
Estudio de la estructura geométrica en las transformaciones de la polarización

Jhon Stivenson Pabón Niño

Proyecto de investigación para optar el grado de:
Magíster en Matemática Aplicada

Director
Rafael Ángel Torres Amaris
Físico, M.Sc., PhD.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2024

Dedicatoria

A mis padres por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el apoyo recibido. A mis colegas por sus charlas enriquecedoras y motivadoras.

Un agradecimiento lo realizo a mi director de trabajo de grado, por dedicar su tiempo, experiencia y depositar su confianza y conocimiento en la guía de mi proyecto.

Tabla de contenido

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introducción | 11 |
| | Primera parte | 16 |
| 2 | Formalismos de la polarización de la luz | 17 |
| 2.1 | Polarización de la luz | 17 |
| 2.2 | Birrefringencia | 19 |
| 2.3 | Formalismo de álgebras geométricas en la luz polarizada | 21 |
| | Segunda parte | 29 |
| 3 | Ley de los birrefringentes | 30 |
| 3.1 | Ley de los birrefringentes con modos propios elípticos | 30 |
| 4 | Placas de onda compuestas(CW) | 34 |
| 4.1 | CW como un birrefringente con modos propios elípticos | 35 |
| 4.2 | CW descrito a través del teorema I de Jones | 36 |
| 5 | Configuraciones de placas de onda compuestas | 39 |
| 5.1 | Birrefringente con modos elípticos(BE) compuesto de dos QWPs | 39 |
| 5.2 | Birrefringente con modos propios circulares(BC) compuesta de dos HWP's | 53 |
| 5.3 | CW como un birrefringente variable con modos propios lineales(BL) | 55 |
| | Tercera parte | 63 |
| 6 | Aplicaciones | 64 |
| 6.1 | Birrefringente con modos propios elípticos full tuneable | 64 |
| 6.2 | Depolarización en placas de onda compuestas | 68 |
| 6.2.1 | Método de caracterización geométrica de un BE | 73 |
| 7 | Conclusiones | 80 |
| | Referencias Bibliográficas | 82 |
| | Appendices | 96 |
| A | Apéndice A | 97 |

Lista de figuras

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Representación de la elipse de Polarización. En la figura izquierda se representan por las amplitudes y las fases de cada componente mediante E_{0x} y E_{0y} . El figura de la derecha se representa la elipse de Polarización mediante una forma equivalente usando ángulos de excentricidad χ y rotación α | 18 |
| 2.2 | Retardador de onda, descrito como un material anisotrópico uniaxial sin absorción, es decir, índices reales. Las compones del campo en X y Y se desfasan, ya que en cada eje recorren la distancia d a diferentes velocidad, debido a la diferencia de índices, sin embargo no ocurre el fenómeno de doble refracción ya que las componentes del campo viajan en la misma dirección, al igual la potencia, siguiendo la misma dirección, es decir $K_e \parallel K_o$ y $S_e \parallel S_o$. θ es el ángulo de rotación del birrefringente, el cual describe la orientación de las fases por tanto se genera un cambio de la polarización debido a la rotación. <i>Figura desarrollada con Inkscape</i> | 19 |
| 2.3 | Representación de un retardador lineal rotante de retardo δ_1 , el cual tiene como modos propios todos los con polarización lineales. | 20 |
| 2.4 | Esquema óptico utilizado por Salazar-Ariza y Torres (2018) para placas birrefringentes con modos de polarización lineal, donde C es una lente colimadora, P un polarizador lineal, $\theta' \equiv cte$ es un ángulo constante y Q son placas de onda cuarto de onda rotativas. | 20 |
| 2.5 | Representación de la ley de los retardadores lineales para un retardador QWP rotante generando curvas de estados simétricos y asimétricos al incidirle un estado lineal o elíptico representado en blanco. Figura tomada de Salazar-Ariza y Torres (2018) | 22 |
| 2.6 | Representación de la actividad óptica o birrefringencia circular en muestras de una solución ópticamente activa en un tubo de ensayo de polarimetría en sus dos variantes dextrógira o levógira y su representación como operador de rotación sobre la esfera de Poincaré. | 23 |
| 2.7 | Representación de la transformación de un estado polarizado incidente S en un estado S' al pasar por un medio birrefringente con modos propios elípticos sobre la esfera de Poincaré. | 24 |
| 2.8 | Representación del operador unitario de un retardador lineal rotante en formalismo de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré. | 25 |
| 2.9 | Representación de un retardador elíptico en sus dos formas, mediante un eje e_q de retardo γ y la segunda a través de su descomposición por un retardador lineal y una actividad óptica. | 26 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.1 | Representación de la ley de los BE . Y la relación entre el estado de entrada \mathbf{S}_{input} con el cruzado \mathbf{S}_{cross} el cual determina el vértice del cono. | 33 |
| 4.1 | Composición de n -birrefringentes con modos propios de polarización \mathbf{e}_{q_n} y retardos γ_n descritos de manera equivalentes en dos representaciones correspondientes a un BE y a través del RJ mediante la composición de un BC y un BL. | 35 |
| 4.2 | Representación de las ligaduras entre los parámetros intrínsecos y equivalentes de un BE. | 38 |
| 4.3 | QR el cual direcciona al código en un repositorio en GitHub para modelar y caracterizar sistemas de placas de onda compuestas. | 38 |
| 5.1 | Biplaca compuesta por dos BL de retardos δ_n y δ_m . Donde θ' es el ángulo entre sus ejes rápidos. La figura izquierda ilustra que cuando se incide un estado lineal en la biplaca, el estado emergente será elíptico. Por otro lado, la figura derecha muestra un modo propio de polarización elíptico de la biplaca. | 40 |
| 5.2 | Esquema óptico para biplaca con dos QWPs. Se representa geométrica sobre la esfera de Poincaré como un cono de ángulo de abertura δ y poder rotatorio φ . Aquí C es un lente colimador, P un polarizador lineal, y Q una QWP. | 40 |
| 5.3 | Representación sobre la esfera de Poincaré de los ejes de las QWPs de la biplaca con una diferencia de $2\theta'$ entre ellos. | 43 |
| 5.4 | Valores del birrefringencia elíptica γ en figura izquierda y elipticidad del modo propio χ en figura derecha, las cuales son variables para la biplaca en función del ángulo de diferencia entre los ejes rápidos θ' | 46 |
| 5.5 | Representación de los valores de elipticidad permitidos para los modos propios de la biplaca sobre la esfera de Poincaré. | 46 |
| 5.6 | Curva de estados emergentes generados por una biplaca compuesta para ángulos $\theta' = 0^\circ \pm 2^\circ$ y $\theta' = 90^\circ \pm 2^\circ$ en la imágenes izquierda y derecha, respectivamente. | 49 |
| 5.7 | Estados emergentes teórico y experimental generados por una placa compuesta con ángulos de $\theta' = 30^\circ$ (Figura izquierda), $\theta' = 54^\circ$ (Figura central) y $\theta' = 80^\circ$ (Figura derecha), descritos por BL de $\delta = 120^\circ$, $\delta = 72^\circ$ y $\delta = 20^\circ$, respectivamente. | 50 |
| 5.8 | BL δ y BC φ para 3 biplaca con ángulo $\theta' = 30$, $\theta' = 54$ y $\theta' = 80$ representados en las figura izquierda, central y derecha, respectivamente. | 51 |
| 5.9 | La figura de la izquierda es la curva de estados teórica y experimental de la biplaca para $\theta' = 54$ al incidirle el estado eliptico \mathbf{S}_{ellip1} . Las figuras central y Derecha son las elipses de polarización de los estado incidente \mathbf{S}_{ellip1} y emergente correspondiente a su modo propio, respectivamente. | 52 |
| 5.10 | La figura de la izquierda es la curva de estados teórica y experimental de la biplaca para $\theta' = 54$ al incidirle el estado eliptico \mathbf{S}_{ellip2} . La figura central y la figura derecha son las elipses de polarización de los estado incidente \mathbf{S}_{ellip2} y emergente correspondiente a su modo propio, respectivamente. | 52 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.11 | Biplaca compuesta por dos HWP. Donde θ' corresponde al ángulo entre los ejes rápidos de las HWPs. Si se incide un estado polarizado, el estado emergente será rotado manteniendo su elipticidad. Por lo tanto, sus modos propios de polarización son los estados circulares, lo cual caracteriza a esta configuración como un BC | 54 |
| 5.12 | Representación de las transformaciones de dos HWPs superpuestas, la cual en equivalente se comporta como un rotador o un BC | 55 |
| 5.13 | Representación de un BL sobre la esfera de Poincaré a través de la Ley de los birrefringentes con modos propios lineales. | 56 |
| 5.14 | Esquema de BL propuesto por Pancharamant. | 56 |
| 5.15 | CW propuesto por Mesidi como un BL de retardo ajustable. | 60 |
| 5.16 | Full BL ajustables, añadiendo una rotación en las QWPs del sistema de Mesadi. | 61 |
| 6.1 | Esquema de CW compuesto de dos QWPs y cuatro HWPs para generar un Full Tuneable Birefringent (FTB) a través del RJ. | 64 |
| 6.2 | Tabla del FTB donde se obtienen los casos particulares de BC (filas a y b), BL(filas c,d,e,f) y BE(filas g,h,i,j) con retardos y modos propios ajustables de manera independiente | 65 |
| 6.3 | Verificación experimental del Full Tuneable Birefringent (<i>FTB</i>) en sus casos particulares de BC y BL de retardo y modos propios ajustables. Se prueba a la izquierda la curva de estados emergentes y los parámetros del teorema I de Jones. En la derecha se verifican los modos propios ajustables. | 66 |
| 6.4 | Verificación experimental del Full Tuneable Birefringent (<i>FTB</i>), donde se prueban a la izquierda la curva de estados emergentes y los parámetros del teorema I de Jones y la ley de los BE, a la derecha los modos propios ajustables. | 67 |
| 6.5 | QR el cual direcciona al código en un repositorio en GitHub para modelar la depolarización en placas de onda compuestas. | 72 |
| 6.6 | Visualización de las representaciones de BE, a través del modelo de eje ángulo mediante los parámetros intrínsecos, y a través de los parámetros equivalentes de Jones como un BC y un BL compuesto. | 75 |
| 6.7 | Transformación de dos estados polarizados S_l y S_C al pasar por un BE y su representación sobre la esfera de Poincaré. | 76 |
| 6.8 | Relación geométrica entre los estados incidentes y transformados con los modos propios del BE. | 76 |
| 6.9 | Representación geométrica de la relación entre un estado polarizado incidente y su transformado, con el eje y el desfase γ del BE. | 77 |

Lista de tablas

| | | |
|-----|---|----|
| 5.1 | La tabla registra los valores de rotación α y elipticidad χ de los estados incidentes en la biplaca. | 49 |
| 5.2 | La tabla registra los valores de rotación α y elipticidad χ de los estados propios predichos para la biplaca con $\theta' = 54$ | 51 |

Resumen

TÍTULO: Estudio de la estructura geométrica en las transformaciones de la polarización. *.

AUTOR: Jhon Stivenson Pabón Niño †

PALABRAS CLAVE: Polarimetría, birrefringencia, Luz polarizada, álgebras geométricas.

DESCRIPCIÓN:

Los medios birrefringentes pueden poseer modos propios lineales, elípticos o circulares, donde cada caso transforma de manera específica los estados polarizados. Es por ello, que este estudio se centra en describir las características de sus transformaciones sobre la esfera de Poincaré a través de una representación de álgebras geométricas tales como vectores de Pauli y cuaterniones, debido a que en esta representación el operador de un birrefringente depende explícitamente del estado propio y del retardo, permitiendo una caracterización explícita de dichos parámetros.

Este marco matemático se aplica para describir medios complejos, como las placas de onda compuestas (CW), que consisten en múltiples birrefringentes superpuestos. Estas permiten la generación de sistemas ópticos con retardos y modos propios específicos, proporcionando un control preciso sobre la polarización de la luz. Basado en ello, se logró una caracterización explícita de cualquier CW mediante dos enfoques: su representación como un birrefringente con modos propios elípticos y a través del teorema I de Jones como una superposición de un birrefringente con modos propios lineales mas un poder rotatorio, lo cual fue aplicado en la caracterización en diversos esquemas de CW. En el análisis de estos dispositivos, se identificaron limitaciones debido a ligaduras entre sus parámetros que restringen el control total durante la modulación.

Haciendo uso de esta caracterización general y para solucionar el problema de las ligaduras en las CW, se propone el diseño de un CW compuesto por HWPs y QWPs, denominado *Full Tuneable Birefringent (FTB)*. El cual permite la modulación independiente de sus modos propios y su retardo, logrando un control total sobre las propiedades de un birrefringente variable.

Por otro lado, se encontró que la caracterización de medios birrefringentes requiere una metodología experimental que determine de manera independiente sus dos grupos de parámetros intrínsecos y equivalentes que le caracteriza. Ya que tradicionalmente, estos parámetros se caracterizaban mediante relaciones algebraicas no inyectivas las cuales pueden conllevar a soluciones matemáticas mas no físicas. Es por ello, que se desarrolló una metodología polarimétrica y geométrica que permite medir ambos grupos de parámetros transformando dos estados de polarización específicos incidentes en el medio birrefringente.

Es así, que se presenta un marco general en el formalismo en álgebras geométricas para modelar medios complejos con birrefringencia con modos propios en general elípticos, tales como placas de onda compuestas. Lo cual ofrece una caracterización de dichos medios así como el diseño de placas de onda con propiedades ajustables. Es por ello, que en el presente trabajo presentamos un marco general para modelar y caracterizar los medios compuestos de materiales birrefringentes y un diseño de CW que ofrece un mayor control sobre la polarización.

*Proyecto de investigación.

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Rafael Ángel Torres Amaris (Director)

Abstract

TITLE: Study of the Geometric Structure in Polarization Transformations. *

AUTHOR: Jhon Stivenson Pabón Niño †

KEYWORDS: Polarimetry, Birefringence, Polarized light, Geometric algebras.

DESCRIPTION:

Birefringent media can exhibit linear, elliptical, or circular eigenmodes, with each case specifically transforming polarized states. Therefore, this study focuses on describing the characteristics of these transformations on the Poincaré sphere through a representation of geometric algebras such as Pauli vectors and quaternions, as in this representation, the operator of a birefringent medium explicitly depends on the eigenstate and the retardance, allowing for an explicit characterization of these parameters.

This mathematical framework is applied to describe complex media, such as composite wave plates (CW), which consist of multiple superimposed birefringent media. These allow the generation of optical systems with specific retardances and eigenmodes, providing precise control over the polarization of light. Based on this, an explicit characterization of any CW was achieved through two approaches: its representation as a birefringent medium with elliptical eigenmodes and through Jones Theorem I as a superposition of a birefringent medium with linear eigenmodes plus a rotatory power, which was applied in the characterization of various CW schemes. In the analysis of these devices, limitations were identified due to constraints between their parameters, restricting full control during modulation.

Using this general characterization and to solve the problem of constraints in CWs, the design of a CW composed of HWPs and QWPs, termed *Full Tuneable Birefringent (FTB)*, is proposed. This allows independent modulation of its eigenmodes and retardance, achieving full control over the properties of a variable birefringent medium.

Additionally, it was found that the characterization of birefringent media requires an experimental methodology to independently determine their two groups of intrinsic and equivalent parameters that characterize them. Traditionally, these parameters were characterized through non-injective algebraic relations, which could lead to mathematical but not physical solutions. Therefore, a polarimetric and geometric methodology was developed, enabling the measurement of both groups of parameters by transforming two specific incident polarization states in the birefringent medium.

Thus, a general framework is presented in the geometric algebra formalism to model complex birefringent media with generally elliptical eigenmodes, such as composite wave plates. This provides both a characterization of such media and the design of wave plates with adjustable properties. Hence, this work presents a general framework for modeling and characterizing composite media made of birefringent materials and a design for CW that offers greater control over polarization.

*Research project.

†Faculty of Sciences, School of Physics, Rafael Ángel Torres Amaris (Director)

Introducción

'Science is the future of mankind.'
Claude Cohen-Tannoudji.

La birrefringencia es la propiedad de materiales que introducen un retardo de fase entre las dos componentes de polarización correspondientes a los modos propios de polarización del material. Por ejemplo, dependiendo de la orientación del haz incidente con respecto al eje óptico del cristal, el cuarzo puede presentar birrefringencia con modos propios lineales (BL) [G. Ghosh \(1999\)](#); [Smartt y Steel \(1959\)](#), con modos circulares (BC) o actividad óptica, o modos propios elípticos (BE) [Chou, Huang, y Chang \(1997\)](#). La caracterización de la birrefringencia de estos materiales es útil para el estudio de la propagación de la luz en estos medios y su aprovechamiento en nuevas aplicaciones.

La BL es encontrada en una variedad amplia de materiales naturales y procesados, los cuales podemos agruparlos dependiendo al origen de su anisotropía. Siendo los materiales con estructura cristalina los primeros en caracterizarse y los más usados en aplicaciones, tales como la calcita [G. Ghosh \(1999\)](#); [Smartt y Steel \(1959\)](#), otro grupo es aquellos en los cuales su birrefringencia es inducida como los polímeros [NOBUKAWA, Aoki, y cols. \(2014\)](#); [Postolache y cols. \(2022\)](#); [Rumi y Bunning \(2014\)](#); [Tagaya \(2021\)](#); [Tagaya y Koike \(2012\)](#); [Uchiyama, Ono, Ikeda, Shuto, y Yahata \(2012\)](#) naturales en láminas procesadas a base de celulosa como Triacetato de Celulosa(CTA) [Kiyama, NOBUKAWA, y Yamaguchi \(2017\)](#); [NOBUKAWA, Shimada, y cols. \(2014\)](#); [Sang Park, Jung, Jeong Heo, y Geol Lee \(2017\)](#) y celofán [Beléndez, Fernández, Francés, y Neipp \(2010\)](#); [Feynman, Leighton, Sands, y Hafner \(1965\)](#); [Iizuka \(2003, 2005, 2008, 2012\)](#); [Juárez-Ramírez y cols. \(2014\)](#); [Kalwe y cols. \(2015\)](#); [Kariuki, Rurimo, y Calvine \(2016\)](#); [Kinyua, Rurimo, Karimi, Maina, y Calvine \(2013\)](#); [MACCONAILL \(1956\)](#); [Ortiz-Gutiérrez, Olivares-Pérez, y Sánchez-Villicaña \(2001\)](#); [Velasquez, del Mar Sánchez-López, Moreno, Puerto, y Mateos \(2005\)](#) y de polímeros plásticos como polietileno [Emam-Ismail \(2013\)](#) y poliéster 3M PP2500 [Ortiz-Gutiérrez, Olivares-Pérez, Juárez-Pérez, y Sánchez-Villicana \(2000\)](#); [Ortiz-Gutierrez y cols. \(2004\)](#), en otro grupo están aquellos materiales biológicos con anisotropía estructural debido a ser compuesto de fibras o tejidos tales como el colágeno [Maitland y Walsh Jr. \(1997\)](#), la cornea [Knighton y Huang \(2002\)](#), entre otros [Chue-Sang y cols. \(2019\)](#).

Por otro lado, los materiales BE [El-Hosseiny \(1975\)](#) se han encontrado en cristales como el cuarzo [Chou y cols. \(1997\)](#), óxido de silicio de bismuto (BSO) [Pellat-Finet y Lebreton \(1982\)](#), cristales líquidos nemáticos retorcidos (TN-LQ) [C. C. Tsai, Liao, Chou, Han, y Chao \(2005\)](#) y fibras ópticas [Tentori, Garcia-Weidner, y Kuzin \(2016\)](#); [Wai y Menyuk \(1994\)](#), donde también se ha explorado su generación con fines tecnológicos mediante la superposición de varios retardadores

lineales, llamados placas de onda compuestas (Composite Waveplate-(CW)) Miller, Jiang, y Pau (2022); Yu (2016) y en técnicas modernas como la creación del material con las propiedades ópticas deseadas mediante los metamateriales Shi y cols. (2020), sin embargo su complejidad radica en la disposición tecnológica de replicación.

Y la BC o actividad óptica ha sido caracterizada en cristales Jerphagnon y Chemla (1976); Pellat-Finet y Lebreton (1982) y en soluciones compuestas de moléculas quirales Barron (2004). Siendo la medición de la rotación del plano de polarización causada por la actividad óptica utilizada para la medición de concentraciones y determinación de pureza. Esta tecnología se ha posicionado en la industria con una variedad de protocolos y estándares internacionales para homogeneizar las medidas y el control de calidad en distintos productos industriales como azúcares, leche, aceites esenciales y naturales y en medicamentos, descritos en Ph. Eur (European Pharmacopoeia) y USP (United States Pharmacopoeia), entre otras aplicaciones en el control de calidad de diversos productos y sus derivados (Estándares de polarimetría).

En la descripción matemática de los operadores de la polarización encontramos dos grupos, los matriciales de Jones Hurwitz y Jones (1941a); Jones (1941a) y MuellerPérez (2022a) y los no-matriciales de álgebras geométricas basados en números hipercomplejos mediante cuaterniones PELLAT FINET (1983); Pellat-Finet (1984, 1991) y en vectores de Pauli Tudor (2008, 2010a, 2010b, 2012), y una estructura más general en álgebra de Clifford Baylis, Bonenfant, Derbyshire, y Huschilt (1993); Dargys (2012) que contiene embebidas las álgebras geométricas. Sin embargo, la formulación en vectores de Pauli parecer ser la estructura más adecuada y compacta para la polarización, debido a que sus propiedades son heredadas de matrices de Pauli y este es un lenguaje más familiar para la física por su relación con el espín, el cual a su vez es la propiedad que define fundamentalmente la polarización por fotón.

Sobre la descripción matemática de los operadores de polarización cada birrefringente lineal, elíptico o circular tiene una transformación característica la cual describe una evolución de los estados generados como una trayectoria sobre la esfera de Poincaré a medida que se rota el birrefringente, ya que estas cambian el estado para cada ángulo de rotación. Por lo cual la evolución es la transformación de un estado normalizado a otro, por lo tanto la acción de incidir estado polarizado através de un retardador cualesquiera se describe matemáticamente como una rotación. En Salazar-Ariza y Torres (2018) se determinó una descripción geométrica que caracteriza la trayectoria generada por un retardador lineal cualesquiera formulando la ley de los birrefringentes lineales, la cual describe la curva de todos estados generados mediante un cono doble de ángulo δ que intersecta la esfera, siendo δ la diferencia de fase que caracteriza el birrefringente lineal. De esta manera, se determinan todos los posibles estados que genera un retardador lineal cualesquiera sobre la esfera de Poincaré.

Adicionalmente a las propiedades de los BL, BE y BC se han descrito matemáticamente otros comportamientos como el dicroísmo mediante rotaciones sobre la esfera de Poincaré Pellat-Finet (1984), lo cual manifiesta los isomorfismos entre un grupo de operadores de la polarización y las rotaciones. Donde se enfatiza en que los desarrollos de la teoría de grupos Rao, Rao, y Koneru (1988a), aplicados a las rotaciones se heredan para describir las transformaciones de los materiales moduladores de la polarización, y mediante el uso del álgebra geométrica se propone un marco matemático para explorar las propiedades presentes dentro de la estructura matemática de la polarización en una manera más formal, compacta y general.

Aprovechando las propiedades matemáticas de los operadores de polarización descritos como rotaciones sobre la esfera de Poincaré, describimos un formalismo en base al álgebra geométrica

de vectores de Pauli en su representación unitaria ya que en esta representación emergen de manera más intuitiva la acción de los operadores como rotaciones, también permite evidenciar los modos propios determinados por el eje de rotación Tudor (2010a, 2010b). En comparación a los formalismos matriciales de polarización como Jones y Mueller esta es una manera compacta de generar sistemas más complejos como la superposición de varios elementos, ya que las propiedades de la teoría de grupos aplicada a varias rotaciones pueden ser aplicadas para describir la acción de varios operadores de la polarización. Esta representación ha sido explorada mediante analogías con el marco matemático de la relatividad Han, Kim, y Noz (1997); Pellat-Finet y Bausset (1992), donde se han evidenciado los comportamientos de operadores equivalentes en fenómenos específicos de la relatividad especial Dingel, Buenaventura, Chua, y Libatique (2019); Franssens (2015); Monzón y Sánchez-Soto (2001); Tudor (2015). En esta analogía de rotaciones con la polarización se han evidenciado como una estructuras matemáticas de la teoría de grupos Shenoy y Arakali (2002); Takenaka (1973), tales como el grupo de Lorentz Han, Kim, y Noz (1996); Y. S. Kim (2000), Poincaré Y. S. Kim y Noz (2013), Sitter Baeskal y Kim (2006), pequeños de Wigner Han, Kim, y Noz (1999); Y. Kim (2014), SU(2) Agarwal (1999); Reddy y cols. (2014); Shen, Wang, Fu, Naidoo, y Forbes (2020), los cuales se han aprovechado en aplicaciones Britton (2000); Monzón y Sánchez-Soto (2001).

Como objeto de estudio de los medios birrefringentes, se optará por una configuración de BE generada mediante CW Gu y cols. (2018). Estos sistemas permiten obtener un birrefringente equivalente con propiedades ópticas específicas, con variaciones en su retardo y sus modos propios, que generalmente son elípticos, lo que hace que una CW corresponda a un BE. Por lo tanto, estas configuraciones pueden ser caracterizadas mediante la Representación del teorema I de Jones (RJ) Hurwitz y Jones (1941a), que las describe como la composición de un BL y un BC Vala y cols. (2021); Yu y Chou (2011); Yu y cols. (2009).

Las CW han sido aplicadas con diversos propósitos. Por un lado, en el diseño de birrefringentes con diversos grados de acromaticidad, en la generación birrefringentes acromáticos Saha, Bhattacharya, y Chakraborty (2012); Vilas y Lazarova-Lazarova (2017) y superacromáticos Gu, Jiang, Chen, Zhang, y Liu (2022); Li y Escuti (2021); Samoylov, Samoylov, Vidmachenko, y Perekhod (2004). Por otro lado, en la búsqueda de retardadores variables se han explorado diversas tecnologías como cristales líquidos Gilman, Baur, Gallagher, y Shankar (1990), los cuales son BE Davis, Moreno, y Tsai (1998), metamateriales Shi y cols. (2020); D.-Q. Zhang, Shu, Jiao, y Wu (2021) y varios esquemas de CW, en las que se ha aprovechado la variación de los retardos y modos propios en términos de los parámetros de las waveplates que componen la CW. Se han obteniendo esquemas de BL con retardo tuneable Messaadi, Sánchez-López, Vargas, García-Martínez, y Moreno (2018); Pancharatnam (1955), BC o rotadores de poder rotatorio variable Al-Mahmoud, Coda, Rangelov, y Montemezzani (2020); Jones (1941b); Rangelov y Kyoseva (2015a) y BE de retardo y modos propios tuneables Gottlieb y Arteaga (2021); Miller y cols. (2022); Pabón, Hernandez, y Torres (2023); Yu (2016). En la misma búsqueda, recientemente se propuso una metodología para el diseño de customized retarders Vilas y Herrera-Fernandez (2022), donde se obtiene el retardo variable del CW de manera numérica teniendo como grado de libertad los retardos y las orientaciones de las waveplates que la conforman.

Además, las CW se han explorado en polarimetría cuántica Goldberg (2020) en el diseño de un SU(2) gadget Bagini y cols. (1996); R. Simon y Mukunda (1989, 1990) apilando HWPs y QWPs, el cual ha sido usado en diversas aplicaciones Alonzo, Santarsiero, y Gori (2018); Passos, Junior, de Oliveira, Khoury, y Huguenin (2020); Schilling, von Zanthier, y Agarwal (2010); B. N. Simon,

Chandrashekar, y Simon (2012). Las CW también se han usado en el estudio de las fases geométricas Bhandari (1989, 1991, 1992a); Jisha, Nolte, y Alberucci (2021); Maria Chekhova (2021) y estados topológicos de polarización Bhandari (1997a); Saito (2023b). Además de sus aplicaciones, la configuración de capas de una CW ha sido usada como modelo para describir medios complejos como las fibras ópticas Chartier, Hideur, Ozkul, Sanchez, y Stephan (2001) caracterizadas previamente como BE Tentori y cols. (2016) y los cristales líquidos Pochi Yeh (1999). Siendo dicho modelo de CW prometedor para extender las caracterizaciones de estructuras biológicas con birrefringencia Chue-Sang y cols. (2019); N. Ghosh y Vitkin (2011); He y cols. (2021), ya que por ejemplo, la cornea Knighton y Huang (2002), el colágeno Maitland y Walsh Jr. (1997), y tejidos biológicos Ke y cols. (2023) han sido previamente caracterizados como BL.

Un método simple para generar un birrefringente con modos propios elípticos es mediante las CW Gu y cols. (2018), que al combinar dos placas con modos propios lineales se puede presentar una actividad óptica Vala y cols. (2021); X. Zhang (2013). De acuerdo con el teorema I de Jones Hurwitz y Jones (1941a), un CW se puede describir en mediante la composición de un birrefringente con modos propios lineal y uno circular Yu y Chou (2011); Yu y cols. (2009), otros trabajos con resultados similares son Gu y cols. (2018); Pellat-Finet (1984). Estos han sido aplicadas en el diseño de birrefringentes acromáticos Saha y cols. (2012); Vilas y Lazarova-Lazarova (2017), superacromáticos Gu y cols. (2022); Li y Escuti (2021); Samoylov y cols. (2004), rotadores Al-Mahmoud y cols. (2020); Jones (1941b); Rangelov y Kyoseva (2015a), birrefringentes con modos propios elípticos Miller y cols. (2022); Yu (2016) y un polarizador elíptico Tu, Jiang, Ibn-Elhaj, y Pau (2017).

Típicamente, un retardador está caracterizado por sus dos modos propios de polarización y su birrefringencia Pérez (2022b). Sin embargo, una caracterización geométrica propuesta por Salazar-Torres Salazar-Ariza y Torres (2018), por las curvas de los estados emergentes de polarización sobre la esfera de Poincaré, puede ser ventajoso para la estimación experimental los estados propios y birrefringencia de diverso medios Pabón y cols. (2023). Basados en un trabajo de Azzam Azzam (2000) con BL, recientemente se propuso un formalismo geométrico sobre la esfera de Poincaré para un BE rotante al incidirle un haz monocromático con un estado linealmente polarizado Wang y He (2022), no obstante una caracterización completa exige considerar estados de polarización incidentes elípticos. Es así que de forma análoga a lo hecho para los BL en Salazar-Ariza y Torres (2018), en este trabajo se estudia la curva de estados de polarización emergentes de un BE, cuando se le incide con un haz con polarización elíptica. Estas ideas son aplicadas en el estudio de una CW compuesta de dos QWP De Zela (2012); Gottlieb y Arteaga (2021); Reddy, Prabhakar, Chithrabhanu, Singh, y Simon (2016), donde se obtiene una expresión para los modos propios y birrefringencia mediante los formalismos de álgebras geométricas Pellat-Finet (1984); Tudor (2010a, 2010b), las cuales están bien adaptadas a la metodología propuesta en este trabajo.

Agregando a lo anterior, en el presente trabajo proponemos una descripción explícita de los modos propios y el retardo para cualquier configuración de CW, en dos formas: mediante un BE y a través del RJ, logrando caracterizar explícitamente seis parámetros. Teniendo como grados de libertad los retardos y las orientaciones de los ejes rápidos θ con respecto a la horizontal de los birrefringentes que conforman la CW. Teniendo esto en cuenta, se presenta un recurso a través de un código realizado en Python, el cual describe diversos esquemas de CW como casos particulares y permite diseñar o modelar cualquier CW. Al aplicar esta caracterización en diversos esquemas de CW, se encuentra que presentan ligaduras entre su retardo y su modo propio, por lo que estos CW no constituyen birrefringentes acordables con total libertad. Basado en este problema, proponemos

un diseño de CW mediante HWPs y QWPs descrito como un *Full Tuneable Birrefringent* (FTB), de retardo y modos propios elípticos tuneables de manera independiente y sin ligaduras. De este modo, ahora es posible acceder a un control total sobre las transformaciones de la polarización.

El trabajo se divide en tres partes, la primera describe el marco teórico, la segunda se desarrolla matemática el estudio de los BE y su representación geométrica, así como la caracterización explícita de las CW. En la tercera parte se presentan las aplicaciones desarrolladas.

Primera parte

2. Formalismos de la polarización de la luz

*'Scientific knowledge is a body of statements of varying degrees of certainty
-some most unsure, some nearly sure, none absolutely certain.'*
Richard Feynman

2.1. Polarización de la luz

La polarización de la luz es una propiedad fundamental que describe clásicamente como oscilan las ondas electromagnéticas, y su carácter fundamental es debido a que por fotón individual este tiene un estado de polarización definido el cual es su momento angular determinado por el espín, siendo cualesquier estado de polarización la superposición de sus espín enteros ± 1 permitidos por la naturaleza bosónica del fotón. Entre los formalismos de describir la polarización estos pueden agruparse en matriciales y no matriciales, entre los primeros están los formalismos de Jones y Stokes-Mueller de matrices 2×2 y 4×4 respectivamente, y en el segundo grupo estos se describen en las álgebras geométricas de números hipercomplejos mediante cuaterniones Pellat-Finet (1984), en vectores de Pauli Tudor (2008, 2010a, 2010b, 2012) y en el álgebra de Clifford Baylis y cols. (1993); Dargys (2012).

Sobre la descripción de la polarización de un haz en la teoría clásica, esta obedece a las ecuaciones de Maxwell para cargas y corrientes nulas, es decir, en el vacío), de donde se obtienen campos electromagnéticos variables en el tiempo y la ecuación de onda para dichos campos. Analizando el caso de ondas planas y monocromáticas, se obtiene que estos campos son transversales, siendo la polarización la propiedad que me describe la forma geométrica de las oscilaciones de estas ondas en el plano perpendicular a la propagación de la onda. Los dos formalismos matriciales que describen el estado de polarización de un haz son mediante los vectores de Jones y vectores de Stokes, los cuales son de dimensión en R^2 y R^4 respectivamente, dependiendo de cual formalismo se utilice se describen los dispositivos que cambien la polarización como matrices de 2×2 para formalismo de Jones, o 4×4 para formalismo de Stokes, llamadas estas últimas matrices de Mueller, La dimensión de las matrices se debe a que conservan la dimensión del vector polarización, con lo cual transforman un estado polarizado en otro.

Entre los formalismos del álgebra geométrica, de cuaterniones y vectores de Pauli Pellat-Finet (1984, 1991); Tudor (2008, 2010a, 2010b, 2012) se puede describir con mayor facilidad la transformación sobre la esfera de Poincaré mediante operadores unitarios. Su representación corresponde

a una rotación de ángulo δ sobre un eje \hat{n} , estos son los parámetros que determinan la transformación y por tanto el medio óptico, donde \hat{n} es el eje y por tanto determina los modos propios y el ángulo de rotación si este es real modela birrefringencia y si es imaginario modela dicroísmo. Por lo cual mediante un solo operador se puede describir de manera practica ambos operadores. Mediante este formalismo se puede representar cualquier medios con modos propios lineal, elípticos o circulares. Sobre estas dos álgebras, ambas comparten similitudes operacionales, sin embargo la forma de definir el eje \hat{n} difiere entre los cuaterniones y los vectores de Pauli, ya que los segundos obedecen al producto entre las matrices de Pauli.

Elipse de polarización

Describiendo la propagación de un haz propagándose en dirección z obedecen a las ecuaciones de Maxwell en el vacío mediante el propagador $\tau = kz - \omega t$ de la forma

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) = \cos \tau, \tag{2.1}$$

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) = \cos(\tau + \delta), \tag{2.2}$$

donde, E_x y E_y son los campos variables de amplitud en su respectiva coordenada, E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes máximas y δ la diferencia de fase entre ambas coordenadas.

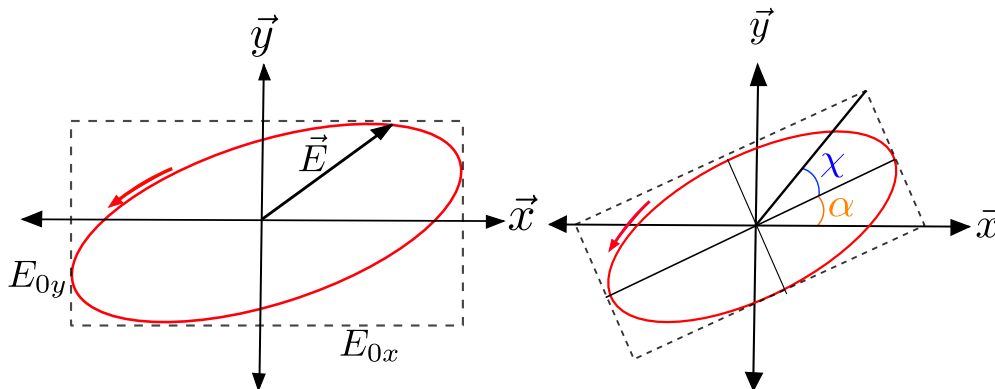


Figura 2.1 Representación de la elipse de Polarización. En la figura izquierda se representan por las amplitudes y las fases de cada componente mediante E_{0x} y E_{0y} . El figura de la derecha se representa la elipse de Polarización mediante una forma equivalente usando ángulos de excentricidad χ y rotación α .

Ahora, aplicando la identidad de $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ en E_y para cancelar el término de propagación τ , y aplicando la identidad $\cos^2\tau + \sin^2\tau = 1$, se obtiene una relación geométrica de amplitudes y fases. La cual rige el lugar geométrico del plano de oscilación siendo la ecuación de la elipse de polarización, expresada por

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta = \sin^2 \delta, \tag{2.3}$$

esta ecuación permite representar las formas de oscilación del campo electromagnético, siendo los casos de polarización lineal, elíptico y circular los permitidos por esta ecuación. El caso general de la polarización corresponde al estado elíptico y se representa en la figura 2.1.

2.2. Birrefringencia

La anisotropía en los índices de refracción reales es la llamada birrefringencia. La cual es explorada en aplicaciones mediante las láminas retardadores de onda, las cuales son hechas por cristales uniaxiales, y se utilizan para cambiar el estado de polarización al introducir una diferencia de fase en cada componente de polarización, su representación se muestra en la figura 2.2. Los medios birrefringentes poseen formas de clasificarse, tales como su retardo, orden y modos propios, estos últimos pueden ser lineales (**BL**), elípticos (**BE**) y circulares (**BC**).

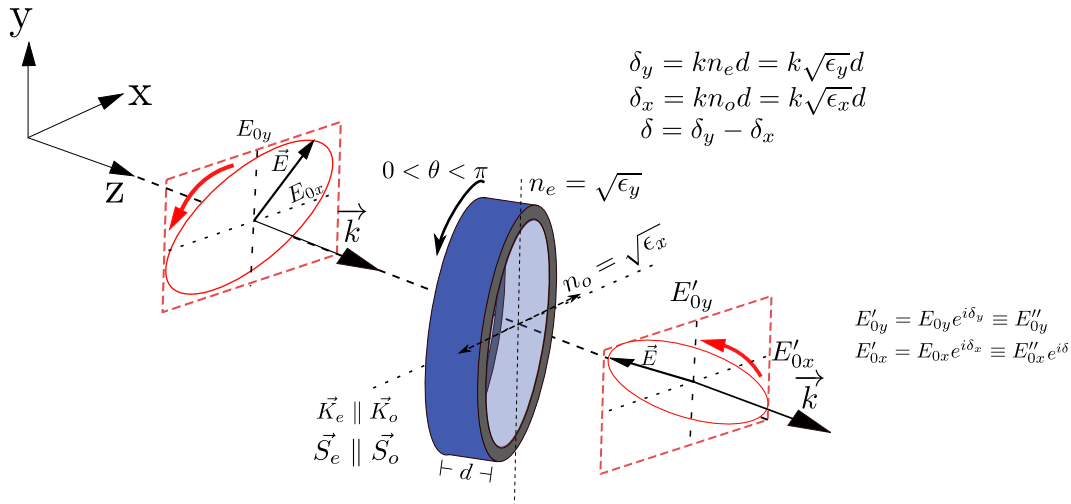


Figura 2.2 Retardador de onda, descrito como un material anisotrópico uniaxial sin absorción, es decir, índices reales. Las componentes del campo en X y Y se desfasan, ya que en cada eje recorren la distancia d a diferentes velocidades, debido a la diferencia de índices, sin embargo no ocurre el fenómeno de doble refracción ya que las componentes del campo viajan en la misma dirección, al igual la potencia, siguiendo la misma dirección, es decir $\vec{K}_e \parallel \vec{K}_o$ y $\vec{S}_e \parallel \vec{S}_o$. θ es el ángulo de rotación del birrefringente, el cual describe la orientación de las fases por tanto se genera un cambio de la polarización debido a la rotación. *Figura desarrollada con Inkscape*

Para obtener una descripción de los cambios en la polarización debido a rotaciones en el retardador, se hace aplicando el operador rotación a la matriz de un birrefringente. Dicho operador se revisará en los formalismos de matrices de Jones y de Mueller, y en formalismos geométricos de álgebra de cuaterniones y vectores de Pauli.

Birrefringencia con modos propios lineales (BL)

Un medio birrefringente con modos propios lineales se representa en la figura 2.3. Este tipo de medio está hecho de cristales como cuarzo y calcita en ciertas direcciones de incidencias. En general estos tipos de medios BL son los usados para los moduladores de polarización comerciales tales como placas cuarto de onda y media onda.

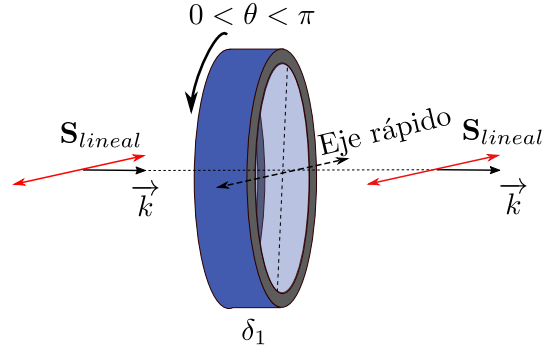


Figura 2.3 Representación de un retardador lineal rotante de retardo δ_1 , el cual tiene como modos propios todos los con polarización lineales.

Ley de los birrefringentes con modos propios lineales BL

La curva de estados generador por un **BL** rotante tiene una representación geométrica característica, es decir, genera una curva específica sobre la esfera de Poincaré dependiendo del retardo y estado de polarización incidente. Para obtener dicha curva, debemos describir el operador de un retardador lineal rotante en sus formalismos matriciales y de álgebras geométricas.

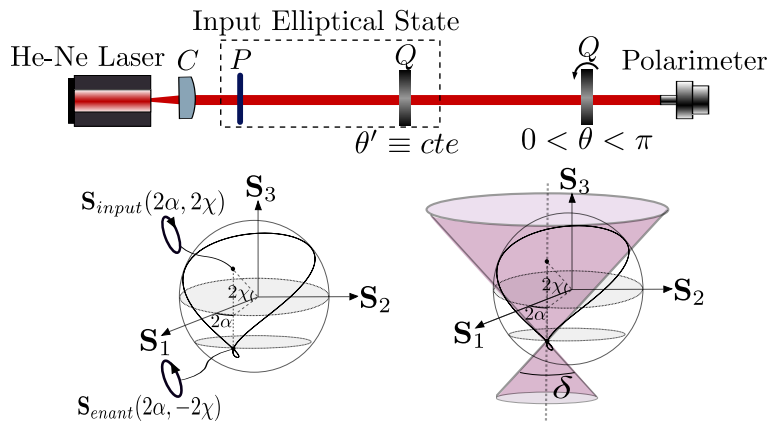


Figura 2.4 Esquema óptico utilizado por [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#) para placas birrefringentes con modos de polarización lineal, donde **C** es una lente colimadora, **P** un polarizador lineal, $\theta' \equiv cte$ es un ángulo constante y **Q** son placas de onda cuarto de onda rotativas.

Utilizando el formalismo de vectores de Stokes, y matrices de Mueller para el operador birrefringente lineal rotante está dado por:

$$M_\delta(\theta) = R(-\theta)M_\delta R(\theta) , \tag{2.4}$$

los estados emergentes están descritos por \mathbf{S}' , y corresponden a la evolución de un estado de polarización incidente \mathbf{S} definido al pasar por un birrefringente rotante, al graficar sobre la esfera de

Poincaré \mathbf{S}' variando θ entre $(0, 2\pi)$ se obtiene la curva de los estados emergentes, para obtener la expresión de los estos estados se opera de la siguiente forma

$$\mathbf{S}' = M_\delta(\theta)\mathbf{S}, \quad (2.5)$$

reemplazando $M_\delta(\theta)$ operada por la ecuación 2.4 obtenemos el vector \mathbf{S}' ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}'_0 \\ \mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{S}'_2 \\ \mathbf{S}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos \delta) + \sin 2\chi \sin \delta] \sin 2\theta \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos \delta) + \sin 2\chi \sin \delta] \cos 2\theta \\ \sin \delta \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi \cos \delta \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

el cual genera una curva de estados descritas por trayectorias cerradas en formas de ocho simétrico o asimétrico dependiendo del estado incidente. Las ecuaciones parametrizadas del cono descritas por la ley de los retardadores serán caracterizadas por el siguiente vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a + \left(\frac{1-\cos \delta}{\sin \delta}\right) (z - c) \sin 2t \\ b - \left(\frac{1-\cos \delta}{\sin \delta}\right) (z - c) \cos 2t \\ z \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

donde z y t son parámetros independientes. Dicha curva se verificó experimentalmente mediante el esquema de la figura 2.4. Y se representa en la figura 2.5, la cual puede describirse por un formalismo geométrico [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#) mediante la siguiente ley:

Ley de los birrefringentes con modos propios lineales: *Las trayectorias formadas sobre la esfera de Poincaré como el resultado de pasar un estado polarizado a través de un birrefringente lineal rotante son caracterizadas por la curva de intersección de la esfera de Poincaré con un cono. El eje de simetría del cono esta definido por el estado de polarización de entrada y su estado enantiógiro(estado con misma orientación y elipticidad girando en sentido contrario). Las trayectorias sobre el plano ecuatorial de estas curvas corresponde a las limacondes de Pascal.*

Birrefringencia con modos propios circulares (BC) o Actividad Óptica

La birrefringencia circular se evidencia sobre la esfera de Poincaré en la figura 2.6. Como operador, la actividad óptica actúa como una rotación del plano de polarización del haz incidente sin variar su elipticidad. Siendo el estado circular el único que al rotarse su plano queda invariante, por lo tanto corresponde a su modo propio y se puede catalogarse como birrefringencia circular.

2.3. Formalismo de álgebras geométricas en la luz polarizada

Los operadores que representan los medios birrefringentes, son transformaciones unitarias [Jones \(1941a\)](#), lo que permite representar a los birrefringentes como rotaciones sobre la esfera de Poincaré. Donde las álgebras geométricas surgen de manera intuitiva en dichas transformaciones. Dichas álgebras corresponden a los vectores de Pauli, y los número hipercomplejos de cuaterniones.

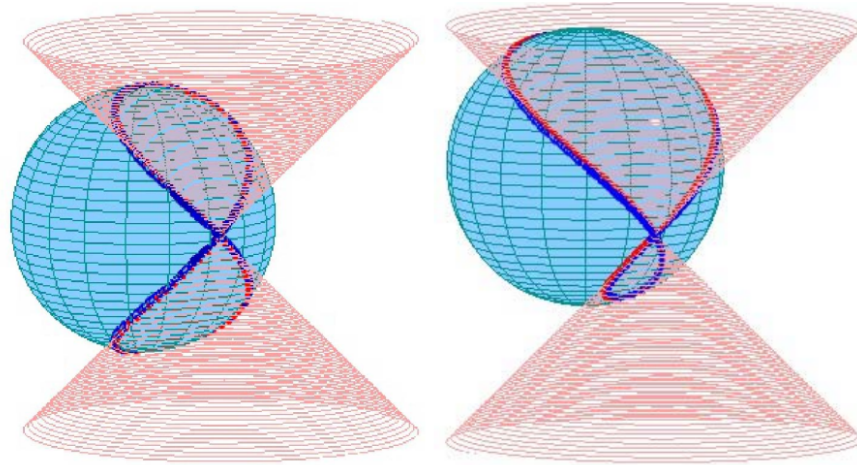


Figura 2.5 Representación de la ley de los retardadores lineales para un retardador QWP rotante generando curvas de estados simétricos y asimétricos al incidirle un estado lineal o elíptico representado en blanco. Figura tomada de [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#).

Álgebra de cuaterniones

Los cuaterniones corresponden a números hipercomplejos de cuatro dimensiones propuestos por Hamilton. Los cuales son una extensión de los números complejos a una representación tridimensional. Estos siguen unas reglas de producto y suma particulares. Pierre Pellat-Finet [Pellat-Finet \(1984, 1991\)](#) propuso una representación de la polarización mediante su uso, la cual es equivalente al formalismo de Stokes-Mueller, donde los estados de polarización y los operadores están descritos también por cuaterniones. Dicha álgebra de cuaterniones tiene la siguiente forma. Definiendo \hat{q} mediante

$$\hat{q} \in \mathbb{C}^4; \quad \hat{q} = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}, \quad (2.8)$$

donde \mathbb{C}^4 representa el espacio 4-dimensional complejo. q_0 es un escalar real y q_i ; $i = 1, 2, 3$ son partes complejas de \hat{q} . \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} son unidades imaginarias en diferentes orientaciones, y cumplen con las relaciones $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = -1$ y $\hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$. Los cuales obedecen un regla se suma usual y producto definido de la forma

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k, \quad (2.9)$$

donde \mathbf{e}_i son la base de los cuaterniones $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \{1, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

Representación de los estados de polarización

La representación de los estados de polarización está representado por

$$\hat{P} = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k}, \quad (2.10)$$

donde $q_0 = S_0$ es la parte escalar y representa la intensidad de la fuente, y las partes hipercomplejas $q_i = S_i$ con $i = 1, 2, 3$ caracterizan el estado de polarización. En esta representación de cuaterniones, es posible describir estados parcialmente polarizados, mediante las siguientes relaciones: si el

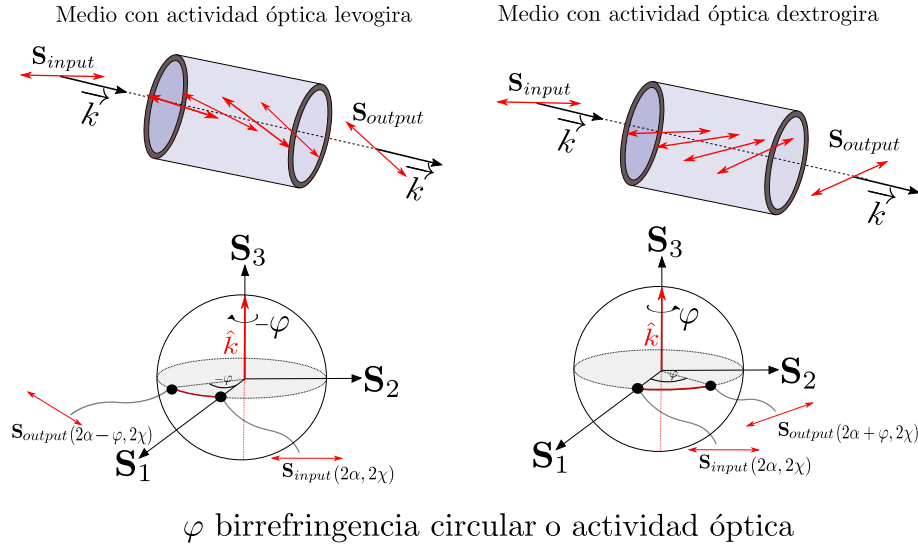


Figura 2.6 Representación de la actividad óptica o birrefringencia circular en muestras de una solución ópticamente activa en un tubo de ensayo de polarimetría en sus dos variantes dextrógira o levógira y su representación como operador de rotación sobre la esfera de Poincaré.

cuaternión P sólo tiene parte real, de la forma

$$\hat{P} = q_0, \quad (2.11)$$

el haz está no polarizado. Y si las componentes vectoriales $q_i = S_i$ para $i = 1, 2, 3$ existen siguen alguna de las siguientes relaciones

$$q_0^2 > q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad (2.12)$$

el estado es parcialmente polarizado. Si cumple con

$$q_0^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2, \quad (2.13)$$

entonces el estado está totalmente polarizado. Por lo tanto, la relación la podemos escribir como

$$1 = \frac{q_1^2}{q_0^2} + \frac{q_2^2}{q_0^2} + \frac{q_3^2}{q_0^2}, \quad (2.14)$$

lo cual representa la ecuación de una esfera unitaria centrada en el origen. Este resultado permite la representación de los estados de polarización mediante la parte vectorial de los cuaterniones sobre la esfera de Poincaré.

Operadores de birrefringencia lineal, elíptica o circular en formalismo de cuaterniones

Los operadores de polarización describen aquellos medios que modifican el estado, tales como birrefringencia y dicroísmo. La acción de un birrefringente en un estado polarizado sobre la esfera

de Poincaré se modela como una rotación **Pellat-Finet (1984)**. Donde el operador se representa por un vector \mathbf{e}_q y un ángulo de rotación γ , de la forma

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}} = \cos \frac{\gamma}{2} + \mathbf{e}_q \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (2.15)$$

donde γ representa el retardo de fase que introduce el birrefringente y \mathbf{e}_q es un cuaternio puro el cual se representa los modos propios de polarización del medios. Los cuales se modelan como un vector unitario sobre la esfera de Poincaré expresado de la forma

$$\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_1 \cos 2\chi \cos 2\alpha + \mathbf{e}_2 \cos 2\chi \sin 2\alpha + \mathbf{e}_3 \sin 2\chi, \quad (2.16)$$

donde α y χ son los ángulos de rotación y elipticidad de los estados propios de polarización del birrefringente. La transformación es una rotación del estado incidente, como se muestra en la figura 2.7. La acción del operador en un estado polarizado \mathbf{S} se expresa de la forma

$$\mathbf{S}' = \mathbf{e}^{\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}} \mathbf{S} \mathbf{e}^{-\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}}, \quad (2.17)$$

donde \mathbf{S} representa el estado polarizado incidente en el birrefringente. Al modelarse como una

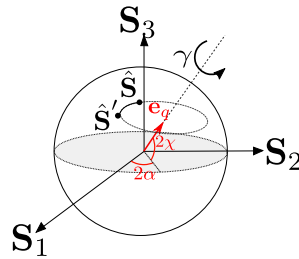


Figura 2.7 Representación de la transformación de un estado polarizado incidente \mathbf{S} en un estado \mathbf{S}' al pasar por un medio birrefringente con modos propios elípticos sobre la esfera de Poincaré.

rotación, los estados rotan un ángulo γ con respecto a \mathbf{e}_q , siendo \mathbf{e}_q aquellos los puntos invariantes a la transformación debido a que corresponde a sus modos propios. Este modelo permite representar un birrefringente lineal, elíptico o circular variando los ángulos del vector \mathbf{e}_q .

Birrefringente lineal rotante en Formalismo de cuaterniones

Los estados emergentes generados por un retardador lineal rotante en formalismo de cuaterniones se representa en la figura 2.8.

Cuando $\chi = 0$ en la ecuación 2.16 se obtiene el caso de un **BL** de modos propios \mathbf{e}_l y birrefringencia δ , cuya orientación del eje rápido con respecto a la horizontal es $\alpha = \theta$, así

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_1 \cos 2\theta + \mathbf{e}_2 \sin 2\theta. \quad (2.18)$$

De esta manera se obtiene $\mathbf{e}^{\mathbf{e}_l \frac{\delta}{2}} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}_l \sin \frac{\delta}{2}$. Por lo cual un **BL** opera sobre un estado polarizado de la forma

$$\mathbf{S}' = \mathbf{e}^{\mathbf{e}_l \frac{\delta}{2}} \mathbf{S} \mathbf{e}^{-\mathbf{e}_l \frac{\delta}{2}}, \quad (2.19)$$

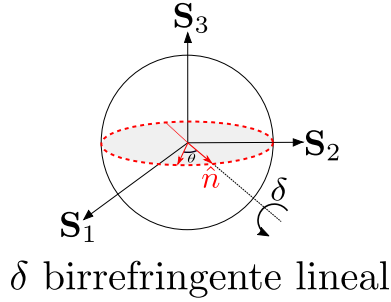


Figura 2.8 Representación del operador unitario de un retardador lineal rotante en formalismo de cuaterniones sobre la esfera de Poincaré.

donde, \mathbf{S}' son los estados emergentes, \mathbf{S} es el estado incidente. Al describir esta operación de manera explícita se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}'_0 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}'_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{S}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta/2 \\ \mathbf{e}_1 \cos 2\theta \sin \delta/2 \\ \mathbf{e}_2 \sin 2\theta \sin \delta/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{S}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta/2 \\ -\mathbf{e}_1 \cos 2\theta \sin \delta/2 \\ -\mathbf{e}_2 \sin 2\theta \sin \delta/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

operando mediante el producto de cuaterniones y aplicando identidades trigonométricas se obtiene el cuaternión que define la curva de estados emergentes de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}'_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{S}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 (\cos 2\chi \cos 2\alpha + [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi \sin \delta] \sin 2\theta) \\ \mathbf{e}_2 (\cos 2\chi \sin 2\alpha - [\cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi \sin \delta] \cos 2\theta) \\ \mathbf{e}_3 (\pm \sin \delta \cos 2\chi \sin(2\alpha - 2\theta) + \sin 2\chi \cos \delta) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Los estados emergentes \mathbf{S}' obtenidos por cuaterniones en la ecuación 2.21 es equivalente a la expresión obtenida mediante el formalismo de Mueller en la ecuación 2.6.

Birrefringencia con modos propios elípticos (BE)

En el formalismo de álgebras geométricas, el producto de dos operadores unitarios da otro unitario Jones (1941a). En los medios birrefringentes esto se puede explorar para generar retardadores elípticos, ya que el superponer dos o más **BL** este se comporta en equivalente como un **BE**, donde se ha evidenciado que su transformación es diferente a un retardador lineal. Este comportamiento es de esperarse debido a la no idempotencia del operador de un retardador de onda, siendo registrado una rotación adicional a un retardador lineal en los elípticos, correspondiente a una actividad óptica Vala y cols. (2021). En el artículo Pellat-Finet (1984) se aplicó el teorema de Jones Hurwitz y Jones (1941a); Jones (1941a) para describir mediante cuaterniones el retardador elíptico como una combinación de un retardador lineal y una actividad óptica, como se muestra en la figura 2.9. Matemáticamente el operador de un **BE** expresa de la forma

$$e^{\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}} = e^{\mathbf{e}_l \frac{\delta}{2}} e^{\mathbf{e}_3 \frac{\varphi}{2}}, \quad (2.22)$$

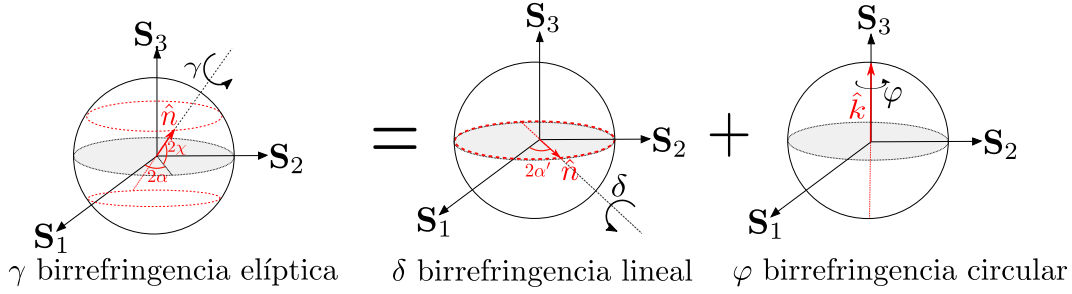


Figura 2.9 Representación de un retardador elíptico en sus dos formas, mediante un eje \mathbf{e}_q de retardo γ y la segunda a través de su descomposición por un retardador lineal y una actividad óptica.

donde, γ es el retardo de fase de eje $\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_1 \cos 2\chi \cos 2\alpha + \mathbf{e}_2 \cos 2\chi \sin 2\alpha + \mathbf{e}_3 \sin 2\chi$, φ es la actividad óptica equivalente de eje \mathbf{e}_3 , δ es la birrefringencia lineal equivalente de eje $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_1 \cos 2\alpha' + \mathbf{e}_2 \sin 2\alpha'$. Los parámetros equivalentes están relacionados de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \cos 2\chi \cos 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \cos 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} \\ \sin 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

aplicando el producto de cuaterniones se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cos 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \sin 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cos 2\alpha' \sin \frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\delta}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Factorizando $\sin \frac{\delta}{2}$ y aplicando las identidades de $\cos(A - B)$ y $\sin(A - B)$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \sin \frac{\delta}{2} \cos \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix} = e^{e_1 \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (2.25)$$

Finalmente la igualdad expresada en 2.22 queda de la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \sin \frac{\delta}{2} \cos \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \\ \sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{e^{e_1 \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \mathbf{e}_1 \begin{bmatrix} \cos 2\chi \cos 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos 2\chi \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{e}_3 \begin{bmatrix} \sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \end{pmatrix}}_{e^{e_q \frac{\gamma}{2}}}. \quad (2.26)$$

Siendo la ecuación 2.26 el operador de birrefringencia elíptica en sus dos representaciones, mediante la superposición de un retardador lineal y una actividad óptica y la segunda a través de un eje \mathbf{e}_q y retardo elíptico.

Álgebra de vectores de Pauli

Por un lado, a través de los vectores de Pauli, propuesto por Whitney [Whitney \(1971\)](#) y extendido por Tudor [Tudor \(2008, 2010a, 2010b, 2012\)](#), los efectos de un medio birrefringente se expresa de la forma

$$\mathbf{e}^{i\hat{n}\cdot\hat{\sigma}\frac{\delta}{2}} = \cos\frac{\delta}{2} + i\hat{n}\cdot\hat{\sigma}\sin\frac{\delta}{2}, \quad (2.27)$$

donde δ es la birrefringencia del medio, \hat{n} es un vector de Stokes correspondiente a los estados propios de polarización del medio, i es la unidad imaginaria y $\hat{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es el vector de Pauli.

El álgebra de vectores de Pauli para la polarización es expresada mediante una expansión de los operadores unitarios en la base de matrices de Pauli, siendo de interés para la polarización ya que emerge su estructura de manera natural junto a los parámetros de Stokes. Lo cual compone una representación isomorfa al álgebra de cuaterniones con menores diferencias y en un lenguaje más apropiado para la polarización la cual es el espín del fotón, de esta manera se presenta como un cálculo más compacto y adecuado. Primeramente, consideremos un operador lineal A , unitario de dimensión dos, es decir, operadores matriciales 2×2 . Siendo cualquier de estos expandido en la base de las matrices de Pauli de la forma

$$A = a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3, \quad (2.28)$$

donde $\{\sigma_i\}$ son las matrices de Pauli para $i = 0, 1, 2, 3$, siendo $\sigma_0 = \hat{I}$ la matriz identidad, las cuales obedecen al producto entre ellas de la forma

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (2.29)$$

Ahora identificando al operador A como la matriz de polarización, se obtiene que los coeficientes $\{a_i\}$ para $i = 0, 1, 2, 3$ son los parámetros de Stokes $\{S_i\}$. Adicionalmente, la expansión 2.28 se puede escribir mediante una notación vectorial de la forma

$$A = \hat{\sigma}_0 S_0 \hat{I} \pm i\hat{\sigma}_i \cdot \hat{S}_i, \quad (2.30)$$

donde, $\hat{\sigma}_0$ es la matriz identidad de rango 2, \hat{S}_i es un vector de Stokes el cual define el estado de polarización, y $\hat{\sigma}_i \cdot \hat{S}_i$ como la proyección de dicho vector sobre las matrices de Pauli. Siendo esta una representación sobre la esfera de Poincaré donde los ejes \hat{S}_i son proporcionales y definidos por las matrices de Pauli $\hat{\sigma}_i$. Llamaremos al vector normalizado $\hat{\sigma}_i/|\hat{\sigma}_i|$ como el eje de Pauli del operador. El cual determina un papel central en el álgebra de Pauli de operadores bidimensionales ya que en los casos de los operadores unitarios y hermitianos se reducen a un vector real de R_3 — siendo el eje de Pauli del operador el correspondiente a los modos propios del operador— y se puede visualizar en la esfera de Poincaré de manera equivalente a los cuaterniones previamente

descritos. A continuación particularizaremos la expansión expresada en la ecuación 2.30 para los operadores unitarios correspondiente a un retardador de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{i\hat{\sigma}_i\delta/2}\mathbf{S}e^{-i\hat{\sigma}_i\delta/2}, \quad (2.31)$$

donde el operador unitario se representa por $e^{i\hat{\sigma}_i\delta/2} = \cos \delta/2 \pm i\hat{\sigma}_i \sin \delta/2$, y el eje de Pauli y δ es el retardo de fase del retardador. Se evidencia que el operador de birrefringencia expresado en la ecuación 2.31 mediante la estructura de vectores de Pauli se obtiene un operador equivalente a los cuaterniones expresados en la ecuación 2.17, sin embargo pese a dicha similitud su manera de operar difiere ya que los cuaterniones se rigen por el producto expresado en 2.9 y los vectores de Pauli mediante 2.29.

Isomorfismos entre las álgebras geométricas de la polarización

Dada la caracterización geométrica para los medios birrefringentes que en este trabajo se estudia, aquí adoptaremos el formalismo de las álgebras geométricas en la base matrices de Pauli, en una estructura isomorfa a los cuaterniones, lo que permite unificar ambos lenguajes algebraicos. Así, considerando el producto de cuaterniones

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k, \quad (2.32)$$

donde \mathbf{e}_i para $i = 0, 1, 2, 3$, es la base de los cuaterniones, y la base de los vectores de Pauli obedece al producto

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (2.33)$$

con $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria y $\sigma_0 = \hat{I}$ es la matriz identidad. Estas dos formulaciones se pueden unificar notando que

$$(-i\sigma_i)(-i\sigma_j) = -\sigma_i\sigma_j = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}(-i\sigma_k), \quad (2.34)$$

es decir, asociando $\{\mathbf{e}_j\} = \{-i\sigma_j\}$ [Pellat-Finet \(2012b\)](#); [Pellat-Finet y Bausset \(1992\)](#), se tiene

$$\underbrace{(-i\sigma_i)}_{\mathbf{e}_i}\underbrace{(-i\sigma_j)}_{\mathbf{e}_j} = -\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\underbrace{(-i\sigma_k)}_{\mathbf{e}_k}. \quad (2.35)$$

Por lo tanto, estas dos representaciones obedecen a álgebras isomorfas. Siendo la base expresada como $\{\mathbf{e}_j\}$ la representación irreducible de los cuaterniones [Rao, Rao, y Koneru \(1988b\)](#).

Segunda parte

3. Ley de los birrefringentes con modos propios elípticos

'Nature has a great simplicity and therefore a great beauty.'
Richard Feynman

3.1. Ley de los birrefringentes con modos propios elípticos

Los medios birrefringentes presentan una transformación característica dependiendo a su retardo y modos propios. Previamente Salazar-Torres [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#) caracterizaron la curva de los estados emergentes de los BL a través de un cono que intersecta la esfera de Poincaré. Lo cual sugiere que los BE también posean una caracterización geométrica de sus estados emergentes sobre la esfera de Poincaré. Basado en ello, proponemos una caracterización geométrica para los BE basados en la ley de los BL [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#) y el teorema I de Jones [Hurwitz y Jones \(1941a\)](#); [Poincaré \(1892\)](#).

Por lo tanto, los estados emergentes generados por un BE pueden ser caracterizados geoméricamente sobre la esfera de Poincaré. Los estados emergentes de un BE al incidir luz polarizada, se escriben en la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_q \frac{\gamma}{2}} \mathbf{S} e^{-e_q \frac{\gamma}{2}}, \quad (3.1)$$

donde α y χ son los ángulos de rotación y elipticidad de la polarización del haz incidente $\hat{\mathbf{S}}$. Por el teorema I de Jones [Hurwitz y Jones \(1941a\)](#); [Poincaré \(1892\)](#) se descompone el operador de un BE de modos propios \mathbf{e}_q como la composición de dos birrefringentes, un BL de modos propios \mathbf{e}_l y una actividad óptica o BC de modos \mathbf{e}_3 . Expresado de la forma [Pellat-Finet \(1984\)](#)

$$e^{e_q \frac{\gamma}{2}} = e^{e_l \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}, \quad (3.2)$$

y por lo tanto

$$e^{-e_q \frac{\gamma}{2}} = e^{-e_3 \frac{\varphi}{2}} e^{-e_l \frac{\delta}{2}}, \quad (3.3)$$

donde $e^{-e_q \frac{\gamma}{2}} = e^{(e_q \frac{\gamma}{2})^\dagger}$, siendo \dagger el adjunto conjugado. Lo cual permite describir la ecuación 3.1 de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_l \frac{\delta}{2}} \underbrace{e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi) e^{-e_3 \frac{\varphi}{2}}}_{\mathbf{S}(2\alpha + \varphi, 2\chi)} e^{-e_l \frac{\delta}{2}}. \quad (3.4)$$

Donde la acción de un BC en formalismo de álgebras geométricas se desarrolla en el apéndice A.1. Operando la BC al estado incidente, se llega a

$$\mathbf{S}' = e^{e_l \frac{\delta}{2}} \mathbf{S}(2\alpha + \varphi, 2\chi) e^{-e_l \frac{\delta}{2}}, \quad (3.5)$$

lo cual corresponde a la acción de un **BL** sobre un estado linealmente polarizado de azimuth de la forma $2\alpha' = 2\alpha + \varphi$. La ecuación 3.5 se reescribe de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_1 \frac{\delta}{2}} \mathbf{S}(2\alpha', 2\chi) e^{-e_1 \frac{\delta}{2}}, \quad (3.6)$$

La ecuación equivalente anterior representa los estados emergentes generados por un birrefringente con modos propios lineales al incidirle un estado lineal $\mathbf{S}(2\alpha', 2\chi)$. Expresando la ecuación 3.6 de forma explícita obtenemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}'_0 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \mathbf{S}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_1 \cos 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_2 \sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{S}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ -\mathbf{e}_1 \cos 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ -\mathbf{e}_2 \sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

procedemos a realizar el producto de los tres cuaterniones, y factorizando los parámetros de Stokes obtenemos

$$\mathbf{S}'_0 = 1, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_1 = & \left(\mathbf{S}_1 (\cos^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}) \right. \\ & \left. + 2\mathbf{S}_2 \cos 2\theta \sin 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2\mathbf{S}_3 \sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_2 = & \left(2\mathbf{S}_1 \cos 2\theta \sin 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} - 2\mathbf{S}_3 \cos 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right. \\ & \left. + \mathbf{S}_2 (\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cos^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}) \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'_3 = & \left(-2\mathbf{S}_1 \sin 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} + 2\mathbf{S}_2 \cos 2\theta \sin \frac{\delta}{2} \cos \frac{\delta}{2} \right. \\ & \left. + \mathbf{S}_3 (-\sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2} + \cos^2 \frac{\delta}{2} - \cos^2 2\theta \sin^2 \frac{\delta}{2}) \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Adicionalmente, reemplazamos los parámetros de Stokes en su forma de ángulos de rotación y elipticidad. Además, aplicando las siguientes relaciones trigonométricas $\sin^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1-\cos \delta}{2}$ y $\cos^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1+\cos \delta}{2}$ en las ecuación 3.9, 3.10 y 3.11 se obtiene los parámetros de Stokes normalizados \mathbf{S}'_i para $i = 1, 2, 3$ respectivamente. Correspondiente a los estados emergentes, expresado de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 \mathbf{S}'_0 + \mathbf{e}_1 \mathbf{S}'_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{S}'_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{S}'_3 = & \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 (\cos 2\chi \cos 2\alpha' \\ & + [\cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi \sin \delta] \sin 2\theta) \\ & + \mathbf{e}_2 (\cos 2\chi \sin 2\alpha' - [\cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta)(1 - \cos \delta) \\ & \pm \sin 2\chi \sin \delta] \cos 2\theta) + \mathbf{e}_3 (\pm \sin \delta \cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta) \\ & + \sin 2\chi \cos \delta), \end{aligned} \quad (3.12)$$

expresada de manera vectorial se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{S}'_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{S}'_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{S}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 (\cos 2\chi \cos 2\alpha' + [\cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi \sin \delta] \sin 2\theta) \\ \mathbf{e}_2 (\cos 2\chi \sin 2\alpha' - [\cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta)(1 - \cos \delta) \pm \sin 2\chi \sin \delta] \cos 2\theta) \\ \mathbf{e}_3 (\pm \sin \delta \cos 2\chi \sin(2\alpha' - 2\theta) + \sin 2\chi \cos \delta) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

La ecuación anterior es equivalente a las ecuaciones de un **BL** rotante, encontrado previamente en matrices de Mueller, ver ecuación 2.6, y en álgebras geométricas en la ecuación 2.21. La cual se caracterizó previamente como las ecuaciones paramétricas de un cono que intersecta la esfera de Poincaré [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#), dando como desarrollo a la ley de los **BL**. Por lo tanto, la ecuación de estados emergentes generados por un **BE** rotante presentan la misma estructura matemática, siendo sus estados emergentes son también determinados por un cono de ángulo δ , pero con su vértice rotado debido al poder rotatorio a causa de la actividad óptica o **BC** φ . Dicho cono por lo tanto presenta la forma de la ecuación 2.7, con la variante de que el vértice del cono se encuentra en $(a, b, c) = \mathbf{S}(2\alpha + \varphi, -2\chi)$. Por lo tanto, dicho cono queda de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2\chi \cos(2\alpha + \varphi) + \left(\frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta}\right) (z + \sin 2\chi) \sin 2t \\ \cos 2\chi \sin(2\alpha + \varphi) - \left(\frac{1 - \cos \delta}{\sin \delta}\right) (z + \sin 2\chi) \cos 2t \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

En este caso, se identifica que para birrefringentes con modos propios elípticos se cumple dicha ley, pero los estados emergentes sufren una actividad óptica adicional. Es así que su estado de entrada $\mathbf{S}_{input}(2\alpha, 2\chi)$ también determina el vértice del cono para un **BE**, $\mathbf{S}_{cross}(2\alpha', -2\chi)$. Por lo cual el estado que determina el vértice del cono se expresa de la forma

$$\mathbf{S}_{cross}(2\alpha', -2\chi) = \mathbf{S}(2\alpha + \varphi, -2\chi), \quad (3.15)$$

de esta manera se obtiene una descripción geométrica de la curva de estados emergentes para birrefringentes con modos propios elípticos. Resultando en la generalización de la ley de los birrefringentes con modos propios lineales, sintetizado de la forma:

Ley de los birrefringentes con modos propios elípticos: *Todos los estados emergentes que resultan de pasar un haz de luz polarizado a través de un medio birrefringente con modos propios elípticos pertenecen a la curva de intersección entre la esfera de Poincaré y un cono de vértice rotado, donde dicha rotación depende de la actividad óptica, y la abertura del cono a la birrefringencia con modos propios lineales.*

Dicha ley se representa en la figura 3.1, y tiene como caso particular la encontrada en [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#). Cuando la actividad óptica es nula $\varphi = 0$, todas las expresiones convergen a la ley de los **BL**. Por otro lado, si la birrefringencia lineal es nula $\delta = 0$, el modelo se reduce al caso de un **BC**.

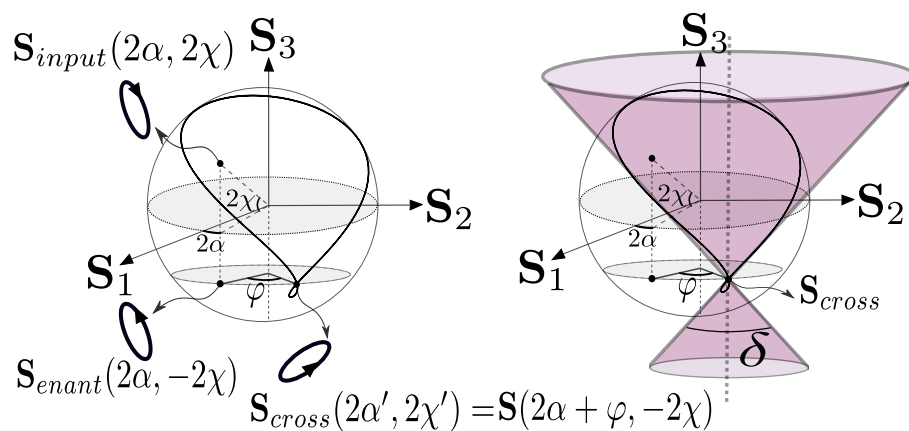


Figura 3.1 Representación de la ley de los BE. Y la relación entre el estado de entrada S_{input} con el cruzado S_{cross} el cual determina el vértice del cono.

4. Placas de onda compuestas(CW)

'To doubt everything and to believe everything are two equally convenient solutions; each saves us from thinking.'
Henri Poincaré

Una placa de onda compuesta (CW) Gu y cols. (2018) consta de varias placas de onda, y mediante a su orden y estructura esta puede diseñar sistemas de polarización específicos más complejos, tales como retardadores acromáticos Saha y cols. (2012); Vilas y Lazarova-Lazarova (2017); Vilas, Sanchez-Brea, y Bernabeu (2013), superacromáticos Gu y cols. (2022); Li y Escuti (2021); Samoylov y cols. (2004), un rotador óptico (birrefringente circular) Al-Mahmoud y cols. (2020); Jones (1941b); Rangelov y Kyoseva (2015a), un birrefringente elíptico Miller y cols. (2022); Yu (2016) y un polarizador elíptico Tu y cols. (2017). En los CW se han encontrado propiedades diferentes a los retardadores lineales, donde recientemente se ha medido el fenómeno de actividad óptica o birrefringencia circular Vala y cols. (2021), la cual no puede omitirse del modelo Vilas y cols. (2013); X. Zhang (2013). Esto es de esperarse matemáticamente ya que estos comparten las propiedades de rotaciones, por lo tanto la no conmutatividad y no idempotencia deben emerger en un sistema de varias láminas superpuestas. De acuerdo con el teorema de Jones Hurwitz y Jones (1941b), un CW se puede describir mediante la superposición de dos retardadores lineal y circular equivalentes Yu y Chou (2011); Yu y cols. (2009), el cual también se ha descrito en formalismo de Mueller Gu y cols. (2018) y cuaterniones Pellat-Finet (1984).

Consideramos una CW compuesta por n -láminas retardadoras de onda, como se presenta en la figura 4.1(a), donde cada retardador posee en general modos propios elípticos y un desfase γ_i . Los ejes principales de estas láminas están orientados con ángulos θ_i respecto a la horizontal. Para caracterizar la CW proponemos emplear el formalismo de álgebras geométricas para abordar el problema de encontrar el operador que representa una CW arbitraria. Debido a que, en esta representación de cuaterniones o vectores de Pauli Tudor (2008, 2010a, 2010b, 2012); Whitney (1971), el operador depende explícitamente del estado propio y del retardo, permitiendo una caracterización inmediata de dichos parámetros en la CW.

Para describir matemáticamente una CW compuesta de n -birrefringentes, se debe aplicar n -veces el operador de la ecuación 2.15, de la forma

$$\mathbf{S}' = \underbrace{e^{e_{qn} \frac{\gamma_n}{2}} e^{e_{q2} \frac{\gamma_2}{2}} e^{e_{q1} \frac{\gamma_1}{2}}}_{\prod_i^n e^{e_{qi} \frac{\gamma_i}{2}}} \mathbf{S} e^{-e_{q1} \frac{\gamma_1}{2}} e^{-e_{q2} \frac{\gamma_2}{2}} e^{-e_{qn} \frac{\gamma_n}{2}}. \quad (4.1)$$

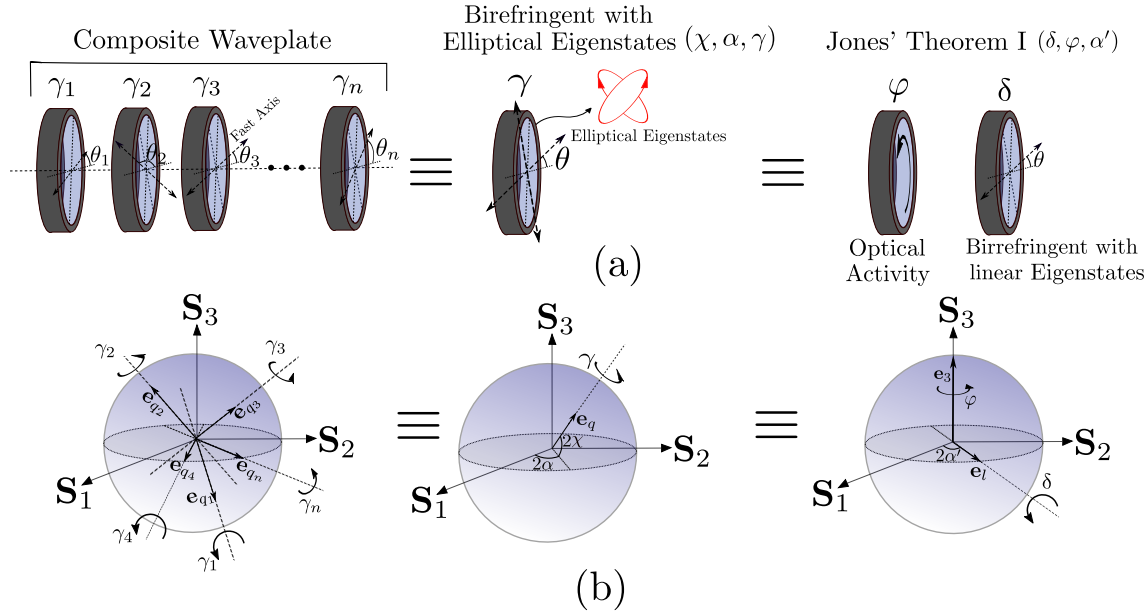


Figura 4.1 Composición de n -birrefringentes con modos propios de polarización \mathbf{e}_{q_n} y retardos γ_n descritos de manera equivalente en dos representaciones correspondientes a un BE y a través del RJ mediante la composición de un BC y un BL.

Desarrollando la productoria de los n -birrefringentes se obtiene un operador equivalente etiquetado como \mathbf{Q} , de la forma

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{e}_0 \mathbf{Q}_0 + \mathbf{e}_1 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{Q}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{Q}_3 = \prod_{i=1}^n \mathbf{e}^{e_{qi} \frac{\gamma_i}{2}}. \quad (4.2)$$

Siendo una CW específica descrita de manera general por un operador de la forma ecuación 4.2, sin embargo para obtener este operador se debe conocer el número de birrefringente, sus retardos γ y sus orientaciones θ . El operador de una CW se puede describirse mediante dos representaciones equivalentes explícitas, como se representa en la figura 4.1. La primera descripción de una CW como un BE, y la segunda a través del RJ, compuesto de la composición de una BL y una BC. Ambas representaciones poseen tres incógnitas, de modo que cada CW posee seis parámetros que la caracterizan.

4.1. CW como un birrefringente con modos propios elípticos

La primera descripción de una CW como un BE se realiza mediante las variables (α, χ, γ) , correspondientes al azimuth, la elipticidad del modo propio, y el retardo, respectivamente. Para obtener las ecuaciones, se describe el operador de una CW general de la ecuación 4.2 como un BE de la forma ecuación 2.15 con modos propios elípticos expresados ecuación 2.16, obteniendo la siguiente

igualdad

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{Q}_3 \end{pmatrix}}_{\prod_{i=1}^n e^{e q_i \frac{\gamma_i}{2}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\cos 2\chi \cos 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\cos 2\chi \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[\sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} \right] \end{pmatrix}}_{e^{e q \frac{\gamma}{2}}}. \quad (4.3)$$

Mediante esta igualdad en cada componente de la base \mathbf{e}_i con $i = 0, 1, 2, 3$ obtenemos la expresiones explícitas de cada parámetro. Para determinar γ procedemos mediante la componente escalar \mathbf{e}_0 , de la forma

$$\mathbf{Q}_0 = \cos \frac{\gamma}{2}, \quad (4.4)$$

para el azimuth α dividimos la componente \mathbf{e}_2 entre \mathbf{e}_1 obteniendo

$$\frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{Q}_1} = \tan 2\alpha. \quad (4.5)$$

Finalmente, para la elipticidad del modo propio χ procedemos sumando las potencias de las componentes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 de la forma

$$\mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2 = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos^2 2\chi, \quad (4.6)$$

de la ecuación 4.4 obtenemos $\sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - q_0^2$, reemplazando en la ecuación anterior obtenemos

$$\sqrt{\frac{\mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2}{1 - \mathbf{Q}_0^2}} = \cos 2\chi. \quad (4.7)$$

De esta manera se obtiene las expresiones ecuación 4.4, ecuación 4.5 ecuación 4.6 para (γ, α, χ) , respectivamente. Estos parámetros caracterizan una CW arbitraria como una BE mediante el modo propio elíptico y el retardo de fase de la CW.

4.2. CW descrito a través del teorema I de Jones

Una descripción de una CW es descomponerlo a través del RJ [Hurwitz y Jones \(1941a\)](#); [Jones \(1941a\)](#), en equivalente a una composición de un BL y un BC. A través de los parámetros $(\alpha', \delta, \varphi)$, expresado de la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{e}_1 \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{Q}_3 \end{pmatrix}}_{\prod_{i=1}^n e^{e q_i \frac{\gamma_i}{2}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\sin \frac{\delta}{2} \cos \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[\cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{pmatrix}}_{e^{e_1 \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (4.8)$$

Para hallar φ , se puede obtener a través de las componentes \mathbf{e}_3 y escalar, de la forma

$$\frac{\mathbf{Q}_3}{\mathbf{Q}_0} = \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \text{or} \quad \frac{\mathbf{Q}_0}{\mathbf{Q}_3} = \cot \frac{\varphi}{2}, \quad (4.9)$$

por otro lado, para obtener α' procedemos dividiendo las componente \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_1 de la forma

$$\frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{Q}_1} = \tan\left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (4.10)$$

Para determinar el retardo δ de la BL se obtiene sumando las potencias cuadradas de las componentes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , ó \mathbf{e}_0 y \mathbf{e}_3 de la forma

$$\mathbf{Q}_1^2 + \mathbf{Q}_2^2 = \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad \text{ó} \quad \mathbf{Q}_0^2 + \mathbf{Q}_3^2 = \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (4.11)$$

De esta manera se obtiene las expresiones ecuación 4.9, ecuación 4.10, y ecuación 4.11 para $(\varphi, \alpha', \delta)$ respectivamente que caracterizan una CW arbitraria a través del RJ.

Relaciones presentes entre los parámetros equivalentes

Existen relaciones entre las representaciones de un birrefringente con modos propios elípticos y el RJ. Previamente encontradas de manera independiente en formalismos de Jones Yu (2016); Yu y cols. (2009) y a través de álgebras geométricas en cuaterniones Pellat-Finet (1984). Las cuales son ahora obtenidas mediante la igualdad entre la ecuación 4.3 y ecuación 4.8. Para la relación entre los retardos en ambas representaciones se iguala componente escalar de la forma

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad (4.12)$$

por otro lado la elipticidad del modo propio también está relacionado por el retardo del BL y el poder rotatorio de una BC del RJ. Para ello, se divide la componente \mathbf{e}_3 entre la norma de \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 , obteniendo

$$\tan 2\chi = \cot \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4.13)$$

Adicionalmente existe una relación lineal entre los azimuth de ambas representaciones 2α y $2\alpha'$ expresada mediante la igualdad de las ecuaciones 4.5 y 4.10, de la forma

$$2\alpha = 2\alpha' - \frac{\varphi}{2}. \quad (4.14)$$

Por lo cual ambas representaciones de un BE y el teorema de Jones tiene sus ejes y su retardos relacionados. Esta relación se representa sobre la esfera de Poincaré en la figura 4.2. Debido a que estas relaciones se encuentran presentes para cualquier BE, entonces estarán presentes en las CW.

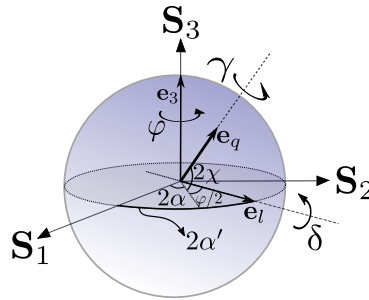


Figura 4.2 Representación de las ligaduras entre los parámetros intrínsecos y equivalentes de un BE.

Se realizó un código en Python con los resultados obtenidos, el cual permite modelar cualquier sistema de placas compuestas. El repositorio puede accederse mediante el QR de la figura 4.3.



Figura 4.3 QR el cual direcciona al código en un repositorio en GitHub para modelar y caracterizar sistemas de placas de onda compuestas.

5. Configuraciones de placas de onda compuestas

'Science is facts.'
Henri Poincaré

La caracterización desarrollada en la sección anterior permite modelar cualquier configuración de CW mediante dos representaciones de manera explícita. Para probar las características del modelo se aplicará esta metodología para describir diversas configuraciones de CW previamente descritas como retardadores con propiedades ajustables.

Basado en la capacidad del modelo de CW de expresar relaciones entre sus parámetros, proponemos un diseño de CW con sus modos propios y retardo ajustables de manera independiente. Dicho esquema es denominado *Full Tuneable Birrefringent (FTB)* y está compuesto de cuatro HWPs y dos QWPs. Este CW es por lo tanto, un birrefringente totalmente tuneable. Basado en lo anterior, el grupo de esquemas analizados es:

1. Como **BE** tuneable, una biplaca compuesta de dos QWPs [Gottlieb y Arteaga \(2021\)](#); [Pabón y cols. \(2023\)](#).
2. Como **BC** tuneable, una biplaca compuesta de dos HWPs [Dimova, Rangelov, y Kyoseva \(2015\)](#); [J. Kim y Chang \(2006\)](#); [Rangelov y Kyoseva \(2015b\)](#).
3. Como **BL** tuneables, dos CW propuestos por Pancharatnam [Pancharatnam \(1955\)](#) y Messaadi [Messaadi y cols. \(2018\)](#).
4. Un *Full Tuneable Birefringent (FTB)* compuesto de cuatro QWPs y dos HWPs.

A continuación, presentamos la caracterización de un grupo de CW de manera explícita mediante vectores de Pauli. A modo de describir sus características y buscar si poseen relaciones directas entre sus modos propios y retardos, tales como ligaduras o restricciones en sus grados de libertad. Además, se desarrolló un código en Python, el cual nos permite construir cualquier CW en formalismo de vectores de Pauli. Donde se presentan las clases de cada CW específico. Posteriormente, se caracterizó de manera explícita el FTB propuesto, y se verificó experimentalmente para todos los casos particulares. Cuando se comporta como un **BC**, **BL** y **BE** de retardos ajustables.

5.1. Birrefringente con modos elípticos(BE) compuesto de dos QWPs

Analizaremos primero la curva de estados emergentes cuando ambas placas QWP rotan sincronizadamente, manteniendo un ángulo de diferencia entre sus ejes rápidos θ' .

Rotación sincronizada

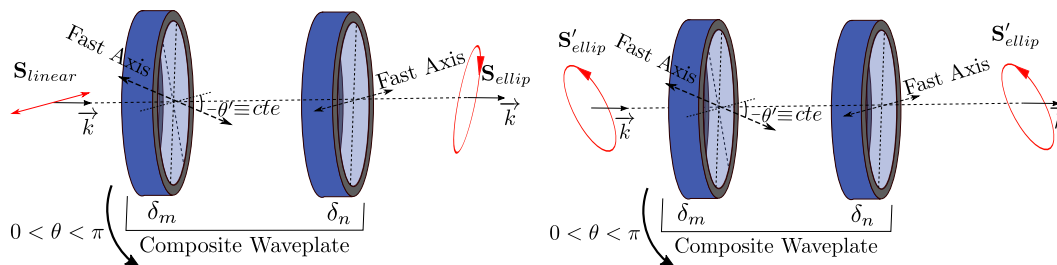


Figura 5.1 Biplaca compuesta por dos **BL** de retardos δ_n y δ_m . Donde θ' es el ángulo entre sus ejes rápidos. La figura izquierda ilustra que cuando se incide un estado lineal en la biplaca, el estado emergente será elíptico. Por otro lado, la figura derecha muestra un modo propio de polarización elíptico de la biplaca.

La composición de varias láminas **BL** produce en general un **BE** Gu y cols. (2018); Miller y cols. (2022); Yu (2016). De este modo, al emplear dos QWP para construir una biplaca, se puede diseñar un birrefringente con modos propios elípticos ajustables, en función del ángulo de separación entre los ejes rápidos de las QWP, como se muestra en la figura 5.1. En la figura 5.2 se muestra el esquema experimental para el estudio de los estados emergentes generados por la biplaca.

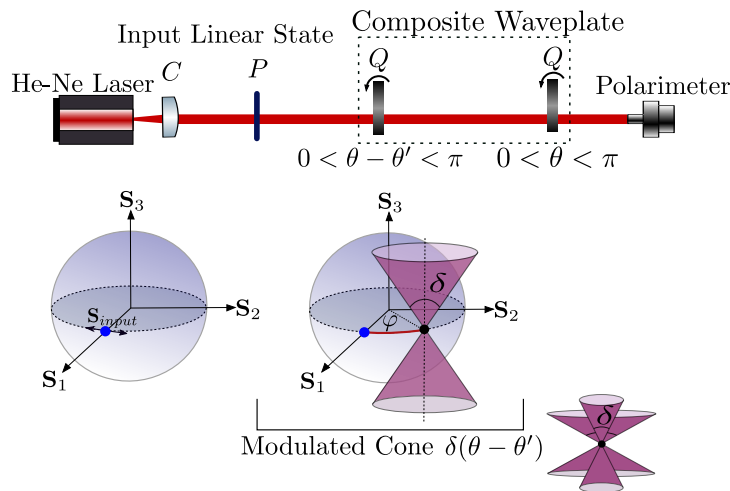


Figura 5.2 Esquema óptico para biplaca con dos QWPs. Se representa geométrica sobre la esfera de Poincaré como un cono de ángulo de apertura δ y poder rotatorio φ . Aquí **C** es un lente colimador, **P** un polarizador lineal, y **Q** una QWP.

Modelo de la biplaca de dos QWPs en el formalismo de Stokes-Mueller

Si bien la biplaca puede caracterizarse en el formalismo de Mueller. En formalismo de Mueller un birrefringente con modos propios lineales rotante Pérez (2022b) se describe de la forma

$$M_\delta(\theta) = R(-\theta)M_\delta R(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos \delta & \sin 2\theta \cos 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta \cos \delta & -\sin 2\theta \sin \delta \\ 0 & \sin 2\theta \cos 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta \cos \delta & \cos^2 2\theta \cos \delta + \sin^2 2\theta & \sin \delta \cos 2\theta \\ 0 & \sin \delta \sin 2\theta & -\sin \delta \cos 2\theta & \cos \delta \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Ahora, para un sistema de una biplaca M_b , consiste en operar dos veces el operador de un birrefringente con modos propios lineales rotante, la forma

$$M_b = M_{\delta_n}(\theta_n)M_{\delta_m}(\theta_m), \quad (5.2)$$

donde, la biplaca está compuesta de dos QWP, por lo tanto $\delta_m = \delta_n = \pi/2$. Y el ángulo $2\theta_n$ es el ángulo de rotación de la segunda QWP el cual su eje rápido inicia orientado con respecto al horizontal y rota de la forma $0 < 2\theta_n < 2\pi$, y $2\theta_m$ es el ángulo de rotación de la primera QWP mantiene un ángulo constante $2\theta'$ de diferencia entre su eje rápido con el de la segunda QWP, por lo tanto se relacionan de la forma

$$2\theta_m = 2\theta_n + 2\theta', \quad (5.3)$$

reemplazando en el operador equivalente M_b obtenemos

$$M_b = M_{\pi/2}(\theta_n)M_{\pi/2}(\theta_n + \theta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ 0 & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

donde las componentes son

$$m_{22} = (\cos^2 2\theta_n) (\cos^2 (2\theta_n + 2\theta')) + \sin 2\theta_n \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta') - \sin 2\theta_n \sin (2\theta_n + 2\theta'),$$

$$m_{23} = \sin 2\theta_n \sin^2 (2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n + \sin 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta') + \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos^2 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta'),$$

$$m_{24} = \sin 2\theta_n \cos 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta') - \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos^2 2\theta_n,$$

$$m_{32} = \sin^2 2\theta_n \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos (2\theta_n + 2\theta') + \sin 2\theta_n \cos 2\theta_n \cos^2 (2\theta_n + 2\theta') + \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n,$$

$$m_{33} = \sin^2 2\theta_n \sin^2 (2\theta_n + 2\theta') + \sin 2\theta_n \sin (2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta') - \cos 2\theta_n \cos (2\theta_n + 2\theta'),$$

$$m_{34} = \sin^2 2\theta_n \cos(2\theta_n + 2\theta') - \sin 2\theta_n \sin(2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n,$$

$$m_{42} = \sin 2\theta_n \cos^2(2\theta_n + 2\theta') - \sin(2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n \cos(2\theta_n + 2\theta'),$$

$$m_{43} = \sin 2\theta_n \sin(2\theta_n + 2\theta') \cos(2\theta_n + 2\theta') - \sin^2(2\theta_n + 2\theta') \cos 2\theta_n,$$

$$m_{44} = -\sin 2\theta_n \sin(2\theta_n + 2\theta') - \cos 2\theta_n \cos(2\theta_n + 2\theta').$$

De esta forma se presente el operador de la biplaca de onda en formalismo de Mueller. Aunque, caracterizarlo como un birrefringente elíptico y sus modos propios se presenta como un problema laborioso, debido a la extensión de los coeficientes de la matriz. A diferencia de los formalismos vectoriales de Pauli y cuaterniones. Se presenta en las siguiente secciones un desarrollo matemático más elaborado. Aún así, las expresiones finales analíticas permiten caracterizar el operador como un retardador elíptico en dos formas equivalentes mediante seis parámetros.

Modelo de la biplaca de dos QWPs en el formalismo de álgebras geométricas

Sean para la primera y segunda QWP los índices m y n respectivamente, con modos propios lineales \mathbf{e}_m y \mathbf{e}_n de la forma ecuación 2.18 expresadas como

$$\mathbf{e}_m = \cos 2\theta_m \mathbf{e}_1 + \sin 2\theta_m \mathbf{e}_2, \quad (5.5)$$

y

$$\mathbf{e}_n = \cos 2\theta_n \mathbf{e}_1 + \sin 2\theta_n \mathbf{e}_2, \quad (5.6)$$

donde θ_m y θ_n son los ángulos de los ejes rápidos con respecto al horizontal. El operador de cada QWP se representa de la forma

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\delta_m}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mathbf{e}_m), \quad (5.7)$$

y

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\delta_n}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \mathbf{e}_n), \quad (5.8)$$

donde $\delta_m = \delta_n = \frac{\pi}{2}$ son los retardos de fase introducidos de la primera y segunda QWP. Estos ángulos mantiene un angulo constante $2\theta'$ de diferencia entre el eje rápido con el de la segunda QWP de la forma,

$$2\theta_m = 2\theta_n - 2\theta', \quad (5.9)$$

bajo esta ligadura los ejes se representan sobre la esfera de Poincaré en la Fig 5.3.

Debido a ello, el producto escalar y vectorial entre \mathbf{e}_m y \mathbf{e}_n es

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \cos 2\theta', \quad (5.10)$$

y

$$\mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_m = -\mathbf{e}_3 \sin 2\theta', \quad (5.11)$$

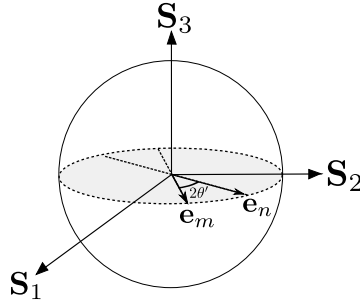


Figura 5.3 Representación sobre la esfera de Poincaré de los ejes de las QWPs de la biplaca con una diferencia de $2\theta'$ entre ellos.

así, su producto geométrico se escribe

$$\mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_m. \quad (5.12)$$

Finalmente el operador de la biplaca compuesta de dos BL, ecuación 5.7 y 5.8, se puede escribir como un operador de BE de la forma

$$\mathbf{S}' = \underbrace{\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\pi}{4}} \mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\pi}{4}}}_{\mathbf{e}^{\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}}} \mathbf{S} \mathbf{e}^{-\mathbf{e}_m \frac{\pi}{4}} \mathbf{e}^{-\mathbf{e}_n \frac{\pi}{4}} = \mathbf{e}^{\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}} \mathbf{S} \mathbf{e}^{-\mathbf{e}_q \frac{\gamma}{2}}, \quad (5.13)$$

donde γ es la birrefringencia de modos propios elípticos \mathbf{e}_q de la forma ecuación 2.16. Esta ecuación permite obtener las igualdades que caractericen analíticamente los modos propios y la birrefringencia de la biplaca. Operando en la ecuación anterior el producto de las dos QWP y usando el producto geométrico de la ecuación 5.12, se obtiene

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\pi}{4}} \mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_n)(1 + \mathbf{e}_m) = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_m), \quad (5.14)$$

y reemplazando las ecuación 5.10 y 5.11 obtenemos

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\pi}{4}} \mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta' + \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_3 \sin 2\theta'). \quad (5.15)$$

Reemplazando las ecuación 5.5 y ecuación 5.6 en el operador de la biplaca de la ecuación 5.15 obtenemos

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\pi}{4}} \mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta' + \mathbf{e}_1(\cos 2\theta_n + \cos 2\theta_m) + \mathbf{e}_2(\sin 2\theta_n + \sin 2\theta_m) - \mathbf{e}_3 \sin 2\theta'). \quad (5.16)$$

Aplicando las identidades

$$\frac{1 - \cos 2\theta'}{2} = \sin^2 \theta', \quad (5.17)$$

$$\frac{\sin 2\theta'}{2} = \sin \theta' \cos \theta', \quad (5.18)$$

y

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right), \quad (5.19)$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right), \quad (5.20)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}} &= \sin^2 \theta' + \mathbf{e}_1 \cos \left(\frac{2\theta_m + 2\theta_n}{2} \right) \cos \left(\frac{2\theta_m - 2\theta_n}{2} \right) \\ &+ \mathbf{e}_2 \sin \left(\frac{2\theta_m + 2\theta_n}{2} \right) \cos \left(\frac{2\theta_m - 2\theta_n}{2} \right) - \mathbf{e}_3 \sin \theta' \cos \theta'. \end{aligned} \quad (5.21)$$

reemplazando la relación entre los ángulos de la ecuación 5.9 se obtiene

$$e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}} = \sin^2 \theta' + \mathbf{e}_1 \cos(2\theta_n - \theta') \cos \theta' + \mathbf{e}_2 \sin(2\theta_n - \theta') \cos \theta' - \mathbf{e}_3 \sin \theta' \cos \theta', \quad (5.22)$$

donde se identifica que las componentes real y \mathbf{e}_3 son constantes, ya que dependen de θ' . Por otro lado, los ejes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 varían dependientes de θ_n . La presencia del término en \mathbf{e}_3 indica que la biplaca presenta modos propios de polarización elípticos, los cuales se pueden expresar en términos de \mathbf{e}_q de la forma ecuación 2.16. Basado en lo anterior, procedemos a caracterizar el operador de la biplaca de dos QWPs, por un lado como un **BE** y por otro lado mediante el teorema I de Jones, en el formalismo de álgebra geométricas [Pellat-Finet \(1984\)](#). Dicha doble caracterización se escribe de la forma

$$e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}} = e^{e_l \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} = e^{e_q \frac{\gamma}{2}}. \quad (5.23)$$

Reemplazando el operador de la biplaca expresado en la ecuación 5.22 en la ecuación anterior obtenemos la ecuación 5.24. La cual proporciona mediante la doble igualdad todas las relaciones entre el operador de la biplaca y los seis parámetros analíticos que la caracterizan como un **BE** y como un **BL** y un **BC** compuestos, expresado en la ecuación 2.26. Por lo cual la triple igualdad se expresa de la forma

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sin^2 \theta' \\ \mathbf{e}_1 [\cos(2\theta_n - \theta') \cos \theta'] \\ \mathbf{e}_2 [\sin(2\theta_n - \theta') \cos \theta'] \\ \mathbf{e}_3 [-\sin \theta' \cos \theta'] \end{pmatrix}}_{e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\sin \frac{\delta}{2} \cos \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[\cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{pmatrix}}_{e^{e_l \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\cos 2\chi \cos 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\cos 2\chi \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[\sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} \right] \end{pmatrix}}_{e^{e_q \frac{\gamma}{2}}}. \quad (5.24)$$

de la igualdad obtenemos las siguientes relaciones

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\delta}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \sin^2 \theta', \quad (5.25)$$

$$\cos 2\chi \cos 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\delta}{2} \cos \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) = \cos(2\theta_n - \theta') \cos \theta', \quad (5.26)$$

$$\cos 2\chi \sin 2\alpha \sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) = \sin(2\theta_n - \theta') \cos \theta', \quad (5.27)$$

$$\sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\delta}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = -\sin \theta' \cos \theta'. \quad (5.28)$$

La igualdad expresada en 5.24 permite describir la biplaca de dos QWP como un BE de dos formas equivalentes las cuales requieren de 3 variables angulares para caracterizarlo. Las igualdades obtenidas en las ecuaciones 5.25, 5.26, 5.27 y 5.28 permitirán relacionar todas estas variables en término de dos variables, correspondientes a la rotación de las QWPs y al ángulo fijo de separación θ' entre los ejes rápidos de las dos QWP, siendo este el grado de libertad de la CW que modula los seis parámetros del retardador haciendo variable.

Biplaca de dos QWPs ondas como un BE

Procedemos a obtener los tres parámetros que describen la biplaca compuesta por dos QWP como un BE, resolviendo una igualdad de la ecuación 5.24, expresada de la forma

$$e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}} = e^{e_q \frac{\gamma}{2}}. \quad (5.29)$$

En esta descripción se describe la biplaca como un BE de eje e_q y rotación γ . Para determinar la expresión analítica del retardo elíptico γ se obtiene mediante la ecuación 5.25 expresada de la forma

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sin^2 \theta'. \quad (5.30)$$

Ahora, para describir los modos propios e_q procedemos a determinar los ángulos de elipticidad χ y rotación α . Para ello partimos de la ecuación 5.28 expresada como

$$\sin 2\chi \sin \frac{\gamma}{2} = -\sin \theta' \cos \theta', \quad (5.31)$$

despejando 2χ se obtiene

$$2\chi = \arcsin \left(\frac{-\sin \theta' \cos \theta'}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right), \quad (5.32)$$

reemplazando $\frac{\gamma}{2}$ de la ecuación 5.30 obtenemos

$$2\chi = \arcsin \left(\frac{-\sin \theta' \cos \theta'}{\sin \left(\arccos (\sin^2 \theta') \right)} \right). \quad (5.33)$$

Para obtener α se divide 5.27 en 5.26, de donde se obtiene

$$\tan 2\alpha = \tan (2\theta_n - \theta'), \quad (5.34)$$

donde, la relación entre los ángulos obtenida es de la forma

$$2\alpha = 2\theta_n - \theta'. \quad (5.35)$$

De esta forma, con las ecuaciones de α y χ se obtiene la expresión analítica del eje elíptico e_q y por tanto los modos propios de la biplaca.

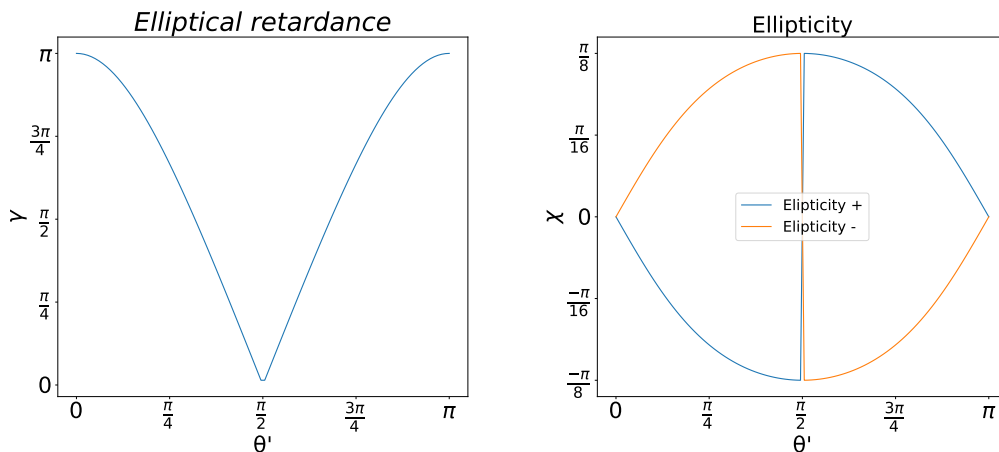


Figura 5.4 Valores del birrefringencia elíptica γ en figura izquierda y elipticidad del modo propio χ en figura derecha, las cuales son variables para la biplaca en función del ángulo de diferencia entre los ejes rápidos θ' .

Las ecuación 5.30 y ecuación 5.33 fueron graficadas en la figura 5.4. La elipticidad de los modos propios de la biplaca varía en el rango de $0 \leq |\chi| < \frac{\pi}{8}$, como se representa en la figura 5.5. Es así que no todos los valores de elipticidad pueden ser obtenidos, por lo tanto, una CW de dos QWP no se puede tener modos propios circulares. Lo cual se podría lograr aumentando el número de QWPs.

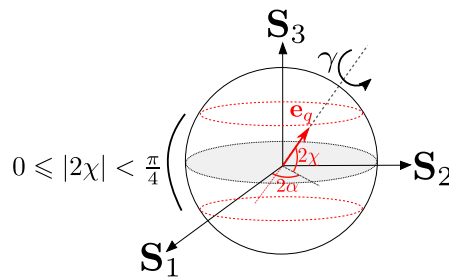


Figura 5.5 Representación de los valores de elipticidad permitidos para los modos propios de la biplaca sobre la esfera de Poincaré.

Biplaca de dos QWPs a través del teorema I de Jones

De manera análoga, procedemos a obtener los tres parámetros que describen la biplaca compuesta por dos QWP mediante el teorema I de Jones. Resolviendo la otra parte de la igualdad de la ecuación 5.24, expresada de la forma

$$e^{e_n \frac{\pi}{4}} e^{e_m \frac{\pi}{4}} = e^{e_l \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\psi}{2}}. \tag{5.36}$$

Para obtener la expresión analítica de la BL equivalente, elevamos al cuadrado las ecuaciones 5.26 y 5.27 y las sumamos obteniendo

$$\sin^2 \frac{\delta}{2} = \cos^2 \theta', \tag{5.37}$$

aplicando raíz cuadrada en ambas partes queda

$$\sin \frac{\delta}{2} = \cos \theta'. \quad (5.38)$$

Mediante la identidad

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \quad (5.39)$$

obtenemos

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \right) = \cos \theta', \quad (5.40)$$

de donde se obtiene finalmente

$$\delta = \pi - 2\theta'. \quad (5.41)$$

Para la actividad óptica BC equivalente dividimos la ecuación 5.28 entre 5.25 obteniendo

$$\tan \frac{\varphi}{2} = -\cot \theta', \quad (5.42)$$

aplicando la identidad

$$\tan \theta = -\cot \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right), \quad (5.43)$$

reemplazando en ecuación 5.42 obtenemos

$$-\cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) = -\cot \theta', \quad (5.44)$$

igualando los ángulos y despejando φ queda

$$\varphi = 2\theta' - \pi. \quad (5.45)$$

Para determinar el tercer parámetro que corresponde a la rotación equivalente $2\alpha'$. Usando las ecuaciones 5.26 o 5.27 se determina el ángulo $2\alpha'$ para completar la caracterización por ángulos equivalentes. Usando la ecuación 5.27 de la forma

$$\sin \frac{\delta}{2} \sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) = \sin (2\theta_n - \theta') \cos \theta', \quad (5.46)$$

reemplazando se obtiene

$$\sin \left(2\alpha' - \frac{\varphi}{2} \right) = \sin (2\theta_n - \theta'), \quad (5.47)$$

de donde se obtiene la expresión algebraica

$$2\alpha' - \frac{\varphi}{2} = 2\theta_n - \theta'. \quad (5.48)$$

Reemplazado φ obtenida previamente se obtiene

$$2\alpha' = 2\theta_n - \theta' + \frac{\varphi}{2} = 2\theta_n - \frac{\pi}{2}, \quad (5.49)$$

con la ecuación 5.49 se obtiene la expresión analítica del tercer ángulo que describe a la biplaca de dos QWP en rotaciones equivalentes de **BL** y actividad óptica o **BC**. Es importante señalar las ligaduras que se encuentran entre los diferentes ángulos que caracterizan la biplaca

$$\delta = -\varphi, \quad (5.50)$$

y

$$\frac{\delta}{2} + \theta' = \frac{\pi}{2}. \quad (5.51)$$

Por lo tanto, el ángulo entre los ejes rápidos θ' de las dos QWP determina completamente el **BE** resultante. De esta manera, se determinaron las expresiones de los seis parámetros que describen a la biplaca como un **BE**, y a través del teorema I de Jones.

Casos de especial interés práctico

Usando las expresiones 5.41 y 5.45, se pueden calcular los correspondientes **CW** para algunos casos particulares.

CW con $\theta' = 0$

En este caso tenemos que en este caso resulta en un birrefringente con poder rotatorio dado por $\varphi = -\pi$. Por lo tanto, su efecto es equivalente a un **BL** con birrefringencia $\delta = \pi$. Así, sus modos propios son $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_1 \sin 2\theta_n - \mathbf{e}_2 \cos 2\theta_n$.

CW con $\theta' = \pi/2$

En este caso tenemos que en este caso resulta en un birrefringente nulo con poder rotatorio dado por $\varphi = 0$. Por lo tanto, su efecto es equivalente a un **BL** con birrefringencia $\delta = 0$. Y sus modos propios son $\mathbf{e}_l = -\mathbf{e}_1 \sin 2\theta_n + \mathbf{e}_2 \cos 2\theta_n$.

CW con $\theta' = \pi/4$

En este caso tenemos que en este caso resulta en un birrefringente con poder rotatorio dado por $\varphi = -\pi/2$, más el efecto de un **BL** con birrefringencia $\delta = \pi/2$ y modos propios $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_1 \cos 2\theta_n + \mathbf{e}_2 \sin 2\theta_n$.

Experimentos y resultados

Con el propósito de verificar las expresiones previamente obtenidas para la biplaca, se generó una configuración experimental ilustrada en la figura 5.2 para capturar los estados emergentes. Para ello, se utiliza una fuente láser He-Ne de $\lambda = 632.8[nm]$, filtrada y colimada, junto con dos birrefringentes comerciales de cuarto de onda (QWP) de Thorlabs como se muestra en la figura 5.1 y se montaron en un soporte que permite rotarla sincronizadamente manteniendo el ángulo θ' entre los ejes rápidos de las QWPs. El haz pasa a través de un polarizador lineal **P** y la respectiva biplaca. Los QWP son rotados de 0° a 180° , en pasos de 2° , registrando 90 estados emergentes. Los cuales fueron medidos con el polarímetro comercial de Thorlabs (PAN5710VIS, S/N: M00255491). Se

| | $\bar{\chi}^\circ \pm 0,25^\circ$ | $\bar{\alpha}^\circ \pm 0,25^\circ$ |
|-----------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| \mathbf{S}_H | 0,01 | -0,33 |
| \mathbf{S}_{ellip1} | 20,18 | -45,07 |
| \mathbf{S}_{ellip2} | 20,28 | 45,06 |

Tabla 5.1 La tabla registra los valores de rotación α y elipticidad χ de los estados incidentes en la biplaca.

usaron tres estados incidente con polarización lineal horizontal y dos elípticos registrados en la tabla 5.1, donde $\bar{\alpha}$ y $\bar{\chi}$ representan el promedio experimental de los ángulos de rotación y elipticidad respectivamente, del vector de Stokes $\mathbf{S}(2\alpha, 2\chi) = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3)$. Para cada estado emergente se midieron 100 datos.

Variando θ' se generaron cinco variantes diferentes con valores de $\theta' = 0^\circ, 30^\circ, 54^\circ, 80^\circ$ y 90° . Las cuales se iluminaron con un estado linealmente polarizado y se registró su curva de estados emergentes. Finalmente, se iluminó una de las variantes previamente caracterizada con $\theta' = 54^\circ$ y se incidieron dos estados elípticos tales que fuesen sus modos propios.

Estado incidente lineal con $\theta' = 0, \pi/2$

Primeramente, se incidió en la biplaca un estado de entrada lineal horizontal $\mathbf{S}_{in} = \mathbf{S}_H$, registrado en la tabla 5.1. En las configuraciones correspondientes a los casos extremos de $\theta' = 0^\circ \pm 2^\circ$ y $\theta' = 90^\circ \pm 2^\circ$ y se registraron sus curvas de estados emergentes obtenidas experimentalmente. Teóricamente dichas curvas descritas por $\mathbf{S}'(\theta_n, \theta')$ son determinadas por la ecuación 5.13 a través de la ecuación 5.22. En la figura 5.6 se graficaron dichas curvas de los estados emergentes teóricos en azul, experimentales en rojo y el estado incidente \mathbf{S}_H en negro.

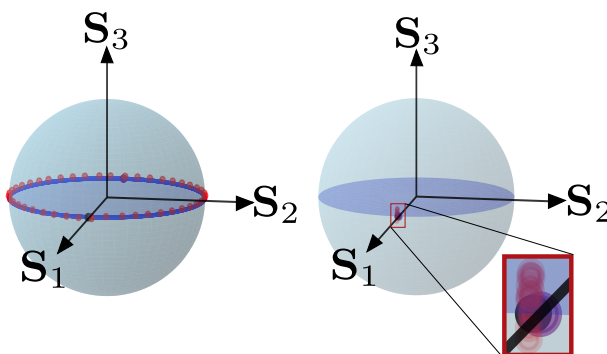


Figura 5.6 Curva de estados emergentes generados por una biplaca compuesta para ángulos $\theta' = 0^\circ \pm 2^\circ$ y $\theta' = 90^\circ \pm 2^\circ$ en la imágenes izquierda y derecha, respectivamente.

La curva de la figura 5.6 izquierda, correspondiente a la configuración $\theta' = 0^\circ$ expresado en el caso 5.1, es similar a la curva generada por una HWP rotatoria. La cual presenta una BL con valor igual a una HWP y mantiene sus modos propios lineales, sin embargo está presente una actividad óptica adicional. Por otro lado en la figura 5.6 derecha corresponde a la configuración $\theta' = 90^\circ$ en el caso 5.1. Es esta no se producen cambios en el estado de polarización incidente. Ya que

la birrefringencia es nula y el operador de la biplaca de la ecuación 5.22 converge al operador identidad.

Estado incidente lineal con $0 < \theta' < \pi/2$

Dado que δ y θ' tienen una interpretación geométrica, ya que conforman ángulos complementarios, ver ecuación 5.51. Para validar experimentalmente dicha variación de la **BL** se generaron tres curvas de estados emergentes para tres biplacas con valores de $\theta' = 30^\circ \pm 2^\circ$, $\theta' = 54^\circ \pm 2^\circ$ y $\theta' = 80^\circ \pm 2^\circ$. Aplicando la ecuación 5.41, se obtiene un **BL** de $\delta = 120^\circ \pm 2^\circ$, $\delta = 72^\circ \pm 2^\circ$ y $\delta = 20^\circ \pm 2^\circ$, respectivamente. La curva de datos experimentales obtenidos, se muestran en la 5.7.

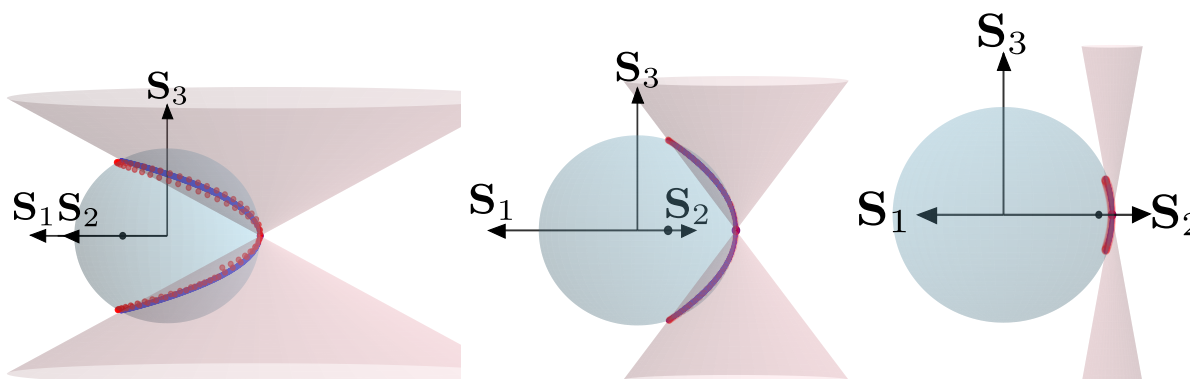


Figura 5.7 Estados emergentes teórico y experimental generados por una placa compuesta con ángulos de $\theta' = 30^\circ$ (Figura izquierda), $\theta' = 54^\circ$ (Figura central) y $\theta' = 80^\circ$ (Figura derecha), descritos por **BL** de $\delta = 120^\circ$, $\delta = 72^\circ$ y $\delta = 20^\circ$, respectivamente.

Así mismo, para los mismos casos de estudio se evalúa la actividad óptica o **BC** presente, que se relaciona con la o **BL** en la biplaca según la ecuación 5.50. Por lo cual se obtiene una **BC** de $\varphi = -120^\circ \pm 2^\circ$, $\varphi = -72^\circ \pm 2^\circ$ y $\varphi = -20^\circ \pm 2^\circ$ respectivamente, para dichas configuraciones de la biplaca. Como se muestra en figura 5.8, entre mayor es la birrefringencia δ mayor es el poder rotatorio φ de la biplaca.

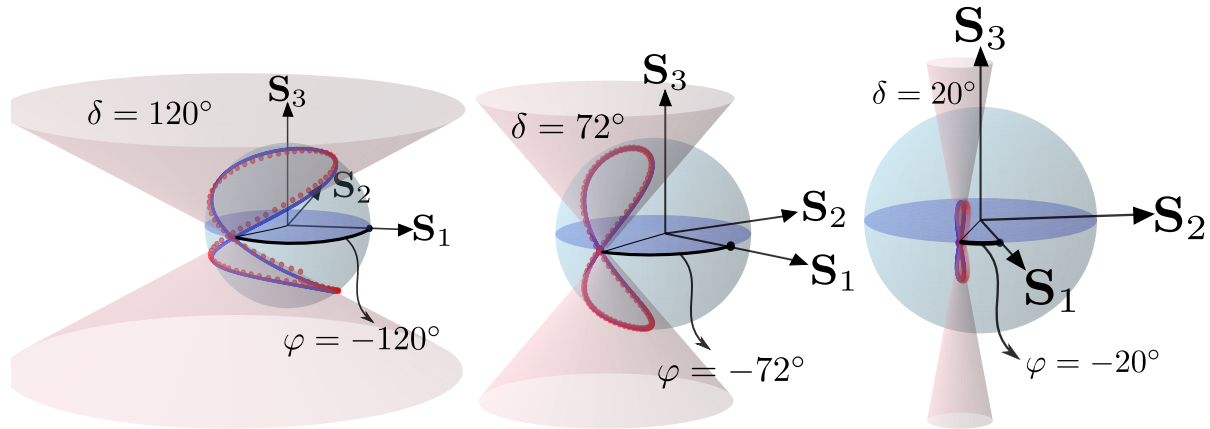


Figura 5.8 BL δ y BC φ para 3 biplaca con ángulo $\theta' = 30$, $\theta' = 54$ y $\theta' = 80$ representados en las figura izquierda, central y derecha, respectivamente.

| $\mathbf{S}_{eigenstate}$ | θ_n | $\alpha(\theta_n, \theta')$ | $\epsilon \% \pm \delta\epsilon$ | $\chi(\theta')$ | $\epsilon \% \pm \delta\epsilon$ |
|---------------------------|------------|-----------------------------|---------------------------------------|-----------------|---------------------------------------|
| \mathbf{S}_{ellip1} | -72 | -45 | $0,4 \% < \bar{\epsilon} \% < 0,7 \%$ | 19,48 | $2,3 \% < \bar{\epsilon} \% < 4,8 \%$ |
| \mathbf{S}_{ellip2} | 18 | 45 | $0,4 \% < \bar{\epsilon} \% < 0,6 \%$ | 19,48 | $2,8 \% < \bar{\epsilon} \% < 5,3 \%$ |

Tabla 5.2 La tabla registra los valores de rotación α y elipticidad χ de los estados propios predichos para la biplaca con $\theta' = 54$.

Estados incidentes elípticos

Por un lado, se encontraron experimentalmente dos estados elípticos, tal que fuesen modos propios de la biplaca para $\theta' = 54$. Los estados encontrados se etiquetaron como \mathbf{S}_{ellipj} para $j = 1, 2$ y se registraron en la tabla 5.1. Por otro lado, se probó la caracterización teórica de los modos propios elípticos de la biplaca a través de las ecuación 5.35 y ecuación 5.33, correspondientes a sus valores de rotación y elipticidad, respectivamente. Los cuales son determinados por lo ángulos θ' y θ_n . Sus valores teóricos se registran en la tabla 5.2 con su respectivo error porcentual al compararlos con los estados propios elípticos obtenidos experimentalmente en la tabla 5.1. El origen del error se asocia a la incertidumbre en los estados de polarización, la precisión del polarímetro y la calidad de las láminas cuarto de onda.

En las figura 5.9, 5.10 se graficaron las curvas de los estados emergentes teórica y experimental para cada estado elíptico incidente, además se plotearon las elipses de polarización de los estados incidentes y el emergente correspondiente a su modo propio. Estas se graficaron usando el paquete Python Polarization Py_pol del Hoyo, Sanchez-Brea, y Soria-Garcia (2021), las cuales requieren como entrada los ángulos de rotación y elipticidad de los estados, reportado en la tabla 5.1 para el estado incidente. Y los estados propios de salida se extrajeron de la curva de estados emergentes obtenidos experimentalmente.

En las mismas gráficas se prueba la ley de los BE. Para ello, se grafica un cono de apertura δ expresado en la ecuación 5.41 correspondiente a la BL. El vértice del cono está definido por el estado \mathbf{S}_{cross} de la ecuación 3.15, el cual depende de los valores angulares de rotación y elipticidad

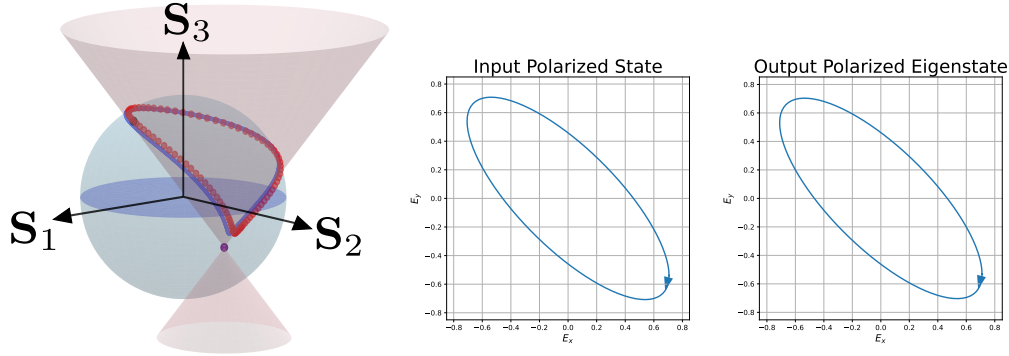


Figura 5.9 La figura de la izquierda es la curva de estados teórica y experimental de la biplaca para $\theta' = 54$ al incidirle el estado elíptico \mathbf{S}_{ellip1} . Las figuras central y Derecha son las elipses de polarización de los estado incidente \mathbf{S}_{ellip1} y emergente correspondiente a su modo propio, respectivamente.

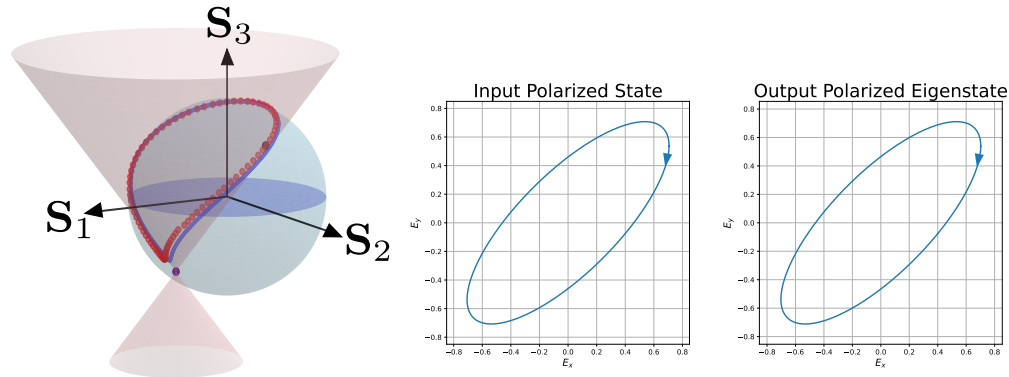


Figura 5.10 La figura de la izquierda es la curva de estados teórica y experimental de la biplaca para $\theta' = 54$ al incidirle el estado elíptico \mathbf{S}_{ellip2} . La figura central y la figura derecha son las elipses de polarización de los estado incidente \mathbf{S}_{ellip2} y emergente correspondiente a su modo propio, respectivamente.

del estado incidente y de la BC determinada en la ecuación 5.45. Por lo cual, se obtiene

$$\mathbf{S}_{cross}(2\alpha', 2\chi') = \mathbf{S}(2\alpha + 2\theta' - \pi, -2\chi), \quad (5.52)$$

el cual determina la posición del cono sobre la esfera de Poincaré para la biplaca.

Biplaca como un caso particular de una CW

El operador de dos QWPs como un BE tuneable fue previamente caracterizado, encontrando las seis expresiones explícitas. Por un lado, los parámetros del sistema como un BE, para γ la ecuación 5.30, para α la ecuación 5.35, y la elipticidad χ la ecuación 5.33. Por otro lado, a través del teorema I de Jones, los parámetros son, para δ la ecuación 5.41, para α' la ecuación 5.49, y para φ la ecuación 5.45.

Además de esta caracterización explícita, la biplaca de dos QWPs corresponde a un caso particular de una CW general. La cual será verificada también numéricamente en las ecuaciones de una CW

general propuestas en las secciones 4.1 y 4.2. Para ello, en la notación que llevamos de numeración, la correspondencia de los ángulos se optará como $\theta_m = \theta_1$, $\theta_n = \theta_2$ y $\theta' = \theta_2 - \theta_1$. En la siguiente tabla tenemos los valores de los seis parámetros para las ecuaciones explícitas

| | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|---|----------|--------|----------|------------------|----------|-----------|
| | α | χ | γ | α' | δ | φ |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 0^\circ$ | 0 | 0 | 180° | -45° | 180° | -180° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 25^\circ$ | 12.5° | 11.45° | 159.42° | -20° | 130° | -130° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 22.5^\circ$ | 22.5° | 17.63° | 120° | 0° | 90° | -90° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 60^\circ$ | 30° | 20.45° | 82.82° | 15° | 60° | -60° |
| $\theta_1 = 20^\circ, \theta_2 = 50^\circ$ | 35° | 13.28° | 151.04° | 5° | 120° | -120° |

y en la siguiente tabla la biplaca usando las ecuaciones de una CW general.

| | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|--|------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | $\alpha \pm n90^\circ$ | $\chi \pm n180^\circ$ | $\gamma \pm n720^\circ$ | $\alpha' \pm n90^\circ$ | $\delta \pm n720^\circ$ | $\varphi \pm n360^\circ$ |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 0^\circ$ | 0 | 0 | 180° | 45° | 180° | 180° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 25^\circ$ | 12.5° | 11.45° | 159.42° | -20° | 130° | -130° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 45^\circ$ | 22.5° | 17.63° | 120° | 0° | 90° | -90° |
| $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 60^\circ$ | 30° | 20.45° | 82.82° | 15° | 60° | -60° |
| $\theta_1 = 20^\circ, \theta_2 = 50^\circ$ | 35° | 13.28° | 151.04° | 5° | 120° | -120° |

Comparando las dos tablas probamos que la consistencia del método general de caracterización de una CW en sus seis parámetros en la biplaca de dos QWPs.

5.2. Birrefringente con modos propios circulares(BC) compuesta de dos HWPs

El sistema compuesto de dos HWPs, se ha caracterizado como un rotador [Dimova y cols. \(2015\)](#); [J. Kim y Chang \(2006\)](#); [Rangelov y Kyoseva \(2015b\)](#). Ha sido utilizado en aplicaciones de fases topológicas [Bhandari \(1992b, 1997b\)](#), en rotaciones de SU(2) [Saito \(2023a\)](#), en esquemas de CW como para la generación de retardadores de onda no recíprocas [Al-Mahmoud y cols. \(2021\)](#), y en un BL de retardo tuneable [Messaadi y cols. \(2018\)](#). Siendo el poder rotatorio la forma $\varphi = 4\theta' \pm 2\pi$, donde θ' es el ángulo de diferencia entre los ejes rápidos de las HWPs. Por lo cual este esquema es un BC con poder rotatorio variable.

$$\mathbf{e}_m = \cos 2\theta_m \mathbf{e}_1 + \sin 2\theta_m \mathbf{e}_2, \quad (5.53)$$

y

$$\mathbf{e}_n = \cos 2\theta_n \mathbf{e}_1 + \sin 2\theta_n \mathbf{e}_2, \quad (5.54)$$

donde θ_m y θ_n son los ángulos de los ejes rápidos con respecto al horizontal primera y segunda HWP, respectivamente. El operador de cada QWP se representa de la forma

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_m \frac{\delta_m}{2}} = \mathbf{e}_m, \quad (5.55)$$

y

$$\mathbf{e}^{\mathbf{e}_n \frac{\delta_n}{2}} = \mathbf{e}_n, \quad (5.56)$$

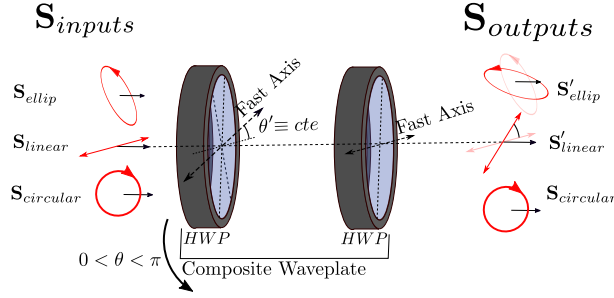


Figura 5.11 Biplaca compuesta por dos HWP. Donde θ' corresponde al ángulo entre los ejes rápidos de las HWP. Si se incide un estado polarizado, el estado emergente será rotado manteniendo su elipticidad. Por lo tanto, sus modos propios de polarización son los estados circulares, lo cual caracteriza a esta configuración como un **BC**.

donde $\delta_m = \delta_n = \pi$ son los retardo de fase de las HWP. Resolviendo el producto obtenemos

$$\mathbf{e}^{e_n \frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^{e_m \frac{\pi}{2}} = \mathbf{e}_n \mathbf{e}_m = -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m + \mathbf{e}_n \times \mathbf{e}_m, \quad (5.57)$$

resolviendo el producto obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{e_n \frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^{e_m \frac{\pi}{2}} &= -\cos 2\theta_m \cos 2\theta_n - \sin 2\theta_m \sin 2\theta_n \\ &+ (\sin 2\theta_m \cos 2\theta_n - \cos 2\theta_m \sin 2\theta_n) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Procedemos a factorizar la expresión anterior mediante las identidades de $\cos(A - B)$ y $\sin(A - B)$, obteniendo la forma

$$\mathbf{e}^{e_n \frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^{e_m \frac{\pi}{2}} = -\cos(2\theta_n - 2\theta_m) + \sin(2\theta_m - 2\theta_n) \mathbf{e}_3, \quad (5.59)$$

donde la inexistencia de los términos en las componentes lineales \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 indican que esta biplaca no posee modos de polarización lineales o elípticos. Siendo la existencia de \mathbf{e}_3 la que garantiza que sus modos propios sean los estados circulares.

Procedemos a describir esta biplaca como un **BC**. Para ello, igualamos la ecuación 5.59 con el operador de un **BC** para determinar analíticamente la expresión que describa su actividad óptica. De la forma

$$\mathbf{e}^{e_3 \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (5.60)$$

Igualando la biplaca en la ecuación 5.59 con la ecuación 5.60 obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} &-\cos(2\theta_n - 2\theta_m) - \sin(2\theta_n - 2\theta_m) \mathbf{e}_3 \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} + \mathbf{e}_3 \sin \frac{\varphi}{2}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

igualando componentes se obtienen dos igualdades que conllevan a una misma relación expresada de la forma

$$\frac{\varphi}{2} = 2\theta_n - 2\theta_m + \pi. \quad (5.62)$$

las orientaciones de la biplaca se relacionan de la forma $\theta_n = \theta_m \pm \theta'$, manteniendo un ángulo constante θ' entre sus ejes rápidos. Se obtiene finalmente

$$\varphi = \pm 4\theta' + 2\pi, \tag{5.63}$$

La ecuación anterior describe como una biplaca compuesta de 2 HWPs posee un poder rotatorio ajustable dependiendo del ángulo de diferencia entre sus ejes rápidos $4\theta'$, y este no depende de las orientaciones de la biplaca ya que no depende de los ángulos θ_m o θ_n . El resultados encontrado se ilustra en la figura 5.12.

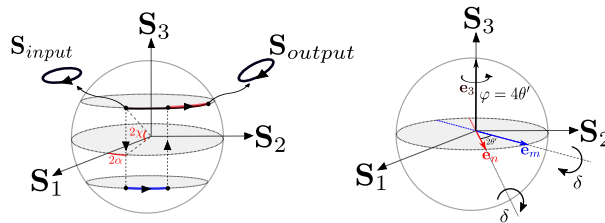


Figura 5.12 Representación de las transformaciones de dos HWPs superpuestas, la cual en equivalente se comporta como un rotador o un BC.

Biplaca como un caso particular de una CW

Procedemos a probar la expresiones generales para cualquier CW propuestas en las secciones 4.1 y 4.2. Los datos numéricos obtenidos se reportan en la siguiente tabla.

| | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|----------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | $\alpha \pm n90^\circ$ | $\chi \pm n180^\circ$ | $\gamma \pm n720^\circ$ | $\alpha' \pm n90^\circ$ | $\delta \pm n720^\circ$ | $\varphi \pm n360^\circ$ |
| $\theta' = 10^\circ$ | 5° | 45° | 40° | 15° | 0° | 40° |
| $\theta' = 30^\circ$ | 74.1° | 45° | 120° | 14.1° | 0° | 120° |

De la tabla obtenido podemos verificar que la elipticidad χ presenta un valor de 45° , por lo cual siempre tendrá sus modos propios circulares. Y su valor de poder rotatorio cumple con su valor predicho por la ecuación 5.63.

5.3. CW como un birrefringente variable con modos propios lineales(BL)

Los esquemas de CW pueden ser BL de retardo de fase δ . Siendo sus modos propios son de la forma $(\alpha, \chi = 0)$, donde α el azimuth. Además, los BL poseen una representación geométrica sobre la esfera de Poincaré, mediante la ley de los birrefringentes lineales [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#). Donde su curva de estados emergentes se describe como la curva de intersección de un cono de apertura δ con la esfera de Poincaré como se representa en la figura 5.13, para tres retardos diferentes para un estado horizontal incidente. Siendo $\delta = \pi$ la curva en rojo de estados emergentes generados por una HWP, en azul $\delta = \pi/2$ para una QWP y en morado para un $\delta = \pi/4$.

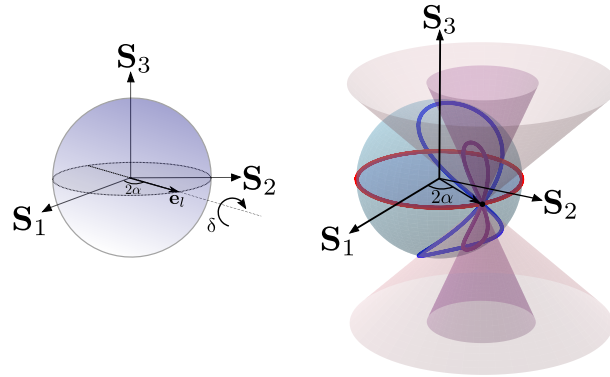


Figura 5.13 Representación de un BL sobre la esfera de Poincaré a través de la Ley de los birrefringentes con modos propios lineales.

Caso I- BL ajustable propuesto por Pancharatnam

Pancharatnam propuso un método para describir una combinación de un birrefringente con retardo variable Pancharatnam (1955) usando una CW compuesta de tres placas de onda. Lo cual se logra superponiendo un HWP con su eje rápido rotado en su propio plano en medio de dos QWPs rotados con sus ejes rápidos paralelos, como se muestra en la figura 5.14. Posteriormente, Bhandari reportó que dicho esquema siempre presenta modos propios lineales Bhandari y Love (1994) y por lo tanto corresponde a un BL tuneable.

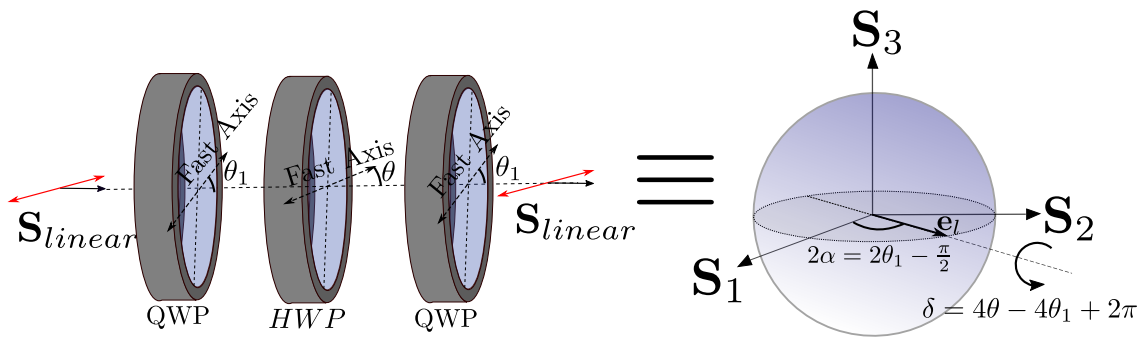


Figura 5.14 Esquema de BL propuesto por Pancharatnam.

Matemáticamente, la acción de este sistema en un estado polarizado \mathbf{S} es

$$\mathbf{S}' = e^{e_{l1} \frac{\pi}{4}} e^{e_{l2} \frac{\pi}{2}} e^{e_{l1} \frac{\pi}{4}} \mathbf{S} e^{-e_{l1} \frac{\pi}{4}} e^{-e_{l2} \frac{\pi}{2}} e^{-e_{l1} \frac{\pi}{4}}, \quad (5.64)$$

donde $e_{l1} = \cos 2\theta_1 + \sin 2\theta_1$ son los modos propios lineales de las QWPs colineales, con su ejes rápidos orientados a θ_1 con respecto a la horizontal. $e_{l2} = \cos 2\theta_2 + \sin 2\theta_2$ son los modos propios lineales de la HWP con su eje rápido orientado a θ_2 con respecto a la horizontal. Por lo tanto el operador de esta CW es descrito de la forma

$$e^{e_{l1} \frac{\pi}{4}} e^{e_{l2} \frac{\pi}{2}} e^{e_{l1} \frac{\pi}{4}}. \quad (5.65)$$

En su forma explícita se representa como

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta_1] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta_1] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta_1] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta_1] \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - 2\theta_1) \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta] \\ \mathbf{e}_3 [\sin(2\theta - 2\theta_1)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta_1] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta_1] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

resolviendo el producto de cuaterniones obtenemos el siguiente operador equivalente

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\cos(2\theta - 2\theta_1) - \cos 2\theta \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta \sin 2\theta_1 \\ \mathbf{e}_1 [-\cos(2\theta - 2\theta_1) \cos 2\theta_1 + \cos 2\theta - \sin(2\theta - 2\theta_1) \sin 2\theta_1] \\ \mathbf{e}_2 [-\cos(2\theta - 2\theta_1) \sin 2\theta_1 + \sin 2\theta + \sin(2\theta - 2\theta_1) \cos 2\theta_1] \\ \mathbf{e}_3 [\cos 2\theta \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta \cos 2\theta_1 + \sin(2\theta - 2\theta_1)] \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Procedemos ahora a factorizar las componentes la ecuación 5.67. Iniciando con la componente escalar de la forma

$$-\cos(2\theta - 2\theta_1) - \underbrace{\cos 2\theta \cos 2\theta_1 - \sin 2\theta \sin 2\theta_1}_{-\cos(2\theta - 2\theta_1)} = -2 \cos(2\theta - 2\theta_1). \quad (5.68)$$

Para la componente \mathbf{e}_1 de la forma

$$\underbrace{-\cos\left(\overbrace{2\theta - 2\theta_1}^{2\theta'}\right) \cos 2\theta_1 - \sin\left(\overbrace{2\theta - 2\theta_1}^{2\theta'}\right) \sin 2\theta_1 + \cos 2\theta}_{-\cos(2\theta' - 2\theta_1)}, \quad (5.69)$$

por lo cual obtenemos

$$-\cos(2\theta' - 2\theta_1) + \cos 2\theta = -\cos(2\theta - 4\theta_1) + \cos 2\theta, \quad (5.70)$$

aplicando la identidad de $\cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ obtenemos

$$\cos 2\theta - \cos(2\theta - 4\theta_1) = -2 \sin(2\theta - 2\theta_1) \sin(2\theta_1). \quad (5.71)$$

De manera análoga procedemos a expresar la componente \mathbf{e}_2 de la forma

$$\underbrace{-\cos\left(\overbrace{2\theta - 2\theta_1}^{2\theta'}\right) \sin 2\theta_1 + \sin\left(\overbrace{2\theta - 2\theta_1}^{2\theta'}\right) \cos 2\theta_1 + \sin 2\theta}_{\sin(2\theta' - 2\theta_1)}, \quad (5.72)$$

$$\sin(2\theta' - 2\theta_1) + \sin 2\theta = \sin(2\theta - 4\theta_1) + \sin 2\theta, \quad (5.73)$$

aplicando la identidad $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ obtenemos

$$\sin(2\theta - 4\theta_1) + \sin 2\theta = 2 \sin(2\theta - 2\theta_1) \cos(2\theta_1). \quad (5.74)$$

La componente \mathbf{e}_3 de la forma

$$\cos 2\theta \sin 2\theta_1 - \sin 2\theta \cos 2\theta_1 + \underbrace{\sin(2\theta - 2\theta_1)}_{\sin 2\theta \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta \sin 2\theta_1} = 0. \quad (5.75)$$

Ya que su componente $\mathbf{e}_3 = 0$ indica que sus modos propios poseen elipticidad cero $\chi = 0$ y por tanto son lineales confirmando que se comporta como un **BL**. Reemplazando en el operador de la ecuación 5.67 descrito de la forma

$$\begin{pmatrix} -\cos(2\theta - 2\theta_1) \\ \mathbf{e}_1 [-\sin(2\theta - 2\theta_1) \sin(2\theta_1)] \\ \mathbf{e}_2 [\sin(2\theta - 2\theta_1) \cos(2\theta_1)] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\cos 2\alpha \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin 2\alpha \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

Mediante la igualdad de la ecuación anterior se obtiene la expresión analítica del retardo y el azimuth en función de los ángulos θ y θ_1 . Para obtener el retardo δ expresamos la igualdad de la componente escalar, de la forma

$$-\cos(2\theta - 2\theta_1) = \cos \frac{\delta}{2}, \quad (5.77)$$

aplicando la identidad $-\cos x = \cos(x \pm \pi)$ se reescribe de la forma

$$\cos(2\theta - 2\theta_1 \pm \pi) = \cos \frac{\delta}{2}, \quad (5.78)$$

se obtiene

$$\frac{\delta}{2} = 2\theta - 2\theta_1 \pm \pi. \quad (5.79)$$

Para obtener la expresión explícita del ángulo azimuth α , se puede mediante las igualdades de las componentes \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 . Las cuales son equivalentes. Mediante la igualdad de la componente \mathbf{e}_1 expresada como

$$-\sin(2\theta - 2\theta_1) \sin(2\theta_1) = \cos 2\alpha \sin \frac{\delta}{2}, \quad (5.80)$$

aplicando las identidades $-\sin x = \sin(x \pm \pi)$ y $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ la ecuación anterior se reescribe de la forma

$$\underbrace{\sin(2\theta - 2\theta_1 \pm \pi)}_{\frac{\delta}{2}} \underbrace{\cos(2\theta_1)}_{\sin 2\theta_1} = \cos 2\alpha \sin \frac{\delta}{2}. \quad (5.81)$$

De la ecuación anterior finalmente obtenemos

$$2\alpha = 2\theta_1 - \frac{\pi}{2}. \quad (5.82)$$

Las ecuación 5.79 y ecuación 5.82 caracterizan respectivamente el retardo y el azimuth del **BL** tuneable propuesto por Pancharatnam, en función de las orientaciones de las waveplates usadas.

Restricciones del BL de Pancharamant

Adicionalmente, encontramos que este sistema presenta una ligadura entre sus parámetros. Para expresarla despejamos el término θ_1 de las ecuaciones del retardo 5.79 y el azimuth 5.82 y los igualamos, obteniendo una ligadura expresada de la forma

$$\frac{\delta}{2} + 2\alpha = 2\theta - \frac{\pi}{2} \pm \pi. \quad (5.83)$$

Lo cual indica que si bien los parámetros de retardo y el modo propio en el sistema son ajustables estos no son variables independientes, por lo cual, existirán casos de BL los cuales no pueden ser obtenidos en este esquema.

BL de Pancharamant como una CW

Además de esta caracterización encontrada y su ligadura, procedemos a probar la expresiones generales para cualquier CW propuestas en las secciones 4.1 y 4.2. Por lo cual, validaremos este BL ajustable con las expresiones analíticas obtenidas en esta sección. Los datos numéricos obtenidos se reportan en la siguiente tabla.

| | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|--|------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | $\alpha \pm n90^\circ$ | $\chi \pm n180^\circ$ | $\gamma \pm n720^\circ$ | $\alpha' \pm n90^\circ$ | $\delta \pm n720^\circ$ | $\varphi \pm n360^\circ$ |
| $\theta_1 = 10^\circ, \theta_2 = 20^\circ$ | 55° | 0° | 320° | 145° | 40° | 360° |
| $\theta_1 = 45^\circ, \theta_2 = 60^\circ$ | 90° | 0° | 300° | 180° | 60° | 360° |

En la tabla se obtienen valores que la elipticidad del modo propio es siempre es nula y por tanto confirma que es BL. Mientras la actividad óptica es compensada. Por otro lado, el valor del retardo elíptico γ y lineal δ obtienen el mismo valor. Las expresiones obtenidas ecuación 5.79 y ecuación 5.82 se cumplen en dicha tabla, comprobando su caracterización explícita.

Caso II- BL ajustable propuesto por Meseadi

Messaadi [Messaadi y cols. \(2018\)](#) propuso y caracterizó el esquema de CW compuesto de dos QWPs orientadas de manera ortogonal, con sus ejes rápidos orientados de manera horizontal y vertical, respectivamente, en medio de las QWPs se ubica un rotador compuesto de dos HWPs. El esquema se representa en la Fig 5.15. Caracterizado con un retardo de fase de $\delta = 4\theta' \pm 2\pi$, donde θ' es el ángulo de diferencia entre los ejes rápidos de las HWPs, y el azimuth de su modo propios $2\alpha = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, este esquema se describió como un BL de retardo ajustable en términos del ángulo de diferencia entre los ejes rápidos de las dos HWPs, mientras posee un modo lineal propio estático orientado a 45° .

Matemáticamente, la transformación de un estado polarizado en este esquema se representa por

$$\mathbf{S}' = e^{e_{i3} \frac{\pi}{4}} e^{e_{i2} \frac{\pi}{2}} e^{e_{i2} \frac{\pi}{2}} e^{e_{i1} \frac{\pi}{4}} \mathbf{S} e^{-e_{i1} \frac{\pi}{4}} e^{-e_{i2} \frac{\pi}{2}} e^{e_{i2} \frac{\pi}{2}} e^{-e_{i3} \frac{\pi}{4}}, \quad (5.84)$$

donde $e_l = \cos 2\theta + \sin 2\theta$ y son los modos propios inuales de las waveplates HWPs y QWPs. Con su ejes rápidos orientados a θ con respecto a la horizontal. Para la primera QWP, de modos propios e_{l1} su orientación es de $\theta_1 = 0$, de la tercera QWP es ortogonal a $\theta_1 = \pi/2$ y el ángulo de

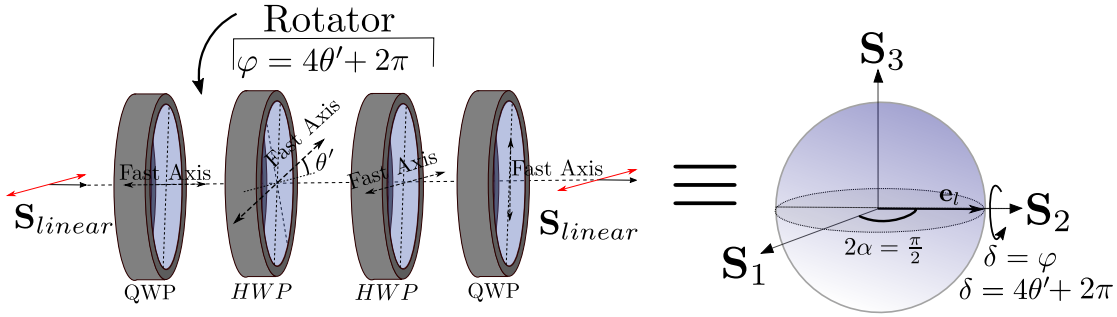


Figura 5.15 CW propuesto por Mesiadi como un **BL** de retardo ajustable.

diferencia entre el rotador compuesto de dos HWPs es de θ_2 . Por lo que su operador es descrito de la forma

$$e^{e_{11} \frac{\pi}{4}} e^{e_{12} \frac{\pi}{2}} e^{e_{12} \frac{\pi}{2}} e^{e_{11} \frac{\pi}{4}}, \quad (5.85)$$

resolviendo el producto de vectores de Pauli se obtiene, ya que dos HWPs consisten en un rotador (ver sección 5.2) por lo que el operador queda de la forma

$$e^{e_{11} \frac{\pi}{4}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} e^{e_{11} \frac{\pi}{4}}. \quad (5.86)$$

Procedemos a resolver el producto de vectores de Pauli, de donde se obtiene

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{e}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}_3 \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.87)$$

el cual corresponde a un **BL** expresado mediante la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 [0] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right] \\ \mathbf{e}_3 [0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\cos 2\alpha \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\sin 2\alpha \sin \frac{\delta}{2} \right] \\ \mathbf{e}_3 [0] \end{pmatrix}. \quad (5.88)$$

Igualando la componente escalar se obtiene

$$\delta = \varphi = 4(\theta_1 - \theta_2) \pm 2\pi, \quad (5.89)$$

y mediante la igualdad de las componentes \mathbf{e}_2 se obtiene la condición

$$\sin 2\alpha = 1, \quad (5.90)$$

despejando 2α obtenemos

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad (5.91)$$

donde n es un entero. De esta manera se confirma la caracterización realizada por Mesiadi, ahora descrito en formalismo de álgebras geométricas.

Condiciones de Full Tuneable BL

Analizando el esquema de Messaadi, se revisó el caso adicional cuando las QWPs rotan sus ejes rápidos un ángulo θ manteniéndose ortogonales. Como se representa en la figura 5.16.

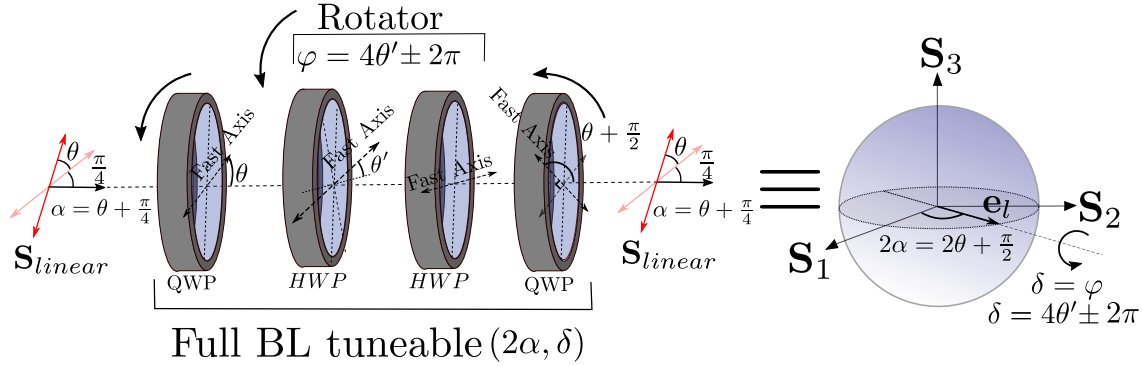


Figura 5.16 Full BL ajustables, añadiendo una rotación en las QWPs del sistema de Messaadi.

Revisando el esquema original de Messaadi pero añadiendo la rotación θ de las QWPs ortogonales. Por lo cual ahora sus modos propios son

$$\mathbf{e}_{l1} = \cos 2\theta + \sin 2\theta, \quad (5.92)$$

y

$$\mathbf{e}_{l3} = \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.93)$$

para las QWPs ortogonales. De modo, que su operador queda de la forma explícita en álgebras geométricas de la forma

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{e}_1 [\cos 2\theta] \\ -\mathbf{e}_2 [\sin 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}_3 [\sin \frac{\varphi}{2}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [-\cos 2\theta] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.94)$$

Resolviendo el producto de cuaterniones de izquierda a derecha se obtiene

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 [-\cos 2\theta \cos \frac{\varphi}{2} - \sin 2\theta \sin \frac{\varphi}{2}] \\ \mathbf{e}_2 [\cos 2\theta \sin \frac{\varphi}{2} - \sin 2\theta \cos \frac{\varphi}{2}] \\ \mathbf{e}_3 [\sin \frac{\varphi}{2}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\theta] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.95)$$

resolviendo el producto, factorizando obtenemos el operador del sistema, el cual corresponde a un BL expresado mediante la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 [-\sin \frac{\varphi}{2} \sin 2\theta] \\ \mathbf{e}_2 [\sin \frac{\varphi}{2} \cos 2\theta] \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\alpha \sin \frac{\delta}{2}] \\ \mathbf{e}_2 [\sin 2\alpha \sin \frac{\delta}{2}] \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.96)$$

Igualando la componente escalar se obtiene

$$\delta = \varphi, \tag{5.97}$$

y mediante la igualdad de las componentes \mathbf{e}_1 o \mathbf{e}_2 se obtiene la expresión para α . Igualando la componente \mathbf{e}_1

$$\underbrace{\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin 2\theta} = \cos 2\alpha, \tag{5.98}$$

de donde se obtiene finalmente

$$2\alpha = 2\theta + \frac{\pi}{2}. \tag{5.99}$$

De esta manera, se obtiene que dicha orientación de las QWPs varía el azimuth de los modos propios sin variar el retardo. Por lo tanto, la diferencias del rotador sigue tuneando el retardo de fase δ . De esta manera el esquema de Messaadi corresponde a un Full BL Tuneable, siempre y cuando sus QWPs sean también rotantes. Se obtiene que el azimuth del modo propio lineal y el retardo no presentan ligaduras, y por tanto son tuneables de manera independiente.

BL de Messaadi como una CW

Procedemos a probar la expresiones generales para cualquier CW propuestas en el documento. Los datos numéricos obtenidos se reportan en la siguiente tabla.

| | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|--|------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | $\alpha \pm n90^\circ$ | $\chi \pm n180^\circ$ | $\gamma \pm n720^\circ$ | $\alpha' \pm n90^\circ$ | $\delta \pm n720^\circ$ | $\varphi \pm n360^\circ$ |
| $\theta' = 20^\circ$ and $\theta = 10^\circ$ | 55° | 0° | 280° | 145° | 80° | 360° |
| $\theta' = 40^\circ$ and $\theta = 0^\circ$ | 45° | 0° | 200° | 135° | 160° | 360° |
| $\theta' = 40^\circ$ and $\theta = 30^\circ$ | 75° | 0° | 200° | 165° | 160° | 360° |
| $\theta' = 30^\circ$ and $\theta = 30^\circ$ | 75° | 0° | 240° | 165° | 120° | 360° |

De la tabla confirmamos de manera numérica que el sistema corresponde un Full BL Tuneable, donde su retardo como sus modos propios lineales permite ser ajustados de manera independiente.

Tercera parte

6. Aplicaciones

' We are the eyes through which the Univers observes itself and knows itself divine.'
 David Zindell

El estudio teórico sobre los BE conllevó a la generación de una propuesta de un CW que no presente ligaduras y por tanto pueda ser totalmente ajustable de manera independiente. Además, se revisó la depolarización de los CW al incidirles en un estado polarizado, sino parcialmente polarizado. Adicionalmente se desarrolló un método para caracterización de los parámetros de un BE sobre la esfera de Poincaré, ya que está presente el problema de su medición. Se presenta un método que permite medir de manera indirecta todos los parámetros de cualquier birrefringente independiente de sus modos propios.

6.1. Birrefringente con modos propios elípticos full tuneable

Basados en los esquemas previamente estudiados, y el RJ, proponemos un esquema que se comporta como un FTB. Mediante la extensión del esquema de Messaadi anteponiendo un rotador compuesto de dos HWP's. Como se muestra en la figura 6.1.

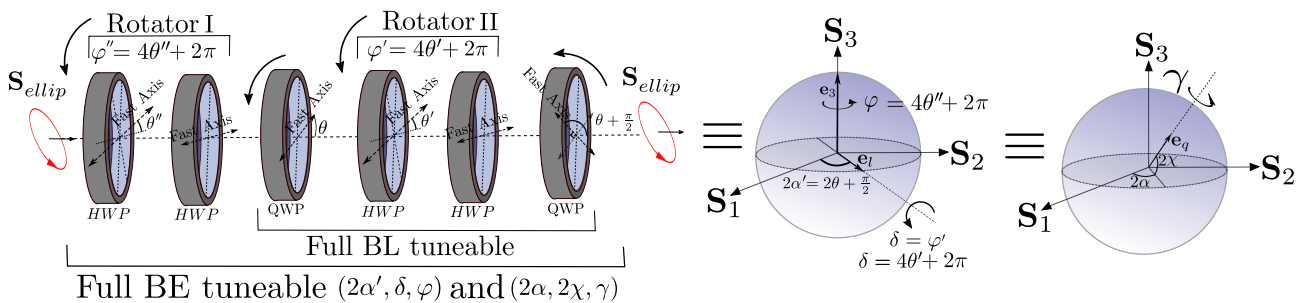


Figura 6.1 Esquema de CW compuesto de dos QWP's y cuatro HWP's para generar un Full Tuneable Birefringent (FTB) a través del RJ.

Caracterizando el sistema mediante álgebras geométricas se obtienen las siguientes expresiones correspondientes al RJ, compuesto de un BL y un BC. Siendo el BL Full ajustable el esquema de Messaadi y el BC como la biplaca de HWP's de ángulo de diferencia entre sus ejes rápidos de

θ'' . De esta manera se heredan las expresiones de los parámetros caracterizados por Messaadi y el rotador. Como se expresa en las siguientes ecuaciones, para el retardo del BL se obtiene

$$\delta = 4\theta' \pm 2\pi, \quad (6.1)$$

con su modo propio lineal de azimuth

$$2\alpha' = 2\theta + \frac{\pi}{2}, \quad (6.2)$$

y el poder rotatorio del BC de la forma

$$\varphi = 4\theta'' + 2\pi. \quad (6.3)$$

De esta manera se obtiene que los parámetros del RJ ($\delta, 2\alpha', \varphi$) son variables independientes, y se pueden ajustar con los ángulos de las orientaciones de las placas de ondas en el espacio físico, correspondientes a $(\theta', \theta, \theta'')$.

Verificación numérica

Por un lado, el *FTB* propuesto se probó numéricamente en todos sus casos particulares, donde su retardo y modo propio sean ajustables de manera independiente, los cuales fueron registrados en la tabla representada en la figura 6.2.

| | Description | Type | Orientations of waveplates | BE | | | Jones' Theorem I | | |
|---|---|------|---|------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| | | | | $\alpha \pm n90^\circ$ | $\chi \pm n180^\circ$ | $\gamma \pm n720^\circ$ | $\alpha' \pm n90^\circ$ | $\delta \pm n720^\circ$ | $\varphi \pm n360^\circ$ |
| a | $\chi = \pm 45^\circ, \varphi(\theta'')$ | BC | $\theta = 0^\circ, \theta' = 0^\circ, \theta'' = 20^\circ$ | 90° | 45° | 80° | 25° | 0° | -80° |
| b | | | $\theta = 0^\circ, \theta' = 0^\circ, \theta'' = 30^\circ$ | -90° | 45° | 120° | 105° | 0° | -120° |
| c | $\chi = 0^\circ, \alpha \equiv \text{cte}, \delta(\theta')$ | BL | $\theta = 20^\circ, \theta' = 20^\circ, \theta'' = 0^\circ$ | -25° | 0° | 80° | -25° | 80° | 0° |
| d | | | $\theta = 20^\circ, \theta' = 30^\circ, \theta'' = 0^\circ$ | -25° | 0° | 120° | -25° | 120° | 0° |
| e | $\chi = 0^\circ, \delta \equiv \text{cte}, \alpha(\theta)$ | BL | $\theta = 40^\circ, \theta' = 40^\circ, \theta'' = 0^\circ$ | -5° | 0° | 160° | -5° | 160° | 0° |
| f | | | $\theta = 10^\circ, \theta' = 40^\circ, \theta'' = 0^\circ$ | -35° | 0° | 160° | -35° | 160° | 0° |
| g | $\gamma \equiv \text{cte}, \alpha(\theta), \chi(\theta', \theta'')$ | BE | $\theta = 10^\circ, \theta' = -13^\circ, \theta'' = -25^\circ$ | 30° | 28.76° | 109.42° | 55° | 52° | 100° |
| h | | | $\theta = 30^\circ, \theta' = -13^\circ, \theta'' = -25^\circ$ | 50° | 28.75° | 109.42° | 75° | 52° | 100° |
| i | $\chi \equiv \text{cte}, \alpha \equiv \text{cte}, \gamma(\theta', \theta'')$ | BE | $\theta = 21.7^\circ, \theta' = 15^\circ, \theta'' = 18.29^\circ$ | -5° | 22.95° | 91.87° | -25° | 60° | -80° |
| j | | | $\theta = 10^\circ, \theta' = 20^\circ, \theta'' = 30^\circ$ | -5° | 22.95° | 134.96° | -35° | 80° | -120° |

Figura 6.2 Tabla del *FTB* donde se obtienen los casos particulares de BC (filas a y b), BL (filas c,d,e,f) y BE (filas g,h,i,j) con retardos y modos propios ajustables de manera independiente

Verificación experimental

Para la verificación experimental se generó la configuración de CW del *FTB* ilustrada en la figura 6.1, usando HWPs y QWPs comerciales de Thorlabs. Se usó un haz monocromático espacialmente filtrado y colimado generado con un láser He-Ne de $\lambda = 633[nm]$. Se incidió el haz a través de un polarizador lineal y un QWP generando el estado incidente que pasará a través del *FTB*. Los waveplates rotantes se variaron de 0° a 180° en pasos de 4° , registrando 45 estados emergentes, los cuales fueron medidos con el polarímetro comercial de Thorlabs (PAN5710VIS, S/N:

M00255491).

De este modo, se probó el *FTB* de manera experimental para todos sus casos particulares. Cuando posee modos propios circulares y lineales. Los datos experimentales obtenidos se muestra en la Fig 6.3.

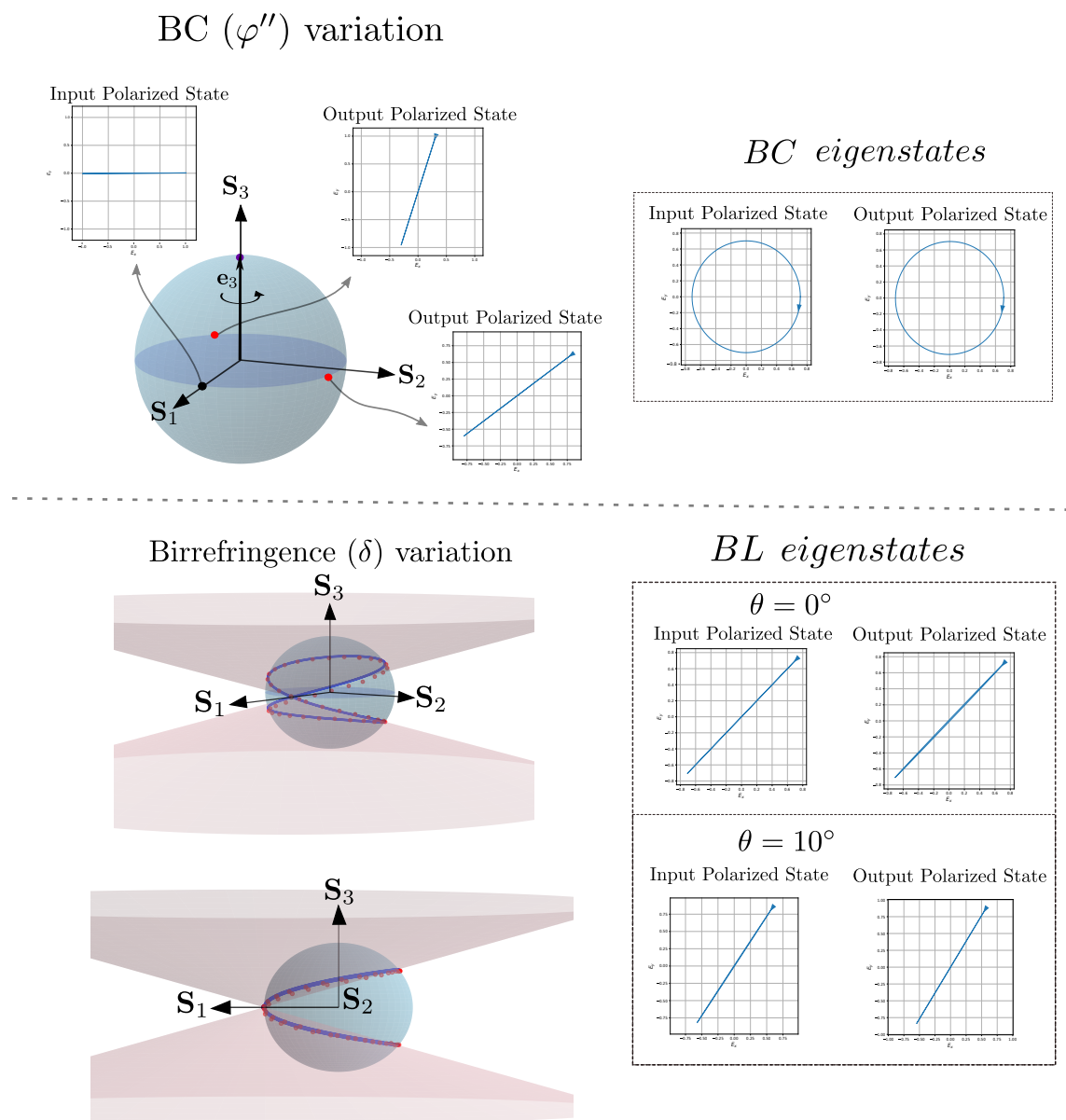


Figura 6.3 Verificación experimental del Full Tuneable Birefringent (*FTB*) en sus casos particulares de BC y BL de retardo y modos propios ajustables. Se prueba a la izquierda la curva de estados emergentes y los parámetros del teorema I de Jones. En la derecha se verifican los modos propios ajustables.

Se probó también el caso general cuando sus modos son elípticos y mantiene su retardo constante para dos configuraciones correspondientes a los casos *g,h* de la Tabla 6.2. Los datos experimentales

obtenidos se muestra en la Fig 6.4 . Se mostró además que mediante la curva de estados emergentes generada por el BE rotante se puede comprobar el poder rotatorio y el retardo lineal del teorema I de Jones de manera grafica a través de la ley de los birrefringentes elípticos [Pabón y cols. \(2023\)](#).

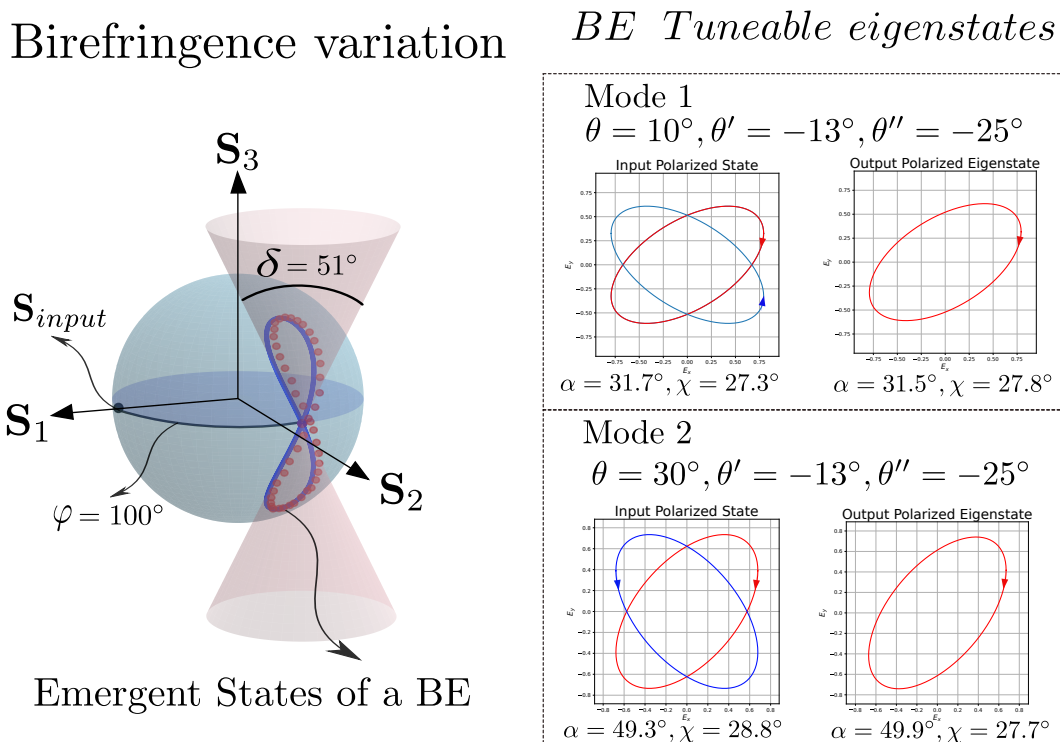


Figura 6.4 Verificación experimental del Full Tuneable Birefringent (*FTB*), donde se prueban a la izquierda la curva de estados emergentes y los parámetros del teorema I de Jones y la ley de los BE, a la derecha los modos propios ajustables.

De este modo, se ha probado un sistema de CW el cual permite variar tanto de el modo propio como el retardo de manera independiente. Lo cual ofrece un control sobre las transformaciones de la polarización.

6.2. Depolarización en placas de onda compuestas

Los CW para el caso de luz incoherente incidente presentan depolarización. Por ello. En colaboración con Cristian Cely, estudiante de Maestría en física realizamos una colaboración sobre como es la transformación de depolarización en un sistema de CW.

El problema radica en que, aunque los sistemas ópticos compuestos por múltiples láminas retardadoras se usan ampliamente, por ejemplo, en el diseño de retardadores de orden cero y acromáticos, en sistemas de distribución de clave cuántica y en compuertas de computación cuántica, no existe un método general para determinar sus efectos sobre la luz parcialmente polarizada e incoherente, considerando la despolarización. Aquí se propone un método algebraico basado en la teoría de la coherencia para determinar los efectos de despolarización en sistemas de placas compuestas. Esta metodología permite calcular las transformaciones de la luz parcialmente polarizada en cualquier configuración de dichos sistemas.

Coherencia temporal y polarización

Estados de polarización dinámicos

El estado de polarización dinámico de una onda electromagnética con un frente de onda plano se define de la siguiente manera:

$$\hat{\mathbf{e}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_x^2(t) + \mathcal{E}_y^2(t)}} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \mathcal{E}_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ \varepsilon_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

el cual también se puede escribir en términos de los ángulos de elipticidad $\chi(t)$ y orientación $\alpha(t)$ asociados con la elipse de polarización instantánea en el tiempo t . En la base de estados lineales, el estado de polarización será Brosseau (1998)

$$\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} \equiv |\alpha, \chi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \cos \chi(t) - i \sin \alpha(t) \sin \chi(t) \\ \sin \alpha(t) \cos \chi(t) + i \cos \alpha(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Definición (Matriz de Polarización): La matriz de Polarización $\mathbf{J}(t)$ es una representación equivalente del estado de polarización dinámico en términos de las intensidades, se construye a partir del vector de Jones $\hat{\mathbf{e}}(t)$ de la siguiente manera

$$\mathbf{J}(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{E_1(t)} & \overline{E_2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(t)\overline{E_1(t)} & E_1(t)\overline{E_2(t)} \\ E_2(t)\overline{E_1(t)} & E_2(t)\overline{E_2(t)} \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

donde $\overline{E_i}$ indica el complejo conjugado de E_i .

Consideremos el efecto del operador \hat{R}_δ sobre una matriz de polarización asociada con un estado de polarización dinámico. En alguna base elíptica arbitraria, la matriz de Jones asociada con un retardador, con estados propios elípticos que coinciden con dicha base, tiene la siguiente forma

$$\hat{R}_\delta = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Por otro lado, la transformación del estado de polarización, representado por la matriz \mathbf{J} , debida al retardador \hat{R}_δ viene dado por [Mandel y Wolf \(1995\)](#)

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \mathbf{J}(t) \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{pmatrix} E_1(t) \overline{E_1(t)} & E_1(t) \overline{E_2(t)} e^{i\delta} \\ E_2(t) \overline{E_1(t)} e^{-i\delta} & E_2(t) \overline{E_2(t)} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Ahora veamos el efecto del producto del factor $e^{i\delta}$ con una señal analítica del campo eléctrico $E_i(t)$. Escribiendo el producto en términos de la transformada de Fourier de $E_i(t)$, se encuentra

$$\begin{aligned} e^{i\delta} E_i(t) &= e^{i\delta} \int_{\mathbb{R}} E_i(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= e^{i\frac{2\pi\nu}{c} \Delta n l} \int_{\mathbb{R}} E_i(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta n l}{c})} d\nu, \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde se ha introducido el factor $e^{i\frac{2\pi\nu}{c} \Delta n l}$ dentro de la integral bajo la condición de que la onda policromática es de espectro estrecho [Goodman \(2015\)](#). Ahora, la integral 6.9 es una transformada de Fourier inversa se encuentra deslaza temporalmente, es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} E_i(\nu) e^{i2\pi\nu(t + \frac{\Delta n l}{c})} d\nu = E_i\left(t + \frac{\Delta n l}{c}\right). \quad (6.10)$$

Por consiguiente, el factor $e^{i2\pi\nu\tau}$ actúa como un operador de desplazamiento

$$e^{i2\pi\nu\tau} E_i(t) = E_i(t + \tau), \quad (6.11)$$

donde $\tau = \frac{\Delta n l}{c}$, siendo $\Delta n = n_1 - n_2$ la birrefringencia del material. Aplicando el resultado de la ecuación 6.11 en la ecuación 6.8, obtenemos la siguiente expresión

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_\delta \mathbf{J}(t) \hat{R}_\delta^\dagger = \begin{pmatrix} E_1(t) \overline{E_1(t)} & E_1(t) \overline{E_2(t + \tau)} \\ E_2(t) \overline{E_1(t - \tau)} & E_2(t) \overline{E_2(t)} \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Este proceso se puede generalizar entonces para sistemas compuestos por múltiples placas retardadoras mediante la siguiente operación

$$\mathbf{J}'(t) = \hat{R}_{\delta_N} \dots \hat{R}_{\delta_2} \hat{R}_{\delta_1} \mathbf{J}(t) \hat{R}_{\delta_1}^\dagger \hat{R}_{\delta_2}^\dagger \dots \hat{R}_{\delta_N}^\dagger. \quad (6.13)$$

Hasta aquí este formalismo soluciona el problema de las transformaciones de estados de polarización dinámicos a través de sistemas de placas de onda compuestos. Sin embargo, esto solo es válido cuando la dinámica de la polarización es determinista, es decir, que las funciones temporales $E_1(t)$ y $E_2(t)$ sean conocidas. Para casos donde estas funciones evolucionan aleatoriamente en el tiempo se hace necesario considerar los efectos de la coherencia.

Matriz de coherencia y depolarización

En la realidad física, la emisión de luz se lleva a cabo bajo procesos complejos que involucran una gran cantidad de emisores individuales, y múltiples interacciones con su entorno. Por lo tanto,

el estado de polarización de una fuente de luz es naturalmente dinámico y su evolución temporal es de carácter aleatorio. En este sentido, la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ es un vector aleatorio y sus elementos, señales aleatorias. Por ello, se debe realizar un promedio de ensamble estadístico para tratar el proceso de la polarización de una fuente de luz como un proceso aleatorio. El valor esperado, en un instante de tiempo t , de un ensamble Ω de fuentes idénticas de luz cuya dinámica de polarización viene dado por la matriz $\mathbf{J}(t)$ se expresa como sigue

$$E\{\mathbf{J}\}(t) = \int_{\Omega} \mathcal{P}(\mathbf{J}; t) \mathbf{J}(\alpha, \chi; t) d\alpha d\chi, \quad (6.14)$$

donde $\mathcal{P}(\mathbf{J}; t)$ es la función de densidad de probabilidad asociada con el estado de polarización $\mathbf{J}(t)$ del ensamble Ω . En general, $\mathcal{P}(\mathbf{J}; t)$ es una función que depende explícitamente del tiempo y por lo tanto así también sus momentos estadísticos. Sin embargo, en el equilibrio termodinámico nos permitimos adoptar un régimen estacionario en la estadística, y en un modelo simplificado se puede realizar una formulación estadística de la polarización con una hipótesis de estacionariedad en el sentido amplio, en el que al menos los dos primeros momentos de $\mathcal{P}(\mathbf{J}; t)$ no dependen del tiempo. En este sentido, el estado de polarización promedio está dado por

$$E\{\mathbf{J}\} = \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} E\{E_1(t_1)\overline{E_1(t_1)}\} & E\{E_1(t_1)\overline{E_2(t_2)}\} \\ E\{E_2(t_2)\overline{E_1(t_1)}\} & E\{E_2(t_2)\overline{E_2(t_2)}\} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

donde los valores esperados de los elementos de la matriz vienen dados por

$$E\{E_i(t_i)\overline{E_j(t_j)}\} = \int_{\Omega} \mathcal{P}(E_i, E_j; t_i, t_j) E_i(\alpha, \chi; t_i) \overline{E_j(\alpha, \chi; t_j)} d\alpha d\chi. \quad (6.16)$$

y representan las funciones de correlación de las señales aleatorias $E_i(\alpha, \chi; t_i)$ y $E_j(\alpha, \chi; t_j)$, es decir, la función de coherencia de primer orden del campo eléctrico. Estas funciones de correlación, por virtud de la estacionariedad estadística, dependen de la diferencia $t_i - t_j$, y además, se pueden escribir en términos del valor medio $E\{E_i(t_i)\} = E\{E_i\}$ de cada señal

$$\Gamma_{ij}(t_i - t_j) = E\{E_i\}E\{\overline{E_j}\} \gamma(t_i - t_j) \quad (6.17)$$

$$= \Gamma_{ij}(0) \gamma(t_i - t_j), \quad (6.18)$$

donde $\gamma(t_i - t_j)$ es el grado complejo de coherencia de primer orden, con $0 < |\gamma(t_i - t_j)| \leq 1$. Por otro lado, $\Gamma_{ij}(0) = E\{E_i(t_i)\}E\{\overline{E_j(t_j)}\}$ Es el factor de normalización de la función de coherencia. Este factor consiste del producto de los valores promedio de cada señal, y por este motivo, equivale a los elementos de una matriz de coherencia asociada con un estado totalmente polarizado; es decir, el caso donde no existe una descorrelación debida a las diferencias de fase $t_i - t_j$ entre las componentes del campo eléctrico. Esto solo se da cuando la diferencia $t_i - t_j = 0$; de ahí proviene la notación en la que $\Gamma_{ij}(0)$ está evaluada en cero.

Así, el primer momento estadístico del estado de polarización corresponde con la matriz de Coherencia de primer orden $\mathbf{\Gamma}$ que equivale a la ya conocida matriz de polarización de Wiener-Wolf. Esta matriz es el promedio de ensamble de la matriz de polarización asociada con un estado parcialmente polarizado en general. A partir de ella se pueden extraer los valores esperados de los parámetros de Stokes asociados [Wiener \(1928\)](#); [Wolf \(1959\)](#):

$$E\{s_i(t)\} = \text{Tr}\{\hat{\sigma}_i \mathbf{\Gamma}\}, \quad (6.19)$$

y también se puede determinar el valor del grado de polarización P

$$P = \sqrt{1 - \frac{4 \det\{\mathbf{J}\}}{\text{Tr}\{\mathbf{J}\}^2}}. \quad (6.20)$$

De esta manera, dada la matriz de polarización $\mathbf{J}(t)$ que representa el estado de polarización instantáneo del campo eléctrico asociado con una fuente de luz incoherente, se pueden determinar los observables de primer momento asociados con el estado de polarización, tales como los parámetros de Stokes promedio $E\{s_i(t)\}$ y el grado de polarización P .

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{R}^{-1}(\theta) \left[\hat{R}_\delta \left(\hat{R}^{-1}(\phi) \hat{R}_\delta \hat{R}(\phi) \right) \right] \hat{R}(\theta) \\ &= \hat{R}^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} e^{i2\delta} \cos^2 \phi + e^{i\delta} \sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi (e^{i2\delta} - e^{i\delta}) \\ \cos \phi \sin \phi (e^{i\delta} - 1) & \cos^2 \phi + e^{i\delta} \sin^2 \phi \end{pmatrix} \hat{R}(\theta). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Posteriormente hay que transformar la matriz de coherencia Γ asociada con un estado de polarización elíptico con el operador \hat{B} que representa la biplaca rotante:

$$\Gamma' = \hat{B} \begin{pmatrix} \Gamma_{xx}(0) & \Gamma_{xy}(0) \\ \Gamma_{yx}(0) & \Gamma_{yy}(0) \end{pmatrix} \hat{B}^\dagger. \quad (6.22)$$

El desarrollo de este producto matricial y la correspondiente traslaciones de las funciones de coherencia debido a los factores $e^{i\delta}$ fue realizado usando un módulo de Python de nuestra autoría con el que se puede realizar estas transformaciones para cualquier tipo de CW Cely (2024). Según el método planteado aquí, al realizar la debida operación se encontrarán términos de fase $e^{i\delta}$ multiplicando a cada elemento $\Gamma_{ij}(0)$ de la matriz inicial; lo que se debe hacer es realizar las respectivas traslaciones de la función de coherencia en cada caso.

Para el caso de luz incoherente que posee polarización parcial de carácter aleatorio, el estado de polarización se describe mediante el promedio de ensamble de su estado de polarización dinámico. En este trabajo se tomó la representación de la matriz de polarización cuyo promedio de ensamble da como resultado la ya conocida matriz de Coherencia-Polarización de Wiener-Wolf, sin embargo, si se trabaja con otra representación algebraica se debe llegar a una representación para el promedio de ensamble equivalente.

Se realizó un código en Python con los resultados obtenidos, el cual permite modelar la depolarización de la luz en placas de ondas compuestas. El repositorio puede accederse mediante el QR de la figura 6.5.



Figura 6.5 QR el cual direcciona al código en un repositorio en GitHub para modelar la depolarización en placas de onda compuestas.

6.2.1. Método de caracterización geométrica de un BE

La caracterización completa de un BE requiere medir ambos conjuntos de parámetros. Los *parámetros intrínsecos* (γ, α, χ) describen los modos propios y el retardo reales del medio, mientras que los *parámetros equivalentes* (δ, α', φ) están relacionados con la ley de birrefringencia para modos propios elípticos [Pabón y cols. \(2023\)](#), por lo cual define los posibles estados emergentes.

En esta búsqueda de caracterización, se han generado diversas metodologías, como métodos numéricos mediante regresión lineal para determinar los parámetros intrínsecos [El-Hosseiny \(1975\)](#), análisis de Fourier [Berezhna, Berezhnyy, y Takashi \(2001\)](#) el cual hace una regresión de una curva de intensidades y relacionar los coeficientes de Fourier con los parámetros intrínsecos, (Mueller Matrix Polarimetry)MMP method [Gu y cols. \(2018\)](#) a través de un problema inverso de optimización para determinar los parámetros intrínsecos y un fitting process mediante un heterodyne interferometric ellipsometry [C. Tsai, Liao, Chou, Han, y Chao \(2005\)](#).

También se ha logrado caracterizar los BE mediante medidas indirectas mediante técnicas como interferometría [Woźniak y Banach \(2008\)](#) a través de desplazamientos de interferogramas y un Senarmont compensator de dos pasos [Kurzynowski \(2001\)](#) para una muestra rotada a $\theta = 45^\circ$ para determinar γ y χ . Y a través de medidas de intensidades [Sarma \(1977\)](#) como Three-intensity measurement technique [Lin, Han, y Chao \(2008\)](#) el cual permite medir los tres parámetros intrínsecos. Si bien, en general existen diversos métodos experimentales para conocer retardo de medios birrefringentes [P. Zhang, Tan, Liu, y Chen \(2013\)](#) desde métodos con muestras rotantes o estáticas, así como geométricos sobre la esfera de Poincaré [Pabón, Salazar, y Torres \(2021\)](#) válido para BL. Por lo cual, la caracterización de un medio birrefringente requiere de los modos propios además del retardo, de esta manera se puede determinar la transformación y el operador de dicho medio. En esta misma búsqueda de la medición de los modos propios, también se han desarrollado métodos experimentales iterativos [Pellat-Finet \(2012a\)](#). Por lo cual una medida de todos los parámetros requeriría una combinación de varios métodos, lo cual aumentaría la complejidad de la caracterización.

Se ha sugerido que los parámetros intrínsecos no podían ser fácilmente medibles [pierre2, fully variable]. Por lo que estos se han determinado a partir de su relación con los *parámetros equivalentes*, los cuales son más accesibles a la experimentación. Tradicionalmente, la metodología utilizada es mediante la medición de los parámetros equivalentes, el cual se ha logrado mediante dual-frequency heterodyne ellipsometer [Yu y cols. \(2009\)](#) y MMP [Gu y cols. \(2018\)](#). En este sentido, hay que destacar que previamente se sugirió que los parámetros físicos de un BE no son accesibles a la experimentación [Pellat-Finet \(1984\)](#). Por ello se usaron los parámetros equivalentes del Teorema I de Jones, que son más accesibles a la medición, para obtener los parámetros fundamentales mediante relaciones analíticas [Gu y cols. \(2018\)](#); [Pellat-Finet \(1984\)](#); [Yu \(2016\)](#); [Yu y cols. \(2009\)](#). Esta metodología se ha usado para obtener la caracterización en cristales como el BSO [Pellat-Finet y Lebreton \(1982\)](#), en placas de onda compuestas [Yu \(2016\)](#), cristales líquidos [Yu y Chou \(2011\)](#). Sin embargo, la relación usada entre estos dos conjuntos de parámetros no es inyectiva. Esto conduce a la existencia de múltiples soluciones matemáticas, las cuales no necesariamente son reales.

En este trabajo presenta una metodología experimental para medir ambos conjuntos de parámetros de forma independiente y simultánea, utilizando relaciones geométricas sobre la esfera de Poincaré a través de cuatro estados de polarización específicos.

No inyectividad entre los parámetros de un BE y en Teorema I de Jones

Por otro lado, podemos obtener una relación adicional entre ambas representaciones. Para ello, dividimos la ecuación 4.13 entre la ecuación 4.12, de la forma

$$\frac{\tan(2\chi)}{\cos(\gamma/2)} = \frac{\tan(\varphi/2)}{\sin(\delta/2)}. \quad (6.23)$$

La relación obtenida describe cómo deben coincidir los parámetros de ambas representaciones simultáneamente. Sin embargo, surge un problema: al revisar las ecuaciones 4.12, 4.13 y 6.23, se encuentra que ninguna de ellas es inyectiva. Esto significa que, para tres parámetros dados (γ, α, χ) , la combinación de (α', δ, χ) no es única, y viceversa. Por lo tanto, existen múltiples combinaciones matemáticas posibles entre ambas representaciones. Para evitar las ambigüedades derivadas de este problema, es necesario conocer ambas representaciones con precisión. Los parámetros $(\gamma, \alpha, \varphi)$ describen los modos propios de polarización del medio y el retardo de fase global entre las dos componentes ortogonales elípticas, proporcionando información global del medio.

Además, hasta ahora se creía que los parámetros $(\alpha', \delta, \varphi)$ tenía características meramente matemáticas, carentes de significado físico, introducidos por practicidad experimental. Sin embargo, con este trabajo mostramos que ellos permiten acceder a la curva de estados polarizados emergentes que el BE puede generar al rotarse, según la *Ley de los birrefringentes elípticos Pabón y cols. (2023)*; *Salazar-Ariza y Torres (2018)*. Esta ley describe geoméricamente la curva de estados emergentes como el corte entre un cono y la esfera de Poincaré, donde el ángulo de apertura del cono es δ y el vértice está rotado un ángulo φ . Por lo tanto, destacamos que ambos grupos de parámetros son fundamentales para conocer las propiedades físicas del medio. La representaciones de esto se ilustran en la figura 6.6.

Algoritmo de caracterización de un medio birrefringente

Ahora bien, teniendo en cuenta que se requiere medir ambos grupos de parámetros para caracterizar por completo un medio birrefringente. Presentamos a continuación las ecuaciones que permiten hallar, por primera vez, los parámetros intrínsecos de un birrefringente independientemente de los parámetros equivalentes.

El método se basa en el uso de cuatro estados de polarización, dos estados incidentes lineal y circular, y sus respectivos estados transformados, como se representa en la figura 6.7 (izquierda). Sean los estados incidentes, lineal \vec{S}_L y circular \vec{S}_C de la forma

$$\vec{S}_L = (\alpha_1, \chi_1 = 0), \quad (6.24)$$

y

$$\vec{S}_C = (\alpha_2, \pm\pi/4). \quad (6.25)$$

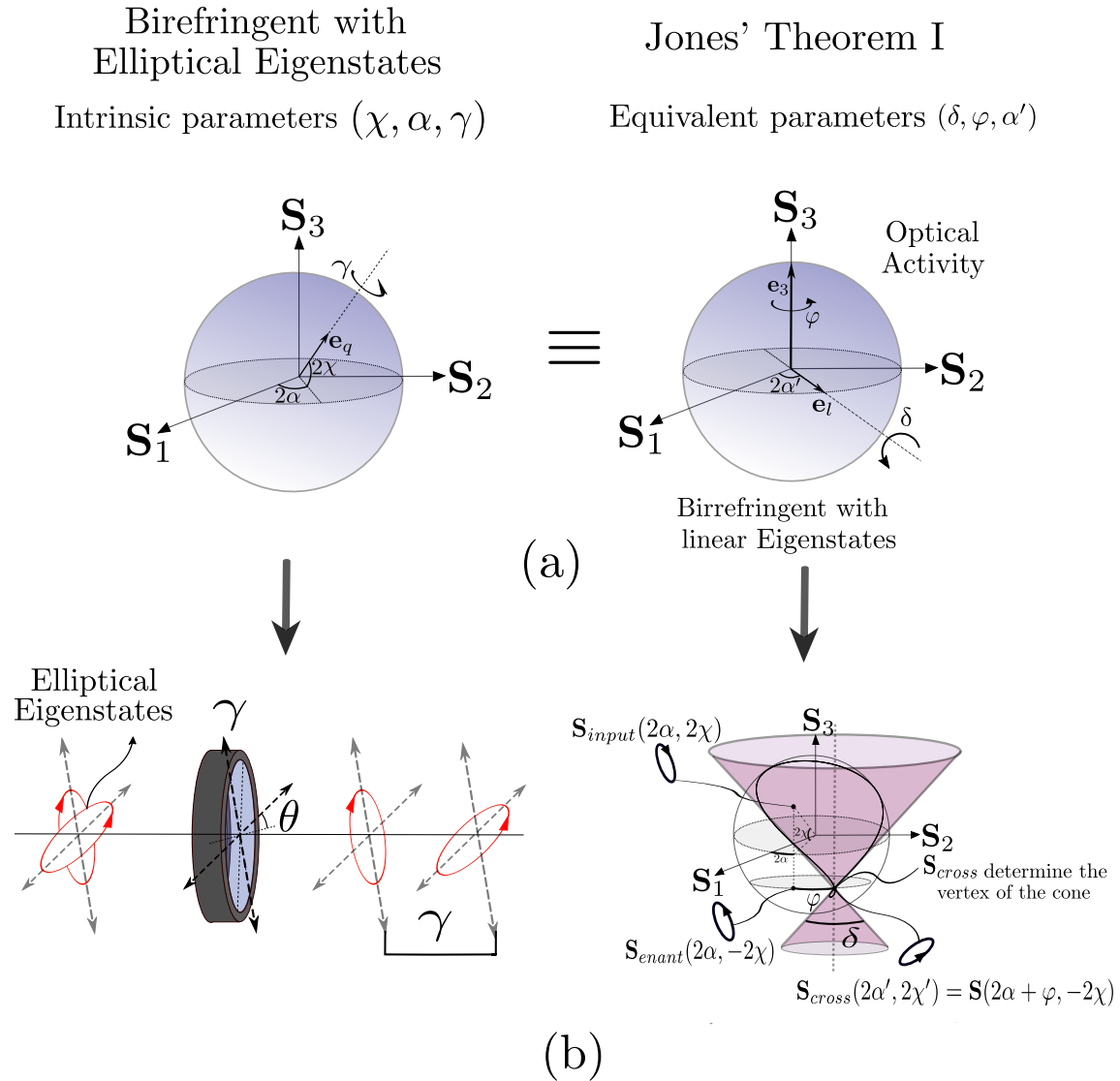


Figura 6.6 Visualización de las representaciones de BE, a través del modelo de eje ángulo mediante los parámetros intrínsecos, y a través de los parámetros equivalentes de Jones como un BC y un BL compuesto.

Sus respectivos estados transformados al atravesar por el BE son

$$\vec{S}_L' = (\alpha'_1, 0), \quad (6.26)$$

para el estado lineal emergente, el cual se requiere que sea un estado linealmente polarizado. Y

$$\vec{S}_C' = (\alpha'_2, \chi'_2). \quad (6.27)$$

Para el estado emergente \vec{S}_C' , el cual será un estado elíptico en general. Este proceso se grafica en la figura 6.7 (derecha). Ahora definimos $\Delta\vec{S}_L$ como la diferencia de los estados incidente y su respecto estado emergente sobre la esfera de Poincaré. El cual se representa de la forma

$$\Delta\vec{S}_L = \vec{S}_L' - \vec{S}_L, \quad (6.28)$$

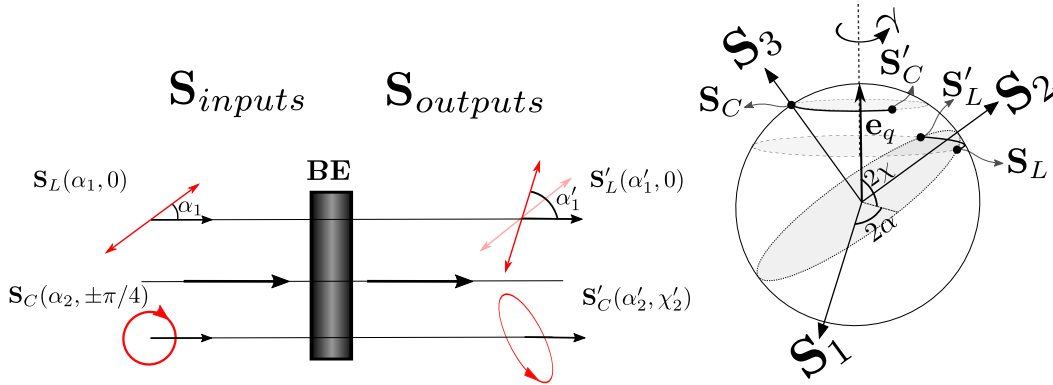


Figura 6.7 Transformación de dos estados polarizados S_L y S_C al pasar por un BE y su representación sobre la esfera de Poincaré.

del mismo modo, para un estado de polarización circular

$$\Delta \vec{S}_C = \vec{S}'_C - \vec{S}_C. \quad (6.29)$$

Ahora bien, como se representa en la figura 6.8, el producto vectorial entre los vectores de diferencia de las ecuaciones 6.29 y 6.28 es un vector paralelo a los modos propios, de la forma

$$\Delta \vec{S}'_L \times \Delta \vec{S}'_C = \vec{n}, \quad (6.30)$$

donde el vector \vec{n} es paralelo al eje unitario $\hat{e}_q = \mathbf{e}_1 \cos 2\chi \cos 2\alpha + \mathbf{e}_2 \cos 2\chi \sin 2\alpha + \mathbf{e}_3 \sin 2\chi$.

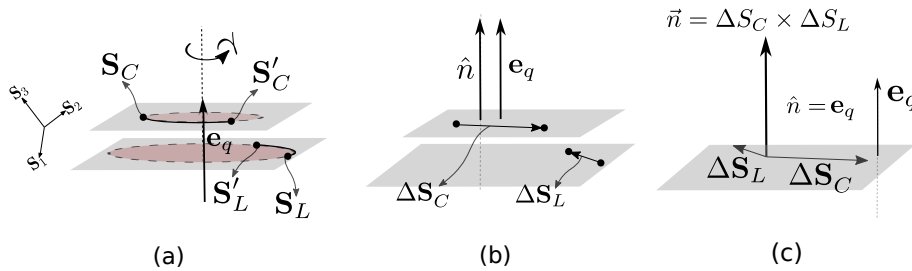


Figura 6.8 Relación geométrica entre los estados incidentes y transformados con los modos propios del BE.

De modo que el vector normalizado \hat{n} corresponde al vector de modos propios, de la forma

$$\hat{n} = \frac{\Delta \vec{S}'_L \times \Delta \vec{S}'_C}{|\Delta \vec{S}'_L \times \Delta \vec{S}'_C|} = \hat{e}_q. \quad (6.31)$$

Así pues, teniendo en cuenta el análisis anterior, es posible conocer el ángulo azimuth α y la elipticidad χ . Finalmente, para encontrar el retardo γ tomemos en consideración un estado de entrada \mathbf{S} , un estado de salida \mathbf{S}' y un eje de rotación arbitrario (\hat{e}_q) que permita pasar de uno a otro (véase la figura 6.9).

Ahora bien, la proyección de \mathbf{S} y de \mathbf{S}' sobre el eje arbitrario es la misma para ambos estados

$$\text{proy}_{\hat{e}_q} \mathbf{S} = \text{proy}_{\hat{e}_q} \mathbf{S}'. \quad (6.32)$$

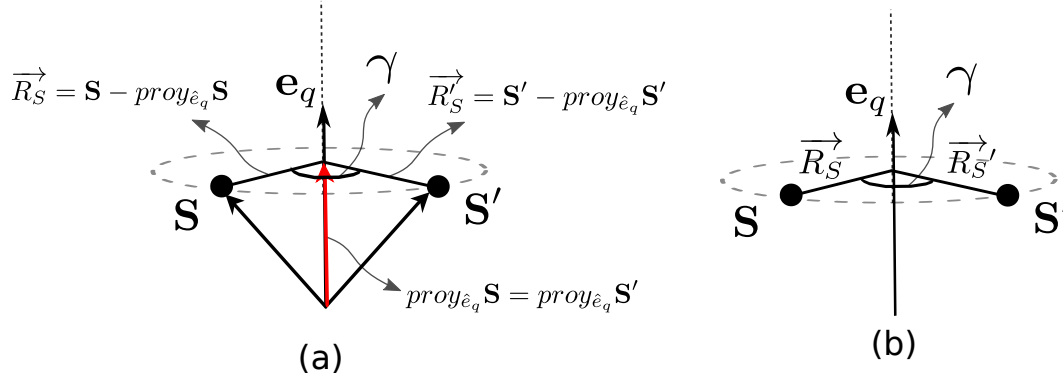


Figura 6.9 Representación geométrica de la relación entre un estado polarizado incidente y su transformado, con el eje y el desfase γ del BE.

Por otra parte, el vector que va desde el centro de la esfera a \mathbf{S} , es decir, \vec{R}_S se puede hallar de la siguiente manera

$$\vec{R}_S = \mathbf{S} - \text{proy}_{\hat{e}_q} \mathbf{S}. \quad (6.33)$$

Del mismo modo sucede para el vector que va desde el centro de la esfera a \mathbf{S}'

$$\vec{R}_{S'} = \mathbf{S}' - \text{proy}_{\hat{e}_q} \mathbf{S}'. \quad (6.34)$$

Así, es posible hallar el ángulo que hay entre \mathbf{S} y \mathbf{S}'

$$\vec{R}_S \cdot \vec{R}_{S'} = |\vec{R}_S| |\vec{R}_{S'}| \cos \gamma. \quad (6.35)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior,

$$\cos \gamma = \frac{\vec{R}_S \cdot \vec{R}_{S'}}{|\vec{R}_S| |\vec{R}_{S'}|}. \quad (6.36)$$

De esta manera tan sencilla queda demostrado que las propiedades geométricas sobre la esfera de Poincaré permiten hallar explícitamente los parámetros del modo propio (α, χ) y el retardo γ a partir de las ecuaciones 6.31 y 6.36, respectivamente.

Método geométrico para la medición de la caracterización de Jones $(\delta, \alpha', \varphi)$

Por otra parte, en lo que se refiere a los parámetros equivalentes, es posible usar la misma metodología con estados incidentes lineales y circulares y sus estados transformados.

Desarrollo matemático del método de calcular los parámetro del teorema I de Jones

Para determinar los parámetros equivalentes en términos de dos estados incidentes y sus transformados, procedemos a describir matemáticamente su transformación.

Estado incidente linealmente polarizado

Sobre el estado lineal incidente este debe ser tal que su estado emergente al pasar por un BE sea lineal. La existencia de dicho lemma se sintetiza de la forma *Lemma*: Existe un estado lineal incidente $\mathbf{S}_L(2\alpha_1, 0)$ tal que al pasar a través de un BE su estado emergente será también lineal $\mathbf{S}'_L(\alpha'_1, 0)$. *prueba*: Sea un estado lineal incidente $\mathbf{S}_L(2\alpha_1, 0)$ en un BE. Matemáticamente esta transformación se representa de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_a \frac{\gamma}{2}} \mathbf{S}_L(\alpha_1, 0) e^{-e_a \frac{\gamma}{2}}. \quad (6.37)$$

Si el BE es descrito mediante el teorema I de Jones el operador se expresa de la forma [Pabón y cols. \(2023\)](#); [Pellat-Finet \(1984\)](#)

$$e^{e_a \frac{\gamma}{2}} = e^{e_l \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}}. \quad (6.38)$$

Lo cual permite describir la ecuación 6.37 de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_l \frac{\delta}{2}} \underbrace{e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}_L(2\alpha_1, 0)}_{\mathbf{S}(2\alpha_1 + \varphi, 0)} e^{-e_l \frac{\delta}{2}}, \quad (6.39)$$

lo cual es equivalente a un estado lineal $\mathbf{S}_L(2\alpha'_1, 0)$ de azimuth $2\alpha'_1 = 2\alpha_1 + \varphi$ el cual incide a un operador de BL. Dicho operador es la forma $e^{e_l \frac{\delta}{2}} = \cos \frac{\delta}{2} + \mathbf{e}_l \sin \frac{\delta}{2}$ y modo propio

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_1 \cos 2\alpha' + \mathbf{e}_2 \sin 2\alpha'. \quad (6.40)$$

Por lo que el sistema se reduce a la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_l \frac{\delta}{2}} \mathbf{S}(2\alpha'_1, 0) e^{-e_l \frac{\delta}{2}}. \quad (6.41)$$

Si el azimuth $2\alpha'_1$ es igual al azimuth $2\alpha'$ de los modos propios del BL de la forma

$$2\alpha'_1 = 2\alpha_1 + \varphi = 2\alpha', \quad (6.42)$$

Por lo tanto, al ser su modo propio el estado emergente \mathbf{S}' corresponderá al estado lineal $\mathbf{S}(2\alpha'_1, 0)$.

De la ecuación 6.42 obtenemos el azimuth α' de la forma

$$\alpha' = \alpha'_1, \quad (6.43)$$

y el poder rotatorio φ de la forma

$$\varphi = 2\alpha'_1 - 2\alpha_1. \quad (6.44)$$

Estado incidente circular polarizado

Si incidimos un estado circular en un BE descrito por el teorema I de Jones obtenemos la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_l \frac{\delta}{2}} \underbrace{e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}_C(2\alpha_2, 2\chi_2 = \pi/2)}_{\mathbf{S}_C(2\alpha_2, 2\chi_2 = \pi/2)} e^{-e_l \frac{\delta}{2}}. \quad (6.45)$$

ya que el estado \mathbf{S}_C es el modo propio de un BC, es invariante al primer operador, por lo cual el operador queda la acción de un BL en el estado \mathbf{S}_C de la forma

$$\mathbf{S}' = e^{e_i \frac{\delta}{2}} \mathbf{S}_C(2\alpha_2, 2\chi_2 = \pi/2) e^{-e_i \frac{\delta}{2}}. \quad (6.46)$$

Los estados emergentes \mathbf{S}' de un estado circular al pasar por un BL rotante se describen de la forma [Pabón y cols. \(2023\)](#); [Salazar-Ariza y Torres \(2018\)](#)

$$\mathbf{S}'(2\alpha'_2, 2\chi'_2) = 1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{S}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{S}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{S}_3 = 1 + \mathbf{e}_1 [\sin \delta \sin 2\theta] + \mathbf{e}_2 [\sin \delta \cos 2\theta] + \mathbf{e}_3 [\cos \delta]. \quad (6.47)$$

De la componente \mathbf{e}_3 obtenemos

$$\mathbf{S}_3 = \sin 2\chi'_2 = \cos \delta. \quad (6.48)$$

Despejando el retardo del BL δ queda de la forma

$$\delta = \arccos(\sin 2\chi'_2). \quad (6.49)$$

De este modo, con las ecuaciones ecuación 6.49, ecuación 6.43, ecuación 6.44 obtenemos explícitamente la caracterización de los parámetros equivalentes $(\delta, \alpha', \varphi)$, respectivamente. De este modo, el análisis anterior nos proporciona las ecuaciones necesarias para conocer simultáneamente y de forma independiente los parámetros intrínsecos y los equivalentes. Por lo tanto, con estas ecuaciones, es posible desarrollar una metodología para medir simultáneamente y de forma independiente ambos tipos de parámetros.

7. Conclusiones

Se presenta una descripción explícita de los retardos, modos propios, y el RJ de cualquier configuración de CW. Donde se encuentran seis ecuaciones, las cuales fueron probadas experimentalmente en un grupo de CW previamente estudiados. Además, se aplicaron estas ecuaciones para diseñar y caracterizar un *Full Tuneable Birefringent device* a través de un esquema compuesto de HWPs y QWPs. Donde sus modos propios como su retardo se puede ajustar de manera independiente. Es por ello, que en el presente trabajo presentamos un marco general para los medios compuestos de materiales birrefringentes y un diseño de CW que ofrece un mayor control sobre la polarización.

Por otro lado, se han desarrollado dos representaciones analíticas del operador de birrefringencia elíptica aplicado a la biplaca de QWPs. Lo que ha permitido obtener expresiones analíticas para todas las variables angulares involucradas en la birrefringencia de la biplaca, dependientes del ángulo de separación entre los ejes rápidos de las QWP y de la rotación sincronizada de la biplaca. Esto significa que todos los parámetros pueden ser ajustados mediante rotaciones de las QWP, lo que proporciona una gran flexibilidad en el diseño y control del elemento.

Además, se ha logrado una generalización de la ley de los birrefringentes con modos propios lineales a elípticos. Donde la curva de estados emergente de un BE se describe su curva de estados emergentes a través de un cono doble de vértice rotado que intersecta la esfera de Poincaré. Esta generalización ha permitido describir la BL y BC como casos particulares de BE, lo que proporciona una mayor comprensión y un marco teórico más completo para describir los medios birrefringentes.

Sobre el trabajo de depolarización en sistemas de CW, se describió el efecto del operador asociado con un retardador sobre la matriz de Coherencia. El cual tiene como resultado el desplazamiento de las funciones de coherencia, de esta manera, se cuantifica no solo el cambio del estado de polarización medio sino también el cambio del grado de polarización, es decir, se tiene en cuenta la despolarización a través de sistemas de retardadores. Esto hace posible determinar las transformaciones de polarización debidas a cualquier sistema compuesto de placas de ondas de manera general para fuentes incoherentes y parcialmente polarizadas.

Sobre el trabajo de un método de caracterización. Se generó una metodología experimental polarimétrica para medir los parámetros intrínsecos y equivalentes de un birrefringente. El método está basado en la geometría sobre la esfera de Poincaré la cual sólo requiere conocer dos estados

incidentes polarizados y sus respectivos estados transformados. El método puede utilizarse para caracterizar por transmisión cualquier medio birrefringente independiente a su modo propio. El método propuesto evidencia que los parámetros intrínsecos son medibles. Además, la *Ley de los birrefringentes elípticos* muestra que los parámetros equivalentes tienen significado físico. Por lo tanto, resaltamos que ambos parámetros deben ser medidos de manera independiente para conocer las propiedades del medio.

Referencias Bibliográficas

- Agarwal, G. S. (1999, Dec). $Su(2)$ structure of the poincaré sphere for light beams with orbital angular momentum. *J. Opt. Soc. Am. A*, 16(12), 2914–2916. Descargado de <http://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-16-12-2914> doi: 10.1364/JOSAA.16.002914
- Al-Mahmoud, M., Coda, V., Rangelov, A., y Montemezzani, G. (2020, Jan). Broadband polarization rotator with tunable rotation angle composed of three wave plates. *Phys. Rev. Applied*, 13, 014048. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevApplied.13.014048> doi: 10.1103/PhysRevApplied.13.014048
- Al-Mahmoud, M., Hristova, H., Coda, V., Rangelov, A. A., Vitanov, N. V., y Montemezzani, G. (2021, Oct). Non-reciprocal wave retarder based on optical rotators combination. *OSA Continuum*, 4(10), 2695–2702. Descargado de <https://opg.optica.org/osac/abstract.cfm?URI=osac-4-10-2695> doi: 10.1364/OSAC.439325
- Alonzo, M., Santarsiero, M., y Gori, F. (2018, Jun). Maximizing young fringe visibility with a universal $su(2)$ polarization gadget. *Opt. Lett.*, 43(12), 2844–2847. Descargado de <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-43-12-2844> doi: 10.1364/OL.43.002844
- Azzam, R. M. A. (2000, Nov). Poincaré sphere representation of the fixed-polarizer rotating-retarder optical system. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(11), 2105–2107. Descargado de <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-17-11-2105> doi: 10.1364/JOSAA.17.002105
- Bacskal, S., y Kim, Y. S. (2006, may). de sitter group as a symmetry for optical decoherence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(24), 7775–7788. Descargado de <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/24/014> doi: 10.1088/0305-4470/39/24/014
- Bagini, V., Borghi, R., Gori, F., Santarsiero, M., Frezza, F., Schettini, G., y Spagnolo, G. S. (1996, sep). The simon - mukunda polarization gadget. *European Journal of Physics*, 17(5), 279. Descargado de <https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/17/5/006> doi: 10.1088/0143-0807/17/5/006
- Barron, L. D. (2004). *Molecular light scattering and optical activity* (2nd ed., rev. and enl ed.). Cambridge University Press. Descargado de <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=7c7262cc9e47b407024cd36722000133>

- Baylis, W. E., Bonenfant, J., Derbyshire, J., y Huschilt, J. (1993). Light polarization: A geometric-algebra approach. *American Journal of Physics*, 61(6), 534-545. Descargado de <https://doi.org/10.1119/1.17205> doi: 10.1119/1.17205
- Beléndez, A., Fernández, E., Francés, J., y Neipp, C. (2010, 05). Birefringence of cello tape: Jones representation and experimental analysis. *European Journal of Physics*, 31, 551. doi: 10.1088/0143-0807/31/3/012
- Berezhna, S., Berezhnyy, I., y Takashi, M. (2001). Integrated photoelasticity through imaging fourier polarimetry of an elliptic retarder. *Applied optics*, 40(5), 644–651.
- Bhandari, R. (1989). Synthesis of general polarization transformers. a geometric phase approach. *Physics Letters A*, 138(9), 469-473. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189907470> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(89\)90747-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90747-0)
- Bhandari, R. (1991). Su (2) phase jumps and geometric phases. *Physics Letters A*, 157(4), 221-225. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019190055D> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(91\)90055-D](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90055-D)
- Bhandari, R. (1992a). Observation of dirac singularities with light polarization. i. *Physics Letters A*, 171(5), 262-266. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960192906394> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90639-4](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90639-4)
- Bhandari, R. (1992b). Observation of dirac singularities with light polarization. ii. *Physics Letters A*, 171(5), 267-270. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960192906408> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(92\)90640-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(92)90640-8)
- Bhandari, R. (1997a). Polarization of light and topological phases. *Physics Reports*, 281(1), 1-64. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157396000294> doi: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(96\)00029-4](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(96)00029-4)
- Bhandari, R. (1997b). Polarization of light and topological phases. *Physics Reports*, 281(1), 1-64. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157396000294> doi: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(96\)00029-4](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(96)00029-4)
- Bhandari, R., y Love, G. D. (1994). Polarization eigenmodes of a qhq retarder — some new features. *Optics Communications*, 110(5), 479-484. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0030401894902356> doi: [https://doi.org/10.1016/0030-4018\(94\)90235-6](https://doi.org/10.1016/0030-4018(94)90235-6)
- Britton, M. C. (2000, apr). Radio astronomical polarimetry and the lorentz group. *The Astrophysical Journal*, 532(2), 1240–1244. Descargado de <https://doi.org/10.1086/308595> doi: 10.1086/308595
- Brosseau, C. (1998). *Fundamentals of polarized light: A statistical optics approach*. Wiley. Descargado de <https://books.google.com.co/books?id=477vAAAAAAAJ>

- Cely, C. H. (2024, mayo). *Tyndall99/Depolarization-in-Composite-Waveplates: Composite Waveplate Dolarization Module v.1*. Zenodo. Descargado de <https://doi.org/10.5281/zenodo.11205710> doi: 10.5281/zenodo.11205710
- Chartier, T., Hideur, A., Ozkul, C., Sanchez, F., y Stephan, G. (2001, 11). Measurement of the elliptical birefringence of single-mode optical fibers. *Applied optics*, 40, 5343-53. doi: 10.1364/AO.40.005343
- Chou, C., Huang, Y.-C., y Chang, M. (1997, Jun). Effect of elliptical birefringence on the measurement of the phase retardation of a quartz wave plate by an optical heterodyne polarimeter. *J. Opt. Soc. Am. A*, 14(6), 1367–1372. Descargado de <http://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-14-6-1367> doi: 10.1364/JOSAA.14.001367
- Chue-Sang, J., Gonzalez, M., Pierre, A., Laughrey, M., Saytashev, I., Novikova, T., y Ramella-Roman, J. (2019, 03). Optical phantoms for biomedical polarimetry: a review. *Journal of Biomedical Optics*, 24, 1. doi: 10.1117/1.JBO.24.3.030901
- Dargys, A. (2012). Optical mueller matrices in terms of geometric algebra. *Optics Communications*, 285(24), 4785-4792. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401812007274> doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2012.07.058>
- Davis, J. A., Moreno, I., y Tsai, P. (1998, Feb). Polarization eigenstates for twisted-nematic liquid-crystal displays. *Appl. Opt.*, 37(5), 937–945. Descargado de <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-37-5-937> doi: 10.1364/AO.37.000937
- De Zela, F. (2012). Two-component gadget for transforming any two nonorthogonal polarization states into one another. *Physics Letters A*, 376(19), 1664-1668. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960112003477> doi: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2012.03.042>
- del Hoyo, J., Sanchez-Brea, L. M., y Soria-Garcia, A. (2021). Open source library for polarimetric calculations "py_pol". En D. G. Smith, F. Wyrowski, y A. Erdmann (Eds.), *Computational optics 2021* (Vol. 11875, p. 1187506). SPIE. Descargado de <https://doi.org/10.1117/12.2597163> doi: 10.1117/12.2597163
- Dimova, E., Rangelov, A., y Kyoseva, E. (2015, Aug). Tunable bandwidth optical rotator. *Photon. Res.*, 3(4), 177–179. Descargado de <https://opg.optica.org/prj/abstract.cfm?URI=prj-3-4-177> doi: 10.1364/PRJ.3.000177
- Dingel, B., Buenaventura, A., Chua, A. R., y Libatique, N. (2019, 09). Thin film-based gires-tournois resonator (gtr) as quasi-optical analogue of the thomas rotation angle effect in special relativity. *Optics Communications*, 454, 124510. doi: 10.1016/j.optcom.2019.124510
- El-Hosseiny, F. (1975, Nov). Methods for determining the optical parameters of elliptic retarders. *J. Opt. Soc. Am.*, 65(11), 1279–1282. Descargado de <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-65-11-1279> doi: 10.1364/JOSA.65.001279
- Emam-Ismail, M. A. (2013). Birefringence dispersion of polyethylene and cellulose triacetate

- sheets used as photonic wave retarders. *Optical Engineering*, 52(5), 058001. Descargado de <https://doi.org/10.1117/1.OE.52.5.058001> doi: 10.1117/1.OE.52.5.058001
- Feynman, R., Leighton, R., Sands, M., y Hafner, E. (1965). *The feynman lectures on physics; vol. i, chapter 33*. AAPT.
- Franssens, G. R. (2015, Feb). Relativistic kinematics formulation of the polarization effects of jones;mueller matrices. *J. Opt. Soc. Am. A*, 32(2), 164–172. Descargado de <http://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-32-2-164> doi: 10.1364/JOSAA.32.000164
- Ghosh, G. (1999). Dispersion-equation coefficients for the refractive index and birefringence of calcite and quartz crystals. *Optics Communications*, 163(1), 95-102. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401899000917> doi: [https://doi.org/10.1016/S0030-4018\(99\)00091-7](https://doi.org/10.1016/S0030-4018(99)00091-7)
- Ghosh, N., y Vitkin, A. I. (2011). Tissue polarimetry: concepts, challenges, applications, and outlook. *Journal of Biomedical Optics*, 16(11), 110801. Descargado de <https://doi.org/10.1117/1.3652896> doi: 10.1117/1.3652896
- Gilman, S. E., Baur, T. G., Gallagher, D. J., y Shankar, N. K. (1990). Properties Of Tunable Nematic Liquid Crystal Retarders. En R. A. Chipman (Ed.), *Polarization considerations for optical systems ii* (Vol. 1166, pp. 461 – 471). SPIE. Descargado de <https://doi.org/10.1117/12.962917> doi: 10.1117/12.962917
- Goldberg, A. Z. (2020, Apr). Quantum theory of polarimetry: From quantum operations to mueller matrices. *Phys. Rev. Res.*, 2, 023038. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.2.023038> doi: 10.1103/PhysRevResearch.2.023038
- Goodman, J. W. (2015). *Statistical optics*. John Wiley & Sons.
- Gottlieb, D., y Arteaga, O. (2021, Jul). Optimal elliptical retarder in rotating compensator imaging polarimetry. *Opt. Lett.*, 46(13), 3139–3142. Descargado de <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-46-13-3139> doi: 10.1364/OL.430266
- Gu, H., Chen, X., Shi, Y., Jiang, H., Zhang, C., Gong, P., y Liu, S. (2018, Sep). Comprehensive characterization of a general composite waveplate by spectroscopic mueller matrix polarimetry. *Opt. Express*, 26(19), 25408–25425. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-26-19-25408> doi: 10.1364/OE.26.025408
- Gu, H., Jiang, H., Chen, X., Zhang, C., y Liu, S. (2022, Apr). Superachromatic polarization modulator for stable and complete polarization measurement over an ultra-wide spectral range. *Opt. Express*, 30(9), 15113–15133. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-30-9-15113> doi: 10.1364/OE.456290
- Han, D., Kim, Y., y Noz, M. (1997, 07). Stokes parameters as a minkowskian four-vector. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 56. doi: 10.1103/PhysRevE.56.6065

- Han, D., Kim, Y., y Noz, M. (1999, 08). Wigner rotations and iwasawa decompositions in polarization optics. *Physical review. E, Statistical physics, plasmas, fluids, and related interdisciplinary topics*, 60, 1036-41. doi: 10.1103/PhysRevE.60.1036
- Han, D., Kim, Y., y Noz, M. E. (1996). Polarization optics and bilinear representation of the lorentz group. *Physics Letters A*, 219(1), 26-32. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960196004240> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(96\)00424-0](https://doi.org/10.1016/0375-9601(96)00424-0)
- He, C., He, H., Chang, J., Chen, B., Ma, H., y Booth, M. (2021, 09). Polarisation optics for biomedical and clinical applications: a review. *Light: Science & Applications*, 10, 194. doi: 10.1038/s41377-021-00639-x
- Hurwitz, H., y Jones, R. C. (1941a). A new calculus for the treatment of optical systems ii. proof of three general equivalence theorems. *JOSA*, 31(7), 493-499.
- Hurwitz, H., y Jones, R. C. (1941b, Jul). A new calculus for the treatment of optical systemsii. proof of three general equivalence theorems. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7), 493-499. Descargado de <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-31-7-493> doi: 10.1364/JOSA.31.000493
- Iizuka, K. (2003). Cellophane as a half-wave plate and its use for converting a laptop computer screen into a three-dimensional display. *Review of Scientific Instruments*, 74(8), 3636-3639. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.1592879> doi: 10.1063/1.1592879
- Iizuka, K. (2005, Nov). Three-dimensional laparoscope based on the manipulation of polarized light by a cellophane half-wave plate. *Appl. Opt.*, 44(33), 7083-7090. Descargado de <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-44-33-7083> doi: 10.1364/AO.44.007083
- Iizuka, K. (2008). 3d microscope. En J.-A. Conchello, C. J. Cogswell, T. Wilson, y T. G. Brown (Eds.), *Three-dimensional and multidimensional microscopy: Image acquisition and processing xv* (Vol. 6861, pp. 227 - 237). SPIE. Descargado de <https://doi.org/10.1117/12.760085> doi: 10.1117/12.760085
- Iizuka, K. (2012). Complementary cellophane optic gate and its use for a 3d ipad without glasses. *Review of Scientific Instruments*, 83(4), 043710. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.4705734> doi: 10.1063/1.4705734
- Jerphagnon, J., y Chemla, D. S. (1976). Optical activity of crystals. *The Journal of Chemical Physics*, 65(4), 1522-1529. Descargado de <https://doi.org/10.1063/1.433207> doi: 10.1063/1.433207
- Jisha, C. P., Nolte, S., y Alberucci, A. (2021). Geometric phase in optics: From wavefront manipulation to waveguiding. *Laser & Photonics Reviews*, 15(10), 2100003. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/lpor.202100003> doi: <https://doi.org/10.1002/lpor.202100003>
- Jones, R. C. (1941a). A new calculus for the treatment of optical systems i. description and

- discussion of the calculus. *Josa*, 31(7), 488–493.
- Jones, R. C. (1941b, Jul). A new calculus for the treatment of optical systemsiii. the sohncke theory of optical activity. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7), 500–503. Descargado de <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-31-7-500> doi: 10.1364/JOSA.31.000500
- Juárez-Ramírez, J. C., Ortiz-Gutiérrez, M., Salgado-Verduzco, M. A., Pérez-Cortés, M., Olivares-Pérez, A., Ordoñez-Padilla, M. J., y Ibarra-Torres, J. C. (2014). Birefringence measurement of the cellophane film. En H. I. Bjelkhagen y V. M. B. Jr. (Eds.), *Practical holography xxviii: Materials and applications* (Vol. 9006, pp. 354 – 359). SPIE. Descargado de <https://doi.org/10.1117/12.2040770> doi: 10.1117/12.2040770
- Kalwe, J., Neugebauer, M., Ominde, C., Leuchs, G., Rurimo, G., y Banzer, P. (2015, feb). Exploiting cellophane birefringence to generate radially and azimuthally polarised vector beams. *European Journal of Physics*, 36(2), 025011. Descargado de <https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/2/025011> doi: 10.1088/0143-0807/36/2/025011
- Kariuki, A., Rurimo, G., y Calvine, O. (2016, 06). Using cellophane sheet to encrypt information on digital holograms. *International Journal of Optics and Applications*, 2016, 13-19. doi: 10.5923/j.optics.20160601.03
- Ke, Q., Li, K., Wu, W., Li, W., Chen, H., Cai, R., y Li, Z. (2023). Determination of birefringence of biological tissues using modified ps-oct based on the quaternion approach. *Frontiers in Physics*, 11. Descargado de <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2023.1175914> doi: 10.3389/fphy.2023.1175914
- Kim, J., y Chang, J. (2006, 01). Achromatic polarization rotator and circular polarizer consisting of two wave plates of the same material. *Journal- Korean Physical Society*, 48, 51-55.
- Kim, Y. (2014, 04). Poincaré sphere and a unified picture of wigner's little groups. *EPJ Web of Conferences*, 78. doi: 10.1051/epjconf/20147801005
- Kim, Y. S. (2000, apr). Lorentz group in polarization optics. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2(2), R1–R5. Descargado de <https://doi.org/10.1088/1464-4266/2/2/201> doi: 10.1088/1464-4266/2/2/201
- Kim, Y. S., y Noz, M. E. (2013). Symmetries shared by the poincaré group and the poincaré sphere. *Symmetry*, 5(3), 233–252. Descargado de <https://www.mdpi.com/2073-8994/5/3/233> doi: 10.3390/sym5030233
- Kinyua, D., Rurimo, G., Karimi, P., Maina, S., y Calvine, O. (2013, 01). Interferometry analysis of cellophane birefringence. *Optics and Photonics Journal*, 03, 337-341. doi: 10.4236/opj.2013.36052
- Kiyama, A., NOBUKAWA, S., y Yamaguchi, M. (2017, 10). Birefringence control of solution-cast film of cellulose triacetate. *Optical Materials*, 72, 491-495. doi: 10.1016/j.optmat.2017.06.048

- Knighton, R. W., y Huang, X.-R. (2002, 01). Linear Birefringence of the Central Human Cornea. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 43(1), 82-86.
- Kurzynowski, P. (2001). Senarmont compensator for elliptically birefringent media. *Optics communications*, 197(4-6), 235–238.
- Li, L., y Escuti, M. J. (2021, Mar). Super achromatic wide-angle quarter-wave plates using multi-twist retarders. *Opt. Express*, 29(5), 7464–7478. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-29-5-7464> doi: 10.1364/OE.418197
- Lin, P.-L., Han, C.-Y., y Chao, Y.-F. (2008). Three-intensity measurement technique and its measurement in elliptical retarder. *Optics communications*, 281(13), 3403–3406.
- MACCONAILL, F. E. F., M. A. (1956). Optical properties of ‘cellophane’. *Nature*, 178, 1072-1073. doi: <https://doi.org/10.1038/1781072b0>
- Maitland, D. J., y Walsh Jr., J. T. (1997). Quantitative measurements of linear birefringence during heating of native collagen. *Lasers in Surgery and Medicine*, 20(3), 310-318. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291096-9101%281997%2920%3A3%3C310%3A%3AAID-LSM10%3E3.0.CO%3B2-H> doi: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9101\(1997\)20:3<310::AID-LSM10>3.0.CO;2-H](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9101(1997)20:3<310::AID-LSM10>3.0.CO;2-H)
- Mandel, L., y Wolf, E. (1995). *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press.
- Maria Chekhova, P. B. (2021). *Polarization of light: In classical, quantum, and nonlinear optics (de gruyter textbook)*. De Gruyter. Descargado de <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=D4EF815D98801EC0234E0BF6E7D39914>
- Messaadi, A., Sánchez-López, M. M., Vargas, A., García-Martínez, P., y Moreno, I. (2018, Jul). Achromatic linear retarder with tunable retardance. *Opt. Lett.*, 43(14), 3277–3280. Descargado de <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-43-14-3277> doi: 10.1364/OL.43.003277
- Miller, S., Jiang, L., y Pau, S. (2022, May). Generalized elliptical retarder design and construction using nematic and cholesteric phase liquid crystal polymers. *Opt. Express*, 30(10), 16734–16747. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-30-10-16734> doi: 10.1364/OE.456874
- Monzón, J. J., y Sánchez-Soto, L. L. (2001, jan). Optical multilayers as a tool for visualizing special relativity. *European Journal of Physics*, 22(1), 39–51. Descargado de <https://doi.org/10.1088/0143-0807/22/1/305> doi: 10.1088/0143-0807/22/1/305
- NOBUKAWA, S., Aoki, Y., Fukui, Y., Kiyama, A., Yoshimura, H., Tachikawa, Y., y Yamaguchi, M. (2014, 12). The effect of flexible chains on the orientation dynamics of small molecules dispersed in polymer films during stretching. *Polymer Journal*, 47, 294-301. doi: 10.1038/pj.2014.126

- NOBUKAWA, S., Shimada, H., Aoki, Y., Miyagawa, A., Doan, V., Yoshimura, H., . . . Yamaguchi, M. (2014, 06). Extraordinary wavelength dispersion of birefringence in cellulose triacetate film with anisotropic nanopores. *Polymer*, 55. doi: 10.1016/j.polymer.2014.05.037
- Ortiz-Gutiérrez, M., Olivares-Pérez, A., Juárez-Pérez, J., y Sánchez-Villicana, V. (2000). 3m pp2500 film as quarter wave retarder for light at $\lambda = 632.8$ nm. *Optical Materials*, 14(1), 41-48. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925346799001020> doi: [https://doi.org/10.1016/S0925-3467\(99\)00102-0](https://doi.org/10.1016/S0925-3467(99)00102-0)
- Ortiz-Gutiérrez, M., Olivares-Pérez, A., y Sánchez-Villicaña, V. (2001). Cellophane film as half wave retarder of wide spectrum. *Optical Materials*, 17(3), 395 - 400. Descargado de <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925346700001026> doi: [https://doi.org/10.1016/S0925-3467\(00\)00102-6](https://doi.org/10.1016/S0925-3467(00)00102-6)
- Ortiz-Gutierrez, M., V. M., Martinez-Basurto, A., Olivares-Perez, A., Juarez-Perez, J., Perez-Cortes, M., y Ibarra, J. (2004, 06). Refraction indexes of the polyester film 3m pp2500. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 5363. doi: 10.1117/12.528078
- Pabón, J., Hernandez, C., y Torres, R. (2023, Oct). Tunable birefringence and elliptical polarization eigenmodes in a biplate of two quarter-wave plates. *J. Opt. Soc. Am. A*, 40(10), 1959–1968. Descargado de <https://opg.optica.org/josaa/abstract.cfm?URI=josaa-40-10-1959> doi: 10.1364/JOSAA.499731
- Pabón, J., Salazar, K., y Torres, R. (2021, May). Characterization method of the effective phase retardation in linear birefringent thin sheets. *Appl. Opt.*, 60(14), 4251–4258. Descargado de <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-60-14-4251> doi: 10.1364/AO.422820
- Pancharatnam, S. (1955). Achromatic combinations of birefringent plates: Part ii. an achromatic quarter-wave plate. En *Proceedings of the indian academy of sciences-section a* (Vol. 41, pp. 137–144).
- Passos, M. H. M., Junior, A. d. O., de Oliveira, M. C., Khoury, A. Z., y Huguenin, J. A. O. (2020, Dec). Spin-orbit implementation of the solovay-kitaev decomposition of single-qubit channels. *Phys. Rev. A*, 102, 062601. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.102.062601> doi: 10.1103/PhysRevA.102.062601
- PELLAT FINET, P. (1983). *De la birefringence elliptique* (Tesis Doctoral no publicada).
- Pellat-Finet, P. (1984). Représentation des états et des opérateurs de polarisation de la lumière par des quaternions. *Optica Acta: International Journal of Optics*, 31(4), 415-434. Descargado de <https://doi.org/10.1080/713821517> doi: 10.1080/713821517
- Pellat-Finet, P. (1991, 01). Geometrical approach to polarization optics: Ii. quaternionic representation of polarized light. *Optik*, 87, 68-76.
- Pellat-Finet, P. (2012a). Iterative experimental method for generating eigenstates and principal

- states of polarization. *Applied Optics*, 51(19), 4403–4408.
- Pellat-Finet, P. (2012b, 07). Iterative experimental method for generating eigenstates and principal states of polarization. *Applied optics*, 51, 4403-8. doi: 10.1364/AO.51.004403
- Pellat-Finet, P., y Bausset, M. (1992). What is common to both polarization optics and relativistic kinematics? *Optik (Stuttgart)*, 90(3), 101–106.
- Pellat-Finet, P., y Lebreton, G. (1982). Elliptical birefringence: New interpretation and experiments on bso crystals. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 47(2), 291-293. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022309382900795> (Optical Properties of Glass and Optical Materials) doi: [https://doi.org/10.1016/0022-3093\(82\)90079-5](https://doi.org/10.1016/0022-3093(82)90079-5)
- Pochi Yeh, C. G. (1999). *Optics of liquid crystal displays* (1.^a ed.). Wiley-Interscience. Descargado de <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=4365be99fed142d8a2b76c39540dddc>
- Poincaré, H. (1892). Théorie mathématique de la lumière, vol. 2, chapter xii. *XII. Gauthier-Villars, Paris*.
- Postolache, M., Dimitriu, D.-G., Nechifor, C., Bota, S., Closca, V., y Dorohoi, D. (2022, 03). Birefringence of thin uniaxial polymer films estimated using the light polarization ellipse. *Polymers*, 14. doi: 10.3390/polym14051063
- Pérez, R. O. J. J. G. (2022a). *Polarized light and the mueller matrix approach* (Second ed.). Descargado de <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=490634BACA9F945A2D8A79474407E362>
- Pérez, R. O. J. J. G. (2022b). *Polarized light and the mueller matrix approach* (Second ed.). Descargado de <http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=490634BACA9F945A2D8A79474407E362>
- Rangelov, A. A., y Kyoseva, E. (2015a). Broadband composite polarization rotator. *Optics Communications*, 338, 574-577. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401814010645> doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2014.11.037>
- Rangelov, A. A., y Kyoseva, E. (2015b). Broadband composite polarization rotator. *Optics Communications*, 338, 574-577. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401814010645> doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2014.11.037>
- Rao, K. S., Rao, K. S., y Koneru, S. R. (1988a). *The rotation and lorentz groups and their representations for physicists*. John Wiley & Sons.
- Rao, K. S., Rao, K. S., y Koneru, S. R. (1988b). *The rotation and lorentz groups and their representations for physicists*. John Wiley & Sons.
- Reddy, S. G., Prabhakar, S., Aadhi, A., Kumar, A., Shah, M., Singh, R. P., y Simon, R. (2014, Mar). Measuring the mueller matrix of an arbitrary optical element with a universal su(2) polarization gadget. *J. Opt. Soc. Am. A*, 31(3), 610–615. Descargado de <http://opg.optica.org/>

- [josaa/abstract.cfm?URI=josaa-31-3-610](https://josaa.org/abstract.cfm?URI=josaa-31-3-610) doi: 10.1364/JOSAA.31.000610
- Reddy, S. G., Prabhakar, S., Chithrabhanu, P., Singh, R. P., y Simon, R. (2016, Apr). Polarization state transformation using two quarter wave plates: application to mueller polarimetry. *Appl. Opt.*, 55(12), B14–B19. Descargado de <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-55-12-B14> doi: 10.1364/AO.55.000B14
- Rumi, M., y Bunning, T. (2014, 02). Polymers in photonics: Controlling information by manipulating light. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 52. doi: 10.1002/polb.23432
- Saha, A., Bhattacharya, K., y Chakraborty, A. K. (2012, Apr). Achromatic quarter-wave plate using crystalline quartz. *Appl. Opt.*, 51(12), 1976–1980. Descargado de <http://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-51-12-1976> doi: 10.1364/AO.51.001976
- Saito, S. (2023a). Su(2) symmetry of coherent photons and application to poincaré rotator. *Frontiers in Physics*, 11. Descargado de <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2023.1225419> doi: 10.3389/fphy.2023.1225419
- Saito, S. (2023b). Topological polarisation states. *Frontiers in Physics*, 11. Descargado de <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2023.1225462> doi: 10.3389/fphy.2023.1225462
- Salazar-Ariza, K., y Torres, R. (2018, Jan). Trajectories on the poincaré sphere of polarization states of a beam passing through a rotating linear retarder. *J. Opt. Soc. Am. A*, 35(1), 65–72. Descargado de <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-35-1-65> doi: 10.1364/JOSAA.35.000065
- Samoylov, A., Samoylov, V., Vidmachenko, A., y Perekhod, A. (2004). Achromatic and superachromatic zero-order waveplates. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 88(1), 319-325. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407304001499> (Photopolarimetry in remote sensing) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2003.12.034>
- Sang Park, M., Jung, S., Jeong Heo, S., y Geol Lee, S. (2017). Investigation on the stress behavior of cellulose acetate and the development of highly moisture-resistant optical films for display devices. *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 55(19), 1470-1479. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/polb.24400> doi: <https://doi.org/10.1002/polb.24400>
- Sarma, A. (1977). New experimental methods for determining the optical parameters of elliptical retarders. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 10(15), 2019.
- Schilling, U., von Zanthier, J., y Agarwal, G. S. (2010, Jan). Measuring arbitrary-order coherences: Tomography of single-mode multiphoton polarization-entangled states. *Phys. Rev. A*, 81, 013826. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.013826> doi: 10.1103/PhysRevA.81.013826

- Shen, Y., Wang, Z., Fu, X., Naidoo, D., y Forbes, A. (2020, 09). Su(2) poincaré sphere: A generalized representation for multi-dimensional structured light. *Physical Review A*, *102*, 031501. doi: 10.1103/PhysRevA.102.031501
- Shenoy, S., y Arakali, V. G. (2002, 01). Polarization elements: A group-theoretical study. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision*, *18*, 3130-4. doi: 10.1364/JOSAA.18.003130
- Shi, Z., Zhu, A., Li, Z., Huang, Y.-W., Chen, W. T., Qiu, C.-W., y Capasso, F. (2020, 06). Continuous angle-tunable birefringence with freeform metasurfaces for arbitrary polarization conversion. *Science Advances*, *6*, eaba3367. doi: 10.1126/sciadv.aba3367
- Simon, B. N., Chandrashekar, C. M., y Simon, S. (2012, Feb). Hamilton's turns as a visual tool kit for designing single-qubit unitary gates. *Phys. Rev. A*, *85*, 022323. Descargado de <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.022323> doi: 10.1103/PhysRevA.85.022323
- Simon, R., y Mukunda, N. (1989). Universal su(2) gadget for polarization optics. *Physics Letters A*, *138*(9), 474-480. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960189907482> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(89\)90748-2](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90748-2)
- Simon, R., y Mukunda, N. (1990). Minimal three-component su(2) gadget for polarization optics. *Physics Letters A*, *143*(4), 165-169. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960190907324> doi: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(90\)90732-4](https://doi.org/10.1016/0375-9601(90)90732-4)
- Smartt, R. N., y Steel, W. H. (1959, Jul). Birefringence of quartz and calcite. *J. Opt. Soc. Am.*, *49*(7), 710-712. Descargado de <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-49-7-710> doi: 10.1364/JOSA.49.000710
- Tagaya, A. (2021). Birefringence of polymer. En S. Kobayashi y K. Mullen (Eds.), *Encyclopedia of polymeric nanomaterials* (pp. 1-6). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Descargado de https://doi.org/10.1007/978-3-642-36199-9_116-1 doi: 10.1007/978-3-642-36199-9_116-1
- Tagaya, A., y Koike, Y. (2012, 01). Compensation and control of the birefringence of polymers for photonics. *Polymer Journal - POLYM J*, *44*, 306-314. doi: 10.1038/pj.2011.141
- Takenaka, H. (1973, feb). A unified formalism for polarization optics by using group theory i (theory). *Japanese Journal of Applied Physics*, *12*(2), 226-231. Descargado de <https://doi.org/10.1143/jjap.12.226> doi: 10.1143/jjap.12.226
- Tentori, D., Garcia-Weidner, A., y Kuzin, E. (2016, 07). On the birefringence evaluation of single-mode fibers. *Revista Mexicana de Fisica*, *62*, 381-392.
- Tsai, C., Liao, K., Chou, C., Han, C., y Chao, Y. (2005). Tn-lc cells as an elliptical phase retarder by heterodyne interferometric ellipsometry. En *Conference on lasers and electro-optics* (p. JThE7).

- Tsai, C. C., Liao, K. Y., Chou, C., Han, C. Y., y Chao, Y. F. (2005). Tn-lc cells as an elliptical phase retarder by heterodyne interferometric ellipsometry. En *Conference on lasers and electro-optics/quantum electronics and laser science and photonic applications systems technologies* (p. JThE7). Optica Publishing Group. Descargado de <http://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=CLEO-2005-JThE7>
- Tu, X., Jiang, L., Ibn-Elhaj, M., y Pau, S. (2017, May). Design, fabrication and testing of achromatic elliptical polarizer. *Opt. Express*, 25(9), 10355–10367. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-25-9-10355> doi: 10.1364/OE.25.010355
- Tudor, T. (2008, sep). Interaction of light with the polarization devices: a vectorial pauli algebraic approach. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(41), 415303. Descargado de <https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/41/415303> doi: 10.1088/1751-8113/41/41/415303
- Tudor, T. (2010a). Vectorial pauli algebraic approach in polarization optics. i. device and state operators. *Optik*, 121(13), 1226-1235. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402609000424> doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2009.01.004>
- Tudor, T. (2010b). Vectorial pauli algebraic approach in polarization optics. ii. interaction of light with the canonical polarization devices. *Optik*, 121(23), 2149-2158. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402609003003> doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2009.08.001>
- Tudor, T. (2012, Apr). Vectorial pure operatorial pauli algebraic approach in polarization optics: a theoretical survey and some applications. *Appl. Opt.*, 51(10), C184–C192. Descargado de <http://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-51-10-C184> doi: 10.1364/AO.51.00C184
- Tudor, T. (2015, Mar). On a quasi-relativistic formula in polarization theory. *Opt. Lett.*, 40(5), 693–696. Descargado de <http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-40-5-693> doi: 10.1364/OL.40.000693
- Uchiyama, A., Ono, Y., Ikeda, Y., Shuto, H., y Yahata, K. (2012, 05). Copolycarbonate optical films developed using birefringence dispersion control. *Polymer Journal*, 44, 995-1008. doi: 10.1038/pj.2012.52
- Vala, D., Koleják, P., Postava, K., Kildemo, M., Provazníková, P., y Pivstora, J. (2021, Mar). Effects of optical activity to mueller matrix ellipsometry of composed waveplates. *Opt. Express*, 29(7), 10434–10450. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-29-7-10434> doi: 10.1364/OE.418186
- Velasquez, P., del Mar Sánchez-López, M., Moreno, I., Puerto, D., y Mateos, F. (2005). Interference birefringent filters fabricated with low cost commercial polymers. *American Journal of Physics*, 73(4), 357-361. Descargado de <https://doi.org/10.1119/1.1834920> doi: 10.1119/1.1834920

- Vilas, J. L., y Herrera-Fernandez, J. M. (2022, Sep). Customized retarders based on waveplates. *Appl. Opt.*, 61(26), 7726–7730. Descargado de <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-61-26-7726> doi: 10.1364/AO.468065
- Vilas, J. L., y Lazarova-Lazarova, A. (2017, feb). A simple analytical method to obtain achromatic waveplate retarders. *Journal of Optics*, 19(4), 045701. Descargado de <https://doi.org/10.1088/2040-8986/aa5dfe> doi: 10.1088/2040-8986/aa5dfe
- Vilas, J. L., Sanchez-Brea, L. M., y Bernabeu, E. (2013, Mar). Optimal achromatic wave retarders using two birefringent wave plates. *Appl. Opt.*, 52(9), 1892–1896. Descargado de <http://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-52-9-1892> doi: 10.1364/AO.52.001892
- Wai, P. K. A., y Menyuk, C. R. (1994, Oct). Polarization decorrelation in optical fibers with randomly varying birefringence. *Opt. Lett.*, 19(19), 1517–1519. Descargado de <http://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-19-19-1517> doi: 10.1364/OL.19.001517
- Wang, N., y He, S. (2022). A simple graphic method for analyzing the polarization state of an optical system with a fixed polarizer and a rotating elliptical retarder. *Progress In Electromagnetics Research*, 174, 107–114.
- Whitney, C. (1971, Sep). Pauli-algebraic operators in polarization optics*. *J. Opt. Soc. Am.*, 61(9), 1207–1213. Descargado de <https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=josa-61-9-1207> doi: 10.1364/JOSA.61.001207
- Wiener, N. (1928). Coherency matrices and quantum. *Journal of Mathematics and Physics*, 7(1-4), 109-125. Descargado de <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/sapm192871109> doi: <https://doi.org/10.1002/sapm192871109>
- Wolf, E. (1959). Coherence properties of partially polarized electromagnetic radiation. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 13, 1165–1181. doi: <https://doi.org/10.1007/BF02725127>
- Woźniak, W. A., y Banach, M. (2008). Measurements of elliptically birefringent media parameters in optical vortex birefringence compensator. *Applied optics*, 47(18), 3390–3396.
- Yu, C.-J. (2016). Fully variable elliptical phase retarder composed of two linear phase retarders. *Review of Scientific Instruments*, 87(3), 035106. Descargado de <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4943223> doi: 10.1063/1.4943223
- Yu, C.-J., y Chou, C. (2011, 02). Characterization of a generalized elliptical phase retarder by using equivalent theorem of a linear phase retarder and a polarization rotator. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 7934. doi: 10.1117/12.875047
- Yu, C.-J., Lin, C.-E., Li, Y.-C., Chou, L.-D., Wu, J.-S., Lee, C.-C., y Chou, C. (2009, Oct). Dual-frequency heterodyne ellipsometer for characterizing generalized elliptically birefringent media. *Opt. Express*, 17(21), 19213–19224. Descargado de <http://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-17-21-19213> doi: 10.1364/OE.17.019213
- Zhang, D.-Q., Shu, F.-Z., Jiao, Z.-W., y Wu, H.-W. (2021, Mar). Tunable wave plates based on

- phase-change metasurfaces. *Opt. Express*, 29(5), 7494–7503. Descargado de <https://opg.optica.org/oe/abstract.cfm?URI=oe-29-5-7494> doi: 10.1364/OE.418360
- Zhang, P., Tan, Y., Liu, W., y Chen, W. (2013). Methods for optical phase retardation measurement: a review. *Science China Technological Sciences*, 56, 1155–1164.
- Zhang, X. (2013, Oct). Optimal achromatic wave retarders using two birefringent wave plates: comment. *Appl. Opt.*, 52(29), 7078–7080. Descargado de <http://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?URI=ao-52-29-7078> doi: 10.1364/AO.52.007078

Appendices

Apéndice A

A.1. BC en formalismos de álgebras geométricas

La acción de incidir un estado polarizado $\mathbf{S}(2\alpha, 2\chi)$ en un birrefringente circular (BC) o con actividad óptica describe en formalismo de álgebras geométricas de la forma:

$$\mathbf{S}' = e^{e_1 \frac{\delta}{2}} e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi) e^{-e_3 \frac{\varphi}{2}} e^{-e_1 \frac{\delta}{2}}, \quad (\text{A.1})$$

donde aplicando el primer operador correspondiente a la actividad óptica de la forma

$$e^{e_3 \frac{\varphi}{2}} \mathbf{S}(2\alpha, 2\chi) e^{-e_3 \frac{\varphi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{e}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 S_1 \\ \mathbf{e}_2 S_2 \\ \mathbf{e}_3 S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\mathbf{e}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

multiplicando los tres cuaterniones obtenemos

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin 2\chi + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin 2\chi + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \\ \mathbf{e}_1 \left[\cos 2\chi \left(\cos 2\alpha (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin 2\alpha \right) \right] \\ \mathbf{e}_2 \left[\cos 2\chi \left(\sin 2\alpha (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos 2\alpha \right) \right] \\ \mathbf{e}_3 \left[-\cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2\chi + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin 2\chi + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right] \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

aplicando las identidades de $\cos \varphi = (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})$ y $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ y las propiedades de $\sin(A + B)$ y $\cos(A + B)$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{e}_1 [\cos 2\chi \cos(2\alpha + \varphi)] \\ \mathbf{e}_2 [\cos 2\chi \sin(2\alpha + \varphi)] \\ \mathbf{e}_3 [\sin 2\chi] \end{pmatrix} = \mathbf{S}(2\alpha + \varphi, 2\chi). \quad (\text{A.4})$$

La ecuación anterior representa que incidirle un estado polarizado en un medio con actividad óptica transforma la rotación del estado incidente, manteniendo su elipticidad.