor de b (ver Fig. 4.5). Los valores usados de b se escogieron de tal manera que se cumpliera la condición (4.20) y que $b \geq a$.

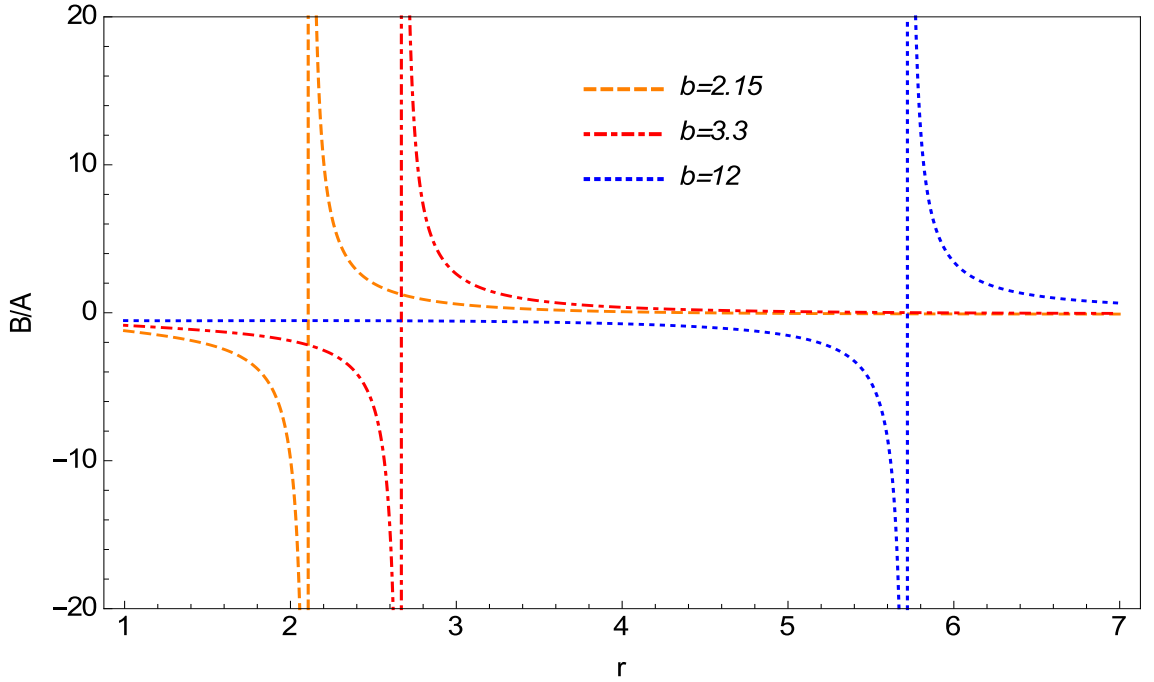


Figura 4.5: Gráfica para la función B/A presente en la solución de la densidad de energía perturbada para el disco delgado obtenido a partir de la métrica de Zipoy-Voorhees para valores de $b = 2,15; 3,3; 12$, $a = 1$ y $m = 0,5$. Como la función B/A no depende de los valores de w y k_φ los resultados se obtuvieron tomando valores de $w = k_\varphi = 0$.

Debido a que el argumento B/A de la integral presente en la solución para $\delta\sigma$ exhibe asíntotas verticales, la densidad de energía perturbada para el modelo de Zipoy-Voorhees también debe presentar estos comportamientos, como se muestra en la Figura 4.6. Se puede apreciar que la amplitud tiende a infinito independientemente del valor de los parámetros, luego la densidad de energía para este modelo es inestable, y en consecuencia las demás variables termodinámicas también son inestables.

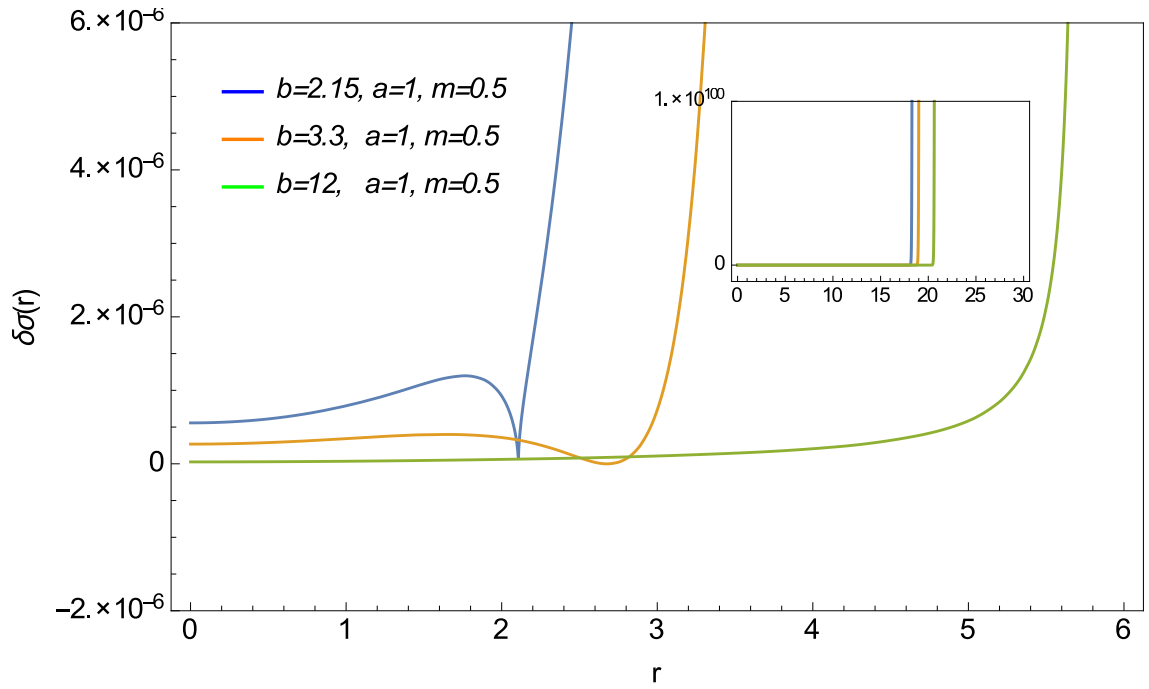


Figura 4.6: Perfil de amplitudes de la densidad de energía perturbada $\delta\sigma$ para diferentes valores de b con $w = 0,13$ y $k_\varphi = 0$ en un disco delgado obtenido a partir de la métrica de Zipoy-Voorhees. En el recuadro se muestra la tendencia de las curvas para escalas más grandes.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se estudió la estabilidad de tres modelos de disco delgados relativistas perturbando el tensor de energía-momentum a un primer orden de las perturbaciones. La elección del método de análisis se hizo teniendo en cuenta que el método de perturbaciones es más formal en comparación con el estudio del movimiento de partículas a lo largo de geodésicas. Considerando el movimiento colectivo de las partículas en el fluido, se encontró que los modelos de disco delgados generados a partir de la métrica de Chazy-Curzon y de Zipoy-Voorhees no son estables bajo las perturbaciones consideradas, debido a que las variables de estado y la velocidad del fluido tienden a infinito para ciertos valores de la coordenada radial. Por otro lado, para el caso del disco delgado isótropo de Schwarzschild, el cual se hizo finito definiendo un radio de corte, las variables del fluido son estables y presentan un carácter oscilatorio. Además, se demostró que para este modelo la perturbación generada en el interior del disco desaparece cuando la coordenada radial se aproxima al radio de corte; es decir, la amplitud de las variables perturbadas decrece a medida que r se aproxima al final del disco. Lo anterior sugiere que el disco delgado isótropo de Schwarzschild es estable bajo una perturbación general a primer orden como la estudiada en este trabajo.

Al encontrarse que los discos delgados de Chazy-Curzon y de Zipoy-Voorhees no son estables, se puede afirmar que la hipótesis de contra-rotación -“corrientes circulares de partículas moviéndose en sentidos opuestos”- no es suficiente para generar discos delgados estables con solo presión azimutal. Por otro lado, el hecho de que los modelos que presentan únicamente presión azimutal no sean estables, puede estar relacionado con la necesidad de presiones radiales que soporten la atracción gravitacional del disco, además, la inestabilidad no está ligada con la definición de masa. Por esta razón, se puede pensar que la presencia de una presión radial es fundamental para la estabilidad de discos delgados.

Se encontró que la masa en cada uno de las métricas equivale a la masa de Komar para el disco, mientras que mediante la definición de masa bariónica en reposo, como es el caso del disco delgado isótropo de Schwarzschild, la masa total depende de los parámetros del método de desplazamiento corte y reflexión.

Para el caso del disco delgado isótropo de Schwarzschild, se encontró que en todos los casos las perturbaciones tienden a cero. Este resultado no está de acuerdo con el estudio realizado por Ujevic y Letelier, en el que crece la amplitud de la velocidad radial al infinito para algunos modos de oscilación. Se demostró que la extensión radial infinita del disco no es la razón de la inestabilidad, como la hipótesis de Ujevic et al., en donde la velocidad de escape es siempre mayor que las velocidades perturbadas. Nuestros resultados sugieren que el disco isótropo de Schwarzschild es siempre estable, sin embargo algunas inestabilidades pueden introducirse artificialmente en el modelo debido a la utilización de una definición de masa no apropiada en los cálculos.

Bibliografía

- [1] Bicák, J. and Ledvinka, T. Relativistic Disks as Sources of the Kerr Metric. *Phys. Rev. Lett.* 71, 1669 (1993).
- [2] Bicák, J., Lynden-Bell, D. and Pichon, C. Relativistic Disks and Flat Galaxy Models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 265, 126 (1993).
- [3] Ledvinka, T., Zofka, M. and Bicák, J. Relativistic Disks as Sources of the Kerr-Newman Fields. arXiv preprint gr-qc/9801053 (1998).
- [4] Pichon, C. and Lynden-Bell, D. New Sources of Kerr and other Metrics: Rotating Relativistic Disks with Pressure Support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 280(4), 1007-1026 (1996).
- [5] Muñoz, J. A., Mediavilla, E., Kochanek, C. S., Falco, E. E., Mosquera, A. M. A study of gravitational lens chromaticity with the hubble space telescope Based on observations made with the NASA-ESA Hubble Space Telescope. *Astrophys. J.*, 742(2), 67 (2011).
- [6] Alpar, M. A. On young neutron stars as propellers and accretors with conventional magnetic fields. *Astrophys. J.* 554(2), 1245 (2001).
- [7] Bonnor, WB and Sackfield, A, The interpretation of some spheroidal metrics. *Commun. Math. Phys.* 8, 338 (1968).
- [8] Morgan, T. and Morgan, L. The gravitational field of a disk. *Phys. Rev.* 183, 1097 (1969).
- [9] Morgan, L. and Morgan, T. Gravitational field of shells and disks in general relativity. *Phys. Rev. D.* 2, 2756 (1970).
- [10] González, G. A. and Letelier, P. S. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Class. Quantum Grav.* 16, 479 (1999).
- [11] Voorhees, B. H. Relativistic disks. I. Background models. *Phys. Rev. D* 5, 2413 (1972).

- [12] Lynden-Bell, D. and Pineault, S. Relativistic disks-I. Counter rotating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 185, 679 (1978).
- [13] Chamorro, A. and Gregory, R. and Stewart, J. M. Static axisymmetric discs and gravitational collapse. *Proc. R. Soc. London A.* 413, 251 (1987).
- [14] Letelier, P. S. and Oliveira, S. R. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Phys.* 28, 165 (1987).
- [15] Lemos, J. P. S. Self-similar relativistic discs with pressure. *Class. Quantum Grav.* 6, 1219 (1989).
- [16] Bicák, J., Lynden-Bell, D. and Katz, J. Relativistic Disks as Sources of Static Vacuum Spacetimes. *Phys. Rev. D* 47, 4334 (1993).
- [17] Lynden-Bell, D. and Pineault, S. Relativistic disks-II. Self-similar disks in rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 185, 695 (1978).
- [18] González, G. A. and Letelier, P. S. Rotating relativistic thin disks. *Phys. Rev. D.* 62, 064025 (2000).
- [19] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav.* 10, L75 (1993).
- [20] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. Exact general relativistic thin disks around black holes. *Phys. Rev. D.* 49, 5135 (1994).
- [21] Letelier, P. S. and Wang, A. Space-time defects. *J. Math. Phys.* 36, 3023 (1995).
- [22] Lemos, J. P. S. and Letelier, P. S. Two families of exact disks with a central black hole. *Int. J. Mod. Phys. D.* 5, 53 (1996).
- [23] Semerák, O. and Záček, M. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: I. *Class. Quantum Grav.* 17, 1613 (2000).
- [24] Semerák, O. Thin disc around a rotating black hole, but with support in-between. *Class. Quantum Grav.* 19, 3829 (2002).
- [25] Záček, M. and Semerák, O. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole II. *Czech. J. Phys.* 52, 19 (2002).
- [26] Semerák, O. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: III. *Class. Quantum Grav.* 20, 1613 (2003).

- [27] Semerák, O. Exact power-law discs around static black holes. *Class. Quantum Grav.* 21, 2203 (2004).
- [28] Chazy, J. Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité. *Bull. Soc. math. France* 52, 17 (1924).
- [29] Curzon, H. E. J. Cylindrical solutions of Einstein's gravitation equations. *Proc. London Math. Soc.* 23, 477 (1924).
- [30] Zipoy, D. M. Topology of some spheroidal metrics. *J. Math. Phys.* 7, 1137 (1966).
- [31] Voorhees, B. H. Static axially symmetric gravitational fields. *Phys. Rev. D.* 2, 2119 (1970).
- [32] González, G. A. and Espitia, O. A. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Phys. Rev. D.* 68, 104028 (2003).
- [33] García-Reyes, G., González, G.A. Charged perfect fluid disks as sources of Taub-NUT-type space-times. *Phys. Rev. D* 69, 124002 (2004)
- [34] Ledvinka, T and Zofka, M and Bicák, J. *Proceeding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity.* edited by T. Piran (World Scientific, Singapore, 1999).
- [35] Letelier, P. S. Exact general relativistic disks with magnetic fields. *Phys. Rev. D.* 60, 104042 (1999).
- [36] Katz, J., Bicák, J and Lynden-Bell, Do. Disc sources for conformastationary metrics. *Class. Quantum Grav.* 16, 4023 (1999).
- [37] Vogt, D. and Letelier, P. S. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D.* 68, 084010 (2003).
- [38] Vogt, D. and Letelier, P. S. Exact relativistic static charged dust discs and non-axisymmetric structures. *Class. Quantum Grav.* 21, 3369 (2004).
- [39] Vogt, D. and Letelier, P. S. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Phys. Rev. D.* 70, 064003 (2004).
- [40] González, G. A. and Letelier, P. S. Exact general relativistic thick disks. *Phys. Rev. D.* 69, 044013 (2004).

- [41] Lord Rayleigh On the dynamics of revolving fluids. Proc. R. Soc. Lond. A 93, 148 (1916).
- [42] Letelier, P.S. Stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures. Phys. Rev. D. 68, 104002 (2003).
- [43] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. Fluid Mechanics, Sect. 27, 2nd edn. Pergamon Press, Oxford (1987).
- [44] Buchdahl, H.A. A Relativistic Fluid Sphere Resembling the Emden Polytrope of Index 5. Astrophys. J. 140,1512 (1964).
- [45] Narlikar, V. V., G. K. Patwardhan, and P. C. Vaidya. Some new relativistic distributions of radial symmetry. Proc. Natl. Inst. Sci. India. 9, 229 (1943).
- [46] Schutz B. F. Linear Pulsations and Stability of Differentially Rotating Stellar Models. II. General-Relativistic Analysis. The Astrophys. J. Suppl. 24, 343 (1972).
- [47] Chandrasekhar S. and Friedman J. L. On the stability of axisymmetric systems to axisymmetric perturbations in general relativity. I. the equations governing nonstationary, stationary, and perturbed system. Astrophys. J. 175, 379 (1972).
- [48] Chandrasekhar, S. and Friedman J. L. On the stability of axisymmetric systems to axisymmetric perturbations in general relativity. II. a criterion for the onset of instability in uniformly rotating configurations and the frequency of the fundamental mode in case of slow rotation. Rel. Astrophys. 5, 356 (1990).
- [49] Will, C. M. On the stability of axisymmetric systems to axisymmetric perturbations in general relativity. V. Differentially rotating configurations. Astrophys. J. 190, 403 (1974).
- [50] Seguin, F.H. Stability of nonuniform rotation in relativistic stars. Astrophys. J. 197, 745 (1975).
- [51] Papapetrou A. and Hamouni A. Couches simples de matière en relativité générale. Ann. Inst. Henri Poincaré. 9, 179 (1968).
- [52] Poisson, E. A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics. Cambridge university press (2004).
- [53] Lemos, J. S. and Letelier, P. S. Topological defects from counter rotating disks. Phys. Lett. A, 153, 288 (1991).

- [54] Weinberg, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. Vol. 1. New York: Wiley, (1972).
- [55] Ujevic M. and Letelier P.S. Stability of general relativistic geometric thin disks. Phys. Rev. D, 70, 084015 (2004)
- [56] Bertola, F., Cinzano, P., Corsini, E. M., Pizzella, A., Persic, M., and Salucci, P. Counterrotating Stellar Disks in Early-Type Spirals: NGC 3593 Based on observations carried out at ESO, La Silla, Chile. Astrophys. J. Lett, 458(2), L67 (1996).